Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Graduações em Álgebras Matriciais

por

Alan de Araújo Guimarães †

sob orientação do

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Graduações em Álgebras Matriciais

por

Alan de Araújo Guimarães

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:

Prof. Dr. Thiago Castilho de Mello - UNIFESP

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior - UFCG

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Dezembro/2014

Resumo

O tema central da presente dissertação é o estudo das graduações de um grupo G nas álgebras $UT_n(F)$ e $UT(d_1, \ldots, d_m)$. Inicialmente, no Capítulo 2, supondo o grupo G abeliano e finito e o corpo F algebricamente fechado e de característica zero, provamos que qualquer graduação em $UT_n(F)$ é elementar (a menos de automorfismo G-graduado). Ainda no Capítulo 2, sem fazer qualquer suposição sobre o grupo G e o corpo F, chegamos à mesma conclusão. Para tanto, foi necessário utilizar técnicas mais sutis na demonstração. No Capítulo 3, novamente supondo o grupo G abeliano e finito e o corpo F algebricamente fechado e de característica zero, classificamos as G-graduações da F-álgebra $UT(d_1, \ldots, d_m)$. Veremos que, neste caso, existe uma decomposição $d_1 = tp_1, \ldots, d_m = tp_m$ tal que $UT(d_1, \ldots, d_m)$ é isomorfa, como álgebra G-graduada, ao produto tensorial $M_t(F) \otimes UT(p_1, \ldots, p_m)$, onde $M_t(F)$ tem uma G-graduação fina e $UT(p_1, \ldots, p_m)$ tem uma G-graduação elementar.

Palavras-chave: Álgebras Associativas, Álgebra Graduadas, Álgebras Matriciais.

Abstract

The central theme of this dissertation is the study the of the gradings of a group G in the algebras $UT_n(F)$ and $UT(d_1, \ldots, d_m)$. Initially, in Chapter 2, assuming G a finite abelian group and F an algebraically closed field and of characteristic zero, we prove that any grading in $UT_n(F)$ is elementary (up to graded isomorphism). Still in Chapter 2, without making any assumption about the group G and the field F, we obtain the same conclusion. To prove this was necessary to use more subtle techniques in demonstration. In Chapter 3, again assuming G a finite abelian group and F an algebraically closed field of characteristic zero, we classify the gradings of the algebra $UT(d_1, \ldots, d_m)$. We will see that there is a decomposition $d_1 = tp_1, \ldots, d_m = tp_m$ such that $UT(d_1, ..., d_m)$ is isomorphic, as graded algebra, to the tensor product $M_t(F) \otimes UT(p_1, \ldots, p_m)$, where $M_t(F)$ has a fine grading and $UT(p_1, \ldots, p_m)$ has a elementary grading.

Keywords: Associative Algebras, Graded Algebras, Matrix Algebras.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pelo dom da vida e por tudo que tem me concedido ao longo de minha existência.

Aos meus pais, Valmor Guimarães e Maria Araújo, pela minha criação e por todos os bons exemplos que tive desde criança. A todos os meus irmãos pela amizade e por sempre estarem ao meu lado.

Ao professor Diogo Diniz que, desde a época de minha graduação, é meu orientador e sempre esteve disposto a contribuir com minha formação acadêmica. Sou grato pela paciência ao longo de minha orientação e por ter contribuído sobremaneira com a elaboração da presente dissertação.

Ao professor Manassés, meu professor de Matemática no Estadual da Palmeira que, sendo um excelente professor, me influenciou positivamente na escolha de seguir carreira em Matemática. Devido à sua metodologia de ensino, aprendi a gostar de Matemática.

A todos os professores da UAMat da UFCG que, durante a graduação e mestrado, contribuíram fortemente com minha formação matemática. Em especial, agradeço ao professor Daniel Cordeiro pelo período em que fui integrante do PET-Matemática UFCG (durante a minha graduação) e ao professor Brandão pelos cursos de mestrado de Teoria de Galois e Representação de Grupos que ampliaram meu conhecimento algébrico.

Aos professores Thiago Castilho e Antônio Brandão pela composição da banca examinadora e pela colaboração com o aperfeiçoamento do nosso trabalho.

A todos os colegas do mestrado e do doutorado em Matemática. Em especial, aos amigos algebristas: Levi, Claudemir e Antônio Marcos (Pajé).

A todos os funcionários da UAMat e a todos os amigos da graduação e do PET-Matemática da UFCG.

E, por fim, a CAPES pelo financiamento do trabalho.

Dedicatória

Aos meus pais Valmor Guimarães
e Maria Araújo.

Conteúdo

Introdução 6

1 Preliminares **9**

1.1 Álgebras sobre um corpo F 9

1.2 Graduações de Grupos em Álgebras Associativas 15

1.3 R-Módulos e o Radical de Jacobson 18

1.4 Representações Lineares de Grupos 25

1.5 Representações e FG-módulos 28

1.6 Caracteres 32

1.7 Anéis Semissimples 37

1.8 A Dualidade entre G-graduações Abelianas Finitas e G-ações 41

2 Classificação das Graduações de Grupo na Álgebra $UT_n(F)$ **44**

2.1 Lemas Iniciais 44

2.2 Graduações Abelianas e Finitas em $UT_n(F)$ 45

2.3 Graduações de um Grupo Qualquer em $UT_n(F)$ 50

3 Classificação das Graduações Abelianas e Finitas em $UT(d_1, \ldots, d_m)$ **58**

3.1 A Álgebra das Matrizes Triangulares Superiores em Blocos 58

3.2 Sobre as Graduações de Grupo na Álgebra $M_n(F)$ 62

3.3 Graduações Abelianas e Finitas em $UT(d_1, \ldots, d_m)$ 63

Bibliografia **72**

Introdução

Graduações surgem de modo natural em muitas classes de anéis e álgebras. O estudo das graduações de álgebras e anéis é também importante por suas aplicações, por exemplo, o estudo das $\mathbb{Z}$-graduações em álgebras de Lie tem aplicações no estudo de representações de grupos lineares e em geometria diferencial ([O2]). Um dos principais problemas nesta área é a descrição de todas as graduações de álgebras importantes.

Sendo $\mathcal{A}$ um álgebra associativa e G um grupo, uma decomposição $\mathcal{A} = \bigoplus_{g \in G} A_g$ de $\mathcal{A}$ em soma direta de subespaços é chamada de **G-graduação** quando $A_g A_h \subseteq A_{gh}$, para quaisquer $g, h \in G$. Neste caso, dizemos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra G-graduada.

A descrição das graduações nas álgebras de matrizes tem um papel importante na teoria das álgebras com identidades polinomiais. As graduações na álgebra $M_n(F)$ das matrizes quadradas de ordem n com entradas no corpo F foram estudadas em diversos artigos. Em [DI] foram descritas as graduações em $M_n(F)$ por um grupo G em que as matrizes elementares E_{ij} são homogêneas (as chamadas graduações elementares) e também foram descritas as graduações sob a hipótese de o grupo G ser cíclico. As graduações de $M_n(F)$ no caso em que G é um grupo abeliano foram classificadas em [BSZ], supondo o corpo F algebricamente fechado. Finalmente em [AM1] as graduações em $M_n(F)$ foram descritas; todas podem ser obtidas a partir do produto tensorial de duas álgebras de matrizes, sendo uma com uma graduação elementar e a outra com uma graduação fina (em que cada componente tem dimensão ≤ 1).

Uma extensão natural da classe das álgebras de matrizes é a classe das álgebras de matrizes triangulares em blocos. Os exemplos mais simples deste tipo de álgebras são $M_n(F)$ e sua subálgebra $UT_n(F)$ das matrizes triangulares superiores. Esta classe de álgebras desempenha um papel importante no estudo dos invariantes numéricos de álgebras com identidades polinomiais. As graduações em $UT_n(F)$ por um grupo G abeliano e finito no caso em que o corpo F é algebricamente fechado e de característica zero foram descritas em 2003 por Valenti e Zaicev em [VZ1]. Neste artigo, a estreita relação entre as G-graduações de uma álgebra $\mathcal{A}$ e as $\widehat{G}$-ações em $\mathcal{A}$ (onde $\widehat{G}$ denota o dual do grupo G) é a principal ferramenta para mostrar que todas as G-graduações em $UT_n(F)$ são elementares (a menos de automorfismo G-graduado).

Utilizando uma técnica diferente, os resultados para a álgebra $UT_n(F)$ foram generalizados em 2007 também por Valenti e Zaicev [VZ2]. Sendo G e F um grupo e um corpo quaisquer, respectivamente, toda G-graduação em $UT_n(F)$ é elementar (novamente, a menos de automorfismo G-graduado). Ainda neste artigo, foi formulada a seguinte conjectura:

Conjectura: *Seja $UT(d_1, \ldots, d_m) = \bigoplus_{g\in G} R_g$ uma G-graduação na álgebra das matrizes triangulares em blocos. Se existirem inteiros $t, p_1, \ldots, p_m$ tais que $d_1 = tp_1, \ldots, d_m = tp_m$, a álgebra $UT(d_1, \ldots, d_m)$ sempre é isomorfa como álgebra G-graduada ao produto tensorial $M_t \otimes UT(p_1, \ldots, p_m)$, onde $UT(p_1, \ldots, p_m)$ tem uma graduação elementar?*
Em caso afirmativo, se $d_1, \ldots, d_m$ são primos entre si, então as possíveis graduações em $UT(d_1, \ldots, d_m)$ são elementares.

No ano de 2011, em [VZ3], um caso particular da conjectura acima foi resolvido. Mais precisamente, as graduações na álgebra $UT(d_1, ..., d_m)$ das matrizes triangulares superiores em blocos foram descritas sob as hipóteses de G ser abeliano e finito e F ser algebricamente fechado e de característica zero. O problema de classificar as G-graduações na álgebra $UT(d_1, ..., d_m)$ sem impor condições sobre o grupo G e o corpo F permanece em aberto.

Na presente dissertação objetivamos realizar um estudo detalhado dos artigos [VZ1], [VZ2] e [VZ3]. Para este fim, nosso trabalho foi estruturado em três capítulos.

No Capítulo 1 apresentamos os conceitos fundamentais para o entendimento da dissertação. Visando tornar o texto conciso, alguns resultados clássicos foram enunciados, mas não demonstrados. Começamos com os conceitos de álgebra e álgebra G-graduada. Em seguida, fizemos um breve estudo sobre R-módulo e o radical de Jacobson de um anel associativo e unitário. Também fizemos uma exposição acerca da Teoria de Representações de Grupos e anéis semissimples. Finalizamos demonstrando a dualidade que existe entre G-graduações abelianas e finitas em uma álgebra $\mathcal{A}$ e G-ações sobre $\mathcal{A}$.

O Capítulo 2 é dedicado ao estudo dos artigos [VZ1] e [VZ2]. Inicialmente, com base em [VZ1], apresentamos a classificação das graduações abelianas e finitas em $UT_n(F)$, supondo-se o corpo F algebricamente fechado e de característica zero. Em seguida, utilizando como referência [VZ2], abordamos o mesmo problema, só que sem fazer imposições sobre o grupo G e o corpo F. Como será percebido, em ambas as situações, veremos que todas as graduações em $UT_n(F)$ são elementares (a menos de automorfismo G-graduado).

Por fim, no Capítulo 3, abordaremos o problema de classificar as G-graduações abelianas e finitas na álgebra $UT(d_1, \ldots, d_m)$, sob a hipótese de o corpo F ser algebricamente fechado e de característica zero. Nesta etapa, a referência principal foi o artigo [VZ3]. Neste caso, veremos que existe uma decomposição $d_1 = tp_1, \ldots, d_m = tp_m$ tal que $UT(d_1, \ldots, d_m)$ é isomorfa (como álgebra G-graduada) ao produto tensorial $M_t(F) \otimes UT(p_1, \ldots, p_m)$, onde $M_t(F)$ tem uma graduação fina e $UT(p_1, \ldots, p_m)$ tem uma graduação elementar. Para realizar o estudo desejado, tivemos que nos remeter ao estudo da classificação das graduações de grupo em $M_n(F)$. Nos limitamos a enunciar os resultados acerca das graduações em $M_n(F)$ e aplicá-los na classificação das graduações abelianas e finitas da álgebra $UT(d_1, \ldots, d_m)$. Neste capítulo também fizemos uso de alguns teoremas clássicos, a exemplo do Teorema de Wedderburn-Malcev, para o qual não apresentamos demonstração.

Capítulo 1

Preliminares

O presente capítulo tem por objetivo estabelecer a linguagem que será adotada ao longo da dissertação. Nos propomos então a apresentar definições, conceitos, notações e resultados essenciais que serão utilizadas frequentemente ao longo do texto. Até o término do presente capítulo, o símbolo F designará um corpo qualquer, a menos de menção em contrário. Ao longo do capítulo, assumiremos que o leitor tenha familiariedade com conceitos básicos de Álgebra Linear.

1.1 Álgebras sobre um corpo F

O ponto de partida de nosso estudo é o conceito de álgebras sobre um corpo F (ou F-álgebras). Nesse sentido, passemos à seguinte definição.

Definição 1.1.1 *Seja $\mathcal{A}$ um espaço vetorial sobre F. Definimos um par $(\mathcal{A}, *)$ como sendo uma F-álgebra (ou álgebra sobre F) se "$*$" é uma operação bilinear em $\mathcal{A}$, isto é, $* : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaz:*

i) $a * (b + c) = a * b + a * c$;

ii) $(a + b) * c = a * c + b * c$;

iii) $(\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b)$,

para quaisquer $a, b, c \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in F$.

Na definição acima, "$*$" é dita *multiplicação* da álgebra $\mathcal{A}$ e, simplesmente, denotaremos o produto $a * b$ por justaposição ab, para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}$. Mais ainda, escreveremos simplesmente $\mathcal{A}$ em lugar de $(\mathcal{A}, *)$ para denotar a estrutura de álgebra, deixando implícita a multiplicação. Diremos que "$\mathcal{A}$ é uma álgebra" ao invés de "F-álgebra", deixando implícito o corpo F. Definimos o produto $a_1a_2a_3$ como sendo $(a_1a_2)a_3$ e, indutivamente, o produto $a_1a_2 \dots a_{n-1}a_n$ como sendo $(a_1a_2 \dots a_{n-1})a_n$, para $a_i \in \mathcal{A}$. Diremos que um subconjunto β de $\mathcal{A}$ é uma *base* da álgebra se é uma base do espaço vetorial $\mathcal{A}$, e definimos a *dimensão* de $\mathcal{A}$ como sendo a dimensão de $\mathcal{A}$ vista como F-espaço vetorial.

Conforme algumas propriedades que a multiplicação da álgebra $\mathcal{A}$ possua, fazemos classificações, como segue na definição seguinte.

Definição 1.1.2 *Seja $\mathcal{A}$ uma F-álgebra. Dizemos que $\mathcal{A}$ é:*

i) **Associativa** *se $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer $a, b, c \in \mathcal{A}$;*

ii) **Comutativa** *se $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in A$;*

iii) **Unitária** *(ou com unidade) se existe um elemento em $\mathcal{A}$, denotado por $1_{\mathcal{A}}$, tal que $a1_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}a = a$, para todo $a \in \mathcal{A}$. O elemento $1_{\mathcal{A}}$ é chamado de unidade da álgebra $\mathcal{A}$.*

Quando a álgebra $\mathcal{A}$ for unitária, é fácil ver que a unidade $1_{\mathcal{A}}$ é única. Por simplicidade, usaremos o símbolo 1 para representar a unidade $1_{\mathcal{A}}$. Neste caso, identificamos naturalmente o elemento $\lambda 1$ de $\mathcal{A}$ com λ, para todo $\lambda \in F$. Nesse sentido, dizemos que A contém o corpo F, identificando $\{\lambda 1 : \lambda \in F\}$ com F. Particularmente, se $\mathcal{A}$ for associativa, tem-se que $\mathcal{A}$ é um anel, com respeito à adição e à multiplicação da álgebra $\mathcal{A}$.

Definição 1.1.3 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa e unitária.*

(i) Um elemento não nulo $a \in \mathcal{A}$ diz-se ***inversível*** *se existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $ab = ba = 1$. Neste caso, chamamos o elemento b de inverso multiplicativo (ou simplesmente inverso) de a, para o qual adotamos a notação a^{-1}.*

(ii) Definimos o ***conjunto de inversíveis de*** *$\mathcal{A}$ como sendo o conjunto $U(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} : \exists a^{-1} \in \mathcal{A}\}$.*

(iii) Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma ***álgebra com divisão*** *se $U(\mathcal{A}) = \mathcal{A} - \{0\}$.*

Definição 1.1.4 *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra, V e W subespaços vetoriais de $\mathcal{A}$ e $X \subset \mathcal{A}$. Definimos*

*(i) O **produto** VW como sendo o subespaço vetorial de $\mathcal{A}$ gerado pelo conjunto $\{xy : x \in V, y \in W\}$.*

*(ii) O **centralizador** de X em $\mathcal{A}$ como sendo o conjunto $C_{\mathcal{A}}(X) = \{a \in \mathcal{A} : ax = xa, \forall x \in X\}$.*

*(iii) O **centro** da álgebra $\mathcal{A}$ como sendo o conjunto $Z(\mathcal{A}) = C_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} : xa = ax, \forall a \in \mathcal{A}\}$.*

Quando $\mathcal{A}$ é uma álgebra unitária e $Z(\mathcal{A}) = \{\lambda 1 : \lambda \in F\}$, dizemos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra **central**.

Para ilustrar as definições dadas acima, passemos a alguns exemplos de álgebras que serão úteis ao longo do texto.

Exemplo 1.1.5 *Considere o espaço vetorial $M_n(F)$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em F, com $n \in \mathbb{N}$ fixo. Munido do produto usual de matrizes, $M_n(F)$ é uma F-álgebra associativa com unidade e de dimensão n^2 . Chamamos de **matrizes unitárias** as matrizes E_{ij}, para $1 \leq i, j \leq n$, onde E_{ij} é a matriz cuja única entrada não nula é 1 na i-ésima linha e j-ésima coluna.*

Claramente, o conjunto $\beta = \{E_{ij} \in M_n(F) : 1 \leq i, j \leq n\}$ é uma base para $M_n(F)$. Não é difícil ver que se $E_{ij}, E_{kl} \in M_n(F)$, então $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$, onde δ_{jk} denota o delta de Kronecker.

Exemplo 1.1.6 *Sejam V um espaço vetorial e $\mathcal{L}(V)$ o espaço vetorial dos operadores lineares sobre V. Temos que $\mathcal{L}(V)$, munido da composição de funções, é uma álgebra associativa com unidade, chamada de **álgebra dos operadores lineares sobre** V. Se $T, S \in \mathcal{L}(V)$, em geral denota-se $T \circ S$ simplesmente por TS.*

Exemplo 1.1.7 (Álgebra de Grupo) *Sejam $G = \{g_1, \ldots, g_m\}$ um grupo finito e $FG = \{\sum \alpha_i g_i, \alpha_i \in F\}$. Definimos em FG as operações*

- $\sum \alpha_i g_i + \sum \beta_i g_i = \sum (\alpha_i + \beta_i) g_i$.
- $\lambda(\sum \alpha_i g_i) = \sum (\lambda \alpha_i) g_i$, *onde* $\lambda \in F$.

*Com essas operações, FG é um espaço vetorial sobre F que tem como base G. Inserindo em FG a operação $(\sum \alpha_i g_i)(\sum \beta_j g_j) = \sum (\alpha_i \beta_j)(g_i g_j)$, teremos em FG uma multiplicação induzida pela operação do grupo G. Nesse sentido, FG é uma F-álgebra, denominada **álgebra de grupo**. Note que se G for abeliano, a álgebra de grupo FG será comutativa.*

Exemplo 1.1.8 (Produto tensorial de álgebras) *Sejam V e W F-espaços vetoriais. Consideremos o F-espaço vetorial $F(V \times W)$ com base em $V \times W$ e o subespaço $\mathcal{U}$ de $F(V \times W)$ gerado por elementos dos tipos*

$$(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w)$$
$$(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2)$$
$$(\lambda v, w) - \lambda(v, w)$$
$$(v, \lambda w) - \lambda(v, w)$$

com $v_1, v_2, v \in V, w_1, w_2, w \in W$ e $\lambda \in F$. Definimos o **produto tensorial de** *V e W, denotado por $V \otimes_F W$ (ou simplesmente $V \otimes W$) como sendo o espaço quociente $F(V \times W)/\mathcal{U}$.*

Dado $(v, w) \in V \times W$, vamos denotar por $v \otimes w$ o elemento $\overline{(v, w)}$ de $V \otimes W$. Chamamos os elementos da forma $v \otimes w$ de **tensores**.

O conjunto $\{v \otimes w : v \in V, w \in W\}$ é um conjunto gerador de $V \otimes W$ e ocorre que

$$(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$$
$$v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$$
$$(\lambda v) \otimes w = \lambda(v \otimes w)$$
$$v \otimes (\lambda w) = \lambda(v \otimes w).$$

Segue daí que os elementos de $V \otimes W$ são da forma $\sum(v_i \otimes w_i)$, com $v_i \in V$ e $w_i \in W$. Ademais, das igualdades acima, se $V = \langle S_1 \rangle$ e $W = \langle S_2 \rangle$ (subespaço gerado), então $V \otimes W = \langle u_1 \otimes u_2 : u_1 \in S_1, u_2 \in S_2 \rangle$. Assim, se V e W são espaços vetorias de dimensão finita, tem-se que $V \otimes W$ tem dimensão finita e $\dim V \otimes W = (\dim V)(\dim W)$.

No caso em que V e W são F-álgebras, definimos a operação

$$* : (V \otimes W) \times (V \otimes W) \to V \otimes W$$

por $(a \otimes b) * (x \otimes y) = ax \otimes by$. É possível verificar que $*$ é uma operação bilinear que faz de $V \otimes W$ uma F-álgebra.

Teorema 1.1.9 (Propriedade universal) *Sejam V, W e U espaços vetoriais sobre um corpo F e $f : V \times W \to U$ uma aplicação bilinear. Então existe uma única transformação linear $T_f : V \otimes W \to U$ tal que $T_f(v \otimes w) = f(v, w)$, para quaisquer $v \in V$ e $w \in W$.*

Demonstração: Como o conjunto $V \times W$ é uma base do espaço vetorial $F(V \times W)$, segue que existe uma única aplicação linear $L : F(V \times W) \to U$ satisfazendo $L((u, v)) = f(u, v)$, para todo $(v, w) \in V \times W$. Observe que os elementos que geram $\mathcal{U}$ na definição de produto tensorial pertencem a $\ker L$ e, assim, $\mathcal{U} \subset \ker L$. Se $\alpha_1, \alpha_2 \in F(V \times W)$ são tais que $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathcal{U}$, então $L(\alpha_1) = L(\alpha_2)$. Assim, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} T_f: & V \otimes W & \longrightarrow & U \\ & \overline{\alpha} & \longmapsto & T_f(\overline{\alpha}) = L(\alpha) \end{array}$$

está bem definida e é linear. Além disso, dados $v \in V$ e $w \in W$, tem-se $T_f(v \otimes w) = L((v, w)) = f(v, w)$. A unicidade é consequência de que $\{v \otimes w : v \in V, w \in W\}$ é um conjunto gerador de $V \otimes W$. ■

Exemplo 1.1.10 *Sejam V e W F-espaços vetoriais, $v_0 \in V$ e $w_0 \in W$ vetores não nulos. Então $v_0 \otimes w_0 \neq 0$ em $V \otimes W$. De fato, como $v_0, w_0 \neq 0$, existem uma base de V contendo v_0 e uma base de W contendo w_0. Assim, pode-se obter alguma base de $V \times W$ contendo (v_0, w_0). Nesta base, defina $f : V \times W \to F$ bilinear tal que $f(v_0, w_0) \neq 0$. Pela propriedade universal, existe uma transformação linear $T_f : V \otimes W \to F$ tal que $T_f(v \otimes w) = f(v, w)$, e assim $T_f(v_0 \otimes w_0) \neq 0$. Daí $v_0 \otimes w_0 \neq 0$.*

As propriedades seguintes são bastante úteis, e seguem como aplicação da propriedade universal.

Proposição 1.1.11 *Sejam V, W e U F-espaços vetorias quaisquer. Valem:*

(i) $F \otimes V \simeq V$.

(ii) $F^n \otimes V \simeq V^n$.

(iii) $V \otimes W \simeq W \otimes V$.

(iv) $(V \otimes W) \otimes U \simeq V \otimes (W \otimes U)$.

(v) Se $S_1 = \{v_i : i \in I\}$ e $S_2 = \{w_j : j \in J\}$ são subconjuntos LI de V e W, respectivamente, então $S = \{v_i \otimes w_j : i \in I, j \in J\}$ é um subconjunto LI de $V \otimes W$.

Definição 1.1.12 *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra, B e I subespaços vetorias de $\mathcal{A}$. Dizemos que:*

i) B é uma subálgebra de $\mathcal{A}$ se $xy \in B$ para quaisquer $x, y \in B$;

ii) I é um ideal à esquerda de $\mathcal{A}$ (respectivamente à direita) se $ax \in I$ (respectivamente $xa \in I$) para quaisquer $a \in A$ e $x \in I$.

iii) *Seja I um ideal à esquerda próprio de $\mathcal{A}$. Dizemos que I é um ideal à esquerda maximal de $\mathcal{A}$ se não existe ideal à esquerda próprio J de $\mathcal{A}$, com $I \neq J$, tal que $I \subset J$. Formula-se conceito análogo para o caso em que I é um ideal à direita de $\mathcal{A}$.*

iv) *I é um ideal bilateral de $\mathcal{A}$ (ou simplesmente ideal de $\mathcal{A}$) se I é um ideal à esquerda e à direita simultaneamente.*

Observe que todo ideal de uma álgebra $\mathcal{A}$ é, em particular, uma subálgebra de $\mathcal{A}$. No caso em que $\mathcal{A}$ é simplesmente um anel, dizemos que B é um subanel de $\mathcal{A}$ e os itens $(ii), (iii)$ e (iv) são os mesmos.

Um fato elementar é que 0 e $\mathcal{A}$ sempre são ideais bilaterais da álgebra $\mathcal{A}$. Caso esses sejam os únicos ideais bilaterais de $\mathcal{A}$, dizemos que $\mathcal{A}$ é uma **álgebra simples**. Por exemplo, sendo $n \in \mathbb{N}$, prova-se que a álgebra $M_n(F)$ é simples.

Exemplo 1.1.13 *Seja $UT_n(F) = UT_n$ o conjunto das matrizes triangulares superiores. Tem-se que UT_n é uma subálgebra de $M_n(F)$. Como $UT_n = \langle E_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq n\rangle$ (subespaço gerado) segue que*

$$\dim UT_n(F) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ressaltamos que a álgebra UT_n estará fortemente presente em nosso trabalho. No Capítulo 3, apresentaremos um caso mais geral de matrizes triangulares, as chamadas matrizes triangulares superiores em blocos.

Definição 1.1.14 *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas F-álgebras. Dizemos que uma transformação linear $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um* **homomorfismo de álgebras** *se $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}$.*

Chamamos φ de isomorfismo se φ for bijetora. Quando $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ dizemos que φ é um endomorfismo e se φ for endomorfismo e isomorfismo simultaneamente, dizemos que φ é um automorfismo da álgebra $\mathcal{A}$. Se as F-álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são isomorfas, denotamos por $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Exemplo 1.1.15 *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e I um ideal de $\mathcal{A}$. Definindo no espaço vetorial quociente $\mathcal{A}/I$ a operação $(a+I)(b+I) = (ab)+I$, temos que $\mathcal{A}/I$ é uma álgebra, chamada de álgebra quociente de $\mathcal{A}$ por I. A Aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}/I \\ & a & \longmapsto & \overline{a} = a + I \end{array}$$

é um homomorfismo sobrejetor de álgebras, chamado de projeção canônica.

Sendo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo de álgebras, dizemos que o conjunto $ker(\varphi) = \{a \in \mathcal{A}; \varphi(a) = 0\}$ é o *núcleo* de φ, e o conjunto $Im(\varphi) = \{\varphi(a) \in \mathcal{B} \mid a \in \mathcal{A}\}$ é a *imagem* de φ. Verifica-se que $ker(\varphi)$ é um ideal de $\mathcal{A}$ e que $Im(\varphi)$ é uma subálgebra de $\mathcal{B}$. É imediato verificar que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \overline{\varphi}: & \mathcal{A}/ker(\varphi) & \longrightarrow & Im(\varphi) \\ & \overline{a} & \longmapsto & \overline{\varphi}(\overline{a}) = \varphi(a) \end{array}$$

está bem definida e é um isomorfismo de álgebras.

1.2 Graduações de Grupos em Álgebras Associativas

Na seção que se inicia, quando usarmos a palavra álgebra, estaremos sempre nos referindo a uma álgebra associativa e, a menos de menção em contrário, G designará um grupo qualquer, para o qual adotaremos a notação multiplicativa.

Ao longo desta seção, daremos ênfase ao conceito de G-graduação sobre uma álgebra $\mathcal{A}$, que desempenhará um importante papel posteriormente.

Definição 1.2.1 *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa e G um grupo arbitrário. Definimos uma G-graduação em $\mathcal{A}$ como sendo uma família $(A_g)_{g\in G}$ de subespaços vetorias de $\mathcal{A}$ tais que*

$$\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A_g$$
$$e$$
$$A_g A_h \subset A_{gh}$$

para quaisquer $g, h \in G$. Neste caso, diz-se que a álgebra $\mathcal{A}$ é G-graduada.

Dizemos que os subespaços A_g são as *componentes homogêneas* e os seus elementos de *elementos homogêneos de grau g*. Quando $a \in A_g$, escrevemos $deg(a) = g$ para significar que a é um elemento homogêneo de grau g. A componente homogênea A_1 é denominada *componente neutral* da G-graduação, onde 1 denota o elemento neutro de G. Sendo H um subgrupo de G, é fácil ver que a soma $\sum_{h\in H} A_h$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Em particular, fazendo $H = \{1\}$, decorre que a componente neutral A_1 é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Quando o grupo G for abeliano e finito, dizemos que a G-graduação é abeliana e finita.

Exemplo 1.2.2 *Toda álgebra $\mathcal{A}$ admite uma G-graduação. Com efeito, definindo $A_1 = \mathcal{A}$ e $A_g = \{0\}$ para todo $g \in G - \{1\}$, temos em $\mathcal{A}$ uma G-graduação. Uma graduação deste tipo é chamada de* ***G-graduação trivial****.*

Exemplo 1.2.3 *Considere a F-álgebra $M_2(F)$ e os supespaços*

$$M_2(F)_{\overline{0}} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in F \right\} \quad e \quad M_2(F)_{\overline{1}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in F \right\}.$$

É fácil ver que $M_2(F) = M_2(F)_{\overline{0}} \oplus M_2(F)_{\overline{1}}$ define uma $\mathbb{Z}_2$-graduação em $M_2(F)$. Mais geralmente, sendo $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, considere a álgebra $M_n(F)$. Para cada $\gamma \in \mathbb{Z}_n$, definamos $M_\gamma = \langle E_{ij} : \overline{i-j} = \gamma \rangle$. Mostra-se que a família $(M_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}_n}$ é uma $\mathbb{Z}_n$-graduação em $M_n(F)$.

Exemplo 1.2.4 *Sejam $\mathcal{A} = \oplus_{g \in G} A_g$ uma G-graduação e $a \in \mathcal{A}$ um elemento homogêneo, com $a \neq 0$. Se a é idempotente, isto é, $a^2 = a$, tem-se que $a \in A_1$.*

Exemplo 1.2.5 *Sendo $\mathcal{A}$ uma álgebra G-graduada com unidade 1, tem-se que a unidade 1 é homogênea e que $1 \in A_1$. De fato, existem $g_1, \ldots, g_n \in G$ tais que*

$$1 = a_1 + a_{g_1} + \cdots + a_{g_n}$$

com $a_1 \in A_1, a_{g_j} \in A_{g_j}$. Tomando $h \in G$ e $a_h \in A_h$ arbitrários, temos

$$a_h = a_h a_1 + a_h a_{g_1} + \cdots + a_h a_{g_n}.$$

Daí, segue que $a_h a_{g_j} = 0$ e $a_h a_1 = a_h$, donde $1 = a_1 \in A_1$.

Definição 1.2.6 *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\mathcal{A} = \oplus_{g \in G} A_g$ uma G-graduação. O conjunto $\{g \in G : A_g \neq 0\}$ é chamado de* ***suporte da álgebra*** *$\mathcal{A}$, e será denotado por $Supp(\mathcal{A})$.*

Definição 1.2.7 *Seja B um subespaço vetorial de uma álgebra $\mathcal{A} = \oplus_{g \in G} A_g$ G-graduada. Dizemos que B é homogêneo na G-graduação ou G-graduado quando $B = \oplus_{g \in G} B_g$, onde $B_g = B \cap A_g$. Formula-se definição análogo no caso em que B é uma subálgebra ou um ideal de $\mathcal{A}$.*

Exemplo 1.2.8 *Sejam $\mathcal{A} = \oplus_{g \in G} A_g$ uma álgebra G-graduada e $B = \oplus_{g \in G} B_g$ uma subálgebra homogênea na G-graduação. Assim, se $b = (\sum b_g) \in B$, com $b_g \in A_g$, devemos ter $b_g \in B$ e reciprocamente.*

Exemplo 1.2.9 *Sejam $\mathcal{A} = \oplus_{g \in G} \mathcal{A}_g$ uma álgebra G-graduada e I um ideal homogêneo na G-graduação. Tem-se que a álgebra $\mathcal{A}/I$ é naturalmente G-graduada, onde as componentes homogêneas são $(\mathcal{A}/I)_g = \{a + I : a \in A_g\}$.*

Exemplo 1.2.10 *Sejam $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A_g$ uma G-graduação e $a, b \in A_1$. É fácil ver que $B = a\mathcal{A}b$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Afirmamos que B é homogênea na G-graduação. Com efeito, um elemento típico de B tem a forma $a(\sum x_g)b$, onde $x_g \in A_g$. Claramente, $ax_gb \in B$. Ademais, $ax_gb \in A_1A_gA_1 \subset A_g$. Daí $B = \oplus_{g\in G} B_g$, onde $B_g = A_g \cap B$.*

Exemplo 1.2.11 *Sejam G um grupo, H um subgrupo normal de G e $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra G-graduada. Sendo $\overline{G} = G/H$, a G-graduação inicial induz uma $\overline{G}$-graduação em $\mathcal{A}$. Para tanto, sendo $\overline{g} \in \overline{G}$, defina $A_{\overline{g}} = \oplus_{h\in H} A_{gh}$. Afirmamos que $\mathcal{A} = \oplus_{\overline{g}\in\overline{G}} A_{\overline{g}}$ define uma $\overline{G}$-graduação. Inicialmente, note que $A_g \subset A_g + (\oplus_{h\neq 1} A_{gh}) = A_{\overline{g}}$ e assim $\mathcal{A} = \sum_{\overline{g}\in\overline{G}} A_{\overline{g}}$. Provaremos agora que a soma $\sum_{\overline{g}\in\overline{G}} A_{\overline{g}}$ é direta. De fato, suponhamos que existam $g_1, \ldots, g_l \in G$ tais que $x_{\overline{g_1}} + \cdots + x_{\overline{g_l}} = 0$ (onde $x_{\overline{g_j}} \in A_{\overline{g_j}}$). Mas $x_{\overline{g_j}} = \sum_{h\in H} x_{g_jh}$. Daí $\sum_j \sum_{h\in H} x_{g_jh} = 0$, o que contradiz o fato de que a soma $\sum_{j,h} A_{g_jh}$ é direta.*

Por fim, sendo $g, g_1 \in G$, afirmamos que $A_{\overline{g}}A_{\overline{g_1}} \subset A_{\overline{gg_1}}$. De fato, note que

$$A_{\overline{g}}A_{\overline{g_1}} = (\oplus_{h\in H} A_{gh})(\oplus_{t\in H} A_{g_1t}) \subset \oplus_{h,t\in H} A_{ghg_1t}.$$

Por outro lado, para quaisquer $h, t \in H$, afirmamos que $A_{ghg_1t} \subset A_{\overline{gg_1}}$. Com efeito, seja $z = (g_1^{-1}hg_1)t$. Devido à normalidade de H em G, tem-se que $z \in H$. Assim $A_{ghg_1t} = A_{gg_1z} \subset A_{\overline{gg_1}}$. Juntando essas informações, teremos $A_{\overline{g}}A_{\overline{g_1}} \subset A_{\overline{gg_1}}$, o que encerra a afirmação feita.

A posteriori, será de crucial importância um tipo especial de G-graduação nas álgebras $M_n(F)$ e $UT_n(F)$: as chamadas graduações elementares. Nesse sentido, apresentamos a definição seguinte.

Definição 1.2.12 *Sejam $UT_n(F) = \oplus_{g\in G} A_g$ e $M_n(F) = \oplus_{h\in H} B_h$ uma G e H-graduações, respectivamente. Dizemos que:*

*(i) $UT_n(F) = \oplus_{g\in G} A_g$ é uma **G-graduação elementar** se existe uma n-upla $\overline{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ tal que a componente homogênea A_g é o subespaço gerado pelas matrizes unitárias E_{ij}, tais que $g = g_i^{-1}g_j$, com $i \leq j$.*

*(ii) $M_n(F) = \oplus_{h\in H} B_h$ é uma **H-graduação elementar** se existe uma n-upla $\overline{h} = (h_1, \ldots, h_n) \in H^n$ tal que a componente homogênea B_h é o subespaço gerado pelas matrizes unitárias E_{ij}, tais que $h = g_i^{-1}g_j$.*

Um exemplo de graduação elementar na álgebra $M_n(F)$ é a $\mathbb{Z}_n$-graduação apresentada no Exemplo 1.2.3.

Exemplo 1.2.13 *Considere $\mathcal{A} = UT_n = \oplus_{g\in G} A_g$ uma G-graduação elementar. Por definição, tem-se trivialmente que as matrizes E_{ij}, com $1 \leq i \leq j \leq n$, são homogêneas na G-graduação.*

A recíproca do exemplo acima é válida, será demonstrada na proposição abaixo e desempenhará um importante papel futuramente.

Proposição 1.2.14 *Sejam G um grupo e $\mathcal{A} = UT_n = \oplus_{g\in G} A_g$ uma G-graduação. Se as matrizes unitárias E_{ij}, com $1 \leq i \leq j \leq n$, são homogêneas então a G-graduação é elementar.*

Demonstração: Sejam $1 \leq i \leq j \leq n$ e 1 o elemento neutro do grupo G . Desde que $E_{ii}^2 = E_{ii}$, pelo Exemplo 1.2.4, tem-se que $E_{ii} \in A_1$. Ademais, como $E_{i(i+1)}$ é homogênea, seja $h_i \in G$ tal que $E_{i(i+1)} \in A_{h_i}$. Seja $g_1 = 1$ e, indutivamente, $g_{i+1} = g_i h_i$. Uma vez que

$$E_{ij} = E_{i(i+1)} \dots E_{(j-1)j} \in A_{h_i} \dots A_{h_{(j-1)}} \subset A_{g_i^{-1} g_j},$$

concluímos que a G-graduação é elementar.

■

Definição 1.2.15 *Sejam G um grupo, $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A_g$ e $\mathcal{A}' = \oplus_{g\in G} A'_g$ duas álgebras G-graduadas.*

(i) Um homomorfismo de álgebras $\varphi : A \to A'$ é um homomorfismo G-graduado se verifica $\varphi(A_g) \subset A'_g$, para todo $g \in G$. Analogamente, definimos endomorfismo, isomorfismo e automorfismo G-graduado. No caso de um isomorfismo G-graduado, ocorre que $\varphi(A_g) = A'_g$.

(ii) Dizemos que duas G-graduações $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A_g$ e $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A'_g$ na mesma álgebra $\mathcal{A}$ são isomorfas quando existe um automorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ G-graduado, isto é, $\varphi(A_g) = A'_g$, para todo $g \in G$.

1.3 R-Módulos e o Radical de Jacobson

Ao longo dessa seção, quando usarmos a palavra anel, estaremos nos referindo a um anel associativo e com unidade, que será designada por 1. No que segue, iremos apresentar o cenceito de módulo sobre um anel R e também o importante conceito de radical de Jacobson de R.

Definição 1.3.1 *Seja R um anel. Definimos como R-módulo à direita um grupo abeliano $(M, +, 0)$, munido de uma aplicação de $M \times R$ em M, que a cada par $(x, a) \in M \times R$ associa $xa \in M$ e satisfaz:*

(i) $(x + y)a = xa + ya$

(ii) $x(a + b) = xa + xb$

(iii) $x(ab) = (xa)b$

(iv) $x.1 = x$

para quaisquer $x, y \in M$ *e* $a, b \in R$.

Define-se de forma similar o conceito de R-módulo à esquerda.

Observação 1.3.2 *Se o anel R for um corpo, o conceito de R-módulo reduz-se ao conceito de R-espaço vetorial.*

Observação 1.3.3 (Módulos sobre Álgebras) *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa com unidade. Também podemos definir o conceito de $\mathcal{A}$-módulo M sobre a álgebra $\mathcal{A}$, supondo M um F-espaço vetorial. Para tanto, impomos que a aplicação $M \times \mathcal{A} \to M$, além de satisfazer os quatro itens da Definição 1.3.1, também satisfaça*

(v) $m(\lambda a) = (\lambda m)a = \lambda(ma)$, *para quaiquer* $a \in \mathcal{A}, \lambda \in F$ *e* $m \in M$.

Todos os conceitos e resultados que serão apresentados em relação a módulo sobre anel têm sua versão no contexto de módulos sobre álgebras. Na seção 1.5, concentraremos nossa atenção no estudo dos módulos sobre a álgebra de grupo FG.

Definição 1.3.4 *Sejam R um anel e M um R-módulo à direita. Definimos o anulador de M em R com sendo o conjunto $\{a \in R : xa = 0, \forall x \in M\}$. Analogamente, se M for um R-módulo à esquerda, definimos anulador de M em R como sendo o conjunto $\{a \in R : ax = 0, \forall x \in M\}$.*

Observação 1.3.5 *É fácil verificar que o anulador do módulo M é um ideal do anel R. Em geral, denotamos tal ideal por $Ann(M)$.*

Observação 1.3.6 *Observe que a Definição 1.3.1 expressa que a cada $a \in R$ é possível associar um endomorfismo do grupo M, a saber, $f_a : M \to M$ definido por $f_a(x) = xa$, para todo $x \in M$. Sendo $End(M)$ o anel de endormorfismos de M (onde a soma é a soma usual e o produto é a composição de endomorfismos), é fácil ver que a correspondência $a \to f_a$ é um homomorfismo dos anéis R e $End(M)$. Note ainda que se $Ann(M) = 0$ (neste caso M é dito* ***módulo fiel****), tem-se que R está imerso no anel $End(M)$.*

Exemplo 1.3.7 *Um grupo abeliano qualquer* $(M,+,0)$ *pode ser visto como um* $\mathbb{Z}$*-módulo (à direita ou à esquerda). Com efeito, sejam* $n \in \mathbb{Z}$ *e* $x \in M$*. Se* $n > 0$*, defina* $xn = x+\cdots+x$ *como a soma de* x *consigo* n *vezes. Se* $n < 0$*, defina* $xn = -(x|n|)$*. E se* $n = 0$*, defina* $x0 = 0$*. Essa operação de* $M \times \mathbb{Z}$ *em* M *torna* $(M,+,0)$ *um* $\mathbb{Z}$*-módulo à direita.*

Exemplo 1.3.8 *Considere* $F[x]$ *o anel de polinômios com coeficientes no corpo* F*. Sejam* V *um* F*-espaço vetorial e* T *uma transformação linear de* V *em* V*. Neste contexto, o grupo abeliano* $(V,+,0)$ *é um* $F[x]$*-módulo com a aplicação de* $F[x] \times V$ *em* V *dada por* $(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)v = (a_0I + a_1T + \cdots + a_nT^n)(v)$*.*

Definição 1.3.9 *Sejam* R *um anel e* M *um* R*-módulo à direita. Dizemos que*

(i) Um subgrupo N *de* M *é um submódulo de* M *se* $xa \in N$ *para todo* $x \in N$ *e todo* $a \in R$*.*

(ii) Um submódulo N *de* M *é minimal se* $N \neq 0$ *e não existe submódulo* $N_1 \neq N$ *de* M *tal que* $0 \neq N_1 \subset N$*.*

Seja M um R-módulo à direita. Observe que 0 e M sempre são submódulos do módulo M. Diremos que M é um **R-módulo simples à direita** ou **R-módulo irredutível à direita** se não admitir outros submódulos além de 0 e M. Conceito análogo é definido quando estamos lidando com R-módulos à esquerda.

É fácil ver que um submódulo $N \subset M$ é minimal em M se, e somente se, N é um módulo simples.

Observação 1.3.10 *Seja* R *um anel. Podemos considerar o* R*-módulo* $M = (R,+,0)$ *à direita (analogamente à esquerda) com a multiplicação do próprio anel* R*. Tal módulo é chamado de* R*-módulo regular e será denotado por* R_R*.*

Observe que se I é um submódulo do módulo regular R_R, então I é um ideal à direita do anel R e, reciprocamente, todo ideal à direita do anel R é um submódulo do módulo regular R_R.

Exemplo 1.3.11 *Sejam* $\mathcal{A} = UT_n(F)$ *e* $J = \{(y_{ij}) \in \mathcal{A} : y_{kk} = 0, \forall k = \{1,\ldots,n\}\}$*. Sendo* $W = \langle E_{1n},\ldots,E_{n-1,n}\rangle$*, é fácil ver que* $WJ = 0$ *e, assim,* W *está contido no anulador à esquerda* $Ann(J)$ *de* J *em* $\mathcal{A}$*. Por outro lado, note que* $E_{nn}J = 0$ *e* $E_{nn} \notin W$*. Assim, a inclusão* $W \subset Ann(J)$ *é própria.*

Exemplo 1.3.12 (Módulo Quociente) *Sejam* M *um* R*-módulo à esquerda e* N *um submódulo de* M*. Para todo* $\overline{x} \in M/N$ *e* $a \in R$*, defina* $a\overline{x} = \overline{ax}$*. É fácil ver que teremos assim uma operação bem definida de* $R \times M/N$ *em* M/N *que faz de* M/N *um* R*-módulo à esquerda. Chamamos tal* R*-módulo de módulo quociente de* M *por* N*.*

Definição 1.3.13 *Sejam M e N R-módulos à esquerda (à direita). Um homomorfismo η dos grupos abelianos M e N tal que $\eta(ax) = a\eta(x)$ ($\eta(xa) = \eta(x)a$, respectivamente), para quaiquer $x \in M$ e $a \in R$ é dito homomorfismo de R-módulos. Denotamos o conjunto de todos os homomorfismos de M em N por* $\hom(M, N)$.

É fácil perceber que $\ker(\eta)$ é um submódulo de M e $Im(\eta)$ é um submódulo de N.

Observação 1.3.14 *Considerando no conjunto* $\hom(M, N)$ *a adição usual de homomorfismo, temos que* $\hom(M, N)$ *é um grupo abeliano, cujo elemento neutro é o homomorfismo nulo. No caso em que $M = N$, considerando em* $\hom(M, M)$ *a composição de homomorfismo como "multiplicação", temos em* $\hom(M, M)$ *um estrutura de anel. Chamamos tal anel de* ***anel de endomorfismos do módulo*** *M e o denotamos por $End(M)$.*

Lema 1.3.15 (Lema de Schur) *Sejam M_1 e M_2 R-módulos simples. Todo homomorfismo não nulo de M_1 em M_2 é um isomorfismo. Em particular, se M é simples, então $End(M)$ é um anel com divisão.*

Demonstração: Seja $\eta \neq 0$ um elemento de $\hom(M_1, M_2)$. Uma vez que $ker(\eta)$ é um submódulo próprio M_1 e M_1 é simples temos $\ker(\eta) = 0$ e portanto η é injetora. Ao mesmo tempo, como $Im(\eta) \neq 0$, pelo mesmo motivo, devemos ter $Im(\eta) = M_2$. Assim η é um isomorfismo e portanto inversível. ■

Exemplo 1.3.16 (Soma direta de módulos) *Sejam $M_1, \ldots, M_n$ R-módulos à esquerda. Considere $M = M_1 \times \cdots \times M_n$. Em M defina as seguintes operações:*

(i) $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$.

(ii) $a(x_1, \ldots, x_n) = (ax_1, \ldots, ax_n)$, $a \in R$.

Com essas operações, M é um R-módulo à esquerda, chamado soma direta dos módulos M_i e será denotado por $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$. Note que o elemento neutro de M é $0 = (0, \ldots, 0)$.

Definição 1.3.17 (Radical de Jacobson) *Seja R um anel. Definimos o radical de Jacobson de R, denotado por $J(R)$, como sendo a interseção de todos ideais maximais à direita de R.*

De forma análoga, definimos o radical de Jacobson de uma álgebra $\mathcal{A}$.

Observe que se $R = 0$ é o anel nulo então R não possui ideais próprios. Neste caso, estabelecemos que $J(R) = 0$. Supondo $R \neq 0$, o Lema de Zorn assegura a existência de ideais maximas à direita em R.

Observação 1.3.18 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa e unitária. É claro que se I for um ideal da álgebra $\mathcal{A}$, em particular I é um ideal do anel $\mathcal{A}$. Agora suponhamos que I_1 seja um ideal do anel $\mathcal{A}$. Afirmamos que I_1 é um ideal da álgebra $\mathcal{A}$. De fato, sendo $\lambda \in F$ e $a \in I_1$, temos $\lambda a = \lambda(1a) = (\lambda 1)a \in I_1$.*

Por conseguinte, os ideais de $\mathcal{A}$ vista como álgebra ou como anel são os mesmos. Devido a isto, os fatos seguintes sobre o radical de Jacobson de anéis podem ser aplicados ao radical de Jacobson de álgebras associativas e unitárias.

Proposição 1.3.19 *Seja R um anel. Para $y \in R$, são equivalentes:*

(i) $y \in J(A)$;

(ii) $1 - yx$ *tem inverso à direita em R, para todo $x \in R$;*

(iii) $My = \{my : m \in M\} = 0$, *para todo R-módulo à direita M simples.*

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ Por contradição suponhamos a existência de $x \in R$ tal que $1 - yx$ não seja invesível à direita. Assim, existe um ideal maximal à direita $m \subset R$ tal que $(1 - yx)R \subset m$. Daí, $1 = (1 - yx) + yx \in m$, o que é uma contradição.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Suponhamos que existe $m \in M$ tal que $my \neq 0$. Desde que M é simples à direita, temos $(my)R = M$. Assim, existe $x \in R$ de tal sorte que $(my)x = m$ e daí $m(yx - 1) = 0$. Como $yx - 1$ é inversível, segue $m = 0$, o que é uma contradição.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Se m é um ideal maximal à direita qualquer, tem-se que $M = R/m$ é um R-módulo à direita simples. Uma vez que $(R/m)y = 0$, obtemos $\overline{1}y = \overline{y} = 0$. Decorre que $y \in m$. Desde que m foi tomado arbitrariamente, segue que $y \in J(R)$. ■

É natural perguntar o que aconteceria se na definição do radical de Jacobson, $J(R)$, trocássemos a interseção dos ideias maximais à direita de R pelos ideais maximais à esquerda de R. A resposta é que $J(R)$ seria o mesmo, devido à junção das próximas duas proposições.

Proposição 1.3.20 *Seja R um anel. Então $J(R) = \cap Ann(M)$, onde a interseção é feita na família dos R-módulos simples à direita.*

Demonstração: Primeiramente, sejam $x \in J(R)$ e M um R-módulo simples à direita. Pelo item (iii) da proposição anterior, devemos ter $Mx = 0$. Assim $x \in Ann(M)$. Como M é um R-módulo simples qualquer, temos $J(R) \subset \cap Ann(M)$, onde a interseção é feita na família dos R-módulos M simples à direita. Por outro lado, se $x \in \cap Ann(M)$, então para qualquer R-módulo simples M, tem-se $Mx = 0$. Desse modo, pela proposição anterior, temos $x \in J(R)$, o que encerra a demonstração. ■

Note que o resultado precedente garante que $J(R)$ é um ideal do anel R. De fato, em virtude de cada anulador à direita dos R-módulos simples à direita M serem ideais de R, tem-se que a interseção $J(R) = \cap Ann(M)$ também o é.

Proposição 1.3.21 *Seja R um anel. Para todo $y \in R$, são equivalentes:*

(i) $y \in J(R)$

(ii) $(1 - xyz) \in U(R)$, $\forall x, z \in R$.

Demonstração: $(ii) \Rightarrow (i)$ Note que a condição (ii) acarreta que $(1 - yz)$ tem inverso à direita para todo $x \in R$. Assim, temos $y \in J(R)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Tomemos $y \in J(R)$ e sejam $x, z \in R$. Pela proposição anterior $xy \in J(R)$ e assim $(1 - xyz) = (1 - (xy)z)$ tem inverso à direita, digamos u. Segue que $(1 - xyz)u = 1$ e assim $u = 1 + (xyz)u$ também tem inverso à direita. Logo, $(1 - xyz) \in U(R)$ para quaisquer $x, y \in R$. ■

Exemplo 1.3.22 *Seja $\mathcal{A} = UT_n(F)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores. Se $n = 1$, temos $\mathcal{A} \simeq F$ e assim 0 é o único ideal próprio de A, portanto é maximal. Daí $J(\mathcal{A}) = 0$. Suponhamos então $n > 1$. Sendo $J = \{(y_{ij}) \in \mathcal{A} : y_{ii} = 0, \forall i = 1, \ldots, n\}$, afirmamos que $J(\mathcal{A}) = J$. Com efeito, seja $Y = (y_{ij}) \in J(\mathcal{A})$ e suponhamos por contradição que $y_{11} \neq 0$ (os demais casos são resolvidos de forma análoga). Definindo $X = (x_{ij}) \in \mathcal{A}$ como $x_{11} = y_{11}^{-1}$ e $x_{ij} = 0$ se $(i, j) \neq (1, 1)$, temos que $C = (c_{ij}) = (Id - XY)$ satisfaz $c_{11} = 0$. Logo, $\det C = 0$, o que é uma contradição. Assim, $Y \in J$. Tomemos agora $Y \in J$ e sejam $X, Z \in \mathcal{A}$. É facil ver que $XYZ \in J$ e assim $\det(Id - XYZ) = 1$. Segue que $(Id - XYZ) \in U(\mathcal{A})$. Assim $Y \in J(\mathcal{A})$, donde temos a inclusão $J \subset J(\mathcal{A})$.*

Aproveitando a notação do exemplo anterior, observe que $J(\mathcal{A}) = \langle E_{ij}, 1 \leq i < j \leq n \rangle$.

Exemplo 1.3.23 *Seja $\mathcal{A} = UT_n(F)$ e, para $x, y \in \mathcal{A}$, defina $[x, y] = xy - yx$ (comutador de x com y). Seja $C = [\mathcal{A}, \mathcal{A}] = \{[x, y] : x, y \in \mathcal{A}\}$. A respeito do conjunto C, afirmamos que:*

(i) $C \neq \{0\}$;

(ii) $C \subset J(\mathcal{A})$.

Para justificar (i), basta notar que $0 \neq [E_{k,k+1}, E_{kk}] = -E_{k,k+1} \in [\mathcal{A}, \mathcal{A}]$, para todo $k = 1, \ldots, n-1$. Para justificar (ii), é suficiente perceber que para quaiquer $x, y \in \mathcal{A}$, a matriz $[x, y]$ tem diagonal nula.

Proposição 1.3.24 *Sejam R um anel e $u \subset J(R)$ um ideal de R. Então, $J(R/u) = J(R)/u$.*

Demonstração: A demonstração é simples e pode ser encontrada na página 51 do livro [L]. ■

Proposição 1.3.25 *Sejam R um anel e I um ideal de R. Então, $J(I) = I \cap J(R)$.*

Demonstração: Pode ser encontrar na página 16 de [H]. ■

Consideremos $\mathcal{A} = UT_n(F)$ e $W = \langle E_{1n}, \ldots, E_{n-1,n}\rangle$. É fácil ver que W é um ideal bilateral de $UT_n(F)$. Consideremos nesse contexto a projeção canônica

$$\begin{array}{rccc} \rho: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}/W \\ & a & \longmapsto & \overline{a} = a + W. \end{array}$$

Podemos associar a cada elemento de $UT_{n-1}(F)$ um elemento de $UT_n(F)$ preenchendo a última coluna e a última linha com zeros e, reciprocamente, a cada matriz de $UT_n(F)$ cuja última coluna e última linha são formadas por zeros, está bem definida uma matriz correspondente em $UT_{n-1}(F)$. Assim, $UT_{n-1}(F)$ está imersa em $UT_n(F)$. Nesse sentido, por vezes, cometeremos um abuso de notação escrevendo $UT_{n-1}(F) \subset UT_n(F)$.

Exemplo 1.3.26 *Aproveitando a notação introduzida anteriormente, é fácil ver que $\mathcal{A}/W = \rho(UT_{n-1}) \oplus C$ onde $C = \rho(\langle E_{nn}\rangle)$. Observemos que $W \subset J(\mathcal{A})$. Agora notemos que:*

$$J(\mathcal{A}/W) = J(\mathcal{A})/W = \{I + W : I \in J(\mathcal{A})\} = \{I' + W : I' \in J(UT_{n-1})\} = \rho(J(UT_{n-1})).$$

Desde que $UT_{n-1} \simeq \rho(UT_{n-1})$ e isomorfismo preserva ideais maximais, tem-se $\rho(J(UT_{n-1})) = J(\rho(UT_{n-1}))$. Portanto, $J(\mathcal{A}/W) = J(\rho(UT_{n-1}))$.

Ressaltamos que na seção 2.2, o exemplo acima será sobremaneira importante.

1.4 Representações Lineares de Grupos

Na presente seção objetivamos fazer uma breve exposição de resultados da importante Teoria das Representações Lineares de Grupos. Tais resultados serão fundamentais para o estabelecimento da dualidade entre G-graduações abelianas e finitas em uma álgebra $\mathcal{A}$ e G-ações sobre $\mathcal{A}$. Seremos o mais breve possível em nossa apresentação, nos limitando à exposição dos fatos que nos serão úteis. Para um maior aprofundamento no estudo das Representação de Grupos, recomendamos os livros [CR] e [S].

Usaremos a notação $GL(V)$ para representar o grupo dos automorfismos do espaço vetorial V e $GL_n(F)$ para representar o grupo das matrizes $n \times n$ inversíveis sobre o corpo F.

Definição 1.4.1 *Sejam G um grupo e V um F-espaço vetorial. Definimos uma representação linear de G em V como sendo um homomorfismo de grupos*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & G & \longrightarrow & GL(V) \\ & g & \longmapsto & \varphi(g) = \varphi_g \end{array}.$$

Sendo $\varphi : G \to GL(V)$ uma representação linear, definimos o *grau* desta representação como sendo a dimensão de V. Dizemos que uma representação é *fiel* se é injetora. Sendo a dimensão de V finita, podemos ver uma representação linear de G em V como sendo um homomorfismo $\varphi : G \to GL_n(F)$, uma vez que os grupos $GL(V)$ e $GL_n(F)$ são isomorfos.

Quando queremos deixar explícito que estamos considerando o corpo F, usamos a nomenclatura *F-representação* ou *representação linear sobre F*.

Exemplo 1.4.2 *Sendo G um grupo e V um F-espaço vetorial qualquer, a representação linear*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & G & \longrightarrow & GL(V) \\ & g & \longmapsto & \varphi(g) = Id_V \end{array}$$

*é chamada de **representação trivial**. Supondo que $\dim V = n$ é finita, podemos definir esta representação da seguinte forma*

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & G & \longrightarrow & GL_n(F) \\ & g & \longmapsto & \varphi(g) = I_n \end{array},$$

onde I_n *é a matriz identidade* $n \times n$.

Exemplo 1.4.3 *Seja* C_∞ *o grupo cíclico infinito. Sendo* g *um gerador de* C_∞, *definimos*

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & C_\infty & \longrightarrow & GL_2(\mathbb{R}) \\ & g^n & \longmapsto & \varphi(g^n) = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Esta é uma representação de grau 2.

Exemplo 1.4.4 *Seja* $\varphi : G \to GL(V)$ *uma representação linear. Tal representação induz no espaço vetorial* V *uma estrutura de* FG*-módulo à direita. De fato, definindo* $vg = v\varphi(g)$ *(*$v\varphi(g)$ *denota a avaliação da transformação* $\varphi(g)$ *no vetor* v*) onde* $v \in V, g \in G$, *tem-se que* V *pode ser visto como* FG*-módulo à direita. Reciprocamente, sendo* V *um* FG*-módulo à direita e* $g \in G$, *definindo a aplicação* $\varphi(g) : V \to V$ *por* $m\varphi(g) = mg$, *segue que a correspondência* $g \to \varphi(g)$ *define uma representação do grupo* G *no* F*-espaço vetorial* V. *Por esta razão, dizemos que o espaço vetorial* V *é o módulo da representação* φ.

Definição 1.4.5 *Sejam* $\varphi : G \to GL(V)$ *e* $\phi : G \to GL(V')$ *representações lineares de um grupo* G *e* $W \subset V$ *um subespaço vetorial* $\varphi(g)$*-invariante, para todo* $g \in G$. *Dizemos que*

(i) As representações φ *e* ϕ *são equivalentes (ou isomorfas) se existe um isomorfismo* $\theta : V \to V'$ *de espaços vetoriais tal que:*

$$(\theta \circ \varphi(g))(v) = (\phi(g) \circ \theta)(v), \text{ para quaisquer } v \in V \text{ e } g \in G.$$

(ii) A aplicação $\psi : G \to GL(W)$ *definida por* $\psi(g) = \varphi(g)|_W : W \to W$ *é uma sub-representação de* φ. *Se* W *for um subespaço de* V *diferente de* 0 *e* V, *a sub-representação* ψ *é dita própria.*

(iii) A representação φ *é irredutível se não admitir sub-representações próprias. Caso contrário, dizemos que* φ *é redutível.*

Exemplo 1.4.6 *É claro que toda representação de grau 1 é irredutível. Se* G *é um grupo finito (não trivial), então toda representação de* G *de grau maior ou igual a* $|G|$ *é redutível. De fato, suponhamos* $\varphi : G \to GL(V)$ *uma representação linear, onde* $\dim V \geq |G|$. *Sendo* $v_0 \in V$ *um vetor não nulo, temos que* $W = \langle \varphi_g(v_0) : g \in G \rangle$

é um subespaço não nulo e φ-invariante de V, com $\dim W \leq |G|$. *Supondo φ irredutível, temos que $\sum_{g\in G}\varphi_g = 0$ (pois para cada $w \in V$, o subespaço $\left\langle \sum_{g\in G}\varphi_g(w)\right\rangle$ é φ-invariante) e daí o conjunto $\{\varphi_g(v_0) : g \in G\}$ é linearmente dependente. Logo,* $\dim W < |G|$, *o que é uma contradição.*

Teorema 1.4.7 *Sejam G um grupo abeliano e F um corpo algebricamente fechado. Então toda F-representação de G irredutível de grau finito tem grau 1.*

Demonstração: Sejam V um F-espaço vetorial, com $\dim V$ finita, e $\varphi : G \to GL(V)$ um representação irredutível. Se φ_g é múltiplo escalar da identidade para todo $g \in G$, segue-se que todo subespaço unidimensional de V é φ-invariante. Neste caso, levando em conta que φ é irredutível, decorre que $\dim V = 1$. Suponhamos então que exista $g_0 \in G$ tal que φ_{g_0} não seja múltiplo escalar da identidade. Uma vez que F é algebricamente fechado, existe $\lambda \in F$ autovalor de φ_{g_0} e o autoespaço W associado a λ é tal que $0 \neq W \neq V$. Dado $g \in G$, temos $gg_0 = g_0 g$ e assim $\varphi_g\varphi_{g_0} = \varphi_{g_0}\varphi_g$. Logo, $\varphi_g(W) \subseteq W$, o que contradiz a hipótese de φ ser irredutível. Logo φ_g deve ser múltiplo da identidade para todo $g \in G$, concluindo a demonstração. ■

Definição 1.4.8 *Sejam G um grupo e $\varphi : G \to GL(V)$ uma representação linear Dizemos que φ é completamente redutível (ou semissimples) se existem $W_1, \ldots, W_n$ subespaços de V φ-invariantes tais que:*

(i) $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$.

(ii) As restrições de φ aos W_i's são todas irredutíveis

Exemplo 1.4.9 *Sejam F um corpo de característica 2 e $G = \{1, g\}$ um grupo de ordem 2. Definindo*

$$\begin{array}{cccc} T: & F^2 & \longrightarrow & F^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (x+y,y) \end{array}$$

temos que a representação linear

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & G & \longrightarrow & GL(F^2) \\ & g & \longmapsto & \varphi(g) = T \end{array}$$

não é completamente redutível, uma vez que $W = \langle (1,0)\rangle$ é o único subespaço φ-invariante de F^2.

Teorema 1.4.10 (Maschke 1) *Seja G um grupo finito cuja ordem não é divisível pela característica do corpo F. Se $\varphi : G \to GL(V)$ é uma representação linear de grau finito e W é um subespaço φ-invariante de V, então existe W_1 subespaço φ-invariante de V tal que $V = W \oplus W_1$. Consequentemente, φ é completamente redutível.*

Demonstração: Pode ser encontrada no capítulo 2, seção 6, de [L]. ∎

Do teorema acima decorre que se $\dim V$ é finita e a característica de F não divide $|G|$, então $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$, onde cada W_i é φ-invariante e a sub-representação $\varphi_i = \varphi|_{W_i}$ é irredutível. Nesse contexto, seja β_i uma base de W_i, para $i = 1, \ldots, n$ e considere $B_i(g) = [\varphi_i(g)]_{\beta_i}$, para todo $g \in G$. Sendo $\beta = \beta_1 \cup \cdots \cup \beta_n$, temos que β é uma base de V e que

$$[\varphi(g)]_\beta = \begin{bmatrix} B_1(g) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2(g) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & B_n(g) \end{bmatrix}.$$

1.5 Representações e FG-módulos

Nesta seção, objetivamos estudar a forte relação existente entre as F-representações lineares do grupo G e os FG-módulos. A partir disso, extrairemos importantes informações sobre álgebra de grupo FG.

Sejam G um grupo, V um espaço vetorial e $\varphi : G \to GL(V)$ uma representação linear de G em V. Considerando o produto $\cdot : FG \times V \to V$ definido por

$$\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right) \cdot v = \sum_{g\in G} \lambda_g \varphi_g(v),$$

verifica-se que este produto faz de V um FG-módulo à esquerda. Além disso, se W é um subespaço de V φ-invariante, tem-se $\varphi_g(w) \in W$ e daí $g \cdot w \in W$, para quaisquer $g \in G$ e $w \in W$. Uma vez que G é uma base de FG, segue que W é um submódulo do FG-módulo V.

Reciprocamente, considere V um FG-módulo à esquerda. Sendo $g \in G$, defina

$$\begin{array}{rccc} \psi_g : & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & \psi_g(v) = gv \end{array}.$$

Ocorre que $\psi_{g_1 g_2} = \psi_{g_1} \circ \psi_{g_2}$, para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ e $\psi_1 = Id_V$. Daí, $\psi_g \circ \psi_{g^{-1}} = \psi_{g^{-1}} \circ \psi_g = Id_V$ e assim $\psi_g \in GL(V)$. A aplicação

$$\begin{array}{rccc} \psi : & G & \longrightarrow & GL(V) \\ & g & \longmapsto & \psi_g \end{array}$$

é então uma representação linear de G em V. Se W é um submódulo do FG-módulo V, então $\alpha \cdot w \in W$, para quaisquer $\alpha \in FG$ e $w \in W$. Em particular, $g \cdot w \in W$ e daí $\psi_g(w) \in W$, para qualquer $g \in G$ e $w \in W$. Logo, W é um subespaço ψ-invariante de V.

Por meio das constatações acima, vemos que existe uma correspondência biunívoca entre as estruturas de FG-módulo à esquerda em V e as representações lineares de G em V.

Passemos ao próximo resultado.

Proposição 1.5.1 *Sejam $\varphi : G \to GL(V)$ e $\psi : G \to GL(W)$ representações lineares de G. Valem:*

(i) φ e ψ são equivalentes se, e somente se, os respectivos FG-módulos V e W são isomorfos.

(ii) φ é irredutível se, e somente se, o respectivo FG-módulo V é irredutível.

Demonstração: (i) Supondo que φ e ψ são equivalentes, temos que existe um isomorfismo (de espaços vetoriais) $T : V \to W$ satisfazendo $\psi_g T = T\varphi_g$ para todo $g \in G$. Logo, considerando os FG-módulos V e W correspondentes, temos

$$T(gv) = T(\varphi_g(v)) = \psi_g(T(v)) = gT(v),$$

para quaiquer $g \in G$ e $v \in V$. Mais ainda, como T é linear e G é uma base de FG, temos $T(\alpha v) = \alpha T(v)$, para quaisquer $\alpha \in FG$ e $v \in V$. Logo, T é um isomorfismo de FG-módulos.

Por outro lado, suponhamos que $T : V \to W$ seja um isomorfismo de FG-módulos. Assim, T é uma transformação linear bijetora que satisfaz $T(\alpha v) = \alpha T(v)$, para quaiquer $\alpha \in FG$ e $v \in V$. Logo,

$$(T\varphi_g)(v) = T(\varphi_g(v)) = T(gv) = gT(v) = \psi_g(T(v)) = (\psi_g T)(v)$$

e portanto $T\varphi_g = \psi_g T$ para todo $g \in G$, donde φ e ψ são equivalentes.

(ii) Pelo que vimos anteriormente, os submódulos do FG-módulo V correspondente a φ são exatamente os subespaços de φ-invariantes. Daí, segue o resultado. ■

Lema 1.5.2 *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e M e N dois A-módulos.*

(i) Suponha que N é um submódulo próprio de M. Se $M_1, M_2, \ldots, M_n$ são submódulos irredutíveis de M tais que $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$, então existem $j_1, \ldots, j_l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tais que $M = N \oplus M_{j_1} \oplus \cdots \oplus M_{j_l}$.

(ii) Suponha que N é um submódulo próprio de M. Se N_1 e N_2 são submódulos de M tais que $M = N \oplus N_1 = N \oplus N_2$, então $N_1 \simeq N_2$.

(iii) Suponha que M e N são $\mathcal{A}$-módulos isomorfos. Se $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ e $N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_m$, onde M_i e N_j são submódulos minimais de M e N, respectivamente, então $n = m$ e $M_i \simeq N_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ (reordenando os N_i's, se necessário).

Demonstração: Pode ser encontrada na seção 3.5 de [J]. ■

Decorre da proposição precedente que se uma representação $\varphi : G \to GL(V)$ é completamente redutível, então a decomposição de V em soma direta de subespaços φ-invariantes, com as respectivas sub-representações irredutíveis, é única, a menos de ordem dos subespaços e equivalência das sub-representações.

Agora consideramos G um grupo finito cuja ordem não é divisível pela característica do corpo F. Pelo Teorema 1.4.10, toda representação de G de grau finito é completamente redutível.

Considere a representação linear

$$\begin{array}{rccc} \rho : & G & \longrightarrow & GL(FG) \\ & g & \longmapsto & \rho_g \end{array}$$

onde $\rho_g : FG \to FG$ é definida por $\rho_g(\alpha) = g\alpha$. Chamamos esta representação de *representação regular à esquerda de G*. Tal representação é fiel e corresponde ao FG-módulo regular. Observe então que os subespaços ρ-invariantes de FG são exatamente os ideaIs à esquerda de FG. Desse modo, decorre do Teorema de 1.4.10 que se W é um ideal à esquerda de FG, então existe W_1 também ideal à esquerda de FG tal que $FG = W \oplus W_1$. Notando que os ideais minimais à esquerda de FG correspondem às sub-representações irredutíveis de ρ, pelo Teorema 1.4.10, segue-se que FG é uma soma direta de uma quantidade finita de ideais minimais à esquerda.

Lema 1.5.3 *Todo FG-módulo irredutível é isomorfo a um ideal minimal à esquerda de FG. Em outras palavras, toda representação linear irredutível de G é equivalente a uma sub-representação da representação regular à esquerda de G.*

Demonstração: Seja V um FG-módulo irredutível e fixemos $v_0 \in V - \{0\}$. Temos $FGv_0 = V$ e assim o homomorfismo de FG-módulos

$$\begin{array}{rccc} T: & FG & \longrightarrow & V \\ & \alpha & \longmapsto & T(\alpha) = \alpha v_0 \end{array}$$

é sobrejetivo.

Tomando I um ideal à esquerda de FG tal que $FG = I \oplus \ker(T)$, consideremos a restrição T_1 de T a I. Não é difícil mostrar que T_1 é um isomorfismo de FG-módulos e I é um ideal minimal à esquerda de FG. ■

Lema 1.5.4 *Sejam I e J ideais minimais à esquerda de FG. Então, I e J são isomorfos como FG-módulos se, e somente se, existe $\alpha \in FG$ tal que $J = I\alpha$.*

Demonstração: Seja $\varphi : I \to J$ um isomorfismo de FG-módulos. Sabemos que existe W ideal à esquerda de FG tal que $FG = I \oplus W$. Daí existem $\alpha_1 \in I$ e $w_1 \in W$ tais que $1 = \alpha_1 + w_1$. Assim, para qualquer $x \in I$, temos $x = x\alpha_1 + xw_1$ e daí devemos ter $xw_1 = 0$. Logo $\varphi(x) = \varphi(x\alpha_1) = x\varphi(\alpha_1)$. Sendo $\alpha = \varphi(\alpha_1)$, teremos $J = Im(\varphi) = I\alpha$.

Reciprocamente, supondo $J = I\alpha$, definamos

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & I & \longrightarrow & J \\ & x & \longmapsto & \alpha(x) = x\alpha \end{array}.$$

É fácil ver que φ é um isomorfismo de FG-módulos.

■

Nas hipóteses apresentadas, um fato conhecido é que G tem uma quantidade finita (a menos de equivalência) de representação irredutíveis. Seja m o número de representações irredutíveis (a menos de isomorfismo) de G. Tomemos $I_1, \ldots, I_m$ ideias minimais à esquerda de FG dois a dois não isomorfos como FG-módulos e $d_j = \dim_F I_j$. Observe então que todo ideal minimal à esquerda de FG é isomorfo como FG-módulo a exatamente um deles.

Para cada $j = 1, \ldots, m$, consideremos o ideal bilateral $J_j = I_j FG$. Do Lema 1.5.4, temos que J_j é exatamente a soma de todos os ideais minimais à esquerda de FG isomorfos (como FG-módulos) a I_j.

Nesse espírito, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.5.5 *Seja m o número de representações irredutíveis (a menos de equivalância) de G. Sejam $I_1, I_2, \ldots, I_m$ ideais minimais à esquerda dois a dois não isomorfos como FG-módulos e $d_j = \dim_F I_j$. Para cada $j = 1, \ldots, m$, se $J_j = I_j FG$, então $FG = J_1 \oplus J_2 \oplus \cdots \oplus J_m$.*

Demonstração: É fácil ver que $FG = J_1 + J_2 + \cdots + J_m$. No que segue, provaremos que a soma $J_1 + J_2 + \cdots + J_m$ é direta. Suponhamos que $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 0$, onde $x_j \in J_j$. Sem perder generalidade, suponha que $x_m \neq 0$ e considere I um ideal minimal à esquerda de FG contido em $(FG)x_m$. Como $x_m \in J_m \cap (J_1 + \cdots + J_{m-1})$, temos $I \subset J_m \cap (J_1 + \cdots + J_{m-1})$. Segue que I é isomorfo a I_m e também a I_j para algum $j \in \{1, \ldots, m-1\}$, o que é uma contradição. Devemos então ter $x_m = 0$ e analogamente concluímos que $x_1 = \cdots = x_{m-1} = 0$. Portanto temos $FG = J_1 \oplus J_2 \oplus \cdots \oplus J_m$. ■

Teorema 1.5.6 *Se F é um corpo algebricamente fechado cuja característica não divide a ordem de um grupo finito G, então:*

(i) O número de F-representações lineares irredutíveis de G é finito, a menos de equivalência, e é igual ao número de classes de conjugação de G.

(ii) Se $d_1, d_2, \ldots, d_m$ são os graus das F-representações irredutíveis (não equivalentes) de G, então $|G| = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_m^2$.

Demonstração: Pode ser encontrada em [H], da página 127 até 129. ■

1.6 Caracteres

Reservamos esta seção exclusivamente para a apresentação do conceito de caracter de um grupo G. A abordagem será concisa, e priorisará o que será importante para o andamento da dissertação.

Definição 1.6.1 *Seja $\varphi : G \to GL(V)$ uma representação de dimensão finita do grupo G. Chamamos*

(i) A aplicação $\chi_\varphi : G \to F$ dada por

$$\chi_\varphi(g) = tr(\varphi(g)), g \in G$$

de caracter de φ.

(ii) O caracter χ_φ de irredutível se a representação φ for irredutível.

Em alguns momentos, usaremos apenas o símbolo χ para denotar o caracter χ_φ.

Exemplo 1.6.2 *Se as representações $\varphi : G \to GL(V)$ e $\psi : G \to GL(V')$ são equivalentes, então existe um isomorfismo de espaços vetorias $P : V \to V'$ tal que $\varphi(g) = P^{-1}\psi(g)P$. Logo, $\chi_\varphi = \chi_\psi$ (ou seja, representações equivalentes têm caracteres iguais). Por outro lado, para quaisquer $g, x \in G$, temos $\chi(g) = tr(\varphi(g)) = tr(\varphi^{-1}(x)\varphi(g)\varphi(x)) = tr(\varphi(x^{-1}gx)) = \chi(x^{-1}gx)$. Devido a isso, dizemos que χ é uma função de classe.*

Seja $\varphi : G \to GL(V)$ uma representação completamente redutível de grau finito. Então existem $W_1, \ldots, W_m$ subespaços de V φ-invariantes tais que $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$ e cada sub-representação φ_j é irredutível. Sendo β_j uma base de W_j, para $j = 1, \ldots, m$ e $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \cdots \cup \beta_m$, temos que a matriz $[\varphi_g]_\beta$ é diagonal em blocos para cada $g \in G$. Sendo χ_j o caracter da representação φ_j, devemos ter $\chi = \chi_1 + \cdots + \chi_m$. Mais geralmente, qualquer caracter do grupo G pode ser decomposto como soma de caracteres irredutíveis, como atesta a próxima proposição.

Teorema 1.6.3 *Todo caracter de um grupo G é uma soma de caracteres irredutíveis.*

Demonstração: Pode ser encontrada na página 126 de [H]. ■

Observação 1.6.4 *Sendo G um grupo finito, temos que o número de F-caracteres irredutíveis de G é finito. Sendo $\chi_1, \ldots, \chi_m$ esses caracteres irredutíveis, segue do resultado anterior que dado χ um F-caracter de G, existem $n_1, \ldots, n_m$ inteiros não negativos tais que*

$$\chi = n_1\chi_1 + \cdots + n_m\chi_m.$$

Teorema 1.6.5 (Relações de ortogonalidade) *Sejam G um grupo finito e $\varphi : G \to GL(V)$ e $\psi : G \to GL(W)$ representações irredutíveis de G, com caracteres χ_1 e χ_2, respectivamente. Então:*

(i) Se φ e ψ são não equivalentes, então $\sum_{g\in G} \chi_2(g^{-1})\chi_1(g) = 0$.

(ii) Se F é algebricamente fechado e a característica de F não divide $|G|$, então $\sum_{g\in G} \chi_1(g^{-1})\chi_1(g) = |G|$.

(iii) Se F é algebricamente fechado, a característica de F não divide $|G|$ e φ e ψ não são equivalentes, então $\chi_1 \neq \chi_2$.

Demonstração: Pode ser encontrada na seção 5 do capítulo 18 de [L]. ■ .

Como corolário do último resultado, extraímos os seguintes fatos.

Corolário 1.6.6 *Sendo F um corpo de característica zero e G um grupo finito, valem:*

(i) Se η é um caracter de G, então $\sum_{g\in G} \eta(g^{-1})\eta(g) = q|G|$ para algum inteiro positivo $q \in F$.

(ii) Se η é um caracter de G tal que $\sum_{g\in G} \eta(g^{-1})\eta(g) = |G|$, então η é irredutível.

(iii) Caracteres de F-representações irredutíveis e não equivalentes de G são distintos.

Demonstração: Pode ser encontrada na seção 5 do capítulo 18 de [L]. ■

Observação 1.6.7 *Dizemos que uma função f tendo G como domínio é uma função de classe se f é constante em cada classe de conjugação de G. Seja $C(G)$ o espaço vetorial de todas as funções de classe de G em F . Podemos definir em $C(G)$ um produto interno da seguinte maneira:*

$$(\chi, \psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \chi(g)\psi(g^{-1}) \text{ para quaisquer } \chi, \psi \in C(G).$$

Pelo que já vimos, se χ_1 e χ_2 são caracteres irredutíveis distintos de G, então $(\chi_1, \chi_2) = 0$, ou seja, χ_1 e χ_2 são ortogonias em relação a este produto interno.

Proposição 1.6.8 *Sejam F um corpo cuja característica não divide a ordem de um grupo G. Considerando $C = \{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_h\}$ o conjunto dos F-caracteres irredutíveis de G, temos:*

(i) Se F é algebricamente fechado, então $(\chi_i, \chi_i) = 1$ para todo $i = 1, \ldots, h$.

(ii) Se a caracterísrica de F é zero, então (χ_i, χ_i) é um inteiro positivo para todo $i = 1, \ldots, h$.

(iii) Se a característica de F é zero ou F é algebricmente fechado, então C é um subconjunto de $C(G)$ linearmente independente.

Demonstração: Os itens (i) e (ii) seguem das relações de ortogonalidade.

(iii) Suponhamos $\lambda_1, \ldots, \lambda_h \in F$ tais que $0 = \lambda_1\chi_1 + \cdots + \lambda_h\chi_h$. Fixado qualquer $i \in \{1, 2, \ldots, h\}$, segue que

$$0 = (\lambda_1\chi_1 + \cdots + \lambda_h\chi_h, \chi_i) = \lambda_1(\chi_1, \chi_i) + \cdots + \lambda_h(\chi_h, \chi_i) = \lambda_i(\chi_i, \chi_i),$$

o que encerra a demonstração.

■

Fixemos F um corpo algebricamente fechado cuja característica não divida $|G|$. Neste contexto, a propriedade essencial do produto interno definido anteriormente é que os caracteres irredutíveis de G formam uma base ortonormal para $C(G)$. Com efeito, o fato de o conjunto de caracteres irredutíveis $C = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$ ser um conjunto ortonormal decorre trivialmente da proposição acima. Não é difícil ver que a dimensão de $C(G)$ é igual ao número de classes de conjugação de G. Mas, o número de classes de conjugação de G coincide com o número de caracteres irredutíveis. Desde que C é um conjunto LI em $C(G)$, temos justificada a afirmação.

Já sabemos que representações equivalentes têm caracteres iguais. O próximo resultado se refere à recíproca deste fato.

Teorema 1.6.9 *Se F é um corpo de característica zero, então duas F-representações lineares de um grupo G que têm o mesmo caracter são equivalentes.*

Demonstração: Pode ser encontrada na página 140 de [H]. ■

Exemplo 1.6.10 *Consideremos $G = \langle g \rangle$ um grupo cíclico de ordem n e F um corpo algebricamente fechado. Desde que o corpo F é algebricamente fechado, existe $r \in F$ raiz primitiva de $x^n - 1$. Nosso objetivo é exibir todos os caracteres irredutíveis de G sobre F.*

Para todo $j = 0, \ldots, n-1$, defina a aplicação $\varphi_j : G \to GL(F)$ por $\varphi_j(g^k) = T_{jk} : F \to F$, onde $T_{jk}(1) = r^{jk}$. Claramente, φ_j é uma representação irredutível de G. Não é difícil ver que se $i \neq j$, tem-se que φ_i e φ_j não são isomorfas. Uma vez que G tem n representações irredutíveis sobre F (pois o número de representações irredutíveis de G é $|G| = n$), tem-se que $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ são, a menos de isomorfismo, todas as F-representações irredutíveis de G.

Logo, os caracteres irredutíveis de G sobre F são $\chi_j(g^k) = tr(T_{jk}) = r^{jk}$ para $j = 0, \ldots, n-1$

Extraindo a ideia do exemplo acima, podemos adaptar o argumento para determinar todos os caracteres irredutíveis e não isomorfos de um grupo G abeliano e finito. De fato, pelo Teorema Fundamental dos Grupos Abelianos Finitos, todo grupo abeliano e finito pode ser escrito como produto direto de grupos cíclicos. Por isso, podemos escrever $G = H_1 \times \cdots \times H_l$, onde $H_j = \langle g_j \rangle$ é um grupo cíclico de ordem n_j, para todo $j = 1, \ldots, l$. Neste caso, G deve ter $n_1 \cdots n_l$ caracteres irredutíveis. Para cada $p_1 = 0, \ldots, n_1 - 1; \ldots; p_l = 0, \ldots, n_l - 1$, defina $\chi_{p_1 \cdots p_l} : G \to F$ por $\chi_{p_1 \cdots p_l}(g_1^i \cdots g_l^j) = r_1^{ip_1} \cdots r_l^{jp_l}$, onde r_t é uma raiz primitiva do polinômio $x^{n_t} - 1$, para todo $t = 1, \ldots, l$. Tais aplicações são os $n_1 \cdots n_l$ caracteres irredutíveis de G.

Vamos denotar por $\widehat{G}$ o conjunto dos caracteres irredutíveis das F-representações de G exibidas no exemplo acima.

Proposição 1.6.11 *Sejam G um grupo abeliano e finito e F um corpo algebricamte fechado. Então:*

(i) O conjunto $\widehat{G}$ é um grupo com a operação $\chi_i\chi_j(g) = \chi_i(g)\chi_j(g)$ para todo $g \in G$.

(ii) Os grupos G e $\widehat{G}$ são isomorfos.

Demonstração: Por simplicidade de notação, faremos a demonstração supondo o grupo G cíclico de ordem n, isto é, $G = \langle g \rangle$, com $g^n = 1$. Também adotaremos a notação do Exemplo 1.6.10 para os caracteres irredutíveis listados anteriormente. Observe inicialmente que para quaisquer χ_i, χ_j, a aplicação $\chi_i\chi_j$ é um caracter irredutível, logo temos uma operação bem definida em $\widehat{G}$. Ademais, sendo G abeliano, tem-se $\chi_i\chi_j = \chi_j\chi_i$. Agora note que χ_0 é elemento neutro para essa operação, pois

$$\chi_0\chi_j(g^k) = \chi_0(g^k)\chi_j(g^k) = r^{0k}\chi_j = \chi_j(g^k).$$

Por fim, sendo $\chi_i \in \widehat{G}$, é fácil ver que χ_{n-i} é o inverso de χ_i na operação definida.

Provaremos agora que os grupos G e $\widehat{G}$ são isomorfos. Para isso, basta verificar que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \theta : & G & \longrightarrow & \widehat{G} \\ & g^i & \longmapsto & \chi_i \end{array}$$

é um isomorfismo. ■

Exemplo 1.6.12 *Sejam $\mathcal{A}$ um F-álgebra, com F algebricamente fechado e de característica zero e $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A_g$ uma G-graduação abeliana e finita. Para todo $\chi \in \widehat{G}$, sendo $a = \sum a_g \in \mathcal{A}$, definamos a aplicação $\chi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dada por $\chi_{\mathcal{A}}(a) = \sum \chi(g) a_g$. Afirmamos que $\chi_{\mathcal{A}} \in Aut(\mathcal{A})$. Inicialmente, perceba que a restrição de $\chi_{\mathcal{A}}$ a cada subespaço A_g está bem definida e, além disso, é um isomorfismo de espaços vetoriais. Assim, desde que $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A_g$, decorre que $\chi_{\mathcal{A}}$ é um operador linear inversível do espaço vetorial $\mathcal{A}$. Dados $a, b \in \mathcal{A}$, afirmamos que $\chi_{\mathcal{A}}(ab) = \chi_{\mathcal{A}}(a)\chi_{\mathcal{A}}(b)$. De fato, note que $a_g b_h \in \mathcal{A}_{gh}$ para quaisquer $g, h \in G$. Fixados $g, h \in G$, vamos denotar por c o produto $a_g b_h$. Devemos ter $\chi_{\mathcal{A}}(a_g b_h) = \chi_{\mathcal{A}}(c) = \chi(gh)c = (\chi(g)\chi(h))(a_g a_h) = (\chi(g)a_g)(\chi(h)b_h) = \chi_{\mathcal{A}}(a_g)\chi_{\mathcal{A}}(b_h)$.*

Mais geralmente, se $a = \sum a_g$ e $b = \sum b_h$ temos $ab = \sum a_g b_h$. Assim, $\chi_{\mathcal{A}}(ab) = \chi_{\mathcal{A}}(\sum a_g b_h) = \sum \chi_{\mathcal{A}}(a_g b_h) = \sum \chi_{\mathcal{A}}(a_g)\chi_{\mathcal{A}}(b_h) = \sum(\chi(g)a_g)(\chi(h)b_h) = \chi_{\mathcal{A}}(a)\chi_{\mathcal{A}}(b)$. Logo, $\chi_{\mathcal{A}} \in Aut(\mathcal{A})$.

Cometendo um abuso de notação, escreveremos $\chi_{\mathcal{A}} = \chi$ e $\widehat{G} \subset Aut(\mathcal{A})$. Verifica-se que o conjunto de operadores $\widehat{G}$ é um subgrupo abeliano do grupo $Aut(\mathcal{A})$.

1.7 Anéis Semissimples

Para a elaboração desta seção, utilizamos como referência principal o capítulo 1 do livro [H]. As demonstrações omitidas dos resultados ora apresentados podem ser encontradas nesta referência.

Novamente ressaltamos que, no que segue, sempre estaremos considerando R um anel associativo e com unidade.

Definição 1.7.1 *Seja R um anel. Dizemos que*

(i) R é semissimples se $J(R) = 0$.

(ii) R é Artiniano (Noetheriano) à direita se toda cadeia decrescente (crescente, respectivamente) de ideais à direita R

$$I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots \ (I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_n \subset \ldots)$$

é estacionária, ou seja, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $I_n = I_{n_0}$ para todo $n \geq n_0$.

(iii) R é um anel simples se R não possui ideais não triviais.

(iv) Um ideal I de R é nilpotente se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I^n = 0$.

Exemplo 1.7.2 *Seja F um corpo. Temos que 0 é o único ideal próprio de F, logo é maximal. Desse modo, $J(F) = 0$ e assim F pode ser visto como um anel semissimples.*

Exemplo 1.7.3 *Sejam R um anel e I um ideal de R. Afirmamos que se R for semissimples, tem-se que I também o é. De fato, pela Proposição 1.3.25, temos $J(I) = I \cap J(R)$, e como $J(R) = 0$, segue-se que I é semissimples.*

Exemplo 1.7.4 *Sendo $\mathcal{A}$ uma álgebra de dimensão finita, claramente $\mathcal{A}$ é Artiniana. Consequentemente, as F-álgebras $M_n(F), UT_n(F)$ e FG são Artinianas, sendo G um grupo finito.*

Para o andamento da dissertação, serão necessários alguns teoremas clássicos da teoria de anéis não comutativos. Nos concentraremos apenas no enunciado desses teoremas, deixando a demonstração como uma consulta à bibliografia a ser realizada pelo leitor interessado. Cada um dos seguintes resultados, e suas respectivas provas, podem ser encontrados no capítulo 1 de [H].

Teorema 1.7.5 *Seja R um anel Artiniano. Tem-se:*

(i) *Se R é semissimples, então R é soma direta de um número finito de subanéis simples.*

(ii) *Se R é semissimples e $R = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$, sendo A_i subanel simples para todo i, então os A_i percorrem todos os ideias minimais de R.*

(iii) *$J(R)$ é um ideal nilpotente de R.*

(iv) *Se I é um ideal nilpotente de R, então $I \subset J(R)$.*

(v) *Se R é semissimples e $I \neq 0$ é um ideal à direita de R, então existe $e \in R$ idempotente tal que $I = eR$.*

Outro resultado interessante é o seguinte:

Proposição 1.7.6 *Os anéis R e $R/J(R)$ têm os mesmos módulos simples à esquerda.*

O teorema seguinte é clássico e, muitas vezes, se revela de grande utilidade.

Teorema 1.7.7 (Wedderburn-Artin) *Seja R um anel Artiniano semissimples. Então,*

$$R \simeq M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(D_k),$$

onde D_i é um anel com divisão, para todo $i = 1, \ldots, k$.

Demonstração: Pode ser encontrada na página 50 de [H]. ■

Como consequência do que já foi enunciado, temos o seguinte resultado:

Corolário 1.7.8 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra semissimples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Então o número de somandos simples de $\mathcal{A}$ é igual à dimensão do centro de $\mathcal{A}$ sobre F.*

Demonstração: Pode ser encontrada na página 51 de [H]. ■

Lema 1.7.9 (Teorema de Maschke) *Sejam G um grupo finito e F um corpo de característica zero ou p onde p não divide $|G|$. Então a álgebra FG é semissimples.*

Demonstração: Dado $a \in FG$, defina $T_a : FG \to FG$ como $xT_a = xa$ (estamos usando a notação xT_a para a avaliação de T_a em x). É claro que T_a é um operador linear de FG. Além disso, a aplicação $\psi : FG \to GL(FG)$ dada por $\psi(a) = T_a$ é um isomorfismo entre FG e sua imagem $\psi(FG)$.

Escrevendo T_a como uma matriz(em relação à base G), temos:

(i) Se $g \neq 1$, então $tr(T_g) = 0$, onde $g \in G$.

(ii) $tr(T_1) = |G|$.

Seja J o radical de Jacobson de FG e suponha $0 \neq x \in J$. Assim, existem $\alpha_j \in F$ e $g_j \in G$ verificando $x = \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_n g_n$. Multiplicando a última igualdade por g_i^{-1} adequado e pelo fato de J ser um ideal de FG, podemos supor que $x = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n g_n$, com $\alpha_1 \neq 0$. Desse modo, $T_x = \alpha_1 T_1 + \cdots + \alpha_n T_n$ é nilpotende, já que J é nilpotente. Logo, $0 = tr(T_x) = \alpha_1 |G|$. Uma vez que $|G| \neq 0$ em F, segue que $\alpha_1 = 0$, o que é uma contradição.

Assim, $J = 0$ e a álgebra FG é semissimples.

■

Consideremos G um grupo abeliano e finito e F um corpo algebricamente fechado de característica zero. Como aplicação dos resultados anteriores, no que segue apresentaremos uma decomposição para a álgebra de grupo FG em soma de ideais minimais idempotentes. Tal fato será importante para o estabelecimento da dualidade entre G-ações e G-graduações em uma álgebra associativa e, devido à sua importância para os nossos própositos, será enunciado como lema.

Lema 1.7.10 *Sejam G um grupo abeliano e finito de ordem n e F um corpo algebricamente fechado de característica zero. Então existem elementos $f_1, \ldots, f_n \in FG$ idempotentes centrais em FG tais que*

$$FG = Ff_1 \oplus \cdots \oplus Ff_n.$$

Demonstração: Note que FG é Artiniano e semissimples. Assim, pelo item (i) do Teorema 1.7.5, existem $B_1, ..., B_k$ subanéis simples de FG satisfazendo $FG = B_1 \oplus \cdots \oplus B_k$. Mas pelo item (ii) do mesmo teorema, segue que $B_1, \ldots, B_k$ são todos os ideais minimais de FG. Aplicando o item (v) do referido teorema, existe $f_i \in FG$ idempotente tal que $B_i = FGf_i$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Como estamos nas hipóteses desejáveis, usando o fato de G ser abeliano, podemos aplicar o Corolário 1.7.8 e concluir que $k = n$. Afirmamos que $f_1, \ldots, f_n$ é uma base de FG como F-espaço vetorial. De fato, sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ tais que $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n = 0$. Multiplicando a última igualdade a direita por qualquer f_j, temos $\alpha_j f_j = 0$, donde $\alpha_j = 0$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Assim, concluímos que $FG = Ff_1 \oplus \cdots \oplus Ff_n$, finalizando a demonstração. ■

Dada uma decomposição acima, é possível escrever $FG = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$, onde os U_i's são ideais minimais e bilaterais de FG. Daí obtem-se $f_1 \in U_1, \ldots, f_r \in U_r$ idempotentes e ortogonais (isto é $f_i f_i = f_i$ e $f_i f_j = 0$ para $i, j = 1, \ldots, n$, com $i \neq j$) satisfazendo $1 = f_1 + \cdots + f_r$ e $U_i = FGf_i$, para todo $i = 1, \ldots, r$. Ademais, $f_1, \ldots, f_r$ são centrais em FG.

Lema 1.7.11 *Sejam G um grupo abeliano finito, F um corpo algebricamente fechado de característica zero e χ_i o caracter da sub-representação $\rho_i : G \to GL(U_i)$ da representação regular. Então o idempotende $f_i \in U_i$ é dado por $f_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1})g$.*

Demonstração: Pode ser encontrada em [ML], teorema 5.1.11. ■

Observação 1.7.12 *Pelo último lema, devemos ter*

$$f_i = \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1})g, \text{ para quaisquer } i = 1, \ldots, n.$$

Sendo $g \in G$, temos $gf_i = \chi_i(g)f_i$. Pela extensão dos caracteres de G a FG, temos que $\chi_i(f_j) = \delta_{ij}$ é o delta de Kronecker.

1.8 A Dualidade entre G-graduações Abelianas Finitas e G-ações

Consideremos G um grupo abeliano e finito e $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa G-graduada. Com as informações contidas nas seções anteriores, estamos em condições de estabelecer uma dualidade entre G-ações e G-graduações sobre $\mathcal{A}$. Este fato terá grande utilidade quando formos classificar as G-graduações sobre a álgebra $UT_n(F)$.

Observação 1.8.1 *Seja $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra com uma graduação abeliana e finita. Sendo $a \in \mathcal{A}$, com $a = \sum_{g\in G} a_g$, e $\chi \in \widehat{G}$, lembramos que χ age por automorfismo sobre $\mathcal{A}$ da seguinte forma: $\chi(a) = \sum_{g\in G} \chi(g)a_g$. Ao longo da seção, sempre que falarmos em $\widehat{G}$-ações sobre $\mathcal{A}$, estaremos nos referindo a este tipo de ação.*

Observação 1.8.2 *Seja $\mathcal{A}$ uma F-álgebra e suponha que o grupo G age sobre $\mathcal{A}$. Sendo $g \in G$ e $a \in \mathcal{A}$ denotaremos a ação de g sobre a por $g(a) = a^g$. Podemos estender a última ação a uma ação de FG sobre $\mathcal{A}$. Com efeito, sendo $\sum_i \alpha_i g_i \in FG$, defina $a^{\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_n g_n} = \alpha_1 a^{g_1} + \cdots + \alpha_n a^{g_n}$. Mostra-se que, neste caso, teremos uma ação de FG sobre $\mathcal{A}$ que estende a ação inicial.*

Proposição 1.8.3 *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero e G um grupo abeliano e finito, onde $|G| = n$. Então uma G-ação em $\mathcal{A}$ induz uma G-graduação e reciprocamente.*

Demonstração: Primeiramente, suponhamos que o grupo G age sobre a álgebra $\mathcal{A}$. Vamos utilizar o notação exponencial para denotar tal ação. Pelo que vimos no final da seção anterior, podemos escrever $FG = Ff_1 \oplus \cdots \oplus Ff_n$ e sendo $\chi_1, \ldots, \chi_n$ os caracteres irredutíveis de G, teremos $\chi_i(f_j) = \delta_{ij}$, para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$. Nesse contexto, para cada $i = 1, \ldots, n$, definamos:

$$A_{\chi_i} = \{a \in \mathcal{A} : a^g = \chi_i(g)a, \forall g \in G\}.$$

Note que pela Observação 1.7.12, sendo $g \in G$, temos $gf_i = \chi_i(g)f_i$. Daí, $(a^{f_i})^g = a^{\chi_i(g)f_i} = \chi_i(g)a^{f_i}$, donde concluímos que $a^{f_i} \in A_{\chi_i}$.

Ademais, afirmamos que A_{χ_i} é o subespaço gerado por elementos do tipo a^{f_i}, onde $a \in \mathcal{A}$. De fato, observando que $1 = f_1 + \cdots + f_n$, temos que $a = a^1 = a^{f_1 + \cdots + f_n} = a^{f_1} + \cdots + a^{f_n} \in A_{\chi_1} + \cdots + A_{\chi_n}$. Logo, sendo $g \in G$ e $a \in \mathcal{A}$, temos

$$a^g = a^{f_1 g} + \cdots + a^{f_n g} = \chi_1(g)a^{f_1} + \cdots + \chi_n(g)a^{f_n}.$$

Suponhamos que $a \in A_{\chi_i}$. Nesta caso, decorre que $a^g = \chi_i(g)a$. Comparando as duas igualdades para a^g, decorre que $(\chi_j(g) - \chi_i(g))a^{f_j} = 0$, para quaisquer $j = 1, \ldots, n$ e $g \in G$. Daí, $a^{f_j} = 0$, se $j \neq i$. Portanto, $a = a^{f_i}$, o que confirma a afirmação feita. Destes fatos, obtemos

$$\mathcal{A} = \oplus_{\chi \in \widehat{G}} A_\chi.$$

Afirmamos que a decomposição apresentada acima é uma $\widehat{G}$-graduação. De fato, sejam $a \in A_{\chi_i}$ e $b \in A_{\chi_j}$. Uma vez que G age por automorfismos sobre $\mathcal{A}$, temos $(ab)^g = a^g b^g$, para todo $g \in G$. Assim,

$$(ab)^g = a^g b^g = (\chi_i(g)a)(\chi_j(g)b) = (\chi_i(g)\chi_j(g))(ab) = (\chi_i\chi_j(g))ab,$$

donde $ab \in A_{\chi_i\chi_j}$. Do último fato, tem-se que $\mathcal{A}$ é $\widehat{G}$-graduada e, como $G \simeq \widehat{G}$, concluímos que $\mathcal{A}$ é G-graduada.

A recíproca fica por conta do Exemplo 1.6.12. ■

Corolário 1.8.4 *Suponhamos válidas as mesmas hipóteses do último teorema e seja V um subespaço da álgebra $\mathcal{A}$. Tem-se que V é homogêneo na G-graduação se, e somente se, V é invariante pela $\widehat{G}$-ação determinada pela G-graduação da álgebra $\mathcal{A}$. Em particular, um elemento $a \in \mathcal{A}$ é homogêneo na G-graduação se, e somente se, a é autovetor de qualquer $\chi \in \widehat{G}$.*

Demonstração: Suponhamos, de início, que $V = \oplus_{g \in G} V_g$, com $V_g = A_g \cap V$. Da maneira como χ age sobre $\mathcal{A}$, segue que $\chi(V_g) = V_g$ e, assim, $\chi(V) = V$. Reciprocamente, suponhamos agora que V seja $\widehat{G}$-invariante. Por contradição, suponhamos que V não seja homogêneo na G-graduação. Assim, existe $v = v_{g_1} + \cdots + v_{g_t} \in V$, com $g_1, \ldots, g_t \in G$ e $v_{g_1}, \ldots, v_{g_t}$ distintos e não pertencentes a V. Seja $\chi \in \widehat{G}$ tal que $\chi(g_1) = \lambda$ e $\chi(g_2) = \mu$, com $\lambda \neq \mu$ (note que da forma como são os elementos de $\widehat{G}$, é possível escolher χ nessas condições). Neste caso,

$$u = \lambda v - \chi(v) = (\lambda - \mu)v_{g_2} + \cdots$$

pertence a V. Aplicando o mesmo procedimento iteradamente, teremos que a última das componentes $v_{g_2}, \ldots, v_{g_t}$ pertencerá a V, o que é uma contradição. Concluímos dessa forma que V é G-graduado.

Para concluir a última parte da afirmação, dado $a \in \mathcal{A}$, basta aplicar a primeira parte do corolário ao subespaço $V = \langle a \rangle$. ■

O próximo resultado nos fornece um critério, em termos de $\widehat{G}$, para identificar se um certo elemento $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A_g$ é homogêneo na G-graduação.

Lema 1.8.5 *Sejam F um corpo algebricamente fechado de característica zero e $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A_g$ uma G-graduação abeliana finita e $a \in \mathcal{A} - \{0\}$. Então $a \in A_1$ se, e somente se, $\chi(a) = a$, para todo $\chi \in \widehat{G}$.*

Demonstração: Suponhamos de início que $a \in A_1$. Assim, para todo $\chi \in \widehat{G}$, ocorre que $\chi(a) = \chi(1)a = 1_F a = a$.

Suponhamos agora que $\chi(a) = a$, para qualquer $\chi \in \widehat{G}$. Neste caso, a é autovetor para todo $\chi \in \widehat{G}$ e, pelo corolário anterior, segue-se que a é homogêneo na G-graduação. Digamos que $a \in A_g$, para algum $g \in G$. Assim devemos ter $a = \chi(a) = \chi(g)a$, para todo $\chi \in \widehat{G}$. Segue-se daí que $g = 1$ e, assim, $a \in A_1$, o que encerra a demonstração. ■

Exemplo 1.8.6 *Seja $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra com uma G-graduação abeliana e finita. Desde que o radical de Jacobson $J(\mathcal{A})$ é a interseção de todos os ideais maximais à direita de $\mathcal{A}$ e automorfismos preservam ideais maximais à direita, tem-se que $J(\mathcal{A})$ é invariante por automorfismos de $\mathcal{A}$. Em particular, temos $\chi(J(\mathcal{A})) = J(\mathcal{A})$, para todo $\chi \in \widehat{G}$. Assim, pelo último resultado, devemos ter que $J(\mathcal{A})$ é um subespaço de $\mathcal{A}$ homogêneo na G-graduação.*

Exemplo 1.8.7 *Consideremos $\mathcal{A} = UT_n(F) = \oplus_{g\in G} A_g$ uma G-graduação abeliana e finita. Seja $X = \{x \in \mathcal{A} : xJ(\mathcal{A}) = 0\}$ (anulador à esquerda de $J(\mathcal{A})$ em $\mathcal{A}$). Afirmamos que X é homogêneo na G-graduação. De fato, dado $x \in X$ e $a \in J(\mathcal{A})$, temos $x = x_1 + \cdots + x_n$ e $a = a_1 + \cdots + a_n$, onde $x_j, a_j \in A_{g_j}$. Assim, como cada $a_i \in J(\mathcal{A})$ (pelo exemplo anterior), para todo $i = 1, \ldots, n$, temos $0 = xa_i = (x_1 + \cdots + x_n)a_i = x_1 a_i + \cdots + x_n a_i$ e pela unicidade da decomposição do zero, decorre que $x_j a_i = 0$, para todo $j = 1, \ldots, n$, donde $x_j a = 0$. Assim, $x_j \in X$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Segue-se que X é homogêneo na G-graduação.*

Por outro lado, mostra-se que $X = \langle E_{1n}, E_{2n}, \ldots, E_{nn} \rangle$. Assim, sendo $W = \langle E_{1n}, \ldots, E_{n-1,n} \rangle$, temos $W = J(\mathcal{A}) \cap X$. Deste fato segue-se que W é homogêneo na G-graduação.

Mais geralmente, sendo $\mathfrak{B}$ um álgebra qualquer G-graduada e $C \subset \mathfrak{B}$ um ideal G-graduado de $\mathfrak{B}$, tem-se que o anulador de C é G-graduado.

Capítulo 2

Classificação das Graduações de Grupo na Álgebra $UT_n(F)$

O presente capítulo foi reservado para o estudo e a apresentação dos resultados dos artigos [VZ1] e [VZ2]. No Capítulo 1, foram apresentados resultados que se revelarão importantes neste momento. Procurando facilitar a leitura, sempre que fizermos uso de fatos já demonstrados, faremos menção a isso.

Em todo o capítulo, reservamos a letra $\mathcal{A}$ para designar a álgebra $UT_n(F)$, onde F é um corpo. Nesta etapa do nosso estudo, nos propomos a demonstrar que qualquer G-graduação $\mathcal{A} = \oplus_{g \in G} A_g$ é isomorfa a alguma G-graduação elementar de $\mathcal{A}$. Inicialmente, faremos isto impondo que G seja abeliano e finito e que F seja algebricamente fechado e de característica zero, tendo como referência o primeiro artigo supracitado. Em seguida, faremos o caso geral, sem impor condições sobre G e F, que pode ser encontrado no segundo artigo mencionado anteriormente.

2.1 Lemas Iniciais

Os fatos expostos nesta seção são típicos de Álgebra Linear, mas se farão indispensáveis posteriomente. Ao longo dessa seção sempre estaremos supondo F um corpo algebricamente fechado e de característica zero e G um grupo abeliano e finito.

Lema 2.1.1 *Seja V um F-espaço vetorial de dimensão finita, onde F é um corpo algebricamente fechado. Se $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ é um subgrupo abeliano de $GL(V)$ formado por operadores diagonalizáveis, então os operadores $h_1, \dots, h_n$ podem ser diagonalizados simultaneamente.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente que $n = 2$ e assim $H = \{h_1, h_2\}$. Sendo V_λ um autoespaço de h_1, provaremos que V_λ é h_2-invariante. De fato, sendo $v \in V_\lambda$, temos que $h_1(v) = \lambda v$. Daí, $h_1(h_2(v)) = h_2(h_1(v)) = \lambda h_2(v)$ e assim $h_2(v) \in V_\lambda$. Portanto, V_λ é h_2-invariante. Logo, escolhendo para V_λ uma base β formada por autovetores de h_2, tem-se que β também é formada por autovetores de h_1. Assim, h_1 e h_2 podem ser diagonalizados simultaneamente. Por indução obtemos o caso geral. ∎

Lema 2.1.2 *Sejam $\mathfrak{B}$ uma F-álgebra e I um ideal de $\mathfrak{B}$ invariante pelos elementos de $Aut(\mathfrak{B})$. Então, cada $\phi \in Aut(\mathfrak{B})$ induz um automorfismo $\overline{\phi} \in Aut(\mathfrak{B}/I)$ dado por*

$$\begin{array}{cccc} \overline{\phi}: & \mathfrak{B}/I & \longrightarrow & \mathfrak{B}/I \\ & b + I & \longmapsto & \phi(b) + I \end{array}.$$

Demonstração: A demonstração é imediata. ∎

Dado um operador $\varphi \in Aut(\mathfrak{B})$, também usaremos a letra φ para denotar o automorfismo $\overline{\varphi} \in Aut(\mathfrak{B}/I)$ induzido por φ. O contexto impedirá ambiguidades.

Observação 2.1.3 *Consideremos $\mathcal{A} = UT_n(F)$ e $W = \langle E_{1n}, \dots, E_{n-1,n}\rangle$. Já vimos no Exemplo 1.3.26 que $J(\mathcal{A}/W) = J(\rho(UT_{n-1}) \oplus C) = J(\rho(UT_{n-1}))$, onde $C = \rho(\langle E_{nn}\rangle)$. Não é difícil ver que $\langle \rho(E_{nn}), \rho(E_{1,n-1})\rangle$ é o anulador bilateral de $J(\mathcal{A}/W)$ e, pelo Exemplo 1.8.7, é homogêneo na G-graduação de A/W. Desse modo, sendo $\varphi \in Aut(\mathcal{A})$, existem $\alpha, \beta \in F$ tais que $\varphi(\rho(E_{nn})) = \alpha\rho(E_{nn}) + \beta\rho(E_{1,n-1})$. Em virtude de $E_{nn}^2 = E_{nn}$ é imediato que $\alpha = 1$ e $\beta = 0$. Consequentemente, $C = \rho(\langle E_{nn}\rangle)$ é homogêneo na G-graduação. Logo, $\rho(UT_{n-1})$ é homogêneo na G-graduação, pois é o anulador de C.*

2.2 Graduações Abelianas e Finitas em $UT_n(F)$

Inicialmente, iremos classificar as G-graduações abelianas e finitas sobre a álgebra $\mathcal{A}$, supondo F um corpo algebricamente fechado e de característica zero. Os resultados ora apresentados podem ser encontrados no artigo [VZ1] escrito por A. Valenti e M.V. Zaicev. Como será percebido, faremos uso frequente de fatos acerca de Representações de Grupos que abordamos no capítulo anterior.

Lema 2.2.1 *Seja $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A_g$ uma G-graduação abeliana e finita. Então existem $Y_1, \ldots, Y_n \in J(\mathcal{A})$ tais que as matrizes $e_1 = E_{11}+Y_1, \ldots, e_n = E_{nn}+Y_n$ são ortogonais, idempotentes e pertencem à componente neutral da G-graduação considerada.*

Demonstração: A prova será por indução em n, sendo o caso $n = 1$ imediato. Suponhamos por indução que o resultado seja válido para todo $s < n$. Pelo que vimos no Exemplo 1.8.7, o ideal $W = \langle E_{1n}, \ldots, E_{n-1,n}\rangle$ é G-graduado e assim, pelo Exemplo 1.2.9, a álgebra quociente $\mathcal{A}/W$ é G-graduada. Sendo

$$\begin{array}{rccc} \rho: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}/W \\ & a & \longmapsto & \overline{a} = a + W \end{array}$$

a projeção canônica sobre W, vimos no Exemplo 1.3.26 que $UT_{n-1}(F) \simeq \rho(UT_{n-1}(F))$. Como pela Observação 2.1.3 $\rho(UT_{n-1}(F))$ é G-graduado, tem-se que $UT_{n-1} \subset \mathcal{A}$ é G-graduado. Assim, por hipótese de indução, existem $Y'_1, \ldots, Y'_{n-1} \in J(UT_{n-1}) = \langle E_{ij} : 1 \le i < j \le n-1\rangle$ tais que as matrizes $e'_1 = E_{11} + Y'_1, \ldots, e'_{n-1} = E_{n-1} + Y'_{n-1}$ são ortogonais, idempotentes e pertencem à componente neutral da G-graduação de UT_{n-1}. Consequentemente, $\overline{e'_j} = e'_j + W$ pertence à componente neutral de $\mathcal{A}/W$, para todo $j = 1, \ldots, n-1$. Sendo $\widehat{G} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset Aut(\mathcal{A})$, segue do Lema 1.8.5 que $\varphi(\overline{e'_j}) = \overline{e'_j}$ (automorfismo induzido em $\mathcal{A}/W$) para todo $\varphi \in \widehat{G}$ e $1 \le j \le n-1$. Daí, $\varphi(e'_j) - e'_j \in W$. Por outro lado, como W é φ-invariante, podemos escrever $\widehat{G} \subset Aut(W)$ (tomando as restrições dos elementos de $\widehat{G}$ ao espaço W). Recorrendo ao Exemplo 1.6.12, tem-se que $\widehat{G}$ é um subgrupo abeliano de $Aut(W)$ e, por hipótese, F é um corpo algebricamente fechado. Portanto, pelo Lema 2.1.1, existe uma base $\beta = \{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ de W que diagonaliza simultaneamente os operadores $\varphi \in \widehat{G}$.

Fixando qualquer e'_j, uma vez que $\varphi(e'_j) - e'_j \in W$, para todo $\varphi \in \widehat{G}$, existem escalares $a_1, \ldots, a_{n-1} \in F$ satisfazendo

$$\varphi(e'_j) = e'_j + a_1 w_1 + \cdots + a_{n-1} w_{n-1}.$$

Ao mesmo tempo, sendo w_j autovetor de φ, existe $\lambda_j \in F$ tal que $\varphi(w_j) = \lambda_j w_j$ para todo $j = 1, \ldots, n-1$. Diante disso, temos a igualdade

$$\varphi^k(e'_j) = e'_j + \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i(1 + \lambda_i + \cdots + \lambda_i^{k-1})w_i.$$

Em virtude de $\widehat{G}$ ter ordem m, temos $\varphi^m = Id$. Da expressão acima, decorre que

$$a_i(1+\lambda_i+\cdots+\lambda_i^{m-1})=0 \tag{2.1}$$

para todo $i=1,\ldots,n-1$.

Por motivo análogo, se $\psi\in\widehat{G}$, existem $\mu_i\in F$ tais que $\psi(w_i)=\mu_i w_i$, para todo $i=1,\ldots,n-1$. Sendo $b_1,\ldots,b_{n-1}\in F$ tais que $\psi(e_j')=e_j'+b_1w_1+\cdots+b_{n-1}w_{n-1}$, pelo mesmo motivo que anteriormente, devemos ter

$$b_i(1+\mu_i+\cdots+\mu_i^{m-1})=0 \tag{2.2}$$

para todo $i=1,\ldots,n-1$. Com algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\psi\varphi(e_j')=e_j'+\textstyle\sum_{i=1}^{n-1}(b_i+\mu_i a_i)w_i,$$
$$\varphi\psi(e_j')=e_j'+\textstyle\sum_{i=1}^{n-1}(a_i+\lambda_i b_i)w_i.$$

Uma vez que $\widehat{G}$ é abeliano, temos $\psi\varphi=\varphi\psi$. Consequentemente

$$b_i(1-\lambda_i)=a_i(1-\mu_i), i=1,\ldots,n-1. \tag{2.3}$$

Para φ fixada, definamos os elementos $e_j''\in\mathcal{A}$ segundo os seguintes critérios:

- Se todos os autovalores $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}$ são diferentes de 1, definamos

$$e_j''=e_j'+\frac{a_1}{1-\lambda_1}w_1+\cdots+\frac{a_{n-1}}{1-\lambda_{n-1}}w_{n-1}. \tag{2.4}$$

- Se algum $\lambda_i=1$ mas existe $\psi\in\widehat{G}$ tal que $\mu_i\neq 1$ então na igualdade 2.4, definamos $\frac{b_i}{1-\mu_i}$ como coeficiente de w_i.

- Se $\rho(w_i)=w_i$, para todo $\rho\in\widehat{G}$, na igualdade 2.4 colocamos em w_i coeficiente zero.

Inicialmente, vamos avaliar φ em e_j'' no caso em que $\lambda_i\neq 1$, para todo $i=1,\ldots,n-1$. Temos

$$\varphi(e_j'') = \varphi(e_j') + \sum_i \tfrac{a_i}{1-\lambda_i}\varphi(w_i) = e_j' + \sum_i a_i w_i + \sum_i \tfrac{\lambda_i a_i}{1-\lambda_i} w_i = e_j' + \sum_i a_i(1 + \tfrac{\lambda_i}{1-\lambda_i})w_i = e_j' + \sum_i \tfrac{a_i}{1-\lambda_i} w_i = e_j''.$$

No caso em que $\lambda_i = 1$ e existe $\mu_i \neq 1$ para algum $\psi \neq \varphi$, observando a igualdade 2.1 vemos que $\lambda_i = 1$ implica $a_i = 0$. Neste caso, é fácil ver que o coeficiente de w_i depois da ação de φ é

$$a_i + \frac{b_i}{1-\mu_i}$$

e como $a_i = 0$, temos $\varphi(e_j'') = e_j''$. E no caso em que $\rho(w_i) = w_i$ para todo $\rho \in \widehat{G}$, teríamos $a_i = 0$, e claramente $\varphi(e_j'') = e_j''$.

Assim, para qualquer $\psi \in \widehat{G}$, observando a igualdade 2.3, teremos $\psi(e_j'') = e_j''$. Definindo $u_j = e_j'' - e_j'$, temos $u_j \in W$. Além disso, como $W^2 = 0$ e $W(UT_{n-1}(F)) = 0$, obtemos que

$$(e_j'')^2 = (e_j' + u_j)^2 = e_j' + e_j' u_j,\ j = 1, \ldots, n-1,$$
$$(e_n'')^2 = e_n' + u_n e_n'$$

e

$$(e_j'')^2 (e_n'')^2 = e_j'(u_j + u_n)e_n',\ j = 1, \ldots, n-1,$$

são fixados para qualquer $\psi \in \widehat{G}$, uma vez que são produtos de pontos fixos.

Portanto, os elementos

$$e_j = e_j' + e_j' u_j - e_j'(u_j + u_n)e_n',\ j = 1, \ldots, n-1,$$
$$e_n = e_n' + u_n e_n'$$

satisfazem a condição $\psi(e_i) = e_i$ para todo $\psi \in \widehat{G}$ e $i = 1, \ldots, n$. Observando que $We_j' = 0$, $j = 1, \ldots, n-1$, $e_n'W = 0$ e $e_1', \ldots, e_n'$ são ortogonais e idempotentes, para quaisquer $1 \leq i < j \leq n-1$, devemos ter

$$e_i e_j = (e_i' + e_i' u_i - e_i(u_i + u_n)e_n')(e_j' + e_j' u_j - e_j'(u_j + u_n)e_n') = 0 \text{ e } e_i e_i = e_i$$

e assim podemos escrever $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ para todo $1 \leq i \leq j \leq n-1$. Além disso, $e_n^2 = e_n$, $e_n e_j = 0$, $j = 1, \ldots, n-1$. Por fim,

$$e_je_n = (e'_j + e'_ju_j - e'_j(u_j+u_n)e'_n)(e'_n + u_ne'_n) = e'_ju_je'_n - e'_j(u_j+u_n)e'_n + e'_ju_ne'_n = 0$$

para todo $j = 1, \ldots, n-1$.

Assim, os elementos $e_1, \ldots, e_n$ são ortogonias, idempotentes e pertencem à componente neutral da G-graduação considerada em $\mathcal{A}$. Ademais, pela construção que foi realizada, vemos que os elementos $e_1, \ldots, e_n$ são da forma $E_{11}+Y_1, \ldots, E_{nn}+Y_n$ com $Y_1, \ldots, Y_n \in J(\mathcal{A})$, encerrando a demonstração. ∎

O próximo teorema é o principal resultado desta seção: o teorema de classificação das graduações abelianas e finitas de $UT_n(F)$.

Teorema 2.2.2 *Sejam F um corpo algebricamente fechado e de característica zero e $\mathcal{A} = UT_n(F) = \oplus_{g\in G}A_g$ uma G-graduação abeliana e finita. Então $\mathcal{A}$, vista como álgebra G-graduada, é isomorfa a $UT_n(F)$ com alguma G-graduação elementar.*

Demonstração: Pelo lema anterior, existem $Y_1, \ldots, Y_n \in J(\mathcal{A})$ tais que as matrizes $e_1 = E_{11}+Y_1, \ldots, e_n = E_{nn}+Y_n$ são ortogonais, idempotentes e pertencem a A_1. Para todo $1 \leq i \leq j \leq n$, definamos $A_{ij} = e_i\mathcal{A}e_j$. Note que $A_{ij} \neq 0$ pois $0 \neq e_iE_{ij}e_j \in A_{ij}$. Mais ainda, pelo Exemplo 1.2.10, temos que A_{ij} é uma subálgebra de $\mathcal{A}$ homogênea na G-graduação. Afirmamos que

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{1\leq i\leq j\leq n} A_{ij}.$$

Primeiramente, provaremos que a soma dos A_{ij} é direta. Por simplicidade de notação, vamos mostrar que $I = A_{12} \cap (\sum_{(i,j)\neq(1,2)} A_{ij}) = 0$ (para provar o caso geral, basta ajustar a notação).

Seja $x \in I$. Devemos ter

$$x = e_1x_{12}e_2,$$
$$x = \textstyle\sum_{(i,j)\neq(1,2)} e_ix_{ij}e_j$$

e, assim,

$$x = e_1x_{12}e_2 = e_1(e_1x_{12}e_2)e_2 = e_1xe_2 = e_1(\textstyle\sum_{(i,j)\neq(1,2)} e_ix_{ij}e_j)e_2 = 0$$

pois $e_1e_i = e_2e_j = 0$ para todo $i \neq 1$ e $j \neq 2$.

Desse modo fica justificado que a referida soma é direta. Agora note que a quantidade de subálgebras A_{ij} é igual à dimensão de $\mathcal{A}$ e como cada $A_{ij} \neq 0$, segue que

$\mathcal{A} = \bigoplus A_{ij}$ e que $\dim A_{ij} = 1$ para todos $1 \leq i \leq j \leq n$. Daí como $A_{ij} = \bigoplus_{g \in G} A_{ij} \cap A_g$ (pois A_{ij} é G-graduada), deve existir $h_{ij} \in G$ tal que $A_{ij} \subset A_{h_{ij}}$. Concluímos assim que os elementos de A_{ij} são homogêneos na G-graduação.

Observe que $E_{1n} = E_{12}E_{23} \ldots E_{n-1,n} \in J(\mathcal{A})^{n-1}$, logo $J(\mathcal{A})^{n-1} \neq 0$. Ademais, comparando as dimensões é fácil ver que $J(\mathcal{A}) = \langle A_{ij} : 1 \leq i < j \leq n \rangle$ e que $J(\mathcal{A})^{n-1} = A_{12} \ldots A_{n-1,n}$.

Seja $a_{i,i+1}$ um gerador de $A_{i,i+1}$, isto é, $A_{i,i+1} = \langle a_{i,i+1} \rangle$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Claramente temos $a_{i,i+1} = e_i a_{i,i+1} e_{i+1}$, para todo $i = 1, \ldots, n-1$.

Para $1 \leq i < j \leq n$, definamos

- $a_{ij} = a_{i,i+1} \cdots a_{j-1,j}$ e
- $a_{kk} = e_k$ para todo $k = 1, \ldots, n$.

Observe que todos os elementos a_{ij} são homogêneos na G-graduação (pois são produtos de elementos homogêneos), $a_{ij}a_{kl} = \delta_{jk}a_{il}$ e que $\{a_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq n\}$ é uma base de $\mathcal{A}$.

Por fim, definindo $\phi \in Aut(\mathcal{A})$ por

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathcal{A} = \oplus_{g \in G} A_g & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & a_{ij} & \longmapsto & E_{ij} \end{array}$$

e pondo $A'_g = \phi(A_g)$, temos que $\mathcal{A} = \oplus_{g \in G} A'_g$ define uma G-graduação elementar. De fato, note que para $1 \leq i \leq j \leq n$, existe $h_{ij} \in G$ tal que $a_{ij} \in A_{h_{ij}}$ e daí $E_{ij} = \phi(a_{ij}) \in \phi(A_{h_{ij}}) = A'_{h_{ij}}$. Desde que as matrizes E_{ij} são homogêneas na graduação $\mathcal{A} = \oplus_{g \in G} A'_g$, pela Proposição 1.2.14, tal G-graduação é elementar. Claramente ϕ é um automorfismo G-graduado, donde segue que as G-graduações são isomorfas. Desse modo, concluímos o resultado. ■

2.3 Graduações de um Grupo Qualquer em $UT_n(F)$

A tônica desta seção será generalizar o resultado da seção anterior, no sentido de que não faremos restrições sobre o grupo G e o corpo F. Como tais restrições foram sobremaneira importantes na construção feita na seção anterior, não poderemos usar as mesmas técnicas. Precisaremos de outro conjunto de lemas que nos darão base para a conclusão do resultado desejado.

A referência principal para a confecção desta seção foi o artigo [VZ2] de autoria de A. Valenti e M.V. Zaicev.

No que segue, F e G serão um corpo e um grupo arbitrários, respectivamente.

Observação 2.3.1 *Sejam $\mathcal{A} = UT_n(F)$, V um F-espaço vetorial com $\dim V = n$ e $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Nesse contexto, considere uma cadeia de subespaços de V satisfazendo*

- $V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$
- $\dim V_k = k$ *e* $V_k = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, *para todo* $k = 1, \ldots, n$.

Afirmamos que a cada $M = (m_{ij}) \in \mathcal{A}$ é possível associar um operador $T = T_M : V \to V$ tal que $T(V_k) \subseteq V_k$, para todo $k = 1, \ldots, n$. De fato, basta definir T da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} T(v_1) & = & m_{11}v_1 \\ T(v_2) & = & m_{12}v_1 + m_{22}v_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ T(v_n) & = & m_{1n}v_1 + \cdots + m_{nn}v_n. \end{array} \tag{2.5}$$

Claramente, temos $T(V_k) \subseteq V_k$ e $[T]_\beta^\beta = M$. Reciprocamente, sendo T um operador de V que preserva a cadeia acima, tem-se que $[T]_\beta^\beta \in \mathcal{A}$.

Por esta razão, no que segue, identificaremos a álgebra $\mathcal{A}$ com a álgebra dos operadores do espaço vetorial V que preservam a cadeia considerada. Por um abuso de notação, em alguns momentos, escreveremos $\mathcal{A} \subset End(V)$.

Lema 2.3.2 *Qualquer elemento não nulo de $\mathcal{A}$ idempotente é conjugado a um elemento diagonal idempotente do tipo $E_{i_1i_1} + \cdots + E_{i_ki_k}$, onde $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$.*

Demonstração: Seja V um F-espaço vetorial tal que $\dim V = n$ e $V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. Considere uma cadeia

$$V_1 \subset \ldots \subset V_n = V \tag{2.6}$$

de subespaços de V tal que $\dim V_k = k$ e $V_k = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, para todo $k = 1, \ldots, n$. Pelo que foi visto na Observação 2.3.1, $\mathcal{A}$ pode ser visto como a álgebra das transformações lineares de V tais que $T(V_k) \subseteq V_k$, para todo $k = 1, \ldots, n$. Na demonstração que segue, exploraremos tal identificação.

Seja $e \in \mathcal{A}$ um elemento idempotente. Para demonstrar o resultado, é bastante mostrar que existe uma base $v_1, \ldots, v_n$ de V tal que $V_k = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ e $e(v_i) = \epsilon_i v_i$, onde $\epsilon_i = 0$ ou 1, para todo $i = 1, \ldots, n$.

A prova será por indução em n, sendo $n = 1$ um caso trivial. Suponhamos por hipótese de indução que exista uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V tal que $e(v_j) = \epsilon_j v_j$, onde $\epsilon_j = 0$ ou 1, para todo $j = 1, \ldots, n-1$. Observe agora que se $e(v_n) \notin V_{n-1}$ temos $e(e(v_n)) = e^2(v_n) = e(v_n)$, donde o conjunto $\{v_1, \ldots, v_{n-1}, e(v_n)\}$ é a base requerida. Caso $e(v_n) \in V_{n-1}$, defina $v_n' = v_n - e(v_n)$. Claramente, $v_n' \notin V_{n-1}$ e $e(v_n') = 0$, donde segue que neste caso $\{v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n'\}$ é a base requerida. ∎

Note que o lema anterior é a versão em $\mathcal{A} = UT_n(F)$ do que ocorre em $M_n(F)$, onde já sabemos que toda matriz idempotente é conjugada de alguma matriz diagonal. Passemos agora ao próximo lema.

Lema 2.3.3 *Seja $e \in \mathcal{A}$ um idempotente. Então a subálgebra $e\mathcal{A}e$ é isomorfa a $UT_k(F)$, onde $k = tr(e)$.*

Demonstração: É claro que $e\mathcal{A}e$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Pelo lema precedente, sabemos que e é conjugada a uma matriz do tipo

$$Y = (E_{i_1i_1} + \cdots + E_{i_ki_k}) = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 & \cdots \\ 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \epsilon_n \end{bmatrix}$$

onde $\epsilon_i = 0$ ou 1.

Seja $X \in U(\mathcal{A})$ tal que $e = X^{-1}YX$. Agora note que

$$e\mathcal{A}e = X^{-1}(E_{i_1i_1} + \cdots + E_{i_ki_k})X\mathcal{A}X^{-1}(E_{i_1i_1} + \cdots + E_{i_ki_k})X =$$
$$X^{-1}(E_{i_1i_1} + \cdots + E_{i_ki_k})\mathcal{A}(E_{i_1i_1} + \cdots + E_{i_ki_k})X.$$

Perceba que $(E_{i_1i_1} + \cdots + E_{i_ki_k})E_{ij}(E_{i_1i_1} + \cdots + E_{i_ki_k}) = E_{ij}$, se $i, j \in \{i_1, \ldots, i_k\}$ e zero nos outros casos. Logo, $(E_{i_1i_1} + \cdots + E_{i_ki_k})E_{ij}(E_{i_1i_1} + \cdots + E_{i_ki_k}) = E_{i_sj_t}$, onde $s, t \in \{1, \ldots, k\}$. Motivados por essa constatação, definamos

$$\begin{array}{rccc}\theta: & (E_{i_1i_1}+\cdots+E_{i_ki_k})\mathcal{A}(E_{i_1i_1}+\cdots+E_{i_ki_k}) & \longrightarrow & UT_k(F)\\ & E_{i_sj_t} & \longmapsto & E_{st}\end{array}$$

que é um isomorfismo de álgebras.

É claro que $k = tr(e) = tr(E_{i_1i_1}+\cdots+E_{i_ki_k})$. Por fim, como $e\mathcal{A}e$ é uma álgebra isomorfa a $(E_{i_1i_1}+\cdots+E_{i_ki_k})\mathcal{A}(E_{i_1i_1}+\cdots+E_{i_ki_k})$ (pois são conjugadas), temos o resultado. ■

Passemos ao próximo resultado.

Lema 2.3.4 *Todo conjunto $\{a_1,\ldots,a_n\}$ de n elementos ortogonais idempotentes de $\mathcal{A} = UT_n(F)$ é conjugado ao conjunto $\{E_{11},\ldots,E_{nn}\}$, isto é, existe $S \in \mathcal{A}$ inversível tal que $a_i = S^{-1}E_{ii}S$, para todo $i = 1,\ldots,n$.*

Demonstração: Novamente, vamos identificar $\mathcal{A}$ com a álgebra das transformações lineares de um F-espaço vetorial V de dimensão n tal como na Observação 2.3.1. Nesse contexto, é suficiente mostrar que existe $v_1,\ldots,v_n$ base de V tal que $V_k = \langle v_1,\ldots,v_k\rangle$, $k = 1,\ldots,n$, e $a_i(v_j) = \delta_{ij}v_j$, onde δ_{ij} denota o delta de Kronecker.

Sejam $\{u_1,\ldots,u_n\}$ uma base de V e $V_k = \langle u_1,\ldots,u_k\rangle$, para todo $k = 1,\ldots,n$. Assim, podemos ver $a_1,\ldots,a_n$ como transformações lineares, e denotaremos por $(a_k)_{ij}$ a entrada (i,j) da matriz a_k para todo $k = 1,\ldots,n$. Como para todo $k = 1,\ldots,n$, temos $a_k^2 = a_k$, segue que $(a_k)_{ii} = 0$ ou 1, para todo $i = 1,\ldots,n$. Uma vez que $\{a_1,\ldots,a_n\}$ é um conjunto de n elementos ortogonais, cada uma de suas matrizes possui uma única entrada não nula na diagonal. Reorganizando os índices, se necessário, podemos escrever $(a_1)_{11} = \cdots = (a_n)_{nn} = 1$ e $(a_i)_{jj} = 0$, se $i \neq j$.

Definindo $e = a_1+\cdots+a_{n-1}$, como as matrizes $a_1,\ldots,a_{n-1}$ são ortogonais idempotentes, é fácil ver que $e^2 = e$ e que $tre = n-1$. Daí pelo Lema 2.3.3, segue que $e\mathcal{A}e$ é isomorfa a $UT_{n-1}(F)$ que pode ser visto como uma subálgebra de $End(V_{n-1})$. Aplicando a hipótese de indução, existe uma base $\{v_1,\ldots,v_{n-1}\}$ de V_{n-1} tal que $a_i(v_j) = \delta_{ij}v_j$, para todo $1 \leq i,j \leq n-1$. Definindo $v_n = a_n(u_n)$, segue que $v_n \neq V_{n-1}$ e assim $v_1,\ldots,v_{n-1},v_n$ é a base requerida. ■

Observação 2.3.5 *Consideremos $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G}A_g$ uma G-graduação e E como sendo a matriz identidade de $\mathcal{A}$. De acordo com o Exemplo 1.2.5, devemos ter $E \in A_1$.*

Agora note que a subálgebra $\langle E \rangle$ de A_1 é isomorfa ao corpo F (que é semissimples, pelo Exemplo 1.7.2) e, assim, $\langle E \rangle$ é semissimples. Assim, segue-se que A_1 possui uma subálgebra semissimples maximal (maximal no conjunto de todas as subálgebras semissimples de A_1) contendo E.

Lema 2.3.6 *Seja $UT_n(F) = \mathcal{A} = \oplus_{g \in G} A_g$ a álgebra das matrizes triangulares superiores sobre um corpo arbitrário F graduada por um grupo G, com unidade 1. Então, a subálgebra A_1 contém n elementos ortogonais idempotentes.*

Demonstração: A prova é por indução em n, sendo o caso $n = 1$ trivialmente válido. Suponhamos $n > 1$. Como $E \in A_1$, pelo que vimos na Observação 2.3.5, existe uma subálgebra não trivial B de A_1 que é semissimples maximal e $E \in B$. Sendo C um somando simples de B e e a unidade de C, eis as possibilidades:

(i) e e $E - e$ são duas matrizes ortogonais idempotentes ou

(ii) $e = E$.

Note que o item (ii) implica $C = \langle E \rangle = B$.

Trataremos inicialmente do primeiro caso. Em virtude do Lema 2.3.3, devemos ter $P = e\mathcal{A}e \simeq UT_k$ e $Q = (E - e)\mathcal{A}(E - e) \simeq UT_{n-k}$, onde $k = tr(e) \neq 0$. Levando em conta que $e, E - e \in A_1$, pelo Exemplo 1.2.10, segue que P e Q são homogêneas na G-graduação. Aplicando a hipótese de indução a P, existem $a_1, \ldots, a_k$ elementos ortogonais idempotentes em $P_1 \subset A_1$ (componente neutral de P). Agora aplicando a hipótese de indução a Q, existem $a_{k+1}, \ldots, a_n$ elementos ortogonais idempotentes em $Q_1 \subset A_1$ (componente neutral de Q). Sendo e e $E - e$ ortogonais, segue que a lista $a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n$ é formada por ortogonais idempotentes de A_1, o que nos dá a conclusão.

Nosso objetivo agora é provar a impossibilidade de ocorrer o item (ii). Para tanto, procederemos por contradição.

Suponha a ocorrência de (ii), donde segue que $\dim B = 1$ $(*)$. No que se segue, será feita indução sobre $|G|$.

Se $|G| = 1$, temos $A_1 = \mathcal{A}$. Definindo $T = \langle E_{11}, \ldots, E_{nn} \rangle$, vemos que $T \subset A_1$. Definamos $T_1 = \langle E_{22}, \ldots, E_{nn} \rangle$ e, para $j > 1$, $T_j = \langle E_{11}, \ldots, E_{j-1,j-1}, E_{j+1,j+1}, \ldots, E_{nn} \rangle$. Observe que cada T_j é um ideal de T que é maximal, pois $\dim T_j = \dim T - 1$. Assim,

$J(T) = \cap_{j=1}^{n} T_j = 0$ e, assim, T é semissimples. Por isso, neste caso, não é possível a ocorrência de $(*)$.

Suponhamos por hipotése de indução que para qualquer H-graduação em UT_n, com $|H| < |G|$, a igualdade $(*)$ seja impossível.

Por contradição, suponha que, na G-graduação considerada em $\mathcal{A}$, tenhamos $\dim B = 1$. Afirmamos que, sob esta suposição, todo elemento $a \in A_g$ homogêneo na G-graduação é nilpotente ou inversível. Suponha que a não seja nilpotente. Provaremos que g tem ordem finita. De fato, supondo o contrário e sendo $m > \dim \mathcal{A}$, temos que as componentes $A_g, A_{g^2}, \ldots, A_{g^m}$ são distintas e não triviais, pois $0 \neq a^j \in A_{g^j}$, para todo $j = 1, \ldots, m$. Mas isso diz que $\dim \mathcal{A} > m$, o que é uma contradição. Portanto g deve ter ordem finita, digamos k e, assim, $a^k \in A_1$. Agora note que como a^k não é nilpotente (já que a não o é), tem-se que $a^k \notin J(A_1)$.

Mas como $\langle E \rangle = B \simeq A_1/J(A_1)$, temos $\dim A_1/J(A_1) = 1$ e, daí, $A_1/J(A_1) = \left\langle \overline{E} \right\rangle$. Desse modo, existe $0 \neq \lambda \in F$ tal que $\overline{a^k} = \lambda \overline{E}$. Daí $Y = a^k - \lambda E \in J(A_1)$, e assim $\lambda^{-1} a^k = E + \lambda^{-1} Y$. Pela Proposição 1.3.21, decorre que $\lambda^{-1} a^k$ é inversível, implicando que a é inversível.

No que segue, provaremos que o radical de Jacobson $J(\mathcal{A})$ não contém elemento homogêneo não nulo. Suponha por contradição que $0 \neq a \in A_g \cap J(\mathcal{A})$ seja nilpotente. Sabemos que o conjunto $L = \{x \in \mathcal{A} : xa = 0\}$ (anulador a esquerda de a) é um subespaço G-graduado de $\mathcal{A}$. Como os elementos de L não podem ser inversíveis (pois são divisores de zero), concluímos que L é constituído de elementos nilpotentes. Mas claramente $E_{nn} a = 0$ e, assim, $E_{nn} \in L$, o que é um absurso, já que E_{nn} não é nilpotente.

Com o argumento acima, fica provado que $J(\mathcal{A})$ não contém elemento homogêneo não nulo. Logo, como $J(A_1) \subset A_1$ e $J(A_1) \subset J(\mathcal{A})$, tem-se $J(A_1) = 0$, seguindo que A_1 é semissimples e que $A_1 = B = \{\lambda E : \lambda \in F\}$.

Afirmamos que, nas condições apresentadas, o conjunto $Supp(\mathcal{A}) = \{g \in G : A_g \neq 0\}$ é um subgrupo finito de G. A finitude de $Supp(\mathcal{A})$ decorre do fato de que $\mathcal{A}$ tem dimensão finita. Tomando agora $g, h \in Supp(\mathcal{A})$, $0 \neq x \in A_g$ e $0 \neq y \in A_h$, temos que x e y são inversíveis (pois, caso fossem nilpotentes, pertenceriam a $J(\mathcal{A})$, o que não é possível) e daí $0 \neq xy \in A_{gh}$. Daí $gh \in Supp(\mathcal{A})$, o que justifica a afirmação feita. Vamos supor que $Supp(\mathcal{A}) = G$, do contrário, aplicamos a hipótese de indução.

Inicialmente, afirmamos que $\dim A_g = 1$, para todo $g \in G$. Para provar isto, tomemos $x, y \in A_g$ supostamente linearmente independentes. Desde que x é homogêneo, tem-se que existe x^{-1} e $x^{-1} \in A_{g^{-1}}$. Segue-se que $yx^{-1} \in A_1 = \langle E \rangle$, logo existe $0 \neq \lambda \in F$ satisfazendo $yx^{-1} = \lambda E$. Assim, $y = \lambda x$, o que contradiz a suposição de que x, y são linearmente independentes.

Afirmamos que o grupo G não pode ser abeliano. De fato, do contrário, sendo $g, h \in G$, teríamos $[A_g, A_h] \subset A_{gh} + A_{hg} \subset A_{gh}$. Sejam $x = \sum x_g$ e $y = \sum y_h$ elementos quaisquer da álgebra $\mathcal{A}$. Note que $[x, y] = \sum_{g,h}[x_g, y_h]$ e, daí a álgebra $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$ é homogênea, pois $[x_g, y_h] \in A_{gh} \cap [\mathcal{A}, \mathcal{A}]$. Ademais, pelo Exemplo 1.3.23, devemos ter $0 \neq [\mathcal{A}, \mathcal{A}] \subset J(\mathcal{A})$. Absurdo, pois, como foi visto, $J(\mathcal{A})$ não contém elementos homogêneos não nulos. Assim, concluímos que o grupo G não pode ser abeliano.

Assim, o subgrupo comutador $G' = \{[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab : a, b \in G\}$ é não trivial e o grupo quociente $\overline{G} = G/G'$ é abeliano. Por este motivo, a conclusão do lema é válida para a $\overline{G}$-graduação em $\mathcal{A}$ induzida pela G-graduação inicial (ver Exemplo 1.2.11). Desse modo, existem ortogonais idempotentes $e_1, \ldots, e_n$ em

$$D = A_{\overline{1}} = \oplus_{h \in G'} A_h.$$

Dado $h \in G'$, existem $a, b \in G$ tais que $h = a^{-1}b^{-1}ab$. Sendo $0 \neq x \in A_a$ e $0 \neq y \in A_b$, decorre que $z = x^{-1}y^{-1}xy$ é não nulo e $z \in A_h$. Uma vez que $\dim A_h = 1$, devemos ter $A_h = \langle z \rangle$. Em particular, D é gerada como álgebra por todos $x^{-1}y^{-1}xy$, onde x, y são elementos homogêneos de $\mathcal{A}$. Não é díficil ver que toda matriz do tipo $x^{-1}y^{-1}xy$ tem a forma $E + a$, onde $a \in J(\mathcal{A})$. Em virtude disso, qualquer elemento de D pode ser escrito como $\lambda E + a$, onde $a \in J(\mathcal{A})$. Diante disso, para cada $j = 1, \ldots, n$, existem $\lambda_j \in F$ e $a_j \in J(\mathcal{A})$ tais que $e_j = \lambda_j E + a_j$. Observe que cada λ_j é não nulo, pois caso contrário $e_j = a_j$ seria nilpotente, o que não é possível. Devido a isso, sendo $i \neq j$, existe $M \in J(\mathcal{A})$ satisfazendo $0 = e_i e_j = \lambda_i \lambda_j E + M \neq 0$, o que é uma contradição.

Portanto, concluímos que $\dim B = 1$ não pode ocorrer, o que finaliza a demonstração. ∎

O próximo lema fornece um critério, em termos das matrizes elementares E_{ii},

$i = 1, \ldots, n$, para que uma G-graduação em $\mathcal{A}$ seja elementar.

Lema 2.3.7 *Seja $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A_g$ uma G-graduação. Uma condição necessária e suficiente para que a G-graduação seja elementar é que $E_{ii} \in A_1$, para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Demonstração: Claramente, a condição é necessária. Por isso, nos ocuparemos em mostrar que a condição é suficiente.

Supondo que cada $E_{ii} \in A_1$, pelo Exemplo 1.2.10, sabemos que, para $i < j$, cada $A_{ij} = E_{ii}\mathcal{A}E_{jj}$ é uma subálgebra homogênea na G-graduação. Ademais, temos que $E_{ij} \in A_{ij}$, seguindo que as matrizes E_{ij} são homogêneas na G-graduação, para quaisquer $1 \leq i \leq j \leq n$. Em virtude da Proposição 1.2.14, decorre que a G-graduação é elementar, finalizando a demonstração. ■

Agora faremos a junção dos resultados anteriores com a finalidade de classificar as G-graduação na álgebra $UT_n(F)$. É esse o principal resultado da presente seção.

Teorema 2.3.8 *Sejam G um grupo qualquer, F um corpo arbitrário e $UT_n(F) = \mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A_g$ uma G-graduação na álgebra das matrizes triangulares superiores. Então a álgebra $\mathcal{A}$, como álgebra G-graduada, é isomorfa a $UT_n(F)$ com uma G-graduação elementar.*

Demonstração: Pelo Lema 2.3.6, existem $e_1, \ldots, e_n \in A_1$ ortogonais e idempotentes. Ao mesmo tempo, pelo Lema 2.3.4, existe uma matriz $S \in \mathcal{A}$ inversível tal $E_{ii} = S^{-1}e_iS$, para todo $i = 1, \ldots, n$. De posse de tais informações, definamos a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \theta: & \mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A_g & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & X & \longmapsto & S^{-1}XS \end{array}.$$

Não é difícil ver que θ é um automorfismo da álgebra $\mathcal{A}$. Ademais, pondo $A'_g = \theta(A_g)$, para todo $g \in G$, segue que $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A'_g$ define uma G-graduação em $\mathcal{A}$. Afirmamos que a G-graduação $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A'_g$ é elementar. Com efeito, observe que $E_{ii} = \theta(e_i) \in \theta(A_1) = A'_1$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Portanto, pelo Lema 2.3.7, fica provada a afirmação anterior.

Pela própria construção feita, a aplicação θ é um automorfismo G-graduado, finalizando a demonstração do teorema. ■

Capítulo 3

Classificação das Graduações Abelianas e Finitas em $UT(d_1, \ldots, d_m)$

Pelo que foi apresentado no capítulo anterior, sabemos que as graduações de grupo na álgebra $UT_n(F)$ já estão descritas, a menos de isomorfismo graduado. Uma tentativa natural seria generalizar o resultado obtido em $UT_n(F)$ para a álgebra $UT(d_1, \ldots, d_m)$ das matrizes triangulares superiores em blocos. Esse é o espírito do presente capítulo. Como veremos, a conclusão obtida para a álgebra $UT_n(F)$ não se aplica à álgebra $UT(d_1, \ldots, d_m)$. Não obstante, sob as hipóteses de o grupo G ser abeliano e finito e o corpo F ser algebricamente fechado e de característica zero, temos um certo tipo de classificação. Por esta razão, a menos de menção em contrário, ao longo desse capítulo estaremos supondo que o grupo G seja abeliano e finito e o corpo F seja algebricamente fechado e de característica zero. Para a elaboração desse capítulo, utilizamos como referência principal o artigo [VZ3].

3.1 A Álgebra das Matrizes Triangulares Superiores em Blocos

Sejam $d_1, \ldots, d_m$ números inteiros positivos. Sendo $n = d_1 + \cdots + d_m$, denotamos por $UT(d_1, \ldots, d_m)$ a subálgebra da álgebra $M_n(F)$ constituída de matrizes triangulares em blocos do tipo

$$\begin{bmatrix} M_{d_1}(F) & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ 0 & M_{d_2}(F) & \dots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_{d_m}(F) \end{bmatrix}$$

onde $M_{d_i}(F)$ é a álgebra das matrizes $d_i \times d_i$ sobre o corpo F, para todo $i = 1, \dots, m$. Chamamos $UT(d_1, \dots, d_m)$ de **álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos**. Observe que o caso em que $d_1 = \cdots = d_m = 1$, teremos a álgebra $UT_m(F)$ das matrizes triangulares superiores.

Usaremos a letra R para denotar a álgebra $UT(d_1, \dots, d_m)$.

Observação 3.1.1 *Seja $I_i = \{M \in R$: o i-ésimo bloco diagonal de M é nulo$\}$. Verifica-se que para cada $i = 1, \dots, m$, o subespaço I_i é um ideal maximal de R. Mais ainda, todo ideal maximal de R tem esta forma. Assim, como $J(R) = \cap_{i=1}^{m} I_i$, concluímos que $J(R)$ é formado por todas as matrizes de R cujos blocos que ocorrem na diagonal são nulos.*

Exemplo 3.1.2 *Sendo $X \in UT(d_1, \dots, d_m)$, podemos escrever (de maneira única) $X = D_1 + \cdots + D_m + Y$, onde cada D_i é uma matriz cujos elementos fora do i-ésimo bloco que aparece na diagonal de X são todos nulos (algumas vezes, identificaremos tal matriz com o próprio i-ésimo bloco) e $Y \in J$. Nesse contexto, definamos a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \psi : & R & \longrightarrow & M_{d_1}(F) \oplus \cdots \oplus M_{d_m}(F) + J \\ & X & \longmapsto & \psi(X) = ((D_1, \dots, D_m), Y) \end{array}.$$

Não é difícil verificar que ψ é um isomorfismo de álgebras. Por essa razão, temos

$$UT(d_1, \dots, d_m) \simeq M_{d_1}(F) \oplus \cdots \oplus M_{d_m}(F) + J,$$

onde $\bigoplus_{i,j} B_{ij} \simeq J$.

É natural perguntar se os resultados vistos no capítulo anterior podem ser adaptados para uma G-graduação da álgebra $UT(d_1, \dots, d_m)$. As considerações seguintes têm por objetivo elucidar esse questionamento.

Seja $G = \langle a \rangle_n \times \langle b \rangle_n$ o produto direto de dois grupos cíclicos de ordem n. Inicialmente, pretendemos exibir um certo tipo de G-graduação na álgebra $M_n(F)$. Para tanto, fixemos $\epsilon \in F$ uma n-ésima raiz primitiva da unidade e definamos

$$X_a = \begin{bmatrix} \epsilon^{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \epsilon^{n-2} & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$Y_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Para $i, j = 1, \ldots, n$, afirmamos que as matrizes $X_a^i Y_b^j$ são linearmente independentes (LI). De fato, note que $Y_b = E_{12} + \cdots + E_{n-1,n} + E_{n1}$. Assim,

$$Y_b^2 = E_{13} + E_{24} + \cdots + E_{n-2,n} + E_{n-1,1} + E_{n,2}$$

e, mais geralmente, para todo j, ocorre que

$$Y_b^j = E_{1,j+1} + \cdots + E_{n-j,n} + E_{n-j+1,1} + \cdots + E_{n,j}.$$

Por outro lado, temos

$$X_a^i = \textstyle\sum_{k=1}^n \epsilon^{i(n-k)} E_{kk}.$$

Por este motivo, temos $X_a^i Y_b^j = \sum_{k=1}^n \epsilon^{i(n-k)} E_{k,k+j}$. Assim as entradas não nulas de $X_a^i Y_b^j$ são as de posição $(k, k+j)$ (que são as mesmas posições não nulas em Y_b^j). Portanto, sendo $L_j = \left\langle Y_b^j, X_a Y_b^j, \ldots, X_a^{n-1} Y_b^j \right\rangle$, resulta que

$$L_j \subset \langle E_{1,j+1}, \ldots, E_{n-j,n}, E_{n-j+1,1}, \ldots, E_{n,j} \rangle.$$

Ademais, se $j \neq j_1$, tem-se $L_j \cap L_{j_1} = 0$ (pois Y_b^j e $Y_b^{j_1}$ têm entradas não nulas em posições distintas). Pretendemos provar que fixado j, os elementos $X_a^i Y_b^j$ formam um conjunto linearmente independente, para $i = 1, \ldots, n$. Para isso, sejam $x_1, \ldots, x_n$ variáveis e considere o sistema linear $x_1 X_a + x_2 X_a^2 + \cdots + x_n X_a^n = 0$. Note que a matriz associada a esse sistema é uma matriz de Vandermonde (a menos de permutação de linhas), cujo determinante é $\prod_{r<s} (\epsilon^r - \epsilon^s)$ que é não nulo. Por este motivo, o sistema

inicial possui apenas a solução trivial $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Em virtude de Y_b ser inversível, decorre que $x_1 X_a Y_b^j + \cdots + x_n X_a^n Y_b^j = 0$ implica $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Segue que para todo $i = 1, \ldots, n$, o conjunto $X_a^i Y_b^j$ é LI. Desse modo, para $i, j = 1, \ldots, n$, os elementos $X_a^i Y_b^j$ formam um conjunto LI. Uma vez que temos n^2 elementos desse tipo, decorre que $M_n(F) = \langle X_a^i Y_b^j : i, j = 1, \ldots, n \rangle$.

Agora, para qualquer $g \in G$, com $g = (a^i, b^j)$ e $i, j = 1, \ldots, n$, definamos o seguinte subespaço

$$R_g = \langle X_a^i Y_b^j \rangle.$$

Afirmamos que $M_n(F) = R = \oplus_{g\in G} R_g$ é uma G-graduação. De fato, pelo que vimos anteriormente, temos $R = \oplus_{g\in G} R_g$. Além disso, notando que $X_a Y_b = \epsilon Y_b X_a$, obtemos $X_a^i Y_b^j X_a^k Y_b^l = \epsilon^{kl} X_a^{i+k} Y_b^{j+l}$.

Assim, se $g = (a^i, b^j)$ e $h = (a^k, b^l)$, teremos $A_g A_h \subset A_{gh}$. Chamamos uma G-graduação desse tipo de **ϵ-graduação**.

Consideremos agora a álgebra $UT(n, n)$. Para cada $g \in G$, defina o conjunto

$$A_g = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in R_g \right\}. \tag{3.1}$$

Então $UT(n, n) = \oplus_{g\in G} A_g$ é uma G-graduação. Além disso, como $R_1 = \langle E \rangle$, temos $\dim A_1 = 3$.

Agora observe que se $n \geq 4$, a G-graduação considerada não é elementar pois, caso contrário, teríamos $E_{ii} \in A_1$, $i = 1, \ldots, n$, o que contradiz o fato de que $\dim A_1 = 3$.

Diante das considerações anteriores, vemos que existem graduações de grupo em uma álgebra do tipo $UT(d_1, \ldots, d_m)$ não elementares. Posteriormente, iremos classificar as graduações desta álgebra.

Observação 3.1.3 *Sejam V e W F-álgebras (ou apenas F-espaços vetoriais) com subespaços V_1 e W_1, respectivamente. Decorre da propriedade universal do produto tensorial que existe uma transfarmação linear $T : V_1 \otimes W_1 \to V \otimes W$ que satisfaz $T(v_1 \otimes w_1) = v_1 \otimes w_1$, onde $v_1 \in V_1$ e $w_1 \in W_1$. É claro que T é injetora e, portanto, $V_1 \otimes W_1$ está imerso em $V \otimes W$. Devido a isso, denotamos o subespaço $\langle v_i \otimes w_j : v_i \in V_1, w_j \in W_2 \rangle$ de $V \otimes W$ por $V_1 \otimes W_1$.*

Observação 3.1.4 *Sejam G um grupo abeliano e S, T dois subgrupos de G. Se $A = \oplus_{s\in S}A_s$ e $B = \oplus_{t\in T}B_t$ são uma S-graduação e T-graduação, respectivamente, então $C = A\otimes B$ é uma álgebra G-graduada, onde as componentes dessa G-graduação são do tipo $C_g = \oplus_{st=g}(A_s\otimes B_t)$ e $Supp(C)$ é um subgrupo de ST. Em particular, podemos graduar C com uma $(S\times T)$-graduação se A for S-graduada e B for T-graduada.*

3.2 Sobre as Graduações de Grupo na Álgebra $M_n(F)$

Para a fluidez do presente capítulo, precisaremos nos remeter ao problema de classificação as graduações de grupo na álgebra de matrizes $M_n(F)$. Tal problema foi parcialmente respondido no ano de 2002 por Bahturin e Zaicev em [AM1]. Neste artigo, foram classificadas as graduações de $M_n(F)$, supondo o grupo G finito e o corpo F algebricamente fechado e de característica zero. Como resultado principal do artigo supracitado, tem-se que a álgebra $M_n(F)$ é isomorfa, como álgebra G-graduada, a um produto tensorial $M_p(F)\otimes M_q(F)$, onde $M_p(F)$ tem uma graduação fina e $M_q(F)$ tem uma graduação elementar.

Nesta seção, não é de nosso interesse apresentar as demonstrações dos resultados que serão apresentados, mas aplicá-los na próxima seção.

Definição 3.2.1 *Sejam R uma álgebra e G um grupo. Dizemos que uma G-graduação $R = \oplus_{g\in G}R_g$ é **fina** se $\dim R_g \leq 1$, para todo $g\in G$.*

Teorema 3.2.2 *Sejam G um grupo finito, F um corpo algebricamente fechado e $M_n(F) = \oplus_{g\in G}R_g$ uma G-graduação na álgebra de matrizes. Então, existem uma decomposição $n = tq$, um subgrupo H de G e uma q-upla $(g_1,\ldots,g_q)\in G^q$ tal que $M_n(F)$ é isomorfa a $M_t(F)\otimes M_q(F)$ como álgebra G-graduada, onde $M_t(F)$ é uma álgebra H-graduada com uma graduação fina e $M_q(F)$ tem uma graduação elementar definida por $(g_1,\ldots,g_q)$.*

Demonstração: Pode ser encontrada em [BSZ]. ■

Definição 3.2.3 *Uma álgebra $R = \oplus_{g\in G}R_g$ G-graduada é chamada de álgebra graduada de divisão se qualquer elemento homogêneo e não nulo de R é inversível.*

O teorema abaixo classifica as graduações abelianas finas na álgebra $M_n(F)$.

Teorema 3.2.4 *Sejam F um corpo algebricamente fechado de característica zero, G um grupo abeliano e $M_n(F) = R = \oplus_{g\in G} R_g$ uma G-graduação na álgebra de matrizes, onde $\dim R_g \leq 1$, para qualquer $g \in G$. Então $H = Supp(R)$ é um subgrupo de G, $H = H_1 \times \cdots \times H_k$, $H_i \simeq \mathbb{Z}_{n_i} \times \mathbb{Z}_{n_i}$, $i = 1, \ldots, k$ e R é isomorfa a $M_{n_1}(F) \otimes \cdots \otimes M_{n_k}(F)$ como álgebra H-graduada, onde $M_{n_i}(F)$ é uma álgebra H_i-graduada com uma ϵ_i-graduação. Em particular, $M_n(F)$ é uma álgebra graduada de divisão.*

Demonstração: Pode ser encontrada em [BSZ]. ∎

3.3 Graduações Abelianas e Finitas em $UT(d_1, \ldots, d_m)$

Antes de passarmos à classificação das graduações sobre $UT(d_1, \ldots, d_m)$, exporemos alguns resultados que se revelarão importantes para os nossos objetivos. De início, apresentamos os seguintes resultados.

Teorema 3.3.1 (Wedderburn-Malcev) *Sejam R uma F-álgebra de dimensão finita, onde F é um corpo de característica zero, e $J(R)$ o radical de Jacobson de R. Então existe uma subálgebra B de R semissimples maximal tal que*

$$R = B + J(R).$$

Além disso, se B e B' são subálgebras semissimples tais que $R = B + J(R) = B' + J(R)$, então existe $x \in J(R)$ tal que $B' = (1+x)B(1+x)^{-1}$.

Demonstração: Pode ser encontrada na página 71 de [GZ]. ∎

Lema 3.3.2 *Seja $R = \oplus_{g\in G} R_g$ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero graduada por um grupo abeliano e finito G. Então o radical de Jacobson, $J = J(R)$, é homogêneo e existe uma subálgebra C de R semissimples e homogênea na G-graduação tal que $R = C + J$. Além disso, C pode ser decomposta como uma soma direta $C = C_1 \oplus \cdots \oplus C_p$ de ideais graduados e qualquer C_j é uma álgebra simples G-graduada.*

Demonstração: Do Exemplo 1.8.6, já sabemos que J é G-graduado. Em [T] foi provado que existe uma subálgebra semissimples maximal $C \subset R$ tal que $\widehat{G}(C) = C$. Assim C é homogênea e $R = C + J$. Mas C é soma direta de ideais simples como álgebra não-graduada, isto é, $C = B_1 \oplus \cdots \oplus B_k$. Note que $\widehat{G}$ age sobre conjunto $\{B_1, \ldots, B_k\}$. É claro que qualquer

$$T_i = \sum_{\varphi \in \widehat{G}} \varphi(B_i)$$

é um ideal de C. Por outro lado, T_i é um ideal minimal (no conjunto dos ideais $\widehat{G}$-invariantes) de C estável por $\widehat{G}$-ações. Assim, T_i é simples (como ideal G-graduado) e G-graduado. Claramente C é soma dos T_i's, o que encerra a demonstração. ■

Lema 3.3.3 *Seja R uma álgebra sobre um corpo F com elemento neutro E e seja C uma subálgebra de R isomorfa à álgebra $M_n(F)$. Se E_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$ são as matrizes unitárias de C e $E = E_{11} + \cdots + E_{nn}$, então $R = CD \simeq C \otimes D \simeq M_n(D)$ onde D é o centralizador de C em R.*

Demonstração: Ver Lema 3.11 de [SK]. ■

Lema 3.3.4 *Sejam A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado, J o radical de Jacobson de A e $A = A_{ss} + J$, onde $A_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$, com $A_i \simeq M_{d_i}(F)$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Se para algum $m \leq n$, tivermos $A_1 J A_2 \ldots J A_m \neq 0$, então A contém uma subálgebra isomorfa a $UT(d_1, \ldots, d_m)$.*

Demonstração: Pode ser encontrada na página 197 de [GZ]. ■

Lema 3.3.5 *Sejam A e B duas F-álgebras de dimensão finita e unitárias e suponha que A seja uma álgebra central e simples. Então I é um ideal da álgebra B se, e somente se, $A \otimes I$ é um ideal de $A \otimes B$. Mais ainda, todo ideal W de $A \otimes B$ tem a forma $A \otimes I$, onde I é um ideal de B e a correspondência $I \to A \otimes I$ é biunívoca.*

Demonstração: Pode ser encontrada na página 75 de [B]. ■

Um fato que será de nosso interesse posteriormente e que segue como consequência do lema acima é o seguinte resultado:

Corolário 3.3.6 *Sejam A e B duas F-álgebras de dimensão finita e unitárias e suponha que A seja uma álgebra central e simples. Então $J(A \otimes B) = A \otimes J(B)$.*

Demonstração: A inclusão $A \otimes J(B) \subset J(A \otimes B)$ segue como consequência do fato de $A \otimes J(B)$ ser um ideal nilpotente de $A \otimes B$ e $J(A \otimes B)$ ser o maior ideal nilpotente de $A \otimes B$.

Agora provaremos que $J(A \otimes B) \subset A \otimes J(B)$. Levando em conta que $J(A \otimes B)$ é um ideal de $A \otimes B$, pelo lema anterior, existe U ideal de B tal que $J(A \otimes B) = A \otimes U$.

Afirmamos que U é nilpotente. De fato, seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $J(A \otimes B)^n = 0$ e tomemos $u_1, u_2, \dots, u_n \in U$ elementos arbitrários em U. Desde que $1 \otimes u_1, \dots, 1 \otimes u_n \in J(A \otimes B)$, temos $1 \otimes (u_1 u_2 \dots u_n) = 0$ e, assim, $u_1 u_2 \dots u_n = 0$. Devido à arbitrariedade na escolha dos u_i's, segue que $U^n = 0$. Neste caso, devemos ter $U \subset J(B)$. Por outro lado, como $A \otimes J(B) \subset J(A \otimes B) = A \otimes U$, decorre que $\dim J(B) \leq \dim U$. Assim, temos $U = J(B)$ e daí $J(A \otimes B) = A \otimes J(B)$.

■

Lema 3.3.7 *Seja B um F-álgebra e suponha que existam inteiros p e t tais que $B \simeq M_p(F) \otimes M_t(F)$. Então existem subálgebras A e C de B tais que $A \simeq M_p(F)$, $C \simeq M_t(F)$ e $A \subset C_B(C)$. Além disso, AC é uma subálgebra de B e $B = AC$.*

Demonstração: Seja $\varphi : M_p(F) \otimes M_t(F) \to B$ um isomorfismo de álgebras. Sejam $X = M_p(F) \otimes \{1\}$ e $Y = \{1\} \otimes M_t(F)$. Note que X e Y são subálgebras de $M_p(F) \otimes M_t(F)$. Além disso, é fácil ver que $X \subset C_{M_p(F) \otimes M_t(F)}(Y)$ e consequentemente XY é uma subálgebra de $M_p(F) \otimes M_t(F)$. Daí é claro que $M_p(F) \otimes M_t(F) = XY$. Logo, sendo $A = \varphi(X)$ e $C = \varphi(Y)$, decorre que $A \subset C_B(C)$, que AC é uma subálgebra de B e que $B = AC$. Ademais, é claro que $A \simeq M_p(F)$ e $C \simeq M_t(F)$. ■

Com os resultados supracitados, estamos em condições de enunciar e demonstrar o resultado principal desse capítulo.

Teorema 3.3.8 *Sejam G um grupo abeliano e finito e $R = UT(d_1, \dots, d_m)$ a álgebra das matrizes triangulares em blocos sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero e suponha que $R = \oplus_{g \in G} R_g$ seja uma G-graduação. Então existem uma decomposição $d_1 = tp_1, \dots, d_m = tp_m$, um subgrupo H de G e uma n-upla $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$, onde $n = p_1 + \cdots + p_m$, tais que $UT(d_1, \dots, d_m)$ é isomorfa a $M_t(F) \otimes UT(p_1, \dots, p_m)$ como álgebra G-graduada, onde $M_t(F)$ é uma álgebra H-graduada com uma H-gradução fina e $UT(p_1, \dots, p_m)$ tem uma graduação elementar em relação à n-upla $(g_1, \dots, g_n)$.*

Demonstração: Sejam J o radical de Jacobson de $R = UT(d_1, \dots, d_m)$ e $\chi \in \widehat{G}$ um caracter irredutível de G. Como $\chi(J) = J$, segue-se que J é homogêneo na G-graduação. Ao mesmo tempo, pelo Lema 3.3.2, tem-se que R possui subálgebra B semissimples maximal e homogênea na graduação tal que $R = B + J$. Pelo Exemplo 3.1.2 e pelo Teorema 3.3.1, B é isomorfa a $B_1 \oplus \cdots \oplus B_m$, onde $B_i \simeq M_{d_i}(F)$.

Afirmamos que $\widehat{G}$ age sobre o conjunto $\{B_1, \ldots, B_m\}$, isto é, para todo $\chi \in \widehat{G}$, tem-se $\chi(B_i) \in \{B_1, \ldots, B_m\}$, para todo $i = 1, \ldots, m$. De fato, fixado $i = 1, \ldots, m$, notando que qualquer $\chi \in \widehat{G}$ satisfaz $\chi(B) = B$ (pois B é homogêneo na graduação) e que o operador χ preserva ideais simples de B, temos que $\chi(B_i)$ é um ideal simples de B, e assim, $\chi(B_i) \in \{B_1, \ldots, B_m\}$.

Sendo $\sigma \in S_m$, com σ diferente da permutação identidade, verifica-se que

- $B_1 J B_2 \ldots J B_m \neq 0$.
- $B_{\sigma(1)} J B_{\sigma(2)} \ldots J B_{\sigma(m)} = 0$. .

Diante disso, devemos ter $0 \neq \chi(B_1 J B_2 \ldots J B_m) = \chi(B_1)\chi(J)\chi(B_2) \ldots \chi(J)\chi(B_m) = \chi(B_1) J \chi(B_2) \ldots J \chi(B_m)$. Deste fato segue que $\chi(B_i) = B_i$, para todo $i = 1, \ldots, m$ e assim cada B_i é uma subálgebra G-graduada. Aplicando o Teorema 3.2.2, para cada $i = 1, \ldots, m$, temos $B_i \simeq M_{p_i}(F) \otimes M_{t_i}(F)$, onde $M_{p_i}(F)$ tem uma graduação elementar, $M_{t_i}(F)$ tem uma graduação fina e $d_i = p_i t_i$. No que se segue, provaremos que todas as álgebras $M_{t_i}(F)$ são isomorfas.

Sejam $C^{(1)} = M_{t_1}(F), \ldots, C^{(m)} = M_{t_m}(F)$. Afirmamos que se $M \subset R$ é um $C^{(i)}$-submódulo à esquerda (ou à direita) não trivial e homogêneo de R, então $\dim M \geq \dim C^{(i)}$. De fato, se $u \in M$ é um elemento homogêneo, $C^{(i)} u \neq 0$ implica em $x_g u \neq 0$, para todo $x_g \in C_g^{(i)}$, $x_g \neq 0$, pois do Teorema 3.2.4, $C^{(i)}$ é uma álgebra graduada de divisão. Por outro lado, $x_g u$ pertence a componentes homogêneas distintas de M, para cada $g \in G$. Assim, sendo $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_{t_i^2}\}$ uma base de $C^{(i)}$ formada por elementos homogêneos de graus distintos, segue-se que $\{v_1 u, v_2 u, \ldots, v_{t_i^2} u\}$ é um conjunto linearmente independente em M. Segue daí que $\dim M \geq \dim C^{(i)}$.

De acordo como o lema 3.3.7, é possível escrever $B_i = A^{(i)} C^{(i)}$, onde $A^{(i)}$ e $C^{(i)}$ são subálgebras de B_i e $A^{(i)} \simeq M_{p_i}(F)$, $C^{(i)} \simeq M_{t_i}(F)$ e $A^{(i)} \subset C_{B_i}(C^{(i)})$. Fixemos inicialmente as álgebras $C^{(1)}$ e $C^{(2)}$.

Se $e_1 \in A^{(1)}, e_2 \in A^{(2)}$ são idempotentes minimais (ou seja, matrizes diagonais unitárias), tem-se que $posto(e_1) = t_1$ e $posto(e_2) = t_2$ em R e assim temos $\dim e_1 R e_2 = posto(e_1) posto(e_2) = t_1 t_2$. Por outro lado, considerando o $C^{(1)}$-módulo à esquerda $M = C^{(1)} e_1 R e_2$ e notando que e_1 centraliza $C^{(1)}$, segue que

$$t_1^2 = \dim C^{(1)} \leq \dim C^{(1)} e_1 R e_2 = \dim e_1 C^{(1)} R e_2 \leq \dim e_1 R e_2 = t_1 t_2.$$

Consequentemente, temos $t_2 \geq t_1$. Analogamente, trabalhando com o $C^{(2)}$-módulo à direita $M' = e_1Re_2C^{(2)}$, por simetria, também obteremos $t_1 \geq t_2$ e daí $t_1 = t_2$. Portanto,

$$\dim e_1Re_2 = t_1^2 = t_2^2. \tag{3.2}$$

Pelo Exemplo 1.2.10, sabemos por que e_1Re_2 é um subespaço graduado de R. Assim, fixado $X_{12} \in e_1Re_2$ não nulo e homogêneo, segue que $M = C^{(1)}X_{12}C^{(2)}$ é homogêneo e é um $C^{(1)}$-módulo à esquerda. Além disso, note que $M \subset e_1Re_2$. Assim devemos ter

$$\dim C^{(1)} \leq \dim C^{(1)}X_{12} \leq \dim M \leq \dim e_1Re_2 = \dim C^{(1)}.$$

Daí $\dim M = \dim C^{(1)}X_{12}$ e, como $C^{(1)}X_{12} \subset M$, segue-se a igualdade $C^{(1)}X_{12} = M$. Analogamente, observando que M é um $C^{(2)}$-módulo à direita, concluímos que $M = X_{12}C^{(2)}$. Logo,

$$T = C^{(1)}X_{12} = X_{12}C^{(2)}. \tag{3.3}$$

Sejam $H_1 = Supp(C^{(1)})$ e $H_2 = Supp(C^{(2)})$. Afirmamos que $Supp(T) = gH_1 = gH_2$, onde $g = \deg X_{12}$. De fato, como $T = C^{(1)}X_{12}$, um elemento homogêneo de T deve ter grau gh_1, para algum $h_1 \in H_1$ e, assim, $Supp(T) \subset gH_1$. Por outro lado, sendo $h_1 \in H_1$, existe $P \in C^{(1)}$, com $P \neq 0$, tal que $h_1 = \deg P$. Assim, $PX_{12} \in T$, $PX_{12} \neq 0$ (pois P é inversível) e $gh_1 = \deg PX_{12} \in Supp(T)$. Daí $gH_1 = Supp(T)$. Analisando a outra igualdade para T, também obtemos $Supp(T) = gH_2$. Por este motivo, temos $H_1 = H_2$. Ao mesmo tempo, pela igualdade 3.3, segue que para cada elemento homogêneo $a \in C^{(1)}_h$, existe algum $b_a \in C^{(2)}$ tal que

$$aX_{12} = X_{12}b_a. \tag{3.4}$$

A afirmação agora é de que b_a é homogêneo em $C^{(2)}$ e $\deg b_a = \deg a = h$. Com efeito, sendo a homogêneo, claramente aX_{12} é homogêneo (pois é produto de homogêneos) e $\deg aX_{12} = (\deg a)g$. Mas, como $aX_{12} = X_{12}b_a$, segue-se que $X_{12}b_a$ é homogêneo e $\deg X_{12}b_a = \deg aX_{12}$. Supondo por contradição que b_a não seja homogêneo, existem $t > 1$ e $h_1, h_2, \ldots, h_t \in G$ tais que $b_a = x_{h_1} + x_{h_2} + \cdots + x_{h_t}$, com $0 \neq x_{h_i} \in C^{(2)}_{h_i}$ (note que x_{h_i} é inversível), para todo $i = 1, \ldots, t$. Assim, temos que $X_{12}x_{h_i} \neq 0$, para $i = 1, \ldots, t$. Daí resulta que

$$X_{12}b_a = X_{12}(x_{h_1} + x_{h_2} + \cdots + x_{h_t}) = X_{12}x_{h_1} + X_{12}x_{h_2} + \cdots + X_{12}x_{h_t} \in \bigoplus_{i=1}^{t} R_{gh_i}$$

não é homogêneo, o que é uma contradição. Assim b_a é homogêneo e, como $aX_{12} = X_{12}b_a$, decorre que $g \deg a = g \deg b_a$. Desse modo, obtemos $\deg b_a = \deg a = h$.

Agora afirmamos que o elemento b_a é único. Com efeito, seja $\overline{b_a} \in C^{(2)}$ tal que $aX_{12} = X_{12}\overline{b_a}$. Neste caso, temos $\deg \overline{b_a} = \deg b_a$ e assim $b_a - \overline{b_a}$ é homogêneo em $C^{(2)}$ (que é uma álgebra graduada de divisão). Se $b_a \neq \overline{b_a}$, a igualdade $X_{12}b_a = X_{12}\overline{b_a}$ implicaria $X_{12} = 0$, o que é uma contradição. Por este motivo, segue que $\overline{b_a} = b_a$, o que garante a unicidade referida.

Motivados pela constatação acima, inferimos que está bem definida a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{12}: & C^{(1)} & \longrightarrow & C^{(2)} \\ & a & \longmapsto & \varphi_{12}(a) = b_a \end{array}.$$

Afirmamos que φ_{12} é um isomorfismo G-graduado de álgebras. De fato, sendo $a, a_1 \in C^{(1)}$ e $\lambda \in F$, note que:

(i) $(a + a_1)X_{12} = aX_{12} + a_1X_{12} = X_{12}\varphi_{12}(a) + X_{12}\varphi_{12}(a_1) = X_{12}(\varphi_{12}(a) + \varphi_{12}(a_1))$.

(ii) $(\lambda a)X_{12} = \lambda(aX_{12}) = \lambda(X_{12}\varphi_{12}(a)) = X_{12}(\lambda\varphi_{12}(a))$.

(iii) $(aa_1)X_{12} = a(a_1X_{12}) = a(X_{12}\varphi_{12}(a_1)) = (aX_{12})\varphi_{12}(a_1) = X_{12}\varphi_{12}(a)\varphi_{12}(a_1)$.

De (i), (ii) e (iii), respectivamente, decorre que $\varphi_{12}(a+a_1) = \varphi_{12}(a)+\varphi_{12}(a_1)$, $\varphi_{12}(\lambda a) = \lambda\varphi_{12}(a)$ e $\varphi_{12}(aa_1) = \varphi_{12}(a)\varphi_{12}(a_1)$. Além disso, se $\varphi_{12}(a) = 0$, segue que $a = 0$. Assim, φ_{12} é um homomorfismo injetor de álgebras e, como $t_1 = t_2$, concluímos que φ_{12} é um isomorfismo de álgebras. Pelo que já foi visto, φ_{12} é claramente G-graduado.

Por uma construção análoga à anterior, escolhemos $X_{23}, \ldots, X_{m-1m}$ e provamos que $H_1 = \cdots = H_m$, onde $H_j = Supp(C^{(j)})$, para $j = 1, \ldots, m$. Pelo mesmo raciocínio, construímos, para cada $k = 2, \ldots, m$, um isomorfismo de álgebras $\varphi_{(k-1)k} : C^{(k-1)} \to C^{(k)}$ que é G-graduado. Assim, $C^{(1)}, \ldots, C^{(m)}$ são isomorfas como álgebras H_1-graduadas e também $t_1 = \cdots = t_m = t$.

Observando que $e_1Re_2Re_3 \ldots e_{m-1}Re_m \neq 0$, é possível escolher $X_{12}, \ldots, X_{m-1m}$ satisfazendo

$$X_{12}X_{23} \ldots X_{m-1m} \neq 0. \tag{3.5}$$

Vamos denotar por φ_i, $i = 1, \ldots, m$, o isomorfismo G-graduado $\varphi_i : C^{(1)} \to C^{(i)}$ definido por $\varphi_i = \varphi_{(i-1)i} \circ \ldots \circ \varphi_{23} \circ \varphi_{12}$. Nesse contexto, seja

$$C = \{x + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_m(x) : x \in C^{(1)}\}.$$

Afirmamos que C é uma subálgebra homogênea de R. É fácil ver que C é um subespaço de R e C é homogêneo. Resta provar que C é fechado em relação à multiplicação. Para isso, considere $\alpha, \beta \in C$. Assim, devem existir $x, y \in C^{(1)}$ tais que

$$\alpha = x + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_m(x) \text{ e } \beta = y + \varphi_2(y) + \cdots + \varphi_m(y).$$

Além disso, levando em conta que $C^{(i)}C^{(j)} = 0$ para $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, com $i \neq j$, temos

$$\alpha\beta = xy + \varphi_2(xy) + \cdots + \varphi_m(xy).$$

Como $xy \in C^{(1)}$, devemos ter $\alpha\beta \in C$, o que justifica a afirmação. Além disso, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & C^{(1)} & \longrightarrow & C \\ & x & \longmapsto & \varphi(x) = x + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_m(x) \end{array}$$

é um isomorfismo de álgebras. Assim $C \simeq M_t(F)$ e, portanto, C é uma subálgebra simples de R.

Seja D o centralizador de C em R. Pelo Lema 3.3.3, devemos ter $R = CD \simeq C \otimes D$, onde D é uma subálgebra graduada. Provaremos agora que $D \simeq UT(p_1, \ldots, p_m)$ e que a graduação em D é elementar. Inicialmente, afirmamos que a componente semissimples de D é

$$A^{(1)} \oplus A^{(2)} \oplus \cdots \oplus A^{(m)} \simeq M_{p_1} \oplus \cdots \oplus M_{p_m}.$$

Inicialmente, observe que $A^{(i)} \subset D$, para todo $i = 1,\ldots,m$. De fato, sejam $y_i \in A^{(i)}$ e $\overline{x} \in C$. Note que $\overline{x} = x + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_m(x)$, para algum $x \in C^{(1)}$. Assim, devemos ter

$$y_i\overline{x} = y_i(x+\varphi_2(x)+\cdots+\varphi_m(x)) = y_i\varphi_i(x) = \varphi_i(x)y_i = (x+\varphi_2(x)+\cdots+\varphi_m(x))y_i = \overline{x}y_i.$$

Daí $A^{(i)} \subset D$, para todo $i = 1,\ldots,m$ e assim $A^{(1)} \oplus A^{(2)} \oplus \cdots \oplus A^{(m)} \subset D$. Logo, segue-se que $S = A^{(1)} \oplus A^{(2)} \oplus \cdots \oplus A^{(m)} + J(D) \subset D$ e é fácil ver que S é uma subálgebra de D (pois é soma de uma subálgebra com um ideal de D). Provaremos que $S = D$. Para tanto, note que

$$C \otimes D \simeq R = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_m + J(R) \simeq$$
$$(A^1 \otimes C^1) \oplus (A^2 \oplus C^2) \oplus \cdots \oplus (A^m \otimes C^m) + J(R) \simeq (A^1 \oplus A^2 \oplus \cdots \oplus A^m) \otimes C + J(R).$$

e

$$C \otimes S = C \otimes (A^1 \oplus A^2 \oplus \cdots \oplus A^m + J(D)) = C \otimes (A^1 \oplus A^2 \oplus \cdots \oplus A^m) + C \otimes J(D).$$

Notando que $J(R) \simeq J(C \otimes D)$ e usando o fato de que C é simples, pelo Corolário 3.3.5, segue que $J(R) \simeq J(C \otimes D) = C \otimes J(D)$. Portando $C \otimes D = C \otimes S$ e como $S \subset D$, decorre que $D = S = A^1 \oplus A^2 \oplus \cdots \oplus A^m + J(D)$. Neste caso segue que a componente semissimples de D é $A^1 \oplus A^2 \oplus \cdots \oplus A^m$, como havíamos afirmado.

Da forma que escolhemos $X_{12}, X_{23}, \ldots, X_{m-1,m}$ e $\varphi_2, \ldots, \varphi_m$, devemos ter $X_{k-1,k} \in D$, para cada $k = 1,\ldots,m$. De fato, um elemento típico de C tem a forma $x + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_m(x)$, onde $x \in C^{(1)}$. Assim, para qualquer $k = 2,\ldots,m$, tem-se

$$X_{(k-1)k}(x + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_m(x)) = X_{(k-1)k}\varphi_k(x) =$$
$$X_{(k-1)k}\varphi_{k-1,k}(\varphi_{k-2,k-1} \circ \cdots \circ \varphi_{12}(x)) = (\varphi_{k-1,k-2} \circ \cdots \circ \varphi_{12}(x))X_{(k-1)k} = \varphi_{k-1}(x)X_{(k-1)k}$$

e

$$(x + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_m(x))X_{(k-1)k} = \varphi_{k-1}(x)X_{(k-1)k}$$

Logo, para todo $k = 1,\ldots,m$, segue-se que $X_{(k-1)k} \in D$. Mais ainda, ocorre que $X_{(k-1)k} \in J(D)$, para cada $k = 2,\ldots,m$. De fato, desde que cada $X_{(k-1)k} \in D$, existem $a_1 \in A^{(1)}, \ldots, a_m \in A^{(m)}$ e $y \in J(D)$ tais que

$$X_{(k-1)k} = a_1 + a_2 + \cdots + a_m + y.$$

Daí segue que

$$X_{(k-1)k} = e_{k-1}X_{(k-1)k}e_k = e_{k-1}ye_k \in J(D).$$

Portanto, denotando $J(D)$ por I, do fato de que $X_{12}X_{23}\ldots X_{(m-1)m} \neq 0$, concluímos que $I^{m-1} \neq 0$. Além disso, desde que $A_1, \ldots, A_m$ são álgebras unitárias e a soma de suas unidades é igual à unidade de R, temos

$$A^1IA^2 \ldots IA^m \neq 0.$$

Pelo Lema 3.3.4, decorre que D contém uma subálgebra isomorfa a $UT(p_1, \ldots, p_m)$. Mas, observando a igualdade $\dim M_t(F) \otimes UT(p_1, \ldots, p_m) = \dim R = \dim C \otimes D$, segue-se que $\dim D = \dim UT(p_1, \ldots, p_m)$ e, assim, $D \simeq UT(p_1, \ldots, p_m)$. Por fim, pela construção realizada, veja que todas as álgebras $A_1, \ldots, A_m$ têm uma graduação elementar. Em particular, as matrizes $E_{11}, \ldots, E_{nn}$ (onde $n = p_1 + \cdots + p_m$) de D são homogêneas. Concluímos do lema 1 de [ZS] que a graduação de $UT(p_1, \ldots, p_m)$ é elementar, o que completa a demonstração.

$\blacksquare$

Bibliografia

[AM1] Yu. A. Bahturin and M. V. Zaicev, **Group Gradings on Matrix Algebras**, Canad. Math. Bull. Vol.45, 2002, pp. 499-508.

[AM2] Yu. A. Bahturin and M. V. Zaicev, **Identities of Graded Algebras and Codimension Growth**, Amer. Math. Soc. Vol.356, 2004, pp. 3939-3950.

[BSZ] Yu. A. Bahturin, S.K. Sehgal and M. V. Zaicev, **Group Gradings on Associative Algebras**, Journal of Algebra 241, pp. 677-698, 2001.

[BSZ2] Yu. A. Bahturin, S.K. Sehgal and M. V. Zaicev, **Gradings on simple rings**. Universite di Palermo, Dipartimento di Matematica ed Applicazioni. Preprint, 111, 2000.

[CR] C.W. Curtis, I. Reiner, **Representation Theory of Groups and Associative Algebras**. Interscience Publishers, 1962.

[De] M. Dehn, **Uber die Grundlagen der projektiven Geomatrie und allgemeine Zahlsysteme**, (German) Math. Ann. 85, 184-194, 1922.

[DI] S. Dacalescu, B. Ion, C. Nastasescu and J. Rios Montes, **Group gradings on full matrix rings**. J. Algebra, 220, 709-728, 1999.

[E] A. Elduque, **Gradings on octonions**. J. Algebra, 207, 342-354, 1998.

[B] B. Felzenszwalb, **Álgebras de Dimensão Finitas**, IMPA, 1979.

[GZ] A. Giambruno and M. Zaicev, **Polynomial Identities and Asymptotic Methods**. Mathematical Surveys and Monographs, Amer. Math. Soc. 122, Providence R. I., 2005.

[H] N. Herstein **Noncommutative rings**, Carus Math. Monographs 15, MAA, 1973

[J] N. Jacobson, **Basic Algebra II**, , 2 Ed, Dover, New York, 2009.

[A] A. Kemer, **Ideals of identities of associative algebras**. Trans. Math. Monograph 87, Providence 1988.

[L] T. Y. Lam, **A first course in noncommutative rings**. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 131. Springer-Verlag, New York, 2001.

[ML] C.P. Milies and S.K. Sehgal **An introdution to group ring**, Kluwer Academic Publishers, 2002.

[Ro] L. H. Rowen, **Ring Theory**, Academic Press, New York, 1988.

[Rot] J. J. Rotman, **Advanced modern algebra**, Prentice Hall, 2002.

[O1] O.N. Smirnov, **Simple associative algebras with finite $\mathbb{Z}$-granding**. J. Algebra, 196, 171-184, 1997.

[O2] O.N. Smirnov, **Finite $\mathbb{Z}$-grading on Lie algebras and symplectic involution**. J. Algebra, 218, 246-275, 1999.

[SK] S.K. Sehgal, **Topics in Group Rings**. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. 50, Marcel Dekker, New York, 1978.

[S] J. P. Serre, **Linear Representations of Finite Groups**, Volume 42 de Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, 1996.

[T] EJ.Taft, **Invariant Wedderburn factors**, Illinois J. Math. 1 (1957), 565-573.

[V] A. Valenti, **The graded identities of upper triangular matrices of size two**. J.Pure. Appl. Algebra 172, 325-335, 2002.

[VZ1] A. Valenti and M. Zaicev, **Abelian gradings on upper-triangular matrices**, Arch. Math.80, 2003, pp. 12-17.

[VZ2] A. Valenti and M. Zaicev, **Group gradings on upper triangular matrices**, Arch. Math.89, 2007, pp.33-40.

[VZ3] A. Valenti and Zaicev, **Abelian Gradings on Upper Block Triangular Matrices**, Canad. Math. Bull, 2011.

[ZS] M. V. Zaicev and S.K. Sehgal, **Finite gradings on simple Artinian rings**. Vestnik Moskov. Univ. Ser. I. Mat. Mekh. 2, 2001.