Resumo

Neste trabalho estudamos o processo de risco a tempo discreto, considerado modelo clássico na teoria do risco, com variantes propostas por Jun Cai e David Dickson(2004). Serão incluídas taxas de juros, as quais seguem uma Cadeia de Markov, e seus efeitos, em relação à probabilidade de ruína, serão analisados. O conhecido limitante superior proposto por Lundberg, para essa probabilidade, fica reduzido em virtude dessa nova abordagem e a desigualdade clássica é generalizada.

Palavras Chaves: esperança condicional, probabilidade de ruína, desigualdade de Lundberg, processo de risco, taxas de juros, cadeia de Markov.

Abstract

In this work we study discrete time risk process, considered classical model, with variants proposed by Jun Cai and David Dickson(2004). Rates of interest, which follows a Markov chain, will be introduced and their effect on the ruin probabilities will be analysed. Generalized Lundberg inequalities will be obtained and shown how the classical bounds for the ruin probability can be derived.

key-words: conditional expectation, ruin probability, Lundberg inequality, risk processes, rates of interest, chain Markov.

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Estimativas para a Probabilidade de Ruína em um Modelo de Risco com Taxa de Juros Markoviana

por

Antonio Luiz Soares Santos †

sob orientação do

Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro do Governo do Estado do Piauí e da Faculdade Santo Agostinho de Teresina

Estimativas para a Probabilidade de Ruína em um Modelo de Risco com Taxas de Juros Markoviana

por

Antonio Luiz Soares Santos

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Linha de Pesquisa: Probabilidade e Estatística

Aprovada por:

Prof^{a}. Dr^{a}. Viviane Simioli Medeiros Campos

Prof. Dr. Antonio José da Silva

Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

fevereiro/2007

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por me dar forças para concluir essa tarefa. Agradeço também a meus pais, que sempre incentivaram meu progresso, a meus irmãos, a meus filhos, os quais sofreram com minha ausência, e a minha esposa Tânia, que foi uma guerreira nesse momento da nossa vida. Sem o apoio deles, esse trabalho, com probabilidade um, não seria concluído.

A meu orientador, professor André Gustavo Campos Pereira, pelas brilhantes aulas e pela orientação dedicada e paciente durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores Antonio José e Viviane Simioli, pelas sugestões de melhoria e correções, bem como por terem aceito participar da banca.

Aos colegas do mestrado em matemática da UFCG, principalmente aos de minha turma, pelos incentivos e ensinamentos compartilhados.

Aos professores de matemática da UFCG e aos funcionários do departamento de matemática e estatística, pela disposição em ajudar.

Aos amigos professores dos Departamentos de Matemática e de Informática e Estatística da UFPI, pela motivação; em particular, aos professores João Xavier e Marcondes Clark, pela minha recomendação ao mestrado e ao professor Paulo Sérgio pela orientação no Latex.

Aos professores do curso de Ciências Contábeis da Faculdade Santo Agostinho; em particular, ao professor Josimar Alcântara, pelo apoio contínuo.

A todos os meus amigos e colegas que torceram pelo meu sucesso nessa empreitada.

Finalmente, porém não menos importante, ao Governo do Estado do Piauí, na pessoa do secretário da fazenda Antonio Neto, e à direção da Faculdade Santo Agostinho, na pessoa da diretora Iara Lira, por acreditaram neste sonho e pelo fundamental apoio financeiro.

Dedicatória

Dedico esta dissertação a meus pais: José Luiz dos Santos e Raimunda Soares Furtado Santos(Dona Dulce); a meus irmãos: Francisca Elvira, Carla, Luiz Carlos, Isabela e Marcello; a meus filhos: Alysson, Ramon e Vítor, e a minha esposa Tânia.

Conteúdo

Introdução

Em Bowers et al. (1997), lemos:

Cada um de nós planeja e tem expectativas sobre os caminhos que nossa vida seguirá. Contudo, a história ensina que os planos traçados, quando levados a termo, nem sempre acontecem como planejados e algumas vezes expectativas não são concretizadas. Ocasionalmente planos são frustrados porque são construídos sobre bases não realísticas. Em outras situações, acontecimentos inesperados interferem. O Seguro existe para proteger contra reveses financeiros sérios que resultam da intromissão de eventos aleatórios sobre os planos dos indivíduos.

Um sistema de seguros é um mecanismo de redução dos impactos financeiros adversos devido a eventos aleatórios que impedem a realização de expectativas razoáveis.

A justificativa econômica para um sistema de seguros é que ele contribue para a felicidade geral, pela melhoria das perpectivas de que planos não serão frustrados por eventos aleatórios. Tais sistemas podem também aumentar a produção total, pelo encorajamento de indivíduos e corporações a embarcar em aventuras onde a possibilidade de grandes perdas inibiriam tais projetos na ausência de seguro. O desenvolvimento do seguro marítmo, para reduzir o impacto financeiro dos perigos do mar, é um exemplo desse ponto. O comércio internacional que permitiu especializações e produções mais eficientes e ainda uma atividade comercial mutuamente vantajosa, poderia ser muito arriscada para sócios comerciais potenciais sem um sistema de seguro para cobrir possíveis perdas no mar.

Existem basicamente dois tipos de seguros, a saber: Os de vida (Seguro que consagra garantias cuja execução depende da duração da vida humana) e os de não-vida.

Trataremos neste trabalho apenas dos seguros de não-vida que é onde a teoria do risco se aplica.

Poderíamos simplificar o processo de seguros da seguinte maneira: Temos uma empresa seguradora (também chamada de segurador) e seus clientes (também chamados de segurados). A empresa seguradora cobra um prêmio (preço pago pelo tomador de seguro à empresa de seguros pela contratação do seguro) ao cliente para segurar um bem (automóvel, casa etc). Caso esse bem sofra algum dano devido a eventos aleatórios (tais eventos são descritos no contrato firmado entre segurador e segurado) o segurador indeniza (valor pago por uma empresa de seguros para reparar ou ressarcir um dano resultante de um sinistro) ao segurado após uma análise dos danos sofridos (perda total, parcial, etc).

A palavra sinistro utilizada anteriormente significa - Evento ou série de eventos resultantes de uma mesma causa susceptível de fazer funcionar as garantias de um ou mais contratos de seguro.

Com esses dados uma seguradora poderia modelar a quantia de dinheiro que ela terá em caixa no tempo t por

Dinheiro em caixa (t)= capital inicial + Dinheiro recebido em prêmios (t) - Dinheiro pago em indenizações (t)

Utilizando estas idéias, em 1903, Filip Lundberg desenvolveu em sua tese de doutorado um modelo para descrever a equação acima com mais precisão, conhecido como modelo clássico de risco. No seu modelo ele assumiu que o processo de chegadas de indenizações é um processo de Poisson homogêneo, as quantias de indenizações são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas(i.i.d.), independentes dos tempos de ocorrências das indenizações, e a entradas dos prêmios é linear no tempo. Lundberg utilizou o Processo de Poisson $\{N_t\}_{t\geq 0}$ para modelar o número de indenizações que chegam à seguradora até o tempo t, obtendo o seguinte modelo, o qual é conhecido como modelo de risco clássico

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \tag{1}$$

onde:

- u representa o capital inicial.

- c representa a taxa de prêmio por unidade de tempo que entra na seguradora.

- N_t representa a quantidade de pedidos de indenização que chegam à seguradora até o tempo t.

- $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de v.a.'s que representam os valores das indenizações pagas pela seguradora.

No estudo desse modelo, procura-se responder a seguinte pergunta: Qual a probabilidade do capital da seguradora ficar negativo em algum instante, em outras palavras, deseja-se calcular

$$P(U(t) < 0 \text{ para algum } t). \tag{2}$$

Tal probabilidade ficou conhecida como a probabilidade de ruína. Apenas em poucos casos é possível conseguir uma expressão para essa probabilidade. Devido a esta dificuldade o que se procura são estimativas precisas para tal probabilidade.

Utilizando o modelo (1) Lundberg apresentou uma desigualdade, que ficou conhecida como desigualdade de Lundberg, a qual fornece um limitante superior para a probablididade de ruína, assumindo a existência de um certo coeficiente de ajuste.

Muitos autores trabalharam com o modelo clássico de Lundberg tentando melhorá-lo no sentido de o tornar mais próximo da realidade possível. Dentre aqueles que trabalham com desigualdades para probabilidade de ruína, em modelos de risco mais gerais podemos citar, Yang [27] que discutiu um caso especial, considerando as taxas de juros constantes idênticas. Cai [3] estudou um modelo com taxas de juros *i.i.d.*; e Cai [4], um modelo dependente para taxas de juros, no qual as taxas são assumidas ter uma estrutura AR(1). Modelos de risco a tempo discreto foi considerado por Yang e Zhang [28]. Em relação a fórmulas assintóticas para a probabilidade de ruína, Tang e Tsitsiashvili [23] obtiveram fórmulas assintóticas para a probabilidade de ruína em tempo finito, considerando as taxas de juros variáveis aleatórias *i.i.d.* e a distribuição de perda G sendo de cauda pesada. Além disso, probabilidade de ruína em modelos de risco a tempo discreto mais geral foi estudada por Nyrhinen [18] e [19].

Neste trabalho, estudamos o modelo de risco apresentado por Jun Cai e David C. M. Dickson [2], o qual estende os modelos apresentados em Cai (2002a)[3] e (2002b) [4].

No capítulo 1 apresentamos uma revisão de alguns tópicos da teoria das probabilidades que serão repetidamente utilizados durante todo esse trabalho, bem como aproveitamos para lembrar os modelos estudados em Cai [3] e [4], e o resultado obtido nestes trabalhos.

No capítulo 2 apresentamos o modelo de risco básico a tempo discreto, com juros oriundos de possíveis investimentos modelados por uma Cadeia de Markov. Em símbolos

$$U_k = U_{k-1}(1 + I_k) - Z_k,\ k = 1, 2, ... \tag{3}$$

Onde $U_0 = u \geq 0$ é uma constante que representa o capital inicial, $\{Z_k,\ k = 1, 2, ...\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas ($i.i.d.$), com função de distribuição comum $G(z) = Pr(Z_1 \leq z)$, e $\{I_k,\ k = 0, 1, ...\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias e independentes de $\{Z_k,\ k = 1, 2, ...\}$. No contexto de seguros de risco, Z_k denota a perda líquida no período k, isto é, do tempo $k-1$ ao tempo k. A perda líquida é calculada no final de cada período e é igual ao total de indenizações pagas menos o total de prêmios recebidos no período k. Assim, $Z_k = Y_k - X_k$, com $\{Y_k,\ k = 1, 2, ...\}$ sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas ($i.i.d.$) independentes de $\{X_k,\ k = 1, 2, ...\}$, que também é uma sequência de variáveis aleatórias $i.i.d.$. Além disso, I_k denota a taxa de juros no período k. Assim, U_K dado por (3) é o capital de uma seguradora, com capital inicial u, ao final do período k. Por outro lado, referimo-nos à distribuição G como uma distribuição de perda.

Com este modelo em mãos adotamos duas abordagens com o objetivo de conseguir uma estimativa para a probabilidade de ruína, a saber: Indutiva e por Martingales. Na abordagem indutiva mostramos que se $R_0 > 0$ uma constante satisfazendo $E[e^{R_0 Z_1}] = 1$. Então,

$$\psi(u, i_s) \leq \beta_0 E\big(e^{-R_0 u(1+I_1)} \mid I_0 = i_s\big),\quad u \geq 0,$$

onde

$$\beta_0^{-1} = \inf_{t\geq 0} \frac{\int_t^{+\infty} e^{R_0 z} dG(z)}{e^{R_0 t}\overline{G}(t)}$$

Onde $\psi(u, i_s)$ representa a probabilidade de ruína se a taxa inicial de juros é i_s.

Na abordagem martingales mostramos que se que $E(Z_1) < 0$, que $R_0 > 0$ é a constante satisfazendo $E[e^{R_0 Z_1}] = 1$, e se existir $\rho_s > 0$ satisfazendo

$$E\left(e^{\rho_s Z_1 (1+I_1)^{-1}} \mid I_0 = i_s\right) = 1, \quad s = 0, 1, \ldots, N$$

Então,

$$R_1 = \min_{0\leq\ s\ \leq N} \{\rho_s\} \geq R_0$$

e, para todo $s = 0, 1, \ldots, N$,

$$E\left(e^{R_1 Z_1 (1+I_1)^{-1}} \mid I_0 = i_s\right) \leq 1$$

e

$$\psi(u, i_s) \leq e^{-R_1 u}, \quad u \geq 0.$$

Finalizamos o trabalho com o capítulo 3 onde apresentamos dois exemplos numéricos para ilustrar as estimativas da probabilidade da ruína obtidas no capítulo 2.

No primeiro exemplo supomos que Y_1 tem distribuição exponencial com parâmetro $\alpha = 1$ de modo que $E(Y_1) = 1$ e $var(Y_1) = 1$, e, no segundo exemplo, supomos que Y_1 tem distribuição gama com cada parâmetro igual a $\frac{1}{2}$ de modo que $E(Y_1) = 1$ e $var(Y_1) = 2$. Além disso, o prêmio anual em ambos os exemplos é $1, 1$, a saber existe uma carga de segurança de 10%. Assim, $Z_k = Y_k - 1, 1, k = 1, 2, \ldots$. Consideramos um modelo de juros com três possíveis taxas: $i_0 = 6\%, i_1 = 8\%$ e $i_2 = 10\%$. Seja $P = \{P_{st}\}$ dada por

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0.15 & 0.7 & 0.15 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Em ambos os exemplos chegamos que o limitante superior obtido utilizando a abordagem indutiva é mais refinado do que o limitante obtido pela abordagem martingale.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

Neste capítulo relembramos conceitos e resultados da teoria de probabilidade que utilizamos ao longo deste trabalho. Na seção 1.2 tratamos dos resultados referentes a integração de v.a.'s e de esperança condicional, todos os detalhes estão explicitados em Chung, [15] ou Karlin e Taylor, [16]. Na seção 1.3 tratamos dos conceitos e resultados sobre cadeias de Markov, e os detalhes podem ser encontrados em Isaacson e Madsen, [13] ou Ross, [20]. Na seção 1.4, tratamos de martingales, sub e supermartingales e o teorema da parada opcional , os detalhes ver Ross, [20], Ferreira, [9] ou Chung, [15] . Na seção 1.5 falamos um pouco do que foi feito no artigo de Cai,[4], que foi detalhado no trabalho de Grisi, [12].

1.2 Esperança Condicional

Começamos esta seção relembrando a probabilidade induzida por uma variável aleatória (v.a.). Para isto considere $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $X : \Omega \to \mathbb{R}$, uma v.a..

Teorema 1.1 *Cada variável aleatória sobre o espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *induz um espaço de probabilidade* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ *por meio da seguinte correspondência:*

$$\forall B \in \mathcal{B},\ \mu(B) = P\left\{X^{-1}(B)\right\} = P(X \in B) \tag{1.1}$$

Note que μ é uma medida de probabilidade, chamada a "medida de distribuição de probabilidade" de X, e sua função de distribuição F será chamada função distribuição de X. Especificamente, F é dada por:

$F(x) = \mu((-\infty, x]) = P(X \leq x)$.

Teorema 1.2 *Se X é uma v.a., f é uma função Borel mensurável sobre* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, *então $f(X)$ é uma variável aleatória.*

Esse resultado vale também para mais de uma variável aleatória.

Teorema 1.3 *Seja X uma variável aleatória sobre o espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *e* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ *o espaço de probabilidade induzido por essa v.a., de acordo com o* ***teorema 1.1****. Seja, ainda, f uma função Borel mensurável. Então, temos:*

$$\int_{\Omega} f(X(w))P(dw) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x) \tag{1.2}$$

Desde que um dos lados exista. Usamos também a notação $\mu(dx) = P_X(dx) = dP_X(x) = dF_X(x)$.

Teorema 1.4 *Seja (X, Y) um vetor aleatório sobre o espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *e* $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2, \mu^2)$ *o espaço de probabilidade induzido por esse vetor. Seja ainda f uma função de duas variáveis Borel mensurável. Então,*

$$\int_{\Omega} f(X(w), Y(w))P(dw) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\mu^2(dx, dy). \tag{1.3}$$

Desde que um dos lados exista. Observe novamente que em nossa notação $\mu^2(dx, dy) = P_{X,Y}(dx, dy) = dP_{X,Y}(x, y) = dF_{X,Y}(x, y)$.

Como consequência do **teorema 1.3**, temos:

Se μ_X e F_X denotam, respectivamente, a medida de probabilidade e a função distribuição induzida por X, então

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x\mu_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} xP_X(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} xdF_X(x);$$

e mais geralmente

$$E(f(X)) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)P_X(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF_X(x),$$

desde que a esperança exista.

Definição 1.1 *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *um espaço de probabilidade. Seja, ainda,* $A \in \mathcal{F}$*, tal que* $P(A) > 0$*. Definimos* $P_A(E) = P(E \mid A)$*, sobre* $\mathcal{F}$*, da seguinte forma:*

$$P_A(E) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)} \tag{1.4}$$

Note que $P_A(\bullet) : \mathcal{F} \to [0, 1]$ é uma medida de probabilidade ou, simplesmente, uma probabilidade.

Definição 1.2 *A esperança condicional relativa a* $A \in \mathcal{F}$ *de uma variável aleatória integrável* Y *é a integral dessa variável aleatória com respeito à medida de probabilidade definida acima.*

Assim,

$$E_A(Y) = \int_\Omega Y(w) P_A(dw) = \frac{1}{P(A)} \int_A Y(w) P(dw)$$

(a) Se X e Y são v.a.'s discretas, então para todo y tal que $P(Y = y) > 0$, definimos

$$P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

como a função de probabilidade condicional de X dado $Y = y$. Daí, a função de distribuição condicional de X dado $Y = y$ será

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x \mid Y = y) = \sum_{z \leq x} P(X = z \mid Y = y), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dessa forma, a Esperança Condicional de X dado $Y = y$ é definida como

$$E(X|Y = y) = \int_{\mathbb{R}} x dF_{X|Y}(x|y) = \sum_x x P(X = x|Y = y).$$

(b) Se X e Y forem contínuas, com densidade conjunta $f(x, y)$, definimos, para cada y

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, & \text{para } y \text{ tal que } f_Y(y) > 0 \\ 0, & \text{para } y \text{ tal que } f_Y(y) = 0 \end{cases}$$

como sendo a função densidade condicional de X dado $Y = y$. Da mesma forma, a função de distribuição condicional de X dado $Y = y$ segue como

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(z|y) dz, \forall x \in \mathbb{R}.$$

A Esperança Condicional de X dado $Y = y$, nesse caso, será

$$E(X|Y=y)=\int_{\mathbb{R}} xdF_{X|Y}(x|y)=\int_{\mathbb{R}} xf_{X|Y}(x|y)dx.$$

Observe que, para cada valor de Y, o valor da esperança condicional muda, logo podemos interpretar $E(X|Y=y)$ como uma função de Y, ou seja, $E(X|Y=y)=\varphi(y)$. Assim, $E(X|Y=y)$ é uma variável aleatória e $E(X|Y)=\varphi(Y)$ é chamada esperança condicional de X dado Y.

Definição 1.3 *Seja Y variável aleatória no espaço de probabilidade $(\Omega,\mathcal{F},P)$ e $\mathcal{B}(\mathbb{R})=\mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel. Definimos a σ-álgebra gerada por Y, denotada por $\sigma(Y)$, como segue*

$$\sigma(Y)=Y^{-1}(\mathcal{B})=\{A\in\mathcal{F};\ A=[Y\in B], \textit{para algum } B\in\mathcal{B}\}$$

Note que $\sigma(Y)\subset\mathcal{F}$, logo é uma sub-$\sigma$-álgebra, e sendo $E(X|Y)=\varphi(Y)$, onde φ é uma função mensurável a Borel, então $E(X|Y)$ é mensurável em relação à σ-álgebra gerada por Y, ou seja, é $\sigma(Y)$-mensurável.

Definição 1.4 *Seja X uma variável aleatória sobre $(\Omega,\mathcal{F},P)$ com $E|X|<\infty$, $\mathcal{G}$ uma σ-álgebra tal que $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$, ou seja, $\mathcal{G}$ é uma sub-σ-álgebra. Definimos a esperança condicional de X dado $\mathcal{G}$ como sendo a variável aleatória $E(X|\mathcal{G})$ tal que*

(i) $E(X|\mathcal{G})$ é $\mathcal{G}$-mensurável;

(ii) $\forall A\in\mathcal{G}$, $\displaystyle\int_A E(X|\mathcal{G})dP=\int_A XdP$.

Algumas propriedades importantes são apresentadas a seguir, considerando-se que X e Y são variáveis aleatórias em $(\Omega,\mathcal{F},P)$, com $E|X|<\infty$, e $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$:

(a) Se X é $\mathcal{G}$-mensurável, então $E(X|\mathcal{G})=X$;

(b) Se $\sigma(X)\subset\sigma(Y)$, então $E(X|\sigma(Y))=X$;

(c) $E(E(X|\mathcal{G}))=E(X)$;

(d) Sejam $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ σ-álgebras tais que $\mathcal{G}_1\subset\mathcal{G}_2\subset\mathcal{F}$, então

$E(E(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = E(X|\mathcal{G}_1) = E(E(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1);$

(e) Seja Z variável aleatória $\mathcal{G}$-mensurável e $E|XZ| < \infty$, então

$E(XZ|\mathcal{G}) = ZE(X|\mathcal{G})$

(f) Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, então $E(X|Y) = E(X)$

Definição 1.5 *Sejam $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, e $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel. Definimos a σ-álgebra gerada por $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, denotada por $\sigma(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, da seguinte forma*

$\sigma(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \{A \in \mathcal{F};\ A = [Y_1 \in B_1, \ldots, Y_n \in B_n],\ \textit{onde}\ B_i \in \mathcal{B},\ i = 1, 2, \ldots,\ n\ \}$

Dessa maneira, se X é uma variável aleatória em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, com $E|X| < \infty$, temos

$E(X|\sigma(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)) = E(X|Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, onde $E(X|Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \varphi(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ e φ é uma função $\mathcal{B}^n$-mensurável, ou seja, $\varphi^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}^n$ tal que

$\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = E(X|Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n) = E(X|Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)I_{[Y_1=y_1,\ldots,Y_n=y_n]}$, onde I_A é a função indicadora do conjunto A. Assim, caso as variáveis sejam discretas, temos:

$E(X|Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n) = \sum_{x \in D} xP(X = x|Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n)$, onde D é o conjunto de todos os valores possíveis para X.

Por outro lado, se as variáveis forem contínuas, temos:

$E(X|Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y_1,\ldots,Y_n}(x|y_1, \ldots, y_n)dx$, onde

$$f_{X|Y_1,\ldots,Y_n}(x|y_1, \ldots, y_n) = \frac{f_{X,Y_1,\ldots,Y_n}(x, y_1, \ldots, y_n)}{f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n)}.$$

Note que, pela propriedade (c),

$$E(X) = E(E(X|Y_1, \ldots, Y_n)) = \int_{\mathbb{R}^n} E(X|Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n) dF_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n).$$

Note, também, que se $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é espaço de probabilidade, $A \in \mathcal{F}$ evento arbitrário, e Y é v.a. nesse espaço, então:

$$E(I_A) = \int_\Omega I_A dP = \int_{\Omega \cap A} dP = \int_A dP = P(A).$$

Daí, se $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, então

$E(I_A|\mathcal{G}) = P(A|\mathcal{G})$, $\forall A \in \mathcal{F}$. Assim, segue que

$$P(A) = E(I_A) = E(E(I_A|Y)) = \int_{\mathbb{R}} E(I_A|Y = y) dF_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} P(A|Y = y) dF_Y(y).$$

De forma mais geral, temos:

$$P(A) = \int_{\mathbb{R}^n} P(A|Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n) dF_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n), \text{ onde}$$

$$P(A|Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n) = E(I_A|Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n).$$

1.3 Processo Estocástico e Cadeias de Markov

Nesta seção temos como objetivo recordar os resultados e definições relativos a cadeias de Markov, e para tanto começamos definindo,

Definição 1.6 *Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias* $\{X(t),\ t \in T\}$ *definidas sobre um mesmo espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Isto é, para cada* $t \in T$, $X(t) = X_t$ *é uma variável aleatória.*

Definição 1.7 *O conjunto* S *de todos os distintos valores assumidos por um processo estocástico é chamado espaço de estados do processo. Se* S *é enumerável , dizemos que o processo é uma CADEIA.*

Podemos interpretar t como o tempo e dizemos que X_t é o estado do processo no tempo t. Se o conjunto de índices T for um conjunto enumerável, dizemos que o processo é a tempo discreto, se não-enumerável; o processo é dito a tempo contínuo.

Um processo estocástico pode ser visto como uma função de duas variáveis, $X_t(w) = X(t,w)$. Dessa forma, para t fixo, a função é uma variável aleatória, e para w fixado, a função de t resultante, de valor real, é chamada um caminho amostral ou trajetória amostral.

Definição 1.8 *Um processo estocástico* $\{X_k\}, k = 1, 2, \ldots$ *com espaço de estados* $S = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *é dito satisfazer a propriedade de Markov se, para todo* n*, e todo estado* $i_1, i_2, \ldots, i_n$ *em* S*, temos*

$$P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \ldots, X_1 = i_1) = P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}) \tag{1.5}$$

Definição 1.9 *Um processo a tempo discreto* $\{X_k\}, k = 0, 1, 2, \ldots$*, com espaço de estados enumerável, que satisfaz a propriedade de Markov é chamado Cadeia de Markov.*

Definição 1.10 *Uma Cadeia de Markov é homogênea ou estacionária no tempo se a probabilidade de ir de um estado a outro é independente do tempo em que o passo é dado. Isto é, para todos os estados* $i, j \in S$*, temos:*

$$P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = P(X_{n+k} = j \mid X_{n+k-1} = i) \tag{1.6}$$

para $k = -(n-1), -(n-2), \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$.

Por outro lado, se a condição de estacionariedade falha, então a Cadeia é dita não-homogênea ou não-estacionária.

Vamos considerar que no tempo $n-1$ estejamos no estado i. Assim, denotaremos a probabilidade de, no tempo n estarmos no estado j, sabendo que no tempo $n-1$ estamos no estado i, por $P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = P_{ij}^{(n-1,n)}$. Note que estamos definindo a probabilidade de ir do estado i ao estado j em apenas um passo, pois é do tempo $n-1$ ao tempo n. Caso a cadeia seja estacionária, então $P_{ij}^{(n-1,n)} = P_{ij}^{(n+k-1,n+k)}$, para todo $k = -(n-1), -(n-2), \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$, ou seja, $P_{ij}^{(n-1,n)}$ não depende do tempo, no sentido de ser o mesmo valor, para todo $n = 1, 2, \ldots$ selecionado. Portanto, denotamos:

$$P_{ij}^{(n-1,n)} = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = P_{ij}$$

Essas probabilidades condicionais são chamadas probabilidades de transição da cadeia.

Consideremos, agora, $\{X_k\}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Para essa cadeia existem n^2 probabilidades de transição $\{P_{ij}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j =$

$1, 2, \ldots, n$. A maneira mais conveniente de recordar esses valores é em forma de uma matriz $P = \{P_{ij};\ i, j = 1, 2, \ldots, n\}$, na qual P_{ij} é a probabilidade de irmos do estado i ao estado j em apenas um passo. Explicitamente temos:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \ldots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \ldots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

Note que toda matriz de transição tem as seguintes propriedades:

(i) todas as entradas são não-negativas, pois são probabilidades; e

(ii) a soma das entradas em cada linha é sempre um.

1.4 Martingales

Nessa seção veremos alguns resultados básicos sobre martingales, que também serão usados nos capítulos seguintes.

Definição 1.11 *Um processo estocástico $\{Z_n, n \geq 1\}$ é dito ser um martingale se $E(|Z_n|) < \infty$, para todo n, e*

$$E(Z_{n+1} \mid Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) = Z_n \tag{1.7}$$

Um martingale é uma versão generalizada de um jogo justo. Se interpretamos Z_n como a fortuna de um jogador após o n-ésimo jogo, então a definição acima diz que a fortuna esperada depois do (n+1)-ésimo jogo é igual a sua fortuna após o n-ésimo jogo, não importando o que tenha ocorrido previamente. Assim, aplicando esperança a ambos os membros da equação (1.7), temos:

$E\big(E(Z_{n+1} \mid Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)\big) = E(Z_n)$. Daí,

$E(Z_{n+1}) = E(Z_n)$, e logo $E(Z_n) = E(Z_1)$, para todo n.

Definição 1.12 *Seja $\{Z_n, n \geq 0\}$ um processo estocástico, com as variáveis aleatórias sobre o mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, e $\{A_n\}_{n\geq 0}$ uma sequência crescente de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$, tais que Z_n é A_n-mensurável. Dizemos que $\{Z_n, n \geq 0\}$ é submartingale se $E(Z_{n+1} \mid A_n) \geq Z_n$ e supermartingale se $E(Z_{n+1} \mid A_n) \leq Z_n$, $\forall n \geq 0$.*

No caso em que $A_n = \sigma(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n)$, a σ-álgebra gerada por $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$, costuma-se dizer simplesmente que $\{Z_n\}$ é um martingale, submartingale ou supermartingale.

Um resultado importante é que a propriedade de (sub ou super) martingale não é alterada se considerarmos uma amostragem do processo somente sobre uma sequência crescente de tempos de parada limitados. Esse resultado é conhecido como o Teorema da Amostragem Opcional (limitada) e será apresentado a seguir. Para isso, lembremos que um tempo de parada, ou uma variável opcional relativo a uma sequência crescente de σ-álgebras $\{A_n\}_{n\geq 0}$, é uma variável aleatória T tomando valores em $\{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{+\infty\}$, tal que $\{T = n\} \in A_n$, $\forall n \geq 0$. Se $P(T < \infty) = 1$, dizemos que T é um tempo de parada finito, e se existe $N \in \mathbb{R}$ tal que $P(T \leq N) = 1$, então T é um tempo de parada limitado. Mais ainda, denotamos por $\mathcal{A}_T$ a σ-álgebra formada por todos os eventos A tais que $A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{A}_n$, $\forall n \geq 0$.

Teorema 1.5 *Seja $\{X_n, \mathcal{A}_n\}_{n\geq 0}$ um supermartingale. Se T é um tempo de parada limitado(relativo a $\mathcal{A}_n$), e X_T^+ é a parte positiva de X_T, então:*
$E(X_T^+) < \infty$ e $E(X_T \mid \mathcal{A}_0) \leq X_0$. Em particular, $E(X_T) \leq E(X_0)$.

Lema 1.1 *Seja $\{X_n, \mathcal{A}_n\}$ uma supermartingale e T um tempo de parada. Então $\{Y_n, \mathcal{A}_n\}$ definido por $Y_n = X_{T\wedge n}$ é um supermartingale, onde $T \wedge n = min\{T, n\}$.*

1.5 Processo de Risco a Tempo Discreto

Nesta seção, descrevemos um modelo clássico da Teoria da Ruína denominado Processo de Reserva de Risco a Tempo Discreto, estudado e detalhado em Grisi, [12]. Nesse modelo, associam-se dois processos independentes $\{X_k\}$ e $\{Y_k\}$, formados por v.a's $(i.i.d)$, não negativas, onde no primeiro, cada X_k representa o total dos prêmios recebidos por uma seguradora entre os tempos $k-1$ e k; e no segundo, cada Y_k, o total das indenizações pagas por ela no mesmo intervalo de tempo.

Sendo u o capital inicial dessa seguradora, podemos expressar esse processo da seguinte forma:

$$R_n = u + \sum_{k=1}^{n}(X_k - Y_k),\ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.8}$$

com $R_0 = u$, onde R_n representa o saldo de capital da seguradora no tempo n, ou seja, no final do período de $n-1$ a n.

Recursivamente, podemos escrevê-lo como segue:

$$\begin{cases} R_n = R_{n-1} + X_n - Y_n, \\ R_0 = u. \end{cases}$$

Dizemos que ocorre a ruína da seguradora quando o processo (1.8) atinge valores negativos. Com isso, o tempo de ruína, denotado por $\tau(u)$, será o primeiro instante onde o processo de risco atinge valores negativos, ou seja,

$$\tau(u) = min\,\{n \geq 0;\ R_n < 0\ \}.$$

Assim, definimos a probabilidade de ruína da seguradora, denotada por $\psi(u)$, no modelo (1.8), por

$$\psi(u) = P(\tau(u)\ <\ \infty) = P(R_n < 0,\ \text{para algum}\ n < \infty) = P(\bigcup_{k=1}^{\infty}[R_k < 0]).$$

Um resultado bastante expressivo da Teoria da Ruína é a renomada desigualdade de Lundberg, a qual define um limitante superior para a probabilidade de ruína. Ela será apresentada nesta seção pelo teorema seguinte, cuja demonstração será omitida:

Teorema 1.6 *Seja R_n o processo de reserva de risco a tempo discreto descrito em (1.8). Suponha que exista $\gamma > 0$ tal que $E(e^{-\gamma(X_1-Y_1)}) = 1$. Nessas condições temos que*

$$\psi(u) \leq e^{-\gamma u}$$

Em 2002, Cai [4] propôs modificações ao modelo clássico a tempo discreto, acrescentando a ele taxas de juros, cujos resultados e detalhes podem ser encontrados em Grisi [12].

$$R_n = (R_{n-1} + X_n)(1 + I_n) - Y_n$$

e

$$R_n = R_{n-1}(1 + I_n) + X_n - Y_n$$

A diferença entre os dois modelos acima é que no primeiro, consideram-se os prêmios X_k sendo pagos no início do período $(k-1, k)$ e sendo investidos durante esse período a uma taxa de juros I_k, enquanto no segundo modelo os prêmios X_k são pagos apenas no final do período $(k-1,k)$, não recebendo juros durante esse tempo. As variáveis aleatórias I_n são consideradas com uma estrutura de dependência autoregressiva de ordem 1, ou seja,

$$I_n = \alpha I_{n-1} + W_n$$

onde $\alpha > 0$ e $I_0 = i_0$ são constantes reais e $\{W_1, W_2, \ldots\}$ são v.a's $i.i.d.$, não-negativas independentes das variáveis $\{X_1, X_2, \ldots\}$ e $\{Y_1, Y_2, \ldots\}$.

Usando equações integrais para as probabilidades de ruína, Cai,[4] obteve novas desigualdades do tipo Lundberg. Mais precisamente, se $\phi(u,i_0)$ e $\varphi(u,i_0)$ são, respectivamente, as probabilidades de ruína dos dois processos anteriores, ele mostrou que existem $A(u,i_0)$ e $B(u,i_0)$ tais que $\phi(u,i_0) \leq A(u,i_0)$ e $\varphi(u,i_0) \leq B(u,i_0)$. Em seguida, comparou essas desigualdades com a desigualdade encontrada para o modelo clássico, concluindo que

$$A(u,i_0) \leq B(u,i_0) \leq e^{-\gamma u}$$

e mostrando assim como as taxas de juros agem reduzindo o limitante para a probabilidade de ruína. Finalmente, foi mostrado por ele que

$$\psi(u) \leq \beta e^{-\gamma u}$$

onde $\beta \leq 1$ depende apenas da distribuição das indenizações Y_1.

Capítulo 2

Modelo de Risco com Juros Markovianos

2.1 Introdução

Neste capítulo, estudamos o modelo de risco apresentado por Jun Cai e David C. M. Dickson [2], o qual estende o modelo clássico de risco a tempo discreto apresentado no capítulo anterior. Eles consideraram, no modelo de risco básico a tempo discreto, a entrada de juros oriundos de possíveis investimentos, sendo que a taxa de juros segue uma Cadeia de Markov. Dessa forma, consideraremos o modelo de risco a tempo discreto dado por

$$U_k = U_{k-1}(1 + I_k) - Z_k,\ k = 1, 2, ... \tag{2.1}$$

onde $U_0 = u \geq 0$ é uma constante, $\{Z_k,\ k = 1, 2, ...\}$ é uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (*i.i.d.*), com função de distribuição comum $G(z) = P(Z_1 \leq z)$, e $\{I_k,\ k = 0, 1, ...\}$ é uma seqüência de variáveis aleatórias e independentes de $\{Z_k,\ k = 1, 2, ...\}$. No contexto de seguros de risco, Z_k denota a perda líquida no período k, isto é, do tempo $k-1$ ao tempo k. A perda líquida é calculada no final de cada período e é igual ao total de indenizações pagas menos o total de prêmios recebidos no período k. Assim, $Z_k = Y_k - X_k$, com $\{Y_k,\ k = 1, 2, ...\}$ sequência de variáveis aleatórias i.i.d. independentes de $\{X_k,\ k = 1, 2, ...\}$, que também é uma seqüência de variáveis aleatórias *i.i.d.*. Além disso, I_k denota a taxa de juros no período k. Assim, U_k dado por (2.1) é o capital de uma seguradora, com capital inicial u, ao final do período k. Por outro lado, referimo-nos à distribuição G

como uma distribuição de perda. Notemos que a equação (2.1) é equivalente a

$$U_k = u\prod_{j=1}^{k}(1+I_j) - \sum_{j=1}^{k}(Z_j\prod_{t=j+1}^{k}(1+I_t)),\ k = 1, 2, ... \tag{2.2}$$

Onde denotamos $\prod_{t=a}^{b} X_t = 1$ e $\sum_{t=a}^{b} X_t = 0$, caso $a > b$.

De fato, Para $k = 1$, temos:

$U_1 = U_0(1 + I_1) - Z_1 = u(1 + I_1) - Z_1 = u\prod_{j=1}^{1}(1+I_j) - \sum_{j=1}^{1}(Z_j\prod_{t=j+1}^{1}(1+I_t))$, valendo a igualdade.

Suponhamos que a igualdade é válida para $k = n$ e mostremos que vale, também, para $k = n + 1$. Dessa forma, a hipótese de indução será

$$U_n = u\prod_{j=1}^{n}(1+I_j) - \sum_{j=1}^{n}(Z_j\prod_{t=j+1}^{n}(1+I_t)).$$

Assim,

$$U_{n+1} = U_n(1 + I_{n+1}) - Z_{n+1}$$

$$U_{n+1} = \left\{u\prod_{j=1}^{n}(1+I_j) - \sum_{j=1}^{n}(Z_j\prod_{t=j+1}^{n}(1+I_t))\right\}(1 + I_{n+1}) - Z_{n+1}$$

$$U_{n+1} = u\prod_{j=1}^{n+1}(1+I_j) - (1 + I_{n+1})\sum_{j=1}^{n}(Z_j\prod_{t=j+1}^{n}(1+I_t)) - Z_{n+1}$$

$$U_{n+1} = u\prod_{j=1}^{n+1}(1+I_j) - \sum_{j=1}^{n}(Z_j\prod_{t=j+1}^{n+1}(1+I_t)) - Z_{n+1}$$

$$U_{n+1} = u\prod_{j=1}^{n+1}(1+I_j) - \sum_{j=1}^{n+1}(Z_j\prod_{t=j+1}^{n+1}(1+I_t)),$$

mostrando que a igualdade é válida para todo $k = 1, 2, ...$

Estudaremos a probabilidade de ruína com o modelo de risco (2.2). O efeito dos juros sobre a probabilidade de ruína no modelo de risco a tempo contínuo tem sido discutido por vários autores. Além disso, a probabilidade de ruína, em muitos modelos de risco a tempo contínuo, pode ser reduzida àquela encontrada nos modelos de risco a tempo discreto. Por outro lado, os modelos de risco a tempo discreto são modelos estocásticos interessantes, tanto em teoria quanto em aplicação, e alguns modelos a tempo contínuo podem ser aproximados por modelos de risco a tempo discreto. Isso pode ser visto, por exemplo, em Grandell [11], Asmussen [1], e outros, com alguns detalhes em Santana [6].

O modelo de risco a tempo discreto (2.2) tem uma estrutura simples. Entretanto, a probabilidade de ruína nesse modelo é difícil de se obter, e resultados explícitos estão raramente disponíveis, quando juros são incluídos ao modelo. Além das fórmulas assintóticas para probabilidade de ruína, outro método analítico comumente usado em teoria do risco é a obtenção de desigualdades para a probabilidade de ruína como apontado em Asmussem [1]. Com respeito às desigualdades para probabilidade de ruína no modelo de risco (2.2), Yang [27] discutiu um caso especial, considerando as taxas de juros constantes e idênticas. Cai [3] estudou um modelo com taxas de juros $i.i.d.$; e Cai [4], um modelo dependente para taxas de juros, no qual as taxas são assumidas ter uma estrutura AR(1), os detalhes podem ser vistos em Grisi [12]. Um modelo de risco a tempo discreto relacionado a (2.2) foi considerado por Yang e Zhang [28]. Em relação a fórmulas assintóticas para a probabilidade de ruína no modelo de risco (2.2), Tang e Tsitsiashvili [23] obtiveram fórmulas assintóticas para a probabilidade de ruína em tempo finito, considerando as taxas de juros variáveis aleatórias $i.i.d.$ e a distribuição de perda G sendo de cauda pesada. Detalhes sobre distribuições de cauda pesada ver Santana[21]. Além disso, probabilidade de ruína em modelos de risco a tempo discreto mais geral foi estudada por Nyrhinen [18] e [19].

Para nosso estudo, assumimos que a taxa de juros $\{I_n,\ n = 0, 1, ...\}$ segue uma cadeia de Markov. Assumimos ainda que, para todo $n = 0, 1, ...,$ I_n tem espaço de estados $\mathcal{J} = \{i_0, i_1, ..., i_N\}$. Supomos que, para todo $n = 0, 1, ...,$ e para todo estado $i_s, i_t, i_{t_0}, ..., i_{t_{n-1}}$,

$$P(I_{n+1} = i_t | I_n = i_s, I_{n-1} = i_{t_{n-1}}, ..., I_0 = i_{t_0}) = P(I_{n+1} = i_t | I_n = i_s) = P_{st} \geq 0, \quad (2.3)$$

para $s, t = 0, 1, ...N$, onde $\sum_{t=0}^{N} P_{st} = 1$, para $s = 0, 1, ..., N$.

No nosso estudo, a taxa de juros $\{I_n, n = 0, 1, ...\}$ pode ser negativa. Nesse caso, dizemos que $\{I_n, n = 0, 1, ...\}$ são taxas de retorno de um investimento de risco.

Definimos a probabilidade de ruína com horizonte finito e infinito no modelo de risco (2.2) com modelo de juros (2.3), capital inicial u, e uma dada taxa de juros inicial $I_0 = i_s$, respectivamente por:

$$\psi_n(u, i_s) = P\left\{\bigcup_{k=1}^{n}(U_k < 0)|I_0 = i_s\right\} \tag{2.4}$$

e

$$\psi(u, i_s) = P\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty}(U_k < 0)|I_0 = i_s\right\}, \tag{2.5}$$

onde U_k é dada por (2.2). Assim,

$$\psi_1(u, i_s) \leq \psi_2(u, i_s) \leq \psi_3(u, i_s) \leq \dots \text{ e } \lim_{n\to\infty} \psi_n(u, i_s) = \psi(u, i_s).$$

De fato, seja $A_n = \{w;\ U_k(w) < 0 \ \text{ para algum } \ 1 \leq k \leq n\}$. Dessa forma,

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} \{w;\ U_k(w) < 0\}. \tag{2.6}$$

Note que $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$P(A_n|I_0 = i_s) \leq P(A_{n+1}|I_0 = i_s), \text{ implicando } P\left\{\bigcup_{k=1}^{n}(U_k < 0)|I_0 = i_s\right\} \leq P\left\{\bigcup_{k=1}^{n+1}(U_k < 0)|I_0 = i_s\right\}.$$

Portanto, concluímos que $\psi_n(u, i_s) \leq \psi_{n+1}(u, i_s)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Note também que $A_n \uparrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, e

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{n} \{w;\ U_k(w) < 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{w;\ U_k(w) < 0\} = A. \tag{2.7}$$

Mostremos que a igualdade acima é verdadeira.

Se $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{n} \{w;\ U_k(w) < 0\} \Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \bigcup_{k=1}^{n_0} \{w;\ U_k(w) < 0\} \Longrightarrow \exists k_0 \leq n_0$ tal que $x \in \{w;\ U_{k_0}(w) < 0\} \Longrightarrow x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \{w;\ U_k(w) < 0\}$, mostrando que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset A$.

Por outro lado, se $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \{w;\ U_k(w) < 0\} \Longrightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \{w;\ U_{k_0}(w) < 0\} \Longrightarrow x \in \bigcup_{k=1}^{n} \{w;\ U_k(w) < 0\}$ para $n \geq k_0 \Longrightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{n} \{w;\ U_k(w) < 0\}$, mostrando que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Daí, pela continuidade de probabilidade

$$P(A_n|I_0 = i_s) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} P(A|I_0 = i_s) \Longleftrightarrow \psi_n(u, i_s) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \psi(u, i_s) \tag{2.8}$$

Quando $I_n = 0$, para $n = 0, 1, \dots$, o modelo de risco (2.2) é reduzido ao seguinte modelo de risco clássico a tempo discreto

$$U_k = u - \sum_{t=1}^{k} Z_t, \quad k = 1, 2, \dots \tag{2.9}$$

Consideremos $\psi(u)$ denotando a probabilidade de ruína com horizonte infinito no modelo de risco clássico dado por (2.9), a saber $\psi(u) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\Big[\sum_{t=1}^{k} Z_t > u\Big]\Big)$. De fato,

$\psi(u) = P(U_k < 0 \text{ para algum } k \in \mathbb{N})$. Logo,

$$\psi(u) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\Big[U_k < 0\Big]\Big) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\Big[u - \sum_{t=1}^{k} Z_t < 0\Big]\Big) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\Big[\sum_{t=1}^{k} Z_t > u\Big]\Big).$$

Para a probabilidade de ruína $\psi(u)$, a bem conhecida desigualdade de Lundberg diz que se $E(Z_1) < 0$ e existe uma constante $R_0 > 0$ satisfazendo

$$E[e^{R_0 Z_1}] = 1, \tag{2.10}$$

então

$$\psi(u) \leq e^{-R_0 u}, \quad u \geq 0. \tag{2.11}$$

Isso pode ser visto, por exemplo, em Ross [20].

Se todas as taxas de juros forem não-negativas, isto é, $I_n \geq 0$, para $n = 0, 1, \dots$, então

$$\psi(u, i_s) \leq \psi(u), \quad u \geq 0. \tag{2.12}$$

De fato, considerando $U_k^{'} = U_{k-1}^{'}(1 + I_k) - Z_k$ com $U_0^{'} = u$ o modelo com taxas de juros, e $U_k = u - \sum_{t=1}^{k} Z_k$ o modelo clássico, temos $U_k^{'} \geq U_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
Para verificarmos isso observe que para $k = 1$, $U_1^{'} = U_0^{'}(1 + I_1) - Z_1 \geq U_0^{'} - Z_1 = u - Z_1 = U_1$, valendo a desigualdade. Supondo que a desigualdade é válida para $k = n$, ou seja, $U_n^{'} \geq U_n$, mostremos que a desigualdade continua válida para $k = n + 1$.

Vejamos.

$U'_{n+1} = U'_n(1+I_{n+1}) - Z_{n+1} \geq U'_n - Z_{n+1} \geq U_n - Z_{n+1} = u - \Big(\sum_{t=1}^{n} Z_t\Big) - Z_{n+1}$, implicando

$U'_{n+1} \geq u - \sum_{t=1}^{n+1} Z_t = U_{n+1}$, mostrando o que pretendíamos.

Assim, $A = \bigcup_{k=1}^{\infty}\Big[U'_k < 0\Big] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}\Big[U_k < 0\Big] = B$ e como $P\Big(\cdot \mid I_0 = i_s\Big)$ é uma probabilidade, temos:

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\Big[U'_k < 0\Big] \mid I_0 = i_s\Big) \leq P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\Big[U_k < 0\Big] \mid I_0 = i_s\Big).$$

Como U_k é um processo que não depende de taxas de juros, ou seja, I_0 é independente de U_k, concluímos que $P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\Big[U'_k < 0\Big] \mid I_0 = i_s\Big) \leq P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\Big[U_k < 0\Big]\Big)$. Portanto, $\psi(u, i_s) \leq \psi(u)$.

Essa desigualdade afirma que a probabilidade de ruína no modelo de risco clássico é reduzida pela adição de rendimentos de juros não-negativos ao capital. Assim, se obtivermos desigualdades para a probabilidade de ruína $\psi(u, i_s)$ com taxas de juros não-negativas $\{I_n, \ \ n = 0, 1, \ldots\}$, digamos $\psi(u, i_s) \leq \Delta(u, i_s)$, $u \geq 0$, então $\Delta(u, i_s)$, se for uma estimativa no sentido de acrescentar alguma informação, deverá satisfazer

$$\Delta(u, i_s) \leq e^{-R_0 u}, \quad u \geq 0. \tag{2.13}$$

2.2 Equação Recursiva e Integral para Probabilidade de Ruína

Nesta seção, obtemos equações recursiva e integral para $\psi(u, i_s)$. Essas equações valem para quaisquer taxas de juros. Além disso, em todo o restante deste trabalho, denotamos a cauda de uma função distribuição B por $\overline{B}(x) = 1 - B(x)$, e por I_A a função indicadora do conjunto A.

Lema 2.1 *Para $n = 1, 2, \ldots$ e qualquer $u \geq 0$,*

$$\psi_{n+1}(u, i_s) = \sum_{t=0}^{N} P_{st}\Big(\overline{G}(u(1+i_t)) + \int_{-\infty}^{u(1+i_t)} \psi_n(u(1+i_t) - z, i_t)\,dG(z)\Big) \tag{2.14}$$

com

$$\psi_1(u,i_s)=\sum_{t=0}^{N}P_{st}\overline{G}(u(1+i_t)) \tag{2.15}$$

e

$$\psi(u,i_s)=\sum_{t=0}^{N}P_{st}\Big(\overline{G}(u(1+i_t))+\int_{-\infty}^{u(1+i_t)}\psi(u(1+i_t)-z,i_t)dG(z)\Big) \tag{2.16}$$

Demonstração. Dados $Z_1=z$ e $I_1=i_t$, da equação (2.2), tem-se $U_1=h-z$, onde $h=u(1+i_t)$. Assim, se $z>h$,

$$P\Big(U_1<\ 0 \mid Z_1=z,I_0=i_s,I_1=i_t\Big)=E\Big(I_{[U_1<\ 0]}\mid Z_1=z,I_0=i_s,I_1=i_t\Big)=$$

$$=E\left(I_{\left[\left(u(1+I_1)-Z_1\right)<\ 0\right]}\mid Z_1=z,I_0=i_s,I_1=i_t\right)=$$

$$=E\left(I_{\left[Z_1>\ u(1+I_1)\right]}\mid Z_1=z,I_0=i_s,I_1=i_t\right)=E\Big(1\mid Z_1=z,I_0=i_s,I_1=i_t\Big)=1.$$

Como $A=\Big[U_1<\ 0\Big]\subset\bigcup_{k=1}^{n+1}\Big[U_k<\ 0\Big]=B$, então $I_A\leq I_B$.

Portanto, $P\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1}\Big[U_k<0\Big]\ |Z_1=z,I_0=i_s,I_1=i_t\Big)=1.$

Agora, se $0\leq z\leq h$, tem-se:

$$P\Big(U_1<0|Z_1=z,I_0=i_s,I_1=i_t\Big)=E\left(I_{\left[Z_1>\ u(1+I_1)\right]}\mid Z_1=z,I_0=i_s,I_1=i_t\right)=$$

$=E\Big(0\mid Z_1=z,I_0=i_s,I_1=i_t\Big)=0$, pois os $w\in\Omega$ tais que $I_1(w)=i_t$, $I_0(w)=i_s$ e $Z_1(w)=z$ fazem com que $Z_1(w)\leq u(1+I_1(w))$, implicando $z\leq h$ e, portanto, $I_{\left[Z_1>\ u(1+I_1)\right]}(w)=0$.

Assim,

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1}\Big[U_k<\ 0\Big]\mid Z_1=z,I_0=i_s,I_1=i_t\Big)=$$

$$=E\left(I_{\left[\bigcup_{k=1}^{n+1}\left[U_k<\ 0\right]\right]}\mid Z_1=z,I_0=i_s,I_1=i_t\right)=$$

$$= E\left(I_{\left[U_1 < \ 0\right] \bigcup \left[\bigcup_{k=2}^{n+1}\left[U_k < \ 0\right]\right]} \mid Z_1 = z, I_0 = i_s, I_1 = i_t\right) =$$

$$= E\left(I_{\left[U_1 < \ 0\right]} \mid Z_1 = z, I_0 = i_s, I_1 = i_t\right) +$$

$$+ E\left(I_{\left[\bigcup_{k=2}^{n+1}\left[U_k < \ 0\right]\right]} \mid Z_1 = z, I_0 = i_s, I_1 = i_t\right) -$$

$$- E\left(I_{\left[U_1 < \ 0\right] \bigcap \left[\bigcup_{k=2}^{n+1}\left[U_k < \ 0\right]\right]} \mid Z_1 = z, I_0 = i_s, I_1 = i_t\right) =$$

$$= E\left(I_{\left[\bigcup_{k=2}^{n+1}\left[U_k < \ 0\right]\right]} \mid Z_1 = z, I_0 = i_s, I_1 = i_t\right) =$$

$$= E\left(I_{\left[\bigcup_{k=2}^{n+1}\left[u\prod_{j=1}^{k}(1+I_j) - \sum_{j=1}^{k}(Z_j \prod_{\lambda=j+1}^{k}(1+I_\lambda)) \ < 0\right]\right]} \mid Z_1 = z, I_0 = i_s, I_1 = i_t\right) =$$

$$= E\left(I_{\left[\bigcup_{k=2}^{n+1}\left[u(1+I_1)\prod_{j=2}^{k}(1+I_j) - Z_1\prod_{\lambda=2}^{k}(1+I_\lambda) - \sum_{j=2}^{k}(Z_j \prod_{\lambda=j+1}^{k}(1+I_\lambda)) \ < 0\right]\right]} \mid Z_1 = \right.$$
$$\left. z, I_0 = i_s, I_1 = i_t\right) =$$

$$= E\left(I_{\left[\bigcup_{k=2}^{n+1}\left[(u(1+I_1) - Z_1)\prod_{j=2}^{k}(1+I_j) - \sum_{j=2}^{k}(Z_j \prod_{\lambda=j+1}^{k}(1+I_\lambda)) \ < 0\right]\right]} \mid Z_1 = z, I_0 = \right.$$
$$\left. i_s, I_1 = i_t\right) =$$

$$= E\left(I_{\left[\bigcup_{k=2}^{n+1}\left[(u(1+i_t) - z)\prod_{j=2}^{k}(1+I_j) - \sum_{j=2}^{k}(Z_j \prod_{\lambda=j+1}^{k}(1+I_\lambda)) \ < 0\right]\right]} \mid Z_1 = z, I_0 = \right.$$
$$\left. i_s, I_1 = i_t\right) =$$

$$= P\left(\bigcup_{k=2}^{n+1}\left[(h-z)\prod_{j=2}^{k}(1+I_j) - \sum_{j=2}^{k}(Z_j \prod_{\lambda=j+1}^{k}(1+I_\lambda)) \ < 0\right] \mid Z_1 = z, I_0 = i_s, I_1 = i_t\right)$$

Como $\{I_n,\ n = 0, 1, \ldots\}$ e $\{Z_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ são independentes e $\{Z_k, k = 2, 3, \ldots\}$

é independente de Z_1, então: $P\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1}\Big[U_k < \ 0\Big] \mid Z_1 = z, I_0 = i_s, I_1 = i_t\Big) =$

$$= P\left(\bigcup_{k=2}^{n+1}\Big[(h-z)\prod_{j=2}^{k}(1+I_j) - \sum_{j=2}^{k}(Z_j\prod_{\lambda=j+1}^{k}(1+I_\lambda)) \ < 0\Big] \mid I_0 = i_s, I_1 = i_t\right)$$

Como assumimos que a taxa de juros $\{I_n, \ n = 0, 1, ...\}$ segue uma cadeia de Markov, tem-se: $P\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1}\Big[U_k < \ 0\Big] \mid Z_1 = z, I_0 = i_s, I_1 = i_t\Big) =$

$$= P\left(\bigcup_{k=2}^{n+1}\Big[(h-z)\prod_{j=2}^{k}(1+I_j) - \sum_{j=2}^{k}(Z_j\prod_{\lambda=j+1}^{k}(1+I_\lambda)) \ < 0\Big] \mid I_1 = i_t\right) =$$

$$= E\left(I_{\left[\bigcup_{k=2}^{n+1}\Big[(h-z)\prod_{j=2}^{k}(1+I_j) - \sum_{j=2}^{k}(Z_j\prod_{\lambda=j+1}^{k}(1+I_\lambda)) \ < 0\Big]\right]} \mid I_1 = i_t\right).$$

Como a indicadora é uma função de $Z_2, \ldots, Z_{n+1}, I_2, \ldots, I_{n+1}$, então, fazendo $X = (Z_2, \ldots, Z_{n+1}, I_2, \ldots, I_{n+1})$, tem-se:

$$P\left(\bigcup_{k=2}^{n+1}\Big[(h-z)\prod_{j=2}^{k}(1+I_j) - \sum_{j=2}^{k}(Z_j\prod_{\lambda=j+1}^{k}(1+I_\lambda)) \ < 0\Big] \mid I_1 = i_t\right) =$$

$$= \int_\Omega \varphi(X)dP(w|I_1 = i_t) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathcal{J}^n} \varphi(z_2, \ldots, z_{n+1}, i_2, \ldots, i_{n+1})dF_X(z_2, \ldots, z_{n+1}, i_2, \ldots, i_{n+1}|I_1 = i_t).$$

Além disso, $\{I_k, \ k = 0, 1, ...\}$ é uma Cadeia de Markov homogênea e é uma sequência de variáveis aleatórias e independentes de $\{Z_k, \ k = 1, 2, ...\}$, a qual é $(i.i.d.)$, portanto,usando propriedades da cadeia de Markov homogêna,

$$P\left(\bigcup_{k=2}^{n+1}\Big[(h-z)\prod_{j=2}^{k}(1+I_j) - \sum_{j=2}^{k}(Z_j\prod_{\lambda=j+1}^{k}(1+I_\lambda)) \ < 0\Big] \mid I_1 = i_t\right) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathcal{J}^n} \varphi(x)dF_{Z_2,\ldots,Z_{n+1}}(z_2, \ldots, z_{n+1}|I_1 = i_t)dF_{I_2,\ldots,I_{n+1}}(i_2, \ldots, i_{n+1}|I_1 = i_t) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathcal{J}^n} \varphi(x)dF_{Z_2,\ldots,Z_{n+1}}(z_2, \ldots, z_{n+1})dF_{I_2,\ldots,I_{n+1}}(i_2, \ldots, i_{n+1}|I_1 = i_t) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathcal{J}^n} \varphi(x) dF_{Z_2}(z_2).\dots.dF_{Z_{n+1}}(z_{n+1}).P\Big(I_2 = i_2, \dots, I_{n+1} = i_{n+1} | I_1 = i_t\Big) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathcal{J}^n} \varphi(x) dF_{Z_1}(z_2).\dots.dF_{Z_n}(z_{n+1}).P\Big(I_1 = i_2, \dots, I_n = i_{n+1} | I_0 = i_t\Big) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathcal{J}^n} \varphi(x) dF_{Z_1,\dots,Z_n}(z_2, \dots, z_{n+1}).dF_{I_1,\dots,I_n}(i_2, \dots, i_{n+1} | I_0 = i_t) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathcal{J}^n} \varphi(x) dF_{Z_1,\dots,Z_n}(z_2, \dots, z_{n+1} | I_0 = i_t).dF_{I_1,\dots,I_n}(i_2, \dots, i_{n+1} | I_0 = i_t) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathcal{J}^n} \varphi(x) dF_{Z_1,\dots,Z_n,I_1,\dots,I_n}(z_2, \dots, z_{n+1}, i_2, \dots, i_{n+1} | I_0 = i_t) =$$

$$= \int_{\Omega} \varphi(Y) dP(w | I_0 = i_t), \ \ \text{com} \ \ Y = Z_1, ..., Z_n, I_1, ..., I_n.$$

Assim,

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} \Big[U_k < \ 0\Big] \mid Z_1 = z, I_0 = i_s, I_1 = i_t\Big) =$$

$$= E\left(I_{\left[\bigcup_{k=1}^{n} \left[(h-z)\prod_{j=1}^{k}(1+I_j) - \sum_{j=1}^{k}(Z_j \prod_{\lambda=j+1}^{k}(1+I_\lambda)) \ < 0\right]\right]} \mid I_0 = i_t\right) =$$

$$= P\left(\bigcup_{k=1}^{n} \left[(h-z)\prod_{j=1}^{k}(1+I_j) - \sum_{j=1}^{k}(Z_j \prod_{\lambda=j+1}^{k}(1+I_\lambda)) \ < 0\right] \mid I_0 = i_t\right).$$

Usando a equação (2.4), temos:

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} \Big[U_k < \ 0\Big] \mid Z_1 = z, I_0 = i_s, I_1 = i_t\Big) = \psi_n(h - z, i_t) = \psi_n(u(1 + i_t) - z, i_t).$$

Dessa forma,

$$\psi_{n+1}(u, i_s) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} [U_k < 0] | I_0 = i_s\Big) = E\left(I_{\left[\bigcup_{k=1}^{n+1}[U_k < 0]\right]} \mid I_0 = i_s\right) =$$

$$= \frac{1}{P\Big(I_0 = i_s\Big)}.\int_{(I_0 = i_s)} I_{\left[\bigcup_{k=1}^{n+1}[U_k < 0]\right]} dP$$

Como $\{w;\ I_0(w) = i_s\} \in \sigma(I_0, I_1, Z_1)$, temos:

$$\psi_{n+1}(u, i_s) = \frac{1}{P\Big(I_0 = i_s\Big)} . \int_{(I_0 = i_s)} E\Big(I_{\left[\bigcup_{k=1}^{n+1}[U_k < 0]\right]} \mid I_0, I_1, Z_1\Big) dP =$$

Como a esperança condicional do integrando é uma função das v.a.'s I_0, I_1 e Z_1, então

$$\psi_{n+1}(u, i_s) = \frac{1}{P\Big(I_0 = i_s\Big)} . \int_{(I_0 = i_s)} \xi(I_0, I_1, Z_1) dP =$$

$$= \frac{1}{P\Big(I_0 = i_s\Big)} . \int_{\{w;\ I_0(w) = i_s,\ I_1(w) \in \mathcal{J},\ Z_1(w) \in \mathbb{R}\}} \xi(I_0, I_1, Z_1) dP =$$

$$= \frac{1}{P\Big(I_0 = i_s\Big)} . \int_{\mathbb{R}} \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{i \in \{i_s\}} \xi(z, j, i) dP_{(Z_1, I_1, I_0)}(z, j, i)$$

Daí,

$$\psi_{n+1}(u, i_s) = \frac{1}{P\Big(I_0 = i_s\Big)} . \int_{\mathbb{R}} \sum_{j \in \mathcal{J}} \xi(z, j, i_s) dP_{(Z_1, I_1, I_0)}(z, j, i_s) =$$

$$= \frac{1}{P\Big(I_0 = i_s\Big)} . \int_{\mathbb{R}} \sum_{j \in \mathcal{J}} \xi(z, j, i_s) dP_{I_1, I_0}(j, i_s) dP_{Z_1}(z) =$$

$$= \frac{1}{P\Big(I_0 = i_s\Big)} . \int_{\mathbb{R}} \sum_{t=0}^{N} \xi(z, i_t, i_s) P\Big(I_1 = i_t, I_0 = i_s) dG(z) =$$

$$= \sum_{t=0}^{N} P_{st} \int_{\mathbb{R}} \xi(z, i_t, i_s) dG(z) =$$

$$= \sum_{t=0}^{N} P_{st} \int_{-\infty}^{+\infty} E\Big(I_{\left[\bigcup_{k=1}^{n+1}[U_k < 0]\right]} \mid I_0 = i_s, I_1 = i_t, Z_1 = z\Big) dG(z) =$$

$$= \sum_{t=0}^{N} P_{st} \left\{ \int_{-\infty}^{u(1+i_t)} P\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} \big[U_k < 0\big] | I_0 = i_s, I_1 = i_t, Z_1 = z \Big) dG(z) + \right.$$

$$\left. + \int_{u(1+i_t)}^{+\infty} P\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} \big[U_k < 0\big] | I_0 = i_s, I_1 = i_t, Z_1 = z \Big) dG(z) \right\} =$$

$$= \sum_{t=0}^{N} P_{st} \left\{ \int_{-\infty}^{u(1+i_t)} \psi_n\big(u(1+i_t) - z,\ i_t\big) dG(z) + \int_{u(1+i_t)}^{+\infty} dG(z) \right\} =$$

$$= \sum_{t=0}^{N} P_{st} \left\{ \int_{-\infty}^{u(1+i_t)} \psi_n\big(u(1+i_t) - z,\ i_t\big) dG(z) + 1 - G\big(u(1+i_t)\big) \right\} =$$

Portanto,

$$\psi_{n+1}(u, i_s) = \sum_{t=0}^{N} P_{st} \left\{ \int_{-\infty}^{u(1+i_t)} \psi_n\big(u(1+i_t) - z,\ i_t\big) dG(z) + \overline{G}\big(u(1+i_t)\big) \right\} \tag{2.17}$$

Mostrando, assim, a equação (2.14). Daí, passando ao limite de $n \longrightarrow \infty$ em (2.17), tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} \psi_{n+1}(u, i_s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{N} P_{st} \left\{ \int_{-\infty}^{u(1+i_t)} \psi_n\big(u(1+i_t) - z,\ i_t\big) dG(z) + \overline{G}\big(u(1+i_t)\big) \right\}.$$ Logo,

$$\psi(u, i_s) = \sum_{t=0}^{N} P_{st} \left\{ \overline{G}\big(u(1+i_t)\big) + \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{u(1+i_t)} \psi_n\big(u(1+i_t) - z,\ i_t\big) dG(z) \right\}$$

Como $\{\psi_n\}$ é sequência de funções monótonas não-decrescentes, não-negativas, e $\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi$, temos, pelo Teorema da Convergência Monótona, que:

$$\psi(u, i_s) = \sum_{t=0}^{N} P_{st} \left\{ \overline{G}\big(u(1+i_t)\big) + \int_{-\infty}^{u(1+i_t)} \lim_{n\to\infty} \psi_n\big(u(1+i_t) - z,\ i_t\big) dG(z) \right\} =$$

$$= \sum_{t=0}^{N} P_{st} \left\{ \overline{G}\big(u(1+i_t)\big) + \int_{-\infty}^{u(1+i_t)} \psi\big(u(1+i_t) - z,\ i_t\big) dG(z) \right\}$$

mostrando a equação (2.16). Além disso, a equação (2.15) segue de:

$$\begin{aligned}
\psi_1(u, i_s) &= P\big(Z_1 > u(1+I_1) \mid I_0 = i_s\big) \\
&= E\big(I_{\big[Z_1 > u(1+I_1)\big]} \mid I_0 = i_s\big) \\
&= \frac{1}{P(I_0 = i_s)} . \int_{(I_0 = i_s)} I_{\big[Z_1 > u(1+I_1)\big]} dP
\end{aligned}$$

Como $\{w;\ I_0(w) = i_s\} \in \sigma(I_0, I_1, Z_1)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\psi_1(u, i_s) &= \frac{1}{P(I_0 = i_s)} . \int_{(I_0 = i_s)} E\Big(I_{\big[Z_1 > u(1+I_1)\big]} \mid I_0, I_1, Z_1\Big) dP \\
&= \frac{1}{P(I_0 = i_s)} . \int_{(I_0 = i_s)} \phi(I_0, I_1, Z_1) dP \\
&= \frac{1}{P(I_0 = i_s)} . \int_{\mathbb{R} \times \mathcal{J} \times \{i_s\}} \phi(i, i_t, z) dP_{I_0, I_1, Z_1}(i, i_t, z) \\
&= \frac{1}{P(I_0 = i_s)} . \int_{\mathbb{R}} \sum_{j \in \mathcal{J}} \phi(i_s, j, z) dF_{I_0, I_1}(i_s, j) dF_{Z_1}(z)
\end{aligned}$$

Mas $\mathcal{J}$ é finito, logo

$$\begin{aligned}
\psi_1(u, i_s) &= \frac{1}{P(I_0 = i_s)} . \int_{\mathbb{R}} \sum_{t=0}^{N} \phi(i_s, i_t, z) P\big(I_1 = i_t, I_0 = i_s\big) dG(z) \\
&= \sum_{t=0}^{N} P_{st} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(i_s, i_t, z) dG(z) \\
&= \sum_{t=0}^{N} P_{st} \int_{-\infty}^{+\infty} E\big(I_{\big[Z_1 > u(1+I_1)\big]} \mid I_0 = i_s, I_1 = i_t, Z_1 = z\big) dG(z) \\
&= \sum_{t=0}^{N} P_{st} \Bigg\{ \int_{-\infty}^{u(1+i_t)} \phi(i_s, i_t, z) dG(z) + \int_{u(1+i_t)}^{+\infty} \phi(i_s, i_t, z) dG(z) \Bigg\} \\
&= \sum_{t=0}^{N} P_{st} \int_{u(1+i_t)}^{+\infty} dG(z) = \sum_{t=0}^{N} P_{st} \Bigg(\overline{G}\big(u(1+i_t)\big) \Bigg)
\end{aligned}$$

■

Ressaltamos que as técnicas usadas nessa demonstração são similares àquelas em Yang [26].

A seguir usaremos a equação recursiva de probabilidade de ruína com horizonte finito para obtermos uma desigualdade de probabilidade de ruína final, quando as taxas de juros são não-negativas.

2.3 Desigualdades para Probabilidade de Ruína pela abordagem Indutiva

Nesta seção, e na seção seguinte, assumiremos que todas as taxas de juros são não-negativas, isto é, $I_n \geq 0$ para $n = 0, 1, \ldots$ e obteremos uma desigualdade para $\psi(u, i_s)$ por uma abordagem indutiva sobre a equação recursiva obtida na seção 2.2.

Teorema 2.1 *Seja $R_0 > 0$ uma constante satisfazendo (2.9). Então,*

$$\psi(u, i_s) \leq \beta_0 E\big(e^{-R_0 u(1+I_1)} \mid I_0 = i_s\big), \quad u \geq 0, \tag{2.18}$$

onde

$$\beta_0^{-1} = \inf_{t \geq 0} \frac{\displaystyle\int_t^{+\infty} e^{R_0 z} dG(z)}{e^{R_0 t}\overline{G}(t)} \tag{2.19}$$

Demonstração. Para todo $x \geq 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\overline{G}(x) &= \overline{G}(x).e^{R_0 x}.e^{-R_0 x}.\left(\int_x^{+\infty} e^{R_0 z} dG(z)\right)^{-1}.\int_x^{+\infty} e^{R_0 z} dG(z) \\
&= \frac{\left(\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{R_0 z} dG(z)\right)^{-1}}{\left(\overline{G}(x).e^{R_0 x}\right)^{-1}}.e^{-R_0 x}.\int_x^{+\infty} e^{R_0 z} dG(z)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\beta_0^{-1} = \inf_{t\geq 0} \frac{\displaystyle\int_t^{+\infty} e^{R_0 z} dG(z)}{e^{R_0 t}\overline{G}(t)} \leq \frac{\left(\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{R_0 z} dG(z)\right)}{e^{R_0 x}.\overline{G}(x)}, \ \forall x \geq 0.$$

Logo,

$$\beta_0 \geq \left(\frac{\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{R_0 z} dG(z)}{e^{R_0 x}.\overline{G}(x)}\right)^{-1}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\overline{G}(x) &\leq \beta_0.e^{-R_0 x}.\int_x^{+\infty} e^{R_0 z} dG(z) &(2.20)\\
&\leq \beta_0.e^{-R_0 x}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{R_0 z} dG(z) \\
&\leq \beta_0.e^{-R_0 x} &(2.21)
\end{aligned}$$

Com isso, (2.15) e (2.20) implicam que, para qualquer $u \geq 0$ e qualquer $i_s \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\psi_1(u, i_s) &= \sum_{t=0}^{N} P_{st}\overline{G}(u(1+i_t)) \\
&\leq \sum_{t=0}^{N} P_{st}\beta_0 e^{-R_0\left(u(1+i_t)\right)} \\
&\leq \beta_0 \sum_{t=0}^{N} e^{-R_0\left(u(1+i_t)\right)} P(I_1 = i_t \mid I_0 = i_s) \\
&= \beta_0 E\left(e^{-R_0 u(1+I_1)} \mid I_0 = i_s\right)
\end{aligned}$$

Agora, assumamos como hipótese de indução que, para qualquer $u \geq 0$ e qualquer $i_s \geq 0$,

$$\psi_n(u, i_s) \leq \beta_0 E\left(e^{-R_0 u(1+I_1)} \mid I_0 = i_s\right) \tag{2.22}$$

Dessa forma, para $0 \leq z \leq u(1+i_t)$, com u e i_s substituídos por $u(1+i_t)-z$ e i_t, respectivamente em (2.22), e para $I_1 \geq 0$, tem-se:

$$\psi_n(u(1+i_t)-z, i_t) \leq \beta_0 E\left(e^{-R_0(u(1+i_t)-z)(1+I_1)} \mid I_0 = i_t\right)$$

Por outro lado,

$0 \leq z \leq u(1+i_t)$ implica $u(1+i_t)-z \geq 0$, e $R_0 > 0$ implica $-R_0 < 0$. Daí, $-R_0\big(u(1+i_t)-z\big) \leq 0$. Além disso, como $I_1 \geq 0$ implica $1+I_1 \geq 1$, tem-se: $-R_0\big(u(1+i_t)-z\big)(1+I_1) \leq -R_0\big(u(1+i_t)-z\big)$. Disso, resulta que

$e^{-R_0\big(u(1+i_t)-z\big)(1+I_1)} \leq e^{-R_0\big(u(1+i_t)-z\big)}$. Usando a monotonicidade da esperança condicional, temos:

$$E\left(e^{-R_0\big(u(1+i_t)-z\big)(1+I_1)} \mid I_0 = i_t\right) \leq E\left(e^{-R_0\big(u(1+i_t)-z\big)} \mid I_0 = i_t\right).$$

Como $e^{-R_0\big(u(1+i_t)-z\big)}$ é constante, tem-se:

$$E\left(e^{-R_0\big(u(1+i_t)-z\big)(1+I_1)} \mid I_0 = i_t\right) \leq e^{-R_0\big(u(1+i_t)-z\big)}.$$

Assim,

$$\psi_n(u(1+i_t)-z, i_t) \leq \beta_0 e^{-R_0(u(1+i_t)-z)} \tag{2.23}$$

Portanto, por (2.14), (2.20) e (2.23), tem-se:

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(u, i_s) &= \sum_{t=0}^{N} P_{st}\Big(\overline{G}(u(1+i_t)) + \int_{-\infty}^{u(1+i_t)} \psi_n(u(1+i_t)-z, i_t)dG(z)\Big) \\
&\leq \sum_{t=0}^{N} P_{st}\Big(\beta_0 . e^{-R_0(u(1+i_t))} . \int_{u(1+i_t)}^{+\infty} e^{R_0 z} dG(z) + \int_{-\infty}^{u(1+i_t)} \beta_0 e^{-R_0(u(1+i_t)-z)} dG(z)\Big) \\
&\leq \sum_{t=0}^{N} P_{st}\Big(\beta_0 . e^{-R_0(u(1+i_t))} . \int_{u(1+i_t)}^{+\infty} e^{R_0 z} dG(z) + \beta_0 . e^{-R_0(u(1+i_t))} \int_{-\infty}^{u(1+i_t)} e^{R_0 z} dG(z)\Big)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(u,i_s) &\leq \sum_{t=0}^{N} P_{st}\beta_0.e^{-R_0(u(1+i_t))}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{R_0 z}dG(z)\Big)\\
&\leq \sum_{t=0}^{N} P_{st}\beta_0.e^{-R_0u(1+i_t)}E(e^{R_0Z_1})\\
&\leq \sum_{t=0}^{N} P_{st}\beta_0.e^{-R_0u(1+i_t)}\\
&\leq \beta_0 E\Big(e^{-R_0u(1+I_1)} \mid I_0 = i_s\Big)
\end{aligned}$$

Logo, para qualquer $n = 1, 2, \ldots$, a desigualdade (2.22) é válida. Logo, a desigualdade (2.18) segue, fazendo $n \longrightarrow \infty$ em (2.22). ■

Notemos que $0 \leq \beta_0 \leq 1$, já que, para todo $t \geq 0$, tem-se:

$\displaystyle\int_t^{+\infty} e^{R_0 z}dG(z) \geq \int_t^{+\infty} e^{R_0 t}dG(z) = e^{R_0 t}\int_t^{+\infty} dG(z)$. Assim,

$$\frac{\displaystyle\int_t^{+\infty} e^{R_0 z}dG(z)}{e^{R_0 t}\overline{G}(t)} \geq \frac{e^{R_0 t}\displaystyle\int_t^{+\infty} dG(z)}{e^{R_0 t}\overline{G}(t)} = \frac{1 - \displaystyle\int_{-\infty}^{t} dG(z)}{\overline{G}(t)} = \frac{1 - G(t)}{\overline{G}(t)} = 1.$$

Dessa forma, o limite superior no teorema (2.1) é menor do que o limite superior de Lundberg, isto é,

$$\beta_0 E\big(e^{-R_0u(1+I_1)} \mid I_0 = i_s\big) \leq \beta_0 E\big(e^{-R_0u} \mid I_0 = i_s\big) = \beta_0 e^{-R_0u} \leq e^{-R_0u}, \;\; u \geq 0.$$

Além disso, se $I_n = 0, \; \forall n = 0, 1, \ldots$, então o limite superior no Teorema 2.1 reduz-se a $\beta_0 e^{-R_0 u}$, o qual produz um aperfeiçoamento do limite superior de Lundberg, já que $0 \leq \beta_0 \leq 1$. Para desigualdades do tipo de Lundberg em outros modelos de probabilidade aplicada, veja Willmot et al (2001), Willmot and Lin (2001) e as referências lá contidas.

Em muitas situações práticas, os prêmios em cada período são constantes e as perdas são devidas ao valor das indenizações. Se denotamos o prêmio constante e o valor das indenizações no período k por $p > 0$ e Y_k, respectivamente, então $Z_k = Y_k - p$, com $k = 1, 2, \ldots$. De fato, esse modelo é uma analogia discreta do modelo clássico de risco a tempo contínuo. Nesse caso, podemos obter um limite superior refinado para a probabilidade de ruína $\psi(u, i_s)$.

Enunciaremos a seguir um lema que será utilizado na demonstração do corolário (2.1). A demonstração desse lema, o qual é a proposição 6.1.1, página 96, do livro Willmot e Lin, [24], será omitida devido ao fato de ela usar um resultado do livro Shaked e Shanthikumar, [22], ao qual não tivemos acesso.
Antes explicaremos o que significa uma distribuição Nova Pior que a Usada em Ordem Convexa-NWUC que aparece na hipótese do lema a seguir.
Dizemos que uma distribuição F é NWUC se, para todo $x \geq 0,\ y \geq 0,\ \displaystyle\int_{x+y}^{+\infty} \overline{F}(t)dt \geq \overline{F}(x)\int_{y}^{+\infty} \overline{F}(t)dt$
Dentre as distribuições que se encaixam nesta definição podemos citar as distribuições de taxa de falhas decrescente-DFR; em particular, a exponencial e a gama.

Lema 2.2 *Suponha $t > 0$, $x \geq 0$, e $\displaystyle\int_0^\infty e^{ty} dF(y) < \infty$. Então, se $F(y)$ é NWUC, temos:*

$$\inf_{0 \leq z \leq x, \overline{F}(z) > 0} \frac{\displaystyle\int_z^\infty e^{ty} dF(y)}{e^{tz}\overline{F}(z)} = \int_0^\infty e^{ty} dF(y) = E(e^{tY}) \tag{2.24}$$

Corolário 2.1 *No modelo de risco (2.2), se $Z_k = Y_k - p$, $k = 1, 2, \ldots$, onde $Y_1, Y_2, \ldots$ são variáveis aleatórias independentes e não-negativas e $p > E(Y_k)$ é uma constante, considere $R_0 > 0$ tal que $E(e^{R_0 Z_1}) = 1$. Então,*

$$\psi(u, i_s) \leq \beta . E\big(e^{-R_0 u(1+I_1)} \mid I_0 = i_s\big), \quad u \geq 0, \tag{2.25}$$

onde

$$\beta^{-1} = \inf_{t \geq 0} \frac{\displaystyle\int_t^{+\infty} e^{R_0 y} dF(y)}{e^{R_0 t}\overline{F}(t)}, \tag{2.26}$$

e F é a distribuição comum de Y_k, $k = 1, 2, \ldots$.

Em particular, se F é uma distribuição NWUC, então

$$\psi(u, i_s) \leq \Big(E(e^{R_0 Y_1})\Big)^{-1} . E\big(e^{-R_0 u(1+I_1)} \mid I_0 = i_s\big), \quad u \geq 0 \tag{2.27}$$

Demonstração. Nesse caso, $G(z) = P(Y_1 - z \leq p) = F(z+p)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\displaystyle\int_t^{+\infty} e^{R_0 z} dG(z)}{e^{R_0 t}\overline{G}(t)} &= \frac{\displaystyle\int_t^{+\infty} e^{R_0 z} dF(z+p)}{e^{R_0 t}\overline{F}(t+p)} \\
&= \frac{\displaystyle\int_{t+p}^{+\infty} e^{R_0 (y-p)} dF(y)}{e^{R_0 t}\overline{F}(t+p)} \\
&= \frac{\displaystyle\int_{t+p}^{+\infty} e^{R_0 y} e^{-R_0 p} dF(y)}{e^{R_0 t}\overline{F}(t+p)} \\
&= \frac{\displaystyle\int_{t+p}^{+\infty} e^{R_0 y} dF(y)}{e^{R_0 (t+p)}\overline{F}(t+p)}
\end{aligned}$$

Dessa forma, a equação (2.19) dá

$$\beta_0^{-1} = \inf_{t\geq 0} \frac{\displaystyle\int_t^{+\infty} e^{R_0 z} dG(z)}{e^{R_0 t}\overline{G}(t)} = \inf_{t\geq 0} \frac{\displaystyle\int_{t+p}^{+\infty} e^{R_0 y} dF(y)}{e^{R_0 (t+p)}\overline{F}(t+p)} = \inf_{t\geq 0} g(t+p), \text{ onde}$$

$$g(x) = \frac{\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{R_0 y} dF(y)}{e^{R_0 x}\overline{F}(x)}.$$

Entretanto, $\inf_{t\geq 0} g(t+p) \geq \inf_{t\geq 0} g(t) = \beta^{-1}$.

Assim, $\beta_0^{-1} \geq \beta^{-1}$ ou $\beta_0 \leq \beta$. Por isso, a desigualdade (2.25) segue de (2.19), pois

$$\psi(u, i_s) \leq \beta_0 E\big(e^{-R_0 u(1+i_t)} \mid I_0 = i_s\big) \leq \beta . E\big(e^{-R_0 u(1+i_t)} \mid I_0 = i_s\big)$$

Assim, pelo lema anterior, sabemos que se F é NWUC, então $\beta^{-1} = E(e^{R_0 Y_1})$. Portanto, (2.27) segue de (2.25). ■

2.4 Desigualdades para Probabilidade de Ruína pela abordagem Martingale

Outra ferramenta para obter desigualdades para a probabilidade de ruína é a abordagem Martingale. A probabilidade de ruína associada ao processo de risco (2.2) é igual à probabilidade de ruína associada ao processo de risco descontado $\{V_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$. Esse processo de risco descontado considera que o capital V_k será o valor atual, na data zero, do capital U_k, ou seja, na data k toma-se o capital U_k e aplica-se o desconto racional composto à taxa I_k, encontrando o valor atual na data $k-1$, em seguida toma-se esse valor atual e aplica-se o desconto à taxa I_{k-1}, obtendo o valor atual na data $k-2$ e prossegue-se assim até obter o valor atual na data zero, o qual será o V_k. Assim, podemos escrever a probabilidade de ruína em termos do processo de risco descontado da seguinte maneira

$$\psi_n(u, i_s) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} [U_k < 0] \mid I_0 = i_s\Big) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} [V_k < 0] \mid I_0 = i_s\Big), \text{ onde}$$

$$V_k = U_k \prod_{j=1}^{k} (1 + I_j)^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Com objetivo de verificar a igualdade acima consideremos os conjuntos

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} \{w \in \Omega;\ \ U_k(w) < 0\} \text{ e } B = \bigcup_{k=1}^{n} \{w \in \Omega;\ \ V_k(w) < 0\} \text{ e mostremos que A=B.}$$

Se $x \in A \Longrightarrow \exists k_0 \in \mathbf{N},\ \ k_0 \leq n$, tal que $U_{k_0}(x) < 0$. Como $V_{k_0}(x) = U_{k_0}(x) \prod_{j=1}^{k_0} (1 + I_j(x))^{-1}$ e $I_j(x) \geq 0, \forall j$, temos então $V_{k_0}(x) < 0$. Como $k_0 \leq n$ temos que $x \in \bigcup_{k=1}^{n} \{w \in \Omega,\ V_k(w) < 0\} = B$.

Se $x \in B \Longrightarrow \exists k_0 \in \mathbf{N},\ \ k_0 \leq n,\ \ tal\ \ que\ \ V_{k_0}(x) < 0$. Como $I_j(x) \geq 0, \forall j$ temos então $U_{k_0}(x) < 0$. Como $k_0 \leq n$ temos que $x \in \bigcup_{k=1}^{n} \{w \in \Omega,\ \ U_k(w) < 0\} = A$.
Portanto $A = B$.

No modelo clássico de risco (2.9), $\left\{e^{-R_0 U_n}, n = 1, 2, \ldots,\right\}$ é um martingale. Entretanto, para o modelo (2.2) não existe uma constante $r > 0$ tal que $\left\{e^{-rU_n}, n = 1, 2, \ldots\right\}$

seja um martingale. Por outro lado, existe uma constante $r > 0$ tal que $\{e^{-rV_n}, n = 1, 2, \ldots\}$ é um supermartingale, permitindo-nos obter desigualdades envolvendo probabilidades pelo Teorema da Parada Opcional. Essa constante está definida na proposição seguinte.

Proposição 2.1 *Assuma que $E(Z_1) < 0$, que $R_0 > 0$ é a constante satisfazendo (2.10), e que exista $\rho_s > 0$ satisfazendo*

$$E\big(e^{\rho_s Z_1(1+I_1)^{-1}} \mid I_0 = i_s\big) = 1, \quad s = 0, 1, \ldots, N \tag{2.28}$$

Então,

$$R_1 = \min_{0\leq\, s\, \leq N} \{\rho_s\} \geq R_0 \tag{2.29}$$

e, para todo $s = 0, 1, \ldots, N$,

$$E\big(e^{R_1 Z_1(1+I_1)^{-1}} \mid I_0 = i_s\big) \leq 1 \tag{2.30}$$

Demonstração. Para qualquer $s = 0, 1, \ldots, N$, sabemos que a função

$l_s(r) = E\big(e^{rZ_1(1+I_1)^{-1}} \mid I_0 = i_s\big) - 1$ é uma função convexa. De fato, essa função pode ser escrita da seguinte forma:

$$l_s(r) \;=\; \frac{1}{P(I_0 = i_s)} \int_{(I_0=i_s)} e^{rZ_1(1+I_1)^{-1}} dP - 1$$

Assim, em virtude do integrando possuir derivada contínua em relação a r, a derivada dessa função será:

$$\begin{aligned} l_s'(r) &= \frac{1}{P(I_0 = i_s)} \frac{d}{dr}\left[\int_{(I_0=i_s)} e^{rZ_1(1+I_1)^{-1}} dP\right] \\ &= \frac{1}{P(I_0 = i_s)} \int_{(I_0=i_s)} \frac{d}{dr}\left[e^{rZ_1(1+I_1)^{-1}}\right] dP \\ &= \frac{1}{P(I_0 = i_s)} \int_{(I_0=i_s)} e^{rZ_1(1+I_1)^{-1}} Z_1(1 + I_1)^{-1} dP \end{aligned}$$

Assim,

$$l_s''(r) = \frac{1}{P(I_0 = i_s)} \int_{(I_0=i_s)} e^{rZ_1(1+I_1)^{-1}} Z_1^2 (1+I_1)^{-2} dP \text{ e, portanto, } l_s''(r) \geq 0, \ \forall r,$$

mostrando nossa afirmação.

Além disso, $l_s(0) = E\big(e^{0Z_1(1+I_1)^{-1}} \mid I_0 = i_s\big) - 1 = 0$ e

$$l_s'(0) = \frac{1}{P(I_0 = i_s)} \int_{(I_0=i_s)} Z_1(1+I_1)^{-1} dP = E\big(Z_1(1+I_1)^{-1} \mid I_0 = i_s\big)$$

Como as variáveis aleatórias da última equação são independentes, tem-se:

$l_s'(0) = E(Z_1)E\big((1+I_1)^{-1} \mid I_0 = i_s\big)$. Como $E(Z_1) < 0$ e $(1+I_1)^{-1} > 0$, então $E\big((1+I_1)^{-1} \mid I_0 = i_s\big) > 0$, o que implica $l_s'(0) < 0$.

Logo, ρ_s é a única raiz positiva da equação $l_s(r) = 0$ em $(0, +\infty)$. Assim, pela desigualdade de Jensen e (2.10), tem-se:

$$\begin{aligned}
E\big(e^{R_0 Z_1(1+I_1)^{-1}} \mid I_0 = i_s\big) &= \frac{1}{P(I_0 = i_s)} \int_{(I_0=i_s)} e^{R_0 Z_1(1+I_1)^{-1}} dP \\
&= \frac{1}{P(I_0 = i_s)} \int_{\{w, I_0(w)=i_s, I_1(w)\in\mathcal{J}, Z_1(w)\in\mathbb{R}\}} e^{R_0 Z_1(1+I_1)^{-1}} dP \\
&= \frac{1}{P(I_0 = i_s)} \int_R \sum_{j\in\mathcal{J}} e^{R_0 z(1+j)^{-1}} dP_{Z_1}(z) dP_{I_1,I_0}(j, i_s) \\
&= \frac{1}{P(I_0 = i_s)} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathcal{J}} e^{R_0 z(1+j)^{-1}} dG(z) P(I_1 = j, I_0 = i_s) \\
&= \sum_{t=0}^{N} P_{st} \int_{\mathbb{R}} e^{R_0 z(1+i_t)^{-1}} dG(z) \\
&= \sum_{t=0}^{N} P_{st} E\big(e^{R_0 Z_1(1+i_t)^{-1}}\big)
\end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo $Y = e^{R_0 Z_1}$ e $\varphi(y) = y^{(1+i_t)^{-1}}$, tem-se:

$$\varphi''(y) = \Big[(1+i_t)^{-2} - (1+i_t)^{-1}\Big] y^{(1+i_t)^{-1}-2}.$$

Notemos que
$(1+i_t)^2 = (1+i_t)(1+i_t) \geq (1+i_t)$. Portanto, $(1+i_t)^{-2} - (1+i_t)^{-1} \leq 0$. além disso, $y^{(1+i_t)^{-1}-2}$ é positiva, pois y é positiva. Assim, $\varphi''(y) \leq 0$. Concluímos, então, que $\varphi(y)$ é côncava. Logo, usando a versão da desigualdade de Jensen para funções côncavas e (2.10), temos:

$$E[\varphi(Y)] \leq \varphi\big(EY\big) \Longrightarrow E\big(e^{R_0 Z_1 (1+i_t)^{-1}}\big) \leq \big(EY\big)^{(1+i_t)^{-1}} = \big(E(e^{R_0 Z_1})\big)^{(1+i_t)^{-1}}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} E\big(e^{R_0 Z_1 (1+I_1)^{-1}} \mid I_0 = i_s\big) &= \sum_{t=0}^{N} P_{st} E\big(e^{R_0 Z_1 (1+i_t)^{-1}}\big) \\ &\leq \sum_{t=0}^{N} P_{st} \big(E(e^{R_0 Z_1})\big)^{(1+i_t)^{-1}} \\ &\leq \sum_{t=0}^{N} P_{st} = 1 \end{aligned}$$

Como $l_s(R_0) = E\big(e^{R_0 Z_1 (1+I_1)^{-1}} \mid I_0 = i_s\big) - 1$, temos $l_s(R_0) \leq 0$. Portanto, $R_0 \leq \rho_s$ e

$R_1 = \min\limits_{0 \leq\, s\, \leq N} \rho_s \geq R_0$. Assim, a desigualdade (2.29) é válida. Além disso, para todo

$s = 0, 1, \ldots, N, \quad R_1 = \min\limits_{0 \leq\, t\, \leq N} \rho_t \leq \rho_s,$ o que implica $l_s(R_1) \leq 0$, isto é,

$E\big(e^{R_1 Z_1 (1+I_1)^{-1}} \mid I_0 = i_s\big) - 1 \leq 0$ e, finalmente,

$E\big(e^{R_1 Z_1 (1+I_1)^{-1}} \mid I_0 = i_s\big) \leq 1$ ■

Teorema 2.2 *Sob as condições da **Proposição 2.1**, para todo $s = 0, 1, \ldots, N$, tem-se:*

$$\psi(u, i_s) \leq e^{-R_1 u}, \quad u \geq 0 \tag{2.31}$$

Demonstração. Para o processo de risco $\{U_k\}$ dado pela equação (2.2), denotamos

$$V_k = U_k \prod_{j=1}^{k} (1 + I_j)^{-1} \tag{2.32}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
V_k &= \left[u \prod_{t=1}^{k} (1 + I_t) - \sum_{t=1}^{k} (Z_t \prod_{\lambda=t+1}^{k} (1 + I_\lambda)) \right] \prod_{j=1}^{k} (1 + I_j)^{-1} \\
&= u \prod_{t=1}^{k} (1 + I_t) \prod_{j=1}^{k} (1 + I_j)^{-1} - \prod_{j=1}^{k} (1 + I_j)^{-1} \sum_{t=1}^{k} (Z_t \prod_{\lambda=t+1}^{k} (1 + I_\lambda)) \\
&= u \prod_{j=1}^{k} (1 + I_j)(1 + I_j)^{-1} - \sum_{t=1}^{k} (Z_t \prod_{j=1}^{k} (1 + I_j)^{-1} \prod_{\lambda=t+1}^{k} (1 + I_\lambda)) \\
&= u - \sum_{t=1}^{k} (Z_t \prod_{j=1}^{t} (1 + I_j)^{-1} \prod_{j=t+1}^{k} (1 + I_J)^{-1} \prod_{\lambda=t+1}^{k} (1 + I_\lambda)) \\
&= u - \sum_{t=1}^{k} (Z_t \prod_{j=1}^{t} (1 + I_j)^{-1}
\end{aligned}$$

e sendo $S_n = e^{-R_1 V_n}$, podemos obter:

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= e^{\left\{ -R_1 \left[u - \sum_{t=1}^{n+1} (Z_t \prod_{j=1}^{t} (1 + I_j)^{-1}) \right] \right\}} \\
&= e^{\left\{ -R_1 \left[u - \sum_{t=1}^{n} (Z_t \prod_{j=1}^{t} (1 + I_j)^{-1}) - Z_{n+1} \prod_{j=1}^{n+1} (1 + I_j)^{-1} \right] \right\}} \\
&= e^{-R_1 V_n} e^{\left\{ R_1 Z_{n+1} \prod_{j=1}^{n+1} (1 + I_j)^{-1} \right\}} \\
&= S_n e^{\left\{ R_1 Z_{n+1} \prod_{j=1}^{n+1} (1 + I_j)^{-1} \right\}}
\end{aligned}$$

Assim, para qualquer $n \geq 1$, e sendo S_n mensurável em relação a $\sigma(I_1,\ldots,I_n,Z_1,\ldots,Z_n)$, temos:

$$
\begin{aligned}
E(S_{n+1} \mid Z_1,\ldots,Z_n,I_1,\ldots,I_n) &= E\Big(S_n e^{\left\{R_1 Z_{n+1}\prod_{j=1}^{n+1}(1+I_j)^{-1}\right\}} \mid Z_1,\ldots,Z_n,I_1,\ldots,I_n\Big)\\
&= S_n E\Big(e^{\left\{R_1 Z_{n+1}\prod_{j=1}^{n+1}(1+I_j)^{-1}\right\}} \mid Z_1,\ldots,Z_n,I_1,\ldots,I_n\Big)\\
&= S_n E\Big(e^{\left\{R_1 Z_{n+1}(1+I_{n+1})^{-1}\prod_{j=1}^{n}(1+I_j)^{-1}\right\}} \mid Z_1,\ldots,Z_n,I_1,\ldots,I_n\Big)
\end{aligned}
$$

Como $\{Z_n,\ n=1,2,\ldots\}$ é *(i.i.d.)* e independente de $\{I_n,\ n=1,2,\ldots\}$, tem-se:

$$
E(S_{n+1} \mid Z_1,\ldots,Z_n,I_1,\ldots,I_n) = S_n E\Big(e^{\left\{R_1 Z_{n+1}(1+I_{n+1})^{-1}\prod_{j=1}^{n}(1+I_j)^{-1}\right\}} \mid I_1,\ldots,I_n\Big)
$$

Considerando $Y = e^{R_1 Z_{n+1}(1+I_{n+1})^{-1}}$, $\varphi(y) = y^{\left\{\prod_{j=1}^{n}(1+I_j)^{-1}\right\}}$ e aplicando a versão da desigualdade de Jensen, para esperança condicional, à função côncava φ, tem-se:

$$
\begin{aligned}
E(S_{n+1} \mid Z_1,\ldots,Z_n,I_1,\ldots,I_n) &\leq S_n\Big(E\big(e^{R_1 Z_{n+1}(1+I_{n+1})^{-1}} \mid I_1,\ldots,I_n\big)\Big)^{\prod_{j=1}^{n}(1+I_j)^{-1}}\\
&\leq S_n\Big(E\big(e^{R_1 Z_{n+1}(1+I_{n+1})^{-1}} \mid I_1,\ldots,I_n\big)\Big)^{\prod_{j=1}^{n}(1+I_j)^{-1}}
\end{aligned}
$$

Em virtude de $\{I_n,\ n=1,2,\ldots\}$ seguir uma cadeia de Markov, temos:

$$
E(S_{n+1} \mid Z_1,\ldots,Z_n,I_1,\ldots,I_n) \leq S_n\Big(E\big(e^{R_1 Z_{n+1}(1+I_{n+1})^{-1}} \mid I_n\big)\Big)^{\prod_{j=1}^{n}(1+I_j)^{-1}}.
$$

Por outro lado, sendo $e^{R_1 Z_{n+1}(1+I_{n+1})^{-1}}$ função de Z_{n+1} e I_{n+1}, ou seja,

$\xi(Z_{n+1}, I_{n+1}) = e^{R_1 Z_{n+1}(1+I_{n+1})^{-1}}$, tem-se:

$$\begin{aligned} E(\xi(Z_{n+1}, I_{n+1}) \mid I_n = j) &= \int_\Omega \xi(Z_{n+1}, I_{n+1}) dP(w \mid I_n = j) \\ &= \int_{\mathbb{R}\times\mathcal{J}} \xi(z,i) dF_{Z_{n+1},I_{n+1}}(z, i \mid I_n = j) \end{aligned}$$

Usando a independência de $\{Z_n\}$ com $\{I_n\}$, a estacionariedade da Cadeia de Markov e o fato de $\{Z_k\}_{k\geq 1}$ ser i.i.d., tem-se:

$$\begin{aligned} E(\xi(Z_{n+1}, I_{n+1}) \mid I_n = j) &= \int_{\mathbb{R}\times\mathcal{J}} \xi(z,i) dP_{Z_{n+1}}(z \mid I_n = j) dP_{I_{n+1}}(i \mid I_n = j) \\ &= \int_{R\times\mathcal{J}} \xi(z,i) dP_{Z_{n+1}}(z) P(I_{n+1} = i \mid I_n = j) \\ &= \int_{\mathbb{R}\times\mathcal{J}} \xi(z,i) dP_{Z_1}(z) P(I_1 = i \mid I_0 = j) \\ &= \int_{\mathbb{R}\times\mathcal{J}} \xi(z,i) dP_{Z_1}(z \mid I_0 = j) dP_{I_1}(i \mid I_0 = j) \\ &= \int_{\mathbb{R}\times\mathcal{J}} \xi(z,i) dP_{Z_1,I_1}(z, i \mid I_0 = j) \\ &= \int_\Omega \xi(Z_1, I_1) dP(w \mid I_0 = j) \\ &= E\Big(e^{R_1 Z_1 (1+I_1)^{-1}} \mid I_0 = j\Big) \end{aligned}$$

Como essa igualdade vale para todo $j \in \mathcal{J}$, então concluímos que

$E(\xi(Z_{n+1}, I_{n+1}) \mid I_n) = E(\xi(Z_1, I_1) \mid I_0)$.

Portanto,

$$E\big(S_{n+1} \mid Z_1, \ldots, Z_n, I_1, \ldots, I_n\big) \leq S_n \Big(E\big(e^{R_1 Z_1 (1+I_1)^{-1}} \mid I_0\big)\Big)^{\prod_{j=1}^{n} (1+I_j)^{-1}} \leq S_n.$$

Esse resultado implica que $\{S_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ é um supermartingale com respeito à $\sigma(I_1, \ldots, I_n, Z_1, \ldots, Z_n)$. Seja agora $T_s = min\,\{k;\ V_k < 0 \mid I_0 = i_s\}$, onde V_k é dado por (2.32). Dessa forma, T_s é um tempo de parada e $n \wedge T_s = min\,\{n, T_s\}$ é um tempo de parada limitado, logo pelo Teorema da Parada Opcional para supermartingales, tem-se:

$E(S_{n\wedge T_s}) \leq E(S_0) = E(e^{-R_1 V_0}) = E(e^{-R_1 u}) = e^{-R_1 u}$. Portanto,

$e^{-R_1 u} \geq E(S_{n\wedge T_s}) \geq E(S_{n\wedge T_s} I_{\left[T_s \leq n\right]}) = E(S_{T_s} I_{\left[T_s \leq n\right]}) = E(e^{-R_1 V_{T_s}} I_{\left[T_s \leq n\right]})$.

Observemos que $V_{T_s} < 0$, pois $T_s = min\,\{k;\ V_k < 0 \mid I_0 = i_s\}$. Assim, $-R_1 V_{T_s} \geq 0$, implicando $e^{-R_1 V_{T_s}} \geq e^0 = 1$. Logo,

$e^{-R_1 u} \geq E(I_{\left[T_s \leq n\right]}) = P(T_s \leq n)$.

Daí,

$$\begin{aligned} e^{-R_1 u} &\geq P\big([V_1 < 0] \cup [V_2 < 0] \cup \ldots \cup [V_n < 0] \mid I_0 = i_s\big) \\ &\geq P\big(\bigcup_{k=1}^{n} [V_k < 0] \mid I_0 = i_s\big) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\psi_n(u, i_s) \leq e^{-R_1 u} \tag{2.33}$$

Assim, a desigualdade (2.31) segue fazendo $n \longrightarrow +\infty$ em (2.33). ■

É claro que o limite superior obtido usando martingale é também menor que o limite superior de Lundberg, isto é, $e^{-R_1 u} \leq e^{-R_0 u}$, $\ u \geq 0$, já que a desigualdade (2.29) vale. Além disso, se $I_n = 0$, para todo $n = 0, 1, \ldots$, então $R_1 = R_0$ e o limite superior no **Teorema 2.2** se transforma no limite superior de Lundberg.

Resultados numéricos, apresentados no capítulo seguinte, sugerem que o limite superior obtido pela abordagem indutiva da seção 2.2 é menor que o obtido pela abordagem martingale desta seção.

Capítulo 3

Resultados Numéricos

3.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos um exemplo particular do nosso estudo, para ilustrar os limites obtidos no capítulo anterior e, em seguida, utilizando o programa MAPLE 9 para ajudar nos cálculos e gráficos, apresentaremos outro exemplo e voltaremos ao primeiro exemplo, mostrando comparações dos resultados obtidos com as duas abordagens consideradas. Por este motivo, adicionaremos os comandos utilizados no MAPLE, a fim de que aqueles que desejarem, e se acharem capazes, possam refazer esses cálculos.

3.2 Exemplo numérico

Esse exemplo ilustra os limites obtidos nas seções 2.2 e 2.3. Para isso, assumimos que o valor das indenizações no ano k é Y_k. Consideramos Y_1 tendo uma distribuição Gamma com cada parâmetro igual a $\frac{1}{2}$, que $E(Y_1) = 1$ e $Var(Y_1) = 2$. Além disso, o prêmio anual é $p = 1,1$, isto é, existe uma carga de 10%. Assim, $Z_k = Y_k - 1,1$, $k = 1, 2, \ldots$. Consideraremos um modelo de juros com três possíveis taxas de juros: $i_0 = 6\%,\ i_1 = 8\%\ \ e\ \ i_2 = 10\%$. Seja $\mathbf{P} = \{P_{st}\}$ a matriz de transição da cadeia dada por

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,15 & 0,7 & 0,15 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Assim, nosso modelo de taxa de juros incorpora média de retorno a um nível de 8%.

A constante R_0 que satisfaz (2.9) é calculada como segue:

$E(e^{R_0 Z_1}) = 1 \Longrightarrow E(e^{R_0(Y_1 - 1,1)}) = 1 \Longrightarrow E(e^{R_0 Y_1} e^{-1,1R_0}) = 1 \Longrightarrow e^{-1,1R_0} E(e^{R_0 Y_1}) = 1$

Como nossa distribuição Gamma é NWUC, podemos aplicar os resultados do corolário 3.1, sendo $M_Y(t) = E(e^{tY_1}) = (1-2t)^{\frac{-1}{2}}$. Assim,

$e^{-1,1R_0}(1-2R_0)^{\frac{-1}{2}} = 1 \Longrightarrow -1,1R_0 - \frac{1}{2}ln(1-2R_0) = 0$. Daí,

$1,1R_0 + \frac{1}{2}ln(1-2R_0) = 0 \Longrightarrow R_0 = 0,08807$.

Além disso, para $s = 0$, tem-se:

$$\psi(u, i_0) \leq \left(E(e^{R_0 Y_1})\right)^{-1} E(e^{-R_0 u(1+I_1)} \mid I_0 = i_0), \; u \geq 0$$

Considerando $\xi(I_1, I_0) = e^{-R_0 u(1+I_1)}$, temos:

$$\psi(u, i_0) \leq ((1-2R_0)^{-1/2})^{-1} \frac{1}{P(I_0 = i_0)} \int_{(I_0 = i_0)} \xi(I_1, I_0) dP$$

Aplicando o teorema 1.4, temos:

$$\begin{aligned}
\psi(u, i_0) &\leq (1-2R_0)^{1/2} \frac{1}{P(I_0 = i_0)} \int_{\mathcal{I}} \int_{\{i_0\}} \xi(i_t, i) dF_{I_1, I_0}(i_t, i) \\
&\leq (1-2R_0)^{1/2} \frac{1}{P(I_0 = i_0)} \int_{\mathcal{I}} \xi(i_t, i_0) dF_{I_1, I_0}(i_t, i_0) \\
&\leq (1-2R_0)^{1/2} \frac{1}{P(I_0 = i_0)} \sum_{t=0}^{2} \xi(i_t, i_0) P(I_1 = i_t, I_0 = i_0) \\
&\leq (1-2R_0)^{1/2} \sum_{t=0}^{2} P_{0t} \xi(i_t, i_0) \\
&\leq (1-2R_0)^{1/2} \Big(P_{00}\xi(i_0, i_0) + P_{01}\xi(i_1, i_0) + P_{02}\xi(i_2, i_0) \Big) \\
&\leq (1-2R_0)^{1/2} \Big(0,2e^{-1,06R_0 u} + 0,8e^{-1,08R_0 u} + 0e^{-1,1R_0 u} \Big)
\end{aligned}$$

Daí,

$$\psi(u,i_0) \leq (1-2R_0)^{1/2}\Big(0,2e^{-1,06R_0u} + 0,8e^{-1,08R_0u}\Big), \quad u \geq 0. \tag{3.1}$$

Da mesma forma, encontramos expressões análogas para $\psi(u,i_s)$, considerando $s=1$ e $s=2$.

Podemos também encontrar R_1 como segue:

Para $s=0,1,2$, tem-se:

$$E\Big(e^{\rho_s Z_1(1+I_1)^{-1}} \mid I_0 = i_s\Big) = 1$$

$$E\Big(e^{\rho_s (Y_1-1,1)(1+I_1)^{-1}} \mid I_0 = i_s\Big) = 1$$

$$E\Big(e^{(\rho_s Y_1-1,1\rho_s)(1+I_1)^{-1}} \mid I_0 = i_s\Big) = 1$$

$$\int_\Omega e^{(\rho_s Y_1-1,1\rho_s)(1+I_1)^{-1}} dP(w \mid I_0 = i_s) = 1$$

$$\int_\mathbb{R}\int_\mathcal{J} e^{(\rho_s y-1,1\rho_s)(1+i_t)^{-1}} dP_{Y_1,I_1}(y, i_t \mid I_0 = i_s) = 1$$

$$\int_\mathbb{R}\int_\mathcal{J} e^{(\rho_s y-1,1\rho_s)(1+i_t)^{-1}} dP_{Y_1}(y \mid I_0 = i_s) dP_{I_1}(i_t \mid I_0 = i_s) = 1$$

$$\int_\mathbb{R}\int_\mathcal{J} e^{(\rho_s y-1,1\rho_s)(1+i_t)^{-1}} dP_{Y_1}(y) dP_{I_1}(i_t \mid I_0 = i_s) = 1$$

$$\int_\mathbb{R}\sum_{t=0}^{2} e^{(\rho_s y-1,1\rho_s)(1+i_t)^{-1}} dP_{Y_1}(y) P(I_1 = i_t \mid I_0 = i_s) = 1$$

$$\sum_{t=0}^{2} P_{st} e^{-1,1\rho_s(1+i_t)^{-1}} \int_\mathbb{R} e^{\rho_s y(1+i_t)^{-1}} dP_{y_1}(y) = 1$$

$$\sum_{t=0}^{2} P_{st} e^{-1,1\rho_s(1+i_t)^{-1}} M_{Y_1}\left(\frac{\rho_s}{1+i_t}\right) = 1.$$

Assim, para $s=0$,

$$P_{00}e^{-1,1\rho_0(1+i_0)^{-1}} M_{Y_1}(\frac{\rho_0}{1+i_0}) + P_{01}e^{-1,1\rho_0(1+i_1)^{-1}} M_{Y_1}(\frac{\rho_0}{1+i_1}) + P_{02}e^{-1,1\rho_0(1+i_2)^{-1}} M_{Y_1}(\frac{\rho_0}{1+i_2}) = 1$$

$$0,2(1-\frac{2\rho_0}{1,06})^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{-1,1\rho_0}{1,06}}+0,8(1-\frac{2\rho_0}{1,08})^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{-1,1\rho_0}{1,08}}+0(1-\frac{2\rho_0}{1,1})^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{-1,1\rho_0}{1,1}}=1$$

implicando $\rho_0 = 0,09475$.

Para $s = 1$,

$$P_{10}e^{-1,1\rho_1(1+i_0)^{-1}}M_{Y_1}(\frac{\rho_1}{1+i_0})+P_{11}e^{-1,1\rho_1(1+i_1)^{-1}}M_{Y_1}(\frac{\rho_1}{1+i_1})+P_{12}e^{-1,1\rho_1(1+i_2)^{-1}}M_{Y_1}(\frac{\rho_1}{1+i_2})=1$$

$$0,15(1-\frac{2\rho_1}{1,06})^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{-1,1\rho_1}{1,06}}+0,7(1-\frac{2\rho_1}{1,08})^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{-1,1\rho_1}{1,08}}+0,15(1-\frac{2\rho_1}{1,1})^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{-1,1\rho_1}{1,1}}=1$$

implicando $\rho_1 = 0,09509$.

Para $s = 2$,

$$P_{20}e^{-1,1\rho_2(1+i_0)^{-1}}M_{Y_1}(\frac{\rho_2}{1+i_0})+P_{21}e^{-1,1\rho_2(1+i_1)^{-1}}M_{Y_1}(\frac{\rho_2}{1+i_1})+P_{22}e^{-1,1\rho_2(1+i_2)^{-1}}M_{Y_1}(\frac{\rho_2}{1+i_2})=1$$

$$0(1-\frac{2\rho_2}{1,06})^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{-1,1\rho_2}{1,06}}+0,8(1-\frac{2\rho_2}{1,08})^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{-1,1\rho_2}{1,08}}+0,2(1-\frac{2\rho_2}{1,1})^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{-1,1\rho_2}{1,1}}=1$$

implicando $\rho_2 = 0,09545$.

Assim, $R_1 = min\,\{\rho_0, \rho_1, \rho_2\} = 0,09475$ e o Teorema 2.2 dá:

$$\psi(u, i_s) \leq e^{-R_1 u}, \quad u \geq 0 \tag{3.2}$$

3.3 Exemplos numéricos utilizando o MAPLE

Assumiremos que o valor das indenizações no ano k é Y_k. Assim, no primeiro exemplo, suporemos que Y_1 tem distribuição exponencial com parâmetro $\lambda = 1$, de modo que $E(Y_1) = 1$ e $var(Y_1) = 1$; e, no segundo exemplo, suporemos que Y_1 tem distribuição gama, com cada parâmetro igual a $\frac{1}{2}$, de modo que $E(Y_1) = 1$ e $var(Y_1) = 2$. Além disso, o prêmio anual em ambos os exemplos é $1,1$, a saber existe uma carga de segurança de 10%. Assim $Z_k = Y_k - 1,1,\ k = 1, 2, ...$ Consideraremos um modelo de juros com três possíveis taxas: $i_0 = 6\%, i_1 = 8\%$ e $i_2 = 10\%$, com matriz de transição de probabilidades $P = \{P_{st}\}$ dada por

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0.15 & 0.7 & 0.15 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Podemos, com isso, apresentar os exemplos em detalhes.

Exemplo 3.1 *Encontremos, utilizando o programa MAPLE 9 para resolver os cálculos, os limitantes da probabilidade de ruína para os três modelos, a saber: Lundberg, pela equação de recorrência e pela abordagem martingale.*

Lundberg: Neste caso, se $E(Z_1) < 0$ e existir R_0 tal que $e^{R_0 Z_1} = 1$ então $\psi(u) \leq e^{-R_0 u}, u \geq 0$.

Note que

$$Z_1 = Y_1 - 1.1 \Rightarrow E(Z_1) = E(Y_1) - 1.1 = 1 - 1.1 = -0.1 < 0$$

o que faz com que a primeira hipótese seja satisfeita.

Note que

$$e^{R_0 Z_1} = 1 \Leftrightarrow e^{R_0(Y_1 - 1.1)} = 1 \Leftrightarrow e^{R_0 Y_1} e^{-1.1 R_0} = 1$$

mas $e^{R_0 Y_1} = \frac{1}{1-R_0}$ por ser a função geratriz de momentos de uma exponencial no ponto R_0, desta forma a equação anterior pode ser reescrita como

$$e^{R_0 Z_1} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-R_0} e^{-1.1 R_0} = 1.$$

Usando o comando fsolve do MAPLE 9 para resolver esta equação, obtemos

```
> R0:=fsolve(exp(-1.1*x)*(1/(1-x))=1,x,0.001..1);
```

```
R0 := 0.1761341436
```

e teremos que $\psi(u) \leq e^{-R_0 u} = e^{-0.1761341436u}, u \geq 0$.

Recursivo: O corolário 2.1 diz que se $Z_k = Y_k - p, k = 1, 2, ...$ com $Y_1, Y_2, ...$ v.a.'s independentes e não-negativas com $p > E(Y_1)$ e existe uma constante R_0 satisfazendo (2.9), então

$$\psi(u, i_s) \leq \beta E(e^{-R_0 u(1+I_1)} | I_0 = i_s), u \geq 0$$

onde

$$\beta^{-1} = \inf_{t \geq 0} \frac{\int_t^\infty e^{R_0 y} dF(y)}{e^{R_0 t}\overline{F}(t)}$$

Como uma v.a. com distribuição exponencial com parâmetro λ tem densidade $f(y) = \lambda e^{-\lambda y}, y \geq 0$ e $f(y) = 0, y < 0$, calculando a fração acima para os valores de $\lambda \neq R_0$ temos

$$\frac{\int_t^\infty e^{R_0 y} dF(y)}{e^{R_0 t}\overline{F}(t)} = \frac{\int_t^\infty e^{R_0 y} \lambda e^{-\lambda y} dy}{e^{R_0 t} \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda y} dy} = \frac{\lambda \int_t^\infty e^{-y(\lambda - R_0)} dy}{e^{R_0 t} e^{-\lambda t}} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda - R_0} e^{-t(\lambda - R_0)}}{e^{-t(\lambda - R_0)}} = \frac{\lambda}{\lambda - R_0}.$$

Ou seja, a fração acima é um valor constante para todo $t \geq 0$, logo seu ínfimo é o próprio valor da função, ou seja, $\beta^{-1} = \frac{\lambda}{\lambda - R_0}$. Para o nosso caso em que $\lambda = 1$ e $R_0 = 0.1761341436$ (obtido no caso de Lundberg) temos

```
> 1/(1-R0);
```

1.213789833

```
> beta := 1/%;
```

β:=0.8238658562

Calculando $E(e^{-R_0 u(1+I_1)}|I_0 = i_s)$ temos

$$E(e^{-R_0 u(1+I_1)}|I_0 = i_s) = \sum_{k=0}^{2} e^{-R_0 u(1+i_k)} P(I_1 = i_k|I_0 = i_s) = \sum_{k=0}^{2} e^{-R_0 u(1+i_k)} P_{sk}.$$

Para calcularmos esses valores utilizando o MAPLE precisamos primeiro definir as constantes do problema, a saber P_{sk} que são as entradas da matriz P e i_0, i_1, i_2 que são os juros dados. Podemos fazer isso da seguinte maneira

```
> P:=linalg[matrix](3,3,[0.2,0.8,0,0.15,0.7,0.15,0,0.8,0.2]);
```

$$P := \left[\begin{array}{ccc} 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0.15 & 0.7 & 0.15 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{array}\right].$$

> i[0]:=0.06;

i[0] := 0.06

> i[1]:=0.08;

i[1] := 0.08

> i[2]:=0.1;

i[2] := 0.1

Então calculamos $E(e^{-R_0 u(1+I_1)}|I_0 = i_s) = \sum_{k=0}^{2} e^{-R_0 u(1+i_k)} P_{sk}$ quando $i_s = i_0 = i[0]$ utilizando o comando sum

> sum('exp(-R0*u*(1+i[k]))*P[1,k]', 'k'=1..3) ;

.2*exp(-1.06*R0*u)+.8*exp(-1.08*R0*u)

Note que aparece u na expressão anterior uma vez que não atribuímos valor nenhum ao u. Mais adiante daremos valores ao u e calcularemos explicitamente estes valores. Assim temos que

$$\psi(u, i_0) \leq \beta E(e^{-R_0 u(1+I_1)}|I_0 = i_s) = 0.8238658562 \sum_{k=0}^{2} e^{-0.1761341436 u(1+i_k)} P_{0k}$$

o lado direito desta expressão no MAPLE será introduzida da seguinte maneira

> beta*sum('exp(-R0*u*(1+i[k]))*P[1,k]', 'k'=1..3) ;

Martingale: Na abordagem por martingale, temos pela proposição (2.1) e pelo teorema (2.2), que se $E(Z_1) < 0$ e existem $\rho_s, s = 0, 1, 2, ..., N$ satisfazendo

$$E(e^{\rho_s Z_1 (1+I_1)^{-1}}|I_0 = i_s) = 1, s = 0, 1, ..., N$$

então $R_1 = \min_{0\leq s\leq N}\{\rho_s\} \geq R_0$ e

$$\phi(u, i_s) \leq e^{-R_1 u}, u \geq 0.$$

Então teremos que calcular no nosso caso ρ_0, ρ_1, ρ_2 e tomar $R_1 = \min_{0\leq s\leq 2}\{\rho_s\}$. Com isso teremos

$$\phi(u, i_s) \leq e^{-R_1 u}, u \geq 0.$$

Se calculando $E(e^{\rho_s Z_1 (1+I_1)^{-1}} | I_0 = i_s) = 1$ temos

$$E(e^{\rho_s Z_1 (1+I_1)^{-1}} | I_0 = i_s) = 1 \Leftrightarrow E(e^{\rho_s (Y_1 - 1.1)(1+I_1)^{-1}} | I_0 = i_s) = 1 \Leftrightarrow$$

$$E(e^{\rho_s Y_1 (1+I_1)^{-1} - 1.1\rho_s (1+I_1)^{-1}} | I_0 = i_s) = 1 \Leftrightarrow E(e^{\rho_s Y_1 (1+I_1)^{-1}} e^{-1.1\rho_s (1+I_1)^{-1}} | I_0 = i_s) = 1 \Leftrightarrow$$

Calculando esta esperança acima temos

$$\begin{aligned}
E(e^{\rho_s Y_1 (1+I_1)^{-1}} e^{-1.1\rho_s (1+I_1)^{-1}} | I_0 = i_s) = & \sum_{j\in\mathcal{J}} \int_0^\infty e^{\rho_s y (1+j)^{-1}} e^{-1.1\rho_s (1+j)^{-1}} P_{Y_1, I_1}(y, j | I_0 = i_s) \\
& \sum_{j\in\mathcal{J}} \int_0^\infty e^{\rho_s y (1+j)^{-1}} e^{-1.1\rho_s (1+j)^{-1}} P_{Y_1}(y) P_{I_1}(j | I_0 = i_s) \\
= & \sum_{j\in\mathcal{J}} \left\{ \int_0^\infty e^{\rho_s y (1+j)^{-1}} P_{Y_1}(dy) \right\} e^{-1.1\rho_s (1+j)^{-1}} P_{i_s, j} \\
= & \sum_{j\in\mathcal{J}} M_{Y_1}(\rho_s (1+j)^{-1}) e^{-1.1\rho_s (1+j)^{-1}} P_{i_s, j} \\
= & \sum_{j\in\mathcal{J}} \frac{1}{1 - \rho_s (1+j)^{-1}} e^{-1.1\rho_s (1+j)^{-1}} P_{i_s, j}
\end{aligned}$$

Para não ficarmos com expressões muito grandes no MAPLE definimos algumas funções auxiliares

```
>g:=x→(1/(1-x));
```

g:=x→ $\frac{1}{1-x}$

>h:=→exp(-1.1*x);

h:=x→ $e^{-1.1x}$

Calculando então os valores de ρ_0, ρ_1, ρ_2 temos

> rho1:=fsolve(P[1,1]*h(x/1.06)*g(x/1.06)+P[1,2]*h(x/1.08)*g(x/1.08)
+P[1,3]*h(x/1.1)*g(x/1.1)=1,x,.01..1);

$\rho_1 := 0.1894973986$

> rho2:=fsolve(P[2,1]*h(x/1.06)*g(x/1.06)+P[2,2]*h(x/1.08)*g(x/1.08)
+P[2,3]*h(x/1.1)*g(x/1.1)=1,x,.01..1);

$\rho_2 := 0.1901827749$

> rho3:=fsolve(P[3,1]*h(x/1.06)*g(x/1.06)+P[3,2]*h(x/1.08)*g(x/1.08)
+P[3,3]*h(x/1.1)*g(x/1.1)=1,x,.01..1);

$\rho_3 := 0.1909074468$

> R1:=min(rho1,rho2,rho2); R1 := 0.1894973986

Pelo teorema (2.2), temos então que $\psi(u, i_s) \leq e^{-R_1 u}, u \geq 0$.
Montando nossa tabela para vários valores de u temos, pela substituição destes valores nas expressões anteriormente obtidas, e calculando com ajuda do MAPLE, os seguintes valores

Tabela 3.1: Limites para probabilidade de ruína - caso Exp(1)

u	Indução			Martingale	Lundberg
	$i_s = 6\%$	$i_s = 8\%$	$i_s = 10\%$		
0	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000
5	0.3876793159	0.3863244029	0.3849575051	0.3877141286	0.4145048026
10	0.1503027912	0.1492604355	0.1481995590	0.1503222455	0.1718142314
15	0.0582751600	0.0576736834	0.0570561068	0.0582820584	0.0582820584
20	0.0225955098	0.0222869736	0.0219673784	0.0225967774	0.02952013010
25	0.0087615972	0.0086132080	0.0084581421	0.0087610898	0.01223623570
30	0.0033975599	0.0033290415	0.0032568079	0.0033967983	0.00507197846

Exemplo 3.2 *Neste segundo exemplo, considerando Y_1 com distribuição Gamma, seguiremos os mesmos passos do exemplo anterior. Por isso, evitaremos detalhar demais cada etapa.*

Lundberg: Neste caso, se $E(Z_1) < 0$ e existir R_0 tal que $e^{R_0 Z_1} = 1$ então $\psi(u) \leq e^{-R_0 u}, u \geq 0$.
Note que

$$Z_1 = Y_1 - 1.1 \Rightarrow E(Z_1) = E(Y_1) - 1.1 = 1 - 1.1 = -0.1 < 0$$

o que faz com que a primeira hipótese seja satisfeita.
Note que

$$e^{R_0 Z_1} = 1 \Leftrightarrow e^{R_0 (Y_1 - 1.1)} = 1 \Leftrightarrow e^{R_0 Y_1} e^{-1.1 R_0} = 1$$

mas $e^{R_0 Y_1} = (1 - 2R_0)^{-\frac{1}{2}}$ por ser a função geratriz de momentos de uma gama de parâmetros iguais a $\frac{1}{2}$ no ponto R_0, desta forma a equação anterior pode ser reescrita como

$$e^{R_0 Z_1} = 1 \Leftrightarrow (1 - 2R_0)^{-\frac{1}{2}} e^{-1.1 R_0} = 1.$$

Usando o comando fsolve do MAPLE 9 para resolver esta equação, obtemos

```
>R0:=fsolve(exp(-1.1*x)*(1-2*x)^(-1/2)=1,x,0.001..1);
```

```
R0 := 0.08806707182
```

e teremos que $\psi(u) \leq e^{-R_0 u} = e^{-0.08806707182u}, u \geq 0$.

Recursivo: O corolário (2.1) diz que se $Z_k = Y_k - p, k = 1, 2, ...$ com $Y_1, Y_2, ...$ v.a.'s independentes e não-negativas com $p > E(Y_1)$ e existe uma constante R_0 satisfazendo (2.9), então

$$\psi(u, i_s) \leq \beta E(e^{-R_0 u(1+I_1)} | I_0 = i_s), u \geq 0$$

onde $\beta^{-1} = E(e^{R_0 Y_1})$ caso a F seja uma distribuição NWUC.

Como a distribuição gama é NWUC temos então que

$$\beta^{-1} = E(e^{R_0 Y_1}) = (1 - 2R_0)^{-\frac{1}{2}}.$$

Usando o MAPLE para calcular isso temos

```
> beta:=(1-2*R0)^(1/2);
```

$\beta := .9076705660$

Calculando $E(e^{-R_0 u(1+I_1)} | I_0 = i_s)$ temos

$$E(e^{-R_0 u(1+I_1)} | I_0 = i_s) = \sum_{k=0}^{2} e^{-R_0 u(1+i_k)} P(I_1 = i_k | I_0 = i_s) = \sum_{k=0}^{2} e^{-R_0 u(1+i_k)} P_{sk}.$$

Para calcularmos esses valores utilizando o MAPLE, precisamos primeiro definir as constantes do problema, a saber P_{sk}, que são as entradas da matriz P, e i_0, i_1, i_2, que são os juros dados. Podemos fazer isso da seguinte maneira

```
> P:=linalg[matrix](3,3,[0.2,0.8,0,0.15,0.7,0.15,0,0.8,0.2]);
```

$$P := \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0.15 & 0.7 & 0.15 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

> i[0]:=0.06;

i[0] := 0.06

> i[1]:=0.08;

i[1] := 0.08

> i[2]:=0.1;

i[2] := 0.1

Então calculamos $E(e^{-R_0u(1+I_1)}|I_0 = i_s) = \sum_{k=0}^{2} e^{-R_0u(1+i_k)}P_{sk}$ quando $i_s = i_0 = i[0]$ utilizando o comando sum

> sum('exp(-R0*u*(1+i[k]))*P[1,k]', 'k'=1..3) ;

.2*exp(-1.06*R0*u)+.8*exp(-1.08*R0*u)

Note que aparece u na expressão anterior uma vez que não atribuímos valor nenhum ao u. Mais adiante daremos valores ao u e calcularemos explicitamente estes valores. Assim temos que

$$\psi(u, i_0) \leq \beta E(e^{-R_0u(1+I_1)}|I_0 = i_s) = 0.9076705660 \sum_{k=0}^{2} e^{-0.08806707182u(1+i_k)}P_{0k}$$

o lado direito desta expressão no MAPLE será introduzida da seguinte maneira

> beta*sum('exp(-R0*u*(1+i[k]))*P[1,k]', 'k'=1..3) ;

Martingale: Na abordagem por martingale, temos pela proposição (2.1) e pelo teorema (2.2), que se $E(Z_1) < 0$ e existem $\rho_s, s = 0, 1, 2, ..., N$ satisfazendo

$$E(e^{\rho_s Z_1(1+I_1)^{-1}}|I_0 = i_s) = 1, s = 0, 1, ..., N$$

então $R_1 = \min_{0\leq s\leq N}\{\rho_s\} \geq R_0$ e

$$\phi(u, i_s) \leq e^{-R_1u}, u \geq 0.$$

Então teremos que calcular no nosso caso ρ_0, ρ_1, ρ_2 e tomar $R_1 = \min_{0\leq s\leq 2}\{\rho_s\}$. Com isso teremos

$$\phi(u, i_s) \leq e^{-R_1 u}, u \geq 0.$$

Se $E(e^{\rho_s Z_1(1+I_1)^{-1}}|I_0 = i_s) = 1$, então

$$E(e^{\rho_s Z_1(1+I_1)^{-1}}|I_0 = i_s) = 1 \Leftrightarrow E(e^{\rho_s(Y_1-1.1)(1+I_1)^{-1}}|I_0 = i_s) = 1 \Leftrightarrow$$

$$E(e^{\rho_s Y_1(1+I_1)^{-1}-1.1\rho_s(1+I_1)^{-1}}|I_0 = i_s) = 1 \Leftrightarrow E(e^{\rho_s Y_1(1+I_1)^{-1}}e^{-1.1\rho_s(1+I_1)^{-1}}|I_0 = i_s) = 1$$

Calculando a esperança acima, temos

$$\begin{aligned}
E(e^{\rho_s Y_1(1+I_1)^{-1}}e^{-1.1\rho_s(1+I_1)^{-1}}|I_0 = i_s) &= \sum_{j\in\mathcal{J}}\int_0^\infty e^{\rho_s y(1+j)^{-1}}e^{-1.1\rho_s(1+j)^{-1}}P_{Y_1,I_1}(y, j|I_0 = i_s) \\
&= \sum_{j\in\mathcal{J}}\int_0^\infty e^{\rho_s y(1+j)^{-1}}e^{-1.1\rho_s(1+j)^{-1}}P_{Y_1}(y)P_{I_1}(j|I_0 = i_s) \\
&= \sum_{j\in\mathcal{J}}\left\{\int_0^\infty e^{\rho_s y(1+j)^{-1}}P_{Y_1}(dy)\right\}e^{-1.1\rho_s(1+j)^{-1}}P_{i_s,j} \\
&= \sum_{j\in\mathcal{J}} M_{Y_1}(\rho_s(1+j)^{-1})e^{-1.1\rho_s(1+j)^{-1}}P_{i_s,j} \\
&= \sum_{j\in\mathcal{J}}(1-2\rho_s(1+j)^{-1})^{-\frac{1}{2}}e^{-1.1\rho_s(1+j)^{-1}}P_{i_s,j}
\end{aligned}$$

Para não ficarmos com expressões muito grandes no MAPLE definimos algumas funções auxiliares

>g:=x→(1-2*x)ˆ-1/2;

g:=x→ $\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$

>h:=→exp(-1.1*x);

h:=x→ $e^{-1.1x}$

Calculando então os valores de ρ_0, ρ_1, ρ_2 temos

```
> rho1:=fsolve(P[1,1]*h(x/1.06)*g(x/1.06)+P[1,2]*h(x/1.08)*g(x/1.08)
+P[1,3]*h(x/1.1)*g(x/1.1)=1,x,.01..1);
```

$\rho_1 := 0.09474872673$

```
> rho2:=fsolve(P[2,1]*h(x/1.06)*g(x/1.06)+P[2,2]*h(x/1.08)*g(x/1.08)
+P[2,3]*h(x/1.1)*g(x/1.1)=1,x,.01..1);
```

$\rho_2 := 0.09509143650$

```
> rho3:=fsolve(P[3,1]*h(x/1.06)*g(x/1.06)+P[3,2]*h(x/1.08)*g(x/1.08)
+P[3,3]*h(x/1.1)*g(x/1.1)=1,x,.01..1);
```

$\rho_3 := 0.09545374816$

```
> R1:=min(rho1,rho2,rho2);
```

R1 := 0.09474872673

Pelo teorema (2.2), temos então que $\psi(u, i_s) \leq e^{-R_1 u}, u \geq 0$.
Montando nossa tabela para vários valores de u temos, pela substituição destes valores nas expressões anteriormente obtidas, e calculando com ajuda do MAPLE, os seguintes valores

Tabela 3.2: Limites para probabilidade de ruína - caso G(1/2,1/2)

u	Indução			Martingale	Lundberg
	$i_s = 6\%$	$i_s = 8\%$	$i_s = 10\%$		
0	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000
5	0.5651475622	0.5641560772	0.5631602167	0.6226668630	0.6438204738
10	0.3518851040	0.3506552894	0.3494145965	0.3877140222	0.4145048025
15	0.2191015012	0.2179574022	0.2167980900	0.2414166739	0.2668666784
20	0.1364254196	0.1354793039	0.1345163777	0.1503221630	0.1718142314
25	0.0849475281	0.0842140193	0.0834641838	0.0936006297	0.1106175198
30	0.0528946474	0.0523487048	0.0517881487	0.0582820104	0.0712178239

Estes resultados numéricos sugerem que o limite superior obtido pela abordagem indutiva é mais preciso que o obtido pela abordagem via martingale.

Bibliografia

[1] Asmussen, S. *Ruin Probabilities.* World Scientific, Singapore, 2000.

[2] Cai, Jun and Dickson, David C. M. *Ruin Probabilities with a Markov chain interest model.* Insurance: Mathematics and Economics 35, 513-525, 2004.

[3] Cai, J. *Discrete time risk models under rates of interest.* Prob. Eng. Inf. Sci. 16, 309-324, 2002a.

[4] Cai, J. *Probabilities with dependents rates of interest.* J. Appl. Prob. 39, 312-323, 2002b.

[5] Embrechts, P., Kluppelberg, C., Mikosch, T. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance.* Berlin: Springer-Verlag, 1997.

[6] Santana, F. L. de. *Probabilidade de Ruína no Modelo de Sparre Andersen Modificado pela Inclusão de Juro Composto Continuamente.* Dissertação de Mestrado, Depto. de Matemática, UnB, 2006.

[7] Feller, William. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* Vol. I, 3nd ed. New York: John Wiley and Sons, 1971.

[8] Feller, William. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* Vol. II, 2nd ed. New York: Wiley, 1971.

[9] Ferreira, Débora B. *Estimativas para a Probabilidade de Ruína em um Modelo Auto-regressivo com Taxa de Juros Constante.* Dissertação de Mestrado, Depto. de Matemática, UnB, 2005.

[10] Grimmett, G., Stirzaker, D. *Probability and Random Processes.* Oxford University, Press Inc, New York, 3nd ed, 2001.

[11] Grandell, J. *Aspects of Risk Theory.* New York: Springer-Verlag, 1991.

[12] Grisi, R. M. *Desigualdade de Lundberg para processo de risco com taxas de juros dependentes.* Dissertação de Mestrado, Depto. de Matemática, UnB, 2004.

[13] Isaacson,Dean L. and Madsen, Richard W. *Markov Chains Theory and Applications.* Florida: Robert E. Krieger, 1985.

[14] James, Barry R. *Probabilidade: Um curso em nível intermediário.* 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.

[15] Chung, Kai Lai. *A Course in Probability Theory.* Second Edition, Academic Press, 1974.

[16] Karlin, Samuel and Taylor, Howard M. *A First Course in Stochastic Processes.* Second edition, San Diego: Academic Press, 1975.

[17] Magalhães, M. Nascimento. *Probabilidade e Variáveis Aleatórias.* São Paulo: IME-USP, 2004.

[18] Nyrhinen, H. *On the ruin probabilities in a general economic environment.* Sthocastic Process. Appl. 83, 319-330, 1999.

[19] Nyrhinen, H. *Finite and infinite time ruin probabilities in a stochastic economic environment.* Sthocastic Process. Appl. 92, 265-285, 2001.

[20] Ross, S. M. *Stochastic Processes*, New York: John Wiley and Sons, 1983.

[21] Santana, Fabiana Tristão de. *Propriedades Assintóticas de Somas Ponderadas de Variáveis Aleatórias com Aplicação à Teoria da Ruína.* Dissertação de Mestrado, Depto. de Matemática, UnB, 2006.

[22] Shaked, M., Shanthikumar, J. *Stochastic Orders and their Applications.* San Diego: Academic Press, 1994.

[23] Tang, Q. H, Tsitsiashvili, G. Sh., *Precise estimates for the ruin probability in finite horizon in a discrete-time model with heavy-tailed insurance and financial risks.* Stochastic Process. Appl. 108, 299-325, 2003.

[24] Willmot, Gordon E. and Lin, X. Sheldon. *Lundberg Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications.* New york: Springer-Verlag, 2001.

[25] Willmot, Gordon E., Cai, J., Lin, X. S. *Lundberg inequalities for renewal equations.* Adv. Appl. Prob. 33, 674-689, 2001.

[26] Yang, H. *Ruin Theory in a financial corporation model with credit risk*. Insurance: Mathematics and Economics 35, 135-145, 2003.

[27] Yang, H. *Non exponencial bounds for ruin probability with interest effect included*. Scand. Actuarial J. 99, 66-79, 1999.

[28] Yang, H., Zhang, L. *Martingale method for ruin probability in an autoregressive model with constant interest rate*. Prob. Eng. Inf. Sci. 17, 183-198, 2003.