

**Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática**

**Existência, multiplicidade e
concentração de sólitons para uma
classe de problemas quasilineares**

por

Alan Carlos Baia dos Santos

Campina Grande - PB

Fevereiro/2015

Existência, multiplicidade e concentração de sólitons para uma classe de problemas quasilineares

por

Alan Carlos Baia dos Santos[†]

sob orientação do

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB

Fevereiro/2015

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Área de Concentração: Análise

Aprovada em:

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros (UFPB)

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Ferreira (UFCG)

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves (UFCG)

Orientador

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Fevereiro/2014

Resumo

Neste trabalho estudamos existência, multiplicidade e concentração de soluções para a seguinte equação não linear

$$-\hbar^2 \Delta v + V(x)v - \hbar^p \Delta_p v + W'(v) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $v : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$, $3 \leq N < p$, o potencial V é positivo e W é uma função singular apropriada. Supondo algumas condições em V e W , aplicamos o método variacional para estabelecer existência e multiplicidade de soluções.

Palavras-chave: métodos variacionais; sequências minimizantes.

Abstract

In this work, we study existence, multiplicity and concentration of solutions for the following nonlinear field

$$-\hbar^2 \Delta v + V(x)v - \hbar^p \Delta_p v + W'(v) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

where $v : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$, $3 \leq N < p$, the potential V is positive and W is an appropriate singular function. Under suitable conditions on V and W , we apply the variational method to establish existence and multiplicity of solutions.

Keywords: variational methods; minimizing sequence.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me trazido até aqui.

- Agradeço a minha mãe Ana e a o meu pai Carlos que sempre me ensinaram os valores da vida cada um do seu modo. Se hoje sou alguém na vida é graças a vocês! Agradeço ao meu irmão Álesi e as minhas irmãs Alessandra e Aline por todos os momentos que passamos. E agradeço à todos os outros meus familiares que sempre torceram por essa vitória. Em especial aos minhas tias Adélia e Bena e ao meu tio Sandoval os quais, desde quando eu era pequeno, sempre me apoiaram.
- Agradeço ao meu orientador e amigo professor Claudianor pela orientação, dedicação, paciência, humildade e, principalmente pela amizade. Sou grato por toda ajuda concedida pelo senhor desde minha vinda à Campina Grande. Agradeço por todas as conversas e todos os conselhos que o senhor me deu dia após dia durante esses dois anos. Nunca esquecerei seus conselhos! Lembro-me de uma de nossas conversas, logo na minha entrada no mestrado. Eu, tentando encontrar um modo de agradecer ao senhor por ter me dado a oportunidade de estudar com o senhor e pela ajuda financeira que o senhor conseguiu com vários professores do DME durante os meses que eu ficaria sem bolsa, e o senhor me disse: ‘você não precisa me agradecer por isso. Só me prometa uma coisa: um dia quando você tiver condições e aparecer alguém necessitado precisando de sua ajuda, ajude-o.’ Com certeza entendi a sua mensagem professor Claudianor! Ela diz o seguinte: *bondade deve ser passada de um indivíduo para outro*. Agradeço pela dedicação que o senhor teve por esta dissertação. Mesmo passando por problemas de saúde, o senhor não abriu mão de toda semana, pelo menos um dia que fosse, estudarmos um pouco. Agradeço pelos cursos e seminários que o senhor lecionou os quais tive a oportunidade de

participar. Nas suas aulas eu aprendi muito mais que ser um matemático. Por tudo que aprendi nelas, muito obrigado! Sou grato pela paciência e compreensão que o senhor teve por mim nesta etapa final. Só Deus e o senhor sabem o que passei. Não tenho palavras para descrever a minha gratidão pela pessoa que vc é, professor Claudianor! Que Deus lhe abençoe sempre.

- Agradeço a todos os professores e funcionários do DME. Não tem como descrever a sensação de paz que é viver entre vocês neste departamento. Agradeço aos professores: Alciônio, Antônio Brandão, Braulio, Claudianor, Daniel, Denilson, Francisco Júlio, José Lindomberg e Luiz Mendes pela confiança e por toda ajuda financeira que os senhores me ofertaram naquele momento de dificuldade. Agradeço ao professores com quem tive a oportunidade de assistir aulas: Angelo, Antônio Brandão, Claudianor, Henrique, Jefferson, Joseilson, Marco Antonio, Marco Aurélio, Severino Horácio. Tenham certeza que vocês fizeram um excelente trabalho na minha formação! Agradeço ao professor José Luiz que sempre parava e conversava comigo na maior simplicidade. Agradeço à Aninha pelos 'BOM DIAS!', toda manhã, que só ela consegue fazer. Agradeço a Andrezza que sempre ajudou de forma fantástica nos processos burocráticos. Sou grato aos professores Angelo Roncalli, Aparecido Jesuíno e Severino Horácio por todas as conversas. Agradeço ao professor Antônio Brandão, por ser uma pessoa fantástica! Sempre feliz! Sempre se preocupando comigo.
- Agradeço aos professores Everaldo Souto e Marcelo Carvalho por aceitarem participar da minha banca examinadora e por suas sugestões para a melhoria deste trabalho.
- Agradeço aos professores da UFPa. Agradeço aos meus mestres do campus de Abaetetuba: Genivaldo dos Passos, Manuel Costa, Manoel Jeremias e Renato Fabrício. Os quais foram de extrema importância na minha formação. Especialmente ao professor Jeremias que foi um dos grandes responsáveis pela minha primeira vinda a Campina Grande. Meus agradecimentos a professora Mara Rita pelo apoio durante a graduação, sempre preocupada comigo.

Agradeço aos professores da UFPa-Belém, Francisco Júlio, Giovany Figueiredo, João Pablo e Rúbia Gonçalves. Agradeço ao professor Pablo, que me incentivou muito, sempre pagando minhas passagens para ir estudar em Belém. Ao professor Júlio uma das pessoas mais humildes que conheço. Muito obrigado por fazer parte da minha vida.

- Agradeço ao meu primo e amigo Vani Gomes, pela amizade, pelos conselhos, pelas aventuras nos períodos de Verão na UFPa, estudando até tarde da noite, dormindo pelos centros acadêmicos.
- Agradeço aos amigos Izaías, Gládson e Gabriel por todos os momentos que passamos estudando e conversando. E pela super invenção denominada 'quebra-sono': café, leite, nescau e guaraná em pó. rsrs
- Agradeço aos colegas do mestrado e doutorado com quem tive oportunidade de estudar e conviver: Ailton, Alan de Araújo, Allânio, Antonio Marcos, Arlandson, Arthur, Bruno, Brito, Carlos, Claudemir, Denilson, Elizabete, Erivaldo, Fábio, Jamilly, Jogli, Keytt, Levi, Luciano Cipriano, Luciano Martins, Manu, Michel, Misaelle e Romildo.
- Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Por fim, agradeço a todos aqueles que não mencionei aqui mas que de algum modo contribuíram com este trabalho.

*Haverá um dia em que você não haverá de ser feliz,
Sentirá o ar sem se mexer,
Sem desejar como antes sempre quis,
Você vai rir... sem perceber,
Felicidade é só questão de ser,
Quando chover... deixar molhar...
Pra receber o sol quando voltar.
Lembrará os dias que você deixou passar sem ver a luz,
Se chorar, chorar é vão,
Porque os dias vão pra nunca mais...*

*Melhor viver meu bem,
Pois há um lugar em que o sol brilha pra você,
Chorar, sorrir também e depois dançar na chuva
Quando a chuva vem.*

*Melhor viver meu bem,
Pois há um lugar em que o sol brilha pra você,
Chorar, sorrir também e dançar,
Dançar na chuva quando a chuva vem.*

*Tem vez que as coisas pesam mais
Do que a gente acha que pode aguentar,
Nessa hora fique firme pois tudo isso logo vai passar,
Você vai rir... sem perceber...
Felicidade é só questão de ser,
Quando chover... deixar molhar...
Pra receber o sol quando voltar.*

Marcelo Jeneci

Dedicatória

Ao Professor Claudianor, pela amizade.

Sumário

Introdução	1
Notação e Terminologia	11
1 O Espaço de Funções e a Noção de Carga Topológica	13
1.1 Apresentação do problema	13
1.2 O espaço de funções	14
1.3 Carga topológica	20
1.4 Sobre o Funcional Energia	29
2 Resultado de Existência e Multiplicidade: Potencial Coercivo	40
2.1 Potencial coercivo	40
3 Estudo com o Potencial Constante	46
3.1 Potencial constante	46
3.2 Splitting	47
3.3 Existência de mínimo nas componentes conexas de Λ	52
4 Resultado de Existência: Potencial não Coercivo	56
4.1 Hipóteses adicionais	56
4.2 Resultados	58
5 Concentração de soluções: o limite semi-clássico	73
5.1 Fenômeno de concentração	73
Apêndices	
A H_h é um Espaço de Banach Reflexivo	83

B	Sobre a Teoria do Grau de Brouwer	86
B.1	Caso regular	86
B.2	Definição do Grau para $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$	87
B.3	Definição do grau para funções contínuas	87
B.4	Principais propriedades do grau de Brouwer	88
B.5	Conseqüências das principais propriedades	88
C	Alguns resultados de Análise	90
	Referências	92

Introdução

Um problema proposto na década de 60

Na década de 1960, na tentativa de encontrar um modelo para as partículas elementares, alguns autores consideraram modelos de equações da forma

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi + W'(\varphi) = 0. \quad (1)$$

No caso unidimensional, Enz [16] mostrou que

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + W'(\theta) = 0$$

com $\theta = \theta(x, t)$, $W(\theta) = \sin^2(\theta)$, possui solução estática estável cuja energia se localiza ao redor de um ponto sobre o eixo x .

A equação de sine- Gordon

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \sin(\varphi) = 0, \quad (2)$$

é um exemplo desse tipo de propriedade. Em Rajaraman [23] e Whitham [24], foi observado que as soluções estáticas de (2), isto é, que não dependem do tempo, denominadas *kink* e *ant-kink*, dão origem a *sólitons*. A grosso modo, um **sóliton** é uma solução da equação de um campo cuja energia viaja em pacotes localizados e que preserva sua forma sob perturbações, em outras palavras, sólitons são ondas solitárias que possuem algum tipo de estabilidade sob perturbações (uma definição mais formal para sólitons será dada na próxima seção). Dessa forma, sólitons tem um comportamento similar a de uma partícula e ocorrem em muitas questões da Física-Matemática, tais como, teoria quântica de campos, óptica não-linear, mecânica dos fluidos, física dos plasmas. Para mais detalhes indicamos os artigos [17],[23] e [24].

Estes resultados levaram Derrick em 1964, em seu famoso artigo [15], a se perguntar: *A equação (1) pode ter solução estática, estável e localizada em dimensão 3?*, em outras palavras, a equação (1) admite sólitons como soluções?. A resposta dada por ele foi “não”. Contudo, Derrick propôs várias maneiras de superar esta dificuldade, uma delas foi a seguinte:

A equação (1) é a equação de Euler-Lagrange relativa a ação

$$S = \int \mathcal{L} dx dt,$$

onde a *densidade Lagrangeana* \mathcal{L} é dada por

$$\mathcal{L} = -\alpha(\sigma) - W(\varphi),$$

com

$$\alpha(\sigma) = \sigma, \quad \sigma = c^2 |\nabla \varphi|^2 - \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2.$$

Derrick sugeriu tomar uma densidade Lagrangeana com

$$\alpha(\sigma) = \sigma^n, \quad \sigma = c^2 |\nabla \varphi|^2 - \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 \quad \text{e} \quad n > \frac{3}{2}.$$

Derrick conclui que: *“uma tal densidade Lagrangeana, contudo, conduz a equações diferenciais muito complicadas”*. De fato, na década de 1960, os métodos da análise não-linear não estavam suficientemente desenvolvidos para tratar com equações quase-lineares.

Em 1998, Benci, Fortunato e Pisani [7], realizaram um amplo estudo sobre a existência de sólitons em dimensão 3, considerando uma densidade Lagrangeana análoga à proposta por Derrick, a saber,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\alpha(\sigma) - W(\varphi),$$

onde

$$\alpha(\sigma) = \sigma + \frac{\varepsilon}{3}\sigma^3, \quad \sigma = c^2 |\nabla \varphi|^2 - \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2, \quad \varepsilon > 0.$$

Mais detalhes sobre as principais hipóteses assumidas, os principais resultados e o porquê da escolha de uma tal densidade Lagrangeana será dado a seguir.

Um modelo para partículas em dimensão 3

Provavelmente, a equação mais simples que tem sólitons como solução é a equação de sine-Gordon

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \sin(\varphi) = 0,$$

a qual é uma equação semilinear hiperbólica em uma dimensão espacial.

Em [7], Benci, Fortunato e Pisani estavam interessados em determinar uma equação, em três dimensões espaciais, que preservasse as principais peculiaridades da equação de sine-Gordon, a saber, que tivesse sólitons como soluções, que fosse invariante pelas transformações de Lorentz e, entre outras coisas, que os sólitons satisfizessem a famosa equação de Einstein

$$E = mc^2.$$

A partir daqui, as palavras grifadas em itálico são oriundas da teoria clássica de campos da física. Para mais informações acerca desta teoria, veja por exemplo [18].

Sejam $N, M \in \mathbb{N}$. Denotaremos por \mathbb{R}^{N+1} e \mathbb{R}^M , respectivamente, o *espaço-tempo físico* (tipicamente $N = 3$) e o *espaço das configurações*. Um ponto em \mathbb{R}^{N+1} será denotado por (x, t) , com $x \in \mathbb{R}^N$ e $t \in \mathbb{R}$. Os *campos* que estamos interessados são aplicações

$$\varphi : \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^M, \quad \varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^M).$$

Desde que desejamos invariância pelas transformações de Lorentz, ver [18], vamos considerar *densidades Lagrangeanas* da forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \sigma)$$

com

$$\sigma = c^2 |\nabla \varphi|^2 - \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2,$$

e sendo c a velocidade da luz com $\nabla \varphi$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ denotando, respectivamente, a matriz Jacobiana com relação a x e a derivada com relação a t .

No que segue, consideramos uma Lagrangeana da forma

$$\mathcal{L}(\varphi, \sigma) = -\frac{1}{2} \alpha(\sigma) - W(\varphi), \tag{3}$$

onde $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave e W é uma função real definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^M$.

O funcional ação relacionado a (3) é

$$\mathcal{S}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \mathcal{L}(\varphi, \sigma) dx dt = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \left(-\frac{1}{2} \alpha(\sigma) - W(\varphi) \right) dx dt.$$

Assim, a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional acima é

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha'(\sigma) \varphi_t) - c^2 \nabla (\alpha'(\sigma) \nabla \varphi) + W'(\varphi) = 0, \quad (4)$$

onde $\varphi_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $\nabla (\alpha'(\sigma) \nabla \varphi)$ denota o vetor cujo j -ésima componente é dada por

$$\operatorname{div} (\alpha'(\sigma) \nabla \varphi^j)$$

e W' denota o gradiente de W .

Quando $\alpha(\sigma) = \sigma$, a equação (4) se reduz a equação da onda semilinear

$$\square \varphi + W'(\varphi) = 0,$$

onde

$$\square \varphi = \varphi_{tt} - c^2 \Delta \varphi \quad \text{e} \quad \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_N^2},$$

já apresentada anteriormente.

Sob boas condições em α e W , cada solução estática de (4), soluções da forma $\varphi(x, t) = u(x)$, são soluções da equação

$$-c^2 \nabla (\alpha'(\sigma) \nabla \varphi) + W'(\varphi) = 0 \quad (5)$$

tendo energia localizada em uma região compacta.

Seja $u = u(x_1, x_2, x_3)$ uma solução de (5) e considere um vetor \mathbf{v} com $|\mathbf{v}| < c$. Por simplicidade, tomaremos $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$. Então, não é difícil verificar que

$$\varphi_{\mathbf{v}}(x_1, x_2, x_3, t) = u \left(\frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}, x_2, x_3 \right) \quad (6)$$

é uma solução da equação (4).

Note que a função φ sofre uma contração de um fator

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

na direção do movimento. Isso é uma consequência do fato da equação (4) ser invariante pelas transformações de Lorentz.

Além disso, é possível mostrar que (6) tem algum tipo de estabilidade, se a solução estática de (4) é obtida como mínimo local do funcional energia associado a (5), dado por

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} \alpha (c^2 |\nabla u|^2) + W(u) \right) dx.$$

Essas observações conduzem a seguinte definição.

Definição 0.1 *Uma solução φ da equação (4), será denominada um **sóliton**, se φ tem a forma (6), onde u é um mínimo local do funcional energia.*

Antes de fazer a escolha das funções α e W , faremos algumas observações com relação a diferença entre o caso unidimensional ($N = 1$) e o caso tridimensional ($N = 3$). No caso unidimensional, a equação não linear clássica que tem um sóliton como solução é a equação de sine-Gordon

$$\square \varphi + \sin \varphi = 0. \tag{7}$$

Observe que (7) pode ser obtida de (4), fazendo as escolhas

$$M = 1, \quad \alpha(\sigma) = \sigma, \quad W(\xi) = 1 - \cos \xi.$$

Soluções estáticas de (7) são pontos críticos do funcional energia

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} (u'(x))^2 + (1 - \cos u(x)) dx$$

sobre o espaço H das funções reais suaves u que satisfazem as seguintes condições assintóticas

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 2k_1\pi, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 2k_2\pi, \tag{8}$$

com $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Observe que os valores assintóticos de u são mínimos do potencial W , dessa forma, a energia $I(u)$ é finita.

Cálculos explícitos mostram que essas soluções possuem um comportamento solitônico (veja [23]). Além disso, desde que o espaço H pode ser dividido em infinitas componentes conexas de acordo com as condições assintóticas (8), os sólitons podem ser classificadas topologicamente. Mais precisamente, desde que

$I(u) = I(u + 2k_1\pi)$, é suficiente fixar k_1 e considerar a diferença $k_2 - k_1$. Fixando $k_1 = 0$, temos

$$H = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda_k, \quad \Lambda_k = \left\{ u : \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 2k\pi \right\}$$

Agora consideremos o caso mais realístico, pelo menos do ponto de vista físico, que é o caso em três dimensões espaciais ($N = 3$). Considere, como antes, $M = 1$. Se considerarmos $\alpha(\xi) = \xi$, como na equação de sine-Gordon, então o funcional energia de soluções estáticas é

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + W(u) \right) dx. \quad (9)$$

Se o potencial W for positivo, então, o argumento usado por Derrick em [15], mostra qualquer função u que minimiza (9) é necessariamente trivial. Portanto, ao considerar $\alpha(\xi) = \xi$, não poderemos supor que $W \geq 0$.

Por outro lado, se considerarmos um potencial W não-positivo, somos forçados a procurar por pontos de sela ao invés de mínimo e para soluções estáticas obtidas como pontos de sela temos uma perda de estabilidade. Por exemplo, escolhendo

$$W(\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{4}\xi^4,$$

os pontos críticos do funcional energia

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{c^2}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}|u|^2 - \frac{1}{4}|u|^4 \right) dx$$

foram encontrados em [22]. Mas em [1], os autores mostraram que tais soluções estáticas não são estáveis. Portanto não é interessante considerar potenciais não-positivos.

Tendo isso em mente, apresentaremos agora como foi feita a escolha, por Benci, Fortunato e Pisani em [7], da função α . Em seguida, apresentaremos as principais hipóteses usadas, bem como o principal teorema estabelecido por tais autores.

Benci, Fortunato e Pisani propuseram um modelo de equação em dimensão 3 da forma (4), cujas soluções estáticas podiam ser topologicamente classificadas, assim como acontece na equação de sine-Gordon.

Como já foi observado anteriormente, α linear implica que (4) não tem sóliton estático. Portanto, somos forçados a escolher α não-linear:

$$\alpha(\sigma) = \sigma + a_2\sigma^2 + a_3\sigma^3 + \dots .$$

Agora, analisaremos a escolha mais simples de α , que é

$$\alpha(\sigma) = \sigma + a_2\sigma^2.$$

No entanto, esta é uma escolha ruim, pois $\alpha'(\sigma)$ muda de sinal, na equação de evolução (4). Então, é natural considerar a próxima escolha mais simples, a saber

$$\alpha(\sigma) = \sigma + a_3\sigma^3;$$

que foi a escolha considerada em [7]. Por simplicidade, foi considerado que

$$\alpha(\sigma) = \sigma + \frac{1}{3}\sigma^3.$$

Com uma tal escolha, a equação (4) pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left((1 + \sigma^2)\varphi_t \right) - c^2 \nabla \left((1 + \sigma^2)\nabla \varphi \right) + W'(\varphi) = 0,$$

ou

$$\square \varphi + \square_6 \varphi + W'(\varphi) = 0$$

onde

$$\square_6 \varphi = \frac{\partial}{\partial t} \left((c^2 |\nabla \varphi|^2 - |\varphi_t|^2)^2 \varphi_t \right) - c^2 \nabla \left((c^2 |\nabla \varphi|^2 - |\varphi_t|^2)^2 \nabla \varphi \right).$$

Logo, soluções estáticas v resolvem a equação

$$-c^2 \Delta v - c^6 \nabla \left(|\nabla v|^4 \nabla v \right) + W'(v) = 0,$$

que pode ser escrita como

$$-c^2 \Delta v - c^6 \Delta_6 v + W'(v) = 0,$$

ou ainda, através de uma mudança de variável, pode ser escrita da forma

$$-\Delta v - \Delta_6 v + W'(v) = 0. \tag{10}$$

Com relação a função não-negativa W , supomos que a mesma está definida em

$$\Omega = \mathbb{R}^4 \setminus \{\bar{\xi}\}$$

sendo ilimitada em um vizinhança de $\bar{\xi}$. Mais precisamente, as seguintes hipóteses foram assumidas sobre W :

- $W \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$;
- $W(\xi) \geq W(0) = 0$ para todo $\xi \in \Omega$;
- existem $\kappa, \varrho > 0$ tais que

$$|\xi| < \varrho \implies W(\bar{\xi} + \xi) \geq \frac{\kappa}{|\xi|^6};$$

- por simplicidade, $|\bar{\xi}| = 1$.

A presença de Δ_6 em (10) implica que as funções sobre as quais E é finito são contínuas e tendem a zero no infinito. A presença do termo singular W' implica que as funções v tem suas imagens contidas em Ω . Dessa forma, as propriedades topológicas não-triviais de Ω (a saber $\pi_3(\Omega) \approx \mathbb{Z}$) permite, assim como na equação de sine-Gordon, dar uma classificação topológica para soluções estáticas. Esta classificação é dada por meio de um invariante topológico, a **carga topológica**, a qual depende essencialmente da região onde a função está concentrada.

O principal resultado obtido em [7] foi o seguinte teorema.

Teorema 0.2 *Existe \bar{v} solução fraca de (10), a qual é obtida como mínimo do funcional energia E , dado por,*

$$E(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 + \frac{1}{6} |\nabla v|^6 + W(v) \right) dx,$$

na classe das funções que não são homotópicas a função nula, ou seja, que tem carga topológica diferente de zero.

Nos artigos [4], [5], [8], [14], [19], [20], [21] novas equações não lineares que admitem sólitons como soluções foram estudadas. Em [4], os resultados obtidos em [7] foram generalizados em vários sentidos. Primeiramente, o trabalho é feito em dimensão maior do que ou igual a 2. Dessa forma são consideradas funções

$$\varphi : \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{N+1}, \quad N \geq 2.$$

Em segundo lugar, a densidade Lagrangeana é considerada da forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\alpha(\sigma) - W(\varphi), \quad (11)$$

onde

$$\alpha(\sigma) = a\sigma + b|\sigma|^{\frac{p}{2}}, \quad \sigma = c^2|\nabla\varphi|^2 - \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2, \quad p > N, \quad a \geq 0, \quad b > 0.$$

Portanto, quando $a = 1$, $N = 3$ e $p = 6$, obtemos o caso que foi estudado em [7]. Ademais, os autores provaram em [4], com hipóteses adicionais às consideradas em [7], um resultado de multiplicidade de solução. Veja também [12], onde Cid e Felmer, com hipóteses ligeiramente mais fracas, porém em dimensão 3, mostraram também um resultado de multiplicidade.

Por outro lado, se $a = 0$, $b = 1$ e $N = 3$, (11) é exatamente a densidade Lagrangeana proposta por Derrick em [15]. Para os leitores interessados no problema de Derrick, citamos os artigos [11], [14], [20] e [21].

Monica Musso em 2001, no artigo [19], considera um modelo de equação, em dimensão 3, que consiste do acoplamento de duas equações de onda e obtém uma equação que tem sóliton como solução. O curioso em tal trabalho é que soluções estáticas de tal equação, obedecem a seguinte equação

$$-\Delta u + \Delta^2 u + W'(u) = 0. \quad (12)$$

Em comparação com a equação (10), há uma mudança do termo Δ_6 por Δ^2 , mas que ainda permite que as soluções estáticas sejam classificadas topologicamente. Infelizmente, um generalização natural de (12) para dimensões maiores não é tão simples, por falta de maiores informações envolvendo as imersões de Sobolev.

Proposta da dissertação

Em 2001, Badiale, Benci e D'Aprile [2] perturbaram a equação (10) pelo termo $V(x)v$ e estudaram o limite semi-clássico. Nesse sentido, foi introduzido um parâmetro pequeno \hbar e considerado a equação de campo não linear

$$-\hbar^2\Delta v + V(x)v - \hbar^p\Delta_p v + W'(v) = 0, \quad (P_1)$$

onde

- $v : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{N+1}$,
- $N \geq 3, p > N$,
- $V : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$,
- $W : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, com $\Omega = \mathbb{R}^{N+1} \setminus \{\bar{\zeta}\}$, $|\bar{\zeta}| = 1$ e W' denota o gradiente de W .

O termo $-\hbar^2 \Delta v$ é usual no estudo do limite semi-clássico para equações de Schrödinger linear e não-linear. Aqui $\Delta_p v$ denota o vetor em \mathbb{R}^{N+1} cuja j -ésima entrada é dada por

$$\operatorname{div} \left(|\nabla v|^{p-2} \nabla v_j \right).$$

O fator \hbar^p multiplicando $\Delta_p v$ é necessário para fazer a seguinte mudança de variáveis: $x \rightarrow x\hbar$, e assim, permitir que (P_1) pode ser reescrita da forma

$$-\Delta u + V_{\hbar}(x)u - \Delta_p u + W'(u) = 0, \quad (P_2)$$

onde $V_{\hbar}(x) = V(\hbar x)$ e $u(x) = v(\hbar x)$. Neste sentido, esta equação é a mesma equação (*) exceto pelo termo $V_{\hbar}(x)u$. Foi provado em [2] existência e multiplicidade de soluções de (P_2) (ou (P_1)). Além disso, também foi mostrado que tais soluções se concentram em torno de um ponto de mínimo do potencial V , quando $\hbar \rightarrow 0^+$. O objetivo central desta dissertação é apresentar a demonstração dos resultados obtidos em [2], bem como o caso em que V é constante que foi considerado em [7].

A dissertação está dividida em cinco capítulos. No Capítulo 1, primeiramente é apresentado o problema bem como as hipóteses básicas assumidas. Depois, é apresentado o espaço de funções demonstrando as principais propriedades acerca do mesmo. É exposto o conceito de carga topológica demonstrando suas propriedades. Ainda no Capítulo 1, é feito um estudo minucioso do funcional energia associado ao problema. No Capítulo 2, adicionando a hipótese de coercividade sob o potencial V é mostrado que o problema possui infinitas soluções com carga topológica não nula. O Capítulo 3 é dedicado ao estudo do problema considerando o potencial V sendo constante positivo. Neste capítulo é demonstrado um resultado de existência, o qual se baseia em um fantástico resultado obtido por Benci, Fortunato e Pisani em [7], que a grosso modo nos dá o comportamento exato de sequências minimizantes no espaço das funções com carga topológica diferente de zero. O Capítulo 3

é crucial para o desenvolvimento do Capítulo 4. No Capítulo 4 é estabelecido um resultado de existência quando o potencial V não é coercivo. Para obter tal resultado, também se faz necessário outras hipóteses em V e W . Por fim, no Capítulo 5 é estudado o fenômeno de concentração onde será visto que as soluções do problema se concentram em um ponto de mínimo do potencial V .

Notação e Terminologia

- Sendo $A \subset \mathbb{R}^N$ denotaremos por χ_A a função característica do conjunto A .
- Sendo $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$, denotaremos por $u^1, \dots, u^{N+1} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ as funções componentes de u .
- Para $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$, ∇u denota a matriz real $(N+1) \times N$ cujas linhas são dadas pelos gradientes das funções componentes de u .
- Seja $1 \leq s \leq \infty$. O espaço $L^s(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$ consiste das funções $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$, tais que as funções componentes $u^1, \dots, u^{N+1} \in L^s(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.
Analogamente, $W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$ consiste das funções $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$, tais que as funções componentes $u^1, \dots, u^{N+1} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.
- Sendo $u \in L^s(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$, denotaremos por $\|u\|_{L^s}$ ou $\|u\|_s$ a norma usual em $L^s(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$, à saber

$$\|u\|_{L^s} = \left(\sum_{i=1}^{N+1} \|u^i\|_{L^s(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})}^s \right)^{\frac{1}{s}}$$

ou, a seguinte norma, a qual é equivalente à anterior,

$$\|u\|_{L^s} = \sum_{i=1}^{N+1} \|u^i\|_{L^s(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})}$$

Capítulo 1

O Espaço de Funções e a Noção de Carga Topológica

Neste capítulo, apresentamos o espaço de funções que iremos trabalhar e demonstraremos algumas de suas propriedades. Posteriormente, vamos introduzir o conceito de carga topológica, que é uma ferramenta topológica crucial no nosso estudo. Finalizamos o capítulo estudando algumas propriedades do funcional energia associado ao problema.

1.1 Apresentação do problema

Estamos interessados em mostrar resultados de existência, multiplicidade e concentração de solução da seguinte equação de campo não linear:

$$-\hbar^2 \Delta v + V(x)v - \hbar^p \Delta_p v + W'(v) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (P_1)$$

onde $v : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$, $3 \leq N < p$ e as funções V e W serão apresentadas a seguir. Antes disso, através da mudança de variáveis: $x \rightarrow x\hbar$, observamos que (P_1) pode ser escrita na forma

$$-\Delta u + V_{\hbar}(x)u - \Delta_p u + W'(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (P_2)$$

onde $V_{\hbar}(x) = V(\hbar x)$ e $u(x) = v(\hbar x)$.

Em todo este trabalho iremos assumir as seguintes hipóteses com relação às funções V e W :

(V₁) $V \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e $V_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) > 0$;

(W₁) $W \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, onde $\Omega = \mathbb{R}^{N+1} \setminus \{\bar{\xi}\}$ para algum $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^{N+1}$ com $|\bar{\xi}| = 1$;

(W₂) W é duas vezes diferenciável em 0;

(W₃) $W(\xi) \geq W(0) = 0$ para todo $\xi \in \Omega$;

(W₄) Existem $\kappa, \varrho > 0$ tais que

$$0 < |\xi| < \varrho \implies W(\bar{\xi} + \xi) > \frac{\kappa}{|\xi|^q},$$

onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{N} - \frac{1}{p}$, $N \geq 3$, $p > N$.

Um exemplo simples de uma função W que satisfaz (W₁) – (W₄) é o seguinte:

$$W(\xi) = \frac{|\xi|^2}{|\xi - \bar{\xi}|^q}.$$

Outras hipóteses em V e W serão apresentadas em cada situação específica. Por exemplo, no Capítulo 2, será provado um resultado de existência e multiplicidade de solução, supondo que o potencial V é coercivo.

O funcional energia associado a (P₂) é dado por

$$E_{\hbar}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} (|\nabla u|^2 + V_{\hbar}(x) |u|^2) + \frac{1}{p} |\nabla u|^p + W(u) \right) dx. \quad (1.1)$$

Um cálculo direto mostra que soluções fracas de (P₂) correspondem a pontos críticos do funcional energia E_{\hbar} .

1.2 O espaço de funções

Seja H_{\hbar} o subespaço de $W^{1,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$ consistindo das funções u tais que

$$\|u\|_{H_{\hbar}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V_{\hbar}(x) |u|^2) dx \right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p} < +\infty. \quad (1.2)$$

O espaço H_{\hbar} pode também ser obtido como

$$H_{\hbar} = \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})}^{\|\cdot\|_{H_{\hbar}}}.$$

No Apêndice A é demonstrado que H_{\hbar} é um espaço de Banach reflexivo com a norma (1.2). As principais propriedades de H_{\hbar} estão contidas no seguinte lema.

Lema 1.1 (i) *As imersões abaixo envolvendo H_{\hbar} são contínuas*

$$H_{\hbar} \hookrightarrow W^{1,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$$

e

$$H_{\hbar} \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1}).$$

(ii) *Existem duas constante $C_0, C_1 > 0$ tais que, para cada $u \in H_{\hbar}$*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C_0 \|u\|_{H_{\hbar}}$$

e

$$|u(x) - u(y)| \leq C_1 |x - y|^{\frac{p-N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N. \quad (1.3)$$

(iii) *Para cada $u \in H_{\hbar}$*

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0. \quad (1.4)$$

(iv) *Se (u_n) converge fracamente em H_{\hbar} para alguma função u , então ela converge uniformemente em cada conjunto compacto de \mathbb{R}^N .*

Demonstração. (i) De (1.2), note que $\|u\|_{H_{\hbar}} \geq C \|u\|_{W^{1,2}}$, onde C é uma constante positiva. Logo, H_{\hbar} está imerso continuamente em $W^{1,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$.

Desde que $\|\nabla u\|_{L^p} \leq \|u\|_{H_{\hbar}}$, para provar a imersão contínua de H_{\hbar} em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$ é suficiente provar a seguinte imersão contínua: $H_{\hbar} \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$.

Considere a sequência $(\ell_k) \subset (0, +\infty]$ definida recursivamente por

$$\ell_1 = 2^* = \frac{2N}{N-2}$$

e

$$\ell_{k+1} = \begin{cases} \ell_k^* = \frac{N\ell_k}{N-\ell_k}, & \ell_k < N \\ +\infty, & \ell_k \geq N. \end{cases}$$

Vamos mostrar que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \ell_k = +\infty. \quad (1.5)$$

Suponha, por contradição, que a menos de subsequência (ℓ_k) é limitada. Então, pela definição da sequência (ℓ_k) deve ocorrer

$$\ell_k < N \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Fixe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > \frac{N-2}{2} > 0$. Note que

$$\ell_k < N \iff \frac{N\ell_{k-1}}{N-\ell_{k-1}} < N \iff 2\ell_{k-1} < N.$$

Analogamente,

$$2\ell_{k-1} < N \iff \frac{2N\ell_{k-2}}{N - \ell_{k-2}} < N \iff 3\ell_{k-2} < N.$$

Recursivamente, obtemos

$$(m + 1)\ell_{k-m} < N.$$

Como $k \in \mathbb{N}$ está fixo, considere $m \in \mathbb{N}$ tal que $k - m = 1$. Assim,

$$k2^* < N \implies \frac{2kN}{N-2} < N \implies k < \frac{N-2}{2},$$

o que contradiz nossa escolha de k e portanto fica provado (1.5).

Por hipótese $N > 2$, logo $\ell_1 = 2^* < +\infty$. Distinguiremos dois casos:

$$\mathbf{(a_1)} \ell_1 = 2^* \geq p \quad \text{ou} \quad \mathbf{(b_1)} \ell_1 = 2^* < p$$

Suponha que $\mathbf{(a_1)}$ ocorra. Note que $W^{1,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1}) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$ continuamente para qualquer $q \in [2, 2^*]$. Em particular, $p \in [2, 2^*]$, logo valem as imersões contínuas

$$H_{\hbar} \hookrightarrow W^{1,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1}).$$

Consideremos o caso $\mathbf{(b_1)}$. Veja que

$$W^{1,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1}) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1}).$$

Seja $\alpha = \frac{2(p-2^*)}{2^*(p-2)} \in (0, 1)$, ($2 < 2^* < p$). Como $\nabla u \in L^2 \cap L^p$, usando a desigualdade de interpolação, obtemos

$$\|\nabla u\|_{L^{2^*}} \leq \|\nabla u\|_{L^2}^\alpha \|\nabla u\|_{L^p}^{1-\alpha},$$

donde segue

$$\|\nabla u\|_{L^{2^*}} \leq \|u\|_{H_{\hbar}},$$

e portanto,

$$H_{\hbar} \hookrightarrow W^{1,2^*}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1}).$$

Novamente distinguiamos dois casos

$$\mathbf{(a_2)} \ell_2 \geq p \quad \text{ou} \quad \mathbf{(b_2)} \ell_2 < p$$

Se **(a₂)** ocorrer, então

$$H_{\hbar} \hookrightarrow W^{1,2^*}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1}).$$

No caso **(b₂)** teremos $H_{\hbar} \hookrightarrow L^{\ell_2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$ e repetimos o mesmo argumento usado em **(b₁)**. Este processo termina em um número finito de passos. De fato, por (1.5), faz sentido considerar $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} : \ell_k \geq p\} \in (2, +\infty)$. Portanto, o caso **(a_{k₀})** deve ocorrer o que termina a prova do item **(i)**.

(ii) Como $p > N$, segue do *Teorema de Morrey* que

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}),$$

ou seja,

$$\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})} \leq C_0 \|w\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})}$$

para todo $w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ com $C_0 > 0$. Seja $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$ arbitrário. Temos que as funções componentes u^1, \dots, u^{N+1} pertencem a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e portanto vale

$$\|u^i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})} \leq C_0 \|u^i\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})} \quad \forall i = 1, \dots, N+1.$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{N+1} \|u^i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})} \leq C_0 \sum_{i=1}^{N+1} \|u^i\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})}$$

e portanto,

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})} \leq C_0 \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})}$$

o que prova a imersão contínua

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1}).$$

Logo, usando o item **(i)** concluímos que

$$H_{\hbar} \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1}),$$

provando a primeira desigualdade desejada do item **(ii)**.

Usando novamente o *Teorema de Morrey* e um argumento análogo ao usado acima, obtemos a segunda desigualdade do item **(ii)**, isto é, existe $C_1 > 0$ tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq C_1 |x - y|^{\frac{p-N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N,$$

qualquer que seja $u \in H_{\hbar}$.

(iii) Dado $u \in H_{\hbar}$, existe uma sequência $(u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$ tal que $u_n \rightarrow u$ em H_{\hbar} . Pelo item (ii), existe $C_0 > 0$ tal que

$$\|v\|_{L^\infty} \leq C_0 \|v\|_{H_{\hbar}} \quad \forall v \in H_{\hbar}.$$

Então, para qualquer $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} |u(x)| - |u_n(x)| &\leq |u(x) - u_n(x)| \\ &\leq \|u - u_n\|_{L^\infty} \\ &\leq C_0 \|u - u_n\|_{H_{\hbar}}. \end{aligned}$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, para n suficientemente grande, temos

$$|u(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |u_n(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Como u_n tem suporte compacto, existe $M > 0$ tal que, se $|x| > M$, então $|u_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Assim,

$$|u(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \text{com} \quad |x| > M.$$

Portanto,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

(iv) No que segue, consideramos uma subsequência arbitrária de (u_n) , que ainda denotaremos por (u_n) . Claro que ainda vale $u_n \rightharpoonup u$, assim (u_n) é limitada em H_{\hbar} e portanto (∇u_n) é limitado em $L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$. Logo, por (1.3),

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq \tilde{C} |x - y|^{\frac{p-N}{p}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e portanto, (u_n) é uma sequência equicontínua. Além disso, como H_{\hbar} está imerso continuamente em $L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$, temos que a sequência (u_n) também é equilimitada. Portanto, fixado $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, existe u_0 tal que, passando para uma subsequência,

$$u_n(x) \longrightarrow u_0(x) \quad \text{uniformemente em} \quad x \in K.$$

Resta provar que $u = u_0$. Desde que H_{\hbar} está imerso continuamente em $W^{1,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$ que por sua vez está imerso compactamente em $L^2(K, \mathbb{R}^N)$, temos que vale a imersão compacta

$$H_{\hbar} \hookrightarrow L^2(K, \mathbb{R}^N).$$

Logo, a menos de subsequência, $u_n(x) \rightarrow u(x)$ q.t.p em $x \in K$. Por unicidade do limite concluímos que $u = u_0$. Pelo estudo feito, foi provado que toda subsequência de (u_n) possui uma subsequência que converge para u uniformemente em K . Isso é suficiente para mostra que a sequência inteira (u_n) converge uniformemente para u sobre K . ■

De (1.3), obtemos a seguinte propriedade que será usado várias vezes nas demonstrações dos resultados:

Dada uma família $\{u_\alpha\} \subset H_{\bar{h}}$ de funções verificando $\|\nabla u_\alpha\|_{L^p} \leq M$ para algum $M > 0$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |u_\alpha(x) - u_\alpha(y)| \leq \varepsilon \quad \forall \alpha.$$

Nos referiremos a esta propriedade como a “continuidade equi-uniforme” da família $\{u_\alpha\}$.

Desde que as funções em $H_{\bar{h}}$ são contínuas, podemos considerar o conjunto

$$\Lambda_{\bar{h}} = \left\{ u \in H_{\bar{h}} : u(x) \neq \bar{\xi} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \right\}.$$

Proposição 1.2 $\Lambda_{\bar{h}}$ é aberto em $H_{\bar{h}}$.

Demonstração. Fixado $u \in \Lambda_{\bar{h}}$, primeiramente vejamos que

$$d = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} |u(x) - \bar{\xi}| > 0.$$

Por contradição, suponha $d = 0$. Então, da definição de ínfimo, existe uma sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$|u(x_n) - \bar{\xi}| \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Se (x_n) for limitada, então existe uma subsequência (x_{n_j}) de (x_n) e $x_0 \in \mathbb{R}^N$ de sorte que $x_{n_j} \rightarrow x_0$. Por continuidade temos $|u(x_0) - \bar{\xi}| = 0$, donde $u(x_0) = \bar{\xi}$ o que é contradição, uma vez que $u \in \Lambda_{\bar{h}}$.

Se (x_n) não for limitada, deve existir uma subsequência (x_{n_j}) de (x_n) tal que

$$|x_{n_j}| \rightarrow +\infty \quad \text{quando } j \rightarrow +\infty.$$

Logo, de (1.4),

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} u(x_{n_j}) = 0.$$

Por outro lado,

$$\left| u(x_{n_j}) - \bar{\xi} \right| \longrightarrow 0 \quad \text{quando } j \rightarrow +\infty$$

ou seja,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} u(x_{n_j}) = \bar{\xi}.$$

Por unicidade de limite, devemos ter $\bar{\xi} = 0$, chegando a um absurdo. Portanto $d > 0$.

Agora, dado $u \in \Lambda_{\hbar}$, considere a bola aberta centrada em u e raio $r = \frac{d}{2C_0} > 0$ em relação a H_{\hbar} , isto é,

$$B_r(u) = \left\{ w \in H_{\hbar} : \|u - w\|_{H_{\hbar}} < \frac{d}{2C_0} \right\}$$

onde $C_0 > 0$ é a constante que aparece no **Lema 1.1 (ii)**.

Vejamos que $B_r(u) \subset \Lambda_{\hbar}$. Com efeito, se $w \in B_r(u)$ e $x \in \mathbb{R}^N$, então

$$\begin{aligned} |\bar{\xi} - w(x)| &\geq |u(x) - \bar{\xi}| - |u(x) - w(x)| \\ &\geq d - \|u - w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})} \\ &\geq d - C_0 \|u - w\|_{H_{\hbar}} \\ &> d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} > 0. \end{aligned}$$

Logo $w(x) \neq \bar{\xi}$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e por conseguinte $w \in \Lambda_{\hbar}$. Assim, $B_r(u) \subset \Lambda_{\hbar}$, mostrando que Λ_{\hbar} é um aberto de H_{\hbar} . ■

1.3 Carga topológica

Agora queremos dar uma classificação topológica para as aplicações $u \in \Lambda_{\hbar}$. Nesta seção, usaremos a teoria do grau de Brouwer para definir um invariante topológico denominado *carga topológica*, que será uma ferramenta crucial no decorrer deste trabalho. No Apêndice B, recordamos as principais propriedades do grau topológico de Brouwer que serão usadas aqui.

No conjunto aberto $\Omega = \mathbb{R}^{N+1} \setminus \{\bar{\zeta}\}$, consideremos a esfera unitária centrada em $\bar{\zeta}$

$$\Sigma = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^{N+1} : |\zeta - \bar{\zeta}| = 1 \right\}.$$

Em Σ tomamos os pólos norte e sul, denotados respectivamente por ζ_N e ζ_S com respeito a reta que passa pela origem e por $\bar{\zeta}$, isto é, desde que $|\bar{\zeta}| = 1$ temos $\zeta_N = 2\bar{\zeta}$ e $\zeta_S = 0$.

Agora considere a projeção $P : \Omega \rightarrow \Sigma$ dada por

$$P(\zeta) = \bar{\zeta} + \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{|\zeta - \bar{\zeta}|}, \quad \forall \zeta \in \Omega.$$

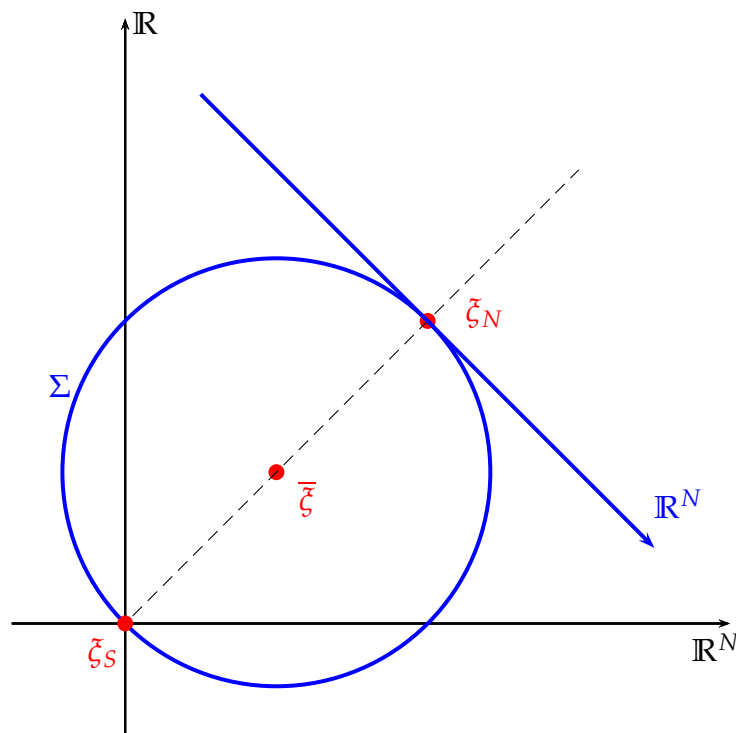
Pela própria definição de P temos

$$P(\zeta) = 2\bar{\zeta} \iff \zeta = (1 + |\zeta - \bar{\zeta}|) \bar{\zeta},$$

logo

$$P(\zeta) = 2\bar{\zeta} \implies |\zeta| > 1. \quad (1.6)$$

A figura abaixo foi feita para melhor compreensão do que foi dito acima bem como da definição a seguir.



Definição 1.3 *Sejam $u \in \Lambda_{\hbar}$ e $U \subset \mathbb{R}^N$ um aberto tal que $|u(x)| \leq 1$ para todo $x \in \partial U$. Definimos a **carga topológica** de u no conjunto U como sendo o seguinte número inteiro*

$$ch(u, U) = \deg(P \circ u, U \cap K(u), 2\bar{\xi}),$$

onde $K(u)$ é o conjunto aberto

$$K(u) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : |u(x)| > 1 \right\}.$$

Seja $u \in \Lambda_{\hbar}$. Definimos a **carga topológica** de u como sendo o número inteiro

$$ch(u) = \deg(P \circ u, K(u), 2\bar{\xi}).$$

Agora vamos nos deter, por um momento, em provar que a definição acima está bem posta. Um primeiro fato a ser observado é que sempre é possível obter um aberto $U \subset \mathbb{R}^N$ de sorte que $|u(x)| \leq 1$ para $x \in \partial U$. De fato, por (1.4), é possível escolhermos $M > 0$ tal que

$$|x| \geq M \implies |u(x)| \leq 1,$$

ou seja, se $x \in (B_M(0))^c$ então $|u(x)| \leq 1$. Daí, basta considerar $U = B_M(0)$ pois é claro que $|u(x)| \leq 1$ para todo $x \in \partial B_M(0) = \partial U$.

O leitor atento deve ter notado que na definição acima $P \circ u : \mathbb{R}^N \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^{N+1}$ e, por outro lado, $U \cap K(u) \subset \mathbb{R}^N$. A priori tal fato gera uma inconsistência no cálculo do grau de Brouwer. Entretanto, lembre que a *projeção estereográfica* π nos dá um isomorfismo entre $\Sigma \setminus \{0\}$ e \mathbb{R}^N . Portanto, para cada $x \in \mathbb{R}^N$, $(P \circ u)(x)$ e $2\bar{\xi}$ são identificados com pontos de \mathbb{R}^N via π , isto é, $(P \circ u)(x) \cong \pi((P \circ u)(x))$ e $2\bar{\xi} \cong \pi(2\bar{\xi})$.

Para fazer sentido o cálculo do grau de Brouwer na definição acima, devemos ter certeza de duas coisas:

I) $U \cap K(u)$ é um aberto limitado de \mathbb{R}^N ;

II) $\bar{\xi}_N = 2\bar{\xi} \notin (P \circ u)(\partial(U \cap K(u)))$.

No que segue, mostraremos que **I)** e **II)** ocorrem.

É claro que $U \cap K(u)$ é aberto. Logo, basta provar que $K(u)$ é limitado. Supondo o contrário, existe uma sequência $(x_n) \subset K(u)$ tal que

$$\lim_n |x_n| = +\infty.$$

Em virtude de (1.4),

$$\lim_n u(x_n) = 0.$$

Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de sorte que

$$n \geq n_0 \implies |u(x_n)| \leq 1.$$

Como $(x_n) \subset K(u)$ temos $|u(x_n)| > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ o que nos leva a um absurdo. Portanto $K(u)$ é limitado, mostrando **I**.

Para estabelecer **II**, suponhamos por contradição que existe

$$x_0 \in \partial(U \cap K(u)) \subset \partial U \cup \partial(K(u)^{\mathbb{G}})$$

tal que $P(u(x_0)) = 2\bar{\xi}$. Devido a (1.6), temos $|u(x_0)| > 1$.

Caso $x_0 \in \partial U$ temos $|u(x_0)| \leq 1$. Se $x_0 \in \partial(K(u)^{\mathbb{G}})$ devemos ter $|u(x_0)| = 1$, o que nos leva a um absurdo em qualquer caso.

Observação 1.4

1. Pode ocorrer de $U \cap K(u) = \emptyset$. Neste caso, recordamos da propriedade do grau de Brouwer

$$\deg(P \circ u, \emptyset, 2\bar{\xi}) = 0.$$

Dessa forma, $ch(u, U) = 0$ quando $U \cap K(u) = \emptyset$.

2. Foi escolhido o valor 1 na **Definição 1.3**, pois a singularidade $\bar{\xi}$ tem norma 1.

O próximo lema mostra que a carga topológica tem uma certa propriedade de invariância.

Lema 1.5 *Sejam $u \in \Lambda_{\bar{h}}$ e $U \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado com $|u(x)| \leq 1$ para todo $x \in \partial U$. Então*

$$ch(u, U) = \deg(P \circ u, U, 2\bar{\xi}).$$

Da mesma forma, para cada $u \in \Lambda_{\bar{h}}$ e $R > 0$ tal que $K(u) \subset B_R(0)$, vale a igualdade

$$ch(u) = \deg(P \circ u, B_R(0), 2\bar{\xi}).$$

Demonstração. Como $U = (U \cap K(u)) \cup (U \setminus K(u))$ e $U \setminus K(u) = U \cap (K(u)^{\mathbb{G}})^{\mathbb{C}}$ é um fechado de U , basta provar que $2\bar{\xi} \notin (P \circ u)(U \setminus K(u))$ e usar a propriedade da excisão do grau de Brouwer para concluir o resultado.

Supondo, por absurdo, que existe $x_0 \in U \setminus K(u)$ tal que $P(u(x_0)) = 2\bar{\xi}$. Por (1.6)

temos $|u(x_0)| > 1$. Por outro lado, como $x_0 \notin K(u)$ devemos ter $|u(x_0)| \leq 1$ o que nos leva a um absurdo. Logo, $2\bar{\xi} \notin (P \circ u)(U \setminus K(u))$ e pela propriedade da excisão concluímos que

$$ch(u, U) = deg(P \circ u, U \cap K(u), 2\bar{\xi}) = deg(P \circ u, U, 2\bar{\xi}).$$

Analogamente, $B_R(0) \setminus K(u)$ é um fechado de $B_R(0)$ e $2\bar{\xi}$ não pode pertencer a $(P \circ u)(B_R(0) \setminus K(u))$ porque, do contrário, $2\bar{\xi} = P(u(x_0))$ para algum $x_0 \in B_R(0) \setminus K(u)$. Chegando assim no absurdo de $1 < |u(x_0)| \leq 1$ devido a (1.6) e a $x_0 \notin K(u)$. Segue da propriedade da excisão que

$$ch(u, U) = deg(P \circ u, K(u), 2\bar{\xi}) = deg(P \circ u, B_R(0), 2\bar{\xi}).$$

■

Das propriedades do grau de Brouwer podemos obter outras boas propriedades para a carga topológica. Um exemplo disso está contido na seguinte proposição.

Proposição 1.6 *Seja $U \subset \mathbb{R}^N$ um aberto que consiste de m componentes conexas: U_1, \dots, U_m tal que $|u(x)| \leq 1$ para todo $x \in \partial U$. Então*

$$ch(u, U) = \sum_{j=1}^m ch(u, U_j) \quad (1.7)$$

Demonstração. Segue da propriedade aditiva do grau de Brouwer.

■

Uma outra consequência é que a carga topológica é estável com respeito à convergência uniforme, conforme especificado no próximo lema.

Lema 1.7 *Sejam $(u_n) \subset \Lambda_{\bar{h}}$, $u \in \Lambda_{\bar{h}}$ e $U \subset \mathbb{R}^N$ um aberto tal que*

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{uniformemente em } U$$

e

$$|u_n(x)| \leq 1, \quad |u(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \partial U, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então, para n suficientemente grande,

$$ch(u, U) = ch(u_n, U).$$

Demonstração. Primeiramente vamos provar que

$$P \circ u_n \longrightarrow P \circ u \quad \text{uniformemente em } U. \quad (1.8)$$

Afirmção 1.8 *Existem $M, d > 0$ tais que*

$$|u_n(x)| \leq M, |u(x)| \leq M, |u_n(x) - \bar{\xi}| > d, |u(x) - \bar{\xi}| > d \quad \forall x \in U, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Com efeito, como $u_n \rightarrow u$ uniformemente sobre U , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u_n(x) - u(x)| \leq 1 \quad \forall x \in U, n > n_0.$$

Logo,

$$|u_n(x)| \leq 1 + |u(x)| \leq 1 + \|u\|_{L^\infty} = M_1 \quad \forall x \in U \quad \text{e} \quad n > n_0.$$

Assim, fixando $M = \max\{\|u_1\|_{L^\infty}, \dots, \|u_{n_0}\|_{L^\infty}, M_1\}$, obtemos que

$$|u_n(x)| \leq M, |u(x)| \leq \|u\|_{L^\infty} \leq 1 + \|u\|_{L^\infty} \leq M \quad \forall x \in U, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Agora, como $u \in \Lambda_{\bar{h}}$, temos que $\inf_{x \in \mathbb{R}^N} |u(x) - \bar{\xi}| > 0$. Logo,

$$|u(x) - \bar{\xi}| > 2d_0$$

para algum $d_0 > 0$ e para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Por outro lado, segue da convergência uniforme de (u_n) para u sobre U que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u_n(x) - u(x)| < d_0 \quad \forall x \in U, \forall n > n_1.$$

Portanto,

$$|u_n(x) - \bar{\xi}| \geq |u(x) - \bar{\xi}| - |u_n(x) - u(x)| > 2d_0 - d_0 = d_0 \quad \forall x \in U, \forall n > n_1.$$

Desde que $u_1, \dots, u_{n_1} \in \Lambda_{\bar{h}}$, existem $d_1, \dots, d_{n_1} > 0$ tais que

$$|u_i(x) - \bar{\xi}| > d_i \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, i \in \{1, \dots, n_1\}.$$

Escolhendo $d = \min\{d_0, d_1, \dots, d_{n_1}\}$, obtemos

$$|u_n(x) - \bar{\xi}| > d, |u(x) - \bar{\xi}| > d \quad \forall x \in U, \forall n \in \mathbb{N}$$

o que conclui a afirmação.

Note que o conjunto $K = \overline{B_M(0) \setminus B_d(\bar{\xi})}$ é um compacto de Ω . Pela escolha de M e d temos que $u(x), u_n(x) \in K \quad \forall x \in U, \forall n \in \mathbb{N}$. Como a projeção P é contínua, temos que P é uniformemente contínua sobre o compacto K . Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de sorte que

$$\zeta, \xi \in K, |\zeta - \xi| < \delta \implies |P(\zeta) - P(\xi)| < \varepsilon$$

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|u_n(x) - u(x)| < \delta$ para todo $x \in U$ e todo $n > n_0$. Então

$$|(P \circ u_n)(x) - (P \circ u)(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in U, \forall n > n_0$$

e portanto fica provado (1.8).

Afirmção 1.9 *Existe $R > 0$ tal que, para n suficientemente grande, vale*

$$|u(x)| < \frac{1}{2}, \quad |u_n(x)| < \frac{1}{2} \quad \forall x \in U \setminus B_R(0).$$

Segue de (1.4) que existe $R > 0$ tal que

$$|u(x)| < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \quad \forall x \in U \setminus B_R(0).$$

Para n suficientemente grande

$$|u_n(x) - u(x)| < \frac{1}{4} \quad \forall x \in U.$$

Assim, para n grande e $x \in U \setminus B_R(0)$, obtemos

$$|u_n(x)| \leq |u_n(x) - u(x)| + |u(x)| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Afirmção 1.10 *Para n suficientemente grande vale*

$$U \cap K(u) = (U \cap B_R(0)) \cap K(u) \quad e \quad U \cap K(u_n) = (U \cap B_R(0)) \cap K(u_n).$$

Basta mostrar que

$$U \cap K(u) \subset B_R(0), \quad U \cap K(u_n) \subset B_R(0).$$

Dado $x \in U \cap K(u_n)$, suponha por absurdo que $x \notin B_R(0)$. Pela afirmação anterior, para n grande, devemos ter $|u_n(x)| < \frac{1}{2}$. Por outro lado, como $x \in K(u_n)$ temos que $|u_n(x)| > 1$ o que nos leva a um absurdo. Analogamente mostra-se a outra inclusão.

Combinando (1.8), **Lema 1.5** e a continuidade do grau topológico de Brouwer com respeito a convergência uniforme, para n grande obtemos:

$$\begin{aligned}
ch(u, U) &= deg(P \circ u, U \cap K(u), 2\bar{\xi}) \\
&= deg(P \circ u, (U \cap B_R(0)) \cap K(u), 2\bar{\xi}) \\
&= ch(u, U \cap B_R(0)) \\
&= deg(P \circ u, U \cap B_R(0), 2\bar{\xi}) \\
&= deg(P \circ u_n, U \cap B_R(0), 2\bar{\xi}) \\
&= ch(u_n, U \cap B_R(0)) \\
&= deg(P \circ u_n, (U \cap B_R(0)) \cap K(u_n), 2\bar{\xi}) \\
&= deg(P \circ u_n, U \cap K(u_n), 2\bar{\xi}) \\
&= ch(u_n, U).
\end{aligned}$$

■

A seguinte consequência do lema anterior será usado com frequência neste trabalho.

Corolário 1.11 *Para cada $u \in \Lambda_{\hbar}$ existe $\rho = \rho(u) > 0$ tal que, para cada $v \in \Lambda_{\hbar}$*

$$\|u - v\|_{L^\infty} \leq \rho \implies ch(u) = ch(v).$$

Demonstração. Em primeiro lugar, vejamos que é suficiente provar que se $(u_n) \subset \Lambda_{\hbar}$ converge uniformemente para u em \mathbb{R}^N , então, para n grande $ch(u_n) = ch(u)$. De fato, tendo isso verdadeiro por um momento e suponhamos, por contradição, que para cada $n \in \mathbb{N}$ exista $v_n \in \Lambda_{\hbar}$ com $\|v_n - u\|_{L^\infty} < \frac{1}{n}$, mas $ch(u) \neq ch(v_n)$. Então, temos $v_n \rightarrow u$ uniformemente, no entanto $ch(u) \neq ch(v_n)$. Contradição com nossa suposição.

Devido a (1.4) e a convergência uniforme $u_n \rightarrow u$ em \mathbb{R}^N , podemos escolher $R > 0$ tal que, para n grande, vale (veja **Afirmção 1.9**)

$$|u(x)| < \frac{1}{2}, \quad |u_n(x)| < \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0).$$

Da **Definição 1.3**, e do fato de $K(u), K(u_n) \subset B_R(0)$, obtemos

$$ch(u) = deg(P \circ u, K(u), 2\bar{\xi}) = deg(P \circ u, B_R(0) \cap K(u), 2\bar{\xi}) = ch(u, B_R(0))$$

$$ch(u_n) = deg(P \circ u, K(u_n), 2\bar{\xi}) = deg(P \circ u, B_R(0) \cap K(u_n), 2\bar{\xi}) = ch(u_n, B_R(0))$$

Pelo **Lema 1.7** obtemos o desejado

$$ch(u) = ch(u, B_R(0)) = ch(u_n, B_R(0)) = ch(u_n).$$

■

Finalmente daremos uma descrição da estrutura topológica para o conjunto de funções Λ_{\hbar} . Mostraremos que Λ_{\hbar} possui uma rica estrutura topológica, mais precisamente, o mesmo consiste de uma infinidade de componentes conexas e estas componentes conexas são identificadas por meio da carga topológica.

Usando a terminologia adotada em [8], para cada $q \in \mathbb{Z}$ definimos o **setor**

$$\Lambda_{\hbar}^q = \{u \in \Lambda_{\hbar} : ch(u) = q\}.$$

Proposição 1.12 Λ_{\hbar}^q é aberto em H_{\hbar} .

Demonstração. Dado $u \in \Lambda_{\hbar}^q$, pelo **Corolário 1.11**, existe $\rho > 0$ tal que

$$v \in \Lambda_{\hbar}, \|u - v\|_{L^\infty} \leq \rho \implies ch(u) = ch(v).$$

Seja $C_0 > 0$ a constante da imersão contínua de H_{\hbar} em L^∞ (ver **Lema 1.1**). Sendo $r = \frac{\rho}{C_0} > 0$, considere a bola em H_{\hbar}

$$B_r(u) = \left\{v \in H_{\hbar} : \|u - v\|_{H_{\hbar}} < r\right\}.$$

Vamos mostrar que $B_r(u) \subset \Lambda_{\hbar}^q$. Se $v \in B_r(u)$, então

$$\|u - v\|_{L^\infty} \leq C_0 \|u - v\|_{H_{\hbar}} < C_0 r = \rho$$

logo $ch(v) = ch(u) = q$ e daí $v \in \Lambda_{\hbar}^q$.

Como u foi escolhido arbitrariamente em Λ_{\hbar}^q , concluímos que Λ_{\hbar}^q é aberto em H_{\hbar} .

■

Observamos que

$$\Lambda_{\hbar} = \bigcup_{q \in \mathbb{Z}} \Lambda_{\hbar}^q$$

e se $p \neq q$, então $\Lambda_{\hbar}^p \cap \Lambda_{\hbar}^q = \emptyset$.

Definimos o seguinte conjunto aberto

$$\Lambda_{\hbar}^* = \bigcup_{q \in \mathbb{Z}^*} \Lambda_{\hbar}^q.$$

Proposição 1.13 *Se $u \in \Lambda_h^*$, então $\|u\|_{L^\infty} > 1$.*

Demonstração. Dado $u \in \Lambda_h^*$, existe $q \in \mathbb{Z}^*$ tal que $u \in \Lambda_h^q$. Daí, $ch(u) = q \neq 0$. Pela propriedade de **Existência de Solução** do grau de Brouwer, existe $x_0 \in K(u)$ tal que $P(u(x_0)) = 2\bar{\zeta}$. Logo, de (1.6),

$$1 < |u(x_0)| \leq \|u\|_{L^\infty}.$$

■

Nosso objetivo é minimizar o funcional energia E_h no setor Λ_h^* ou em Λ_h^q para $q \neq 0$, a fim de obter existência de solução no conjunto de campos com carga não trivial. No que segue, usaremos as seguintes notações:

$$E_h^* = \inf_{u \in \Lambda_h^*} E_h(u),$$

para cada $q \in \mathbb{Z}$,

$$E_h^q = \inf_{u \in \Lambda_h^q} E_h(u).$$

1.4 Sobre o Funcional Energia

Nesta seção iremos estudar as principais propriedades do funcional energia E_h . Para descargo de consciência vamos escrever a expressão do funcional E_h .

$$E_h(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} (|\nabla u|^2 + V_h(x) |u|^2) + \frac{1}{p} |\nabla u|^p + W(u) \right) dx$$

Primeiramente queremos mostrar que E_h está bem definido em Λ_h , isto é, para cada $u \in \Lambda_h$ temos

$$E_h(u) < +\infty. \quad (1.9)$$

Segue das hipóteses (W_1) , (W_2) e (W_3) que existem $\rho, M > 0$ tais que, para todo $\xi \in \Omega$,

$$|\xi| \leq \rho \implies |W(\xi)| \leq M |\xi|^2.$$

De fato, pela Fórmula de Taylor,

$$W(\xi) = W(0) + W'(0)\xi + W''(0)[\xi^2] + r(\xi) \quad \text{onde} \quad \lim_{|\xi| \rightarrow 0} \frac{r(\xi)}{|\xi|^2} = 0.$$

Assim, existe $\rho > 0$ tal que

$$|\xi| \leq \rho \implies \left| \frac{r(\xi)}{|\xi|^2} \right| \leq 1,$$

e como $0 \in \Omega$ é ponto de mínimo de W , temos que $W'(0) = 0$. Logo

$$\begin{aligned} |\xi| \leq \rho \implies |W(\xi)| &\leq |\xi|^2 \left(\left| \frac{W''(0)[\xi^2]}{|\xi|^2} \right| + \left| \frac{r(\xi)}{|\xi|^2} \right| \right) \\ &\leq |\xi|^2 \left(\frac{|W''(0)| |\xi|^2}{|\xi|^2} + 1 \right) \\ &= |\xi|^2 (|W''(0)| + 1) \\ &= M |\xi|^2. \end{aligned}$$

Fixando $[|u| \leq \rho] = \{x \in \mathbb{R}^N : |u(x)| \leq \rho\}$ e $[|u| > \rho] = \{x \in \mathbb{R}^N : |u(x)| > \rho\}$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} W(u) dx &= \int_{[|u| \leq \rho]} W(u) dx + \int_{[|u| > \rho]} W(u) dx \\ &\leq M \int_{[|u| \leq \rho]} |u|^2 dx + \int_{[|u| > \rho]} W(u) dx \\ &\leq M \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx + \max_{[|u| > \rho]} W \cdot \overline{[|u| > \rho]} \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

tendo em vista que $u \in L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$ e $\overline{[|u| > \rho]}$ é compacto graças a (1.4). Portanto, fica estabelecido (1.9), ou seja, E_{\hbar} está bem definido sobre Λ_{\hbar} .

Desde que $V_{\hbar}(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$ e $W(\xi) \geq 0, \forall \xi \in \Omega$, temos que

$$E_{\hbar}(u) \geq 0 \quad \forall u \in \Lambda_{\hbar}.$$

O próximo resultado apresenta uma importante informação a respeito do funcional energia, a saber, que o mesmo é coercivo em H_{\hbar} .

Proposição 1.14 *O funcional energia E_{\hbar} é coercivo com relação a norma de H_{\hbar} , isto é,*

$$\lim_{\|u\|_{H_{\hbar}} \rightarrow +\infty} E_{\hbar}(u) = +\infty.$$

Demonstração. Seja $(u_n) \subset H_{\hbar}$ tal que $\|u_n\|_{H_{\hbar}} \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$. É suficiente provar que $E_{\hbar}(u_n) \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$.

Desde que

$$\|u_n\|_{H_{\hbar}} \rightarrow +\infty \quad \text{quando} \quad n \rightarrow +\infty$$

temos uma das seguintes possibilidades ocorrendo:

(I)

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 + V_{\hbar}(x) |u_n|^2 dx \longrightarrow +\infty, \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx \leq M \quad \forall n$$

(II)

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 + V_{\hbar}(x) |u_n|^2 dx \longrightarrow +\infty, \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx \longrightarrow +\infty$$

(III)

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 + V_{\hbar}(x) |u_n|^2 dx \leq M, \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx \longrightarrow +\infty.$$

Se ocorrer (I), então, pela definição de E_{\hbar} , podemos concluir que $E_{\hbar}(u_n) \longrightarrow +\infty$. Analogamente analisando (II) e (III) obtemos o mesmo resultado. ■

Lema 1.15 *O funcional energia E_{\hbar} pertence a classe $C^1(\Lambda_{\hbar}, \mathbb{R})$.*

Demonstração. Através de estimativas bem conhecidas, sabemos que a primeira parte de E_{\hbar} , isto é,

$$u \in \Lambda_{\hbar} \longmapsto \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} (|\nabla u|^2 + V_{\hbar}(x) |u|^2) + \frac{1}{p} |\nabla u|^p \right) dx$$

é de classe $C^1(\Lambda_{\hbar}, \mathbb{R})$. Então, vamos focar nossa atenção para o funcional

$$\Psi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} W(u) dx, \quad \forall u \in \Lambda_{\hbar}. \quad (1.10)$$

Primeiramente provaremos que Ψ é Gâteaux diferenciável. Para este fim, para cada $u \in \Lambda_{\hbar}$ e $v \in H_{\hbar}$, devemos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{W(u + tv) - W(u)}{t} - W'(u)v \right| dx \longrightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow 0 \quad (1.11)$$

Começamos a nossa demonstração, recordando que pelo Teorema do Valor Médio, para cada $x \in \mathbb{R}^N$, vale a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \left| \frac{W(u + tv) - W(u)}{t} - W'(u)v \right| &\leq |W'(u(x) + \theta tv(x))v(x) - W'(u(x))v(x)| \\ &\leq |W'(u(x) + \theta tv(x)) - W'(u(x))| |v(x)| \end{aligned}$$

onde $\theta = \theta(t, x) \in (0, 1)$. Portanto, para cada $x \in \mathbb{R}^N$,

$$t\theta v(x) \longrightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow 0.$$

Consequentemente, desde que $W \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$

$$W'(u(x) + \theta tv(x)) - W'(u(x)) \longrightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow 0, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Agora, usando a diferenciabilidade de W' em 0, temos

$$W'(\xi) = W'(0) + W''(0)[\xi] + \omega(\xi) = W''(0)[\xi] + \omega(\xi) \quad (1.12)$$

onde $\lim_{|\xi| \rightarrow 0} \frac{\omega(\xi)}{|\xi|} = 0$. Fixe $\varepsilon > 0$ arbitrariamente e escolha $\rho > 0$ tal que, para cada $\xi \in \Omega$

$$|\xi| \leq \rho \implies |\omega(\xi)| \leq \varepsilon |\xi|. \quad (1.13)$$

Fazendo $\xi = u(x) + \theta tv(x)$ e depois $\xi = u(x)$ em (1.12) e subtraindo as igualdades, ficamos com

$$\begin{aligned} W'(u(x) + \theta tv(x)) - W'(u(x)) &= W''(0)[u(x) + \theta tv(x)] + \omega(u(x) + \theta tv(x)) - \\ &\quad - W''(0)[u(x)] - \omega(u(x)) \\ &= \theta t W''(0)[v(x)] + \omega(u(x) + \theta tv(x)) - \omega(u(x)) \end{aligned}$$

Sejam $K_1 = \{x \in \mathbb{R}^N : |u(x)| \geq \frac{\rho}{2}\}$ e $K_2 = \{x \in \mathbb{R}^N : |v(x)| \geq \frac{\rho}{2}\}$. Como u e v são contínuas e tendem a zero no infinito, K_1 e K_2 são compactos. Além disso,

$$K = \bigcup_{\substack{0 \leq t \leq 1 \\ 0 < \theta < 1}} \left\{ x \in \mathbb{R}^N : |u(x) + \theta tv(x)| > \rho \right\} \subset K_1 \cup K_2. \quad (1.14)$$

Vamos mostrar que

$$K_1^c \cap K_2^c \subset K^c = \bigcap_{\substack{0 \leq t \leq 1 \\ 0 < \theta < 1}} \left\{ x \in \mathbb{R}^N : |u(x) + \theta tv(x)| \leq \rho \right\}.$$

Com efeito, dados $x_0 \in K_1^c \cap K_2^c$, $t \in [0, 1]$ e $\theta \in (0, 1)$, temos

$$|u(x_0)| < \frac{\rho}{2} \quad \text{e} \quad |v(x_0)| < \frac{\rho}{2}$$

implicando em

$$\begin{aligned} |u(x_0) + \theta tv(x_0)| &\leq |u(x_0)| + \theta t |v(x_0)| \\ &< \frac{\rho}{2} + \theta t \frac{\rho}{2} \quad (0 \leq \theta t < 1) \\ &< \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} \\ &= \rho. \end{aligned}$$

Logo, $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^N : |u(x) + \theta tv(x)| \leq \rho\}$ para todo $t \in [0, 1]$ e todo $\theta \in (0, 1)$ donde $x_0 \in K^{\mathbb{G}}$. Portanto, fica provado (1.14).

Ademais, desde que o conjunto $\{u(x) + \theta tv(x) : x \in \mathbb{R}^N, \theta \in (0, 1), t \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^{N+1}$ tem fecho compacto (pois é limitado) e ω é contínua, existe $M > 0$ tal que

$$|\omega(u(x) + \theta tv(x)) - \omega(u(x))| \leq 2M\chi_K(x) + 2\varepsilon|u(x)| + \varepsilon|v(x)|$$

para todos $x \in \mathbb{R}^N$, $\theta \in (0, 1)$ e $t \in [0, 1]$, onde χ_K denota a função Característica associada ao conjunto K .

No que segue, denotamos por M o seguinte número real

$$M = \max_{z \in \overline{B}_R(0)} |\omega(z)| + \|u\|_{\infty}$$

onde $R = \|u\|_{\infty} + \|v\|_{\infty}$. Sejam, $\theta \in (0, 1)$ e $t \in [0, 1]$ arbitrários. Caso $x \in K$,

$$\begin{aligned} |\omega(u(x) + \theta tv(x)) - \omega(u(x))| &\leq |\omega(u(x) + \theta tv(x))| + |\omega(u(x))| \\ &\leq M + M \\ &\leq 2M + 2\varepsilon|u(x)| + \varepsilon|v(x)| \\ &= 2M\chi_K(x) + 2\varepsilon|u(x)| + \varepsilon|v(x)| \end{aligned}$$

Por outro lado, se $x \in K^{\mathbb{G}}$, então $|u(x) + \theta tv(x)| \leq \rho$ e $|u(x)| \leq \rho$. Logo por (1.13),

$$\begin{aligned} |\omega(u(x) + \theta tv(x)) - \omega(u(x))| &\leq |\omega(u(x) + \theta tv(x))| + |\omega(u(x))| \\ &\leq \varepsilon|u(x) + \theta tv(x)| + \varepsilon|u(x)| \\ &\leq 2\varepsilon|u(x)| + \theta t\varepsilon|v(x)| \\ &\leq 2M\chi_K(x) + 2\varepsilon|u(x)| + \varepsilon|v(x)| \end{aligned}$$

Portanto, para cada $x \in \mathbb{R}^N$, $\theta \in (0, 1)$ e $t \in [0, 1]$ temos

$$\begin{aligned} |W'(u(x) + \theta tv(x)) - W'(u(x))| |v(x)| &\leq |W''(0)| |v(x)|^2 + 2M\chi_K(x) |v(x)| + \\ &\quad + \varepsilon \left(2|u(x)| |v(x)| + |v(x)|^2 \right). \end{aligned}$$

Usando que $u, v \in L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$, K é compacto e a Desigualdade de Hölder, concluímos que as funções do lado direito da última desigualdade estão em $L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e não dependem de t . Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, fica provado (1.11).

Resta provar que a Derivada de Gâteaux $\Psi' : \Lambda_{\hbar} \longrightarrow (H_{\hbar})'$ dada por

$$\Psi'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} W'(u)v dx \quad \forall u \in \Lambda_{\hbar}, \forall v \in H_{\hbar},$$

é contínua.

Sejam $(u_n) \subset \Lambda_{\hbar}$ e $u_0 \in \Lambda_{\hbar}$ tais que

$$u_n \longrightarrow u_0 \quad \text{em } H_{\hbar} \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Nosso objetivo é provar que

$$\Psi'(u_n) \longrightarrow \Psi'(u_0) \quad \text{em } (H_{\hbar})' \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Desde que $H_{\hbar} \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$ e $H_{\hbar} \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$, em particular, valem as convergências

$$u_n \longrightarrow u_0 \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1}) \quad \text{e } L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1}) \quad (1.15)$$

Usando novamente (1.12), obtemos

$$W'(u_n(x)) - W'(u_0(x)) = W''(0)[u_n(x) - u_0(x)] + \omega(u_n(x)) - \omega(u_0(x))$$

de onde segue

$$\begin{aligned} \|\Psi'(u_n) - \Psi'(u_0)\|_{(H_{\hbar})'} &= \sup_{v \in H_{\hbar}, \|v\|_{H_{\hbar}} \leq 1} |\langle \Psi'(u_n) - \Psi'(u_0), v \rangle| \\ &\leq \sup_{v \in H_{\hbar}, \|v\|_{H_{\hbar}} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^N} |W'(u_n) - W'(u_0)| |v| dx \\ &\leq \sup_{v \in H_{\hbar}, \|v\|_{H_{\hbar}} \leq 1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |W''(0)| |u_n - u_0| |v| dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\omega(u_n) - \omega(u_0)| |v| dx \right) \\ &\leq \sup_{v \in H_{\hbar}, \|v\|_{H_{\hbar}} \leq 1} \left(|W''(0)| \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u_0|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\omega(u_n) - \omega(u_0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \sup_{v \in H_{\hbar}, \|v\|_{H_{\hbar}} \leq 1} \left(\frac{|W''(0)|}{\sqrt{V_0}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u_0|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} V_0 |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{V_0}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\omega(u_n) - \omega(u_0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} V_0 |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq \sup_{v \in H_{\hbar}, \|v\|_{H_{\hbar}} \leq 1} \left(\frac{|W''(0)|}{\sqrt{V_0}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u_0|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{H_{\hbar}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{V_0}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\omega(u_n) - \omega(u_0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{H_{\hbar}} \right) \\ &\leq \frac{|W''(0)|}{\sqrt{V_0}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u_0|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{V_0}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\omega(u_n) - \omega(u_0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

De (1.15) deduzimos imediatamente que $\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u_0|^2 dx \longrightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$.

Então, resta-nos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\omega(u_n) - \omega(u_0)|^2 dx \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Fixe $\varepsilon > 0$ e considere $\rho > 0$ tal que (1.13) seja satisfeito.

Por (1.4), podemos fixar $R > 0$ tal que $|x| \geq R$ implica $|u_0(x)| < \frac{\rho}{2} < \rho$. Por outro lado, usando (1.15), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de sorte que

$$n > n_0 \implies \|u_n - u_0\|_{L^\infty} < \frac{\rho}{2}$$

Logo, para $|x| \geq R$ e $n > n_0$, temos

$$|u_n(x)| \leq |u_n(x) - u_0(x)| + |u_0(x)| \leq \|u_n - u_0\|_{L^\infty} + |u_0(x)| < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho$$

Portanto,

$$|u_n(x)| < \rho \quad \text{e} \quad |u_0(x)| < \rho \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0), n > n_0.$$

Logo, para $n > n_0$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\omega(u_n) - \omega(u_0)|^2 &= \int_{B_R(0)} |\omega(u_n) - \omega(u_0)|^2 + \int_{B_R(0)^c} |\omega(u_n) - \omega(u_0)|^2 \\ &\leq \int_{B_R(0)} |\omega(u_n) - \omega(u_0)|^2 + 2^2 \int_{B_R(0)^c} (|\omega(u_n)|^2 + |\omega(u_0)|^2) \\ &\leq \int_{B_R(0)} |\omega(u_n) - \omega(u_0)|^2 + 4\varepsilon^2 \int_{B_R(0)^c} (|u_n|^2 + |u_0|^2) \end{aligned}$$

Desde que o conjunto $\{u_n(x) : x \in \mathbb{R}^N\} \cup \{u_0(x) : x \in \mathbb{R}^N\} \subset \mathbb{R}^{N+1}$ é limitado, ω é contínua e $u_n \rightarrow u_0$ uniformemente, obtemos que

$$\omega(u_n) \longrightarrow \omega(u_0) \quad \text{uniformemente, quando } n \rightarrow +\infty.$$

donde concluímos que

$$\int_{B_R(0)} |\omega(u_n) - \omega(u_0)|^2 \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Ademais, de (1.5) concluímos que existe $M_1 > 0$ tal que $\|u_n\|_{L^2}^2 \leq M_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Assim,

$$\begin{aligned} 4\varepsilon^2 \int_{B_R(0)^c} (|u_n|^2 + |u_0|^2) &\leq 4\varepsilon^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^2 \right) \\ &\leq 4\varepsilon^2 \left(M_1 + \|u_0\|_{L^2}^2 \right) \end{aligned}$$

Como ε é arbitrário, o resultado segue. ■

Um corolário imediato é que pontos críticos $u \in \Lambda_{\hbar}$ para o funcional E_{\hbar} são soluções fracas de (P_2) .

Proposição 1.16 *Os pontos de mínimo $u \in \Lambda_{\hbar}$ para o funcional E_{\hbar} são soluções fracas do sistema (P_2) .*

Demonstração. Sejam $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e $e_j \in \mathbb{R}^{N+1}$ o j -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{R}^{N+1} . Se $t > 0$ é suficientemente pequeno, então $u + t\varphi e_j \in \Lambda_{\hbar}$ e daí $E_{\hbar}(u + t\varphi e_j) < +\infty$. Desde que u é ponto de mínimo de E_{\hbar} , devemos ter

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} E_{\hbar}(u + t\varphi e_j)|_{t=0} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u^j \nabla \varphi + V_{\hbar}(x) u^j \varphi + |\nabla u|^{p-2} \nabla u^j \nabla \varphi + \frac{\partial V}{\partial \xi_j}(u) \varphi \right) dx. \end{aligned}$$

■

Os próximos três resultados lidam com outras propriedades referentes ao funcional E_{\hbar} . O primeiro deles apresenta o comportamento de E_{\hbar} quando u se aproxima da fronteira de Λ_{\hbar} .

Proposição 1.17 *Seja $(u_n) \subset \Lambda_{\hbar}$ limitada e fracamente convergente para $u \in H_{\hbar} \setminus \Lambda_{\hbar}$. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} W(u_n) dx \longrightarrow +\infty \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Demonstração. Desde que $u \in H_{\hbar} \setminus \Lambda_{\hbar}$, existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ tal que $u(\bar{x}) = \bar{\xi}$. Como W é não-negativa é suficiente provar que existe uma bola centrada em \bar{x} tal que

$$\int_{B_\delta(\bar{x})} W(u_n) dx \longrightarrow +\infty \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty. \quad (1.16)$$

Da convergência uniforme em conjuntos compactos, ver **Lema 1.1**, segue que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(\bar{x}) = \bar{\xi}. \quad (1.17)$$

Agora, mostraremos que existe $\delta > 0$ tal que, para cada $x \in B_\delta(\bar{x})$ e para n suficientemente grande,

$$|u_n(x) - \bar{\xi}| < \varrho \quad (1.18)$$

onde ϱ satisfaz a hipótese (W_4) .

Com efeito, desde que (u_n) é limitada em H_{\hbar} , (∇u_n) é limitado em $L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$. Assim, (u_n) é equi-uniformemente contínua, donde

$$|u_n(x) - u(\bar{x})| \leq C_1 |x - \bar{x}|^{\frac{p-N}{p}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \quad (1.19)$$

Fixe $\delta > 0$ tal que

$$x \in B_\delta(\bar{x}) \implies |x - \bar{x}|^{\frac{p-N}{p}} < \frac{\varrho}{2C_1} \quad (1.20)$$

Usando (1.17), para n grande temos

$$|u_n(\bar{x}) - \bar{\xi}| < \frac{\varrho}{2}. \quad (1.21)$$

Logo, para n grande e $x \in B_\delta(\bar{x})$, de (1.19), (1.20) e (1.21) obtemos

$$\begin{aligned} |u_n(x) - \bar{\xi}| &\leq |u_n(x) - u_n(\bar{x})| + |u_n(\bar{x}) - \bar{\xi}| \\ &\leq C_1 |x - \bar{x}|^{\frac{p-N}{p}} + |u_n(\bar{x}) - \bar{\xi}| \\ &< C_1 \frac{\varrho}{2C_1} + \frac{\varrho}{2} \\ &= \varrho, \end{aligned}$$

mostrando (1.18). Em verdade, o argumento acima mostra que

$$|u_n(x) - \bar{\xi}| \leq C_1 |x - \bar{x}|^{\frac{p-N}{p}} + o_n(1). \quad (1.22)$$

Agora, usando (1.18) e (W_4) , para cada $x \in B_\delta(\bar{x})$ vale a desigualdade

$$W(u_n(x)) \geq \frac{\kappa}{|u_n(x) - \bar{\xi}|^q}$$

onde

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{N} - \frac{1}{p} \iff N = \frac{q(p-N)}{p}.$$

Usando (1.22), obtemos

$$W(u_n(x)) \geq \frac{\kappa}{C_2 |x - \bar{x}|^N + o_n(1)}.$$

Logo, integrando em $B_\delta(\bar{x})$, encontramos

$$\begin{aligned} \int_{B_\delta(\bar{x})} W(u_n(x)) dx &\geq \int_{B_\delta(\bar{x})} \frac{\kappa}{C_2 |x - \bar{x}|^N + o_n(1)} dx \\ &\geq \int_{B_\delta(\bar{x})} \frac{\kappa}{C_2 |x - \bar{x}|^N + o_n(1)} dx \\ &\geq C \int_{B_\delta(\bar{x})} \frac{1}{|x - \bar{x}|^N + o_n(1)} dx \\ &= C \int_{B_\delta(0)} \frac{1}{|x|^N + o_n(1)} dx \\ &= C \int_0^\delta \left(\int_{S_r(0)} \frac{1}{r^N + o_n(1)} d\omega \right) dr. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \int_{B_\delta(\bar{x})} W(u_n(x)) dx &\geq C \int_0^\delta \frac{r^{N-1}}{r^N + o_n(1)} dr \\
 &= \frac{C}{N} \int_{o_n(1)}^{\delta^N + o_n(1)} \frac{1}{y} dy \\
 &= \frac{C}{N} \ln y \Big|_{o_n(1)}^{\delta^N + o_n(1)} \\
 &= \frac{C}{N} \ln \left(\frac{\delta^N + o_n(1)}{o_n(1)} \right) \longrightarrow +\infty \text{ quando } n \rightarrow +\infty.
 \end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração. ■

A próxima proposição estabelece uma importante propriedade envolvendo sequências contidas em Λ_{\hbar} .

Proposição 1.18 *Seja $(u_n) \subset \Lambda_{\hbar}$ com $u_n \rightharpoonup u$ em H_{\hbar} com $(E_{\hbar}(u_n))$ sendo limitado. Então $u \in \Lambda_{\hbar}$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $u \notin \Lambda_{\hbar}$. Pela proposição anterior devemos ter

$$\int_{\mathbb{R}^N} W(u_n) dx \longrightarrow +\infty \text{ quando } n \rightarrow +\infty,$$

donde

$$E_{\hbar}(u_n) \longrightarrow +\infty \text{ quando } n \rightarrow +\infty,$$

o que é contradição. ■

Agora vamos provar que o funcional energia E_{\hbar} é fracamente semi-contínuo inferiormente.

Proposição 1.19 *Se $(u_n) \subset \Lambda_{\hbar}$ é tal que $u_n \rightharpoonup u$ em H_{\hbar} , então*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} E_{\hbar}(u_n) \geq E_{\hbar}(u).$$

Demonstração. O resultado é trivial quando

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} E_{\hbar}(u_n) = +\infty.$$

Então, vamos estudar o caso em que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} E_{\hbar}(u_n) < +\infty.$$

Para simplificar a notação, seja

$$I_{\hbar}(w) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} (|\nabla w|^2 + V_{\hbar}(x) |w|^2) + \frac{1}{p} |\nabla w|^p \right) dx.$$

Como toda função contínua convexa é fracamente semi-contínua, temos

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} I_{\hbar}(u_n) \geq I_{\hbar}(u). \quad (1.23)$$

Agora, devemos analisar o que ocorre com o termo

$$\int_{\mathbb{R}^N} W(u_n) dx.$$

Desde que (u_n) converge uniformemente para u sobre compactos de \mathbb{R}^N , fixado $B_R(0)$ temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_R(0)} W(u_n) dx = \int_{B_R(0)} W(u) dx.$$

Por outro lado, desde que W é não negativa

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} W(u_n) dx \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_R(0)} W(u_n) = \int_{B_R(0)} W(u) dx \quad \forall R > 0.$$

Fazendo $R \rightarrow +\infty$, ficamos com

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} W(u_n) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} W(u) dx. \quad (1.24)$$

Como $E_{\hbar}(w) = I_{\hbar}(w) + \int_{\mathbb{R}^N} W(w) dx$, (1.23) e (1.24) implicam em

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_{\hbar}(u_n) &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} I_{\hbar}(u_n) + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} W(u_n) dx \\ &\geq I_{\hbar}(u) + \int_{\mathbb{R}^N} W(u) dx \\ &= E_{\hbar}(u). \end{aligned}$$

■

Capítulo 2

Resultado de Existência e Multiplicidade: Potencial Coercivo

Neste capítulo, supondo que o potencial V é coercivo, será estabelecido um resultado de existência e multiplicidade de soluções para (P_2) . Tais soluções serão obtidas como mínimo local do funcional energia E_h em cada setor Λ_h^q com $q \neq 0$.

2.1 Potencial coercivo

Neste capítulo, além das hipóteses (V_1) , $(W_1) - (W_4)$, assumiremos também

(V_2) O potencial V é coercivo, ou seja, $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$.

Uma função V que satisfaz as hipóteses (V_1) e (V_2) é a seguinte: $V(x) = |x|^2 + 1$.

Iniciamos esta seção com um lema técnico que será usado ao longo dos próximos capítulos.

Lema 2.1 *Seja $u \in H_h$. Então a função $x \in \mathbb{R}^N \mapsto |u(x)|$ atinge máximo.*

Demonstração. Desde que $u \in H_h$, temos que $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0$. Supondo $u \neq 0$, fixe $R > 0$ grande de forma que $|u(x)| \leq |u(x_1)|$ para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R}(0)$, onde $x_1 \in B_R(0)$ é escolhido de modo que $u(x_1) \neq 0$. Uma vez que $\overline{B_R}(0)$ é compacto e $u \in H_h$ é contínua, existe $x_0 \in \overline{B_R}(0)$ tal que $|u(x)| \leq |u(x_0)|$ para todo $x \in \overline{B_R}(0)$. Como também $|u(x)| \leq |u(x_1)| \leq |u(x_0)|$ para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R}(0)$ isto demonstra que x_0 é ponto de máximo de $|u|$ em \mathbb{R}^N .

■

Lema 2.2 *Assuma as hipóteses (V_1) , (V_2) , $(W_1) - (W_4)$ e seja $(u_n) \subset \Lambda_{\hbar}^*$ tal que*

$$E_{\hbar}(u_n) \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

para algum $a > 0$. Então, existe $u \in \Lambda_{\hbar}$, com $\|u\|_{L^\infty} \geq 1$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } H_{\hbar}.$$

Demonstração. Seja $x_n \in \mathbb{R}^N$ um ponto de máximo de $|u_n|$ em \mathbb{R}^N . Note que $|u_n(x_n)| > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, caso contrário, para algum $n \in \mathbb{N}$ teríamos

$$|u_n(x)| \leq |u_n(x_n)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Donde

$$\|u_n\|_{L^\infty} \leq 1$$

o que é uma contradição com a **Proposição 1.13**.

Agora vamos provar que a sequência de máximos (x_n) é limitada em \mathbb{R}^N . Suponha, por contradição, que para alguma subsequência

$$|x_n| \longrightarrow +\infty \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty. \quad (2.1)$$

Fixado $\varepsilon \in (0, 1)$, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ o número real

$$R_n = \sup \{R > 0 : |u_n(x)| > 1 - \varepsilon \quad \forall x \in B_R(x_n)\}.$$

Desde que as u_n 's tendem para zero no infinito, temos que $R_n < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, usando a coercividade de V vamos mostrar que

$$R_n \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty. \quad (2.2)$$

Com efeito, se (2.2) não fosse verdade, então para alguma constante $M > 0$ e para uma quantidade infinita de índices n , deveria ocorrer $R_n > M$, implicando que para tais índices a desigualdade

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} V_{\hbar}(x) |u_n|^2 dx &\geq \int_{B_{R_n}(x_n)} V_{\hbar}(x) |u_n|^2 dx \\ &\geq (1 - \varepsilon)^2 \int_{B_M(x_n)} V_{\hbar}(x) dx \end{aligned}$$

Vamos mostrar que

$$\int_{B_M(x_n)} V_{\hbar}(x) dx \longrightarrow +\infty \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Fixe $A > 0$ arbitrariamente. Como V_{\hbar} é coercivo, pois V o é, existe $R > 0$ tal que

$$V_{\hbar}(x) \geq \frac{A}{|B_M(0)|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0).$$

Por (2.1), $x_n \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$, logo, para todo n suficientemente grande devemos ter

$$B_M(x_n) \subset \mathbb{R}^N \setminus B_R(0).$$

Assim, para todo n suficientemente grande,

$$\int_{B_M(x_n)} V_{\hbar}(x) dx \geq \int_{B_M(x_n)} \frac{A}{|B_M(0)|} dx = \frac{A}{|B_M(0)|} |B_M(x_n)| = A.$$

Como $A > 0$ foi fixado arbitrariamente, fica provado que

$$\int_{B_M(x_n)} V_{\hbar}(x) dx \longrightarrow +\infty \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Porém, isso contradiz a hipótese $E_{\hbar}(u_n) \leq a$. Portanto (2.2) é verdadeiro.

Da hipótese de limitação do funcional energia atuado nas u_n 's podemos concluir que (∇u_n) é limitado em $L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$, logo (u_n) é equi-uniformemente contínua e daí existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x, y \in \mathbb{R}^N; |x - y| < \delta \implies |u_n(x) - u_n(y)| < \varepsilon. \quad (2.3)$$

Afirmamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo, existe $\bar{x}_n \in \mathbb{R}^N$ com $|x_n - \bar{x}_n| = R_n$ tal que

$$|u_n(\bar{x}_n)| \leq 1 - \varepsilon.$$

Supondo, por absurdo, a afirmação falsa, devemos ter

$$|u_n(x)| > 1 - \varepsilon \quad \forall x \in \partial B_{R_n}(x_n).$$

Então, por resultados de análise real, existe uma vizinhança U de $\partial B_{R_n}(x_n)$ tal que

$$|u_n(x)| > 1 - \varepsilon \quad \forall x \in U.$$

Portanto, existe $\eta > 0$ tal que

$$|u_n(x)| > 1 - \varepsilon \quad \forall x \in B_{R_n+\eta}(x_n)$$

contradizendo a definição de R_n .

Agora, fixe $n \in \mathbb{N}$ de sorte que $R_n < \delta$. Veja que

$$|u_n(x_n) - u_n(\bar{x}_n)| \geq |u_n(x_n)| - |u_n(\bar{x}_n)| > 1 - (1 - \varepsilon) = \varepsilon$$

o que entra em contradição com (2.3). Assim, (x_n) deve ser de fato limitada.

Além disso, note que (u_n) é limitada em $H_{\bar{h}}$. De fato, se para alguma subsequência tivéssemos $\|u_n\|_{H_{\bar{h}}} \rightarrow +\infty$, então a coercividade do funcional energia $E_{\bar{h}}$ acarretaria-nos que $E_{\bar{h}}(u_n) \rightarrow +\infty$, uma contradição.

Portanto, desde que $H_{\bar{h}}$ é reflexivo, a menos de subsequência, podemos assumir que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_{\bar{h}}, \quad x_n \rightarrow x \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

e que

$$u_n(x) \rightarrow u(x). \tag{2.4}$$

Note que

$$|u_n(x_n) - u(x)| \leq |u_n(x_n) - u_n(x)| + |u_n(x) - u(x)|.$$

Devido a equi-uniformidade contínua de (u_n) e a (2.4) concluímos que o lado direito da desigualdade acima tende a zero quando $n \rightarrow +\infty$. Portanto,

$$u_n(x_n) \rightarrow u(x) \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty,$$

e como $|u_n(x)| > 1$, obtemos que $\|u\|_{L^\infty} \geq 1$.

Finalmente, desde que $(u_n) \subset \Lambda_{\bar{h}}$ e $(E_{\bar{h}}(u_n))$ é limitado, segue da **Proposição 1.18** que $u \in \Lambda_{\bar{h}}$. ■

Agora podemos provar o principal resultado deste Capítulo.

Teorema 2.3 *Assuma as hipóteses (V_1) , (V_2) , $(W_1) - (W_4)$. Então, para cada $q \in \mathbb{Z}^*$, o funcional energia $E_{\bar{h}}$ atinge o ínfimo no setor $\Lambda_{\bar{h}}^q$, isto é, existe $u \in \Lambda_{\bar{h}}^q$ tal que $E_{\bar{h}}(u) = E_{\bar{h}}^q$.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência minimizante para E_h em Λ_h^q . Claro que $(E_h(u_n))$ é limitada. Pelo lema anterior, existe $u \in \Lambda_h$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } H_h \quad \text{e} \quad \|u\|_{L^\infty} \geq 1.$$

Por outro lado, usando a semi-continuidade inferior fraca de E_h

$$E_h(u) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_h(u_n) = E_h^q$$

ou seja, $E_h(u) \leq E_h^q$. Portanto, resta provar que $u \in \Lambda_h^q$.

Fixe $\gamma \in (0, 1)$ e considere $R > 0$ tal que

$$|u(x)| < \gamma \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \text{com} \quad |x| \geq R. \quad (2.5)$$

Neste momento, nosso objetivo é mostrar que para n suficientemente grande,

$$|u_n(x)| < \gamma \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \text{com} \quad |x| \geq R. \quad (2.6)$$

Supondo por contradição que (2.6) não ocorre, deve existir uma subsequência de (u_n) tal que a seguinte propriedade ocorre:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in \mathbb{R}^N \quad \text{com} \quad |x_n| \geq R \quad \text{mas} \quad |u_n(x_n)| \geq \gamma.$$

Procedendo da mesma maneira que na demonstração do **Lema 2.2**, obtemos que (x_n) é limitada em \mathbb{R}^N e isto implica que existe $x \in \mathbb{R}^N$ com $|x| \geq R$ tal que $|u(x)| \geq \gamma$ em contradição com (2.5). Assim, fica estabelecido (2.6).

Pelo **Lema 1.1**,

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{uniformemente em } \overline{B}_R(0).$$

Usando (2.5) e (2.6), obtemos

$$|u_n(x) - u(x)| \leq |u_n(x)| + |u(x)| < 2\gamma \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0)$$

e como $\gamma \in (0, 1)$ foi fixado arbitrariamente, segue que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{uniformemente em } \mathbb{R}^N \setminus B_R(0).$$

Assim, (u_n) converge uniformemente para u em \mathbb{R}^N . Usando o **Corolário 1.11** concluímos que

$$ch(u) = ch(u_n) = q.$$

Portanto, $u \in \Lambda_h^q$ e $E_h(u) = E_h^q$.

■

Observação 2.4 É óbvio que o funcional energia E_{\hbar} tem 0 como mínimo global o qual é atingido em $u = 0$ no setor Λ_{\hbar}^0 . Por outro lado, **Teorema 2.3** nos garante que o ínfimo E_{\hbar}^q é atingido para cada $q \in \mathbb{Z}^*$ sobre o setor Λ_{\hbar}^q . Uma vez que Λ_{\hbar}^q é aberto e E_{\hbar} é de classe $C^1(\Lambda_{\hbar}^q, \mathbb{R})$ concluímos que (P_2) (conseqüentemente (P_1)) tem infinitas soluções com carga topológica não trivial. Veja a **Proposição 1.6** para mais detalhes.

Concluimos este capítulo com o seguinte Corolário.

Corolário 2.5 Com as mesmas hipóteses assumidas no **Teorema 2.3**, existe $u \in \Lambda_{\hbar}^*$ tal que $E_{\hbar}(u) = E_{\hbar}^*$.

Demonstração. Seja $(u_n) \subset \Lambda_{\hbar}^*$ uma sequência minimizante. Usando os mesmos argumentos que aparecem na demonstração do **Teorema 2.3**, a menos de subsequência, temos que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } H_{\hbar}$$

e

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{uniformemente em } \mathbb{R}^N$$

para alguma $u \in \Lambda_{\hbar}$. O **Corolário 1.11** implica que a sequência de cargas $(ch(u_n))$ é constante para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, logo

$$ch(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} ch(u_n) \neq 0,$$

conseqüentemente

$$E_{\hbar}^* \leq E_{\hbar}(u) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_{\hbar}(u_n) = E_{\hbar}^*.$$

■

Como conseqüência imediata do **Teorema 2.3** e do **Corolário 2.5**, existe $q \in \mathbb{Z}^*$ verificando $E_{\hbar}^q = E_{\hbar}^*$.

Capítulo 3

Estudo com o Potencial Constante

3.1 Potencial constante

Neste capítulo, iremos mostrar os resultados contidos em [7], os quais estão relacionados ao estudo da equação

$$-\Delta u + V_* u - \Delta_p u + W'(u) = 0 \quad (P_*)$$

onde $V_* > 0$ é uma constante positiva e W satisfaz $(W_1) - (W_4)$. O estudo feito aqui será imprescindível para o próximo capítulo, onde o potencial V será considerado não-coercivo.

No que segue, consideramos o seguinte espaço

$$H = W^{1,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1}) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$$

com a norma

$$\|u\|_H = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V_* |u|^2) dx \right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}$$

o qual é exatamente o espaço H_h fazendo $V_h(x) = V_*$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Consideremos também o conjunto

$$\Lambda = \left\{ u \in H : u(x) \neq \bar{\xi} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \right\}.$$

O funcional energia associado a (P_*) é dado por

$$E_*(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} (|\nabla u|^2 + V_* |u|^2) + \frac{1}{p} |\nabla u|^p + W(u) \right) dx.$$

Note que todas as definições e resultados acerca de H_{\hbar} e E_{\hbar} , estabelecidos no Capítulo 1, são válidos para H e E_{\star} .

Também definimos

$$\Lambda^* = \{u \in \Lambda : ch(u) \neq 0\}$$

e para cada $q \in \mathbb{Z}$,

$$\Lambda^q = \{u \in \Lambda : ch(u) = q\}.$$

O próximo lema mostra uma importante estima inferior para o funcional E_{\star} restrito ao conjunto aberto Λ^* .

Lema 3.1 *Existe $\Delta^* > 0$ tal que se $u \in H$ e $\|u\|_{L^\infty} \geq 1$, então $E_{\star}(u) \geq \Delta^*$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que para cada $n \in \mathbb{N}$ exista $u_n \in \Lambda$ com

$$\|u_n\|_{L^\infty} \geq 1 \text{ e } E_{\star}(u_n) < \frac{1}{n}.$$

Assim,

$$E_{\star}(u_n) \longrightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty,$$

implicando que

$$\|u_n\|_{W^{1,2}} \longrightarrow 0 \text{ e } \|\nabla u_n\|_{L^p} \longrightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty$$

de onde concluímos que

$$\|u_n\|_H \longrightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Por outro lado, como temos a imersão contínua $H \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$, existe $C_0 > 0$ tal que

$$\|u_n\|_H \geq C_0 \|u_n\|_{L^\infty} \geq C_0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

obtendo uma contradição. Portanto, o lema fica demonstrado. ■

3.2 Splitting

A demonstração do principal resultado deste capítulo é baseado no próximo teorema. Este teorema nos oferece uma descrição precisa do que ocorre com sequências de energia E_{\star} limitada, em particular, o que ocorre com sequências minimizantes.

Teorema 3.2 (Splitting) *Seja $(u_n) \subset \Lambda^*$ tal que, para algum $a > 0$,*

$$E_*(u_n) \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

Então, existe $\ell \in \mathbb{N}$,

$$1 \leq \ell \leq \frac{a}{\Delta^*}, \quad (3.2)$$

e existem $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_\ell \in \Lambda$, $(x_n^1), \dots, (x_n^\ell) \subset \mathbb{R}^N$, $R_1, \dots, R_\ell > 0$ tais que, a menos de subsequência,

$$u_n(\cdot + x_n^i) \rightharpoonup \bar{u}_i; \quad (3.3)$$

$$\|\bar{u}_i\|_{L^\infty} \geq 1; \quad (3.4)$$

$$|x_n^i - x_n^j| \longrightarrow +\infty \quad \text{para } i \neq j; \quad (3.5)$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} E_*(\bar{u}_i) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_*(u_n); \quad (3.6)$$

$$|u_n(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{i=1}^{\ell} B_{R_i}(x_n^i). \quad (3.7)$$

Ademais,

$$ch(u_n) = \sum_{i=1}^{\ell} ch(\bar{u}_i); \quad (3.8)$$

Demonstração. A demonstração consiste de um processo iterativo, onde provaremos a existência de $\ell \in \mathbb{N}$, $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_\ell \in \Lambda$, $(x_n^1), \dots, (x_n^\ell) \subset \mathbb{R}^N$, $R_1, \dots, R_\ell > 0$ tais que (3.2) – (3.7) são satisfeitos. Depois, usando as propriedades já provadas iremos estabelecer facilmente (3.8).

Primeiramente, fixe $\gamma \in (0, 1)$ arbitrariamente.

Seja $x_n^1 \in \mathbb{R}^N$ um ponto de máximo de $|u_n|$. Devido a **Proposição 1.13** devemos ter $|u_n(x_n^1)| > 1$. Definindo

$$u_n^1 = u_n(\cdot + x_n^1),$$

obtemos

$$\|u_n^1\|_{L^\infty} = |u_n^1(0)| > 1. \quad (3.9)$$

Como $E_*(u_n^1) = E_*(u_n)$ e E_* é coercivo, então (u_n^1) é limitada em H . Desde que H é reflexivo, a menos de subsequência, temos

$$u_n^1 \rightharpoonup \bar{u}_1 \text{ em } H. \quad (3.10)$$

Logo, de (3.9) resulta que $\|\bar{u}_1\|_{L^\infty} \geq 1$.

Desde que $(u_n^1) \subset \Lambda$ e $E_\star(u_n^1) \leq a$, por (3.10) e pela **Proposição 1.18** segue que $\bar{u}_1 \in \Lambda$. Como E_\star é fracamente semicontínuo inferiormente

$$E_\star(\bar{u}_1) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_\star(u_n^1) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_\star(u_n) \quad (3.11)$$

Agora, usando (1.4), fixe $R_1 > 0$ de modo que

$$|\bar{u}_1(x)| \leq \gamma \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{R_1}(0). \quad (3.12)$$

Por simplicidade escreveremos

$$B_n^1 = B_{R_1}(x_n^1).$$

Distinguiremos dois casos:

(A₁) Para n suficientemente grande

$$|u_n(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_n^1;$$

ou

(B₁) Eventualmente passando a uma subsequência,

$$\exists x \in \mathbb{R}^N \setminus B_n^1 \quad \text{tal que} \quad |u_n(x)| > 1.$$

Se ocorrer a situação (A₁), então a primeira parte do teorema fica provado com $\ell = 1$. Então, vamos considerar o caso (B₁).

Seja x_n^2 um ponto de máximo de $|u_n|$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_n^1$. Temos que $|u_n(x_n^2)| > 1$. Definindo

$$u_n^2 = u_n(\cdot + x_n^2),$$

temos

$$\|u_n^2\|_{L^\infty} = |u_n^2(0)| > 1.$$

e, repetindo o argumento feito para (u_n^1) , temos

$$u_n^2 \rightharpoonup \bar{u}_2 \text{ em } H \text{ e } \bar{u}_2 \in \Lambda \quad (3.13)$$

com

$$\|\bar{u}_2\|_{L^\infty} \geq 1. \quad (3.14)$$

Agora, iremos provar que

$$\left| x_n^2 - x_n^1 \right| \longrightarrow +\infty. \quad (3.15)$$

Seja $y_n = x_n^2 - x_n^1$. Argumentando por contradição, iremos supor que (y_n) é limitada em \mathbb{R}^N . Então, a menos de subsequência,

$$y_n \longrightarrow \tilde{y}.$$

Desde que $x_n^2 \in \mathbb{R}^N \setminus B_n^1$, temos $|y_n| = |x_n^2 - x_n^1| \geq R_1$, daí $|\tilde{y}| \geq R_1$. Logo, por (3.12),

$$|\bar{u}_1(\tilde{y})| \leq \gamma < 1. \quad (3.16)$$

Por outro lado,

$$1 \leq \left| u_n(x_n^2) \right| = \left| u_n(y_n + x_n^1) \right| = \left| u_n^1(y_n) \right|,$$

de onde segue por (3.16)

$$\begin{aligned} 0 &< 1 - |\bar{u}_1(\tilde{y})| \\ &\leq \left| u_n^1(y_n) \right| - |\bar{u}_1(\tilde{y})| \\ &\leq \left| u_n^1(y_n) - \bar{u}_1(\tilde{y}) \right| \\ &\leq \left| u_n^1(y_n) - \bar{u}_1(y_n) \right| + |\bar{u}_1(y_n) - \bar{u}_1(\tilde{y})| \\ &\leq \left(\sup_{|y-\tilde{y}| \leq 1} \left| u_n^1(y) - \bar{u}_1(y) \right| \right) + |\bar{u}_1(y_n) - \bar{u}_1(\tilde{y})| \end{aligned}$$

Tomando o limite em $n \rightarrow +\infty$ obtemos um absurdo, pois as duas parcelas da última desigualdade acima tendem a zero quando $n \rightarrow +\infty$. A primeira devido ao **Lema 1.1 (iii)** e a segunda pela continuidade de \bar{u}_1 .

Agora, mostraremos que

$$E_\star(\bar{u}_1) + E_\star(\bar{u}_2) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_\star(u_n) \quad (3.17)$$

A seguir, por simplicidade, denotaremos, para cada $u \in \Lambda$ e $A \subset \mathbb{R}^N$

$$E_{\star|A}(u) = \int_A \left(\frac{1}{2} \left(|\nabla u|^2 + V_\star |u|^2 \right) + \frac{1}{p} |\nabla u|^p + W(u) \right) dx.$$

Fixado $\eta > 0$, considere $\rho > 0$ tal que

$$E_{\star|B_\rho(0)^c}(\bar{u}_1) < \frac{\eta}{2} \quad \text{e} \quad E_{\star|B_\rho(0)^c}(\bar{u}_2) < \frac{\eta}{2}.$$

De (3.15) segue que, para n suficientemente grande, $B_\rho(x_n^1) \cap B_\rho(x_n^2) = \emptyset$, portanto

$$\begin{aligned}
\liminf_{n \rightarrow +\infty} E_\star(u_n) &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(E_{\star|B_\rho(x_n^1)}(u_n) + E_{\star|B_\rho(x_n^2)}(u_n) \right) \\
&\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_{\star|B_\rho(x_n^1)}(u_n) + \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_{\star|B_\rho(x_n^2)}(u_n) \\
&= \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_{\star|B_\rho(0)}(u_n^1) + \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_{\star|B_\rho(0)}(u_n^2) \\
&\geq E_{\star|B_\rho(0)}(\bar{u}_1) + E_{\star|B_\rho(0)}(\bar{u}_2) \\
&= E_\star(\bar{u}_1) - E_{\star|B_\rho(0)^c}(\bar{u}_1) + E_\star(\bar{u}_2) - E_{\star|B_\rho(0)^c}(\bar{u}_2) \\
&> E_\star(\bar{u}_1) + E_\star(\bar{u}_2) - \eta
\end{aligned}$$

Desde que η é arbitrário, obtemos (3.17).

Finalmente, assim como feito para \bar{u}_1 , fixe $R_2 > 0$ tal que

$$|\bar{u}_2(x)| \leq \gamma \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{R_2}(0)$$

e denote

$$B_n^2 = B_{R_2}(x_n^2).$$

Aqui também distinguiremos dois casos:

(A₂) Para n suficientemente grande

$$|u_n(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_n^1 \cup B_n^2;$$

ou

(B₂) A menos de subsequência,

$$\exists x \in \mathbb{R}^N \setminus B_n^1 \cup B_n^2 \quad \text{tal que} \quad |u_n(x)| > 1.$$

Ocorrendo (A₂), a primeira parte do teorema fica provada com $\ell = 2$. Caso contrário, isto é, se ocorrer (B₂), considere um ponto de máximo de $|u_n|$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_n^1 \cup B_n^2$ e repita o mesmo argumento usado no caso (B₁).

Afirmção 3.3 *Este processo iterativo termina em um número finito de passos.*

Sendo ℓ a quantidade de passos, basta mostrar que ℓ é limitado por cima.

Com efeito, segue de (3.4) e do **Lema 3.1** que

$$E_\star(\bar{u}_i) \geq \Delta^* \quad i = 1, \dots, \ell. \quad (3.18)$$

Usando (3.6) e (3.18) obtemos

$$\ell\Delta^* \leq \sum_{i=1}^{\ell} E_*(\bar{u}_1) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_*(u_n) \leq a$$

donde concluimos a validade de (3.2)

$$1 \leq \ell \leq \frac{a}{\Delta^*}$$

e esta estimativa independe de (u_n) .

Agora, demonstraremos (3.8). Considere n suficientemente grande de modo que (3.7) ocorra e

$$B_n^i \cap B_n^j = \emptyset \quad \text{para } i \neq j.$$

Pela propriedade aditiva do Grau de Brouwer, temos

$$\begin{aligned} ch(u_n) &= \deg \left(P \circ u_n, \bigcup_{i=1}^{\ell} B_n^i, 2\bar{\zeta} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} \deg \left(P \circ u_n, B_n^i, 2\bar{\zeta} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} \deg \left(P \circ u_n^i, B_{R_i}(0), 2\bar{\zeta} \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Por outro lado, para cada $i \in \{1, \dots, \ell\}$, como (u_n^i) converge uniformemente para \bar{u}_i sobre $B_{R_i}(0)$ e

$$|\bar{u}_i(x)| \leq \gamma < 1 \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{R_i}(0)$$

obtemos, para n suficientemente grande, (veja **Lema 1.7**)

$$\deg \left(P \circ u_n^i, B_{R_i}(0), 2\bar{\zeta} \right) = \deg \left(P \circ \bar{u}_i, B_{R_i}(0), 2\bar{\zeta} \right) = ch(\bar{u}_i) \quad (3.20)$$

substituindo (3.20) em (3.19) obtemos (3.8). ■

3.3 Existência de mínimo nas componentes conexas de Λ

Antes de estabelecermos o principal resultado deste capítulo vamos por algumas notações:

$$E_*^* = \inf_{u \in \Lambda^*} E_*(u)$$

e para cada $q \in \mathbb{Z}$

$$E_\star^q = \inf_{u \in \Lambda^q} E_\star(u).$$

Pela **Lema 3.1** temos que

$$0 < \Delta^\star \leq E_\star^\star.$$

Teorema 3.4 *Existe $\bar{u} \in \Lambda^\star$ tal que $E_\star(\bar{u}) = E_\star^\star$.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset \Lambda^\star$ uma sequência minimizante para E_\star em Λ^\star . Claro que (u_n) tem energia limitada, isto é, existe $a > 0$ tal que $E_\star(u_n) \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando o **Teorema 3.2**, existem $\ell \in \mathbb{N}$ e $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_\ell \in \Lambda$ tais que, a menos de subsequência,

$$\sum_{i=1}^{\ell} E_\star(\bar{u}_i) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_\star(u_n) = E_\star^\star; \quad (3.21)$$

$$ch(u_n) = \sum_{i=1}^{\ell} ch(\bar{u}_i). \quad (3.22)$$

Desde que $ch(u_n) \neq 0$, por (3.22), existe $i \in \{1, \dots, \ell\}$ (por simplicidade tomaremos $i = 1$) de modo que

$$ch(\bar{u}_1) \neq 0,$$

logo $\bar{u}_1 \in \Lambda^\star$. Assim, por (3.21),

$$E_\star^\star \geq \sum_{i=1}^{\ell} E_\star(\bar{u}_i) \geq E_\star(\bar{u}_1) \geq E_\star^\star$$

donde concluímos que

$$E_\star(\bar{u}_1) = E_\star^\star.$$

■

Agora, queremos estudar quando E_\star^q é atingido. É claro que o funcional E_\star tem 0 como mínimo absoluto na classe Λ^0 . Por outro lado, pelo **Teorema 3.4**, existe pelo menos um $\bar{q} = ch(\bar{u}) \neq 0$ tal que $E_\star^{\bar{q}}$ é atingido, ou seja, $E_\star(\bar{u}) = E_\star^{\bar{q}}$.

Proposição 3.5 *Para cada $q \neq 0$, uma condição suficiente para garantir que E_\star^q seja atingido é que exista uma sequência minimizante em Λ^q que satisfaz as propriedades do **Teorema 3.2** com $\ell = 1$. Dessa forma, se E_\star^q não for atingido, então toda sequência minimizante em Λ^q satisfaz as propriedades do **Teorema 3.2** com $\ell \geq 2$.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência minimizante para E_\star em Λ^q que satisfaz as propriedades do **Teorema 3.2** com $\ell = 1$. De (3.8),

$$\text{ch}(\bar{u}_1) = \text{ch}(u_n) = q,$$

logo, $\bar{u}_1 \in \Lambda^q$ e

$$E_\star(\bar{u}_1) \geq E_\star^q.$$

Por outro lado, por (3.6)

$$E_\star^q = \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_\star(u_n) \geq E_\star(\bar{u}_1).$$

mostrando que $E_\star^q = E_\star(\bar{u}_1)$. ■

Corolário 3.6 Para cada $q \neq 0$, se $E_\star^q < 2E_\star^*$, então o ínfimo E_\star^q é atingido na classe Λ^q .

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência minimizante em Λ^q . Para n suficientemente grande, temos

$$E_\star(u_n) < 2E_\star^*. \quad (3.23)$$

Usando o **Teorema 3.2**, existem $\ell \in \mathbb{N}$ e $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_\ell \in \Lambda$ tais que, a menos de subsequência,

$$\sum_{i=1}^{\ell} E_\star(\bar{u}_i) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_\star(u_n) = E_\star^q; \quad (3.24)$$

$$q = \text{ch}(u_n) = \sum_{i=1}^{\ell} \text{ch}(\bar{u}_i). \quad (3.25)$$

Segue de (3.25) que existe $i \in \{1, \dots, \ell\}$ tal que $\text{ch}(\bar{u}_i) \neq 0$. Tal índice é único. De fato, se existissem $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$ com $i \neq j$ tais que $\text{ch}(\bar{u}_i) \neq 0$ e $\text{ch}(\bar{u}_j) \neq 0$, então por (3.23) e (3.24) teríamos

$$E_\star^* + E_\star^* \leq E_\star(\bar{u}_i) + E_\star(\bar{u}_j) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_\star(u_n) = E_\star^q < 2E_\star^*,$$

chegando a um absurdo. Por simplicidade, vamos considerar $i = 1$. Assim,

$$\text{ch}(\bar{u}_1) = \text{ch}(u_n) = q$$

e, usando (3.24), obtemos

$$E_\star^q \geq \sum_{i=1}^{\ell} E_\star(\bar{u}_i) \geq E_\star^q + \sum_{i=2}^{\ell} E_\star(\bar{u}_i)$$

donde

$$\sum_{i=2}^{\ell} E_{\star}(\bar{u}_i) = 0$$

e portanto, temos que ter necessariamente $\ell = 1$. Então, podemos aplicar a **Proposição 3.5** para obter o resultado desejado. ■

Capítulo 4

Resultado de Existência: Potencial não Coercivo

Este capítulo trata da existência de pelo menos uma solução fraca não trivial de (P_2) para \hbar pequeno assumindo uma nova condição sobre o potencial V e na função singular W . Rapidamente falando, iremos supor que V , além de satisfazer a condição de Rabinowitz, seja não-coercivo e com relação a W , assumiremos que em uma vizinhança da origem de \mathbb{R}^{N+1} , tal função tenha uma geometria parecida com a de um parabolóide.

4.1 Hipóteses adicionais

Novas hipóteses são necessárias para o desenvolvimento deste capítulo. A seguir, apresentamos uma lista de quatro hipóteses que serão assumidas neste capítulo além das hipóteses básicas adotadas no Capítulo 1.

(V_3) O potencial V não é coercivo, isto é, $V_\infty = \liminf_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) < +\infty$.

(V_4) (Condição de Rabinowitz) $V_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) < V_\infty$.

(W_5) Existe $\bar{\epsilon} \in (0, 1)$ tal que para todo $\xi \in \Omega$ com $|\xi| \leq \bar{\epsilon}$ vale

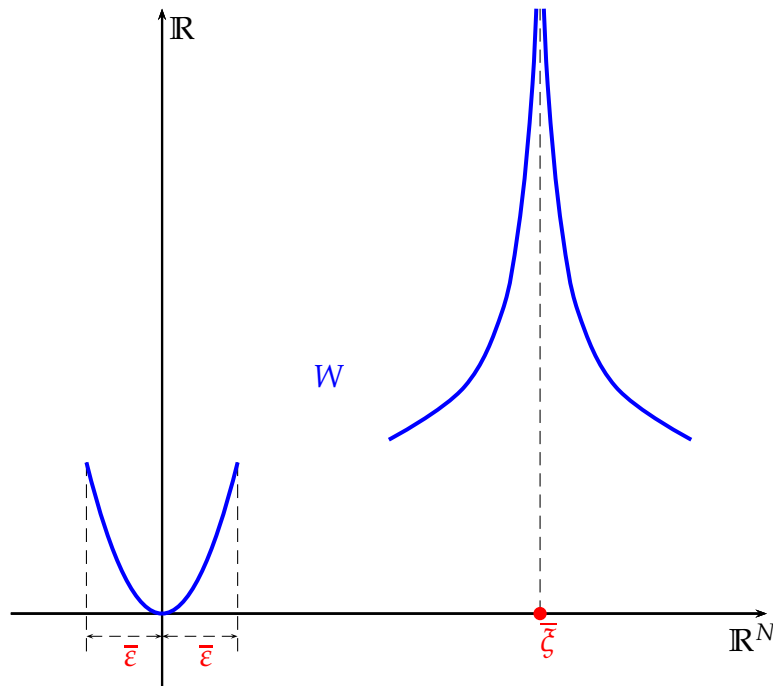
$$W(\xi) \leq \inf \{W(\zeta) : \zeta \in \Omega, |\zeta| > \bar{\epsilon}\}.$$

(W₆) Para todos $\xi, \zeta \in \Omega$, vale

$$|\xi| = |\zeta| \leq \bar{\varepsilon} \implies W(\xi) = W(\zeta);$$

Além disso, a função $\varphi : [0, \bar{\varepsilon}] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(s) = W(\xi)$ onde $\xi \in \Omega$ com $|\xi| = s$, é não-decrescente.

A imagem a seguir ilustra a geometria de W próximo a origem de \mathbb{R}^{N+1} e próximo a singularidade $\bar{\xi}$, de acordo com as hipóteses (W₄), (W₅) e (W₆).



No que segue, ficará clara a relevância do capítulo anterior em considerar equações do tipo (P₂) com potencial V constante positivo. Podemos considerar em (P_★) $V_{★} = V_0$ e depois $V_{★} = V_{\infty}$, obtendo assim equações cujos funcionais energia são dados por

$$E_0(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} (|\nabla u|^2 + V_0 |u|^2) + \frac{1}{p} |\nabla u|^p + W(u) \right) dx$$

e

$$E_{\infty}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} (|\nabla u|^2 + V_{\infty} |u|^2) + \frac{1}{p} |\nabla u|^p + W(u) \right) dx,$$

respectivamente. Algumas notações aqui são necessárias

$$E_0^* = \inf_{u \in \Lambda^*} E_0(u), \quad E_{\infty}^* = \inf_{u \in \Lambda^*} E_{\infty}(u)$$

e, para cada $q \in \mathbb{Z}$,

$$E_0^q = \inf_{u \in \Lambda^q} E_0(u), \quad E_\infty^q = \inf_{u \in \Lambda^q} E_\infty(u)$$

onde Λ^* e Λ^q são exatamente os mesmos conjuntos apresentados no Capítulo 3.

O Teorema 3.4 garante a existência de u_0 e u_∞ pertencentes a Λ^* tais que

$$E_0(u_0) = \inf_{u \in \Lambda^*} E_0(u) \quad \text{e} \quad E_\infty(u_\infty) = \inf_{u \in \Lambda^*} E_\infty(u).$$

4.2 Resultados

Lema 4.1 *Sob as hipóteses (V_1) , (V_3) e (V_4) , existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $V(x_0) = V_0$.*

Demonstração. Seja $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(x_n) = V_0.$$

A sequência (x_n) é limitada, pois do contrário, a menos de subsequência, teríamos

$$|x_n| \rightarrow +\infty \quad \text{quando} \quad n \rightarrow +\infty,$$

logo

$$V_0 < V_\infty \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} V(x_n) = V_0$$

o que é um absurdo.

Assim, a menos de subsequência,

$$x_n \rightarrow x_0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow +\infty,$$

e o resultado segue da continuidade de V . ■

Lema 4.2 *Sob as hipóteses (V_1) , $(W_1) - (W_4)$, temos*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} E_h^* = E_0^*.$$

Demonstração. Fixe $R > 0$ tal que $K(u_0) = \{x \in \mathbb{R}^N : |u_0(x)| > 1\} \subset B_R(0)$. Considere $\varphi_R \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ de sorte que

$$\varphi_R(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_R(0) \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{2R}(0) \end{cases}$$

$0 \leq \varphi_R \leq 1$, $|\nabla \varphi_R| \leq a$ com a independente de R .

Sejam $u_R = \varphi_R u_0$ e $w(x) = u_R(x - \frac{x_0}{\hbar})$, onde x_0 é fixado de modo que $V(x_0) = V_0$.

Veja que $K(w) \subset B_R(\frac{x_0}{\hbar})$, com efeito, dado $x \in K(w)$, temos

$$\begin{aligned} \left| u_0 \left(x - \frac{x_0}{\hbar} \right) \right| &\geq \left| \varphi_R \left(x - \frac{x_0}{\hbar} \right) u_0 \left(x - \frac{x_0}{\hbar} \right) \right| \\ &= \left| u_R \left(x - \frac{x_0}{\hbar} \right) \right| \\ &= |w(x)| \\ &> 1 \end{aligned}$$

ou seja, $x - \frac{x_0}{\hbar} \in K(u_0) \subset B_R(0)$, logo $x \in B_R(\frac{x_0}{\hbar})$.

Assim, pelo **Lema 1.5**,

$$\begin{aligned} 0 \neq ch(u_0) &= ch(u_R) \\ &= deg(P \circ u_R, B_R(0), 2\bar{\zeta}) \\ &= deg(P \circ w, B_R(\frac{x_0}{\hbar}), 2\bar{\zeta}) \\ &= ch(w) \end{aligned}$$

donde concluimos que $w \in \Lambda_{\hbar}^*$ para cada $\hbar > 0$.

Assim, usando mudança de variáveis,

$$\begin{aligned} E_{\hbar}^* &\leq E_{\hbar}(w) \\ &= E_0(w) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V_{\hbar}(x) - V_0) |w|^2 dx \\ &= E_0(u_R) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(V_{\hbar} \left(\frac{\hbar y + x_0}{\hbar} \right) - V_0 \right) |u_R(y)|^2 dy \\ &= E_0(u_R) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V(\hbar y + x_0) - V_0) |u_R(y)|^2 dy. \end{aligned}$$

Agora, note que $V(\hbar x + x_0) \rightarrow V(x_0) = V_0$ quando $\hbar \rightarrow 0$ uniformemente sobre $\bar{B}_{2R}(0)$, uma vez que V é contínua e $\hbar x \rightarrow 0$ quando $\hbar \rightarrow 0$. Tendo isso em mente, fica fácil mostrar que a última integral acima tende a zero quanto $\hbar \rightarrow 0$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, tome \hbar pequeno de sorte que $V(\hbar x + x_0) - V_0 < \frac{\varepsilon}{\|u_0\|_{L^2}^2}$ para todo

$x \in \overline{B_{2R}(0)}$. Portanto, para \hbar pequeno, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (V(\hbar x + x_0) - V_0) |u_R|^2 &= \int_{B_{2R}(0)} (V(\hbar x + x_0) - V_0) |\varphi_R|^2 |u_0|^2 dx \\ &\leq \int_{B_{2R}(0)} (V(\hbar x + x_0) - V_0) |u_0|^2 dx \\ &< \frac{\varepsilon}{\|u_0\|_{L^2}^2} \int_{B_{2R}(0)} |u_0|^2 dx \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, fica provado a seguinte sentença: dado $\varepsilon > 0$, para todo $\hbar > 0$ suficientemente pequeno

$$E_{\hbar}^* < E_0(u_R) + \varepsilon$$

e portanto, por definição de lim sup obtemos

$$\limsup_{\hbar \rightarrow 0^+} E_{\hbar}^* \leq E_0(u_R).$$

A partir de gora, vamos nos concentrar para mostrar que

$$E_0(u_R) \longrightarrow E_0(u_0) \quad \text{quando } R \rightarrow +\infty.$$

Por simplicidade, vamos usar as notações

$$\begin{aligned} f_R(x) &= \frac{1}{2} \left(|\nabla u_R(x)|^2 + V_0 |u_R(x)|^2 \right) + \frac{1}{p} |\nabla u_R(x)|^p + W(u_R(x)) \\ f_0(x) &= \frac{1}{2} \left(|\nabla u_0(x)|^2 + V_0 |u_0(x)|^2 \right) + \frac{1}{p} |\nabla u_0(x)|^p + W(u_0(x)) \end{aligned}$$

Logo,

$$E_0(u_R) = \int_{\mathbb{R}^N} f_R(x) dx \quad \text{e} \quad E_0(u_0) = \int_{\mathbb{R}^N} f_0(x) dx.$$

Portanto, para estabelecer o desejado, é suficiente mostrarmos que $f_R(x) \longrightarrow f_0(x)$ quando $R \rightarrow +\infty$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$ e que existe uma função $g \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ tal que $|f_R| \leq g$ para todo $R > 0$, pois, o resultado seguirá imediatamente do Teorema da convergência Dominada de Lebesgue.

Para mostrar que $f_R(x) \longrightarrow f_0(x)$ quando $R \rightarrow +\infty$, devemos mostrar as três convergências abaixo

(I) $u_R(x) \longrightarrow u_0(x)$ quando $R \rightarrow +\infty$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$;

(II) $\nabla u_R(x) \longrightarrow \nabla u_0(x)$ quando $R \rightarrow +\infty$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$;

(III) $W(u_R(x)) \rightarrow W(u_0(x))$ quando $R \rightarrow +\infty$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$;

O item (I) segue da própria definição de u_R . O item (III), contudo, é uma consequência imediata de (I) e da continuidade de W . Assim, nos resta estabelecer (II). Veja que

$$\nabla u_R(x) = \begin{pmatrix} \varphi_R(x) \frac{\partial u_0^1}{\partial x_1}(x) + u_0^1(x) \frac{\partial \varphi_R}{\partial x_1}(x) & \cdots & \varphi_R(x) \frac{\partial u_0^1}{\partial x_N}(x) + u_0^1(x) \frac{\partial \varphi_R}{\partial x_N}(x) \\ \varphi_R(x) \frac{\partial u_0^2}{\partial x_1}(x) + u_0^2(x) \frac{\partial \varphi_R}{\partial x_1}(x) & \cdots & \varphi_R(x) \frac{\partial u_0^2}{\partial x_N}(x) + u_0^2(x) \frac{\partial \varphi_R}{\partial x_N}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_R(x) \frac{\partial u_0^{N+1}}{\partial x_1}(x) + u_0^{N+1}(x) \frac{\partial \varphi_R}{\partial x_1}(x) & \cdots & \varphi_R(x) \frac{\partial u_0^{N+1}}{\partial x_N}(x) + u_0^{N+1}(x) \frac{\partial \varphi_R}{\partial x_N}(x) \end{pmatrix}$$

e

$$\nabla u_0(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0^1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial u_0^1}{\partial x_N}(x) \\ \frac{\partial u_0^2}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial u_0^2}{\partial x_N}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_0^{N+1}}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial u_0^{N+1}}{\partial x_N}(x) \end{pmatrix}$$

Fixados $k \in \{1, \dots, N+1\}$, $i \in \{1, \dots, N\}$ e dado $x \in \mathbb{R}^N$, considere $R > 0$ grande de modo que $x \in B_R(0)$. Temos

$$\left| \varphi_R(x) \frac{\partial u_0^k}{\partial x_i}(x) + u_0^k(x) \frac{\partial \varphi_R}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u_0^k}{\partial x_i}(x) \right| = \left| 1 \cdot \frac{\partial u_0^k}{\partial x_i}(x) + u_0^k(x) \cdot 0 - \frac{\partial u_0^k}{\partial x_i}(x) \right| = 0,$$

ou seja,

$$\varphi_R(x) \frac{\partial u_0^k}{\partial x_i}(x) + u_0^k(x) \frac{\partial \varphi_R}{\partial x_i}(x) \rightarrow \frac{\partial u_0^k}{\partial x_i}(x) \quad \text{quando } R \rightarrow +\infty.$$

e portanto fica provado (II).

Agora, vamos mostrar a dominação de f_R . Veja que

$$\begin{aligned} |\nabla u_R(x)|^2 &= \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{i=1}^N \left(\varphi_R(x) \frac{\partial u_0^k}{\partial x_i}(x) + u_0^k(x) \frac{\partial \varphi_R}{\partial x_i}(x) \right)^2 \\ &\leq 2^2 \left(\sum_{k=1}^{N+1} \sum_{i=1}^N \varphi_R(x)^2 \left(\frac{\partial u_0^k}{\partial x_i}(x) \right)^2 + \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{i=1}^N u_0^k(x)^2 \left(\frac{\partial \varphi_R}{\partial x_i}(x) \right)^2 \right) \\ &= 4 \left(\varphi_R(x)^2 \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u_0^k}{\partial x_i}(x) \right)^2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \varphi_R}{\partial x_i}(x) \right)^2 \sum_{k=1}^{N+1} u_0^k(x)^2 \right) \\ &= 4 \left(\varphi_R(x)^2 |\nabla u_0(x)|^2 + |\nabla \varphi_R(x)|^2 |u_0(x)|^2 \right) \\ &\leq 4 \left(|\nabla u_0(x)|^2 + a^2 |u_0(x)|^2 \right) \end{aligned}$$

É claro que a função $g_1 = 4 \left(|\nabla u_0|^2 + a^2 |u_0|^2 \right) \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Além disso,

$$\begin{aligned} |\nabla u_R(x)|^p &\leq 4^{\frac{p}{2}} \left(|\nabla u_0(x)|^2 + a^2 |u_0(x)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \\ &\leq 2^p \left(|\nabla u_0(x)|^p + a^p |u_0(x)|^p \right) \end{aligned}$$

e também temos que $g_2 = 2^p \left(|\nabla u_0|^p + a^p |u_0|^p \right) \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.

Assim,

$$\limsup_{\hbar \rightarrow 0^+} E_{\hbar}^* \leq E_0^*.$$

Por outro lado, desde que $E_{\hbar}(u) \geq E_0(u) \geq E_{\hbar}^*$ para qualquer $u \in \Lambda_{\hbar}^*$, obtemos

$$\liminf_{\hbar \rightarrow 0^+} E_{\hbar}^* \geq E_0^*.$$

Assim,

$$\liminf_{\hbar \rightarrow 0^+} E_{\hbar}^* \geq E_0^* \geq \limsup_{\hbar \rightarrow 0^+} E_{\hbar}^* \geq \liminf_{\hbar \rightarrow 0^+} E_{\hbar}^*$$

e portanto, temos o resultado desejado

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0^+} E_{\hbar}^* = E_0^*.$$

■

Observe que na demonstração do último lema, não foi preciso que $V_{\infty} = \liminf_{|x| \rightarrow +\infty} V(x)$ fosse finito ou mesmo infinito, portanto, este lema é válido na presença da hipótese (V_2) ou (V_3) . Este fato será usado no Capítulo 5, onde será mostrado o comportamento de concentração de uma sequência de soluções de (P_2) ou (P_1) quando V satisfaz indiferentemente (V_2) ou (V_3) .

A fim de obter o principal resultado deste capítulo, precisamos do próximo lema o qual estabelece uma propriedade de compacidade.

Lema 4.3 *Assuma as hipóteses (V_1) , (V_3) , (V_4) , (W_1) – (W_4) . Seja (u_n) uma sequência minimizante para E_{\hbar} em Λ_{\hbar}^* tal que*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_{\hbar} \text{ e } u \in \Lambda_{\hbar}.$$

Então, para \hbar suficientemente pequeno, $u \neq 0$.

Demonstração. Primeiramente note que

$$E_0^* < E_\infty^*. \quad (4.1)$$

De fato, diante da hipótese de Rabinowitz (V_4):

$$\begin{aligned} E_\infty^* &= E_\infty(u_\infty) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} (|\nabla u_\infty|^2 + V_\infty |u_\infty|^2) + \frac{1}{p} |\nabla u_\infty|^p + W(u_\infty) \right) dx \\ &> \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} (|\nabla u_\infty|^2 + V_0 |u_\infty|^2) + \frac{1}{p} |\nabla u_\infty|^p + W(u_\infty) \right) dx \\ &= E_0(u_0) \\ &\geq E_0^*. \end{aligned}$$

De (4.1) e do **Lema 4.1** deduzimos que existe $\hbar_0 > 0$ tal que

$$E_\hbar^* < E_\infty^* \quad \forall \hbar \in (0, \hbar_0). \quad (4.2)$$

Agora, suponha, por contradição, que para algum $\bar{\hbar} \in (0, \hbar_0)$ tenhamos $u_n \rightharpoonup u = 0 \in \Lambda_{\bar{\hbar}}$ onde (u_n) é uma sequência minimizante para $E_{\bar{\hbar}}$ em $\Lambda_{\bar{\hbar}}^*$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ dado, segue da definição de V_∞ segue que existe $R_\varepsilon > 0$ de modo que

$$V_{\bar{\hbar}}(x) > V_\infty - \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \text{com} \quad |x| > R_\varepsilon.$$

Conseqüentemente, pondo $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{L^2}^2$, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} E_{\bar{\hbar}}(u_n) &= E_\infty(u_n) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V_{\bar{\hbar}}(x) - V_\infty) |u_n|^2 dx \\ &\geq E_\infty^* + \frac{1}{2} \int_{|x| \leq R_\varepsilon} (V_{\bar{\hbar}}(x) - V_\infty) |u_n|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{|x| > R_\varepsilon} (V_{\bar{\hbar}}(x) - V_\infty) |u_n|^2 dx \\ &> E_\infty^* + \frac{1}{2} \int_{|x| \leq R_\varepsilon} (V_{\bar{\hbar}}(x) - V_\infty) |u_n|^2 dx - \frac{\varepsilon}{2} \int_{|x| > R_\varepsilon} |u_n|^2 dx \\ &\geq E_\infty^* + \frac{1}{2} \int_{|x| \leq R_\varepsilon} (V_{\bar{\hbar}}(x) - V_\infty) |u_n|^2 dx - \frac{\varepsilon}{2} \|u_n\|_{L^2}^2 \\ &\geq E_\infty^* + \frac{1}{2} \left(\inf_{x \in [|x| \leq R_\varepsilon]} V_{\bar{\hbar}}(x) - V_\infty \right) \int_{|x| \leq R_\varepsilon} |u_n|^2 dx - \frac{\varepsilon}{2} M \end{aligned}$$

Pelo **Lema 1.1**, temos que $u_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$ uniformemente no compacto $[|x| \leq R_\varepsilon]$, logo, passando ao limite na desigualdade acima, obtemos

$$E_{\bar{\hbar}}^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} E_{\bar{\hbar}}(u_n) \geq E_\infty^* - \frac{\varepsilon}{2} M$$

e como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que

$$E_{\hbar}^* \geq E_{\infty}^*$$

o que é uma contradição com (4.2). Portanto, para todo $\hbar \in (0, \hbar_0)$, sendo u o limite fraco de uma sequência minimizante para E_{\hbar} em Λ_{\hbar}^* , devemos ter necessariamente $u \neq 0$. ■

Agora podemos provar o principal resultado deste capítulo.

Teorema 4.4 *Assuma as hipóteses (V_1) , (V_3) , (V_4) , (W_1) – (W_6) . Então, existe $\hbar_0 > 0$ tal que o ínfimo E_{\hbar}^* é atingido no conjunto aberto Λ_{\hbar}^* para cada $\hbar \in (0, \hbar_0)$.*

Demonstração. Seja $\hbar_0 > 0$ suficientemente pequeno de modo que o **Lema 4.3** seja válido. Considere (u_n) uma sequência minimizante para E_{\hbar} em Λ_{\hbar}^* com $\hbar \in (0, \hbar_0)$. Dessa forma, podemos assumir que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_{\hbar} \text{ e } u \in \Lambda_{\hbar} \setminus \{0\}.$$

Pelo **Lema 1.1 (iii)** existe $R > 0$ tal que

$$|u(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0). \quad (4.3)$$

Começamos provando a seguinte afirmação.

Afirmação 4.5 *Existem $\ell \in \mathbb{N}$, $\bar{R} \geq R$, $r > 0$ e ℓ sequências de pontos $(x_n^1), \dots, (x_n^{\ell}) \subset \mathbb{R}^N$ tais que, a menos de subsequência,*

$$\left| u_n(x_n^i) \right| > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in \{1, \dots, \ell\};$$

$$\left| x_n^i - x_n^j \right| \rightarrow +\infty \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty \quad \text{para } i \neq j; \quad (4.4)$$

$$\left| x_n^i \right| \rightarrow +\infty \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty \quad \forall i \in \{1, \dots, \ell\}; \quad (4.5)$$

$$|u_n(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\ell} B_r(x_n^i) \cup B_{\bar{R}}(0) \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.6)$$

A demonstração desta afirmação é uma consequência imediata do **Teorema 3.2**. Aplicaremos tal teorema para a sequência (u_n) e o funcional E_0 o que é perfeitamente possível porque $(u_n) \subset \Lambda^*$, uma vez que $\Lambda_{\hbar}^* \subset \Lambda^*$ e, além disso, $(E_0(u_n))$ é limitada pois $E_0(u_n) \leq E_{\hbar}(u_n)$ e (u_n) é minimizante para E_{\hbar} . Portanto, de acordo com

Teorema 3.2 existem seqüências $(y_n^0), \dots, (y_n^\ell)$ e números reais positivos R_0, \dots, R_ℓ tais que, a menos de subsequência,

$$\begin{aligned} & |u_n(y_n^i)| > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in \{0, \dots, \ell\}; \\ & |y_n^i - y_n^j| \longrightarrow +\infty \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty \quad \text{para } i \neq j; \\ & |u_n(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{\ell} B_r(y_n^i) \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Aqui, temos duas possibilidades:

- (a) a menos de subsequência, para todo $i \in \{0, \dots, \ell\}$ vale $\lim_{n \rightarrow +\infty} |y_n^i| = +\infty$,
ou
(b) a menos de subsequência, existe $i_0 \in \{0, \dots, \ell\}$ tal que $(y_n^{i_0})$ é limitada.

No caso (a) a **Afirmção 4.5** fica provada com $\ell + 1$ ao invés de ℓ , $\bar{R} = R$, $r = \max_{i \in \{0, \dots, \ell\}} R_i$ e $x_n^i = y_n^i$ para $i \in \{0, \dots, \ell\}$.

Vamos considerar o caso (b). Observe que i_0 é único, pois, se existissem $i_1, i_2 \in \{0, \dots, \ell\}$, $i_1 \neq i_2$ e $M_1, M_2 > 0$ tais que $|y_n^{i_1}| \leq M_1$ e $|y_n^{i_2}| \leq M_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$|y_n^{i_1} - y_n^{i_2}| \leq M_1 + M_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

o que não pode ocorrer devido a (4.7).

Sem perda de generalidade podemos assumir que $i_0 = 0$. Agora, escolha $\bar{R} > R$ suficientemente grande de sorte que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$B_{R_0}(y_n^0) \subset B_{\bar{R}}(0).$$

Então, pondo $r = \max_{i \in \{1, \dots, \ell\}} R_i$ e $x_n^i = y_n^i$ para $i \in \{1, \dots, \ell\}$, temos que as seqüências $(x_n^1), \dots, (x_n^\ell)$ e os números positivos r e \bar{R} satisfazem a **Afirmção 4.5**.

Desde que $\bar{R} \geq R$ temos $B_R(0) \subset B_{\bar{R}}(0)$. Ademais, $K(u) \subset B_R(0)$. Com efeito, dado $x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0)$, por (4.3) temos $|u(x)| \leq \frac{1}{2} < 1$ donde concluímos que $x \in \mathbb{R}^N \setminus K(u)$. Portanto, $K(u) \subset B_{\bar{R}}(0)$ e daí $K(u) = K(u) \cap B_{\bar{R}}(0)$. Assim, por definição de carga topológica,

$$\begin{aligned} ch(u) &= deg(P \circ u, K(u), 2\bar{\zeta}) \\ &= deg(P \circ u, K(u) \cap B_{\bar{R}}(0), 2\bar{\zeta}) \\ &= ch(u, B_{\bar{R}}(0)) \end{aligned}$$

Segue do **Lema 1.1** que $u_n \rightarrow u$ uniformemente sobre $B_{\overline{R}}(0)$ e por conseguinte, usando o **Lema 1.5**, para n suficientemente grande temos

$$ch(u) = ch(u_n, B_{\overline{R}}(0)). \quad (4.8)$$

Agora, distinguiremos dois casos:

(I) $ch(u_n, B_{\overline{R}}(0)) \neq 0$ para todo n suficientemente grande

ou

(II) $ch(u_n, B_{\overline{R}}(0)) = 0$ para todo n suficientemente grande.

Se (I) ocorrer, então, por (4.8) deduzimos que $ch(u) \neq 0$, logo $u \in \Lambda_{\hbar}^*$. Assim, segue da semi-continuidade inferior fraca de E_{\hbar} que

$$E_{\hbar}^* = \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_{\hbar}(u_n) \geq E_{\hbar}(u) \geq E_{\hbar}^*,$$

portanto $E_{\hbar}(u) = E_{\hbar}^*$ e o teorema fica provado.

Para concluir a demonstração do teorema vamos descartar a alternativa (II), ou seja, vamos mostrar que (II) não pode ocorrer. Argumentaremos por contradição supondo que $ch(u_n, B_{\overline{R}}(0)) = 0$ para n grande. Dessa forma, o resto desta demonstração será desenvolvido para mostrar que isso nos leva a uma contradição.

Antes de prosseguirmos com o descrito acima, observe que (4.4) e (4.5) implicam que, para n grande

$$\overline{B}_r(x_n^i) \cap \overline{B}_r(x_n^j) = \emptyset, \quad \overline{B}_r(x_n^i) \cap \overline{B}_{\overline{R}}(0) = \emptyset \quad \forall i, j \in \{1, \dots, \ell\} \quad \text{com } i \neq j.$$

Conseqüentemente, da aditividade do grau de Brouwer (veja **Proposição 1.6**), de (4.6) e (II) segue que

$$\begin{aligned} 0 \neq ch(u_n) &= ch \left(u_n, \bigcup_{i=1}^{\ell} B_r(x_n^i) \cup B_{\overline{R}}(0) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} ch \left(u_n, B_r(x_n^i) \right) + ch \left(u_n, B_{\overline{R}}(0) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} ch \left(u_n, B_r(x_n^i) \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Dividiremos o restante do argumento em três passos.

Passo 1. Para cada $\varepsilon > 0$ e $\gamma > 0$ existe $R_\varepsilon > \gamma$ tal que, a menos de subsequência,

$$\left| x - x_n^i \right| = R_\varepsilon \implies |u_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \forall i \in \{1, \dots, \ell\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Argumentaremos por contradição assumimos a existência de $\tilde{\varepsilon} > 0$ e $\gamma > 0$ tais que para cada $\tilde{R} > \gamma$ exista $\bar{n}_{\tilde{R}} \in \mathbb{N}$ verificando

$$\forall n \geq \bar{n}_{\tilde{R}} \quad \exists i \in \{1, \dots, \ell\}, \quad \exists x \in \mathbb{R}^N \quad \text{com} \quad \left| x - x_n^i \right| = \tilde{R} \quad \text{tal que} \quad |u_n(x)| > \tilde{\varepsilon}.$$

Fixe $R_1 > \gamma$ e tome $\bar{n}_1 \in \mathbb{N}$ de sorte que

$$\forall n \geq \bar{n}_1 \quad \exists i_{1,n} \in \{1, \dots, \ell\}, \quad \exists \bar{z}_n^1 \in \mathbb{R}^N \quad \text{com} \quad \left| \bar{z}_n^1 - x_n^{i_{1,n}} \right| = R_1 \quad \text{tal que} \quad \left| u_n(\bar{z}_n^1) \right| > \tilde{\varepsilon}.$$

Aumentando \bar{n}_1 se necessário, por (4.4) e (4.5) podemos supor que

$$B_{R_1}(x_n^i) \cap B_{R_1}(x_n^j) = \emptyset, \quad B_{R_1}(x_n^i) \cap B_{\bar{R}}(0) = \emptyset$$

$$\forall n \geq \bar{n}_1, \forall i, j \in \{1, \dots, \ell\} \text{ com } i \neq j.$$

Agora considere $R_2 > R_1 + 1$. Então, existe $\bar{n}_2 \in \mathbb{N}$ com $\bar{n}_2 > \bar{n}_1$ de sorte que

$$\forall n \geq \bar{n}_2 \quad \exists i_{2,n} \in \{1, \dots, \ell\}, \quad \exists \bar{z}_n^2 \in \mathbb{R}^N \quad \text{com} \quad \left| \bar{z}_n^2 - x_n^{i_{2,n}} \right| = R_2 \quad \text{tal que} \quad \left| u_n(\bar{z}_n^2) \right| > \tilde{\varepsilon},$$

e além disso, para \bar{n}_2 suficientemente grande

$$B_{R_2}(x_n^i) \cap B_{R_2}(x_n^j) = \emptyset, \quad B_{R_2}(x_n^i) \cap B_{\bar{R}}(0) = \emptyset$$

$$\forall n \geq \bar{n}_2, \forall i, j \in \{1, \dots, \ell\} \text{ com } i \neq j.$$

Indutivamente, para cada $k \geq 2$, podemos escolher $R_k > R_{k-1} + 1$ e obter $\bar{n}_k \in \mathbb{N}$ com $\bar{n}_k > \bar{n}_{k-1}$ de sorte que

$$\forall n \geq \bar{n}_k \quad \exists i_{k,n} \in \{1, \dots, \ell\}, \quad \exists \bar{z}_n^k \in \mathbb{R}^N \quad \text{com} \quad \left| \bar{z}_n^k - x_n^{i_{k,n}} \right| = R_k \quad \text{tal que} \quad \left| u_n(\bar{z}_n^k) \right| > \tilde{\varepsilon},$$

e além disso

$$B_{R_k}(x_n^i) \cap B_{R_k}(x_n^j) = \emptyset, \quad B_{R_k}(x_n^i) \cap B_{\bar{R}}(0) = \emptyset$$

$$\forall n \geq \bar{n}_k, \forall i, j \in \{1, \dots, \ell\} \text{ com } i \neq j.$$

Da continuidade equi-uniforme da sequência (u_n) , existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N, \quad |x - y| \leq \delta \implies |u_n(x) - u_n(y)| \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Agora, tome $k \in \mathbb{N}$, $n \geq \bar{n}_k$ e $z_n \in \mathbb{R}^N$ com $|\bar{z}_n^k - z_n| \leq \delta$. Logo,

$$|u_n(z_n)| \geq |u_n(\bar{z}_n^k)| - |u_n(\bar{z}_n^k) - u_n(z_n)| > \tilde{\varepsilon} - \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}.$$

Conseqüentemente, obtemos que

$$B_\delta(\bar{z}_n^k) \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^N : |u_n(x)| > \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \right\} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geq \bar{n}_k.$$

Agora, ponha $\delta' = \min\{\delta, 1\}$ e fixe $k, k' \in \mathbb{N}$ com $k > k'$. Note que

$$R_{k-1} + 1 > R_{k-2} + 2 > R_{k-3} + 3 > \cdots > R_{k-(k-k')} + k - k' \geq R_{k'} + 1,$$

ou seja, $R_{k-1} > R_{k'}$. Tome $n \geq \bar{n}_k$. Se $i_{k,n} \neq i_{k',n}$, por construção, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \bar{z}_n^k - \bar{z}_n^{k'} \right| &\geq \left| x_n^{i_{k,n}} - x_n^{i_{k',n}} \right| - \left| \bar{z}_n^k - x_n^{i_{k,n}} \right| - \left| \bar{z}_n^{k'} - x_n^{i_{k',n}} \right| \\ &\geq 2R_k - R_k - R_{k'} \\ &> R_k - R_{k-1} \\ &> 1. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $i_{k,n} = i_{k',n}$, temos

$$\begin{aligned} \left| \bar{z}_n^k - \bar{z}_n^{k'} \right| &\geq \left| \bar{z}_n^k - x_n^{i_{k,n}} \right| - \left| \bar{z}_n^{k'} - x_n^{i_{k',n}} \right| \\ &= R_k - R_{k'} \\ &> R_k - R_{k-1} \\ &> 1. \end{aligned}$$

Em qualquer caso, para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $n \geq \bar{n}_k$, as bolas $\{B_{\delta'}(\bar{z}_n^i)\}_{i=1,\dots,k}$ são disjuntas e

$$\bigcup_{i=1}^k B_{\delta'}(\bar{z}_n^i) \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^N : |u_n(x)| > \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \right\}.$$

Desde que k é arbitrário, temos que (u_n) não é limitada na norma L^2 . De fato,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 dx \geq \sum_{i=1}^k \int_{B_{\delta'}(\bar{z}_n^i)} |u_n|^2 dx \geq k \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{4} \sum_{i=1}^k |B_{\delta'}(\bar{z}_n^i)| \longrightarrow +\infty \quad \text{quando } k \rightarrow +\infty.$$

Mas isso é um absurdo, pois (u_n) é obviamente limitada em $H_{\bar{h}}$.

Passo 2. Existe uma sequência minimizante (\tilde{u}_n) para $E_{\bar{h}}$ em $\Lambda_{\bar{h}}^*$ tal que

$$\tilde{u}_n \rightharpoonup 0 \quad \text{em } H_{\bar{h}}.$$

Por hipótese, $(u_n) \subset \Lambda_h^*$ e como estamos assumindo **(II)**, $ch(u_n, B_{\overline{R}}(0)) = 0$. Logo, desde que $ch(u_n) \neq 0$, segue de (4.9) que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $i_n \in \{1, \dots, \ell\}$ de sorte que

$$ch(u_n, B_r(x_n^{i_n})) \neq 0.$$

Agora considere $\bar{\varepsilon}$ dado pelas hipóteses (W_5) e (W_6) . O **Passo 1** implica que existem $R_1 > r$ e uma subsequência (u_n^1) de (u_n) verificando

$$|u_n^1(x)| \leq \frac{\bar{\varepsilon}}{(N+1)^{\frac{1}{2}}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \text{com} \quad |x - \zeta_n^1| = R_1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

onde ζ_n^1 denota o centro da bola de raio r que “transporta” uma carga não trivial, isto é, ζ_n^1 é um dos $x_n^{i_n}$ e $ch(u_n^1, B_r(\zeta_n^1)) \neq 0$. Como para n suficientemente grande ζ_n^1 está longe do centro das outras (possíveis) bolas que “transportam” carga não trivial, temos

$$ch(u_n^1, B_{R_1}(\zeta_n^1)) \neq 0. \quad (4.10)$$

De fato,

$$\begin{aligned} ch(u_n^1, B_{R_1}(\zeta_n^1)) &= ch\left(u_n^1, B_{R_1}(\zeta_n^1) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\ell} B_r(x_n^i) \cup B_{\overline{R}}(0)\right)\right) \\ &= ch(u_n^1, B_{R_1}(\zeta_n^1) \cap B_r(\zeta_n^1)) \\ &= ch(u_n^1, B_r(\zeta_n^1)) \neq 0. \end{aligned}$$

Ademais, como

$$|\zeta_n^1| \rightarrow +\infty \quad \text{quando} \quad n \rightarrow +\infty,$$

sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$R_1 < \min_{n \in \mathbb{N}} |\zeta_n^1|.$$

Agora, tomando $\bar{\varepsilon}^2 > 0$ (usando novamente o **Passo 1**) existe $R_2 > 0$, com $R_2 > R_1$ e existe uma subsequência (u_n^2) de (u_n^1) verificando

$$|u_n^2(x)| \leq \frac{\bar{\varepsilon}^2}{(N+1)^{\frac{1}{2}}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \text{com} \quad |x - \zeta_n^2| = R_2, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e além disso, podemos fazer com que

$$R_2 < \min_{n \in \mathbb{N}} |\zeta_n^2|.$$

Note que (ζ_n^2) é uma subsequência de (ζ_n^1) . Repetimos o mesmo argumento apresentado acima para $\bar{\varepsilon}^3, \bar{\varepsilon}^4$ e assim por diante. O objetivo disso é construir a sequência minimizante desejada através de um argumento de diagonal.

Para simplificar a notação, para cada $a > 0$ pomos a função

$$T_a : \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{N+1}$$

definida por

$$T_a(z) = \begin{pmatrix} (\text{sign } z_1) \min \left\{ |z_1|, \frac{a}{(N+1)^{\frac{1}{2}}} \right\} \\ (\text{sign } z_2) \min \left\{ |z_2|, \frac{a}{(N+1)^{\frac{1}{2}}} \right\} \\ \vdots \\ (\text{sign } z_{N+1}) \min \left\{ |z_{N+1}|, \frac{a}{(N+1)^{\frac{1}{2}}} \right\} \end{pmatrix} \quad \forall z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{N+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Agora, considere a sequência

$$\tilde{u}_n(x) = \begin{cases} u_n^n(x) & \text{se } |x - \zeta_n^n| \leq R_1 \\ T_{\bar{\varepsilon}^i}(u_n^n(x)) & \text{se } R_i < |x - \zeta_n^n| \leq R_{i+1}, \quad i \in \{1, \dots, n-1\} \\ T_{\bar{\varepsilon}^n}(u_n^n(x)) & \text{se } |x - \zeta_n^n| > R_n. \end{cases}$$

Por construção, segue que

$$|u_n^n(x)| \leq \frac{\bar{\varepsilon}^i}{(N+1)^{\frac{1}{2}}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \text{com } |x - \zeta_n^n| \leq R_i.$$

Assim, cada \tilde{u}_n é contínua sobre a esfera $\{x \in \mathbb{R}^N : |x - \zeta_n^n| = R_i\}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ e portanto, cada \tilde{u}_n é contínua em todo \mathbb{R}^N . Donde podemos concluir que $\tilde{u}_n \in H_{\bar{h}}$. Por um lado, por construção, para cada $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $\tilde{u}_n(x) \neq u_n^n(x)$ temos

$$|\tilde{u}_n(x)| = |T_{\bar{\varepsilon}^i}(u_n^n(x))| \leq \left(\sum_{i=1}^{N+1} \left(\frac{\bar{\varepsilon}^i}{(N+1)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \bar{\varepsilon}^i < \bar{\varepsilon} < 1 = |\bar{\zeta}|.$$

Por outro lado, para cada $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $\tilde{u}_n(x) = u_n^n(x)$, temos

$$|\tilde{u}_n(x)| = |u_n^n(x)| \leq \frac{\bar{\varepsilon}^i}{(N+1)^{\frac{1}{2}}} < \bar{\varepsilon}^i < \bar{\varepsilon} < 1 = |\bar{\zeta}|.$$

Nossa conclusão é que

$$\tilde{u}_n \in \Lambda_{\bar{h}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Agora queremos provar que para cada $x \in \mathbb{R}^N$ e $n \in \mathbb{N}$

$$W(\tilde{u}_n(x)) \leq W(u_n^n(x)). \quad (4.11)$$

Para $x \in B_{R_1}(\zeta_n^n)$ a desigualdade acima na verdade é uma igualdade, como é facilmente verificado pela própria definição de \tilde{u}_n . Tome $x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{R_1}(\zeta_n^n)$. Se $|u_n^n(x)| > \bar{\varepsilon}$, então, desde que $|\tilde{u}_n(x)| \leq \bar{\varepsilon}$, a desigualdade (4.11) segue imediatamente da hipótese (W_5). Caso contrário, se $|u_n^n(x)| \leq \bar{\varepsilon}$, então, a hipótese (W_6) implica que W é não não decrescente com respeito a norma no conjunto $\{\zeta \in \mathbb{R}^{N+1} : |\zeta| \leq \bar{\varepsilon}\}$. Assim, uma vez que $|\tilde{u}_n(x)| \leq |u_n^n(x)| \leq \bar{\varepsilon}$, concluímos a validade de (4.11).

Por outro lado, veja que os termos de E_{\hbar} que não envolvem W decrescem quando trocamos u_n^n por \tilde{u}_n . Portanto

$$E_{\hbar}(\tilde{u}_n) \leq E_{\hbar}(u_n^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, como para cada $x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{R_1}(\zeta_n^n)$ vale $|\tilde{u}_n(x)| \leq \bar{\varepsilon} < 1$, por (4.10) obtemos

$$ch(\tilde{u}_n) = ch(\tilde{u}_n, B_{R_1}(\zeta_n^n)) = ch(u_n^n, B_{R_1}(\zeta_n^n)) \neq 0.$$

Portanto, (\tilde{u}_n) é uma sequência minimizante em Λ_{\hbar}^* para E_{\hbar} . Para completar a demonstração, devemos mostrar que, a menos de subsequência,

$$\tilde{u}_n \rightharpoonup 0 \quad \text{em } H_{\hbar} \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty \quad (4.12)$$

Desde que a sequência (\tilde{u}_n) é limitada em H_{\hbar} , podemos assumir que ela converge fraco para alguma função de H_{\hbar} , uma vez que H_{\hbar} é reflexivo. Assim, para provar (4.12) é suficiente provar que para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^N$

$$\tilde{u}_n \longrightarrow 0 \quad \text{uniformemente em } K \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty \quad (4.13)$$

Fixe um compacto $K \subset \mathbb{R}^N$ e tome $M > 0$ de sorte que $K \subset B_M(0)$. Por construção, temos

$$|\zeta_n^n| \longrightarrow +\infty \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty$$

e

$$R_k < \min_{n \geq k} |\zeta_n^n| \quad k \in \mathbb{N}.$$

Então, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \geq k$ tal que $|\zeta_n^n| - R_k > M$ para todo $n \geq n_k$. Assim, se $x \in B_M(0)$, então $|\zeta_n^n| - R_k > M > |x|$ o que acarreta em $|\zeta_n^n - x| > R_k$. Dessa forma,

$$|\tilde{u}_n(x)| \leq \bar{\varepsilon}^k \quad \forall x \in B_M(0), \quad \forall n \geq n_k$$

e como $\bar{\varepsilon} \in (0, 1)$, fazendo $k \rightarrow +\infty$ obtemos (4.13).

Passo 3. Fim da demonstração.

Do **Passo 2** e do **Lema 4.3** obtemos uma contradição. Tal contradição é proveniente de assumirmos que **(II)** é válido. Isso conclui a demonstração. ■

O último teorema assegura a existência de uma solução fraca de (P_2) ou (P_1) para \hbar pequeno. Esta solução é obtida como mínimo do funcional energia E_\hbar na classe Λ_\hbar^* .

Capítulo 5

Concentração de soluções: o limite semi-clássico

5.1 Fenômeno de concentração

Em todo este capítulo iremos assumir as hipóteses (V_1) , (V_4) , $(W_1) - (W_6)$. Como nossa atenção agora está focalizado no comportamento de soluções quando $\hbar \rightarrow 0^+$, os Capítulos 2 e 4 nos garantem que podemos assumir \hbar pequeno de modo que o funcional E_{\hbar} atinja o ínfimo E_{\hbar}^* na classe Λ_{\hbar}^* . Sejam $u_{\hbar} \in \Lambda_{\hbar}^*$ uma função que minimiza E_{\hbar} em Λ_{\hbar}^* e

$$v_{\hbar}(x) = u_{\hbar}\left(\frac{x}{\hbar}\right) \quad (5.1)$$

Então, v_{\hbar} é solução de (P_1) . Reciprocamente, uma tal solução v_{\hbar} de (P_1) corresponde a uma solução de (P_2) através da relação (5.1). No que segue, u_{\hbar} e v_{\hbar} estão sempre relacionados segundo (5.1). Nosso objetivo é investigar o comportamento da família (v_{\hbar}) quando $\hbar \rightarrow 0^+$.

Teorema 5.1 *Assuma as hipóteses (V_1) , (V_4) , $(W_1) - (W_6)$. Então, para cada sequência $\hbar'_k \rightarrow 0^+$, existe uma subsequência (\hbar_k) tal que, denotando $v_k := v_{\hbar_k}$, a seguinte afirmação ocorre: para cada $k > 0$, $|v_k|$ tem um ponto de máximo local x_k , com $|v_k(x_k)| > 1$ e $x_k \rightarrow x_0$ quando $k \rightarrow +\infty$, onde x_0 é um ponto de mínimo global de V . Ademais, para qualquer $\delta > 0$ temos que*

$$v_k(x) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad k \rightarrow +\infty \quad \text{uniformemente no conjunto} \quad \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| \geq \delta\right\}.$$

Demonstração. Primeiramente observe que $(u_{\hbar'_k})$ é uma sequência minimizante para o funcional E_0 em Λ^* . De fato, pelo **Lema 4.2**

$$E_0^* \leq E_0(u_{\hbar'_k}) \leq E_{\hbar'_k}(u_{\hbar'_k}) = E_{\hbar'_k}^* \longrightarrow E_0^* \quad \text{quando } k \rightarrow +\infty. \quad (5.2)$$

Logo, podemos aplicar o **Teorema 3.2** para E_0 e $(u_{\hbar'_k})$. Então, existe uma subsequência $\hbar_n \rightarrow 0^+$ e existem $\ell \in \mathbb{N}$, $R_1, \dots, R_\ell > 0$, $(x_{\hbar_n}^1), \dots, (x_{\hbar_n}^\ell) \subset \mathbb{R}^N$, $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_\ell \in \Lambda$ tais que:

$$u_{\hbar_n}(\cdot + x_{\hbar_n}^i) \rightharpoonup \bar{u}_i \quad \text{em } H \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty; \quad (5.3)$$

$$\|\bar{u}_i\|_{L^\infty} \geq 1;$$

$$x_{\hbar_n}^i \quad \text{é um ponto de máximo local de } |u_{\hbar_n}|; \quad (5.4)$$

$$|x_{\hbar_n}^i - x_{\hbar_n}^j| \longrightarrow +\infty \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty \quad \text{para } i \neq j; \quad (5.5)$$

$$|u_{\hbar_n}(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\ell} B_{R_i}(x_{\hbar_n}^i) \right); \quad (5.6)$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} E_0(\bar{u}_i) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_0(u_{\hbar_n}); \quad (5.7)$$

$$ch(u_{\hbar_n}) = \sum_{i=1}^{\ell} ch(\bar{u}_i). \quad (5.8)$$

Desde que $ch(u_{\hbar_n}) \neq 0$, por (5.8) podemos assumir que $ch(\bar{u}_1) \neq 0$. Logo, usando (5.7) obtemos

$$E_0^* \geq \sum_{i=1}^{\ell} E_0(\bar{u}_i) \geq E_0(\bar{u}_1) \geq E_0^*$$

e daí

$$E_0(\bar{u}_1) = E_0^*. \quad (5.9)$$

Agora, seja

$$w_n(x) = u_{\hbar_n}(x + x_{\hbar_n}^1) = v_{\hbar_n}(\hbar_n x + \hbar_n x_{\hbar_n}^1).$$

Para simplificar a notação, considere $w_0 := \bar{u}_1$. De acordo com (5.3) e (5.9),

$$w_n \rightharpoonup w_0 \quad \text{em } H, \quad w_0 \in \Lambda^* \quad \text{e} \quad E_0(w_0) = E_0^*.$$

Além disso, temos que

$$w_n(x) \longrightarrow w_0(x) \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N. \quad (5.10)$$

O restante da demonstração está dividido em quatro afirmações. O argumento usado aqui é muito semelhante ao usado na demonstração do **Teorema 4.4**, por isso, algumas passagens que são idênticas serão omitidas.

Afirmção 5.2 *A menos de subsequência,*

$$\hbar_n x_{\hbar_n}^1 \longrightarrow x_0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty,$$

onde x_0 é um ponto de mínimo global de V .

Primeiramente devemos observar que a $(\hbar_n x_{\hbar_n}^1)$ é limitada, pois do contrário, levando em conta a condição de Rabinowitz (V_4) , deve ocorrer

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} V(\hbar_n x + \hbar_n x_{\hbar_n}^1) > V_0 + \rho \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

para algum $\rho > 0$. Por semi-continuidade inferior fraca,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} |\nabla w_n|^2 + \frac{1}{p} |\nabla w_n|^p \right) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} |\nabla w_0|^2 + \frac{1}{p} |\nabla w_0|^p \right) dx.$$

Além disso, o Lema de Fatou implica que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V_{\hbar_n}(x + x_{\hbar_n}^1) |w_n|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} (V_0 + \rho) |w_0|^2$$

e

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} W(w_n) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} W(w_0) dx.$$

Combinando essas desigualdades com a definição de w_n e w_0 obtemos

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_{\hbar_n}^* &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_{\hbar_n}(u_{\hbar_n}) \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} (|\nabla w_n|^2 + V_{\hbar_n}(x + x_{\hbar_n}^1) |w_n|^2) + \frac{1}{p} |\nabla w_n|^p + W(w_n) \right) dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} (|\nabla w_0|^2 + (V_0 + \rho) |w_0|^2) + \frac{1}{p} |\nabla w_0|^p + W(w_0) \right) dx \\ &= E_0(w_0) + \rho \|w_0\|_{L^\infty}^2 \end{aligned}$$

Como $w_0 \in \Lambda^*$, temos que $w_0 \neq 0$ e por conseguinte $\|w_0\|_{L^\infty} > 0$. Assim, usando o **Lema 4.2**, obtemos

$$E_0^* = \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_{\hbar_n}^* \geq E_0(w_0) + \rho \|w_0\|_{L^\infty}^2 > E_0^*,$$

o que é um absurdo, mostrando que $(\hbar_n x_{\hbar_n}^1)$ é limitada. Assim, a menos de subsequência, existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\hbar_n x_{\hbar_n}^1 \rightarrow x_0 \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Agora, vamos mostrar que x_0 é ponto de mínimo de V , isto é, vamos provar que $V(x_0) = V_0$.

Suponha, por contradição, que $V(x_0) > V_0$. Usando os mesmos argumentos acima, obtemos

$$\begin{aligned} E_0^* &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_{\hbar_n}^* \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} (|\nabla w_n|^2 + V(\hbar_n x + \hbar_n x_{\hbar_n}^1) |w_n|^2) + \frac{1}{p} |\nabla w_n|^p + W(w_n) \right) dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} (|\nabla w_0|^2 + V(x_0) |w_0|^2) + \frac{1}{p} |\nabla w_0|^p + W(w_0) \right) dx \\ &> \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} (|\nabla w_0|^2 + V_0 |w_0|^2) + \frac{1}{p} |\nabla w_0|^p + W(w_0) \right) dx \\ &= E_0(w_0) \\ &\geq E_0^*, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto a **Afirmção 5.2** deve ocorrer.

Afirmção 5.3 Para cada $\eta > 0$ e $\gamma > 0$ existe $R_\eta > \gamma$ tal que, a menos de subsequência,

$$|w_n(x)| \leq \eta \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \text{com} \quad |x| = R_\eta, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Argumentaremos por contradição, assumindo a existência de $\bar{\eta} > 0$ e $\gamma > 0$ de sorte que para cada $R > \gamma$ e para n grande

$$\exists x \in \mathbb{R}^N \quad \text{com} \quad |x| = R, \quad \text{tal que} \quad |w_n(x)| > \bar{\eta}.$$

Fixe $R_{\bar{\eta}}^1 > 0$ e tome $n_1 \in \mathbb{N}$ de maneira que

$$\forall n \geq n_1 \quad \exists x_n^1 \in \mathbb{R}^N \quad \text{com} \quad |x_n^1| = R_{\bar{\eta}}^1, \quad \text{tal que} \quad |w_n(x_n^1)| > \bar{\eta}.$$

Agora, escolha $R_{\bar{\eta}}^2 > R_{\bar{\eta}}^1 + 1$. Então, existe $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 \geq n_1$, de sorte que

$$\forall n \geq n_2 \quad \exists x_n^2 \in \mathbb{R}^N \quad \text{com} \quad |x_n^2| = R_{\bar{\eta}}^2, \quad \text{tal que} \quad |w_n(x_n^2)| > \bar{\eta}.$$

Indutivamente, para cada $k \geq 2$, podemos encontrar $R_{\bar{\eta}}^k > R_{\bar{\eta}}^{k-1} + 1$ e obter a existência de $n_k \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\forall n \geq n_k \quad \exists x_n^k \in \mathbb{R}^N \quad \text{com} \quad |x_n^k| = R_{\bar{\eta}}^k, \quad \text{tal que} \quad |w_n(x_n^k)| > \bar{\eta}.$$

De (5.2) deduzimos que a sequência $(\|\nabla u_{\bar{h}_n}\|_{L^p})$ é limitada, implicando que $(\|\nabla w_n\|_{L^p})$ também é limitada. Portanto, (w_n) é equi-uniformemente contínua. Dessa forma, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N, \quad |x - y| \leq \delta \implies |w_n(x) - w_n(y)| \leq \frac{\bar{\eta}}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Agora, tome $k \in \mathbb{N}$, $n \geq n_k$ e $x \in \mathbb{R}^N$ com $|x - x_n^k| \leq \delta$. Então,

$$|w_n(x)| \geq |w_n(x_n^k)| - |w_n(x_n^k) - w_n(x)| > \bar{\eta} - \frac{\bar{\eta}}{2} = \frac{\bar{\eta}}{2}.$$

Donde deduzimos imediatamente que

$$B_\delta(x_n^k) \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^N : |w_n(x)| > \frac{\bar{\eta}}{2} \right\} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_k.$$

Ponha $\delta' = \min\{\delta, 1\}$ e fixe $k, k' \in \mathbb{N}$ com $k > k'$. Por construção, para cada $n \geq n_k$ temos

$$|x_n^k - x_n^{k'}| \geq R_{\bar{\eta}}^k - R_{\bar{\eta}}^{k'} \geq R_{\bar{\eta}}^k - R_{\bar{\eta}}^{k-1} > 1.$$

Então, para cada $k \in \mathbb{N}$ e todo $n \geq n_k$ as bolas $\{B_{\delta'}(x_n^i)\}_{i=1, \dots, k}$ são disjuntas e

$$\bigcup_{i=1}^k B_{\delta'}(x_n^i) \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^N : |w_n(x)| > \frac{\bar{\eta}}{2} \right\}.$$

Desde que k é arbitrário, segue da inclusão acima que a sequência (w_n) não é limitada na norma L^2 , o que é uma contradição.

Afirmção 5.4 *A menos de subsequência, (w_n) verifica: para cada $\eta > 0$ existe $R_\eta > 0$ tal que, para n grande,*

$$|w_n(x)| < \eta \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{R_\eta}(0),$$

isto é, $w_n(x)$ é arbitrariamente pequeno quando $|x|$ e n são suficientemente grandes.

Usando (5.5), vamos mostrar que

$$|w_n(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \left(B_{R_1}(0) \cup \bigcup_{i=2}^{\ell} B_{R_i}(x_{\bar{h}_n}^i - x_{\bar{h}_n}^1) \right). \quad (5.11)$$

Com efeito, observe que

$$x \in \mathbb{R}^N \setminus \left(B_{R_1}(0) \cup \bigcup_{i=2}^{\ell} B_{R_i}(x_{\tilde{h}_n}^i - x_{\tilde{h}_n}^1) \right) \implies x + x_{\tilde{h}_n}^i \in \mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{i=1}^{\ell} B_{R_i}(x_{\tilde{h}_n}^i)$$

uma vez que

$$\begin{aligned} |(x + x_{\tilde{h}_n}^1) - x_{\tilde{h}_n}^1| &= |x| \geq R_1 \\ |(x + x_{\tilde{h}_n}^1) - x_{\tilde{h}_n}^i| &= |x - (x_{\tilde{h}_n}^i - x_{\tilde{h}_n}^1)| \geq R_i \quad \forall i = 2, \dots, \ell \end{aligned}$$

Portanto, por (5.6),

$$|w_n(x)| = |u_{\tilde{h}_n}(x + x_{\tilde{h}_n}^1)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \left(B_{R_1}(0) \cup \bigcup_{i=2}^{\ell} B_{R_i}(x_{\tilde{h}_n}^i - x_{\tilde{h}_n}^1) \right)$$

Ademais, por (5.5) e (5.10), obtemos

$$|w_0(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{R_1}(0).$$

Desde que $ch(w_0) = ch(w_0, B_{R_1}(0)) \neq 0$, usando o **Lema 1.1** e o **Lema 1.5**, podemos assumir que

$$ch(w_n, B_{R_1}(0)) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.12)$$

Agora, considere $\bar{\varepsilon} > 0$ satisfazendo as hipóteses (W_5) e (W_6) e tome $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$. Então, a **Afirmção 5.3** garante a existência de $R_\varepsilon^1 > R_1$ tal que, possivelmente passando a uma subsequência,

$$|w_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{(N+1)^{\frac{1}{2}}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \text{com} \quad |x| = R_\varepsilon^1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.13)$$

Agora, por (5.4), tome $\nu \in \mathbb{N}$ de sorte que

$$B_{R_\varepsilon^1}(0) \cap B_{R_i}(x_{\tilde{h}_n}^i - x_{\tilde{h}_n}^1) = \emptyset \quad \forall i \in \{2, \dots, \ell\}, \quad \forall n \geq \nu. \quad (5.14)$$

Por um argumento simples podemos provar uma versão mais forte de (5.13), isto é,

$$|w_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{R_\varepsilon^1}(0), \quad \forall n \geq \nu. \quad (5.15)$$

Com efeito, suponhamos por contradição que (5.15) não se verifique para algum $n \in \mathbb{N}$. Por continuidade, podemos encontrar $x_n \in \mathbb{R}^N \setminus B_{R_\varepsilon^1}(0)$, $\rho > 0$ e $\delta > 0$ satisfazendo

$$|w_n(x)|^2 \geq \varepsilon^2 + \delta \quad \forall x \in B_\rho(x_n).$$

Considere a função

$$\tilde{w}_n(x) = \begin{cases} w_n(x) & \text{se } x \in B_{R_\varepsilon^1}(0) \\ T_\varepsilon(w_n(x)) & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{R_\varepsilon^1}(0). \end{cases}$$

onde T_a é definido na demonstração do **Teorema 4.4**. Por (5.13) deduzimos que \tilde{w}_n é contínua sobre a esfera $\{x \in \mathbb{R}^N : |x| = R_\varepsilon^1\}$, conseqüentemente, $\tilde{w}_n \in H$. Além disso, $\tilde{w}_n \equiv w_n$ em $B_{R_\varepsilon^1}(0)$ e $|\tilde{w}_n(x)| \leq \varepsilon < 1 = |\bar{\zeta}|$ para $x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{R_\varepsilon^1}(0)$, o que implica que $\tilde{w}_n \in \Lambda$. Ainda, estes fatos implicam que $ch(\tilde{w}_n) = ch(w_n, B_{R_\varepsilon^1}(0))$.

Combinando (5.11) com (5.12) e (5.14), obtemos

$$\begin{aligned} ch(w_n, B_{R_\varepsilon^1}(0)) &= ch\left(w_n, B_{R_\varepsilon^1}(0) \cap \left(B_{R_1}(0) \cup \bigcup_{i=2}^{\ell} B_{R_i}(x_{\tilde{h}_n}^i - x_{\tilde{h}_n}^1)\right)\right) \\ &= ch\left(w_n, B_{R_\varepsilon^1}(0) \cap B_{R_1}(0)\right) \\ &= ch(w_n, B_{R_1}(0)) \end{aligned}$$

logo, $ch(\tilde{w}_n) = ch(w_n, B_{R_1}(0)) \neq 0$, isto é, $\tilde{w}_n \in \Lambda^*$.

Agora, seja

$$\tilde{u}_{\tilde{h}_n}(x) = \tilde{w}_n(x - x_{\tilde{h}_n}^1).$$

Desde que $ch(\tilde{u}_{\tilde{h}_n}) = ch(\tilde{w}_n) \neq 0$, obtemos imediatamente que $\tilde{u}_{\tilde{h}_n} \in \Lambda_{\tilde{h}_n}^*$. Como por construção $B_\rho(x_n) \subset \mathbb{R}^N \setminus B_{R_\varepsilon^1}(0)$ e $|\tilde{w}_n| \leq \varepsilon$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_{R_\varepsilon^1}(0)$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} V_{\tilde{h}_n}(x) |\tilde{u}_{\tilde{h}_n}|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} V_{\tilde{h}_n}(x + x_{\tilde{h}_n}^1) |\tilde{w}_n|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\rho(x_n)} V_{\tilde{h}_n}(x + x_{\tilde{h}_n}^1) |w_n|^2 dx + \int_{B_\rho(x_n)} V_{\tilde{h}_n}(x + x_{\tilde{h}_n}^1) |\tilde{w}_n|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\rho(x_n)} V_{\tilde{h}_n}(x + x_{\tilde{h}_n}^1) |w_n|^2 dx + \varepsilon^2 \int_{B_\rho(x_n)} V_{\tilde{h}_n}(x + x_{\tilde{h}_n}^1) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} V_{\tilde{h}_n}(x + x_{\tilde{h}_n}^1) |w_n|^2 dx - \delta \int_{B_\rho(x_n)} V_{\tilde{h}_n}(x + x_{\tilde{h}_n}^1) dx \\ &< \int_{\mathbb{R}^N} V_{\tilde{h}_n}(x + x_{\tilde{h}_n}^1) |w_n|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} V_{\tilde{h}_n}(x) |u_{\tilde{h}_n}|^2 dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V_{\tilde{h}_n}(x) |\tilde{u}_{\tilde{h}_n}|^2 dx < \int_{\mathbb{R}^N} V_{\tilde{h}_n}(x) |u_{\tilde{h}_n}|^2 dx \quad (5.16)$$

Agora, iremos mostrar que para cada $x \in \mathbb{R}^N$ e $n \in \mathbb{N}$

$$W(\tilde{u}_{\tilde{h}_n}(x)) \leq W(u_{\tilde{h}_n}(x)). \quad (5.17)$$

Para isso, tome $x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{R_\varepsilon^1}(0)$. Se $|u_{\tilde{h}_n}(x)| > \bar{\varepsilon} \geq \varepsilon$, então (5.17) segue imediatamente da hipótese (W_5) . Se $|u_{\tilde{h}_n}(x)| \leq \bar{\varepsilon}$, então, a hipótese (W_6) implica que W é não-decrescente, com respeito a norma, no conjunto $\{\xi \in \mathbb{R}^{N+1} : |\xi| \leq \bar{\varepsilon}\}$, conseqüentemente, a construção feita acima implica na validade de (5.17). Por outro lado, veja que os termos de $E_{\tilde{h}_n}$ que envolvem o gradiente decrescem quando trocamos $u_{\tilde{h}_n}$ por $\tilde{u}_{\tilde{h}_n}$. Logo, (5.16) permite concluir que

$$E_{\tilde{h}_n}^* \leq E_{\tilde{h}_n}(\tilde{u}_{\tilde{h}_n}) < E_{\tilde{h}_n}(u_{\tilde{h}_n}) = E_{\tilde{h}_n}^*,$$

o que é um absurdo. Este absurdo mostra a validade de (5.15).

Resumindo, fixado $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ arbitrariamente, existe $R_\varepsilon^1 > 0$ tal que, possivelmente passando a uma subsequência, digamos (w_n^1) ,

$$|w_n^1(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{R_\varepsilon^1}(0), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Repetindo o mesmo argumento para $\varepsilon^2 > 0$, existe $R_\varepsilon^2 > R_\varepsilon^1$ e uma subsequência (w_n^2) de (w_n^1) verificando

$$|w_n^2(x)| \leq \varepsilon^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{R_\varepsilon^2}(0), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e assim por diante para $\varepsilon^3, \varepsilon^4$, etc.

Agora, aplicamos um método de diagonal considerando

$$\hat{w}_n = w_n^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Claro que (\hat{w}_n) é uma subsequência da sequência original (w_n) . Resta provar que (\hat{w}_n) satisfaz a propriedade desejada na **Afirmção 5.4**. Fixado $\eta > 0$, tome $\mu \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon^\mu < \eta$. Por definição

$$|\hat{w}_n(x)| < \eta \quad \forall n > \mu, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{R_\varepsilon^\mu}(0),$$

mostrando a **Afirmção 5.4**.

Para simplificar a notação, continuaremos denotando por (w_n) a sequência que satisfaz a **Afirmção 5.4**.

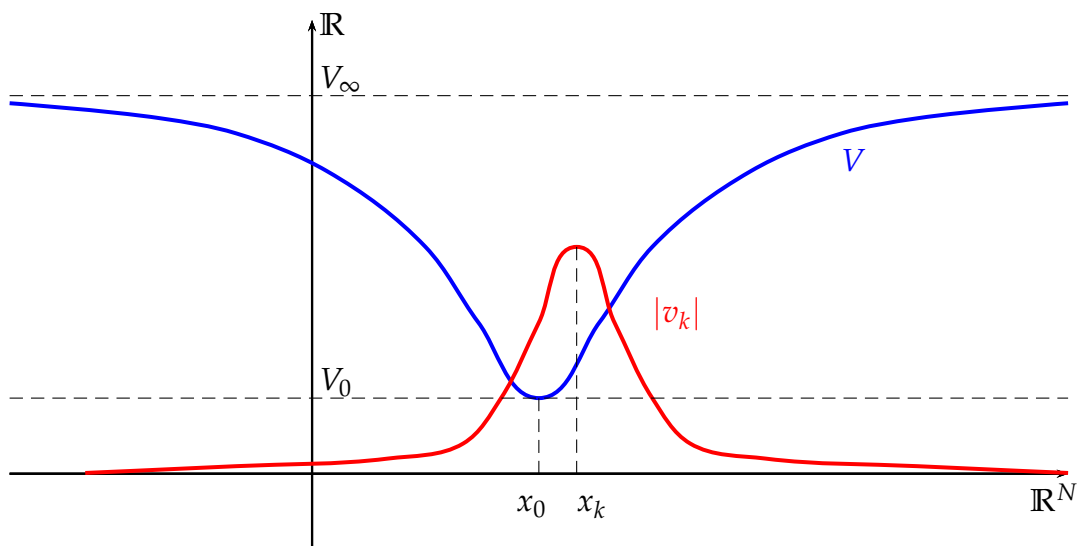
Afirmção 5.5 *Fim da demonstração.*

Como conseqüência imediata da **Afirmção 5.4**, obtemos que

$$v_n(x) = u_{\hbar_n} \left(\frac{x}{\hbar_n} \right) = w_n \left(\frac{x - x_{\hbar_n}^1}{\hbar_n} \right)$$

tende a zero uniformemente para x fora de cada vizinhança fixa de x_0 quando $n \rightarrow +\infty$. Isso conclui a demonstração. ■

A imagem seguinte ilustra o fenômeno de concentração dado pelo **Teorema 5.1**.



Apêndices

Apêndice A

$H_{\tilde{h}}$ é um Espaço de Banach Reflexivo

Neste apêndice iremos provar que o espaço de Banach $H_{\tilde{h}}$ definido constituído das funções $u \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$ tais que

$$\|u\|_{H_{\tilde{h}}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V_{\tilde{h}}(x) |u|^2) dx \right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p} < +\infty$$

é Reflexivo.

Primeiramente, considere o espaço

$$L^2\left(\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1}\right), \mu\right) = L_{\mu}^2$$

onde μ é a medida σ -finita dada por

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^N} V_{\tilde{h}}(x) \chi_A dx, \quad A \subset \mathbb{R}^N \quad \text{Lebesgue mensurável.}$$

Logo, $u \in L_{\mu}^2$ quando

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} V_{\tilde{h}}(x) |u|^2 dx < +\infty$$

e naturalmente colocamos a norma

$$\|u\|_{L_{\mu}^2} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 d\mu \right)^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} V_{\tilde{h}}(x) |u|^2 dx \right)^{1/2}$$

Veja que o espaço L_{μ}^2 tem, essencialmente, as mesmas propriedades de $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})$, por exemplo o mesmo é um espaço de Hilbert separável, e portanto reflexivo.

Vejamos que H_{\hbar} é um espaço de Banach.

Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em H_{\hbar} . Da definição da norma $\|\cdot\|_{H_{\hbar}}$ segue que (∇u_n) é de Cauchy em L^2 , (u_n) é de Cauchy em L^2_{μ} e (∇u_n) é de Cauchy em L^p . Dessa forma existem u em L^2 e \tilde{u} em L^p tais que

$$\nabla u_n \longrightarrow \nabla u \quad \text{em } L^2$$

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em } L^2_{\mu}$$

$$\nabla u_n \longrightarrow \tilde{u} \quad \text{em } L^p.$$

A menos de subsequência, temos que

$$\nabla u_n(x) \longrightarrow \nabla u(x) \quad \text{q.t.p } x \in \mathbb{R}^N$$

e

$$\nabla u_n(x) \longrightarrow \tilde{u}(x) \quad \text{q.t.p } x \in \mathbb{R}^N.$$

Portanto, $\tilde{u} = \nabla u$. E assim, concluímos que $u_n \longrightarrow u$ em H_{\hbar} e $u \in H_{\hbar}$ demonstrando que H_{\hbar} é um espaço de Banach.

Vejamos que H_{\hbar} é um espaço Reflexivo.

Dos resultados de Análise Funcional contidos em Brézis [10], podemos provar o seguinte resultado.

Lema A.1 *Sejam H e E espaços de Banach com E sendo reflexivo. Suponha que exista uma isometria linear $\varphi : H \longrightarrow E$, isto é, φ satisfaz*

(i) $\varphi(u + \lambda v) = \varphi(u) + \lambda \varphi(v)$ para todo $u, v \in H$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) $\|u\|_H = \|\varphi(u)\|_E$ para todo $u \in H$.

Então H é reflexivo.

Considere o espaço

$$E = \left(L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \right)^{N(N+1)} \times \left(L^2_{\mu}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \right)^{N+1} \times \left(L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \right)^{N(N+1)}$$

Sendo $u \in E$, $u = (a_1, \dots, a_{N(N+1)}, b_1, \dots, b_{N+1}, c_1, \dots, c_{N(N+1)})$ consideremos a seguinte norma em E :

$$\|u\|_E = \left(\sum_{i=1}^{N(N+1)} \|a_i\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \sum_{i=1}^{N+1} \|b_i\|_{L^2_{\mu}(\mathbb{R}^N)}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{N(N+1)} \|c_i\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \right)^{1/p}$$

Ademais, E é reflexivo, pois, é o produto cartesiano finito de espaços reflexivos.

Agora considere a função $\varphi : H_{\hbar} \rightarrow E$ definida por $\varphi(u) = (Du, (u_1, \dots, u_{N+1}), Du)$, onde

$$Du = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_1}{\partial x_N}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_2}{\partial x_N}, \dots, \frac{\partial u_{N+1}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_{N+1}}{\partial x_N} \right)$$

Note que

(i) φ é linear.

$$\begin{aligned} \varphi(u + \lambda v) &= (D(u + \lambda v), (u_1 + \lambda v_1, \dots, u_{N+1} + \lambda v_{N+1}), D(u + \lambda v)) \\ &= (Du + \lambda Dv, (u_1, \dots, u_{N+1}) + (\lambda v_1, \dots, \lambda v_{N+1}), Du + \lambda Dv) \\ &= (Du, (u_1, \dots, u_{N+1}), Du) + \lambda (Dv, (v_1, \dots, v_{N+1}), Dv) \\ &= \varphi(u) + \lambda \varphi(v) \end{aligned}$$

(ii) φ é isométrica.

$$\begin{aligned} \|\varphi(u)\|_E &= \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N+1} \left\| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \sum_{j=1}^{N+1} \|u_j\|_{L_{\mu}^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N+1} \left\| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N+1} \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right|^2 \right) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (V_{\hbar}(x) \sum_{j=1}^{N+1} |u_j|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N+1} \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right|^p \right) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_{\hbar}(x) |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|_{H_{\hbar}} \end{aligned}$$

De (i), (ii) e do Lema A.1 concluímos que H_{\hbar} é reflexivo.

Apêndice B

Sobre a Teoria do Grau de Brouwer

Neste Apêndice será apresentado de forma concisa os elementos da Teoria do grau de Brouwer. Para detalhes sobre o assunto, consulte a tese de doutorado do professor Berestycki [9].

B.1 Caso regular

Definição B.1 *Seja $S = \{x \in \Omega : J_f[x] = 0\}$, onde $J_f[x] = \det[f'(x)]$.*

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, $\varphi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma função de classe $C^1(\overline{\Omega})$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. O grau de Brouwer de φ em Ω relacionado a b , denotado por $\deg(\varphi, \Omega, b)$, é o número inteiro dado por

$$\deg(\varphi, \Omega, b) = \begin{cases} 0 & \text{se } b \notin \varphi(\overline{\Omega}) \\ \sum_{i=1}^N \text{sign } J_\varphi[\xi_i] & \text{se } \varphi^{-1}(b) = \{\xi_1, \dots, \xi_N\}. \end{cases}$$

onde $\text{sign} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \{-1, 1\}$ é dada por

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0, \\ -1 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Lema B.2 *Seja $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. Então, existe uma vizinhança U de φ na topologia C^1 tal que para todo $\psi \in U$, tem-se que:*

- (a) $b \notin \psi(\partial\Omega)$;
- (b) Se $x \in \psi^{-1}(b)$, temos $J_\psi(x) \neq 0$;

$$(c) \deg(\psi, \Omega, b) = \deg(\varphi, \Omega, b)$$

Corolário B.3 *Seja $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$ e $b_1, b_2 \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. Se b_1 e b_2 estiverem na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$, teremos $\deg(\varphi, \Omega, b_1) = \deg(\varphi, \Omega, b_2)$.*

B.2 Definição do Grau para $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$. Se $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, existe $x \in C_b \setminus \varphi(S)$, onde C_b é a componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$, pois do contrário teríamos $C_b \subset \varphi(S)$ e portanto, $\varphi(S)$ teria medida positiva, o que é um absurdo pelo Teorema de Sard.

Definição B.4 *O grau de φ em Ω com relação a b é definido por*

$$\deg(\varphi, \Omega, b) := \deg(\varphi, \Omega, x), \quad \text{onde } x \in C_b \setminus \varphi(S).$$

Note que o grau está bem definido, pois, se $x, y \in C_b \setminus \varphi(S)$ pelo **Corolário B.3** devemos ter $\deg(\varphi, \Omega, x) = \deg(\varphi, \Omega, y)$.

Corolário B.5 *Seja $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$ e $b \in \varphi(\partial\Omega)$. Então existe uma vizinhança U de φ em $C^2(\overline{\Omega})$ induzida pela topologia $C^1(\overline{\Omega})$ de maneira que se $\psi \in U$, temos :*

$$(i) \ b \notin \psi(\partial\Omega);$$

$$(ii) \ \deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\psi, \Omega, b).$$

Corolário B.6 *Seja $H \in C^2(\overline{\Omega} \times [0, 1], \mathbb{R}^N)$ com $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$. Então, $\deg(H(\cdot, t), \Omega, b) \equiv c$ em $[0, 1]$, onde c é uma constante.*

B.3 Definição do grau para funções contínuas

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado, $\varphi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma função contínua e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Considere $r = \text{dist}(b, \varphi(\partial\Omega))$. Sabemos do Teorema de Aproximação de Weierstrass que existe $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$, com

$$\|\varphi - \psi\|_{C(\overline{\Omega})} < \frac{r}{2}.$$

Lema B.7 *Sejam $\psi_1, \psi_2 \in C^2(\overline{\Omega})$ com $\|\varphi - \psi_i\|_{C(\overline{\Omega})} < \frac{r}{2}$, $i = 1, 2$. Então $b \notin \psi_i(\partial\Omega)$, para $i = 1, 2$ e*

$$\deg(\psi_1, \Omega, b) = \deg(\psi_2, \Omega, b).$$

Definição B.8 O grau de Brouwer de φ em Ω com relação a b é definido como sendo $\deg(\varphi, \Omega, b) := \deg(\psi, \Omega, b)$ para $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ e $\|\varphi - \psi\|_{C(\overline{\Omega})} < \frac{r}{2}$, onde $r = \text{dist}(b, \varphi(\partial\Omega))$.

A definição acima está bem posta devido ao lema último lema.

B.4 Principais propriedades do grau de Brouwer

1. Continuidade

Seja $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Então, existe uma vizinhança U de φ em $C(\overline{\Omega})$ de forma que

(a) $b \notin \psi(\partial\Omega), \forall \psi \in U;$

(b) $\deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\psi, \Omega, b), \forall \psi \in U.$

2. Invariância do grau por homotopia

Seja $H \in C(\overline{\Omega} \times [0, 1])$ com $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$. Então $\deg(H(\cdot, t), \Omega, b)$ é constante em $[0, 1]$.

3. O grau é constante em componentes conexas

Se b_1 e b_2 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$, temos

$$\deg(\varphi, \Omega, b_1) = \deg(\varphi, \Omega, b_2).$$

4. Aditividade do grau

Seja $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ e $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ com Ω_1 e Ω_2 abertos disjuntos. Seja $b \notin \varphi(\partial\Omega_1) \cup \varphi(\partial\Omega_2)$. Então,

$$\deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\varphi, \Omega_1, b) + \deg(\varphi, \Omega_2, b).$$

B.5 Conseqüências das principais propriedades

1. Normalização

$$\deg(\text{Id}, \Omega, b) = \begin{cases} 1 & \text{se } b \in \Omega \\ 0 & \text{se } b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

2. Existência de solução

Se $\deg(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_0) = b$.

3. Propriedade da Excisão

Seja $K \subset \bar{\Omega}$ um fechado com $b \notin \varphi(K)$. Então,

$$\deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\varphi, \Omega \setminus K, b).$$

Apêndice C

Alguns resultados de Análise

Teorema C.1 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ satisfazendo:*

(a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p em Ω ;

(b) *Existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em Ω ;*

Então, $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$.

Demonstração. ver [9].

■

Lema C.2 (Lema de Fatou) *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ tal que*

(a) *para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq 0$ q.t.p sobre Ω ,*

(b) $\sup \int_{\Omega} f_n(x) dx < +\infty$.

Para cada $x \in \Omega$, temos $f(x) = \liminf_n f_n(x)$. Então, $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} f(x) dx \leq \liminf_n \int_{\Omega} f_n(x) dx.$$

Demonstração. ver [9].

■

Teorema C.3 (Desigualdade de Interpolação) *Se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, então $f \in L^r(\Omega)$ para todo $r \in [p, q]$ e*

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^{\theta} \|f\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta}$$

onde $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$, $1 \leq \theta \leq 1$.

Demonstração. ver [9].

■

Teorema C.4 (Teorema de Morrey) *Seja $p > N$. Então, vale a imersão contínua*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}).$$

Além disso, para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ temos

$$|u(x) - u(y)| \leq C |x - y|^\alpha \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})} \quad q.t.p \quad x, y \in \mathbb{R}^N,$$

onde $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ e C é uma constante (que dependendo somente de N e p).

Demonstração. ver [9].

■

Referências Bibliográficas

- [1] ANDERSON, D; DERRICK, G. *Stability of time dependent particle like solutions in nonlinear field theories* , J. Math Phys. **11**, 1336-1346, (1970).
- [2] BADIALE, M.; BENCI, V.; D'APRILE, T. *Existence, multiplicity and concentration of bound states for a quasilinear elliptic field equation*, Calc. Var. **12**, 223-258, (2001).
- [3] BADIALE, M.; BENCI V.; ROLANDO S. *Solitary waves: physical aspects and mathematical results*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino Vol. 62, 2 (2004).
- [4] BENCI, V.; D'AVENIA, P.; FORTUNATO, D.; PISANI, L. *Solitons in several space dimensions: Derrick's problem and infinitely solutions*, Arch. Rational Mech. Anal. **154**, 297-324, (2000).
- [5] BENCI, V.; FORTUNATO, D.; MASIELLO, A.; PISANI, L. *Solitons and the electromagnetic field*, Mathematische Zeitschrift **232**, 73-102, (1999).
- [6] BENCI, V.; FORTUNATO, D.; PISANI, L. *Remarks on topological solitons*, Topological Methods in Nonlinear Analysis **7**, 349-367, (1996).
- [7] BENCI, V.; FORTUNATO, D.; PISANI, L. *Soliton like solutions of a Lorentz invariant equation in dimension 3*, Rev. Math. Phys. **6**, 315-344, (1998).
- [8] BENCI, V. *Quantum Phenomena in a Classical Model*, Foundations of Physics **29**, No. 1, (1999).
- [9] BERESTYCKI, H. *Methodes Topologiques et problemes aux limites non lineares*. Thèse de 3e cycle (Mathématiques pures) L'Universite de Paris VI, Paris, 1975.

- [10] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.
- [11] CASCIARO, B.; FORTUNATO, D.; FRANCAVIGLIA, M.; MASIELLO, A. *Recent Developments in General Relativity*, Springer, 2000.
- [12] CID, C.; FELMER, P. *A Note on Static Solutions of a Lorentz Invariant Equation in Dimension 3*, *Latters in Mathematical Physics* **53**, 1-10, (2000).
- [13] D'APRILE, T. *Existence and concentration of local mountain passes for a nonlinear elliptic field equation in the semi-classical limit*, *Topological Methods in Nonlinear Analysis* **17**, 239-275, (2001).
- [14] D'AVENIA, P.; PISANI, L. *Infinitely many solitary waves in three space dimensions*, *Equadiff* **10**, 27-31, (2001).
- [15] DERRICK, G. H. *Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles*, *Jornal of mathematical Physics* **5**, 1252-1254, (1964).
- [16] ENZ, U. *Discrete mass, elementary length and a topological invariant as a consequence of a relativistic invariant variational principle.*, *Physical Review* **131**, 1932-1934, (1963).
- [17] KICHENASSAMY, S. *Nonlinear wave equations*, Marcel Dekker Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1994.
- [18] LEMOS, N. A. *Mecânica analítica*, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004.
- [19] MUSSO, M. *New nonlinear equation with soliton-like solution*, *Latters in Mathematical Physics* **57**, 161-173, (2001).
- [20] PISANI, L. *Existence and multiplicity of solitary waves in several space dimensions*, *Nonlinear Analysis* **47**, 6029-6040, (2001).
- [21] PISANI, L. *Infinitely Many Solutions for Derrick's Equation*, *Advanced Nonlinear Studies* **2**, 71-80, (2002).
- [22] POHOZAEV, S. I. *Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$* , *Sev. Math. Dolk.* **5**, 1408-1411, (1965).

-
- [23] RAJARAMAN, R. *Solitons and Instantons*, North-Holland, Amsterdam, 1998.
- [24] WHITHAM, G. B. *Linear and nonlinerar waves*, Wiley, New York, 1974.