Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Expoentes de PI-Álgebras Associativas

por

ANTONIO MARCOS DUARTE DE FRANÇA ♠

sob orientação do

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

♠Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Expoentes de PI-Álgebras Associativas

por

ANTONIO MARCOS DUARTE DE FRANÇA

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:

Manuela da Silva Souza

Profª. Drª. Manuela da Silva Souza - UFBA

Diogo Diniz P. S. Silva.

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva - UFCG

Antônio Pereira Brandão Júnior

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

OUTUBRO/2014

Agradecimentos

Nesta página muito especial deste trabalho, gostaria de agradecer a algumas pessoas, dentre as muitas que me ajudaram a realizá-lo.

A todos os meus familiares, que contribuíram de maneira significativa para minha educação ao longo da minha vida. Em especial, minha mãe Maria do Socorro, que é uma mulher forte e batalhadora e que sempre me motivou a querer sempre mais, e meu pai Antonio Duarte, que sempre tem algo a me ensinar e a quem eu admiro muito. São eles as principais razões para o meu sucesso. Sou eternamente grato a tudo que eles me proporcionaram.

Ao meu irmão André Duarte, um homem de inteligência mal aproveitada, e a minha irmã Regina Duarte, uma mulher de muita força de vontade e inteligência.

À minha querida avó Josefa Peixoto (*in memorian*).

Aos meus tios e tias. Em especial, ao meu tio José Cícero, que nunca mede esforços para ajudar.

À minha querida namorada Larissa Ferro, pelo companheirismo, carinho, amor e também pela paciência em tempos difíceis, sempre ao meu lado, incentivando-me para que eu nunca desista dos meus sonhos, ela que sempre me apoiou deste quando eu ainda estava na graduação. Deixo aqui o meu muito obrigado.

À minha querida madrinha Helena (*in memorian*).

A todos meus amigos, que mesmo estando longe me acompanharam nessa jornada e que tanto me deram apoio e torceram por esse resultado, em especial Benigno Nunes, Danilo Farias, Emerson Cavalcante, Erivaldo Belarmino, Sérgio Dias (*in memorian*), Sérgio Nunes, entre outros que minha memória teima em não lembrar.

A todas as amizades conquistadas no Departamento de Física - UFCG, em especial Danilo Moreira, Eduardo Marcos, Eugênio Maciel, Francisco Brito, Luciano Brito, Miguel Neto, Rodrigo Lima e Simony Santos.

Ao Danilo Moreira, grande amigo e companheiro de todos os momentos, e que

me recebeu muito bem em Campina Grande.

Ao Fábio Reis, pela amizade, contribuições acadêmicas e incentivos constantes.

Aos amigos que fiz no decorrer dos anos de mestrado, em especial a Alex Ramos, Arthur Gilzeph, Claudemir Fideles e José de Brito, que tanto me ensinaram nos "estudos coletivos", transformando minha passagem por Campina Grande mais prazerosa e que tanto me "aguentaram" durante todos esses anos.

Ao querido amigo Geovane Duarte Borges, pela amizade, orientação e principalmente por todos os ensinamentos, sem os quais não teria conseguido ir a lugar algum, proporcionando-me valiosos cursos e que durante esses anos contribuíram de algum modo para o nosso enriquecimento pessoal e profissional. E também à sua esposa, Aparecida Brioso, que sempre me recebeu muito bem em sua residência.

Aos mestres que tanto contribuíram para minha formação, desde o ensino básico, em especial Josivaldo dos Santos, Itamar Rodrigues e Luiz Galdino, este última fez despertar em mim o prazer em estudar matemática, até o ensino superior, em especial Adelson Lopes, Alcindo Teles, Arturo Toscanini, Francisco Aureliano, Geovane Duarte, Margarete Paiva, Sandro Guedes, Teresinha de Jesus, Tony Fábio. Não poderia deixar de falar dos que me ensinaram e/ou inspiraram no mestrado, em especial Angelo Roncalli, Antônio Brandão, Diogo Diniz, Jefferson Abrantes, Marco Antonio, Severino Horácio.

Aos que compartilharam comigo o alojamento no Verão de 2012 da UFCG, em especial Claudemir Fideles, Erivaldo Diniz, Izidio Silva, Jarbas Dantas, Luan Sousa e Victor Pereira. Bons tempos foram aqueles.

Aos colegas que durante esses últimos dois anos dividiram o mesmo espaço comigo na sala da Pós-Graduação do DM, em especial Alan Carlos, Alan Guimarães, Alex Ramos, Aline Tsuyuguchi, Arlandson Matheus, Arthur Gilzeph, Bruno Arthur, Carlos Antônio, Claudemir Fideles, David Levi, Débora Karollyne, Elizabete Cardoso, Emanuela Régia, Erivaldo Diniz, Fábio Reis, Fabrício Lopes, Jamilly Lourêdo, Jogli Gidel, João Paulo de Meneses, José de Brito, José Luando, José Marcos, Keytt Amaral, Luciano Cipriano, Luis Gonzaga, Michel Barros, Misaelle Oliveira, Nancy Lima, Patrício Luiz, Romildo Nascimento.

Ao Danilo Moreira e André Oliveira (André baixinho), pela amizade e pelo "cantinho" cedido no começo de minha jornada no mestrado.

Aos amigos que tão bem me receberam em Brasília, em especial Hugo Tadashi, Raimundo Bastos e Valter Borges.

Ao Prof. Dr. Alexei Krassilnikov, por ter me auxiliado em um problema, contribuindo assim para o êxito do trabalho. Meu sincero agradecimento.

À família dos Kitnet's do Beto, onde tive o prazer de fazer ótimas amizades e que contribuiu significativamente para bons anos que passei em Campina Grande, em especial ao Aline, Gabriel, Gladson, Heitor, Levi, Luando, Beto, Irinaldo, Rogério, entre outros que me escapam nesse momento.

Ao meu orientador Prof. Brandão, uma pessoa que admiro e respeito, um profissional no qual me espelho desde quando o conheci nas aulas de Álgebra Linear ministradas por ele no Curso de Verão em 2011, e também pela amizade e tão sempre valiosas sugestões. Tenho muito orgulho de ter sido orientado por alguém tão qualificado.

Aos membros da banca, Prof. Dr. Diogo Diniz (UFCG) e Profª. Drª. Manuela da Silva Souza (UFBA) por aceitarem prontamente o convite para avaliação deste trabalho e pelas valiosas sugestões.

A todos os funcionários do Departamento de Matemática - UFCG, em especial Andrezza, Aninha, Dona Du, Davi, Sóstenes (Totinha), Renato, Rodrigo, Suência, entre outros.

À UFCG, pela infraestrutura e recursos oferecidos para a realização deste trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Peço desculpas àqueles que injusta e involuntariamente tenham sido omitidos.

Meus sinceros agradecimentos a todos.

Dedicatória

Aos meus queridos pais e irmãos.

"Se não puder voar, corra.

Se não puder correr, ande.

Se não puder andar, rasteje,

mas continue em frente

de qualquer jeito".

Martin Luther King

Resumo

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa sobre um corpo de característica zero e $(c_n(\mathcal{A}))_{n\geq 1}$ a sequência de codimensões de $\mathcal{A}$. Neste trabalho estudaremos o comportamento assintótico de tal sequência com base em um artigo de A. Giambruno e M. Zaicev. Neste artigo, utilizando-se de métodos da Teoria de Young e da Teoria das Representações, os autores provaram que se $\mathcal{A}$ é finitamente gerada, então o seu PI-expoente, definido por $exp(\mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathcal{A})}$, existe e é um número inteiro. Para tanto, primeiro é demonstrada a validade do resultado para álgebras de dimensão finita, e daí, por um resultado de A. Kemer, é possível estender o resultado para álgebras finitamente geradas. Como parte do estudo de PI-expoente, apresentaremos uma caracterização para álgebras simples: $\mathcal{A}$ é central simples sobre $\mathcal{K}$ se, e somente se, $exp(\mathcal{A}) = \dim \mathcal{A}$. Ainda estudaremos neste trabalho algumas condições necessárias e suficientes para garantir que a sequência de codimensões de $\mathcal{A}$ seja polinomialmente limitada.

Palavras-chave: Álgebras associativas, PI-álgebra, PI-expoente, Crescimento, Codimensões, Diagramas de Young.

Abstract

Let $\mathcal{A}$ an associative algebra over a field of characteristic zero and $(c_n(\mathcal{A}))_{n\geq 1}$ the sequence of codimensions of $\mathcal{A}$. In this work we will study the asymptotic behavior of such sequence based on a paper of A. Giambruno and M. Zaicev. In this paper, using methods of the Young's Theory and the Representations' Theory, the authors proved that if $\mathcal{A}$ is finitely generated, then its PI-exponent, which is defined as $exp(\mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathcal{A})}$, exists and is an integer. For this purpose, first, it is shown the validity of the result for algebras of finite dimensional, and hence, by a result of A. Kemer, it is possible to extend the result to finitely generated algebras. As part of the study of PI-exponent, we will present a characterization for simple algebras: $\mathcal{A}$ is central simple over $\mathcal{K}$ if and only if $exp(\mathcal{A}) = \dim \mathcal{A}$. In addition, we will study also some necessary and sufficient conditions to ensure that the sequence of codimensions of $\mathcal{A}$ is polynomially bounded.

Keywords: Associative algebras, PI-algebra, PI-exponent, Growth, Codimension, Young's diagram.

Conteúdo

Introdução

Sejam $\mathcal{K}$ um corpo e $\mathcal{K}\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre gerada livremente pelo conjunto enumerável de variáveis $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ sobre $\mathcal{K}$. Se $\mathcal{A}$ é uma PI-álgebra associativa sobre $\mathcal{K}$, então o conjunto das identidades polinomiais de $\mathcal{A}$, denotado por $Id(\mathcal{A})$, é um T-ideal de $\mathcal{K}\langle X\rangle$. É um fato bem conhecido que, em característica zero, toda identidade polinomial é equivalente a um número finito de identidades multilineares, e daí $Id(\mathcal{A})$ é totalmente determinado por seus polinômios multilineares. Sendo assim, considerando $\overline{\mathcal{K}\langle\mathcal{A}\rangle} = \mathcal{K}\langle X\rangle/Id(\mathcal{A})$ a álgebra livre de posto enumerável na variedade gerada por $\mathcal{A}$ e P_n o espaço vetorial de todos os polinômios multilineares nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, temos que um importante invariante é fornecida pelas dimensões $c_n(\mathcal{A})$ dos S_n-módulos $P_n/(P_n \cap Id(\mathcal{A}))$, ou seja,

$$c_n(\mathcal{A}) = dim_{\mathcal{K}} \frac{P_n}{P_n \cap Id(\mathcal{A})}, \quad n \geq 1,$$

que é definido como sendo a n-ésima codimensão de $\mathcal{A}$.

O primeiro resultado acerca do comportamento da sequência de codimensões de uma álgebra foi obtido por Regev em [R], o qual afirma que a sequência de codimensões de toda PI-álgebra associativa $\mathcal{A}$ é exponencialmente limitada, isto é, existem constantes $C, a > 0$ satisfazendo $c_n(\mathcal{A}) \leq Ca^n$, para todo $n \geq 1$.

Dada uma PI-álgebra associativa $\mathcal{A}$, para $n \geq 1$, definimos o **n-ésimo cocaracter** de $\mathcal{A}$ como sendo o S_n-caracter de $P_n(\mathcal{A}) = P_n/P_n \cap Id(\mathcal{A})$, e o denotamos por $\chi_n(\mathcal{A})$. Kemer em [K3] mostrou que se $\mathcal{A}$ é uma álgebra associativa sobre um corpo de característica zero com crescimento polinomial das codimensões, então pode-se descrever o crescimento das codimensões de $\mathcal{A}$ em linguagem da sequência dos cocaracteres de $\mathcal{A}$. Ainda em [K3], Kemer mostrou que para toda PI-álgebra $\mathcal{A}$, ou $\mathcal{A}$ tem crescimento polinomial das codimensões, ou $c_n(\mathcal{A}) \geq 2^n$, para n suficientemente grande (ver também Teorema 4 da referência [GMZ]). Já em [K1], Kemer provou que se $c_n(\mathcal{A})$ é polinomialmente limitada, então existe uma certa subálgebra $\mathcal{B}$ de dimensão finita tal que $Id(\mathcal{A}) = Id(\mathcal{B})$.

Muitas linhas de estudo surgiram a partir daí e o comportamento assintótico da sequência de codimensões tem sido computado para algumas álgebras em característica zero.

Seja $\mathcal{A}$ uma PI-álgebra associativa. Como existem constantes C, $a > 0$ tais que $c_n(\mathcal{A}) \leq Ca^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência $\left(\sqrt[n]{c_n(\mathcal{A})}\right)_{n\geq 1}$ é limitada e assim podemos definir $\underline{exp}(\mathcal{A}) = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathcal{A})}$, $\overline{exp}(\mathcal{A}) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathcal{A})}$ e $exp(\mathcal{A}) = \underline{exp}(\mathcal{A}) = \overline{exp}(\mathcal{A})$ caso ocorra a igualdade, o qual chamaremos de *PI-expoente de $\mathcal{A}$*. Assim, o PI-expoente de $\mathcal{A}$ é exatamente o limite $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathcal{A})}$, quando este limite existe.

Na década de 1980 Amitsur conjecturou que para toda PI-álgebra associativa $\mathcal{A}$ o PI-expoente existe e é um número inteiro. No final da década de 1990, A. Giambruno e M. Zaicev, em [GZ] e em [GZ1], deram uma resposta positiva para esta questão, no caso do corpo base ser de característica zero.

Quando se tem uma PI-álgebra não necessariamente associativa, também existe a ideia de sequência de codimensões e consequentemente se pode perguntar sobre a existência e o que pode ser o PI-expoente. Giambruno, Mishchenko e Zaicev provaram que para todo número real $\alpha \geq 1$ existe alguma álgebra $\mathcal{A}$ (não-associativa) tal que $exp(\mathcal{A}) = \alpha$. Os mesmos autores também provaram que se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de dimensão 2, então $c_n(A) \leq n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou $exp(\mathcal{A}) = 2$. Estes e outros resultados acerca de PI-expoente podem ser encontrados na referência [GMZ].

Giambruno, Regev e Zaicev mostraram em [GRZ1] que existe, e é um inteiro, o expoente de toda álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo de característica zero cujo radical solúvel é nilpotente.

Dessa forma, o PI-expoente de uma álgebra, quando existir, será um número real não negativo, podendo ser inteiro ou não.

Neste trabalho de dissertação, estudaremos, como fizeram Giambruno e Zaicev em [GZ], o PI-expoente de uma álgebra associativa finitamente gerada. Temos ainda que o caso geral para álgebras associativas foi resolvido pouco tempo depois em [GZ1], também por Giambruno e Zaicev. O principal ponto deste trabalho é determinar uma limitação para $c_n(\mathcal{A})$ sob a forma $C_1 n^{r_1} d^n \leq c_n(\mathcal{A}) \leq C_2 n^{r_2} d^n$, para algumas constantes $C_1, C_2, r_1, r_2, d > 0$, onde $\mathcal{A}$ é uma álgebra associativa finitamente gerada. Com esse resultado em mãos, responderemos outra pergunta: como caracterizar uma álgebra central simples em termos do comportamento das codimensões?

Outro ponto que atacaremos nesse trabalho é apresentar uma caracterização para álgebras com crescimento polinomial das codimensões. Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [GZ3]. Uma condição necessária e suficiente para que uma álgebra $\mathcal{A}$ de dimensão finita sobre um corpo $\mathcal{K}$ de característica zero tenha crescimento polinomial das codimensões é que possamos escrever $\mathcal{A} = \bigoplus_{i=0}^{m} \mathcal{A}_i$, onde $\mathcal{A}_i$ é uma $\mathcal{K}$-álgebra tal que $\mathcal{A}_i = \mathcal{B}_i + J_i$, com $\mathcal{B}_i \cong \mathcal{K}$ e J_i é um ideal nilpotente de $\mathcal{A}_i$; $\mathcal{A}_0, J_i, \ldots, J_m$ são ideais nilpotentes à direita de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j = \{0\}$ e $\mathcal{B}_i\mathcal{A}_0 = \{0\}$ para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ distintos. Pode-se provar, e faremos isso no decorrer deste trabalho, que sendo $\mathcal{A}$ uma álgebra de dimensão finita cuja sequência de codimensões é polinomialmente limitada, podemos escrever $\chi_n(\mathcal{A}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$, com $m_\lambda = 0$ se $|\lambda| - \lambda_1 \geq q$, onde J é o radical de Jacobson de $\mathcal{A}$, $J^q = \{0\}$, e $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$. Vale a recíproca.

Este trabalho está estruturado em quatro capítulos, de modo a facilitar o entendimento dos tópicos abordados. No **Capítulo 1** apresentaremos as noções básicas de álgebras sobre um corpo, módulos sobre álgebras e representações de grupos, bem como os principais resultados. Também faremos um breve estudo sobre o *radical de Jacobson* e sobre *semissimplicidade*. Por fim, faremos uma introdução às *Identidades Polinomiais*.

Já no **Capítulo 2** faremos um estudo da teoria clássica das representações do grupo simétrico S_n através da teoria das tabelas de Young. Tal teoria tem papel fundamental no estudo de PI-Teoria. Falaremos das relações existentes entre as S_n-representações irredutíveis e as *Tabelas de Young*, e também apresentares resultados referentes à ação natural do S_n sobre os polinômios multilineares de grau n.

No **Capítulo 3** trabalharemos no sentido de mostrar que o PI-expoente de toda álgebra associativa finitamente gerada sobre um corpo de característica zero sempre existe e é um inteiro. Para tanto, exibiremos uma limitação do tipo

$$C_1 n^{r_1} d^n \leq c_n(\mathcal{A}) \leq C_2 n^{r_2} d^n,$$

onde $C_1, r_1, C_2, r_2, d > 0$ são constantes e $dim\mathcal{A} < \infty$, e depois estenderemos o resultado para álgebras finitamente geradas fazendo-se utilizar um dos teoremas de Kemer. Concluiremos o capítulo computando o expoente de algumas álgebras.

Por fim, no **Capítulo 4**, exibiremos caracterizações de álgebras que possuem crescimento polinomial das codimensões. Nosso objetivo é analisar em quais situações a sequência de codimensões de uma certa classe de álgebras é polinomialmente limitada.

Campina Grande, 17 de Outubro de 2014

Antonio Marcos Duarte de França

Capítulo 1

Identidades Polinomiais e PI-Álgebras

Para um melhor desenvolvimento dos conteúdos a serem abordados nos próximos capítulos, apresentaremos neste primeiro capítulo notações, definições e principais resultados concernentes ao estudo de PI-Teoria. Em todo este capítulo, $\mathcal{K}$ denotará um corpo, $\operatorname{char}\mathcal{K}$ a característica de $\mathcal{K}$ e, a menos de mencionado o contrário, $\mathcal{K}$ será o corpo base de todos os espaços vetoriais e álgebras aqui apresentados.

Primeiro, introduziremos a noção de *álgebra sobre* $\mathcal{K}$. Posteriormente, falaremos de *módulos sobre álgebras* e *representações de grupos*. Um breve estudo do *Radical de Jacobson* de uma álgebra será feito, e por fim, trataremos de expor alguns dos principais resultados pertinentes as *Identidades Polinomiais*.

Toda teoria desenvolvida aqui neste capítulo poderá ser encontrada nas referências [CR], [GZ2], [H], [H1], [HK], [L].

1.1 $\mathcal{K}$-Álgebras

Iniciaremos com um breve estudo sobre $\mathcal{K}$-*álgebras*.

Definição 1.1.1 *Seja $\mathcal{A}$ um espaço vetorial. Dizemos que um par $(\mathcal{A}, *)$ é uma $\mathcal{K}$-álgebra (ou álgebra sobre $\mathcal{K}$) se "$*$" é uma operação bilinear em $\mathcal{A}$, ou seja,*
$* : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaz:

i) $a * (b + c) = a * b + a * c$;

ii) $(a + b) * c = a * c + b * c$;

iii) $(\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b)$,

para quaisquer $a, b, c \in \mathcal{A}$ *e* $\lambda \in \mathcal{K}$.

Na definição acima, "$*$" é dita *multiplicação* ou *produto*, e por simplicidade, denotaremos o produto $a*b$ por ab, para dados $a, b \in \mathcal{A}$. Dessa forma, escreveremos simplesmente $\mathcal{A}$ ao invés de $(\mathcal{A}, *)$, deixando subentendida a operação produto, assim como diremos "álgebra" ao invés de "$\mathcal{K}$-álgebra". Definimos o produto $a_1a_2a_3$ como sendo $(a_1a_2)a_3$ e, indutivamente, o produto $a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$ como sendo $(a_1a_2\cdots a_{n-1})a_n$, para $a_i \in \mathcal{A}$. Diremos que um subconjunto β de $\mathcal{A}$ é uma *base* da álgebra se é uma base do espaço vetorial $\mathcal{A}$, e definimos a *dimensão* de $\mathcal{A}$ como sendo a dimensão de $\mathcal{A}$ como espaço vetorial.

Definição 1.1.2 *Seja* $\mathcal{A}$ *uma álgebra. Dizemos que* $\mathcal{A}$ *é:*

i) **Associativa** *se* $(ab)c = a(bc)$, *para quaisquer* $a, b, c \in \mathcal{K}$;

ii) **Comutativa** *(ou* **abeliana***) se* $ab = ba$, *para quaisquer* $a, b \in K$;

iii) **Unitária** *(ou com unidade) se existe um elemento em* $\mathcal{A}$, *denotado por* $1_{\mathcal{A}}$, *tal que* $a1_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}a = a$, *para todo* $a \in \mathcal{K}$;

iv) uma **álgebra de Lie** *se* $\mathcal{A}$ *satisfaz:*

1) $a^2 = aa = 0$ *(anticomutatividade);*

2) $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$ *(identidade de Jacobi),*

para quaisquer $a, b, c \in \mathcal{A}$.

Para facilitar a notação, escreveremos 1 em vez de $1_{\mathcal{A}}$, caso $\mathcal{A}$ seja unitária e não se tenha confusão com a unidade do corpo base $\mathcal{K}$. Neste caso, identificamos naturalmente o elemento $\lambda 1$ de $\mathcal{A}$ com λ, para todo $\lambda \in \mathcal{K}$, e consequentemente, o conjunto $\{\lambda 1 : \lambda \in \mathcal{K}\}$ com $\mathcal{K}$. Note que a condição 1) do item *iv*) da definição acima nos diz que $xy = -yx$, para quaisquer $x, y \in \mathcal{A}$.

A proposição a seguir nos dará algumas propriedades das álgebras, cujas demonstrações serão omitidas por se tratarem de imediatas consequências da definição.

Proposição 1.1.3 *Seja* $\mathcal{A}$ *uma* $\mathcal{K}$*-álgebra. Tomando* $a, b, c \in \mathcal{A}$ *e* $\lambda, \gamma \in \mathcal{K}$, *temos que:*

a) $0a = a0 = 0$;

b) $(\lambda a)(\gamma b) = (\lambda\gamma)ab$;

c) $(-a)b = a(-b) = -ab$ *e* $(-a)(-b) = ab$;

d) $a(b-c) = ab - ac$ *e* $(a-b)c = ac - bc$;

e) Se $\mathcal{A}$ *possui unidade, então* $(-1)a = a(-1) = -a$ *e* $(-1)(-a) = a$;

f) Se $\mathcal{A} = 0$ *e* $\mathcal{A}$ *possuir unidade, então* $1 = 0$.

Daremos agora alguns exemplos de álgebras.

Exemplo 1.1.4 *Podemos naturalmente ver $\mathcal{K}$ como uma álgebra sobre qualquer subcorpo de $\mathcal{K}$. Em outras palavras, seja $\mathcal{K}$ uma extensão do corpo $\mathcal{F}$. Temos que $\mathcal{K}$ é uma $\mathcal{F}$-álgebra, na qual o produto é dado pelo produto do corpo $\mathcal{K}$. Note que $\mathcal{K}$ é uma álgebra associativa, comutativa e com unidade.*

Exemplo 1.1.5 *Considere o espaço vetorial $M_n(\mathcal{K})$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathcal{K}$, onde $n \in \mathbb{N}$. Munido do produto usual de matrizes, $M_n(\mathcal{K})$ é uma $\mathcal{K}$-álgebra associativa com unidade de dimensão n^2 . É importante destacar em $M_n(\mathcal{K})$ as matrizes unitárias E_{ij}, para $1 \leq i, j \leq n$, onde E_{ij} é dada pela matriz cuja única entrada não nula é 1 na i-ésima linha e j-ésima coluna. Não é difícil verificar que $\{E_{ij} \in M_n(\mathcal{K}) : 1 \leq i, j \leq n\}$ é uma base para $M_n(\mathcal{K})$.*

Mais geralmente, se $\mathcal{A}$ é uma álgebra, consideremos o espaço vetorial $M_n(\mathcal{A})$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathcal{K}$. O produto de matrizes em $M_n(\mathcal{A})$ é análogo ao produto de matrizes com entradas em $\mathcal{A}$. Temos então uma estrutura de álgebra em $M_n(\mathcal{A})$.

Observe que, a menos que $n = 1$ e $\mathcal{A}$ seja comutativa, $M_n(\mathcal{A})$ não é comutativa. De fato, suponha por simplicidade que $\mathcal{A}$ é unitária e tomemos $E_{11}, E_{12} \in M_n(\mathcal{A})$, para $n \geq 2$. Temos que $E_{11}E_{12} = E_{12} \neq 0 = E_{12}E_{11}$.

Exemplo 1.1.6 *Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial e $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ o espaço vetorial dos operadores lineares sobre $\mathcal{V}$. Temos que $\mathcal{L}(\mathcal{V})$, munido da composição de funções, é uma álgebra associativa com unidade, chamada de álgebra dos operadores lineares sobre $\mathcal{V}$. Se $T, S \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, vamos denotar $T \circ S$ simplesmente por TS.*

Exemplo 1.1.7 *Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial com base $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$. Definimos a álgebra de Grassmann (ou álgebra exterior) de $\mathcal{V}$, denotada por $E(\mathcal{V})$ (ou simplesmente por E), como sendo a álgebra com base*

$$\{1, e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_k, k \geq 1\}$$

e cujo produto é definido pelas relações $e_i^2 = 0$ *e* $e_ie_j = -e_je_i$, *para quaisquer* $i, j \in \mathbb{N}$. *Destacamos em* E *os subespaços vetoriais* E_0 *e* E_1, *gerados pelos conjuntos*

$$\{1, e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_m} \mid \ m \text{ é par}\} \quad e \quad \{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k} \mid \ k \text{ é ímpar}\},$$

respectivamente. Note que $E = E_0 \oplus E_1$ *como espaço vetorial.*

Observe que a condição $e_ie_j = -e_je_i$ *nos permite fazer* $(e_{i_1}\cdots e_{i_m})(e_{j_1}\cdots e_{j_k}) = (-1)^{mk}(e_{j_1}\cdots e_{j_k})(e_{i_1}\cdots e_{i_m})$, *para quaisquer* $m, k \in \mathbb{N}$, *e assim podemos concluir que* $ax = xa$ *para quaisquer* $a \in E_0$ *e* $x \in E$, *e* $bc = -cb$, *para quaisquer* $b, c \in E_1$. *Observa-se facilmente que se* $\operatorname{char}\mathcal{K} = 2$, *então* E *é uma álgebra comutativa.*

Tomando agora E' *como sendo a álgebra com base*

$$\{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k}; i_1 < i_2 < \cdots < i_k, k \geq 1\}$$

e com o produto definido acima, temos que E' *não tem unidade e é chamada de álgebra exterior sem unidade.*

Exemplo 1.1.8 *Seja* $\mathcal{R}$ *um anel (com unidade) simples, ou seja,* $\{0\}$ *e* $\mathcal{R}$ *são os únicos ideais bilaterais de* $\mathcal{R}$. *Sendo* $Z(\mathcal{R}) = \{x \in \mathcal{R} \mid xa = ax, \forall a \in \mathcal{R}\}$ *o centro de* $\mathcal{R}$, *não é difícil verificar que* $Z(\mathcal{R})$ *é um corpo, e assim* $\mathcal{R}$ *tem uma estrutura natural de espaço vetorial sobre* $Z(\mathcal{R})$. *Este espaço vetorial, munido do produto do anel* $\mathcal{R}$, *é então uma* $Z(\mathcal{R})$*-álgebra.*

Exemplo 1.1.9 *Seja* $\mathcal{A}$ *uma álgebra e consideremos o espaço vetorial*

$$\mathcal{K} \oplus \mathcal{A} = \{(\lambda, a) \mid \lambda \in \mathcal{K}, a \in \mathcal{A}\},$$

cuja adição é dada por $(\lambda, a) + (\gamma, b) = (\lambda + \gamma, a + b)$ *e multiplicação por escalar é dada por* $\gamma(\lambda, a) = (\gamma\lambda, \gamma a)$, *para quaisquer* $\lambda, \gamma \in \mathcal{K}$ *e* $a, b \in \mathcal{A}$. *Definindo em* $\mathcal{K} \oplus \mathcal{A}$ *o produto* $(\lambda, a)(\gamma, b) = (\lambda\gamma, \lambda b + \gamma a + ab)$, *temos que* $\mathcal{K} \oplus \mathcal{A}$ *é uma* $\mathcal{K}$*-álgebra com unidade (que é o elemento* $(1, 0)$*). Observe que* $\mathcal{K} \oplus \mathcal{A}$ *é associativa (respectivamente, comutativa) se, e somente se,* $\mathcal{A}$ *é associativa (respectivamente, comutativa). Esta construção é chamada de adjunção formal da unidade a* $\mathcal{A}$.

Exemplo 1.1.10 *Sejam* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *duas* $\mathcal{K}$*-álgebras. O produto direto de* $\mathcal{A}$ *por* $\mathcal{B}$ *é definido como sendo a álgebra* $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(a, b) \mid a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$ *cujas operações de soma, produto por escalar e multiplicação são definidas coordenada a coordenada. De forma análoga, sendo* $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I_n}$ *uma família de* $\mathcal{K}$*-álgebras indexadas por* $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, *definimos o produto direto das álgebras* $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ *como sendo a álgebra* $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$, *cujas operações são coordenada a coordenada.*

Vejamos agora a construção da *álgebra de grupo* $\mathcal{K}G$, para um dado grupo G. Considere todas as somas formais

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g, \quad \alpha_g \in \mathcal{K},$$

onde o conjunto $\{g \in G; \alpha_g \neq 0\}$ é finito e $\sum_{g\in G} \alpha_g g = \sum_{g \in G} \beta_g g$ se, e somente se, $\alpha_g = \beta_g$ para todo $g \in G$. Denotemos por $\mathcal{K}G$ o conjunto de todas as somas formais acima definidas.

Definimos em $\mathcal{K}G$ as operações de soma, produto por escalar e produto pelas regras

$$\sum \alpha_g g + \sum \beta_g g = \sum (\alpha_g + \beta_g) g,$$
$$\lambda \sum \alpha_g g = \sum (\lambda \alpha_g) g, \quad \lambda \in \mathcal{K}$$

e

$$\left(\sum_{g\in G} \alpha_g g\right)\left(\sum_{h\in G} \beta_h h\right) = \sum_{g,h\in G} (\alpha_g \beta_h) gh,$$

onde o produto gh acima, $g, h \in G$, é dado pela operação de G.

Com essas definições, é fácil verificar que $\mathcal{K}G$ é uma $\mathcal{K}$-álgebra, chamada de *álgebra de grupo* de G sobre $\mathcal{K}$, sendo G uma base de $\mathcal{K}G$. Note que $\mathcal{K}G$ é associativa e unitária, onde sua unidade é dada por $1_{\mathcal{K}} 1_G$, e que é comutativa se, e somente se, G é um grupo abeliano.

Dadas uma álgebra $\mathcal{A}$ e subespaços vetoriais V e W de $\mathcal{A}$, definimos o espaço produto VW como sendo o subespaço vetorial de $\mathcal{A}$ gerado pelo conjunto $\{xy \mid x \in V, y \in W\}$. Note que VW não é necessariamente uma álgebra.

Definição 1.1.11 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Dizemos que:*

i) *$\mathcal{A}$ possui* **divisores de zero** *se existe $a \in \mathcal{A} - \{0\}$ tal que $ab = 0$ ou $ba = 0$, para algum $b \in \mathcal{A} - \{0\}$. Neste caso, dizemos que a é um* **divisor de zero** *em $\mathcal{A}$;*

ii) *$a \in \mathcal{A}$ é um elemento* **idempotente** *se $a^2 = a$;*

No caso em que $\mathcal{A}$ é associativa:

iii) *um elemento $a \in \mathcal{A}$ é* **nilpotente** *se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$. O menor n que satisfaz $a^n = 0$ é chamado de índice de nilpotência e a;*

iv) *$\mathcal{A}$ é uma* **álgebra nil** *se todo elemento de $\mathcal{A}$ é nilpotente.*

v) *$\mathcal{A}$ é uma* **álgebra nilpotente** *se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{A}^{n+1} = \{0\}$, isto é, $a_1 \cdots a_{n+1} = 0$ para quaisquer $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathcal{A}$. O menor n satisfazendo $\mathcal{A}^{n+1} = \{0\}$ é chamado de índice de nilpotência de $\mathcal{A}$.*

Observe que, necessariamente, se $a \in \mathcal{A} - \{0,1\}$ é um elemento idempotente, então a é um divisor de zero em $\mathcal{A}$. Note também que se $\mathcal{A}$ é nilpotente, então $\mathcal{A}$ é ainda nil. Claramente, nenhuma álgebra unitária pode ser nil.

É fácil verificar que $\mathcal{A}$ não possui divisores de zero se, e somente se, valem as *leis do cancelamento* (para o produto), isto é, dados $a, b, c \in \mathcal{A}$, com $a \neq 0$,

$$ab = ac \Rightarrow b = c \qquad \text{e} \qquad ba = ca \Rightarrow b = c.$$

Seja agora $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa com unidade. Dizemos que $a \in \mathcal{A} - \{0\}$ é um elemento *inversível* de $\mathcal{A}$ existe $a^{-1} \in \mathcal{A}$, chamado de inverso (multiplicativo), tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Não é difícil verificar que se a é inversível, então seu inverso é único, e que o conjunto $U(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \mid a \text{ é inversível}\}$, munido da multiplicação de $\mathcal{A}$, é um grupo, chamado de grupo multiplicativo de $\mathcal{A}$. Note que se $a \in U(\mathcal{A})$ e $\lambda \in \mathcal{K} - \{0\}$, então $\lambda a \in U(\mathcal{A})$.

Definição 1.1.12 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa com unidade. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma* **álgebra com divisão** *se $U(\mathcal{A}) = \mathcal{A} - \{0\}$.*

Exemplo 1.1.13 *Sendo $n \in \mathbb{N}$, temos que $U(M_n(\mathcal{K})) = \{X \in M_n(\mathcal{K}); det(X) \neq 0\}$. Note que se $n = 1$, então $M_n(\mathcal{K})$ é uma álgebra com divisão. Usualmente denotamos $U(M_n(\mathcal{K}))$ por $GL_n(\mathcal{K})$ e o chamamos de grupo linear de grau n de $\mathcal{K}$.*

Sendo $\mathcal{A}$ associativa e $a, b \in \mathcal{A}$, definimos o *comutador* $[a, b]$ e o *produto de Jordan* $a \circ b$, respectivamente, como sendo

$$[a, b] = ab - ba \qquad \text{e} \qquad a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba),$$

onde neste último caso, $\operatorname{char} \mathcal{K} \neq 2$. Definimos ainda o *comutador de comprimento n* como sendo $[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}], a_n]$, com $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$. Observando que $[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$, para quaisquer $a, b, c \in \mathcal{A}$, por indução, pode-se mostrar que

$$[a_1 a_2 \cdots a_n, b] = \sum_{i=1}^{n} a_1 \cdots a_{i-1}[a_i, b]a_{i+1} \cdots a_n.$$

Definimos ainda o *comutador de $\mathcal{A}$*, denotado por $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$, como sendo o subespaço vetorial de $\mathcal{A}$ gerado pelo conjunto $\{[a, b] \mid a, b \in \mathcal{A}\}$. Não é difícil ver que $\mathcal{A}$ é comutativa se, e somente se, $[\mathcal{A}, \mathcal{A}] = \{0\}$.

Um resultado básico, o qual também omitiremos a demonstração, é dado pela proposição a seguir.

Proposição 1.1.14 *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e S um subconjunto gerador de $\mathcal{A}$ (como espaço vetorial). Então $\mathcal{A}$ é:*

a) associativa se, e somente se, $(uv)w = u(vw)$, para quaisquer $u, v, w \in S$;

b) comutativa se, e somente se, $uv = vu$, para quaisquer $u, v \in S$;

c) unitária se, e somente se, se existe $1 \in \mathcal{A}$ tal que $1u = u1 = v$, para todo $u \in S$;

Definição 1.1.15 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Dizemos que:*

i) Um subespaço vetorial $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ é uma **subálgebra** *de $\mathcal{A}$ se $\mathcal{B}$ é multiplicativamente fechado, isto é, $b_1b_2 \in \mathcal{B}$ para quaisquer $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$;*

ii) Um subespaço vetorial I de $\mathcal{A}$ é um **ideal à esquerda** *(respectivamente, à direita) de $\mathcal{A}$ se $xa \in I$ (respectivamente, $ax \in I$) para quaisquer $a \in I$ e $x \in \mathcal{A}$. No caso em que $ax, xa \in I$, para quaisquer $a \in I$ e $x \in \mathcal{A}$, diremos que I é um* **ideal** *(bilateral) de $\mathcal{A}$.*

Exemplo 1.1.16 *Sendo $\mathcal{A}$ uma álgebra, temos que $\{0\}$ e $\mathcal{A}$ são ideais de $\mathcal{A}$, chamados ideais triviais de $\mathcal{A}$. Note que todo ideal de $\mathcal{A}$ é por si só uma subálgebra de $\mathcal{A}$.*

Exemplo 1.1.17 *Considere $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ um conjunto infinito e enumerável. Os elementos $x_i \in X$ são chamados de* **variáveis** *(ou* **indeterminadas***). Uma palavra em X é uma sequência $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$, com $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$. A palavra $x_{i_1}\cdots x_{i_s}$ tal que $s = 0$ será a palavra vazia e denotada por 1. Seja U o conjunto de todas as palavras em X, e $U_0 = U \setminus \{1\}$. Considere um produto em U como sendo a justaposição de palavras, isto é,*

$$(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k})(x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_l}) = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_l},$$

para $i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, j_2, \ldots, j_l \in \mathbb{N}$. Esta operação é associativa e tem um elemento neutro, a palavra vazia. O produto de um escalar $\beta \in \mathcal{K}$ por uma palavra $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$ de U, isto é, $\beta x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$, será chamado de **monômio***. Diremos que dois monômios $\beta x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$ e $\gamma x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_l}$ são iguais se $\beta = \gamma$, $k = l$ e $i_r = j_r$, para $r = 1, \ldots, k$. Análogo para U_0, observando apenas que em U_0 não possui elemento neutro para justaposição.*

Denotamos por $\mathcal{K}\langle X\rangle$ o $\mathcal{K}$-espaço vetorial gerado pelos elementos de U. Dessa forma, $\mathcal{K}\langle X\rangle$ é formado por todas as somas formais finitas $\sum_{(i)} \alpha_i w_i$, onde $\alpha_i \in \mathcal{K}$ e $w_i \in U$. Não é difícil ver que $\mathcal{K}\langle X\rangle$, munido da multiplicação induzida pela justaposição de palavras, é uma $\mathcal{K}$-álgebra associativa e unitária, mas não comutativa. Observe que o subespaço de $\mathcal{K}\langle X\rangle$ gerado por U_0, o qual denotaremos por $\mathcal{K}_0\langle X\rangle$, é uma subálgebra (não unitária) de $\mathcal{K}\langle X\rangle$. Note que $\mathcal{K}\langle X\rangle = \mathcal{K}_0\langle X\rangle \oplus \langle 1\rangle$. Os elementos de $\mathcal{K}\langle X\rangle$ são chamados de **polinômios***.*

Se $f \in \mathcal{K}\langle X\rangle$, *escreveremos* $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \sum_i \lambda_i w_i$ *para indicar que* $x_1, x_2, \ldots, x_r \in X$ *são as únicas variáveis que aparecem em* f, *onde* $\lambda_i \in \mathcal{K}$ *e* $w_i \in S$ *são palavras que dependem de* $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

Caso $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *e* $x_i x_j = x_j x_i$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *denotamos* $\mathcal{K}\langle X\rangle$ *por* $\mathcal{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *ou* $\mathcal{K}[X]$, *e podemos escrever*

$$\mathcal{K}[x_1, \ldots, x_n] = \left\{ \sum_{l_1, \ldots, l_n} \alpha_{l_1 \cdots l_n} x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n} \mid \alpha_{l_1 \cdots l_n} \in \mathcal{K}, l_1 \cdots, l_n \in \mathbb{N}_0 \right\},$$

o qual chamamos de álgebra dos polinômios em n *variáveis (comutativas), onde* $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Exemplo 1.1.18 *Sendo* $\mathcal{A}$ *uma álgebra, definimos como sendo o* **centro da álgebra** $\mathcal{A}$ *o subconjunto de* $\mathcal{A}$

$$Z(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \mid ax = xa, \forall x \in \mathcal{A}\}.$$

Não é difícil mostrar que $Z(\mathcal{A})$ *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{A}$. *Caso a álgebra* $\mathcal{A}$ *seja associativa, temos*

$$(ab)x = a(bx) = a(xb) = (ax)b = (xa)b = x(ab),$$

para quaisquer $a, b \in Z(\mathcal{A})$ *e* $x \in \mathcal{A}$, *e assim,* $Z(\mathcal{A})$ *é uma subálgebra de* $\mathcal{A}$. *É um fato conhecido que, para todo* $n \in \mathbb{N}$, $Z\left(M_n(\mathcal{K})\right) = \{\lambda I_{n\times n}; \lambda \in \mathcal{K}\}$, *onde* $I_{n\times n}$ *é a matriz identidade de* $M_n(\mathcal{K})$.

Exemplo 1.1.19 *Considere a álgebra das matrizes* $M_2(\mathbb{R})$. *Sendo* B *o subespaço vetorial de* $M_2(\mathbb{R})$ *gerado pelas matrizes* E_{12} *e* E_{22}, *verifica-se que* B *é um ideal à esquerda de* $M_2(\mathbb{R})$, *mas não à direita.*

Definição 1.1.20 *Sejam* $\mathcal{A}$ *uma álgebra associativa e* S *um subconjunto não vazio de* $\mathcal{A}$. *Definimos:*

i) *a* **subálgebra gerada** *por* S, *denotada por* $\mathcal{K}\langle S\rangle$, *como sendo a interseção de todas as subálgebras de* $\mathcal{A}$ *que contêm* S *(e 1, no caso de* $\mathcal{A}$ *ser unitária);*

ii) *o* **ideal gerado** *por* S *como sendo a interseção de todos os ideais de* $\mathcal{A}$ *que contêm* S.

Não é difícil mostrar que $\mathcal{K}\langle S\rangle$ coincide com o subespaço de $\mathcal{A}$ gerado pelo conjunto $\{s_1 s_2 \cdots s_r \mid r \in \mathbb{N}, s_i \in S\}$ (caso $\mathcal{A}$ não seja unitária), ou com o gerado pelo conjunto $\{1, s_1 s_2 \cdots s_r \mid r \in \mathbb{N}, s_i \in S\}$ (caso $\mathcal{A}$ possua unidade). Analogamente, o ideal de $\mathcal{A}$ gerado por S coincide com o subespaço de $\mathcal{A}$ gerado por $\{asb \mid a, b \in \mathcal{A}, s \in S\}$.

Dizemos que uma álgebra $\mathcal{A}$ é *finitamente gerada* se existir um subconjunto $S \subseteq \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{K}\langle S\rangle = \mathcal{A}$.

Definição 1.1.21 *Dizemos que uma álgebra $\mathcal{A}$ é* **simples** *se seus únicos ideais (bilaterais) são os triviais e $\mathcal{A}^2 \neq 0$.*

Um resultado de fácil demonstração é que *"sendo $\mathcal{A}$ uma álgebra unitária simples, seu centro é um corpo"*. Outro resultado de fácil verificação é que a álgebra das matrizes $M_n(\mathcal{K})$ é simples.

Vamos agora definir *álgebra quociente*. Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e I um ideal de $\mathcal{A}$. Consideremos o espaço vetorial quociente $\mathcal{A}/I = \{a + I; a \in \mathcal{A}\}$. Denotamos por $\overline{a}$ o elemento $a + I$ de $\mathcal{A}$, para cada $a \in \mathcal{A}$. Definimos uma operação produto em $\mathcal{A}/I$ como

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathcal{A}/I \times \mathcal{A}/I & \longrightarrow & \mathcal{A}/I \\ & (\overline{a}, \overline{b}) & \longmapsto & \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab} \end{array}.$$

É fácil verificar que este produto é bem definido e que $\mathcal{A}/I$, munido de tal (além, é claro, das operações que possui como espaço vetorial), é uma álgebra sobre $\mathcal{K}$, chamada de *álgebra quociente* de $\mathcal{A}$ por I.

Definição 1.1.22 *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas $\mathcal{K}$-álgebras. Dizemos que uma transformação linear $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um* **homomorfismo de álgebras** *se $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}$.*

Seja $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo de álgebras. Dizemos que φ é um *monomorfismo* se é injetivo, e que é um *epimorfismo* se é sobrejetivo. Caso φ seja bijetivo, dizemos que é um *isomorfismo*. Neste caso, dizemos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são *isomorfas* e denotamos por $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$. No caso em que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, diremos que φ é um *endomorfismo* de $\mathcal{A}$. Além disso, sendo φ um endomorfismo e um isomorfismo, o qual chamaremos um *automorfismo* de $\mathcal{A}$.

Sendo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo, dizemos que o conjunto $\ker(\varphi) = \{a \in \mathcal{A} \mid \varphi(a) = 0\}$ é o *núcleo* de φ, e o conjunto $\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \in \mathcal{B} \mid a \in \mathcal{A}\}$ é a *imagem* de φ. Não é difícil verificar que $\ker(\varphi)$ é um ideal de $\mathcal{A}$ e que $\mathrm{Im}(\varphi)$ é uma subálgebra de $\mathcal{B}$. Também não é difícil mostrar que é um isomorfismo de álgebras a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \overline{\varphi} : & \mathcal{A}/\ker(\varphi) & \longrightarrow & \mathrm{Im}(\varphi) \\ & \overline{a} & \longmapsto & \overline{\varphi}(\overline{a}) = \varphi(a) \end{array}.$$

Exemplo 1.1.23 *Seja $\mathcal{A}$ um álgebra unitária. Consideremos a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & \lambda & \longmapsto & \lambda 1_{\mathcal{A}} \end{array}.$$

Temos que ψ *é um monomorfismo de* $\mathcal{K}$ *em* $\mathcal{A}$ *e assim* $\mathcal{K}$ *é isomorfo a* $\mathrm{Im}(\psi) = \{\lambda 1_{\mathcal{A}}; \lambda \in \mathcal{K}\}$. *Logo, é óbvio que* $\mathrm{Im}(\psi)$ *é um corpo. Daí, podemos identificar naturalmente* $\mathcal{K}$ *com* $\{\lambda 1_{\mathcal{A}}; \lambda \in \mathcal{K}\}$.

Exemplo 1.1.24 *Sejam* $\mathcal{A}$ *uma álgebra e* I *um ideal de* $\mathcal{A}$. *A Aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \pi: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}/I \\ & a & \longmapsto & a+I \end{array}$$

é um homomorfismo sobrejetor de álgebras, chamado de projeção canônica.

Teorema 1.1.25 *Seja* $\mathcal{A}$ *uma álgebra associativa e unitária. São equivalentes:*

a) $\mathcal{A}$ *é isomorfo a um produto direto* $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$ *de álgebras associativas com unidade (não triviais);*

b) Exitem ideais (bilaterais não triviais) $I_1, I_2, \ldots, I_n$ *de* $\mathcal{A}$ *tais que*

$$\mathcal{A} = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n;$$

c) Existem elementos $e_1, e_2, \ldots, e_n \in Z(\mathcal{A})$ $(n \geq 2)$ *tais que* $e_i e_j = 0$, *para* $i \neq j$, $e_1 + e_2 + \cdots + e_n = 1$ *e* $e_k^2 = e_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Demonstração: Ver [CR], capítulo IV, seção 25, página 165. ■

Vamos definir o produto tensorial entre duas álgebras. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas álgebras sobre $\mathcal{K}$. Como feito na construção da álgebra de grupo, olhando $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ como espaços vetoriais, considere o $\mathcal{K}$-espaço vetorial $\mathcal{K}(\mathcal{A}\times\mathcal{B})$ com base $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, munido das operações de soma e de multiplicação por escalar dadas por

$$\sum \alpha_s s + \sum \beta_s s = \sum (\alpha_s + \beta_s) s \quad e \quad \lambda \sum \alpha_s s = \sum (\lambda \alpha_s) s, \quad s \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \lambda \in \mathcal{K}.$$

Considere agora o subespaço $\mathcal{U}$ de $\mathcal{K}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ gerado pelos elementos do tipo

$$(a + a_1, b) - (a, b) - (a_1, b)$$

$$(a, b + b_1) - (a, b) - (a, b_1)$$

$$(\lambda a, b) - \lambda(a, b)$$

$$(a, \lambda b) - \lambda(a, b)$$

com $a, a_1 \in \mathcal{A}$, $b, b_1 \in \mathcal{B}$ e $\lambda \in \mathcal{K}$. Definimos o *produto tensorial* de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, denotado por $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{B}$ (ou simplesmente por $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$), como sendo o espaço vetorial quociente $\dfrac{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}{\mathcal{U}}$.

Dado $(a,b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, vamos denotar por $a \otimes b$ o elemento $\overline{(a,b)} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Chamaremos os elementos da forma $a \otimes b$ de *tensores*. Temos então que o conjunto $S = \{a \otimes b \mid a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$ é um conjunto gerador de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Note que

$$(a + a_1) \otimes b = a \otimes b + a_1 \otimes b$$

$$a \otimes (b + b_1) = a \otimes b + a \otimes b_1$$

$$(\lambda a) \otimes b = \lambda(a \otimes b)$$

$$a \otimes (\lambda b) = \lambda(a \otimes b)$$

para $a, a_1 \in \mathcal{A}$, $b, b_1 \in \mathcal{B}$ e $\lambda \in \mathcal{K}$. Dessa forma, vê-se que os elementos de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ são da forma $\sum(a_i \otimes b_i)$, com $a_i \in \mathcal{A}$ e $b_i \in \mathcal{B}$.

Considere agora a aplicação produto $\star : S \times S \to S$ dada por

$$(a \otimes b) \star (c \otimes d) \mapsto ac \otimes bd,$$

para quaisquer $a, c \in \mathcal{A}$ e $b, d \in \mathcal{B}$. Não é difícil ver que "*star*" é bem definida. Temos que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, munido da multiplicação induzida por $\star$, é uma álgebra sobre $\mathcal{K}$, chamada de *produto tensorial das álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.*

O teorema a seguir refere-se à *Propriedade Universal do Produto Tensorial* e nos dará uma ferramenta para construção de produtos tensoriais entre álgebras.

Teorema 1.1.26 *Sejam V, W e U $\mathcal{K}$-espaços vetoriais. Para toda aplicação bilinear $\varphi : V \times W \to U$, existe uma única aplicação linear $\overline{\varphi} : V \otimes W \to U$, tal que $\overline{\varphi}(v \otimes w) = \varphi(v, w)$ para quaisquer $v \in V$ e $w \in W$.*

Demonstração: Ver [CR], Teorema 12.3, página 61. ■

A proposição a seguir traz um resultado acerca do centro de um produto tensorial entre álgebras unitárias .

Proposição 1.1.27 *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas $\mathcal{K}$-álgebras unitárias.*

a) Se $S = \{a_i \mid i \in I\}$ e $R = \{b_j \mid j \in J\}$ são subconjuntos LI de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente, então $S \otimes R = \{a_i \otimes b_j \mid i \in I, j \in J\}$ é um subconjunto LI de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$;

b) Sejam $S = \{a_i \mid i \in I\}$ e $R = \{b_i \mid i \in I\}$ subconjuntos de $\mathcal{A} - \{0\}$ e $\mathcal{B} - \{0\}$, respectivamente. Se S ou R for LI, então $S \otimes R = \{a_i \otimes b_i \mid i \in I\}$ é um subconjunto LI de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$;

c) $Z(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}) = Z(\mathcal{A})\otimes Z(\mathcal{B})$.

Demonstração: a) Tomemos $\lambda_{ij}\in\mathcal{K}$, com $i\in I$ e $j\in J$, tais que

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\lambda_{ij}(a_i\otimes b_j) = 0.$$

Fixados $i_0\in I$ e $j_0\in J$, tomemos uma aplicação bilinear $\varphi:\mathcal{A}\times\mathcal{B}\to\mathcal{K}$ que satisfaça $\varphi(a_{i_0},b_{j_0}) = 1$ e $\varphi(a_i,b_j) = 0$ se $(i,j)\neq(i_0,j_0)$. Pelo Teorema 1.1.26, temos que existe uma transformação linear $\overline{\varphi}:\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\to\mathcal{K}$ tal que $\overline{\varphi}(a_{i_0}\otimes b_{j_0}) = 1$ e $\overline{\varphi}(a_i\otimes b_j) = 0$ se $(i,j)\neq(i_0,j_0)$. Dessa forma, temos que

$$0 = \overline{\varphi}\left(\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\lambda_{ij}(a_i\otimes b_j)\right) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\lambda_{ij}\overline{\varphi}(a_i\otimes b_j) = \lambda_{i_0j_0}.$$

Como $i\in I$ e $j\in J$ foram tomados arbitrariamente, segue-se o resultado.

b) Sem perda de generalidade, suponhamos que S seja LI, e tomemos β uma base do subespaço vetorial de $\mathcal{B}$ gerado por R. Para cada $i\in I$, considere o subespaço Z_i de $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ gerado pelo conjunto $\{a_i\otimes b; b\in\beta\}$. Pelo item anterior, temos que $\{a_i\otimes b; i\in I, b\in\beta\}$ é um subconjunto LI de $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, e assim $\{Z_i\}_{i\in I}$ é uma família de subespaços independentes de $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, isto é, $Z_i\cap\left(\sum_{j\in I, j\neq i}Z_j\right) = \{0\}$, para todo $i\in I$. Observe que os elementos de Z_i são da forma $\sum_{\alpha\in\beta}a_i\otimes\lambda_\alpha\alpha = a_i\otimes\sum_{\alpha\in\beta}\lambda_\alpha\alpha$, e assim temos que $a_i\otimes b_i\in Z_i-\{0\}$, para cada $i\in I$. Dessa forma, concluímos que $S\otimes R$ é LI.

c) De fato, é fácil ver que $Z(\mathcal{A})\otimes Z(\mathcal{B})\subseteq Z(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$. Por outro lado, tomemos $\alpha\in Z(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$. Temos que existem $a_1,\ldots,a_n\in\mathcal{A}$ não nulos e $b_1,\ldots,b_n\in\mathcal{B}$ linearmente independentes tais que $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i\otimes b_i$. Tomando $a\in\mathcal{A}$ qualquer, temos que $(a\otimes 1_\mathcal{B})\alpha = \alpha(a\otimes 1_\mathcal{B})$. Daí, temos $\sum_{i=1}^n aa_i\otimes b_i = \sum_{i=1}^n a_ia\otimes b_i$. Logo,

$$0 = \sum_{i=1}^n(aa_i - a_ia)\otimes b_i = \sum_{i=1}^n[a,a_i]\otimes b_i.$$

Pelo item *b*) desta proposição, concluímos que $[a,a_i] = 0$, para todo $i = 1,\ldots,n$, e portanto, $a_i\in Z(\mathcal{A})$, $i = 1,\ldots,n$. Dessa forma, $\alpha\in Z(\mathcal{A})\otimes\mathcal{B}$. Por sua vez, podemos tomar $a'_1,\ldots,a'_m\in Z(\mathcal{A})$ linearmente independentes e $b'_1,\ldots,b'_m\in\mathcal{B}$ não nulos tais que $\alpha = \sum_{i=1}^m a'_i\otimes b'_i$. Tomando $b\in\mathcal{B}$ arbitrário, temos $(1_\mathcal{A}\otimes b)\alpha = \alpha(1_\mathcal{A}\otimes b)$, e daí segue-se que $\sum_{i=1}^m a'_i\otimes[b,b'_i] = 0$, donde, $b'_1,\ldots,b'_m\in Z(\mathcal{B})$. Segue-se então $\alpha\in Z(\mathcal{A})\otimes Z(\mathcal{B})$, donde concluímos que $Z(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})\subseteq Z(\mathcal{A})\otimes Z(\mathcal{B})$, e assim o resultado segue. ■

Proposição 1.1.28 *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras sobre $\mathcal{K}$, com $\mathcal{B}$ unitária. Se $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, onde $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são subálgebras de $\mathcal{A}$, então*

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{B} \cong T_1 \oplus T_2,$$

onde $T_i \cong \mathcal{A}_i \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{B}$, para $i = 1, 2$.

Demonstração: Ver [Rot], Teorema 8.87, página 584, e utilizar o Teorema 1.1.26. ■

1.2 $\mathcal{A}$-Módulos e Representações de Grupos

Nesta seção, trataremos de apresentar os principais resultados relativos aos *módulos sobre álgebras* e *representações de grupos*, assim como a relação entre eles. Aqui, todas as álgebras serão unitárias e associativas.

Definição 1.2.1 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra e M um espaço vetorial. Diremos que M é um* **$\mathcal{A}$-módulo à esquerda** *(ou módulo à esquerda sobre $\mathcal{A}$) se está munido de um produto*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathcal{A} \times M & \longrightarrow & M \\ & (a, m) & \longmapsto & a \cdot m \end{array}$$

que satisfaça:

i) $(a_1 + a_2) \cdot m = (a_1 \cdot m) + (a_2 \cdot m)$,

ii) $a \cdot (m_1 + m_2) = (a \cdot m_1) + (a \cdot m_2)$,

iii) $(\lambda a) \cdot m = a \cdot (\lambda m) = \lambda(a \cdot m)$,

iv) $a_1 \cdot (a_2 \cdot m) = (a_1 a_2) \cdot m$,

v) $1_{\mathcal{A}} \cdot m = m$,

para quaisquer $a, a_1, a_2 \in \mathcal{A}$, $m, m_1, m_2 \in M$ e $\lambda \in \mathcal{K}$.

Observe que os itens *i*), *ii*) e *iii*) da definição acima nos dizem que o produto "·" é uma aplicação bilinear.

Exemplo 1.2.2 *Sendo $\mathcal{A}$ uma álgebra qualquer, podemos naturalmente olhar $\mathcal{A}$ como uma $\mathcal{A}$-módulo à esquerda, cujo produto é a multiplicação de $\mathcal{A}$. Mais geralmente, se tomarmos $\mathcal{B}$ uma subálgebra (unitária) de $\mathcal{A}$, temos que $\mathcal{A}$ é um módulo à esquerda sobre $\mathcal{B}$, cujo produto é dado pela restrição da multiplicação de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B} \times \mathcal{A}$. Vamos denotar este $\mathcal{B}$-módulo por ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$.*

Exemplo 1.2.3 *Sejam V um espaço vetorial e $\mathcal{L}(V)$ a álgebra dos operadores lineares de V. Considere o produto*

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & \mathcal{L}(V)\times V & \longrightarrow & V \\ & (T,v) & \longmapsto & T.v=T(v) \end{array},$$

que é bem definido. Temos que V, munido deste produto, é um $\mathcal{L}(V)$-módulo à esquerda.

Exemplo 1.2.4 *Sejam G um grupo, M um espaço vetorial e $\varphi : G \to GL(M)$ um homomorfismo de grupos, com $\varphi(g) = \varphi_g$. Considere a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & \mathcal{K}G\times M & \longrightarrow & M \\ & (\sum_{g\in G}\lambda_g g, v) & \longmapsto & \sum_{g\in G}\lambda_g\varphi_g(v) \end{array}.$$

Temos que M, munido deste produto, é um $\mathcal{K}G$-módulo (à esquerda).

Exemplo 1.2.5 *Sejam $M_n(\mathcal{K})$ a álgebra de matrizes $n\times n$ sobre $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}^n$ o espaço vetorial das n-uplas em $\mathcal{K}$. Considere o produto*

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & M_n(\mathcal{K})\times \mathcal{K}^n & \longrightarrow & \mathcal{K}^n \\ & ((a_{ij})_n, (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)) & \longmapsto & \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\lambda_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\lambda_j\right) \end{array},$$

onde $(a_{ij})_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathcal{K})$. Temos que $\mathcal{K}^n$, munido deste produto, é um $M_n(\mathcal{K})$-módulo.

Analogamente, define-se $\mathcal{A}$-*módulo à direita* (ou módulo à direita sobre $\mathcal{A}$), bastando considerar o produto

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & M\times \mathcal{A} & \longrightarrow & M \\ & (m,a) & \longmapsto & m\cdot a \end{array}$$

satisfazendo:

i) $m\cdot(a_1+a_2) = (m\cdot a_1)+(m\cdot a_2)$,

ii) $(m_1+m_2)\cdot a = (m_1\cdot a)+(m_2\cdot a)$,

iii) $m\cdot(\lambda a) = (\lambda m)\cdot a = \lambda(m\cdot a)$,

iv) $(m\cdot a_1)\cdot a_2 = m\cdot(a_1a_2)$,

v) $m \cdot 1_{\mathcal{A}} = m$,

para quaisquer $a, a_1, a_2 \in \mathcal{A}$, $m, m_1, m_2 \in M$ e $\lambda \in \mathcal{K}$.

É importante observar que existe uma diferença mais do que sutil entre $\mathcal{A}$-módulos à esquerda e $\mathcal{A}$-módulos à direita, onde geralmente não é possível simplesmente mudar o escalar de um lado para o outro. Observe que as condições $a_1 \cdot (a_2 \cdot m) = (a_1 a_2) \cdot m$ (para $\mathcal{A}$-módulo à esquerda) e $(m \cdot a_1) \cdot a_2 = m \cdot (a_1 a_2)$ (para $\mathcal{A}$-módulo à direita) apresentam uma real diferença quando, por exemplo, $\mathcal{A}$ é não comutativa.

Definição 1.2.6 *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e M um $\mathcal{A}$-módulo. Dizemos que:*

i) Um subespaço vetorial N de M é um **submódulo** *(ou $\mathcal{A}$-submódulo) de M se $a \cdot n \in N$, para quaisquer $a \in \mathcal{A}$ e $n \in N$.*

ii) Um submódulo $N \neq \{0\}$ de M é **minimal** *se não existe submódulo N_1 não nulo de M tal que $N_1 \subsetneq N$.*

iii) N é um submódulo **maximal** *de M se $N \neq M$ e se não existe submódulo N_1 de M tal que $N \subsetneq N_1 \subsetneq M$.*

iv) $M \neq \{0\}$ é um $\mathcal{A}$-módulo **irredutível** *(ou* **simples***) se seus únicos submódulos são $\{0\}$ e M.*

Exemplo 1.2.7 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra e consideremos o $\mathcal{A}$-módulo ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}$. Temos que os submódulos de ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}$ são exatamente os ideais à esquerda da álgebra $\mathcal{A}$. Sendo M um $\mathcal{A}$-módulo e $m \in M$, então o conjunto $\mathcal{A} \cdot m = \{a \cdot m; a \in A\}$ é um submódulo de M. Caso M seja um $\mathcal{A}$-módulo irredutível, temos que $\mathcal{A} \cdot m = M$ para qualquer $m \in M - \{0\}$. Reciprocamente, se $\mathcal{A} \cdot m = M$ para qualquer $m \in M - \{0\}$, então M é um $\mathcal{A}$-módulo irredutível.*

Exemplo 1.2.8 *Sendo M um $\mathcal{A}$-módulo, temos que os seus submódulos minimais são exatamente aqueles que são $\mathcal{A}$-módulos irredutíveis. Caso M tenha dimensão finita, como espaço vetorial, então temos que M possui necessariamente algum submódulo minimal.*

Exemplo 1.2.9 *Sendo V um espaço vetorial, temos que V é um $\mathcal{L}(V)$-módulo irredutível. De fato, considere W um submódulo não nulo de V. Tomemos $w \in W - \{0\}$ e $v \in V$ qualquer. Temos que existe uma transformação linear $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T(w) = v$, e daí temos $v = T(w) = T \cdot w \in W$, e assim $V \subseteq W$, donde $W = V$.*

Definiremos agora *módulo quociente*. Sejam M um $\mathcal{A}$-módulo e N um submódulo de M. Olhando N como um subespaço vetorial do espaço M, consideremos o espaço vetorial quociente M/N que é o conjunto de todas as classes laterais de N em M, isto é, $M/N = \{m + N \mid m \in M\} = \{\overline{m} \mid m \in M\}$. Considere agora a aplicação produto de um elemento de $\mathcal{A}$ por um elemento de M/N dada da seguinte forma

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathcal{A} \times M/N & \longrightarrow & M/N \\ & (a, \overline{m}) & \longmapsto & \overline{a \cdot m} \end{array}.$$

Mostra-se facilmente que tais operações são bem definidas. Não é difícil ver que M/N, munido de tal produto, é um $\mathcal{A}$-módulo, chamado de *módulo quociente de M por N*.

É interessante observar que N é um submódulo maximal de M se, e somente se, M/N é um modulo irredutível. Como justificativa, observe que os submódulos de M/N são da forma M_1/N, onde M_1 é um submódulo de M tal que $N \subseteq M_1$.

Definição 1.2.10 *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra, M_1 e M_2 $\mathcal{A}$-módulos. Dizemos que uma transformação linear $\varphi : M_1 \to M_2$ é um* **homomorfismo de $\mathcal{A}$-módulos** *se*

$$\varphi(a \cdot m) = a \cdot \varphi(m),$$

para quaisquer $a \in \mathcal{A}$ e $m \in M_1$.

Exemplo 1.2.11 *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e M um $\mathcal{A}$-módulo. Fixado $m \in M$, considere a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} T : & {}_{\mathcal{A}}\mathcal{A} & \longrightarrow & M \\ & a & \longmapsto & T(a) = a \cdot m \end{array}.$$

Temos que T é um homomorfismo de $\mathcal{A}$-módulos.

Exemplo 1.2.12 *Sejam M um $\mathcal{A}$-módulo, N_1 e N_2 submódulos de M tais que $M = N_1 \oplus N_2$. Temos que as projeções*

$$\begin{array}{rccc} \pi_1 : & M & \longrightarrow & N_1 \\ & m = n_1 + n_2 & \longmapsto & \pi_1(m) = n_1 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} \pi_2 : & M & \longrightarrow & N_2 \\ & m = n_1 + n_2 & \longmapsto & \pi_2(m) = n_2 \end{array},$$

onde $n_1 \in N_1$ e $n_2 \in N_2$, são homomorfismos de $\mathcal{A}$-módulos.

Exemplo 1.2.13 *Sejam M um $\mathcal{A}$-módulo e N um submódulo de M. Considere a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \psi : & M & \longrightarrow & M/N \\ & m & \longmapsto & \psi(m) = \overline{m} = m + N \end{array}.$$

Temos que ψ é um homomorfismos de $\mathcal{A}$-módulos.

Não é difícil verificar que se $\varphi : M_1 \to M_2$ é um homomorfismo de $\mathcal{A}$-módulos, então seu núcleo $\ker(\varphi) = \{m \in M_1; \varphi(m) = 0\}$ é um submódulo de M_1 e sua imagem $\operatorname{Im}(\varphi) = \{\varphi(m) \in M_2; m \in M_1\}$ é um submódulo de M_2.

Exemplo 1.2.14 *Tomemos M e M_1 $\mathcal{A}$-módulos tais que existe um homomorfismo $\varphi : M \to M_1$ sobrejetivo. Não é difícil mostrar que*

$$\begin{array}{rccc} \overline{\varphi}: & M/\ker(\varphi) & \longrightarrow & M_1 \\ & \overline{m} & \longmapsto & \overline{\varphi}(\overline{m}) = \varphi(m) \end{array}$$

é um isomorfismo de $\mathcal{A}$-módulos. Ademais, se $\psi : M \to N$ é um homomorfismo de $\mathcal{A}$-módulos, então $M/\ker(\psi) \cong \operatorname{Im}(\psi)$.

Seja M um $\mathcal{A}$-módulo. Chamamos de *endomorfismo do $\mathcal{A}$-módulo M* um homomorfismo (de $\mathcal{A}$-módulos) de M em M. Vamos denotar por $End_{\mathcal{A}}(M)$ o conjunto de todos os endomorfismos do $\mathcal{A}$-módulo M. Observando que $End_{\mathcal{A}}(M) \subseteq \mathcal{L}(M)$, não é difícil verificar que $End_{\mathcal{A}}(M)$ é uma subálgebra de $\mathcal{L}(M)$ (ver Exemplo 1.1.6). Considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{L}(M) \\ & a & \longmapsto & \varphi(a) = \varphi_a \end{array},$$

onde $\varphi_a(m) = a \cdot m$, para qualquer $m \in M$. Temos que se $T \in End_{\mathcal{A}}(M)$, então

$$\begin{aligned} (T \circ \varphi_a)(m) &= T(\varphi_a(m)) = T(a \cdot m) \\ &= a \cdot T(m) = \varphi_a(T(m)) \\ &= (\varphi_a \circ T)(m), \end{aligned}$$

para quaisquer $a \in \mathcal{A}$ e $m \in M$. Isso significa que

$$End_A(M) = \{T \in \mathcal{L}(M) | T \circ \varphi_a = \varphi_a \circ T, \forall a \in \mathcal{A}\}.$$

Proposição 1.2.15 (Lema de Schur) *Seja M um $\mathcal{A}$-módulo irredutível. Temos então que $End_{\mathcal{A}}(M)$ é uma álgebra com divisão.*

Demonstração: Seja $T \in End_{\mathcal{A}}(M) - \{0\}$. Temos que $\ker(T) \neq M$ e $\operatorname{Im}(T) \neq \{0\}$. Como $Ker(T)$ e $\operatorname{Im}(T)$ são submódulos de M, e este é irredutível, devemos ter $Ker(T) = \{0\}$ e $\operatorname{Im}(T) = M$. Logo, T é inversível como transformação linear. Não é difícil ver que $T^{-1} \in End_{\mathcal{A}}(M)$. Portanto, segue-se o resultado. ■

Proposição 1.2.16 *Sejam M um $\mathcal{A}$-módulo de dimensão finita (como espaço vetorial) e $N_1, N_2, \ldots, N_r$ submódulos minimais de M. Se $J \subseteq N_1 + N_2 + \cdots + N_r$ é um submódulo (não trivial) minimal de M, então $J \cong N_i$ (como $\mathcal{A}$-módulos), para algum $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$.*

Demonstração: Suponhamos sem perda de generalidade que $N_1 \cap (N_2 + \cdots + N_r) \neq \{0\}$. Como N_1 é minimal, devemos ter $N_1 \subseteq N_2 + N_3 + \cdots + N_r$, e assim $N_1 + N_2 + N_3 + \cdots + N_r = N_2 + N_3 + \cdots + N_r$. Logo, podemos supor que a soma $N_1 + N_2 + \cdots + N_r$ é direta.

Dado $x \in J$, existem únicos $x_1 \in N_1, \ldots, x_r \in N_r$ tais que $x = x_1 + \cdots + x_r$. Para cada $j = 1, \ldots, r$, considere o homomorfismo de $\mathcal{A}$-módulos

$$\begin{array}{rccc} \pi_j : & J & \longrightarrow & N_j \\ & x = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} x_i & \longmapsto & \pi_j(x) = x_j \end{array}.$$

Como $J \neq \{0\}$, deve existir um $j_0 \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $\pi_{j_0} \neq 0$, e assim, pela minimalidade de J, temos que $\ker(\pi_{j_0}) = \{0\}$, donde concluímos que $J \cong \operatorname{Im}(\pi_{j_0})$ (como $\mathcal{A}$-módulos). Mas como N_{j_0} também é minimal, devemos ter $\operatorname{Im}(\pi_{j_0}) = N_{j_0}$. Portanto, π_{j_0} é um isomorfismo de A-módulos. ■

O resultado abaixo diz respeito à unicidade da decomposição em submódulos irredutíveis de um $\mathcal{A}$-módulo.

Proposição 1.2.17 *Seja M um $\mathcal{A}$-módulo de dimensão finita (como espaço vetorial). Se existem $W_1, W_2, \ldots, W_r$ e $N_1, N_2, \ldots, N_s$ submódulos minimais (não triviais) de M tais que $M = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_s$, então $r = s$ e existe uma permutação $\{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ de $\{1, 2, \ldots, r\}$ tal que*

$$W_1 \cong N_{j_1}, W_2 \cong N_{j_2}, \ldots, W_r \cong N_{j_r}.$$

Demonstração: Ver [CR], Teorema 14.5, página 83. ■

Começaremos agora um breve estudo sobre *representações de grupos*. Nesta seção, G denotará um grupo finito, salvo menção contrária. Recordamos que $GL(M)$ denota o grupo de todos os operadores lineares invertíveis do espaço vetorial M e $GL_n(\mathcal{K})$ refere-se ao grupo multiplicativo de todas as matrizes invertíveis $n \times n$ sobre $\mathcal{K}$.

Definição 1.2.18 *Sejam G um grupo e M um espaço vetorial. Uma* **representação** *de G com espaço representação M é um homomorfismo de grupos*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & G & \longrightarrow & GL(M) \\ & g & \longmapsto & \varphi(g) = \varphi_g \end{array}.$$

Duas representações φ e φ' de G com espaços M e M', respectivamente, são ditas **equivalentes** *se existe um $\mathcal{K}$-isomorfismo $\psi : M \to M'$ tal que $\varphi_g\psi = \psi\varphi'_g$, para todo $g \in G$, isto é, $\varphi_g\psi(m) = \psi\varphi'_g(m)$ para todo $m \in M$ e $g \in G$. A dimensão $\dim_{\mathcal{K}} M$ de M sobre $\mathcal{K}$ é chamada o* **grau** *de φ.*

Por simplicidade, diremos apenas "φ é uma representação de G em M" ao invés de "φ é uma representação de G com espaço representação M". Quando se tem $\dim_{\mathcal{K}} M = n < \infty$, para algum $n \in \mathbb{N}$, sabe-se que $GL(M) \cong GL_n(\mathcal{K})$. Neste caso, uma representação φ de G em M pode ser vista como um homomorfismo $\varphi : G \to GL_n(\mathcal{K})$. Observe que se $n = 1$, como $GL_1(\mathcal{K}) \cong \mathcal{K}^*$, onde $\mathcal{K}^*$ é o grupo multiplicativo do corpo $\mathcal{K}$, podemos considerar φ como um homomorfismo $\varphi : G \to \mathcal{K}^*$.

Exemplo 1.2.19 *Sejam G um grupo e M um espaço vetorial qualquer. O homomorfismo*

$$\begin{array}{rccc} \psi: & G & \longrightarrow & GL(M) \\ & g & \longmapsto & \psi(g) = Id_M \end{array}$$

é uma representação de G em M, chamada de **representação trivial**.

Exemplo 1.2.20 *Sejam $\psi : G \to GL(M)$ uma representação de G em M e H um subgrupo de G. Temos que a restrição de ψ a H é ainda um homomorfismo de grupos. Logo, a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \psi_H: & H & \longrightarrow & GL(M) \\ & h & \longmapsto & \psi_H(h) = \psi(h) \end{array}$$

é uma representação de H em M. Ademais, ψ e ψ_H têm o mesmo grau.

Exemplo 1.2.21 *Seja C_∞ o grupo cíclico infinito. Sendo $g \in C_\infty$ tal que $C_\infty = \langle g \rangle$, definimos*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & C_\infty & \longrightarrow & GL_2(\mathbb{R}) \\ & g^n & \longmapsto & \varphi(g^n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Temos que φ é uma representação de grau 2 de C_∞ em $GL_n(\mathbb{R})$.

Exemplo 1.2.22 *Tomemos S_n o grupo simétrico de grau n, $n \in \mathbb{N}$. Considere a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \theta: & S_n & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ & \sigma & \longmapsto & \theta(\sigma) = (-1)^\sigma \end{array},$$

onde $(-1)^\sigma = sign(\sigma)$ *é o sinal da permutação* $\sigma \in S_n$. *Temos que* θ *é uma representação de* S_n *em* $\mathbb{R}^*$. *Note que* $\theta(\sigma) \in \mathcal{C}_2 = \{-1, 1\}$, *para qualquer* $\sigma \in S_n$. *Tal representação é chamada de* **representação sinal** *de* S_n.

Definição 1.2.23 *Sejam* G *um grupo,* M *um espaço vetorial e* $\varphi : G \to GL(M)$ *uma representação de* G. *Dizemos que um subespaço* W *de* M *é* **φ-invariante** *se* $\varphi_g(W) \subseteq W$ *para todo* $g \in G$. *Se existe algum subespaço não nulo* W *φ-invariante de* M, *tal que* $W \neq M$, *dizemos que* φ *é uma* **representação redutível**. *Caso contrário, dizemos que* φ *é uma* **representação irredutível**.

Observe que os *subespaços triviais* $\{0\}$ *e* M de M são φ-invariantes. Dessa forma, afirmar que φ é irredutível, é o mesmo que dizer que os únicos subespaços φ-invariantes de M são os triviais.

Sendo W um subespaço φ-invariante de M e $g \in G$, temos que a restrição de φ_g a W é pode ser definida por

$$\begin{array}{rccc} \varphi_g|_W : & W & \longrightarrow & W \\ & w & \longmapsto & \varphi_g|_W(w) = \varphi_g(w) \end{array}.$$

Como $\varphi_g(W) \subseteq W$ e $\varphi_{g^{-1}}(W) \subseteq W$, e do fato de que $\varphi_{g^{-1}} = \varphi_g^{-1}$, segue-se que $\varphi_g(W) = W$. Ademais, φ_g é injetora. Dessa forma, temos que $\varphi_g|_W \in GL(W)$. Isso motiva a seguinte definição:

Definição 1.2.24 *Sejam* $\varphi : G \to GL(M)$ *uma representação de* G *em* M *e* W *um subespaço φ-invariante de* M. *Definimos a* **sub-representação** φ_W *como sendo a representação de* G

$$\begin{array}{rccc} \varphi_W : & G & \longrightarrow & GL(W) \\ & g & \longmapsto & \varphi_W(g) = \varphi_g|_W \end{array}.$$

A sub-representação φ_W *é ainda chamada de* **restrição de φ a W**.

Exemplo 1.2.25 *Toda representação de grau* 1 *é irredutível. Sendo* G *um grupo finito de ordem* ≥ 2, *então temos que toda representação de* G *de grau maior ou igual a* $|G|$ *é redutível. De fato, seja* $\varphi : G \to GL(M)$ *uma representação de* G, *com* $\dim M \geq |G|$. *Tomemos* $v_0 \in M - \{0\}$ *e considere subespaço* $W = \langle \varphi_g(v_0) \mid g \in G \rangle$ *de* M. *Temos que* W *é um subespaço não nulo φ-invariante de* M, *com* $\dim W \leq |G|$. *Observando que, para cada* $v \in M \setminus \{0\}$, $W_v = \langle \sum_{g \in G} \varphi_g(v) \rangle$ *é um subespaço φ-invariante de* M, *com* $\dim M_v = 1 < |G| \leq \dim M$, *devemos ter* $\sum_{g \in G} \varphi_g = 0$, *e daí, o conjunto* $\{\varphi_g(v_0) \mid g \in G\}$ *é linearmente dependente. Logo,* $\dim W < |G|$, *e assim* $\dim W < \dim M$. *Portanto,* φ *é redutível.*

Exemplo 1.2.26 *A representação*

$$\begin{array}{rccc} \psi: & C_\infty & \longrightarrow & GL_2(\mathbb{R}) \\ & g^n & \longmapsto & \varphi(g^n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

é redutível. Com efeito, basta observar que o subespaço $W = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ *de* $M_{2\times 1}(\mathbb{R})$ *satisfaz* $\psi(x)(W) \subseteq W$ *para todo* $x \in C_\infty$.

Exemplo 1.2.27 *Tomemos um* $\mathcal{K}$*-espaço vetorial* M *de dimensão* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. *Fixemos uma base* $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *de* M. *Para cada* $\sigma \in S_n$, *consideremos a transformação linear* $T_\sigma : M \to M$ *que satisfaz* $T_\sigma(v_i) = v_{\sigma(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Temos que a representação*

$$\begin{array}{rccc} \phi: & S_n & \longrightarrow & GL(M) \\ & \sigma & \longmapsto & \phi(\sigma) = T_\sigma \end{array}$$

é redutível. De fato, observe que os subespaços $W_1 = \langle v_1 + v_2 + \cdots + v_n \rangle$ *e* $W_2 = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0\}$ *de* M *são* ϕ*-invariantes. Note que* ϕ_{W_1} *é obviamente irredutível, pois têm grau 1. Por sua vez, não é difícil mostrar que a sub-representação* ϕ_{W_2} *é irredutível quando* $\operatorname{char}\mathcal{K} = 0$.

Proposição 1.2.28 *Sejam* $\varphi : G \to GL(M)$ *e* $\psi : G \to GL(N)$ *representações de* G *equivalentes. Então* φ *é irredutível se, e somente se,* ψ *é irredutível.*

Demonstração: Considere $T : M \to N$ um isomorfismo de espaços vetoriais tal que $T\varphi_g = \psi_g T$, para todo $g \in G$. Primeiramente, suponhamos que φ é irredutível. Agora, por contradição, suponhamos que N_1 é um subespaço não trivial ψ-invariante de N. Considere o subespaço $M_1 = T^{-1}(N_1)$ de M. Note que M_1 é não trivial. Para todo $g \in G$, temos que

$$\varphi_g(M_1) = (T^{-1}\psi_g T)(M_1) = (T^{-1}\psi_g)(T(M_1)) = (T^{-1}\psi_g)(N_1) \subseteq T^{-1}(N_1) = M_1,$$

e daí M_1 é subespaço φ-invariante de M. Contradição! Portanto, φ é irredutível. Analogamente, demonstra-se que vale a recíproca. ∎

Exemplo 1.2.29 *Considere as representações do grupo* S_n *em* $\mathcal{K}^*$ *dadas por*

$$\begin{array}{rccc} \varsigma: & S_n & \longrightarrow & \mathcal{K}^* \\ & \sigma & \longmapsto & \varsigma(\sigma) = 1 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} \theta: & S_n & \longrightarrow & \mathcal{K}^* \\ & \sigma & \longmapsto & \theta(\sigma) = (-1)^\sigma \end{array},$$

que são as representações trivial e sinal, respectivamente, de S_n. *É fácil ver que* ς *e* θ *não serão equivalentes em hipótese de* $\operatorname{char}\mathcal{K} \neq 2$.

Definição 1.2.30 *Sejam G um grupo e $\varphi : G \to GL(M)$ uma representação de G. Dizemos que φ é* **completamente redutível** *(ou* **semissimples***) se existem subespaços $W_1, W_2, \ldots, W_n$ φ-invariantes de M tais que $M = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$ e $\varphi_{W_1}, \varphi_{W_2}, \ldots, \varphi_{W_n}$ são irredutíveis.*

Observe que toda representação irredutível é completamente redutível.

Exemplo 1.2.31 *Sejam $\mathcal{K}$ um corpo de característica 2 e $G \cong \mathbb{Z}_2$ um grupo. Sendo*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{K}^2 & \longrightarrow & \mathcal{K}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (x+y, y) \end{array}$$

uma transformação linear, temos que

$$\begin{array}{rccc} \psi: & G & \longrightarrow & GL(\mathcal{K}^2) \\ & g & \longmapsto & \psi(g) = T \end{array}$$

é uma representação de G, pois $\operatorname{char}\mathcal{K} = 2$. Uma vez que $W = \langle (1,0) \rangle$ é o único subespaço ψ-invariante de $\mathcal{K}^2$, temos que ψ não é completamente redutível.

Teorema 1.2.32 (Maschke) *Seja G um grupo finito tal que sua ordem não é divisível por $\operatorname{char}\mathcal{K}$. Se $\varphi : G \to GL(M)$ é uma representação de grau finito e W é um subespaço φ-invariante de M, então existe um subespaço W_1 φ-invariante de M tal que $M = W \oplus W_1$. Ademais, φ é completamente redutível.*

Demonstração: Ver [CR], Teorema 10.8, página 41. ■

O teorema anterior nos diz que se $\varphi : G \to GL(M)$ é uma representação de G, com M um espaço vetorial de dimensão finita e G um grupo de ordem finita tal que $\operatorname{char}\mathcal{K} \nmid |G|$, então $M = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$, onde W_i é φ-invariante e a subrepresentação φ_{W_i} é irredutível, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Tomemos um $\mathcal{K}G$-módulo M. Considere, para cada $g \in G$, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi_g: & M & \longrightarrow & M \\ & v & \longmapsto & \varphi_g(v) = g \cdot v \end{array}.$$

Note que, dados $g, h \in G$, tem-se $\varphi_{gh} = \varphi_g \circ \varphi_h$. Observe ainda que $\varphi_1 = Id_M$, onde 1 é o elemento neutro de G, e assim $\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g = \varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = Id_M$. Logo, $\varphi_g \in GL(M)$. Não é difícil ver que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & G & \longrightarrow & GL(M) \\ & g & \longmapsto & \varphi(g) = \varphi_g \end{array}$$

é uma representação de G em M. Sendo W um submódulo de M, temos que $g \cdot w \in W$, para quaisquer $g \in G$ e $w \in W$. Dessa forma, temos que W é um subespaço φ-invariante de M.

Por outro lado, sejam M um espaço vetorial e $\varphi : G \to GL(M)$ uma representação de G em M. Considere o $\mathcal{K}G$-módulo definido no Exemplo 1.2.4. Tomando W um subespaço φ-invariante de M, temos que $g \cdot w = \varphi_g(w) \in W$, para quaisquer $g \in G$ e $w \in W$. Lembrando que G é um conjunto gerador (como espaço vetorial) da álgebra de grupo $\mathcal{K}G$, dado $\lambda \in \mathcal{K}G$ arbitrário, segue-se que $\lambda \cdot w \in W$ para qualquer $w \in W$. Dessa forma, temos que W é um submódulo do $\mathcal{K}G$-módulo M.

Portanto, podemos concluir que existe um correspondência biunívoca entre as representações de G e os respectivos $\mathcal{K}G$-módulos.

Finalizaremos esta seção com alguns resultados que envolvem as representações de um grupo G e os $\mathcal{K}G$-módulos.

Proposição 1.2.33 *Sejam $\varphi : G \to GL(M)$ e $\psi : G \to GL(N)$ representações de G. Temos então que:*

a) φ e ψ são equivalentes se, e somente se, os seus respectivos $\mathcal{K}G$-módulos M e N são isomorfos;

b) φ é irredutível se, e somente se, o respectivo $\mathcal{K}G$-módulo M é irredutível.

Demonstração: a) Suponha que φ e ψ são equivalentes. Tomemos $T : M \to N$ um isomorfismo linear tal que $T\varphi_g = \psi_g T$, para todo $g \in G$. Considerando os $\mathcal{K}G$-módulos M e N correspondentes, respectivamente, a φ e ψ, temos

$$T(g \cdot v) = T(\varphi_g(v)) = \psi_g(T(v)) = g \cdot T(v)$$

para quaisquer $g \in G$ e $v \in M$. Como T é linear e G é um conjunto gerador de $\mathcal{K}G$, temos que $T(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot T(v)$, para quaisquer $\lambda \in \mathcal{K}G$ e $v \in M$. Logo, T é um homomorfismo de $\mathcal{K}G$-módulos. Sendo T bijetora, temos que M e N são isomorfos como $\mathcal{K}G$-módulos.

Por outro lado, suponhamos que M e N são $\mathcal{K}G$-módulos isomorfos. Seja $F : M \to N$ um isomorfismo de $\mathcal{K}G$-módulos. Temos que F é uma transformação linear bijetora que satisfaz $F(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot F(v)$ para quaisquer $\lambda \in \mathcal{K}G$ e $v \in M$. Dessa forma, temos

$$(F\varphi_g)(v) = F(\varphi_g(v)) = F(g \cdot v) = g \cdot F(v) = \psi_g(F(v)) = (\psi_g F)(v),$$

para quaisquer $g \in G$ e $v \in M$. Logo, $F\varphi_g = \psi_g F$, para qualquer $g \in G$, e portanto, φ e ψ são equivalentes.

b) Pelo que vimos anteriormente, os submódulos do $\mathcal{K}G$-módulo M são exatamente os subespaços φ-invariantes de M, e vice-versa. Daí, segue-se o resultado. ■

A partir da proposição anterior, podemos reformular o Teorema de Maschke (Teorema 1.2.32) em termos de submódulos. Segue abaixo tal reformulação.

Teorema 1.2.34 (Maschke reformulado) *Sejam G um grupo finito e M um $\mathcal{K}G$-módulo de dimensão finita (como espaço vetorial). Se W é um submódulo de M e* $\operatorname{char}\mathcal{K} \nmid |G|$*, então existe um submódulo W_1 de M tal que $M = W \oplus W_1$. Ademais, existem $N_1, N_2, \ldots, N_r$ submódulos minimais de M tais que $M = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_r$.*

Demonstração: Basta combinar a demonstração da Proposição 1.2.33 e o Teorema de Maschke. ■

Pela Proposição 1.2.17, temos que a decomposição de M garantida no teorema anterior é única, a menos de isomorfismo.

Consideremos G um grupo finito cuja ordem não é múltiplo de $\operatorname{char}\mathcal{K}$. Nestas condições, temos que toda representação de grau finito de G é completamente redutível (Teorema de Maschke). Para cada $g \in G$, considere a aplicação linear $\rho : \mathcal{K}G \to \mathcal{K}G$ que satisfaz $\rho_g(\alpha) = g\alpha$, para todo $\alpha \in \mathcal{K}G$. Note que $\rho_g \in GL(\mathcal{K}G)$. Considere agora a aplicação ρ dada por

$$\begin{array}{rccl} \rho : & G & \longrightarrow & GL(\mathcal{K}G) \\ & g & \longmapsto & \rho(g) = \rho_g \end{array},$$

que é uma representação de G, chamada de *representação regular à esquerda de G*. Temos que ρ é injetiva e é a representação correspondente ao $\mathcal{K}G$-módulo ${}_{\mathcal{K}G}\mathcal{K}G$. Note que os subespaços ρ-invariantes de $\mathcal{K}G$ são exatamente os ideais à esquerda de $\mathcal{K}G$. Dessa forma, segue-se do Teorema de Maschke que se W é um ideal à esquerda de $\mathcal{K}G$, então existe um ideal à esquerda W_1 de $\mathcal{K}G$ tal que $\mathcal{K}G = W \oplus W_1$.

Observando que N é um ideal minimal à esquerda de $\mathcal{K}G$ se, e somente se, a sub-representação ρ_N é irredutível, temos que podemos escrever $\mathcal{K}G$ como uma soma direta de um número finito de ideais minimais à esquerda de $\mathcal{K}G$ (Teorema de Maschke).

Teorema 1.2.35 *Seja G um grupo finito cuja ordem não é divisível por* $\operatorname{char}\mathcal{K}$. *Então todo $\mathcal{K}G$-módulo irredutível é isomorfo a algum ideal minimal à esquerda de $\mathcal{K}G$. Em outras palavras, toda representação irredutível de G é equivalente a uma sub-representação da representação regular à esquerda de G.*

Demonstração: Ver [CR], Teorema 25.10, página 166. ∎

Nas condições do teorema acima, e tomando uma decomposição de $\mathcal{K}G$ tal qual a que é garantida pelo Teorema 1.2.34, segue da Proposição 1.2.16 que o número de representações irredutíveis de G é finito, a menos de equivalência. Pode-se mostrar que o número de representações irredutíveis de G é menor ou igual ao número de classes de conjugação distintas de G (ver [CR], Observação 27.25, página 188).

Teorema 1.2.36 *Seja G um grupo finito, tal que* $\operatorname{char}\mathcal{K} \nmid |G|$. *Sendo r o número de representações irredutíveis de G, a menos de equivalência, considere $I_1, I_2, \ldots, I_r$ ideais minimais à esquerda de $\mathcal{K}G$, dois a dois não isomorfos (como $\mathcal{K}G$-módulos). Então $J_i = I_i\mathcal{K}G$ é um bilateral de $\mathcal{K}G$, para $i = 1, 2, \ldots, r$. Ademais,*

$$\mathcal{K}G = J_1 \oplus J_2 \oplus \cdots \oplus J_r.$$

Demonstração: Ver [CR], Teorema 25.15, página 168. ∎

Uma importante ferramenta em Teoria das representações é fornecida pela Teoria dos Caracteres. Aqui, a aplicação $tr : \mathcal{L}(M) \to \mathcal{K}$ é a função traço em $\mathcal{L}(M)$, onde M é um espaço vetorial de dimensão finita.

Definição 1.2.37 *Seja $\varphi : G \to GL(M)$ uma representação de G de grau finito. Definimos o* **caracter** *de φ como sendo a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \chi_\varphi : & G & \longrightarrow & \mathcal{K} \\ & g & \longmapsto & \chi_\varphi(g) = tr(\varphi_g) \end{array}.$$

Dizemos que χ_φ é um **caracter irredutível** *se φ for uma representação irredutível de G. Ademais,* $\dim M = deg\chi_\varphi$ *é chamado o grau do caracter χ_φ.*

No caso de um representação $\varphi : G \to GL_n(\mathcal{K})$, definimos o caracter de φ de forma análoga, observando apenas que $\chi_\varphi(g)$ é o traço da matriz φ_g, $g \in G$.

Sendo $\varphi : G \to GL(M)$ e $\psi : G \to GL(N)$ representações equivalentes de G, ambas de graus finitos, tomemos $T : M \to N$ um isomorfismo linear tal que $T\varphi_g = \psi_g T$, $g \in G$. Temos daí que

$$\chi_\varphi(g) = tr(\varphi_g) = tr(T^{-1}\psi_g T) = tr(\psi_g) = \chi_\psi(g),$$

para todo $g \in G$. Logo, $\chi_\varphi = \chi_\psi$.

Tomando $\varphi : G \to GL(M)$ uma representação de G de grau finito e χ seu caracter, temos que se $g, g_1 \in G$ são conjugados, isto é, $g = h^{-1}g_1h$ para algum $h \in G$, então

$$\chi(g) = tr(\varphi_g) = tr(\varphi_{h^{-1}g_1h}) = tr(\varphi_{h^{-1}}\varphi_{g_1}\varphi_h) = tr(\varphi_{g_1}) = \chi(g_1).$$

Note que $\chi_\varphi(1) = tr(Id_M) = \dim M$, onde 1 é o elemento neutro de G.

Exemplo 1.2.38 *Sendo $\varsigma : G \to GL(M)$ uma representação trivial de grau finito de G, isto é, $\varsigma(g) = Id_M$, para todo $g \in G$, temos que $\chi_\varsigma(g) = dimM$, para todo $g \in G$. Agora, seja $\rho : G \to K^*$ uma representação de G. Note que ρ tem grau 1. Então*

$$\chi_\rho(g) = \rho(g),$$

para todo $g \in G$. Logo, $\chi_\rho = \rho$.

Exemplo 1.2.39 *Seja M um espaço vetorial real de dimensão finita n. Considere a representação de G*

$$\begin{array}{rccc} \phi : & S_n & \longrightarrow & GL(M) \\ & \sigma & \longmapsto & \phi(\sigma) = T_\sigma \end{array}$$

definida no Exemplo 1.2.27. Seja $r_\sigma = \#\{i \mid \sigma(i) = i, i = 1, 2, \ldots, n\}$, onde $\sigma \in S_n$, isto é, r_σ é o número de pontos fixados por $\sigma \in S_n$. Sendo $\chi : S_n \to \mathbb{R}$ o caracter de ϕ, não é difícil ver que $\chi(\sigma) = r_\sigma$.

Sob hipótese de G ser um grupo finito e sendo a característica de $\mathcal{K}$ igual a zero, então vale o Teorema de Maschke, e com isso, temos os resultados a seguir.

Teorema 1.2.40 *Todo caracter de G pode ser escrito como soma de caracteres irredutíveis de G.*

Demonstração: Ver [JL], Proposição 13.18, página 127. ■

Uma outra demonstração do teorema acima pode ser encontrada em [S], Proposição 2, página 11.

Teorema 1.2.41 *Duas representações de graus finitos de G com o mesmo caracter são equivalentes.*

Demonstração: Ver [JL], Teorema 14.21, página 143. ■

Ver também [B], Teorema 7.4, página 79, ou [S], Corolário 2, página 16.

Note que do teorema acima podemos concluir que existe uma correspondência biunívoca entre as representações irredutíveis de grau finito de um grupo finito G e os caracteres irredutíveis de representações de G. Consequentemente, existe uma correspondência biunívoca entre os $\mathcal{K}G$-módulos irredutíveis e os G-caracteres irredutíveis.

1.3 Radical de Jacobson e Semissimplicidade

Nesta seção apresentaremos os principais resultados pertinentes ao *Radical de Jacobson* de uma álgebra e a semissimplicidade. As principais referências indicadas para esta seção são [H] e [Fe], nas quais o leitor poderá encontrar demonstrações e maiores detalhes. Em toda esta seção, toda álgebra apresentada será sempre uma álgebra associativa de dimensão finita sobre um corpo de característica zero.

Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathcal{K}$-álgebra. Sabe-se que se I e J são ideais (bilaterais) nilpotentes de $\mathcal{A}$, então $I + J$ é um ideal (bilateral) nilpotente de $\mathcal{A}$ (ver [Fe], Lema 16.1, página 48). Assim, sendo N um ideal nilpotente de A de dimensão máxima, segue que N deve conter todos os ideais nilpotentes de $\mathcal{A}$, e daí N é o maior ideal nilpotente de $\mathcal{A}$.

Definição 1.3.1 *Dada uma $\mathcal{K}$-álgebra $\mathcal{A}$, definimos o* **Radical de Jacobson** *de $\mathcal{A}$, denotado por $J(\mathcal{A})$, como sendo o maior ideal (bilateral) nilpotente de $\mathcal{A}$.*

Observe então que $J(\mathcal{A})$ contêm todos os ideais nilpotentes de $\mathcal{A}$.

Proposição 1.3.2 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Todo ideal nil à esquerda (ou à direita) de $\mathcal{A}$ está contido em $J(\mathcal{A})$.*

Demonstração: Ver [Fe], Teorema 16.2, página 50. ■

O seguinte resultado diz respeito ao quociente de uma álgebra $\mathcal{A}$ por seu radical de Jacobson $J(\mathcal{A})$.

Teorema 1.3.3 *Considere a álgebra quociente $\mathcal{A}/J(\mathcal{A})$. Temos que*

$$J\left(\mathcal{A}/J(\mathcal{A})\right) = \{0\}.$$

Demonstração: Ver [H], Teorema 1.2.4, página 15. ■

O teorema acima motiva a seguinte definição, que relaciona o conceito de radical de Jacobson ao importante conceito de semissimplicidade.

Definição 1.3.4 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra e J o radical de Jacobson de $\mathcal{A}$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma* **álgebra semissimples** *se $J = \{0\}$.*

Sendo assim, temos do Teorema 1.3.3 que $\mathcal{A}/J(\mathcal{A})$ é uma álgebra semissimples, seja qual for a álgebra $\mathcal{A}$. Note que toda álgebra simples é ainda semissimples, uma vez que $\mathcal{A}^2$ é um ideal bilateral não nulo de $\mathcal{A}$ e assim $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}$ não pode ser nilpotente e portanto $J(\mathcal{A})$ deve ser nulo.

Observação 1.1 *Sabe-se que toda álgebra semissimples (e consequentemente toda álgebra simples) possui unidade (ver [Fe], Corolário 2, página 59).*

O teorema a seguir traz um resultado importante sobre álgebras simples. Tal resultado é conhecido como *Teorema de Wedderburn-Artin*.

Teorema 1.3.5 (Wedderburn-Artin) *Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathcal{K}$-álgebra simples. Então $\mathcal{A} \cong M_n(D)$, para alguma $\mathcal{K}$-álgebra com divisão D, $n \geq 1$. Ademais, n é único, assim como D, a menos de isomorfismo. Reciprocamente, para toda álgebra com divisão D, $M_n(D)$ é uma álgebra simples.*

Demonstração: Ver [Fe], Teorema 24.1, página 65. ■

É um fato bem conhecido que se $\mathcal{K}$ é um corpo algebricamente fechado e D é uma $\mathcal{K}$-álgebra com divisão (de dimensão finita), então $D \cong \mathcal{K}$ (para mais detalhes, ver [H], Lema 2.1.5, página 50). Assim, o seguinte resultado segue imediatamente.

Teorema 1.3.6 *Sendo $\mathcal{K}$ um corpo algebricamente fechado e $\mathcal{A}$ uma álgebra simples de dimensão finita sobre $\mathcal{K}$, então $\mathcal{A} \cong M_n(\mathcal{K})$, para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Proposição 1.3.7 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra semissimples. Então $\mathcal{A}$ é a soma direta de um número finito de ideais minimais de $\mathcal{A}$, isto é,*

$$\mathcal{A} = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_r,$$

onde $I_1, I_2, \ldots, I_r$ são ideais minimais de $\mathcal{A}$.

Demonstração: Ver [Rot], Corolário 8.44, página 554. ■

Teorema 1.3.8 (Wedderburn-Artin II) *Toda $\mathcal{K}$-álgebra semissimples $\mathcal{A}$ é isomorfa a um produto direto*

$$M_{n_1}(D_1) \times M_{n_2}(D_2) \times \cdots \times M_{n_r}(D_r),$$

onde $D_1, D_2, \ldots, D_r$ são $\mathcal{K}$-álgebras com divisão, e os números inteiros $r, n_1, n_2, \ldots, n_r$, assim como as álgebras D_i, são unicamente determinados por $\mathcal{A}$.

Demonstração: Ver [Fe], Teorema 25.1, página 69. ■

Note que se $r = 1$ no teorema acima, então teremos o Teorema 1.3.5.

Sendo $\mathcal{A}$ uma álgebra semissimples sobre um corpo algebricamente fechado $\mathcal{K}$, temos dos Teoremas 1.3.8 e 1.3.6 que

$$\mathcal{A} \cong M_{n_1}(\mathcal{K}) \times M_{n_2}(\mathcal{K}) \times \cdots \times M_{n_r}(\mathcal{K}),$$

onde $r, n_1, n_2, \ldots, n_r$ são inteiros.

Um importante resultado é o *Teorema de Wedderburn-Malcev*, que traz uma decomposição de uma álgebra pertencente a uma certa classe de álgebras em termos do radical de Jacobson da álgebra e de uma subálgebra semissimples.

Teorema 1.3.9 (Wedderburn-Malcev) *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo $\mathcal{K}$, de característica zero. Então existe uma subálgebra semissimples maximal B tal que*

$$\mathcal{A} = B + J.$$

Ademais, se B e B' são subálgebras tais que $\mathcal{A} = B + J = B' + J$, então existe $x \in J$ tal que $B' = (1+x)B(1+x)^{-1}$.

Demonstração: Ver [CR], Teorema 72.19, página 491. ■

Concluiremos esta seção com a ideia de extensão do corpo base de uma álgebra e com dois resultados que relacionam esta ideia com radical de Jacobson e semissimplicidade.

Sendo $\mathcal{F}$ um corpo de extensão de $\mathcal{K}$, considere a $\mathcal{F}$-álgebra dada por $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{F}$, cujo produto por escalar é dado por $\lambda(a \otimes b) = a \otimes \lambda b$, para quaisquer $a \in \mathcal{A}$ e $\lambda, b \in \mathcal{F}$. Dizemos que $\overline{\mathcal{A}}$ é obtida de $\mathcal{A}$ por *extensão de escalares*. Vale ressaltar que $\dim_{\mathcal{F}}(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{F}) = dim_{\mathcal{K}}\mathcal{A}$.

Teorema 1.3.10 *Suponha $\mathcal{A}$ uma álgebra sobre $\mathcal{K}$, $\operatorname{char} \mathcal{K} = 0$, e $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}$ uma extensão algébrica de corpos. Considerando a $\mathcal{F}$-álgebra $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{F}$, tem-se*

$$J(\overline{\mathcal{A}}) = J(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{F}.$$

Demonstração: Ver [Ro], Teorema 2.5.36, página 192. ■

Definição 1.3.11 *Dada uma álgebra $\mathcal{A}$ sobre um corpo $\mathcal{K}$, dizemos que $\mathcal{A}$ é central sobre $\mathcal{K}$ se $Z(\mathcal{A}) = \mathcal{K}$. Dizemos ainda que $\mathcal{A}$ é central simples sobre $\mathcal{K}$ se é simples e central sobre $\mathcal{K}$.*

Quando não houver confusão com respeito ao corpo base da álgebra em questão, omitiremos "sobre $\mathcal{K}$" dizendo apenas que "$\mathcal{A}$ é central simples".

Proposição 1.3.12 *Seja $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{K}}$ o fecho algébrico do corpo $\mathcal{K}$. Se $\mathcal{A}$ é uma $\mathcal{K}$-álgebra central simples de dimensão finita, então $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{F}$ é uma $\mathcal{F}$-álgebra central simples.*

Demonstração: Ver [Fe], Lema 29.1, página 78. ∎

Lema 1.3.13 *Sendo $\mathcal{A}$ uma $\mathcal{K}$-álgebra, temos que*

$$M_n(\mathcal{A}) \cong M_n(\mathcal{K}) \otimes \mathcal{A}.$$

Ademais, $M_n(\mathcal{K}) \otimes M_m(\mathcal{K}) \cong M_{nm}(\mathcal{K})$.

Demonstração: Ver [J2], Proposições 4.9 e 4.10, páginas 216-217. ∎

Sendo $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{K}$ é uma extensão finita de corpos, com $\operatorname{char} \mathcal{K} = 0$, então $\mathcal{F}$ é uma $\mathcal{K}$-álgebra e

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}} \cong \bigoplus_{i=1}^{s} \overline{\mathcal{K}_i} \qquad \text{(como } \overline{\mathcal{K}}\text{-álgebras)}$$

para algum $s \in \mathbb{N}$, e $\overline{\mathcal{K}_i} \cong \overline{\mathcal{K}}$, para $i = 1, \ldots, n$. De fato, como $\mathcal{F}$ estende $\mathcal{K}$, temos que $\mathcal{F}$ é uma $\mathcal{K}$-álgebra simples. Logo, segue do Teorema 1.3.10 que $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}}$ é semissimples sobre $\overline{\mathcal{K}}$. Pelo Teorema de Wedderburn-Artin II e por $\overline{\mathcal{K}}$ ser algebricamente fechado, temos que

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}} \cong M_{n_1}(\overline{\mathcal{K}}) \times \cdots \times M_{n_s}(\overline{\mathcal{K}}),$$

para algum $s \in \mathbb{N}$. Mas observe que $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}}$ e abeliano. Logo, $n_1 = \cdots = n_s = 1$ e com isso $M_{n_i}(\overline{\mathcal{K}}) \cong \overline{\mathcal{K}}$, para $i = 1, \ldots, s$.

A seguir apresentaremos um resultado básico pertinente às álgebras simples.

Teorema 1.3.14 *Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathcal{K}$-álgebra simples de dimensão finita, com $\operatorname{char} \mathcal{K} = 0$. Considere $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{K}}$ o fecho algébrico de $\mathcal{K}$. Então*

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{F} \cong \mathcal{B}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_n,$$

onde $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ são $\mathcal{F}$-álgebras centrais simples, tais que $\mathcal{B}_i \cong \mathcal{B}_j$, para $i \neq j$.

Demonstração: Como $\mathcal{A}$ é uma álgebra simples de dimensão finita sobre $\mathcal{K}$, segue do Teorema de Wedderburn-Artin que existem $m \in \mathbb{N}$ e D uma $\mathcal{K}$-álgebra com divisão de dimensão finita tais que $\mathcal{A} \cong M_m(D)$. Pelo Lema 1.3.13, $\mathcal{A} \cong M_m(\mathcal{K}) \otimes_{\mathcal{K}} D$.

Considere o produto tensorial $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}} \cong (M_m(\mathcal{K}) \otimes_{\mathcal{K}} D) \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}}$. Podemos assumir que $\mathcal{F} = Z(D) \subseteq \overline{\mathcal{K}}$, uma vez que $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{K}$ é uma extensão finita (e portanto algébrica) de corpos. Temos que D é uma $\mathcal{F}$-álgebra central simples. Segue da Proposição 1.3.12 que $D \otimes_{\mathcal{F}} \overline{\mathcal{K}}$ é uma $\overline{\mathcal{K}}$-álgebra central simples. Dessa forma, segue do Teorema 1.3.6 que $D \otimes_{\mathcal{F}} \overline{\mathcal{K}} \cong M_l(\overline{\mathcal{K}})$, para algum $l \in \mathbb{N}$.

Observe que $\mathcal{F}$ é uma $\mathcal{K}$-álgebra de dimensão finita. Da observação feita acima, temos que $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}} \cong \bigoplus_{i=1}^{s} \overline{\mathcal{K}}$, para algum $s \in \mathbb{N}$. Temos então que

$$\begin{aligned}
D \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}} &\cong (D \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}} \cong D \otimes_{\mathcal{F}} \left(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}}\right) \\
&\cong D \otimes_{\mathcal{F}} \left(\bigoplus_{n=1}^{s} \overline{\mathcal{K}}\right) \cong \bigoplus_{n=1}^{s} \left(D \otimes_{\mathcal{F}} \overline{\mathcal{K}}\right) \cong \bigoplus_{n=1}^{s} M_l(\overline{\mathcal{K}}) \\
&\cong \bigoplus_{n=1}^{s} \left(M_l(\mathcal{K}) \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}}\right).
\end{aligned}$$

Logo, usando o Lema 1.3.13 temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}} &\cong M_m(\mathcal{K}) \otimes_{\mathcal{K}} \left(D \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}}\right) \\
&\cong M_m(\mathcal{K}) \otimes_{\mathcal{K}} \left(\bigoplus_{n=1}^{s} \left(M_l(\mathcal{K}) \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}}\right)\right) \\
&\cong \bigoplus_{n=1}^{s} \left((M_m(\mathcal{K}) \otimes_{\mathcal{K}} M_l(\mathcal{K})) \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}}\right) \\
&\cong \bigoplus_{n=1}^{s} \left(M_{ml}(\mathcal{K}) \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}}\right).
\end{aligned}$$

Como $M_{ml}(\mathcal{K})$ é uma $\mathcal{K}$-álgebra central simples, segue da Proposição 1.3.12 que $\mathcal{B} = M_{ml}(\mathcal{K}) \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}}$ é uma $\overline{\mathcal{K}}$-álgebra central simples. Portanto,

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}} \cong \mathcal{B}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_s$$

onde $\mathcal{B}_i \cong \mathcal{B}$, para $i = 1, \ldots, s$. ∎

1.4 Identidades Polinomiais

Nesta seção serão dadas definições e exemplos pertinentes à *PI-Teoria*. Iniciaremos com a definição de *álgebra livre*.

Definição 1.4.1 *Sejam ζ uma classe de álgebras e $\mathcal{A} \in \zeta$ uma álgebra gerada por um conjunto X. A álgebra $\mathcal{A}$ é chamada de* **álgebra livre** *na classe ζ, livremente gerada pelo conjunto X, se para toda álgebra $\mathcal{B} \in \zeta$, qualquer aplicação $\phi : X \to \mathcal{B}$ pode ser estendida para um único homomorfismo $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. A cardinalidade $|X|$ do conjunto X é chamado de* **posto** *de $\mathcal{A}$.*

Exemplo 1.4.2 *A álgebra $\mathcal{K}\langle X\rangle$, com $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, é livre na classe de todas as álgebras associativas unitárias. De fato, tomemos uma álgebra $\mathcal{B}$ associativa e unitária qualquer, e considere uma aplicação ϕ de X em $\mathcal{B}$. Sendo $\phi(x_i) = a_i$, $i = 1, 2, \ldots$, considere a aplicação ϕ' que satisfaz $x_{i_1} \cdots x_{i_s} \mapsto a_{i_1} \cdots a_{i_s}$, para todo $s \in \mathbb{Z}_+$. Note que ϕ' estende ϕ e que*

$$\begin{aligned} \phi'(x_{i_1} \cdots x_{i_s} x_{j_1} \cdots x_{j_r}) &= a_{i_1} \cdots a_{i_s} a_{j_1} \cdots a_{j_r} \\ &= \phi'(x_{i_1} \cdots x_{i_s}) \phi'(x_{j_1} \cdots x_{j_r}), \end{aligned}$$

para quaisquer $r, s \in \mathbb{Z}_+$. Como $\mathcal{K}\langle X\rangle$ é gerado (como espaço vetorial) pelas palavras em X, segue-se que existe uma transformação linear $\Phi : \mathcal{K}\langle X\rangle \to \mathcal{B}$ que estende ϕ'. Dessa forma, não é difícil ver que Φ é um homomorfismo de álgebras que estende ϕ. A partir da aplicação Φ introduzimos a notação $f(a_1, \ldots, a_s)$, onde $f \in \mathcal{K}\langle X\rangle$ e $a_1, \ldots, a_s \in \mathcal{B}$, que nada mais é do que a imagem de f por Φ. Agora, se considerarmos a subálgebra $\mathcal{K}_0\langle X\rangle$ de $\mathcal{K}\langle X\rangle$, temos que esta é livre na classe de todas as álgebras associativas. Sendo X um conjunto enumerável de variáveis comutativas, temos que $\mathcal{K}[X]$ é livre na classe de todas as álgebras associativas unitárias, livremente gerada por X.

Definição 1.4.3 *Seja $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \sum_{i=1}^{d} w_i$ um polinômio não nulo de $\mathcal{K}\langle X\rangle$, onde $w_i = \lambda_i x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$ é um monômio com variáveis em $\{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$, $i = 1, \ldots, d$. Definimos o* **grau***:*

i) **de** x_j **em** w_i, *o qual denotaremos por $deg_{x_j}(w_i)$, como sendo o número de ocorrências de x_j em w_i;*

ii) **de** w_i, *$i = 1, 2, \ldots, d$, denotado por $deg(w_i)$, como sendo o número total de variáveis que aparecem no monômio w_i, inclusive contabilizando as multiplicidades de cada variável;*

iii) **de** f *como sendo o maior grau dentre os graus de seus monômios, que denotaremos por $deg(f)$, isto é, $deg(f) = \max\{deg(w_i) \mid i = 1, 2, \ldots, d\}$;*

iv) **de** x_j **em** f *como sendo o inteiro $\max\{deg_{x_j}(w_i) \mid i = 1, 2, \ldots, d\}$, e o denotaremos por $deg_{x_j}(f)$.*

Sendo um polinômio $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ em $\mathcal{K}\langle X\rangle$ tal que $k = deg(w_1) = deg(w_2) = \cdots = deg(w_d)$, onde $f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \sum_{i=1}^{d} w_i$, diremos que f é um *polinômio homogêneo* de grau k. Caso $deg_{x_i}(w_1) = deg_{x_i}(w_2) = \cdots = deg_{x_i}(w_d)$, para algum $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, diremos que f é um *polinômio homogêneo em* x_i. Se f for homogêneo em todas a suas variáveis, então diremos que f é *polinômio multi-homogêneo* de multigrau $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$, onde $k_i = deg_{x_i}(w_1)$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Exemplo 1.4.4 *Considere o polinômio*

$$f(x_1, x_2) = [x_1^3, x_2] = x_1^3x_2 - x_2x_1^3$$

em $\mathcal{K}\langle x_1, x_2\rangle$. *Temos que* f *é um polinômio multi-homogêneo de multigrau* $(3, 1)$. *Considere agora o polinômio*

$$g(y_1, y_2, y_3) = y_3y_2y_3y_1y_3y_2 + 4y_1y_3y_2^2y_3^2 - y_2y_1y_2y_3^3$$

pertencente a $\mathcal{K}\langle y_1, y_2, y_3\rangle$. *Note que* g *é um polinômio homogêneo de grau* 6, *e mais, é multi-homogêneo de multigrau* $(1, 2, 3)$.

Dizemos que um polinômio $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_s) \in \mathcal{K}\langle X\rangle$ é *linear* na variável x_i se f é homogêneo em x_i e $deg_{x_i}(f) = 1$. No caso em que f é linear em todas as suas variáveis (ou ainda, f é um polinômio multi-homogêneo de multigrau $(1, 1, \ldots, 1)$), dizemos que f é um *polinômio multilinear*.

Proposição 1.4.5 *Seja* $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ *um polinômio em* $\mathcal{K}\langle X\rangle$ *que é linear na variável* x_i, *para algum* $i = 1, \ldots, s$. *Então*

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \sum_{j=1}^{t} \lambda_j y_j, x_{i+1}, \ldots, x_s) = \sum_{j=1}^{t} \lambda_j f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_j, x_{i+1}, \ldots, x_s),$$

onde $\lambda_j \in \mathcal{K}$ *e* $y_1, \ldots, y_t \in X$. *Ademais, sendo* f *um polinômio multilinear, temos que*

$$f(\sum_{i=1}^{t_1} \lambda_{i1}y_{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^{t_s} \lambda_{is}y_{is}) = \sum_{i_1=1}^{t_1} \lambda_{i_11} \ldots \sum_{i_s=1}^{t_s} \lambda_{i_ss}(y_{i_11}, \ldots, y_{i_ss}).$$

Demonstração: Ver [Ro1], Observação 1.1.30, página 08. ■

Definiremos agora o que vem a ser uma *identidade polinomial.*

Definição 1.4.6 *Sejam* $\mathcal{A}$ *uma álgebra e* $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_s) \in \mathcal{K}\langle X\rangle$ *um polinômio. Dizemos que* f *é* **identidade polinomial** *de* $\mathcal{A}$ *se*

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_s) = 0, \quad \forall a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathcal{A}.$$

Neste caso, diremos que $f \equiv 0$ *é uma identidade de* $\mathcal{A}$, *ou ainda,* $\mathcal{A}$ *satisfaz a identidade* $f \equiv 0$.

Vale observar que $f \equiv 0$ é identidade de $\mathcal{A}$ se, e somente se, f pertence aos núcleos de todos os homomorfismos de $\mathcal{K}\langle X\rangle$ em $\mathcal{A}$.

Denotaremos por $Id(\mathcal{A})$ o conjunto de todas as identidades polinomiais da álgebra $\mathcal{A}$, isto é, $Id(\mathcal{A}) = \{f \in \mathcal{K}\langle X\rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } \mathcal{A}\}$. Observando que o polinômio nulo $f = 0$ é identidade polinomial de qualquer álgebra $\mathcal{A}$ (chamado assim de *identidade trivial*), temos a seguinte definição.

Definição 1.4.7 *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra satisfazendo uma identidade não trivial $f \equiv 0$, ou seja, $Id(\mathcal{A}) \neq \{0\}$, dizemos que $\mathcal{A}$ é uma* PI-**álgebra**.

Definição 1.4.8 *Dizemos que duas álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são* PI-**equivalentes** *se $Id(\mathcal{A}) = Id(\mathcal{B})$.*

Exemplo 1.4.9 *Sendo $\mathcal{A}$ uma álgebra comutativa, temos que $\mathcal{A}$ satisfaz a identidade $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2] \equiv 0$, e assim toda álgebra comutativa é uma PI-álgebra.*

Exemplo 1.4.10 *Sendo $\mathcal{A}$ uma álgebra nil de índice limitado, temos que $\mathcal{A}$ é uma PI-álgebra. De fato, temos que exite $r \in \mathbb{Z}$ tal que $a^r = 0$ para qualquer $a \in \mathcal{A}$. Tomando o polinômio $f(x) = x^r$, temos que $f \equiv 0$ em $\mathcal{A}$, visto que $f(a) = a^r = 0$, para qualquer $a \in \mathcal{A}$. Considere agora $\mathcal{N}$ como sendo uma álgebra nilpotente, cujo índice de nilpotência é s. Logo, $\mathcal{N}^{s+1} = \{0\}$, e daí o polinômio $g = g(x_1, x_2, \ldots, x_{s+1}) = x_1 x_2 \cdots x_{s+1} \equiv 0$ em $\mathcal{N}$. Portanto, toda álgebra nilpotente é uma PI-álgebra.*

Exemplo 1.4.11 *Considere a álgebra de Grassmann definida no Exemplo 1.1.7. Temos que E é uma PI-álgebra. De fato, observando que $[E, E] \subseteq E_0 = Z(E)$, onde $E = E_0 \oplus E_1$, temos que o polinômio $f = f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade polinomial para E.*

Proposição 1.4.12 *Seja $\mathcal{K}$ um corpo de característica zero e $\mathcal{A}$ uma $\mathcal{K}$-álgebra. Se $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}$ é uma extensão de corpos, então*

$$Id(\mathcal{A}) \subseteq Id(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{F}).$$

Demonstração: Ver [GZ2], Lema 1.4.2, página 10. ■

Definição 1.4.13 *Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t)$ um polinômio linear nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Dizemos que f é* **alternante** *nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ se o polinômio f se anula quando substituímos x_i por x_j, para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ distintos.*

Note que, pela linearidade de f nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, se f for um polinômio alternante nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, então para todo $\sigma \in S_n$ (onde S_n é o grupo simétrico de grau n) temos que

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, y_1, \ldots, y_t) = (-1)^\sigma f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t).$$

Para os detalhes, ver [Ro1], Corolário 1.2.6, página 11.

Caso f seja alternante em todas as suas variáveis, diremos que f *é alternante*. Vale observar que se $f(x_1, \ldots, x_n)$ é alternante em algum subconjunto $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\}$ de $\{x_1, \ldots, x_n\}$, então é alternante em todo subconjunto de $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\}$. Uma propriedade básica de polinômios alternantes em algum conjunto de variáveis é dado a seguir.

Proposição 1.4.14 *Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t)$ um polinômio alternante nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ e $\mathcal{A}$ uma álgebra sobre $\mathcal{K}$. Se $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$ são linearmente dependentes sobre $\mathcal{K}$, então $f(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_t) = 0$, para quaisquer $b_1, \ldots, b_t \in \mathcal{A}$.*

Demonstração: Ver [GZ2], Proposição 1.5.2, página 12. ■

Definição 1.4.15 *Definimos o* **polinômio Standard** *de grau n como sendo o polinômio*

$$St_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}.$$

Note que $St_n(x_1, \ldots, x_n)$ é um polinômio multilinear e alternante. A proposição a seguir nos traz duas propriedades importantes à respeito de polinômios alternantes.

Proposição 1.4.16 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra sobre $\mathcal{K}$. Então temos:*

a) Se $f(x_1, \ldots, x_n)$ é um polinômio multilinear alternante de grau n, então

$$f = \alpha St_n(x_1, \ldots, x_n),$$

para algum $\alpha \in \mathcal{K}$.

b) Se $\dim_{\mathcal{K}} \mathcal{A} = m < \infty$, então $\mathcal{A}$ satisfaz a identidade Standard de grau $m+1$, isto é, $St_{m+1} \equiv 0$ em $\mathcal{A}$.

Demonstração: a) Ver [Ro1], Observação 1.2.15, página 13.

b) Ver [GZ2], Teorema 1.5.8, página 14. ■

Pela proposição anterior, temos que as matrizes de $M_n(\mathcal{K})$ satisfazem a identidade Standard de grau n^2+1. O *Teorema de Amitsur-Levitzki* nos dá um valor bastante inferior com relação a condição n^2+1, como podemos ver abaixo.

Teorema 1.4.17 (Amitsur-Levitzki) *A álgebra de matrizes $M_n(\mathcal{K})$ satisfaz a identidade Standard $St_{2n} \equiv 0$.*

Demonstração: Ver [GZ2], Teorema 1.7.7, página 18. ■

Agora, tomemos $f \in Id(\mathcal{A})$. Temos então que $gfh \in Id(\mathcal{A})$, para quaisquer $g, h \in \mathcal{K}\langle X\rangle$. Logo, observando que $Id(\mathcal{A})$ é um subespaço de $\mathcal{K}\langle X\rangle$ $Id(\mathcal{A})$, temos que $Id(\mathcal{A})$ é um ideal (bilateral) de $\mathcal{K}\langle X\rangle$. Além disso, não é difícil ver que $Id(\mathcal{A})$ é invariante por endomorfismos de $\mathcal{K}\langle X\rangle$. Com efeito, tomemos $f(x_1, x_2, \ldots, x_s) \in Id(\mathcal{A})$, $g_1, g_2, \ldots, g_s \in \mathcal{K}\langle X\rangle$, com $g_i = g_i(x_{1i}, \ldots, x_{k_i i})$, e $\psi \in End_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}\langle X\rangle)$ satisfazendo $\psi(x_i) = g_i(x_{1i}, \ldots, x_{k_i i})$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\psi(f(x_1, x_2, \ldots, x_s)) &= f(\psi(x_1), \psi(x_2), \ldots, \psi(x_s)) \\
&= f(g_1(x_{11}, \ldots, x_{s_1 1}), g_2(x_{12}, \ldots, x_{s_2 2}), \ldots, g_s(x_{1s}, \ldots, x_{k_s s})).
\end{aligned}$$

Observando agora que $g_i(a_1, a_2, \ldots, a_{k_i}) \in \mathcal{A}$ para quaisquer $a_1, a_2, \ldots, a_{k_i} \in \mathcal{A}$, podemos concluir que $\psi(f) \equiv 0$ em $\mathcal{A}$. Portanto, $\psi(Id(\mathcal{A})) \subseteq Id(\mathcal{A})$, para qualquer $\psi \in End_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}\langle X\rangle)$. Isso motiva a seguinte definição.

Definição 1.4.18 *Seja I um ideal de $\mathcal{K}\langle X\rangle$. Dizemos que I é um* T-**ideal** *de $\mathcal{K}\langle X\rangle$ se $\psi(I) \subseteq I$, para todo $\psi \in \mathcal{K}\langle X\rangle$.*

Dessa forma, segue-se diretamente da definição e do que foi feito acima que $Id(\mathcal{A})$ é um T-ideal de $\mathcal{K}\langle X\rangle$, qualquer que seja a álgebra $\mathcal{A}$. Temos ainda que, sendo $\mathcal{B}$ subálgebra da álgebra $\mathcal{A}$, $Id(\mathcal{A}) \subseteq Id(\mathcal{B})$.

Proposição 1.4.19 *Sendo I um T-ideal de $\mathcal{K}\langle X\rangle$, temos então que $I = Id(\mathcal{K}\langle X\rangle/I)$.*

Demonstração: Primeiramente, tomemos $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_s) \in I$. Sejam $g_1 + I, g_2 + I, \ldots, g_s + I \in \mathcal{K}\langle X\rangle/I$ quaisquer. Temos que

$$f(g_1 + I, g_2 + I, \ldots, g_s + I) = f(g_1, g_2, \ldots, g_s) + I = I = \overline{0},$$

visto que $f(g_1, g_2, \ldots, g_s) \in I$, pois I é invariante por endomorfismos de $\mathcal{K}\langle X\rangle$. Logo, $f \in Id(\mathcal{K}\langle X\rangle/I)$, e com isso $I \subseteq Id(\mathcal{K}\langle X\rangle/I)$.

Por outro lado, tomemos $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_s) \in Id(\mathcal{K}\langle X\rangle/I)$. Uma vez que $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_s} \in \mathcal{K}\langle X\rangle/I$, temos que

$$\overline{0} = f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_s}) = \overline{f(x_1, x_2, \ldots, x_s)},$$

e portanto $f \in I$, donde concluímos que $Id(\mathcal{K}\langle X\rangle/I) \subseteq I$.

Portanto, $I = Id(\mathcal{K}\langle X\rangle/I)$. ■

Definição 1.4.20 *Dado um subconjunto S de $\mathcal{K}\langle X\rangle$, definimos o* **$T$-ideal gerado por** *$S$, denotado por $\langle S\rangle_T$, como sendo o subespaço vetorial de $\mathcal{K}\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto $\{h_1\varphi(f)h_2 \mid f \in End(\mathcal{K}\langle X\rangle), h_1, h_2 \in \mathcal{K}\langle X\rangle\}$.*

Vale observar que $\langle S\rangle_T$ pode ser visto como a interseção de todos os T-ideais de $\mathcal{K}\langle X\rangle$ que contêm S. Sendo S um conjunto gerador de $Id(\mathcal{A})$ para uma certa álgebra $\mathcal{A}$, dizemos que S é uma *base de identidades de* $\mathcal{A}$.

Exemplo 1.4.21 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra comutativa e unitária. Temos que $Id(\mathcal{A}) = \langle [x_1, x_2]\rangle_T$.*

Exemplo 1.4.22 *Seja E a álgebra de Grassmann de dimensão infinita sobre $\mathcal{K}$, com* $\operatorname{char}\mathcal{K} = 0$. *Então temos que $Id(E) = \langle [x_1, x_2, x_3]\rangle_T$. Para a demonstração, ver [D], Teorema 5.1.2, página 50, ou ver [KR], Corolário do Teorema 4.1, página 437.*

Definição 1.4.23 *Dois conjuntos de polinômios S e S_1 são ditos* **equivalentes** *se eles geram o mesmo T-ideal, isto é, $\langle S\rangle_T = \langle S_1\rangle_T$.*

Relembremos que se $Id(\mathcal{A}) = Id(\mathcal{B})$, para dadas PI-álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, então $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são ditas *PI-equivalentes*.

Proposição 1.4.24 *Se* $\operatorname{char}\mathcal{K} = 0$, *então todo polinômio não nulo $f \in \mathcal{K}\langle X\rangle$ é equivalente a um conjunto finito de polinômios multilineares.*

Demonstração: Ver [D], Proposição 4.2.3, página 39. ■

Podemos reescrever o resultado anterior em termos de T-ideais.

Corolário 1.4.25 *Se* $\operatorname{char}\mathcal{K} = 0$, *então todo T-ideal é gerado (como T-ideal) por seus polinômios multilineares.*

Demonstração: Ver [GZ2], Corolário 1.3.9, página 09. ■

Do corolário acima, temos que se $\mathcal{A}$ é uma PI-álgebra e $\operatorname{char}\mathcal{K} = 0$, então é suficiente estudar as identidades multilineares de $\mathcal{A}$.

Teorema 1.4.26 (Kemer) *Seja $\mathcal{A}$ uma PI-álgebra associativa finitamente gerada sobre um corpo infinito $\mathcal{K}$. Então existe uma $\mathcal{K}$-álgebra $\mathcal{C}$ de dimensão finita tal que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$ são PI-equivalentes.*

Demonstração: Ver [K2], Teorema 1, página 91. ■

Foi visto que uma álgebra qualquer determina um T-ideal de $\mathcal{K}\langle X\rangle$. Reciprocamente, muitas álgebras podem corresponder ao mesmo T-ideal de $\mathcal{K}\langle X\rangle$. Isso motiva a definição de *Variedades de Álgebras*, dada a seguir.

Definição 1.4.27 *Dado um conjunto não vazio $S \subseteq \mathcal{K}\langle X\rangle$, a classe de todas as álgebras $\mathcal{A}$ tal que $f \equiv 0$ em $\mathcal{A}$, para todo $f \in S$, é chamada de* **variedade** *determinada por S, a qual denotaremos por $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$.*

Note que se $\mathcal{V}$ é uma variedade determinada pelo conjunto $S \subseteq \mathcal{K}\langle X\rangle$ e $\langle S\rangle_T$ é o T-ideal gerado por S, então $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\langle S\rangle_T)$ e $\langle S\rangle_T = \bigcap_{\mathcal{A}\in\mathcal{V}} Id(\mathcal{A})$. Neste caso, escreveremos $\langle S\rangle_T = Id(\mathcal{V})$.

Suponhamos $\mathcal{V}$ uma variedade e $\mathcal{A}$ uma $\mathcal{K}$-álgebra tal que $Id(\mathcal{A}) = Id(\mathcal{V})$. Dizemos neste caso que $\mathcal{V}$ é a variedade gerada por $\mathcal{A}$ e escreveremos $\mathcal{V} = var(\mathcal{A})$.

O teorema a seguir, conhecido como *Teorema de Birkhoff*, traz uma caracterização das propriedades que determinam as variedades.

Teorema 1.4.28 (Birkhoff) *Uma classe $\mathcal{V}$ (não vazia) de álgebras é uma variedade se, e somente se, satisfaz:*

a) Se $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$ e $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ é um monomorfismo, então $\mathcal{B} \in \mathcal{V}$;

b) Se $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$ e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um epimorfismo, então $\mathcal{B} \in \mathcal{V}$;

c) Se $\{\mathcal{A}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ é uma família de álgebras e $\mathcal{A}_\gamma \in \mathcal{V}$, para todo $\gamma \in \Gamma$, então $\prod_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{A}_\gamma \in \mathcal{V}$.

Demonstração: Ver [GZ2], Teorema 1.2.3, página 04. ■

No resultado abaixo, as álgebras de Grassmann têm posto enumerável sobre um corpo de característica zero. Diremos que uma álgebra $\mathcal{A}$ é uma *superálgebra* se existirem $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{A}_1$ subespaços de $\mathcal{A}$ tais que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j \subseteq A_{i+j}$, $i, j = \{0, 1\}$. Sendo $E = E_0 \oplus E_1$ a álgebra de Grassmann e $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ uma superálgebra, definimos a *envoltória de Grassmann de* $\mathcal{A}$ como sendo a álgebra

$$E(\mathcal{A}) = (\mathcal{A}_0 \otimes E_0) \oplus (\mathcal{A}_1 \otimes E_1).$$

Teorema 1.4.29 (Kemer) *Em característica zero, toda variedade (não trivial) de álgebras é gerada pela envoltória de Grassmann de alguma superálgebra de dimensão finita. Se uma variedade não contém nenhuma álgebra de Grassmann, então ela é gerada por alguma álgebra de dimensão finita.*

Demonstração: Ver [K1], Teorema 2.3, página 64. ■

Capítulo 2

S_n-Representações

Neste capítulo apresentaremos um pouco da teoria clássica das representações do grupo simétrico S_n através das teoria da tabelas de Young. Tal teoria tem papel fundamental no estudo de PI-Teoria. Iniciaremos com um breve estudo das S_n-*Representações* e suas relações com as *Tabelas de Young*. Posteriormente, falaremos sobre as S_n-ações em polinômios multilineares, as quais fornecem uma ferramenta bastante útil no estudo de PI-Teoria. Por fim, na última seção, serão dados alguns resultados que envolvem polinômios multilineares obtidos a partir de um elemento específico de $\mathcal{K}S_n$, através das tabelas de Young.

Toda a teoria apresentada aqui poderá ser encontrada nas referências [GZ2], [Ja], [JK], [Rob]. Em todo este capítulo, $\mathcal{K}$ será um corpo de característica zero.

2.1 S_n-Representações e Tabelas de Young

Nesta seção descreveremos alguns pontos da teoria das representações do grupo simétrico S_n, $n \geq 1$, sobre um corpo de característica zero. Descreveremos também alguns resultados importantes da teoria de Young e sua estreita relação com as S_n-representações irredutíveis. Iniciaremos com a definição de *partição* de n.

Definição 2.1.1 *Seja $n \geq 1$ um inteiro. Uma* **partição** *λ de n é uma sequência de inteiros $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ tal que $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$ e $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$. Neste caso, escrevemos $\lambda \vdash n$ ou $|\lambda| = n$.*

Para uma partição $\lambda \vdash n$ tal que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = k$, escrevemos $\lambda = (k^r)$ em vez de $\lambda = (k, \ldots, k)$ e $n = kr$. Dadas duas partições $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ e $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_s)$ de n, dizemos que $\lambda > \mu$ se $\lambda_k > \mu_k$ para $k = min\{i \in \mathbb{N} \mid \lambda_i \neq \mu_i\}$ (ordem lexicográfica). Logo, temos uma relação de ordem no conjunto das partições de n.

É um fato bem conhecido que as distintas classes de conjugação de S_n estão em correspondência biunívoca com as partições de n. De fato, se $\sigma \in S_n$, então podemos decompor σ como produto de ciclos disjuntos. Seja $\sigma = (i_1 \cdots i_r) \cdots (j_1 \cdots j_s)$ uma decomposição em ciclos disjuntos de σ, onde $r + \cdots + s = n$. Daí, dado qualquer permutação $\beta \in S_n$, temos que

$$\beta\sigma\beta^{-1} = (\beta(i_1) \cdots \beta(i_r)) \cdots (\beta(j_1) \cdots \beta(j_s)). \tag{2.1}$$

Como os cilos acima são disjuntos, podemos assumir sem perda de generalidade que $r \geq \cdots \geq s$. Note que podemos associar σ a uma partição $\lambda = (r, \ldots, s)$ de n. Segue de (2.1) que duas permutações de S_n são conjugadas se, e somente se, determinam a mesma partição de n. Para mais detalhes, ver [J3], páginas 74-75.

Dados $\varphi : G \to GL(M)$ uma representação de grau finito, onde M é um espaço vetorial de dimensão finita, e χ_φ o seu caracter, temos que $\chi_\varphi(g) = \chi_\varphi(h)$, desde que $g, h \in G$ sejam conjugados um do outro, e assim χ_φ é constante nas classes de conjugação de G, isto é, χ_φ é uma função de classes de G. Temos ainda que o número de caracteres irredutíveis de um grupo finito G é igual ao número de classes de conjugação de G (ver [JL], Teorema 15.3, página 152). Dessa forma, os caracteres irredutíveis de S_n (que estão em correspondência biunívoca com os S_n-módulos irredutíveis) estão em correspondência $1 - 1$ com as partições de n. Daí, denotaremos por χ_λ o S_n-caracter irredutível (e por M_λ o S_n-módulo irredutível) correspondente a $\lambda \vdash n$, e por $d_\lambda = \chi_\lambda(1)$ o grau de χ_λ.

Proposição 2.1.2 *Seja $n \geq 1$. Existe uma correspondência biunívoca entre os S_n-caracteres irredutíveis e as partições de n. Sejam $\{\chi_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ o conjunto de todos os caracteres irredutíveis de S_n e $d_\lambda = \chi_\lambda(1)$ o grau de χ_λ, para $\lambda \vdash n$. Então*

$$\mathcal{K}S_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} M_{d_\lambda}(\mathcal{K}),$$

onde $I_\lambda = e_\lambda \mathcal{K} S_n$ e $e_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} \chi_\lambda(\sigma)\sigma$ é a unidade de I_λ.

Demonstração: Ver [GZ2], Proposição 2.2.2, página 47. ∎

Definição 2.1.3 *Sendo* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \vdash n$, *definimos o* **diagrama de Young** *associado a* λ *como sendo o subconjunto de* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *definido como*

$$D_\lambda = \{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid i = 1, \ldots, r, j = 1, \ldots, \lambda_i\}.$$

Uma notação bastante utilizada para denotar um diagrama de Young D_λ de uma partição λ de n consiste em distribuir n caixas em r linhas de modo que na i-ésima linha haja λ_i colunas. Associamos cada caixa a um par $(i,j) \in D_\lambda$ tal que a primeira coordenada i (o índice da linha) aumenta de cima para baixo e a segunda coordenada j (o índice da coluna) aumenta da esquerda para direita. Por exemplo, o diagrama $D_{(4,3,1)}$ é representado por

$$D_{(4,3,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

Para a partição $\lambda \vdash n$, denotaremos por λ' a *partição conjugada* de λ, que é dada por $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$, onde $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s$ são os comprimentos das colunas de D_λ. Por exemplo, sendo $\lambda = (4,3,1)$ uma partição de 8, temos que $\lambda' = (3,2,2,1)$.

Definição 2.1.4 *Seja* $\lambda \vdash n$ *uma partição. Definimos uma* **tabela de Young** T_λ *do diagrama* D_λ *como sendo um preenchimento das caixas de* D_λ *com os inteiros* $1, \ldots, n$. *Diremos que* T_λ *é uma tabela da forma* λ.

Exemplo 2.1.5 *Considere o diagrama de Young dado por*

$$D_{(4,3)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} \end{array}.$$

Temos que a tabela

$$T_{(4,3)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 7 & 1 & 4 \\ \hline 3 & 6 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} \end{array}$$

é uma tabela de Young.

Definição 2.1.6 *Uma tabela* T_λ *da forma* λ *é dita* **standard** *se os inteiros em cada linha e em cada coluna de* T_λ *aumentam da esquerda para a direita e de cima para baixo, respectivamente.*

Exemplo 2.1.7 *A tabela*

$$T_{(3,3,2,1)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 9 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} 8 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

é standard. Já a tabela

$$T_{(3,1)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

não é standard.

Existe uma estreita relação entre o número de tabelas standards da forma λ e o grau do S_n-caracter irredutível χ_λ.

Teorema 2.1.8 *Dada uma partição $\lambda \vdash n$, o número de tabelas standards da forma λ é igual a d_λ, o grau de χ_λ, o S_n-caracter irredutível correspondente a λ.*

Demonstração: Ver [B], Teorema 4.6, página 114. ■

Apresentaremos aqui uma fórmula para determinar o grau d_λ do caracter irredutível χ_λ.

Dado um diagrama D_λ, $\lambda \vdash n$, identificamos uma caixa de D_λ com o par correspondente (i,j). Por exemplo, a quarta caixa da terceira linha corresponde ao par $(3,4)$.

Definição 2.1.9 *Para toda caixa $(i,j) \in D_\lambda$, definimos o* **gancho** *de (i,j) como sendo o número $h_{ij} = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$, onde $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$ é a partição conjugada de λ.*

Note que h_{ij} conta o número de caixas que estão à direita e abaixo de (i,j), incluindo a própria caixa (i,j).

Teorema 2.1.10 (Fórmula do Gancho) *Sendo $\lambda \vdash n$, temos que*

$$d_\lambda = \frac{n!}{\displaystyle\prod_{i,j} h_{ij}} \quad ,$$

onde o par (i,j) percorre todos os elementos de D_λ.

Demonstração: Ver [JK], Teorema 2.3.21, página 56. ■

Descreveremos agora o conjunto de todos os ideais minimais à esquerda de $\mathcal{K}S_n$. Dada uma tabela T_λ da forma λ, para $\lambda \vdash n$, denotaremos por $T_\lambda = D_\lambda(a_{ij})$, onde a_{ij} é o inteiro que preenche a caixa (i,j).

Definição 2.1.11 *Seja $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \vdash n$. Definimos o* **estabilizador de linhas de** *T_λ como sendo*

$$R_{T_\lambda} = S_{\lambda_1}(a_{11}, \ldots, a_{1\lambda_1}) \times \cdots \times S_{\lambda_r}(a_{r1}, \ldots, a_{r\lambda_r}) \quad \textit{(produto direto interno)},$$

onde $S_{\lambda_i}(a_{i1}, \ldots, a_{i\lambda_i})$ denota o subgrupo de S_n que age nos inteiros $a_{i1}, \ldots, a_{i\lambda_i}$, deixando os demais fixos. Observe que $S_{\lambda_i}(a_{i1}, \ldots, a_{i\lambda_i}) \cong S_{\lambda_i}$.

Assim, R_{T_λ} é o subgrupo de S_n composto por todas as permutações que estabilizam as linhas de T_λ.

Analogamente, definimos *estabilizador de colunas de* T_λ no que segue.

Definição 2.1.12 *Seja* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \vdash n$ *e considere a sua partição conjugada* $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$. *Definimos o* **estabilizador de colunas de** T_λ *como sendo*

$$C_{T_\lambda} = S_{\lambda'_1}(a_{11}, \ldots, a_{\lambda'_1 1}) \times \cdots \times S_{\lambda'_s}(a_{1\lambda_1}, \ldots, a_{\lambda'_s \lambda_1}) \quad \textit{(produto direto interno).}$$

Por isso, C_{T_λ} é o subgrupo de S_n constituído de todas as permutações que estabilizam as colunas de T_λ.

Definição 2.1.13 *Para uma dada tabela* T_λ, $\lambda \vdash n$, *definimos*

$$e_{T_\lambda} = \sum_{\substack{\sigma \in R_{T_\lambda} \\ \tau \in C_{T_\lambda}}} (-1)^\tau \sigma\tau.$$

Dizemos que um elemento $e \in \mathcal{K}G$ é *idempotente essencial* se existe algum $\gamma \in \mathcal{K}$, $\gamma \neq 0$, tal que $e^2 = \gamma e$. Dizemos que um elemento idempotente é *minimal* se o ideal gerado por ele for minimal.

Fixada $\lambda \vdash n$, pode-se mostrar que $e_{T_\lambda}^2 = a e_{T_\lambda}$, onde $a = \dfrac{n!}{d_\lambda} = \prod_{(i,j) \in D_\lambda} h_{ij}$ é um inteiro não nulo (ver [B], Teorema 3.1, página 109), isto é, e_{T_λ} é um elemento idempotente essencial.

Proposição 2.1.14 *Sejam* $\alpha \in S_n$, λ *e* μ *partições de* n, D_λ *e* D_μ *diagramas de Young e* T_λ *e* T_μ *suas respectivas tabelas de Young. Então temos:*

a) Existe $\gamma \in \mathcal{K}$ *satisfazendo* $e_{T_\lambda} \alpha e_{T_\lambda} = \gamma e_{T_\lambda}$;

b) Se $\lambda > \mu$, *então* $e_{T_\lambda} \alpha e_{T_\mu} = 0$.

Demonstração: Ver [J2], Capítulo 5, Seção 4, páginas 265-269. ■

Temos abaixo um importante resultado a respeito de e_{T_λ}.

Proposição 2.1.15 *Para toda tabela de Young* T_λ *da forma* $\lambda \vdash n$, *o elemento* e_{T_λ} *é um idempotente essencial minimal de* $\mathcal{K}S_n$ *e* $\mathcal{K}S_n e_{T_\lambda}$ *é um ideal minimal à esquerda de* $\mathcal{K}S_n$ *com caracter* χ_λ. *As tabelas de Young* T_λ *e* T_λ^* *são da mesma forma se, e somente se,* e_{T_λ} *e* $e_{T_\lambda^*}$ *geram representações equivalentes em* $\mathcal{K}S_n$.

Demonstração: Ver [B], Teorema 3.1, página 109, para a primeira parte, e Teorema 3.2, página 110, para a segunda parte. ∎

A proposição acima nos diz que se duas tabelas T_λ e T_λ^* são da mesma forma λ, então $\mathcal{K}S_n e_{T_\lambda} \cong \mathcal{K}S_n e_{T_\lambda^*}$ como S_n-módulos, ao passo que se T_λ e T_λ^* são de formas diferentes, então $\mathcal{K}S_n e_{T_\lambda} \ncong \mathcal{K}S_n e_{T_\lambda^*}$.

Temos que as tabelas standards aparecem quando se quer encontrar uma decomposição de I_λ (ver Proposição 2.1.2) como soma direta de ideais minimais à esquerda de $\mathcal{K}S_n$. Esta decomposição é dada em função dos idempotentes essenciais resultantes das tabelas standard da forma λ. Isto é expressado no seguinte resultado.

Proposição 2.1.16 *Se $T_1, \ldots, T_{d_\lambda}$ são todas as tabelas standards da forma λ, então I_λ, o ideal (bilateral) minimal de $\mathcal{K}S_n$ correspondente a λ, tem a decomposição*

$$I_\lambda = \bigoplus_{i=1}^{d_\lambda} \mathcal{K}S_n e_{T_i}.$$

Demonstração: Ver [GZ2], Proposição 2.2.14, página 49. ∎

Relembrando que $\mathcal{K}S_n = \bigoplus_{\mu \vdash n} I_\mu$ (ver Proposição 2.1.2), onde I_μ é o ideal (bilateral) de $\mathcal{K}S_n$ correspondente a μ, pela proposição anterior, temos que

$$\mathcal{K}S_n = \bigoplus_{\substack{\mu \vdash n \\ T_\mu standard}} \mathcal{K}S_n e_{T_\mu}.$$

Agora, observando que S_n pode ser imerso em S_{n+1}, bastando ver S_n como um subgrupo de S_{n+1} formado de todas as permutações que fixam o inteiro $n+1$, daremos um resultado que dá uma decomposição em irredutíveis de todo S_n-módulo induzido em S_{n+1}.

Sejam H um subgrupo do grupo G e M um G-módulo. Relembramos que podemos considerar, por restrição, M como um H-módulo, e o denotaremos por $M \downarrow H$, chamando-o de *módulo induzido em H*. Reciprocamente, sendo M um H-módulo, o espaço vetorial $\mathcal{K}G \otimes_{\mathcal{K}H} M$ tem uma estrutura natural de G-módulo. Denotaremos tal módulo por $M \uparrow G$ e o chamaremos de *G-módulo induzido por M*.

No teorema abaixo, denotaremos por M_λ o S_n-módulo irredutível correspondente a partição λ de n.

Teorema 2.1.17 (Branching) *Sendo o grupo S_n imerso em S_{n+1} como o subgrupo de S_{n+1} que fixa o inteiro $n+1$, temos:*

a) Se $\lambda \vdash n$, então
$$M_\lambda \uparrow S_{n+1} \cong \sum_{\mu \in \lambda^+} M_\mu,$$
onde λ^+ é o conjunto de todas as partições de $n+1$ cujo diagrama é obtido de D_λ adicionando-se uma caixa;

b) Se $\mu \vdash n+1$, então
$$M_\mu \downarrow S_n \cong \sum_{\lambda \in \mu^-} M_\lambda,$$
onde μ^- é o conjunto de todas as partições de n cujo diagrama é obtido de D_μ retirando-se uma caixa.

Demonstração: Ver [JK], Teorema 2.4.3, página 59. ∎

Vale observar que se $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r) \vdash n$, então

$$\gamma^+ = \{\gamma^{i+} \vdash n+1 \mid \gamma^{i+} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma_i + 1, \gamma_{i+1}, \ldots), i = 1, \ldots, r+1\}$$

onde $\gamma^{(r+1)+} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r, 1)$, e

$$\gamma^- = \{\gamma^{i-} \vdash n-1 \mid \gamma^{i-} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma_i - 1, \gamma_{i+1}, \ldots), i = 1, \ldots, r-1\}.$$

2.2 S_n-ação em polinômios multilineares

Nesta seção introduziremos uma ação do grupo simétrico S_n no espaço dos polinômios multilineares em n variáveis fixas. Tal ação é uma das principais ferramentas para demonstrar alguns importantes resultados da PI-Teoria. Iniciaremos com um resultado acerca de S_n-módulos irredutíveis.

Proposição 2.2.1 *Seja M um S_n-módulo à esquerda irredutível com caracter $\chi(M) = \chi_\lambda$, para algum $\lambda \vdash n$. Então existem algum $f \in M$ e alguma tabela de Young T_λ da forma λ tais que M é gerado como S_n-módulo por um elemento da forma $e_{T_\lambda} f$. Ademais, para toda tabela de Young T^*_λ da forma λ, existe $f' \in M$ tal que $M = \mathcal{K}S_n e_{T^*_\lambda} f'$.*

Demonstração: Ver [GZ2], Lema 2.4.1, página 52. ∎

A proposição anterior diz que dada uma partição $\gamma \vdash n$ e uma tabela de Young T_γ da forma γ, todo S_n-módulo irredutível M, com caracter $\chi(M) = \chi_\gamma$, pode ser gerado por um elemento do tipo $e_{T_\gamma} f$, para algum $f \in M$.

Considere agora, fixado $n \geq 1$, o subespaço vetorial P_n de $\mathcal{K}\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto $\{x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$. Logo, se $f \in P_n$, então podemos escrever

$$f = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)}, \quad \alpha_\sigma \in \mathcal{K}.$$

Não é difícil ver que P_n contêm todos os polinômios (de grau n) multilineares nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ da álgebra livre $\mathcal{K}\langle X\rangle$, e por isso P_n é chamado de *espaço dos polinômios multilineares de grau n*. Observe que $\dim P_n = n!$, uma vez que o conjunto $\{x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$ é uma base do espaço P_n.

Definimos a aplicação $\varphi : \mathcal{K}S_n \to P_n$ como sendo a que satisfaz

$$\varphi\left(\sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma \sigma\right) = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)}, \quad \alpha_\sigma \in \mathcal{K}.$$

Note que φ é um isomorfismo linear. Assim, quando não houver confusão, podemos usar a mesma notação para um elemento $f \in \mathcal{K}S_n$ e para sua imagem por φ em P_n. Observe que S_n age em P_n da seguinte forma: se $\sigma \in S_n$ e $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_n$, então

$$\sigma f(x_1,\ldots,x_n) = f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}),$$

ou seja, σ age em f permutando suas variáveis conforme σ. Esta ação faz de P_n um S_n-módulo à esquerda.

Como os T-ideais são invariantes por endomorfismos, pode-se ver que são ainda invariantes por permutações de variáveis, e daí, sendo $\mathcal{A}$ uma PI-álgebra associativa, temos que $\sigma f \in P_n \cap Id(\mathcal{A})$, para quaisquer $\sigma \in S_n$ e $f \in P_n \cap Id(\mathcal{A})$. Logo, obtemos que $P_n \cap Id(\mathcal{A})$ é um S_n-submódulo de P_n. Daí, o quociente $P_n(\mathcal{A}) = \dfrac{P_n}{P_n \cap Id(\mathcal{A})}$ tem uma estrutura de S_n-módulo à esquerda.

Definição 2.2.2 *Para $n \geq 1$, definimos o n-***ésimo cocaracter** *de uma PI-álgebra associativa $\mathcal{A}$ como sendo o S_n-caracter de $P_n(\mathcal{A}) = \dfrac{P_n}{P_n \cap Id(\mathcal{A})}$, e o denotamos por $\chi_n(\mathcal{A})$.*

Nos próximos capítulos, iremos estudar o comportamento assintótico da *sequência de codimensões* $(c_n(\mathcal{A}))_{n\geq 1}$, onde $c_n(\mathcal{A}) = \chi_n(\mathcal{A})(1)$, para toda PI-álgebra $\mathcal{A}$.

Pelo Teorema 1.2.40, podemos decompor o n-ésimo cocaracter de $\mathcal{A}$ em irredutíveis, e daí podemos escrever

$$\chi_n(\mathcal{A}) = \sum_{\mu \vdash n} m_\mu \chi_\mu \quad ,$$

onde χ_μ é o S_n-caracter irredutível associado à partição μ de n e $m_\mu \geq 0$ é a correspondente multiplicidade.

O teorema a seguir nos dará uma ferramenta para computar o n-ésimo cocaracter de uma PI-álgebra $\mathcal{A}$.

Teorema 2.2.3 *Seja $\mathcal{A}$ uma PI-álgebra com n-ésimo cocaracter $\chi_n(\mathcal{A}) = \sum_{\mu \vdash n} m_\mu \chi_\mu$ (como descrito acima). Para cada partição $\mu \vdash n$, a multiplicidade m_μ é igual a zero se, e somente se, a álgebra $\mathcal{A}$ satisfaz a identidade $e_{T_\mu} f \equiv 0$, para toda tabela T_μ da forma μ e todo polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$.*

Demonstração: Ver [GZ2], Teorema 2.4.5, página 55. ■

Lembremos que, pela Proposição 1.4.24, em característica zero, toda identidade polinomial não nula é equivalente a um conjunto finito de identidades multilineares. No próximo resultado, descreveremos a estrutura do espaço das identidades multilineares em termos de S_n-ações.

Teorema 2.2.4 *Seja $f \in P_n$ um polinômio multilinear qualquer. Então existem um conjunto finito de polinômios $g_1, \ldots, g_r \in P_n$ e partições $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ de n, $r \geq 1$, tais que*

$$\mathcal{K}S_n f = \mathcal{K}S_n e_{T_{\lambda_1}} g_1 + \cdots + \mathcal{K}S_n e_{T_{\lambda_r}} g_r.$$

Demonstração: Tomemos $f \in P_n$ qualquer. Escrevendo $M = \mathcal{K}S_n f$, segue do Teorema 1.2.34 que podemos escrever $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$, onde M_i é um S_n-submódulo irredutível de M. Note que $M \subseteq P_n$. Pela Proposição 2.2.1, existem $g_1 \in M_1, \ldots, g_r \in M_r$ e tabelas de Young $T_{\lambda_1}, \ldots, T_{\lambda_r}$, onde T_{λ_i} é da forma $\lambda_i \vdash n$, tais que $M_1 = \mathcal{K}S_n e_{T_{\lambda_1}} g_1, \ldots, M_r = \mathcal{K}S_n e_{T_{\lambda_r}} g_r$. Portanto, $\mathcal{K}S_n f = \mathcal{K}S_n e_{T_{\lambda_1}} g_1 + \cdots + \mathcal{K}S_n e_{T_{\lambda_r}} g_r$. ■

2.3 Alguns Outros Resultados

Nesta seção, daremos alguns resultados úteis acerca de polinômios multilineares do tipo $e_{T_\lambda} f$, onde $\lambda \vdash n$ e T_λ é uma tabela de Young da forma λ, além de outros resultados mais gerais da Teoria de Young.

Proposição 2.3.1 *Sejam H um subgrupo de C_{T_λ}, N subgrupo de R_{T_λ}, M um S_n-módulo e $e_{T_\lambda}u \neq 0$ para algum $u \in M$. Então:*

$$\left(\sum_{\sigma\in H}(-1)^\sigma\sigma\right)e_{T_\lambda}u \neq 0 \quad e \quad \left(\sum_{\sigma\in N}\sigma\right)\left(\sum_{\tau\in C_{T_\lambda}}(-1)^\tau\tau\right)e_{T_\lambda}u \neq 0.$$

Demonstração: Ver [GZ2], Lema 2.5.1 e Lema 2.5.2, página 57. ■

Definição 2.3.2 *Dado um polinômio multilinear $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, dizemos que f corresponde à tabela T_λ se $f = e_{T_\lambda}f_0$ para algum polinômio $f_0 \in P_n$, onde T_λ é uma tabela de Young associada à partição $\lambda \vdash n$.*

Proposição 2.3.3 *Sendo $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n - \{0\}$ um polinômio correspondente à tabela T_λ, para algum $\lambda \vdash n$, temos então que $\mathcal{K}S_nf$ é um S_n-módulo irredutível.*

Demonstração: Seja $f_0 \in P_n$ tal que $f = e_{T_\lambda}f_0$. Defina a aplicação

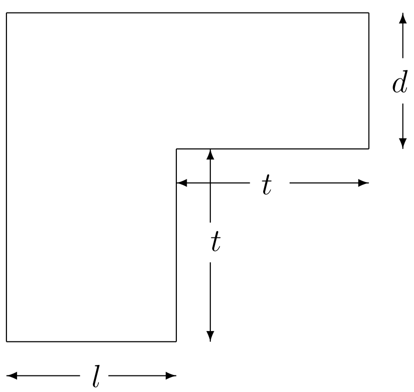
$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \mathcal{K}S_ne_{T_\lambda} & \longrightarrow & \mathcal{K}S_nf \\ & a & \longmapsto & \varphi(a) = a\cdot f_0\end{array}.$$

Temos que φ é um homomorfismo sobrejetivo de S_n-módulos. Como $\mathcal{K}S_ne_{T_\lambda}$ é irredutível (Proposição 2.1.15) e $Ker\varphi \neq \mathcal{K}S_ne_{T_\lambda}$, visto que $\varphi(e_{T_\lambda}) = f \neq 0$, temos que $Ker\varphi = \{0\}$ e assim φ é um isomorfismo. Portanto, $\mathcal{K}S_nf$ é irredutível. ■

Agora, tomemos inteiros $d, l, t \geq 0$. Definimos a partição

$$h(d,l,t) = (\underbrace{l+t, \ldots, l+t}_{d}, \underbrace{l, \ldots, l}_{t}).$$

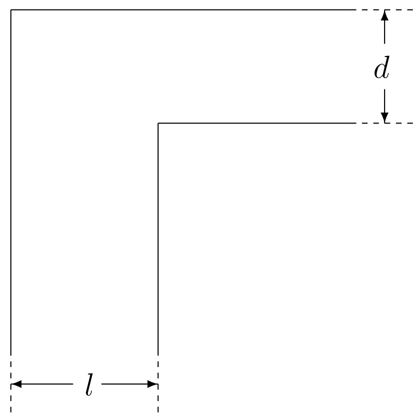
Observe que o diagrama associado à partição $h(d, l, t)$ é o *gancho* da forma



Também definimos o *gancho infinito* como segue:

$$H(d,l) = \bigcup_{n\geq 1}\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \vdash n \mid \lambda_{d+1} \leq l\}.$$

Então, $H(d,l)$ pode ser visto como o conjunto de todos os diagramas contidos no diagrama dado pela seguinte figura



O inteiro d é chamado de *mão do gancho* e l é o *pé do gancho*. Dizemos que uma partição λ pertence ao gancho $H(d,l)$, e denotamos por $\lambda \in H(d,l)$, se o correspondente diagrama de Young D_λ está contido em $H(d,l)$. Analogamente, se M é um S_n-módulo com caracter $\chi(M) = \sum_{\lambda\vdash} m_\lambda \chi_\lambda$, então escrevemos $\chi(M) \subseteq H(d,l)$ se $\lambda \in H(d,l)$ para toda partição $\lambda \vdash n$ tal que $m_\lambda \neq 0$.

Observe que $h(s,0,n) = (\underbrace{n,\ldots,n}_{s}, \underbrace{0,\ldots,0}_{n}) = (n^s)$, e daí o conjunto

$$\begin{aligned} H(s,0;n) &= \{\lambda \vdash n \mid \; D_\lambda \subseteq D_{h(s,0,n)}\} \\ &= \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \vdash n \mid r \leq s\} \end{aligned}$$

é formado por todas as partições de n que pertencem ao gancho infinito $H(s,0)$ (faixa de altura s). Temos o seguinte resultado.

Proposição 2.3.4 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa. Se* $\dim \mathcal{A} = s < \infty$*, então*

$$\chi_n(\mathcal{A}) = \sum_{\lambda \in H(s,0;n)} m_\lambda \chi_\lambda.$$

Demonstração: Ver [GRZ], Lema 3.4, página 1939. ■

Agora, considere a estrutura do polinômio multilinear correspondente à tabela de Young T_λ, onde $\lambda \in H(d,l)$, o gancho infinito. O teorema a seguir nos dá uma uma ferramenta para construir polinômios simétricos ou alternantes.

Teorema 2.3.5 *Sejam λ uma partição de n, T_λ uma tabela de Young da forma λ e $f = e_{T\lambda}g$, onde $g = g(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$ é um polinômio multilinear nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Se $\lambda \in H(d, l)$, então existe uma decomposição de $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ em uma união disjunta*

$$X_n = X_1 \cup \cdots \cup X_{d'} \cup Y_1 \cup \cdots \cup Y_{l'} \tag{2.2}$$

com $d' \leq d$, $l' \leq l$ e um polinômio multilinear $f' = f'(x_1, \ldots, x_n)$ tal que

- *f' é simétrico em cada conjunto de variáveis X_i, $i = 1, \ldots, d'$;*
- *f' é alternante em cada conjunto de variáveis Y_j, $j = 1, \ldots, l'$;*
- *$\mathcal{K}S_n f = \mathcal{K}S_n f'$;*
- *os inteiros $d', l', |X_1|, \ldots, |X_{d'}|, |Y_1|, \ldots, |Y_{l'}|$ são unicamente determinados por λ e não dependem da escolha da tabela T_λ;*
- *a decomposição (2.2) é unicamente determinada por T_λ e não depende de g.*

Demonstração: Ver [GZ2], Lema 2.5.6, página 60. ■

Tomemos agora duas partições $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \vdash n$ e $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_s) \vdash m$. Dizemos que $\lambda \geq \mu$ se $r \geq s$ e $\lambda_i \geq \mu_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, s$. Note que $\lambda \geq \mu$ se, e somente se, $D_\mu \subseteq D_\lambda$. É importante observar que na página 56 apresentamos uma relação de ordem no conjunto das partições de um mesmo número inteiro, já esta última definição (que não chega a ser uma relação de ordem) traz uma forma de comparar partições de números inteiros distintos.

Proposição 2.3.6 *Se $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash m$ são tais que $\mu \leq \lambda$, com $n - m \leq c$, então*

$$d_\mu \leq d_\lambda \leq n^c d_\mu.$$

Demonstração: Pela fórmula do gancho (Teorema 2.1.10), temos que

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod\limits_{(i,j)\in D_\lambda} h_{ij}^\lambda} \quad e \quad d_\mu = \frac{m!}{\prod\limits_{(i,j)\in D_\mu} h_{ij}^\mu} \quad ,$$

onde h_{ij}^λ e h_{ij}^μ são os ganchos de (i,j) dos diagramas D_λ e D_μ, respectivamente. Como $\mu \leq \lambda$, e daí $D_\lambda \supseteq D_\mu$, temos que $\prod_{(i,j)\in D_\lambda} h_{ij}^\lambda \geq \prod_{(i,j)\in D_\mu} h_{ij}^\mu$. Note que $n! = n(n-1)\cdots(m+1)m! \leq n^{n-m}m!$, e daí, por hipótese, $n! \leq n^c m!$. Temos então

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod\limits_{(i,j)\in D_\lambda} h_{ij}^\lambda} \leq \frac{n!}{\prod\limits_{(i,j)\in D_\mu} h_{ij}^\mu} \leq \frac{n^c m!}{\prod\limits_{(i,j)\in D_\mu} h_{ij}^\mu} = n^c d_\mu$$

e assim, provamos a segunda inequação.

Por outro lado, para demonstrar a inequação $d_\mu \leq d_\lambda$, utilizaremos o Teorema Branching (Teorema 2.1.17). Sem perda de generalidade, podemos supor que $n = m+1$. Assim, $\mu \in \lambda^-$, ou ainda, $\lambda \in \mu^+$. Temos que $\lambda \vdash m+1$, e assim, pelo Teorema Branching,

$$M_\lambda \downarrow S_m \cong \sum_{\mu' \in \lambda^-} M_{\mu'},$$

como S_m-módulos. Sendo χ'_λ o caracter correspondente a $M_\lambda \downarrow S_m$, segue-se que

$$\chi'_\lambda \cong \sum_{\mu' \in \lambda^-} \chi_{\mu'},$$

mas como $d_\lambda = \dim M_\lambda = \dim(M_\lambda \downarrow S_m) = \chi'_\lambda(1)$, temos que $d_\lambda = \sum_{\mu' \in \lambda^-} d_{\mu'} \geq d_\mu$. Portanto, $d_\mu \leq d_\lambda \leq n^c d_\mu$. ■

O resultado a seguir também poderá ser encontrado em [R1], Casos Especiais 4.5, Caso 1, página 134.

Dadas duas funções $f(n)$ e $g(n)$ de um argumento real n, dizemos que $f(n)$ e $g(n)$ assintoticamente iguais, e denotamos por $f(n) \cong g(n)$, se $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 1$.

Proposição 2.3.7 *Para algumas constantes $C, r > 0$, temos a seguinte inequação*

$$\sum_{\substack{\mu \vdash n \\ \mu \in H(d,l)}} d_\mu \leq C n^r (d+l)^n.$$

Ademais, para algumas constantes a, b, temos a seguinte igualdade assintótica

$$d_{h(d,l,k)} \underset{n\to\infty}{\cong} a n^b (d+l)^n,$$

onde $h(d,l,k) \vdash n$.

Demonstração: Ver [GZ2], Lema 6.2.5, página 148. ■

Observe que se $\lambda \in H(d,0)$ e $\lambda \vdash n$, então $\lambda \in H(d,0;n)$. Por outro lado, dado $\lambda \in H(d,0;n)$, temos que $\lambda \in H(d,0)$ e $\lambda \vdash n$. Temos então o seguinte corolário da proposição anterior.

Corolário 2.3.8 *Existem constantes $C, r > 0$ tais que*

$$\sum_{\lambda \in H(d,0;n)} d_\lambda \leq C n^r d^n.$$

Demonstração: Pela Proposição 2.3.7,

$$\sum_{\lambda\in H(d,0;n)} d_\lambda = \sum_{\substack{\lambda\vdash n\\ \lambda\in H(d,0)}} d_\lambda \leq Cn^r d^n,$$

para algumas constantes $C, r > 0$. ■

Por fim, encerraremos este capítulo com um importante resultado acerca do crescimento das multiplicidades m_λ's que aparecem na decomposição $\chi_n(\mathcal{A}) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda\chi_\lambda$, onde $\chi_n(\mathcal{A})$ é o n-ésimo cocaracter da $\mathcal{K}$-álgebra $\mathcal{A}$. Uma outra demonstração desse teorema poderá ser encontrada em [GZ2], Lema 4.9.2, página 116.

Teorema 2.3.9 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra sobre um corpo de característica zero, cujo cocaracter é dado por $\chi_n(\mathcal{A}) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda\chi_\lambda$. Então a multiplicidade m_λ é polinomialmente limitada, para cada $\lambda \vdash n$, isto é, existem constantes $a, k > 0$ tais que*

$$m_\lambda \leq an^k,$$

para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda \vdash n$.

Demonstração: Ver [BR], Teorema 16, página 566. ■

Capítulo 3

PI-Expoente de Álgebras

Neste capítulo apresentaremos a definição de *codimensões de uma álgebra*, que será denotada por $c_n(\mathcal{A})$, da qual se deriva o conceito de *PI-expoente de uma álgebra*. O principal objetivo deste capítulo é demonstrar a existência do PI-expoente para toda álgebra associativa finitamente gerada, e que este é um inteiro (não negativo). A chave para tal resultado é encontrar uma limitação do tipo $C_1 n^{r_1} d^n \leq c_n(\mathcal{A}) \leq C_2 n^{r_2} d^n$, onde $C_1, r_1, C_2, r_2, d > 0$ são constantes e $\mathcal{A}$ é uma álgebra associativa de dimensão finita sobre um corpo de característica zero, e utilizar um teorema de Kemer (ver Teorema 1.4.26) para estender o resultado para álgebras finitamente geradas. Por fim, na última seção, daremos algumas consequências importantes de o PI-expoente existir e ser um inteiro, como por exemplo, que uma álgebra é central simples sempre que seu PI-expoente for igual a sua dimensão. Vale a recíproca. Todos os principais resultados aqui apresentados podem ser encontrados na referência [GZ]. Alguns resultados oriundos do estudo da análise real serão admitidos sem a devida comprovação, mas que podem ser encontrados em [Li].

Em todo este capítulo $\mathcal{K}$ denotará sempre um corpo de característica zero e serão consideradas apenas álgebras associativas finitamente geradas sobre $\mathcal{K}$.

3.1 Codimensões de uma Álgebra

Sejam $\mathcal{A}$ uma PI-álgebra sobre $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre de posto enumerável, com $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Dizemos que um subespaço vetorial de $\mathcal{K}\langle X\rangle$ é um T-*espaço* se é um subespaço invariante por todos os endomorfismos de $\mathcal{K}\langle X\rangle$. Pelo Corolário 1.4.25, $Id(\mathcal{A})$ é gerado por seus polinômios multilineares. Daí, segue-se que $Id(\mathcal{A})$ é gerado (como T-espaço) pelo subespaço

$$(P_1 \cap Id(\mathcal{A})) \oplus (P_2 \cap Id(\mathcal{A})) \oplus \cdots \oplus (P_n \cap Id(\mathcal{A})) \oplus \cdots$$

na álgebra $\mathcal{K}\langle X\rangle$.

Nesta seção, daremos alguns resultados a respeito das dimensões de $P_n \cap Id(\mathcal{A})$ em relação a P_n. Iniciaremos com a definição formal de *codimensão de um álgebra* $\mathcal{A}$.

Definição 3.1.1 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. O número inteiro*

$$c_n(\mathcal{A}) = \dim P_n(\mathcal{A}) = \dim \frac{P_n}{P_n \cap Id(\mathcal{A})}$$

*é chamado de n-**ésima codimensão** da álgebra $\mathcal{A}$. A sequência $(c_n(\mathcal{A}))_{n\in\mathbb{N}}$ é chamada de **sequência de codimensões** de $\mathcal{A}$.*

Note que $\dim(P_n \cap Id(\mathcal{A})) = n! - c_n(\mathcal{A})$. Dessa forma, se $c_n(\mathcal{A}) < n!$, para algum $n \geq 1$, então $\mathcal{A}$ é uma PI-álgebra.

Se $\mathcal{V}$ é uma variedade de álgebras e $\mathcal{A}$ é tal que $\mathcal{V} = var(\mathcal{A})$, definimos $c_n(\mathcal{V}) = c_n(\mathcal{A})$.

Exemplo 3.1.2 *Seja $\mathcal{N}$ uma álgebra nilpotente tal que $\mathcal{N}^m = \{0\}$. Logo, $P_n \subseteq Id(\mathcal{N})$ para todo $n \geq m$. Assim, $c_n(\mathcal{N}) = 0$ para qualquer $n \geq m$.*

Exemplo 3.1.3 *Sendo $\mathcal{A}$ uma álgebra comutativa, temos então que $c_n(\mathcal{A}) \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, pelo Exemplo 1.4.21, $Id(\mathcal{A}) = \langle [x_1, x_2]\rangle_T$. Segue daí que $x_i x_j \equiv x_j x_i (mod\ P_n \cap Id(\mathcal{A}))$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Logo, para toda $\sigma \in S_n$, temos*

$$x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)} \equiv x_1 x_2 \cdots x_n (mod\ P_n \cap Id(\mathcal{A})).$$

Tomando $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)} \in P_n$, $\lambda_\sigma \in \mathcal{K}$, temos que

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \lambda x_1 x_2 \cdots x_n (mod\ P_n \cap Id(\mathcal{A})),$$

para algum $\lambda \in \mathcal{K}$. Dessa forma, $P_n(\mathcal{A}) = \langle \overline{x_1 x_2 \cdots x_n}\rangle$, isto é, $\overline{x_1 x_2 \cdots x_n}$ gera $P_n(\mathcal{A})$. Portanto, $c_n(\mathcal{A}) \leq 1$.

Note que se $\mathcal{A}$ for unitária, então $c_n(\mathcal{A}) = 1$, visto que, $x_1, x_2, \ldots, x_n \notin Id(\mathcal{A})$.

Proposição 3.1.4 *Sendo E a $\mathcal{K}$-álgebra de Grassmann de dimensão infinita (como espaço vetorial). Então*

$$c_n(E) = 2^{n-1},$$

para todo $n = 1, 2, \ldots$.

Demonstração: Ver [KR], Corolário do Teorema 3.1, página 436. ■

O resultado acima pode ser encontrado também em [D], Teorema 5.1.2, página 50, e ainda em [GZ2], Teorema 4.1.8, página 90.

Considere $UT_2(\mathcal{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathcal{K}) \mid a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathcal{K} \right\}$ a álgebra das matrizes 2×2 triangulares superiores sobre $\mathcal{K}$. Temos o seguinte resultado.

Proposição 3.1.5 *Em característica zero, o T-ideal das identidades de $UT_2(\mathcal{K})$ é gerado pelo polinômio*

$$[x_1, x_2][x_3, x_4].$$

Ademais,

$$c_n(UT_2(\mathcal{K})) = 2^{n-1}(n-2) + 2,$$

para todo $n = 1, 2, 3 \cdots$.

Demonstração: Ver [GZ2], Teorema 4.1.5, página 88. ■

Ainda é possível encontrar a primeira parte da proposição acima em [M], Proposição 3, página 243.

A seguir, daremos uma condição que nos garantirá a igualdade de T-ideais de identidades de álgebras, além de mostrar que a aplicação $\mathcal{A} \mapsto c_n(\mathcal{A})$, onde $\mathcal{A}$ é uma PI-álgebra, inverte ordem.

Proposição 3.1.6 *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas PI-álgebras sobre o mesmo corpo $\mathcal{K}$. Então temos:*

a) Se $Id(\mathcal{A}) \subseteq Id(\mathcal{B})$, então $c_n(\mathcal{B}) \leq c_n(\mathcal{A})$, para todo $n \geq 1$;

b) Se $Id(\mathcal{A}) \subseteq Id(\mathcal{B})$ e $c_n(\mathcal{A}) = c_n(\mathcal{B})$, para todo $n \geq 1$, então $Id(\mathcal{A}) = Id(\mathcal{B})$.

Demonstração: a) Primeiramente, temos que $P_n \cap Id(\mathcal{A}) \subseteq P_n \cap Id(\mathcal{B})$, para todo $n \geq 1$. Logo, $\dim(P_n \cap Id(\mathcal{A})) \leq \dim((P_n \cap Id(\mathcal{B}))$, $n \geq 1$. Dessa forma, para todo $n \geq 1$, temos que

$$c_n(\mathcal{A}) = n! - \dim(P_n \cap Id(\mathcal{A})) \geq n! - \dim(P_n \cap Id(\mathcal{B})) = c_n(\mathcal{B}).$$

b) Temos que $P_n \cap Id(\mathcal{A}) \subseteq P_n \cap Id(\mathcal{B})$, para todo $n \geq 1$. Do fato de $c_n(\mathcal{A}) = c_n(\mathcal{B})$ segue que $\dim(P_n \cap Id(\mathcal{A})) = \dim(P_n \cap Id(\mathcal{B}))$. Logo, $P_n \cap Id(\mathcal{A}) = P_n \cap Id(\mathcal{B})$, para todo

$n \geq 1$. Como $\operatorname{char} \mathcal{K} = 0$, temos que $Id(\mathcal{A})$ e $Id(\mathcal{B})$ são gerados por seus polinômios multilineares, e daí segue-se que $Id(\mathcal{A}) = Id(\mathcal{B})$. ■

Agora, apresentaremos um resultado que afirma que podemos "estender" o corpo base de uma álgebra $\mathcal{A}$ e mesmo assim nem as codimensões e nem os cocaracteres de $\mathcal{A}$ se alteram. Segue da Proposição 1.4.12 que a álgebra $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{F}$, vista como $\mathcal{K}$-álgebra, satisfaz todas as identidades de $Id(\mathcal{A})$, isto é, $Id(\mathcal{A}) \subseteq Id(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{F})$. Isto significa que podemos considerar identidades de $\overline{\mathcal{A}}$ com coeficientes em $\mathcal{F}$. Denotemos por $c_n^{\mathcal{F}}(\mathcal{A})$ a n-ésima codimensão, olhando $\overline{\mathcal{A}}$ como $\mathcal{F}$-álgebra. Sejam $\chi_n(\mathcal{A}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$ e $\chi_n(\overline{\mathcal{A}}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda^{\mathcal{F}} \chi_\lambda$ o n-ésimo cocaracter de $\mathcal{A}$ e o n-ésimo cocaracter de $\overline{\mathcal{A}}$, respectivamente.

Teorema 3.1.7 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra sobre um corpo $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}$ uma extensão de corpos. Temos então*

$$c_n^{\mathcal{F}}(\overline{\mathcal{A}}) = c_n(\mathcal{A}),$$

para todo $n = 1, 2, \ldots$. Ademais, $m_\lambda^{\mathcal{F}} = m_\lambda$, para qualquer $\lambda \vdash n$.

Demonstração: Ver [GZ2], Teorema 4.1.9, página 93. ■

Segue do teorema acima que podemos assumir (em característica zero), sempre que quisermos, $\mathcal{K}$ como um corpo algebricamente fechado. Vale observar também que a decomposição do n-ésimo cocaracter de $\mathcal{A}$ em componentes irredutíveis não se altera quando "estendemos" o corpo base, isto é, $\chi_n(\mathcal{A}) = \chi_n(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{F})$, para todo $n \geq 1$ e $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}$ uma extensão de corpos.

Enunciaremos agora um resultado que garante que a sequência de codimensões de toda PI-álgebra é exponencialmente limitada. Tal resultado serve como ferramenta para mostrar que o produto tensorial de PI-álgebras é ainda uma PI-álgebra.

Teorema 3.1.8 *Seja $\mathcal{A}$ uma PI-álgebra satisfazendo uma identidade de grau $d \geq 1$. Então*

$$c_n(\mathcal{A}) \leq (d-1)^{2n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Ver [D], Teorema 8.1.7, página 111. ■

Teorema 3.1.9 *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas PI-álgebras sobre o corpo $\mathcal{K}$. Então*

$$c_n(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \leq c_n(\mathcal{A})c_n(\mathcal{B}), \quad n \geq 1.$$

Demonstração: Ver [GZ2], Teorema 4.2.5, página 96. ■

É imediato dos Teoremas 3.1.8 e 3.1.9 o resultado a seguir.

Teorema 3.1.10 *O produto tensorial $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ de duas PI-álgebras é também uma PI-álgebra.*

Demonstração: Ver [R], Teorema 5.1, página 151. ■

3.2 PI-Expoentes

Nesta seção, definiremos o *PI-expoente* de uma álgebra. Também enunciaremos alguns resultados preliminares acerca de PI-expoente.

Sejam $\mathcal{A}$ uma PI-álgebra sobre o corpo $\mathcal{K}$, e $(c_n(\mathcal{A}))_{n\geq 1}$ a sequência de codimensões de $\mathcal{A}$.

Caso $\mathcal{A}$ seja nilpotente, segue do Exemplo 3.1.2 que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c_n(\mathcal{A}) = 0$ para todo $n \geq n_0$. Caso contrário, se $\mathcal{A}$ não for nilpotente, então

$$x_1 \cdots x_n \notin Id(\mathcal{A})$$

seja qual for $n \geq 1$, e assim, $c_n(\mathcal{A}) \neq 0$ para todo $n \geq 1$. Pelo Teorema 3.1.8, $c_n(\mathcal{A})$ é exponencialmente limitada, ou seja, deve existir uma constante $a > 0$ tal que

$$1 \leq c_n(\mathcal{A}) \leq a^n,$$

e daí a sequência das n-ésimas raízes $\left(\sqrt[n]{c_n(\mathcal{A})}\right)_{n\geq 1}$ é limitada, tanto superiormente quanto inferiormente.

Definição 3.2.1 *Seja $\mathcal{A}$ uma PI-álgebra. Definimos:*

i) o **expoente inferior** *de $\mathcal{A}$ como sendo o limite*

$$\underline{exp}(\mathcal{A}) = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathcal{A})} \quad ;$$

ii) o **expoente superior** *de $\mathcal{A}$ como sendo o limite*

$$\overline{exp}(\mathcal{A}) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathcal{A})} \quad ;$$

iii) o **expoente** *(ou PI-**expoente**) de $\mathcal{A}$ como sendo o limite*

$$exp(\mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathcal{A})} \quad ,$$

desde que se tenha $\underline{exp}(\mathcal{A}) = \overline{exp}(\mathcal{A})$.

No caso em que $\mathcal{V} = var(\mathcal{A})$ é uma variedade de álgebras, onde $\mathcal{A}$ é uma PI-álgebra, escrevemos $exp(\mathcal{V}) = exp(\mathcal{A})$ e chamaremos $exp(\mathcal{V})$ o *expoente da variedade* $\mathcal{V}$.

Veremos agora que uma limitação superior do crescimento das codimensões de uma álgebra $\mathcal{A}$ pode ser dada em termos da dimensão desta álgebra.

Teorema 3.2.2 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de dimensão finita, com $\dim \mathcal{A} = d$. Então $c_n(\mathcal{A}) \leq d^n$.*

Demonstração: Ver [BD], Proposição 2.3, página 19. ■

Uma consequência imediata do teorema acima pode ser vista no corolário a seguir.

Corolário 3.2.3 *Se $\dim \mathcal{A} = d$ é finita, então $\overline{exp}(\mathcal{A}) \leq d$.*

Demonstração: Pelo Teorema 3.2.2, temos que $c_n(\mathcal{A}) \leq d^n$, para todo $n \geq 1$. Logo,

$$\overline{exp}(\mathcal{A}) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathcal{A})} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{d^n} = d \quad ,$$

e portanto $\overline{exp}(\mathcal{A}) \leq d$. ■

Observe que o corolário anterior nós dá uma boa estimativa para o expoente superior de $\mathcal{A}$.

3.3 Existência de um PI-Expoente

Nesta seção, apresentaremos o principal objetivo de estudo deste trabalho, o qual pode ser encontrado no artigo [GZ]. Aqui, $\mathcal{A}$ será sempre uma PI-álgebra associativa finitamente gerada sobre o corpo $\mathcal{K}$ de característica zero. Vamos mostrar a existência de um PI-expoente de $\mathcal{A}$. No artigo [GZ1], tal resultado é estendido para toda álgebra associativa.

Dados os números naturais d, k, t, considere $x_1^j, \ldots, x_d^j, y_1, \ldots, y_t$, com $1 \leq j \leq k$, como sendo variáveis distintas. Definimos $\mathcal{Q}_{d,k}$ como sendo o conjunto de todos os polinômios multilineares

$$f = f(x_1^1, \ldots, x_d^1, \ldots, x_1^k, \ldots, x_d^k, y_1, \ldots, y_t),$$

onde $t = 1, 2, \ldots$, tal que f é alternante em cada conjunto de variáveis $\{x_1^j, \ldots, x_d^j\}$, para todo $j = 1, 2, \ldots, k$. Dizemos que $f \in \mathcal{Q}_{d,k}$ é um polinômio $(k; d)$-multi-alternante.

O lema a seguir nos dará uma limitação superior para a n-ésima codimensão de uma álgebra de dimensão finita que satisfaça uma certa classe de identidades polinomiais.

Lema 3.3.1 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de dimensão finita satisfazendo todas as identidades $f \equiv 0$, $f \in \mathcal{Q}_{d+1,k}$, para algum $k > 0$ e algum $d > 0$. Então $c_n(\mathcal{A}) \leq Cn^r d^n$ para algumas constantes $C, r > 0$.*

Demonstração: Seja $\dim \mathcal{A} = s$. Pela Proposição 2.3.4, segue-se que

$$c_n(\mathcal{A}) = \dim \chi_n(\mathcal{A}) = \sum_{\lambda \in H(s,0;n)} m_\lambda d_\lambda \quad ,$$

onde m_λ é a multiplicidade de χ_λ em $\chi_n(\mathcal{A})$. Pelo Teorema 2.3.9, existem constantes $a, k_1 > 0$ tais que para todo $n \geq 1$ e $\lambda \in H(s, 0; n)$ tem-se $m_\lambda \leq an^{k_1}$, e daí $c_n(\mathcal{A}) \leq an^{k_1} \sum_{\lambda \in H(s,0;n)} d_\lambda$. Pelo Corolário 2.3.8, existem constantes $C_1, k_2 > 0$ tais que $\sum_{\lambda \in H(s,0;n)} d_\lambda \leq C_1 n^{k_2} s^n$. Logo,

$$c_n(\mathcal{A}) \leq an_1^k \sum_{\lambda \in H(s,0;n)} d_\lambda \leq an_1^k C_1 n^{k_2} s^n = aC_1 n^{k_1+k_2} s^n.$$

Portanto, $c_n(\mathcal{A}) \leq Cn^k s^n$, para algumas constantes $C, k > 0$. Dessa forma, para o caso em que $s \leq d$ temos o resultado procurado.

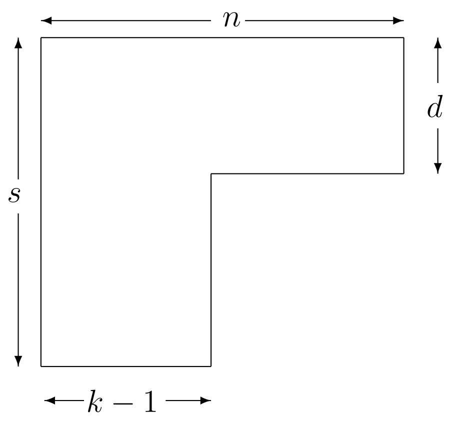
Suponhamos agora $d < s$. Seja λ uma partição de n e suponhamos que D_λ contém um $(d+1) \times k$ retângulo (com $d+1$ linhas e k colunas). Para toda tabela T_λ, o polinômio $e_{T_\lambda}(x)$ é uma combinação linear de polinômios alternantes em pelo menos k conjuntos, onde cada conjunto contém ao menos $d+1$ variáveis, logo, f é uma combinação linear de polinômios alternantes em k conjuntos que contém $d+1$

variáveis cada, e assim, $e_{T_\lambda}(x) \in \mathcal{Q}_{d+1,k}$. Aplicando-se a hipótese, temos que todo S_n-módulo irredutível $\mathcal{K}S_n e_{T_\lambda}$ correspondente a λ está contido em $P_n \cap Id(\mathcal{A})$, e assim, pelo Teorema 2.2.3, temos que $m_\lambda = 0$ se D_λ contém um $(d+1)\times k$ retângulo. Portanto, para completar a demonstração deste lema, é suficiente mostrar que $E = \sum_{\lambda \in T} d_\lambda \leq Cn^r d^n$, para algumas constantes $C, r > 0$, onde T é o conjunto de todas as partições de $H(s,0;n)$ cujos diagramas não contêm um $(d+1)\times k$ retângulo. Esta soma consiste de duas partes $E = E_1 + E_2$, onde

$$E_1 = \sum_{\lambda \in H(d,0;n)} d_\lambda \qquad e \qquad E_2 = \sum_{\substack{\lambda \in T \\ d < h(\lambda) \leq s}} d_\lambda \quad ,$$

com $h(\lambda)$ sendo a altura de λ. Segue do Corolário 2.3.8 que $E_1 \leq C_1 n^{r_1} d^n$, para convenientes constantes $C_1, r_1 > 0$.

Para o segundo somando E_2, tomemos $\lambda \in T$, com $d < h(\lambda) \leq s$. Sendo $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d, \lambda_{d+1}, \ldots)$, considere a partição $\lambda^* = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$. Temos que $\lambda^* \leq \lambda$ e daí $D_{\lambda^*} \subseteq D_\lambda$. Logo, pela Proposição 2.3.6, segue-se que $d_\lambda \leq n^{n-|\lambda^*|} d_{\lambda^*}$. Como $n - |\lambda^*| \leq h(\lambda)(k-1)$ (pois $\lambda_i < k$, para $i \geq d+1$), segue que $d_\lambda \leq n^{h(\lambda)(k-1)} d_{\lambda^*}$. Vejamos abaixo a figura de um gancho que contêm D_λ e D_{λ^*}.



Considere o conjunto $T^* = \{\lambda^* \mid \lambda \in T,\ d < h(\lambda) \leq s\}$. Uma estimativa para o número de partições μ^λ de n tais que $\mu^\lambda \in T$, com $d < h(\mu^\lambda) \leq s$, e que determinam uma mesma partição $\lambda^* \in T^*$, é que esse número não supera n^s (isto é, $\#\{\mu^\lambda \in T \mid (\mu^\lambda)^* = \lambda^*\} \leq n^s$), uma vez que $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \leq n$. Desde que $s \geq h(\lambda)$, segue-se que

$$E_2 = \sum_{\substack{\lambda \in T \\ d<h(\lambda)\leq s}} d_\lambda \leq \sum_{\substack{\lambda \in T \\ d<h(\lambda)\leq s}} n^{s(k-1)} d_{\lambda^*} = n^{s(k-1)} \sum_{\substack{\lambda \in T \\ d<h(\lambda)\leq s}} d_{\lambda^*} \tag{3.1}$$
$$\leq n^{s(k-1)} \sum_{\lambda^* \in T^*} n^s d_{\lambda^*} = n^{sk} \sum_{\lambda^* \in T^*} d_{\lambda^*} \quad .$$

Além disso, dada partição $\lambda^* \in T^*$ podemos associá-la a uma partição $\mu_{\lambda^*} \in H(d,0;n)$ tal que $\lambda^* \leq \mu_{\lambda^*}$. Observe que o número de partições de T^* não supera n^d, uma vez que os elementos de T^* são partições que tem altura exatamente d. Logo, desde que a Proposição 2.3.6 garante que $d_{\lambda^*} \leq d_{\mu_{\lambda^*}}$, temos que

$$\sum_{\lambda^* \in T^*} d_{\lambda^*} \leq n^d \sum_{\mu \in H(d,0;n)} d_\mu \quad . \tag{3.2}$$

Logo, segue das desigualdades (3.1) e (3.2) que

$$E_2 \leq n^{sk} \sum_{\lambda^* \in T^*} d_{\lambda^*} \leq n^{sk+d} \sum_{\mu \in H(d,0;n)} d_\mu = n^{sk+d} E_1 \quad .$$

Portanto,

$$\begin{aligned} E = E_1 + E_2 &\leq E_1 + n^{sk+d} E_1 = (1 + n^{sk+d}) E_1 \\ &\leq (1 + n^{sk+d}) C_1 n^{r_1} d^n \\ &\leq 2n^{sk+d} C_1 n^{r_1} d^n = 2C_1 n^{sk+d+r_1} d^n. \end{aligned}$$

Tomando agora $C = 2C_1$ e $r = sk + d + r_1$, temos que

$$E \leq C n^r d^n.$$

Dessa forma, concluímos a demonstração do lema. ∎

Assumiremos agora que $\mathcal{A}$ é uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo $\mathcal{K}$ de característica zero e algebricamente fechado. Seja $J = J(\mathcal{A})$ o radical de Jacobson de $\mathcal{A}$. Pelo Teorema de Wedderburn-Malcev (Teorema 1.3.9), existe uma subálgebra semissimples $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} = \mathcal{B} + J$ e $\mathcal{B} \cap J = \{0\}$. Sendo $\mathcal{B}$ semissimples, podemos tomar $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ subálgebras simples de $\mathcal{B}$ tais que

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_n \quad .$$

Como $\dim \mathcal{A} < \infty$, segue da definição de radical de Jacobson que J é nilpotente.

No caso em que $\mathcal{A} = J$, temos que $\mathcal{A}$ é nilpotente, e daí existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{A}^k \neq \{0\}$ e $\mathcal{A}^{k+1} = \{0\}$. Logo, $c_m(\mathcal{A}) = 0$ para todo $m > k$.

Assumiremos a partir de agora que $\mathcal{A} \neq J$. Assim, podemos escrever $\mathcal{A} = \mathcal{B} + J$, com $\mathcal{B} \neq \{0\}$ nas condições acima.

Considere todos os produtos não nulos do tipo

$$\mathcal{C}_1 J \mathcal{C}_2 J \cdots J \mathcal{C}_{k-1} J \mathcal{C}_k \neq \{0\}, \tag{3.3}$$

onde $k = 1, 2, \ldots$, e $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$ são subálgebras duas a duas distintas do conjunto $\{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n\}$. Definimos então $d = d(\mathcal{A})$ como sendo a maior dimensão de uma subálgebra $\mathcal{C}_1 + \cdots + \mathcal{C}_k$ satisfazendo (3.3). Em outros termos,

$$d = \max\{\dim(\mathcal{C}_1 + \cdots + \mathcal{C}_k) \mid \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k \text{ satisfazem (3.3)}\}. \tag{3.4}$$

Observe que $d \geq \max\{\dim_{\mathcal{K}} \mathcal{B}_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$. Desde que $\mathcal{K}$ é algebricamente fechado e $\dim \mathcal{A} < \infty$, pelo Teorema 1.3.6, podemos encontrar números $d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{N}$ tais que $\mathcal{C}_i \cong M_{d_i}(\mathcal{K})$, $i = 1, 2, \ldots k$, e daí $\dim \mathcal{C}_i = d_i^2$ e $d = d_1^2 + \cdots + d_k^2$.

O resultado a seguir mostra que não é necessário requerer que as álgebras $\mathcal{C}_i$'s que determinam $d = d(\mathcal{A})$ sejam tomadas duas a duas distintas.

Lema 3.3.2 *Suponhamos que $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_m$ sejam subálgebras simples do conjunto $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_n\}$, não necessariamente distintas entre si, tais que*

$$\mathcal{A}_1 J \mathcal{A}_2 J \cdots J \mathcal{A}_{m-1} J \mathcal{A}_m \neq \{0\}. \tag{3.5}$$

Então $\dim(\mathcal{A}_1 + \cdots + \mathcal{A}_m) \leq d$.

Demonstração: Observando que se $j \in \{1, \ldots, n\}$, então $J\mathcal{B}_j J \subseteq J$, pois J é um ideal bilateral de $\mathcal{A}$, temos que $J\mathcal{A}_i J \subseteq J$ (pois J é ideal), para todo $i = 1, \ldots, m$, uma vez que $\mathcal{A}_i \in \{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n\}$. Logo, caso $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_j$ em (3.5), para $i < j$, temos que

$$\begin{aligned}\{0\} &\neq \mathcal{A}_1 J \mathcal{A}_2 J \cdots J \mathcal{A}_i J \mathcal{A}_{i+1} J \cdots J \mathcal{A}_{j-1} J \mathcal{A}_j J \mathcal{A}_{j+1} J \cdots J \mathcal{A}_{m-1} J \mathcal{A}_m \\ &\subseteq \mathcal{A}_1 J \mathcal{A}_2 J \cdots J \mathcal{A}_{j-1} J \mathcal{A}_{j+1} J \cdots J \mathcal{A}_{m-1} J \mathcal{A}_m.\end{aligned}$$

Além disso, temos que $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \cdots + \mathcal{A}_m = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \cdots + \mathcal{A}_{j-1} + \mathcal{A}_{j+1} + \cdots + \mathcal{A}_m$, visto que $\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_j = A_i$. Dessa forma, podemos tomar subálgebras $\mathcal{A}_{i_1}, \ldots, \mathcal{A}_{i_l}$ em $\{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m\}$ duas a duas distintas tais que

$$\{0\} \neq \mathcal{A}_1 J \mathcal{A}_2 J \cdots J \mathcal{A}_{m-1} J \mathcal{A}_m \subseteq \mathcal{A}_{i_1} J \mathcal{A}_{i_2} J \cdots J \mathcal{A}_{i_{l-1}} J \mathcal{A}_{i_l}$$

e $\mathcal{A}_1 + \cdots + \mathcal{A}_m = \mathcal{A}_{i_1} + \cdots + \mathcal{A}_{i_l}$. Portanto,

$$\dim(\mathcal{A}_1 + \cdots + \mathcal{A}_m) = \dim(\mathcal{A}_{i_1} + \cdots + \mathcal{A}_{i_l}) \leq d(\mathcal{A}) = d.$$

■

Mostraremos agora que um polinômio multilinear alternante num conjunto de variáveis Y, com $|Y| > d$, se anulará se substituirmos suas variáveis alternantes por elementos da subálgebra semissimples $\mathcal{B}$ e suas outras variáveis por elementos quaisquer de $\mathcal{A}$.

Lema 3.3.3 *Seja $f = f(x_1, \ldots, x_{d+1}, y_1, \ldots, y_t)$ um polinômio multilinear que é alternante nas variáveis $x_1, \ldots, x_{d+1}$, e $t \geq 0$. Se substituirmos $x_1, \ldots, x_{d+1}$ por elementos da subálgebra semissimples $\mathcal{B}$ e $y_1, \ldots, y_t$ por elementos arbitrários de $\mathcal{A}$, então o valor de f será zero.*

Demonstração: Como f é multilinear, basta mostrar que o resultado vale para uma base de $\mathcal{A}$. Fixe alguma base de $\mathcal{A}$ como sendo a união de bases de $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ e J. Como $\mathcal{B}_i$ é um ideal bilateral de $\mathcal{B}$, para $i = 1, 2, \ldots n$, temos que $\mathcal{B}_i\mathcal{B}_j = \{0\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ e $i \neq j$, desde que $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \{0\}$. Dessa forma, se substituirmos todas as variáveis de f por elementos básicos correspondentes à parte semissimples $\mathcal{B}$, então o valor de f será zero, a menos que tais elementos pertençam à mesma componente simples $\mathcal{B}_i$ de $\mathcal{B}$, para algum $i = 1, 2, \ldots, n$. Observe ainda que $d+1 > \max\{\dim_{\mathcal{K}} \mathcal{B}_i \mid i = 1, 2, \ldots n\}$ e assim, por f ser alternante nas variáveis $x_1, \ldots, x_{d+1}$, então $f = 0$ (ver Proposição 1.4.14), caso sejam substituídas as variáveis de f por elementos de uma mesma componente simples de $\mathcal{B}$. Assim sendo, só será possível encontrar um valor não nulo para f se ao menos uma das variáveis de f for substituída por algum elemento de J e se as variáveis alternadas $x_1, \ldots, x_{d+1}$ forem substituídas por elementos básicos não todos de uma mesma componente simples de $\mathcal{B}$.

Dessa forma, tomemos os distintos elementos básicos $a_1 \in \mathcal{A}_1, \ldots, a_{d+1} \in \mathcal{A}_{d+1}$, onde $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{d+1}$ são componentes simples pertencentes ao conjunto $\{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n\}$, não necessariamente duas a duas distintas. Fazendo $x_i = a_i$, para todo $i = 1, \ldots, d+1$, desde que $\mathcal{B}_i\mathcal{B}_j = \{0\}$, para $i \neq j$, segue-se que os monômios de f avaliados nos a_i's e em outros elementos de $\mathcal{A}$ (sempre com pelo menos um elemento de J) estão em subespaços dos seguintes tipos:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{A}_{i_1} J \mathcal{A}_{i_2} J \cdots J \mathcal{A}_{i_{m-1}} J \mathcal{A}_{i_m} \quad , & J \mathcal{A}_{i_1} J \mathcal{A}_{i_2} J \cdots J \mathcal{A}_{i_{m-1}} J \mathcal{A}_{i_m} \quad , \\ J \mathcal{A}_{i_1} J \mathcal{A}_{i_2} J \cdots J \mathcal{A}_{i_{m-1}} J \mathcal{A}_{i_m} J \quad , & \mathcal{A}_{i_1} J \mathcal{A}_{i_2} J \cdots J \mathcal{A}_{i_{m-1}} J \mathcal{A}_{i_m} J \quad , \end{array} \tag{3.6}$$

onde $\mathcal{A}_{i_1}, \ldots, \mathcal{A}_{i_m}$ são subálgebras duas a duas distintas do conjunto $\{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{d+1}\}$. Observe ainda que

$$\mathcal{A}_{i_1} + \mathcal{A}_{i_2} + \cdots + \mathcal{A}_{i_m} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \cdots + \mathcal{A}_{d+1},$$

pois $\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_j = \mathcal{A}_i$ se $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_j$. Logo, desde que o conjunto $\{a_1, \ldots, a_{d+1}\}$ é LI, por hipótese de construção, segue do fato que $\dim(\langle a_i \rangle) = 1$, para todo $i = 1, 2, \ldots, d+1$, onde $\langle a_i \rangle$ é o subespaço de $\mathcal{A}_i$ gerado por a_i, que

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{A}_{i_1} + \mathcal{A}_{i_2} + \cdots + \mathcal{A}_{i_m}) &= \dim(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \cdots + \mathcal{A}_{d+1}) \\ &\geq \dim(\langle a_1 \rangle + \cdots + \langle a_{d+1} \rangle) \\ &\geq \dim(\langle a_1 \rangle) + \cdots + \dim(\langle a_{d+1} \rangle) = d+1. \end{aligned}$$

Mas, pelo Lema 3.3.2, devemos ter que os produtos em (3.6) são iguais a zero.

Portanto, f se anula em todas as possibilidades existentes, e com isso temos o resultado. ■

Uma importante consequência do Lema 3.3.3 é a seguinte.

Lema 3.3.4 *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra descrita acima e $J^q = \{0\}$, para algum $q \geq 0$. Então, para todo $f \in \mathcal{Q}_{d+1,q}$, $f \equiv 0$ é uma identidade para $\mathcal{A}$.*

Demonstração: Tomando um polinômio $f \in \mathcal{Q}_{d+1,q}$, temos que f contêm q conjuntos de variáveis alternantes, onde cada conjunto consiste de $d+1$ variáveis. Pelo Lema 3.3.3, se avaliarmos f em $\mathcal{A}$ de forma que pelo menos um desses conjuntos de variáveis alternantes seja substituído por elementos da subálgebra semissimples $\mathcal{B}$, então o valor de f será zero.

Por outro lado, suponha que em cada conjunto de variáveis alternantes, pelo menos uma variável seja substituída por algum elemento de J. Como J é um ideal bilateral de $\mathcal{A}$, então em cada monômio de f teremos pelo menos q elementos de J. Portanto, como $J^q = \{0\}$, devemos ter $f \equiv 0$ em $\mathcal{A}$. ■

O teorema dado a seguir nos fornecerá uma ferramenta básica para determinar uma melhor limitação inferior para as codimensões de uma álgebra $\mathcal{A}$. Antes, daremos a definição de *polinômio central* para uma álgebra.

Definição 3.3.5 *Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathcal{K}$-álgebra cujo centro $Z(\mathcal{A})$ é não trivial, isto é, $Z(\mathcal{A}) \neq \{0\}$. Dizemos que um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{K}\langle X\rangle$ é um* **polinômio central** *para $\mathcal{A}$ se satisfaz as seguintes condições:*

i) para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$, $f(a_1, \ldots, a_n) \in Z(\mathcal{A})$;

ii) $f \notin Id(\mathcal{A})$;

iii) $f(0, \ldots, 0) = 0$, ou seja, o termo constante de f é nulo.

Observe que se $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{K}\langle X\rangle$ é um polinômio central para $\mathcal{A}$ então o polinômio

$$g = g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = [f(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}]$$

é uma identidade polinomial de $\mathcal{A}$.

Teorema 3.3.6 *Considere $M_n(\mathcal{K})$ a álgebra das matrizes $n \times n$ sobre um corpo $\mathcal{K}$ de característica zero. Então o polinômio definido por*

$$\begin{aligned} L_n(x; y) =& f(x_1, \ldots, x_{n^2}, y_1, \ldots, y_{n^2}) \\ =& \sum_{\sigma,\tau \in S_{n^2}} (-1)^{\sigma\tau} x_{\sigma(1)} y_{\tau(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} y_{\tau(2)} y_{\tau(3)} y_{\tau(4)} x_{\sigma(5)} \cdots \\ & \cdots x_{\sigma(9)} y_{\tau(5)} \cdots y_{\tau(9)} \cdots x_{\sigma(n^2-2n+2)} \cdots x_{\sigma(n^2)} y_{\tau(n^2-2n+2)} \cdots y_{\tau(n^2)} \end{aligned}$$

é central para $M_n(\mathcal{K})$.

Demonstração: Ver [F], Teorema 16, página 106. ■

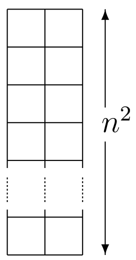
Uma outra demonstração poderá ser encontrada em [GZ2], Teorema 5.7.4, página 134. Note que o polinômio $L_n(x; y)$ é multilinear e alternante em cada conjunto de variáveis $\{x_1, \ldots, x_{n^2}\}$ e $\{y_1, \ldots, y_{n^2}\}$.

Dadas uma partição μ de algum inteiro positivo m e uma tabela de Young T_μ, consideremos os elementos

$$\overline{C}_{T_\mu} = \sum_{\sigma \in C_{T_\mu}} (-1)^\sigma \sigma \qquad e \qquad \overline{R}_{T_\mu} = \sum_{\tau \in R_{T_\mu}} \tau$$

da álgebra de grupo $\mathcal{K}S_m$. Temos que C_{T_μ} e R_{T_μ} são os estabilizadores de colunas e de linhas (definidos no Capítulo 2) da tabela T_μ, respectivamente.

Considere agora a partição $\lambda = (2^{n^2})$ referente ao diagrama retangular $n^2 \times 2$, representado pela figura



e considere também uma tabela de Young T_λ da forma λ, na qual a primeira coluna corresponde aos x_i's e a segunda corresponde aos y_j's. Não é difícil ver que

$$L_n(x;y) = \overline{C}_{T_\lambda}(x_1y_1x_2x_3x_4y_2y_3y_4\cdots x_{(n-1)^2+1}\cdots x_{n^2}y_{(n-1)^2+1}\cdots y_{n^2}).$$

Demostraremos agora o principal resultado desse trabalho de dissertação.

Teorema 3.3.7 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo $\mathcal{K}$ de característica zero. Então, para alguns inteiros positivos a_1, a_2, r_1, r_2 e d, temos que*

$$a_1 n^{r_1} d^n \leq c_n(\mathcal{A}) \leq a_2 n^{r_2} d^n,$$

para n suficientemente grande.

Demonstração: Pelo Teorema 3.1.7, podemos assumir que $\mathcal{K}$ é um corpo algebricamente fechado. Seja $d = d(\mathcal{A})$ o inteiro definido em (3.4). Os Lemas 3.3.1 e 3.3.4 nos garantem que existem inteiros positivos C, r tais que $c_n(\mathcal{A}) \leq Cn^r d^n$. Vamos a partir de agora trabalhar para demonstrar a existência de uma similar limitação inferior.

Consideremos uma família de $\mathcal{K}$-subálgebras simples $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$ de $\mathcal{B}$ satisfazendo (3.3), onde $\mathcal{A} = \mathcal{B} + J(\mathcal{A})$ é a decomposição dada pelo Teorema de Wedderburn-Malcev, tais que $\dim(\mathcal{C}_1 + \cdots + \mathcal{C}_k) = d$. Para cada $i = 1, \ldots, k$, desde que $\mathcal{K}$ é algebricamente fechado, e $\mathcal{A}$ tem dimensão finita, segue do Teorema 1.3.6 que $\mathcal{C}_i$ é isomorfo a álgebra de matrizes $M_{D_i}(\mathcal{K})$, para algum $D_i \in \mathbb{N}$. Note que $\dim \mathcal{C}_i = D_i^2$ e $\mathcal{C}_i$ é unitária, para todo $i = 1, \ldots, k$. Escrevamos $\dim \mathcal{C}_i = d_i$, $i = 1, \ldots, k$, e daí $d_i = D_i^2$.

Para cada $i = 1, \ldots, k$, considere $f_i(x_1, \ldots, x_{d_i}, y_1, \ldots, y_{d_i})$ o polinômio central para $\mathcal{A}$ determinado no Teorema 3.3.6. Relembramos que f_i é alternante em cada conjunto de variáveis $\{x_1, \ldots, x_{d_i}\}$ e $\{y_1, \ldots, y_{d_i}\}$, separadamente, além de ser multilinear.

Desde que f_i é central para $\mathcal{C}_i$, temos que existem elementos $a_1^i, \ldots, a_{d_i}^i, b_1^i, \ldots, b_{d_i}^i \in \mathcal{C}_i$ tais que

$$f_i(a_1^i, \ldots, a_{d_i}^i, b_1^i, \ldots, b_{d_i}^i) = 1_i \quad ,$$

onde 1_i é a unidade da álgebra $\mathcal{C}_i$. De fato, tomemos $A_1^i, \ldots, A_{d_i}^i, B_1^i, \ldots, B_{d_i}^i \in M_{D_i}(\mathcal{K})$ tais que

$$f_i(A_1^i, \ldots, A_{d_i}^i, B_1^i, \ldots, B_{d_i}^i) = \lambda I_{D_i} \neq 0 \quad ,$$

para algum $\lambda \in \mathcal{K} - \{0\}$, onde I_{D_i} é a matriz unitária de $M_{D_i}(\mathcal{K})$. Logo, segue do fato de f_i ser multilinear que

$$\begin{aligned} f_i(\lambda^{-1}A_1^i, A_2^i, \ldots, A_{d_i}^i, B_1^i, \ldots, B_{d_i}^i) &= \lambda^{-1} f_i(A_1^i, \ldots, A_{d_i}^i, B_1^i, \ldots, B_{d_i}^i) \\ &= \lambda^{-1}\lambda I_{D_i} = I_{D_i} \quad . \end{aligned}$$

Agora, tomando-se $a_1^i, a_2^i \cdots, a_{d_i}^i, b_1^i, \ldots, b_{d_i}^i$ em $\mathcal{C}_i$ como sendo os elementos (via isomorfismo de álgebras) $\lambda^{-1}A_1^i, A_2^i, \ldots, A_{d_i}^i, B_1^i, \ldots, B_{d_i}^i$, respectivamente, temos que

$$f_i(a_1^i, \ldots, a_{d_i}^i, b_1^i, \ldots, b_{d_i}^i) = 1_i.$$

Definimos o polinômio

$$h_m(x_1, \ldots, x_{m^2}; y_1, \ldots, y_{m^2}) = x_1 y_1 x_2 x_3 x_4 y_2 y_3 y_4 \cdots x_{(m-1)^2+1} \cdots x_{m^2} y_{(m-1)^2+1} \cdots y_{m^2}$$

Para inteiros positivos i, j, k, l, considere

$$\begin{aligned} &x_1^1, \ldots, x_{d_i}^1, x_1^2, \ldots, x_{d_i}^2, \ldots, x_1^j, \ldots, x_{d_i}^j \\ &y_1^1, \ldots, y_{d_i}^1, y_1^2, \ldots, y_{d_i}^2, \ldots, y_1^j, \ldots, y_{d_i}^j \\ &z_1, \ldots, z_k \qquad e \qquad u_1, \ldots, u_l \end{aligned}$$

variáveis distintas. Observe que, para todo $t \geq 1$,

$$\begin{aligned} f_i(x_1^1, \ldots, &x_{d_i}^1, y_1^1, \ldots, y_{d_i}^1) \cdots f_i(x_1^t, \ldots, x_{d_i}^t, y_1^t, \ldots, y_{d_i}^t) = \\ &= \overline{C}_{T_{\mu_i}} \left(h_{d_i}(x_1^1, \ldots, x_{d_i}^1; y_1^1, \ldots, y_{d_i}^1) \cdots h_{d_i}(x_1^t, \ldots, x_{d_i}^t; y_1^t, \ldots, y_{d_i}^t) \right), \end{aligned}$$

onde T_{μ_i} é uma conveniente tabela da forma $\mu_i = (2t^{d_i})$, ou seja, D_{μ_i} é um retângulo de d_i linhas e $2t$ colunas.

Agora, para todo $t \geq 1$, considere o polinômio

$$
\begin{aligned}
g_t =& g_t(x_1^1, \ldots, x_{d_1}^1, y_1^1, \ldots, y_{d_1}^1, x_1^2, \ldots, x_{d_1}^2, y_1^2, \ldots, y_{d_1}^2, \cdots \\
& \cdots, x_1^{tk}, \ldots, x_{d_k}^{tk}, y_1^{tk}, \ldots, y_{d_k}^{tk}, z_1, \ldots, z_k, u_1, \ldots, u_{k-1}) \\
=& f_{d_1}(x_1^1, \ldots, x_{d_1}^1, y_1^1, \ldots, y_{d_1}^1) \cdots f_{d_1}(x_1^t, \ldots, x_{d_1}^t, y_1^t, \ldots, y_{d_1}^t) z_1 u_1 \\
& f_{d_2}(x_1^{t+1}, \ldots, x_{d_2}^{t+1}, y_1^{t+1}, \ldots, y_{d_2}^{t+1}) \cdots f_{d_2}(x_1^{2t}, \ldots, x_{d_2}^{2t}, y_1^{2t}, \ldots, y_{d_2}^{2t}) z_2 u_2 \\
& f_{d_3}(x_1^{2t+1}, \ldots, x_{d_3}^{2t+1}, y_1^{2t+1}, \ldots, y_{d_3}^{2t+1}) \cdots f_{d_3}(x_1^{3t}, \ldots, x_{d_3}^{3t}, y_1^{3t}, \ldots, y_{d_3}^{3t}) z_3 u_3 \\
& \vdots \\
& f_{d_{k-1}}(x_1^{(k-2)t+1}, \ldots, y_{d_{k-1}}^{(k-2)t+1}) \cdots f_{d_{k-1}}(x_1^{(k-1)t}, \ldots, y_{d_{k-1}}^{(k-1)t}) z_{k-1} u_{k-1} \\
& f_{d_k}(x_1^{(k-1)t+1}, \ldots, y_{d_k}^{(k-1)t+1}) \cdots f_{d_k}(x_1^{kt}, \ldots, y_{d_k}^{kt}) z_k \quad .
\end{aligned}
$$

Denote por $\overline{g_t}$, $t \geq 1$, a soma alternada

$$\overline{g_t} = \left(\sum_{\sigma_1, \tau_1 \in S_d} (-1)^{\sigma_1 \tau_1} \right) \cdots \left(\sum_{\sigma_t, \tau_t \in S_d} (-1)^{\sigma_t \tau_t} \right) g_t \quad ,$$

onde σ_i age nas variáveis $x_1^i, \ldots, x_{d_1}^i, x_1^{t+i}, \ldots, x_{d_2}^{t+i}, \ldots, x_1^{(k-1)t+i}, \ldots, x_{d_k}^{(k-1)t+i}$ e τ_i age nas variáveis $y_1^i, \ldots, y_{d_1}^i, y_1^{t+i}, \ldots, y_{d_2}^{t+i}, \ldots, y_1^{(k-1)t+i}, \ldots, y_{d_k}^{(k-1)t+i}$, $i = 1, \ldots, t$. Temos que o conjunto das variáveis x_i^j e o conjunto das variáveis y_i^j em $\overline{g_t}$ estão divididos em $2t$ conjuntos distintos com $d = d_1 + \cdots + d_k$ variáveis alternantes em cada conjunto. Dessa forma, observe que o grau total de $\overline{g_t}$ é igual a $2dt+2k-1$. Simplesmente falando, $\overline{g_t}$ pode ser construído de uma tabela obtida através do empilhamento das tabelas de Young $T_{\mu_1}, \ldots, T_{\mu_t}$, colando-se uma sobre a outra nesta ordem.

Pela definição das subálgebras $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$, segue-se que existem $r_1, \ldots, r_{k-1} \in J$, $c_1 \in \mathcal{C}_1, \ldots, c_k \in \mathcal{C}_k$ tais que

$$c_1 r_1 c_2 r_2 \cdots r_{k-1} c_k \neq 0.$$

Dessa forma, tomemos $z_1 = c_1, \ldots, z_k = c_k$, $u_1 = r_1, \ldots, u_{k-1} = r_{k-1}$ e

$$
\begin{aligned}
x_i^{(j-1)t+1} &= x_i^{(j-1)t+2} = \cdots = x_i^{jt} = a_i^j \quad , \\
y_i^{(j-1)t+1} &= y_i^{(j-1)t+2} = \cdots = y_i^{jt} = b_i^j \quad ,
\end{aligned}
$$

onde $t \geq 1, j = 1, \ldots, k, i = 1, \ldots, d_j$. Como $a_i^j, b_i^j, c_j \in \mathcal{C}_j$ e $\mathcal{C}_{j_1}\mathcal{C}_{j_2} = \{0\}$, para $j_1 \neq j_2$, temos o seguinte valor para $\overline{g_t}$:

$$\underbrace{(f_1(a_1^1,\ldots,a_{d_1}^1,b_1^1,\ldots,b_{d_1}^1))\cdots(f_1(a_1^1,\ldots,a_{d_1}^1,b_1^1,\ldots,b_{d_1}^1))}_{t-termos}c_1r_1$$

$$\underbrace{(f_2(a_1^2,\ldots,a_{d_2}^2,b_1^2,\ldots,b_{d_2}^2))\cdots(f_2(a_1^2,\ldots,a_{d_2}^2,b_1^2,\ldots,b_{d_2}^2))}_{t-termos}c_2r_2$$

$$\vdots$$

$$c_{k-1}r_{k-1}\underbrace{(f_k(a_1^k,\ldots,b_{d_k}^k))\cdots(f_k(a_1^k,\ldots,b_{d_k}^k))}_{t-termos}c_k =$$

$$= (f_1(a_1^1,\ldots,b_{d_1}^1))^t c_1r_1(f_2(a_1^2,\ldots,b_{d_2}^2))^t c_2r_2\cdots c_{k-1}r_{k-1}(f_k(a_1^k,\ldots,b_{d_k}^k))^t c_k =$$

$$= 1_1^t c_1r_1 1_2^t c_2r_2\cdots r_{k-1}1_k^t c_k = (1_1c_1)r_1(1_2c_2)r_2\cdots r_{k-1}(1_kc_k) =$$

$$= c_1r_1c_2r_2\cdots r_{k-1}c_k \neq 0 \quad .$$

Dessa forma, $\overline{g_t}$ não é uma identidade polinomial de $\mathcal{A}$. Além disso, para todo $s \geq 1$, se $w_1,\ldots,w_s$ são novas variáveis, então segue que o polinômio $\overline{g_t}w_1\cdots w_s$ não é uma identidade para $\mathcal{A}$. Para provar isto, basta substituir os w_i's por 1_k, e assim $\overline{g_t}w_k\cdots w_s$ assumirá o valor $c_1r_1c_2r_2\cdots r_{k-1}c_k\underbrace{1_k\cdots 1_k}_{s\ termos} = c_1r_1c_2r_2\cdots r_{k-1}c_k$, uma vez que $c_k \in \mathcal{C}_k$ e 1_k é a unidade de $\mathcal{C}_k$.

Para todo $N \geq 2d$, considere o espaço dos polinômios multilineares de grau N, que é denotado por $P_N = P_N(x_1,\ldots,x_N)$. Dividindo $N-2k+1$ por $2d$, desde que $k \leq d$, podemos escrever $N = 2td+2k-1+s$, para algum inteiro $t \geq 1$ e algum $0 \leq s \leq 2d-1$.

Fixemos $n = 2td$. Note então que o polinômio

$$w = \overline{g_t}(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+2k-1})x_{n+2k}\cdots x_N \in P_N$$

não pertence ao $Id(\mathcal{A})$, o T-ideal das identidades polinomiais de $\mathcal{A}$.

Observando que $N \geq 2td = n$, então podemos olhar S_n como um subgrupo de S_N, visto que S_n está imerso em S_N, bastando perceber que uma permutação $\sigma \in S_n \subseteq S_N$ é tal que deixa fixo os elementos $n+1,\ldots,N$. Sendo assim, como P_N é um S_N-módulo, podemos olhar P_N como um S_n-módulo.

Seja M o S_n-módulo de $P_N(\mathcal{A}) = \dfrac{P_N}{P_N \cap Id(\mathcal{A})}$ gerado por $\overline{w} = w + (P_N \cap Id(\mathcal{A}))$, ou seja,

$$M = \mathcal{K}S_n\overline{w} = \frac{\mathcal{K}S_nw + (P_N \cap Id(\mathcal{A}))}{P_N \cap Id(\mathcal{A})}.$$

Note que $M \neq \{0\}$, pois $w \in P_N(\mathcal{A}) - \{0\}$.

Vamos mostrar que a dimensão de M é maior ou igual a $Cn^r d^n$, para algumas constantes $C, r > 0$.

Baseado no comentário feito logo após a Proposição 2.1.16, podemos concluir que existem partições $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ de n e tabelas de Young $T_{\lambda_1}, T_{\lambda_2}, \ldots, T_{\lambda_m}$ tais que

$$M = \mathcal{K}S_n\overline{w} = \mathcal{K}S_n e_{T_{\lambda_1}}(\overline{w}) \oplus \mathcal{K}S_n e_{T_{\lambda_2}}(\overline{w}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{K}S_n e_{T_{\lambda_m}}(\overline{w}), \tag{3.7}$$

com $e_{T_{\lambda_i}}(\overline{w}) \neq 0$ em $P_N(\mathcal{A})$, ou seja, $e_{T_{\lambda_i}}(w) \notin Id(\mathcal{A})$.

Suponhamos agora que para alguma $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$, a altura $h(T_\lambda)$ de T_λ é maior que d e o seu diagrama correspondente D_λ contém ao menos q caixas abaixo das d primeiras linhas, onde $J^q = \{0\}$. Desde que $e_{T_\lambda} = \overline{R}_{T_\lambda}\overline{C}_{T_\lambda}$ é um elemento essencialmente idempotente (isto é, $e_{T_\lambda}^2 = \gamma e_{T_\lambda}$, $\gamma \in \mathcal{K} - \{0\}$), temos que $\overline{C}_{T_\lambda} e_{T_\lambda} \neq 0$. Daí, a identidade $e_{T_\lambda}(w) \equiv 0$ é equivalente à identidade

$$w' = \overline{C}_{T_\lambda} e_{T_\lambda}(w) \equiv 0.$$

De fato, é imediato que $w' \in \langle e_{T_\lambda}(w)\rangle_T$. Por outro lado,

$$e_{T_\lambda}(w) = \gamma^{-1} e_{T_\lambda}^2(w) = \gamma^{-1}\overline{R}_{T_\lambda}(\overline{C}_{T_\lambda} e_{T_\lambda}(w)) = \gamma^{-1}\overline{R}_{T_\lambda} w' \in \langle w'\rangle_T.$$

Portanto, $\langle w'\rangle_T = \langle e_{T_\lambda}(w)\rangle_T$.

Necessitamos avaliar w' em $\mathcal{A}$. Visto que $e_{T_\lambda}(w)$ é um polinômio multilinear em $x_1, \ldots, x_N$, temos que w' é combinação linear de polinômios do tipo $\overline{C}_{T_\lambda}(x_{i_1} \cdots x_{i_N})$. Dessa forma, para provar que $w' \equiv 0$ é uma identidade em $\mathcal{A}$, é suficiente mostrar que $f = \overline{C}_{T_\lambda}(x_1 \cdots x_N)$ se anula em $\mathcal{A}$. Observando que as s primeiras colunas de λ possuem mais que d caixas, considere $\lambda' = (d + r_1, \ldots, d + r_s, \lambda'_{s+1}, \ldots, \lambda'_m)$ como sendo a partição conjugada de λ. Aqui, $r_1 + \cdots + r_s \geq q$ e $\lambda'_{s+1}, \ldots, \lambda'_m \leq d$.

Desde que, para cada $i = 1, \ldots, s$, f é alternante em um conjunto de $d + r_i$ variáveis, pelo Lema 3.3.3, se substituirmos $d + 1$ dessas variáveis por elementos da subálgebra semissimples $\mathcal{B}$, então teremos $f = 0$. Portanto, temos que substituir nesse conjunto, ao menos, r_i elementos de J, para $i = 1, \ldots, s$. Então, fazendo essas substituições, teremos em cada monômio de f pelo menos $r_1 + \cdots + r_s \geq q$ elementos de J. Desde que J é um ideal bilateral de $\mathcal{A}$ e $J^q = \{0\}$, obteremos que f se anula em $\mathcal{A}$. De toda forma, $w' \equiv 0$ em $\mathcal{A}$ e assim $e_{T_\lambda}(w) \in Id(\mathcal{A})$, contradizendo assim (3.7).

Logo, para toda $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$, temos $h(D_\lambda) \leq d$ ou $h(D_\lambda) > d$ e D_λ têm até $q-1$ caixas abaixo das d primeiras linhas.

Suponhamos agora que o comprimento $l(T_\lambda) = \lambda_1$ de T_λ é maior que $2t$. Observe que, pela definição de w, todas as variáveis $x_1, \ldots, x_n$ em $\sigma(w)$ podem ainda ser separadas em $2t$ conjuntos de d variáveis alternantes (cada um), para todo $\sigma \in S_n$. Como $\overline{R_{T_\lambda}} = \overline{R_{T_\lambda}}\gamma$, para qualquer $\gamma \in R_{T_\lambda}$, temos que a ação de $\overline{R_{T_\lambda}}$ dá uma simetrização em pelo menos $2t+1$ variáveis, que ainda são alternantes em $2t$ conjuntos separados. Existem então duas variáveis que pertencem a um desses $2t$ conjuntos de variáveis alternantes e tais que a transposição γ_1 delas pertence a R_{T_λ}. Logo, devemos ter $\overline{R_{T_\lambda}}\sigma(w) = 0$, visto que

$$(\overline{R_{T_\lambda}}\gamma_1)\sigma(w)) = \overline{R_{T_\lambda}}\sigma(w) \quad e \quad \overline{R_{T_\lambda}}(\gamma_1\sigma(w)) = -\overline{R_{T_\lambda}}\sigma(w),$$

acarretando que $\overline{R_{T_\lambda}}\sigma(w) = -\overline{R_{T_\lambda}}\sigma(w)$, donde $\overline{R_{T_\lambda}}\sigma(w) = 0$. Dessa forma, como σ é arbitrária, temos que

$$\begin{aligned} e_{T_\lambda}(w) &= \overline{R_{T_\lambda}C_{T_\lambda}}(w) \\ &= \sum_{\sigma \in C_{T_\lambda}} (-1)^\sigma \overline{R_{T_\lambda}}\sigma(w) \\ &= \sum_{\sigma \in C_{T_\lambda}} (-1)^\sigma 0 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, observe que deve existir um submódulo irredutível de M isomorfo a $\mathcal{K}S_n e_{T_\lambda}$ com $l(T_\lambda) \leq 2t$. Neste caso, devemos ter no mínimo d linhas em D_λ, com até $2t$ caixas em cada, uma vez que $n = 2td$. Além disso, $h(D_\lambda) \leq d$ ou $h(D_\lambda) > d$ e D_λ tem até $q-1$ caixas abaixo da d-ésima linha. No primeiro caso devemos ter $\lambda = ((2t)^d)$; no segundo, sendo $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d, \lambda_{d+1}, \ldots)$, devemos ter

$$2t - q + 1 \leq \lambda_d \leq 2t.$$

Assim fica garantido que D_λ contém o retângulo $D_\mu = D_{((2t-q+1)^d)}$ e portanto $d_\lambda \geq d_\mu$ (ver Proposição 2.3.6). Pela Proposição 2.3.7, $d_\mu \underset{n\to\infty}{\cong} C(n-dq+d)^r d^{n-qd+d}$, para algumas constantes $C, r > 0$, desde que $\mu \vdash d(2t-q+1) = n - dq + d$.

Observando que $d - qd$ é constante, tomemos $C_1 = Cd^{d-dq}$. Temos $C_1 > 0$ e $C(n-dq+d)^r d^{n-qd+d} = C_1(n-qd+d)^r d^n$. Ademais, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-dq+d)^r}{n^r} = 1$ e daí temos

$C_1(n-qd+d)^r d^n \underset{n\to\infty}{\cong} C_1 n^r d^n$. Assim $d_\mu \underset{n\to\infty}{\cong} C_1 n^r d^n$. Logo, para n suficientemente grande, $\dfrac{d_\mu}{C_1 n^r d^n} \geq 1/2$ e, consequentemente,

$$\dim M \geq d_\lambda \geq d_\mu \geq C_2 n^r d^n,$$

onde $C_2 = C_1/2$.

Lembrando que $N = 2td + 2k - 1 + s$, onde $t \in \mathbb{N}$ e $0 \leq s \leq 2d-1$, e $n = 2td$, temos que $n = N - 2k - s + 1$ e que $n \to \infty$ quando $N \to \infty$. Ademais, como $-s \geq 1 - 2d$, temos $-2k - s + 1 \geq 2 - 2d - 2k$ e assim

$$C_2 n^r d^n = C_2(N-2k-s+1)^r d^{N-2k-s+1} \geq C_2(N-2k-s+1)^r d^{N+2-2d-2k}.$$

Logo, $C_2 n^r d^n \geq C_3(N-2k-s+1)^r d^N$, onde $C_3 = C_2 d^{2-2d-2k}$. Como $N-n = 1-2k-s$ é uma constante, segue que $C_3(N-2k-s+1)^r d^N \underset{n\to\infty}{\cong} C_3 N^r d^N$, e assim, para N suficientemente grande, temos

$$C_3(N-2k-s+1)^r d^N \geq C_4 N^r d^N$$

onde $C_4 = C_3/2$, e assim

$$C_N(\mathcal{A}) \geq \dim M \geq C_2 n^r d^n \geq C_4 N^r d^N$$

Portanto, concluímos a demonstração do Teorema.

■

Agora daremos alguns resultados significativos à respeito do PI-expoente de $\mathcal{A}$.

Corolário 3.3.8 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo $\mathcal{K}$ de característica zero. Então $exp(\mathcal{A})$ existe e é um inteiro. Ademais, se $\mathcal{K}$ é algebricamente fechado, então $exp(\mathcal{A}) = \dim_{\mathcal{K}} G$, para alguma apropriada subálgebra G semissimples de $\mathcal{A}$.*

Demonstração: Pelo Teorema 3.3.7, existem inteiros positivos a_1, a_2, r_1, r_2 e d tais que

$$a_1 n^{r_1} d^n \leq c_n(\mathcal{A}) \leq a_2 n^{r_2} d^n. \tag{3.8}$$

Calculando-se os expoentes inferior e superior de $\mathcal{A}$, segue-se das desigualdades em (3.8) que

$$\underline{exp}(\mathcal{A}) = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathcal{A})} \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 n^{r_1} d^n} \geq d \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1}\sqrt[n]{n^{r_1}} = d$$

e

$$\overline{exp}(\mathcal{A}) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathcal{A})} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_2 n^{r_2} d^n} \leq d \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_2}\sqrt[n]{n^{r_2}} = d$$

Logo, $\overline{exp}(\mathcal{A}) \leq d \leq \underline{exp}(\mathcal{A})$, e portanto $\overline{exp}(\mathcal{A}) = \underline{exp}(\mathcal{A})$, donde concluímos que $exp(\mathcal{A})$ existe e é igual a d, ou seja, $exp(\mathcal{A}) = d$.

Suponhamos agora que $\mathcal{K}$ é um corpo algebricamente fechado. Pelo Teorema de Wedderburn-Malcev (Teorema 1.3.9), temos que existem $\mathcal{K}$-subálgebras simples $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k$ de $\mathcal{A}$ de forma que

$$\mathcal{A} = (\mathcal{B}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_k) + J(\mathcal{A}).$$

Como $\mathcal{K}$ é algebricamente fechado, existem $i_1, \ldots i_m \in \{1, \ldots, k\}$ tais que

$$d = d(\mathcal{A}) = \dim_{\mathcal{K}}(\mathcal{B}_{i_1} + \cdots + \mathcal{B}_{i_m}).$$

Considere $G = \mathcal{B}_{i_1} + \cdots + \mathcal{B}_{i_m}$. Temos que G é uma $\mathcal{K}$-subálgebra de $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \{0\}$, para todo $i \neq j$, e $\mathcal{B}_i$ é simples, $i = 1, \ldots, k$, temos que G é uma subálgebra semissimples de $\mathcal{A}$.

Por fim, note que $exp(\mathcal{A}) = d = \dim_{\mathcal{K}} G$. ■

Pelo Teorema 1.4.26, dada uma PI-álgebra $\mathcal{A}$ associativa e finitamente gerada sobre um corpo infinito $\mathcal{K}$, podemos encontrar uma $\mathcal{K}$-álgebra $\mathcal{C}$ de dimensão finita tal que $Id(\mathcal{A}) = Id(\mathcal{C})$. Isso serve de motivação para o resultado a seguir.

Corolário 3.3.9 *Se $\mathcal{A}$ é uma PI-álgebra finitamente gerada sobre $\mathcal{K}$, com* $\operatorname{char}\mathcal{K} = 0$, *então $exp(\mathcal{A})$ existe e é um inteiro.*

Demonstração: Como $char\mathcal{K} = 0$, temos que $\mathcal{K}$ é um corpo infinito, e assim estamos nas condições do Teorema 1.4.26, donde podemos tomar uma $\mathcal{K}$-álgebra $\mathcal{C}$ de dimensão finita tal que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$ são PI-equivalentes. Logo, $c_n(\mathcal{A}) = c_n(\mathcal{C})$, para todo $n > 0$. Segue do Corolário 3.3.8 que $exp(\mathcal{C})$ existe e é um inteiro. Como

$$exp(\mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathcal{A})} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathcal{C})} = exp(\mathcal{C}),$$

concluímos que $exp(\mathcal{A})$ existe e é um inteiro. ■

3.4 Computando o PI-Expoente de algumas Álgebras

Nesta última seção serão trabalhadas mais algumas consequências do Teorema 3.3.7. Serão feitas caracterizações dos PI-expoentes de álgebras simples, semissimples, não simples e centrais simples.

Antes de enunciarmos a próxima consequência do Teorema 3.3.7 relembraremos a definição de *álgebra central simples*. Recordemos que $Z(\mathcal{A})$ refere-se ao centro da álgebra $\mathcal{A}$. Dada uma álgebra $\mathcal{A}$ sobre um corpo $\mathcal{K}$, dizemos que $\mathcal{A}$ é central simples se é simples e $Z(\mathcal{A}) = \mathcal{K}$.

É um fato bem conhecido que a álgebra $M_n(\mathcal{K})$ das matrizes $n \times n$ é uma álgebra simples e que seu centro é composto pelas matrizes múltiplo-escalares da matriz identidade, isto é, $Z(M_n(\mathcal{K})) = \{\lambda I_n \mid \lambda \in \mathcal{K}\}$, onde I_n é a matriz identidade de $M_n(\mathcal{K})$. Dessa forma, $M_n(\mathcal{K})$ é uma álgebra central simples.

O resultado abaixo determina o valor de $exp(\mathcal{A})$ em termos da dimensão de uma subálgebra simples de $\mathcal{A}$, quando $\mathcal{A}$ é uma álgebra semissimples de dimensão finita.

Corolário 3.4.1 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra semissimples de dimensão finita sobre um corpo $\mathcal{K}$ de característica zero. Seja $\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$ a decomposição de $\mathcal{A}$ em soma direta de subálgebras simples. Então $exp(\mathcal{A}) = \max_i\{\dim_{Z(\mathcal{A}_i)} \mathcal{A}_i\}$.*

Demonstração: Seja $\overline{\mathcal{K}}$ o fecho algébrico de $\mathcal{K}$. Segue da Proposição 1.1.28 que

$$A \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}} = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i \right) \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\mathcal{A}_i \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}} \right).$$

Fixado i, segue do Teorema 1.3.14 que

$$\mathcal{A}_i \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}} \cong \overline{\mathcal{B}_{i1}} \oplus \cdots \oplus \overline{\mathcal{B}_{is_i}} \quad ,$$

onde $\overline{\mathcal{B}_{i1}}, \ldots, \overline{\mathcal{B}_{is_i}}$ são $\overline{\mathcal{K}}$-álgebras simples, duas a duas isomorfas (e portanto de mesma dimensão). Como $\overline{\mathcal{K}}$ é algebricamente fechado, todas são álgebras de matrizes sobre $\overline{\mathcal{K}}$ e portanto são centrais simples.

Agora, vamos mostrar que $s_i = [Z(\mathcal{A}_i) : \mathcal{K}]$. Observe que $\overline{\mathcal{B}_{ij}}$ é central, para todo

$j = 1, \ldots, s_i$. Logo, temos que

$$\begin{aligned} \dim_{\overline{\mathcal{K}}} Z(\overline{\mathcal{B}_{i1}} \oplus \cdots \oplus \overline{\mathcal{B}_{is_i}}) &= \dim_{\overline{\mathcal{K}}} Z(\overline{\mathcal{B}_{i1}}) + \cdots + \dim_{\overline{\mathcal{K}}} Z(\overline{\mathcal{B}_{is_i}}) \\ &= \underbrace{\dim_{\overline{\mathcal{K}}} \overline{\mathcal{K}} + \cdots + \dim_{\overline{\mathcal{K}}} \overline{\mathcal{K}}}_{s_i - termos} \qquad (3.9) \\ &= \underbrace{1 + \cdots + 1}_{s_i - termos} = s_i. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} [Z(\mathcal{A}_i) : \mathcal{K}] &= \dim_{\mathcal{K}} Z(\mathcal{A}_i) = \dim_{\overline{\mathcal{K}}} Z(\overline{\mathcal{A}_i}) \\ &= \dim_{\overline{\mathcal{K}}} Z(\overline{\mathcal{B}_{i1}} \oplus \cdots \oplus \overline{\mathcal{B}_{is_i}}). \end{aligned}$$

Segue-se de (3.9) e de (refeq7.1) que $[Z(\mathcal{A}_i) : \mathcal{K}] = s_i$.

Como $J(\overline{\mathcal{A}}) = \{0\}$ e $\overline{\mathcal{B}}_{ij}\overline{\mathcal{B}}_{lk} = \{0\}$, $i \neq l$ ou $j \neq k$, temos que

$$exp(\mathcal{A}) = d(\mathcal{A}) = \max_{i,j}\{\dim_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{B}_{ij}}\} = \max_{i}\{\dim_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{B}_{i1}}\},$$

uma vez que $\dim_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{B}_{i1}} = \cdots = \dim_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{B}_{is_i}}$.

Dessa forma, como

$$\begin{aligned} (\dim_{Z(\mathcal{A}_i)} \mathcal{A}_i)[Z(\mathcal{A}_i) : \mathcal{K}] &= \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{A}_i = \dim_{\overline{\mathcal{K}}}(\mathcal{A}_i \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}}) \\ &= \dim_{\overline{\mathcal{K}}}(\overline{\mathcal{B}_{i1}} \oplus \cdots \oplus \overline{\mathcal{B}_{is_i}}) = s_i \dim_{\overline{\mathcal{K}}} \overline{\mathcal{B}_{i1}} \\ &= [Z(\mathcal{A}_i) : \mathcal{K}] \dim_{\overline{\mathcal{K}}} \overline{\mathcal{B}_{i1}}, \end{aligned}$$

devemos ter $exp(\mathcal{A}) = \max_i\{\dim_{\overline{\mathcal{K}}} \overline{\mathcal{B}_{i1}}\} = \max_i\{\dim_{Z(\mathcal{A}_i)} \mathcal{A}_i\}$. ■

No Corolário 3.4.2 abaixo, daremos uma condição necessária e suficiente que determina se uma álgebra $\mathcal{A}$ é ou não central simples.

Corolário 3.4.2 *Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathcal{K}$-álgebra de dimensão finita, com* $\operatorname{char} \mathcal{K} = 0$. *Então:*

a) Se $\mathcal{A}$ não é simples, então $exp(\mathcal{A}) \leq \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{A} - 1$;

b) Se $\mathcal{A}$ é simples, então $exp(\mathcal{A}) = \dim_{Z(\mathcal{A})} \mathcal{A}$;

c) $\mathcal{A}$ é central simples sobre $\mathcal{K}$ se, e somente se,

$$exp(\mathcal{A}) = \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{A}.$$

Demonstração: a) Seja $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_r$ uma subálgebra semissimples de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} = \mathcal{B} + J$, onde J é o radical de Jacobson de $\mathcal{A}$. Note que se $\mathcal{B} = \{0\}$, isto é, $\mathcal{A} = J$, então $c_n(\mathcal{A}) = 0$, para n suficientemente grande. Logo, $exp(\mathcal{A}) = 0 \leq \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{A} - 1$.

Suponhamos $r \geq 1$. Caso $J = \{0\}$, devemos ter $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, e assim, $\mathcal{A}$ é semissimples, com $r > 1$, pois $\mathcal{A}$ é não simples. Segue do Corolário 3.4.1 que $exp(\mathcal{A}) = \max_i\{\dim_{Z(\mathcal{B}_i)} \mathcal{B}_i\}$. Seja $i_0 \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $exp(\mathcal{A}) = \dim_{Z(\mathcal{B}_{i_0})} \mathcal{B}_{i_0}$. Como $r > 1$, devemos ter que $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}_{i_0}$, e com isso, desde que $\mathcal{K} \subseteq Z(\mathcal{B}_{i_o})$, temos que

$$exp(\mathcal{A}) = \dim_{Z(\mathcal{B}_{i_0})} \mathcal{B}_{i_0} \leq \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{B}_{i_0} < \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{A}.$$

Nesse caso, $exp(\mathcal{A}) \leq \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{A} - 1$.

Considere agora o caso em que $J \neq \{0\}$. Temos então que $\dim_{\mathcal{K}} \mathcal{B} < \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{A}$, pois $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$. Como $d = d(\mathcal{A}) \leq \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{B}$, temos que

$$exp(\mathcal{A}) = d \leq \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{B} < \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{A}.$$

Também neste caso, temos que $exp(\mathcal{A}) \leq \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{A} - 1$.

Portanto, vale a desigualdade $exp(\mathcal{A}) \leq \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{A} - 1$, seja qual for a $\mathcal{K}$-álgebra $\mathcal{A}$ de dimensão finita não simples, com $\operatorname{char} \mathcal{K} = 0$.

b) Suponha que $\mathcal{A}$ seja uma álgebra simples, donde é ainda uma álgebra semissimples, com uma única componente $\mathcal{B}_i$. Segue-se Corolário 3.4.1 que

$$exp(\mathcal{A}) = \dim_{Z(\mathcal{A})} \mathcal{A}.$$

c) Suponha primeiro que $\mathcal{A}$ é uma álgebra central simples sobre $\mathcal{K}$. Logo, $Z(\mathcal{A}) = \mathcal{K}$, e daí, pelo já demonstrado item (b) deste corolário, temos que

$$exp(\mathcal{A}) = \dim_{Z(\mathcal{A})} \mathcal{A} = \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{A}.$$

Por outro lado, suponhamos que $exp(\mathcal{A}) = \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{A}$. Logo, $exp(\mathcal{A}) > \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{A} - 1$, e assim, pelo item (a) deste corolário, devemos ter que $\mathcal{A}$ é uma álgebra simples, e com isso $\mathcal{A}$ é unitária (ver Observação 1.1).

Sendo $\mathcal{A}$ uma álgebra unitária simples, temos que $\mathcal{K} \subseteq Z(\mathcal{A})$ é uma extensão de corpos. Pelo item (b) deste corolário, temos

$$\dim_{Z(\mathcal{A})} \mathcal{A} = exp(\mathcal{A}) = \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{A}.$$

Dessa forma, como $\dim_{Z(\mathcal{A})} \mathcal{A} = \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{A}$ e $\mathcal{K} \subseteq Z(\mathcal{A})$, segue-se que $\mathcal{K} = Z(\mathcal{A})$ e portanto $\mathcal{A}$ é uma álgebra central simples. ■

Capítulo 4

Álgebras com Crescimento Polinomial das Codimensões

Neste capítulo daremos duas caracterizações de álgebras que possuem crescimento polinomial das codimensões. Este capítulo tem embasamento na referência [GZ3]. Aqui, $\mathcal{K}$ denotará um corpo de característica zero.

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa. Mostraremos que $\mathcal{A}$ tem crescimento polinomial das codimensões se, e somente se, toda álgebra $\mathcal{B}$ de dimensão finita PI-equivalente a $\mathcal{A}$ tem uma decomposição em subálgebras que satisfazem duas convenientes condições. Ainda, apresentaremos outra condição necessária e suficiente para que as codimensões $c_n(\mathcal{A})$ sejam polinomialmente limitadas.

4.1 Preliminares

Nesta seção relembraremos alguns resultados que serão utilizados no decorrer deste capítulo. Tais resultados podem ser encontrados nas Seções 1.1 e 1.4 do Capítulo 1, e na Seção 3.1 do Capítulo 3. Todas as álgebras de Grassmann abaixo têm posto enumerável.

Lema 4.1.1 *Seja E a álgebra de Grassmann de dimensão infinita (como espaço vetorial) sobre $\mathcal{K}$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, $c_n(E) = 2^{n-1}$.*

Lema 4.1.2 *Toda variedade $\mathcal{V}$ (não trivial) de álgebras é gerada pela envoltória de Grassmann de alguma superálgebra de dimensão finita. Se a variedade $\mathcal{V}$ não contém* *nenhuma álgebra de Grassmann, então ela é gerada por alguma álgebra de dimensão finita.*

Lema 4.1.3 *Para toda álgebra associativa e unitária $\mathcal{A}$ são equivalentes:*

a) $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$, *onde* $\mathcal{A}_1, \cdots, \mathcal{A}_n$ *são álgebras associativas com unidade não nulas;*

b) Exitem ideais (bilaterais não triviais) $I_1, I_2, \ldots, I_n$ *de* $\mathcal{A}$ *tais que*

$$\mathcal{A} = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n;$$

c) Existem elementos $e_1, e_2, \ldots, e_n \in Z(\mathcal{A})$ $(n \geq 2)$ *tais que* $e_ie_j = 0$, *para* $i \neq j$, $e_1 + e_2 + \cdots + e_n = 1$ *e* $e_k^2 = e_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

4.2 Álgebras com Crescimento Polinomial das Codimensões

Nesta seção daremos duas condições necessárias e suficientes para que a sequência de codimensões de uma álgebra seja polinomialmente limitada.

O resultado a seguir é devido a Kemer.

Teorema 4.2.1 *Seja $\mathcal{A}$ uma PI-álgebra. Se tivermos* $c_n(\mathcal{A}) \leq an^t$, *para toda* $n \in \mathbb{N}$ *e algumas constantes* $a, t > 0$, *então existe uma álgebra $\mathcal{B}$ de dimensão finita tal que* $Id(\mathcal{A}) = Id(\mathcal{B})$.

Demonstração: Seja E uma álgebra de Grassmann de posto enumerável sobre um corpo $\mathcal{K}$. Pelo Lema 4.1.1, temos que $c_n(E) = 2^{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, para todo n suficientemente grande, $c_n(\mathcal{A}) < c_n(E)$, uma vez que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n-1}}{an^t} = \infty$. Logo, $Id(\mathcal{A}) \nsubseteq Id(E)$, e assim $E \notin var(\mathcal{A})$, onde $var(\mathcal{A})$ é a variedade gerada por $\mathcal{A}$. Concluímos que $var(\mathcal{A})$ não contém nenhuma álgebra de Grassmann, uma vez que E foi tomada arbitrariamente de posto enumerável, e o ideal de identidades de qualquer álgebra de Grassmann de dimensão finita contém $Id(E)$. Sendo $\mathcal{V} = var(\mathcal{A})$, temos que $Id(\mathcal{A}) = Id(\mathcal{V})$. Dessa forma, segue do Lema 4.1.2 que existe uma álgebra $\mathcal{B}$ de dimensão finita tal que $Id(\mathcal{B}) = Id(\mathcal{V}) = Id(\mathcal{A})$. ∎

Relembrando que a n-ésima codimensão de $\mathcal{A}$ não se altera caso "estendamos" o corpo base $\mathcal{K}$ (ver Teorema 3.1.7), podemos assumir, ao estudar as propriedades de $c_n(\mathcal{A})$, que $\mathcal{K}$ é um corpo algebricamente fechado.

Teorema 4.2.2 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado $\mathcal{K}$. Então a sequência de codimensões $(c_n(\mathcal{A}))_{n\geq 1}$ de $\mathcal{A}$ é polinomialmente limitada se, e somente se,*

a) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_m$ (como espaço vetorial), onde, para $i = 1, \ldots, m$, $\mathcal{A}_i = \mathcal{B}_i + J_i$ é uma $\mathcal{K}$-subálgebra de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_i \cong \mathcal{K}$, J_i um ideal nilpotente de $\mathcal{A}_i$ e $\mathcal{A}_0, J_1, \ldots, J_m$ são ideais nilpotentes à direita de $\mathcal{A}$;

b) para todos $i, k \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq k$, temos que $\mathcal{A}_i\mathcal{A}_k = \{0\}$ e $\mathcal{B}_i\mathcal{A}_0 = \{0\}$.

Demonstração: Suponhamos primeiro que $c_n(\mathcal{A})$ é polinomialmente limitada. Seja $\mathcal{A} = \mathcal{B} + J$ a decomposição de $\mathcal{A}$ garantida pelo Teorema de Wedderburn-Malcev, onde $\mathcal{B}$ é uma subálgebra semissimples de $\mathcal{A}$ e $J = J(\mathcal{A})$ é o radical de Jacobson. Escreva $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_m$, com $\mathcal{B}_1, \ldots \mathcal{B}_m$ álgebras simples. Desde que $c_n(\mathcal{A})$ é polinomialmente limitada e, pelo Teorema 3.3.7, podemos encontrar inteiros positivos a_1, a_2, r_1, r_2 e d (onde $d = d(\mathcal{A})$ é o inteiro definido em (3.4)), tais que $a_1 n^{r_1} d^n \leq c_n(\mathcal{A}) \leq a_2 n^{r_2} d^n$, para n suficientemente grande, devemos ter $d = 1$, uma vez que $a_1 n^{r_1} d^n \leq c_n(\mathcal{A}) \leq cn^t$, para alguns $c, t > 0$, e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 n^{r_1} d^n}{cn^t} = \infty$, caso $d > 1$. Logo, $\mathcal{B}_i J \mathcal{B}_k = \{0\}$, para quaisquer $i \neq k$, e $\dim_{\mathcal{K}} \mathcal{B}_j = 1$ para $j = 1, \ldots, m$.

Sendo semissimples de dimensão finita, temos que $\mathcal{B}$ é unitária, e daí segue-se do Lema 4.1.3 que existem $e_1, e_2, \ldots, e_m \in Z(\mathcal{B})$ tais que $e_i e_j = 0$ se $i \neq j$, $e_1 + e_2 + \cdots + e_m = 1_{\mathcal{B}}$ e $e_k^2 = e_k$, para $k = 1, 2, \ldots, m$.

Note que $\mathcal{B}_i \cong \mathcal{K}$, para $i = 1, \ldots, m$, uma vez que $\mathcal{K}e_i \subseteq \mathcal{B}$ e $\dim_{\mathcal{K}} \mathcal{B}_i = 1$. Como $\mathcal{B}_i$ é simples (além de ser um ideal de $\mathcal{B}$), temos que $\mathcal{B}_i = e_i\mathcal{B}$, para todo $i = 1, \ldots, m$. Assim, $e_i\mathcal{B} \cong \mathcal{K}$, $i = 1, \ldots, m$.

Para todo $i = 1, \ldots, m$, defina $J_i = e_i J$ e $J_0 = \{x \in J \mid \mathcal{B}x = \{0\}\}$. Observe que $x \in J_0$ se, e somente se, $1_{\mathcal{B}} x = 0$. Note que $J_0, J_1, \ldots, J_m$ são ideais nilpotentes à direita de $\mathcal{A}$. Temos

$$\mathcal{A} = (\mathcal{B}_1 + J_1) \oplus \cdots \oplus (\mathcal{B}_m + J_m) \oplus J_0.$$

De fato, façamos $\mathcal{A}' = (\mathcal{B}_1 + J_1) \oplus \cdots \oplus (\mathcal{B}_m + J_m) \oplus J_0$. É claro que $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$. Reciprocamente, tomemos $a \in J$ qualquer. Vamos mostrar que $a \in 1_{\mathcal{B}} J + J_0$. Tomando

$x = \sum_{i=1}^m e_i x_i \in \mathcal{B}$ qualquer, temos que

$$
\begin{aligned}
x(a - 1_{\mathcal{B}}a) &= \sum_{i=1}^{m} e_i x_i \left(a - \sum_{j=1}^{m} e_j a \right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} e_i x_i a - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} e_i e_j x_i a \\
&= \sum_{i=1}^{m} e_i x_i a - \sum_{j=1}^{m} e_j^2 x_j a = 0.
\end{aligned}
$$

Logo, $a - 1_{\mathcal{B}}a \in J_0$, e assim $a \in 1_{\mathcal{B}}J + J_0$. Dessa forma, concluímos que $J = 1_{\mathcal{B}}J + J_0$, uma vez que é imediato $1_{\mathcal{B}}J + J_0 \subseteq J$. Observando que $1_{\mathcal{B}} = e_1 + e_2 + \cdots + e_m$, concluímos que $J \subseteq J_1 + \cdots + J_m + J_0$ e assim $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$.

Tomemos $\mathcal{A}_i = \mathcal{B}_i + J_i$, com $i = 1, \ldots, m$, e $\mathcal{A}_0 = J_0$. Observe que $\mathcal{A}_i$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Logo, temos que

$$\mathcal{B}_i \mathcal{A}_0 = B_i J_0 \subseteq \mathcal{B} J_0 = \{0\}.$$

Observe que J_i é um ideal (bilateral) nilpotente de $\mathcal{A}_i$, visto que $e_i \in Z(\mathcal{B})$ e J é um ideal nilpotente de $\mathcal{A}$. Como $e_i e_j = 0$ para quaisquer $i \neq j$ em $\{1, \ldots, m\}$, temos que $\mathcal{B}_i \mathcal{B}_k = \{0\}$ e $J_i J_k = \{0\}$, uma vez que $e_i J e_k \subseteq B_i J \mathcal{B}_k = \{0\}$, donde segue que

$$\mathcal{A}_i \mathcal{A}_k = (\mathcal{B}_i + J_i)(\mathcal{B}_k + J_k) = \mathcal{B}_i J_k + J_i \mathcal{B}_k,$$

e por $\mathcal{B}_i J_k = \mathcal{B}_i e_k J \subseteq \mathcal{B}_i \mathcal{B}_k J = \{0\}$ e $J_i \mathcal{B}_k \subseteq \mathcal{B}_i J \mathcal{B}_k = \{0\}$, temos que $\mathcal{A}_i \mathcal{A}_k = \{0\}$. Portanto, concluímos a primeira implicação.

Por outro lado, seja $\mathcal{A}$ uma álgebra satisfazendo (a) e (b). Tomando $J = \mathcal{A}_0 + J_1 + \cdots + J_m$, segue de (a) e (b) que J é um ideal bilateral de $\mathcal{A}$. Como cada J_i é nilpotente, devemos ter $J_1 + \cdots + J_m$ nilpotente, uma vez que $J_i J_k = \{0\}$. Ademais, sendo $\mathcal{A}_0$ e $J_1 + \cdots + J_m$ nilpotentes e $(J_1 + \cdots + J_m)\mathcal{A}_0 = \{0\}$ (pois $\mathcal{B}_i \mathcal{A}_0 = \{0\}$), podemos concluir que J é nilpotente. Como $\mathcal{B}_i \cong \mathcal{K}$ e $\mathcal{A} = \bigoplus_{i=0}^m \mathcal{A}_i = \mathcal{B}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_m \oplus J$, devemos ter $J = J(\mathcal{A})$.

Considere agora todos os produtos da forma $\mathcal{B}_iJ\mathcal{B}_j$, com $i \neq j$. Temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_iJ\mathcal{B}_j &= \mathcal{B}_i\mathcal{A}_0\mathcal{B}_j + \sum_{l=1}^{m} \mathcal{B}_iJ_l\mathcal{B}_j \\ &= \sum_{l=1}^{m} \mathcal{B}_iJ_l\mathcal{B}_j \\ &= \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{m} (\mathcal{B}_iJ_l)\mathcal{B}_j + (\mathcal{B}_iJ_i)\mathcal{B}_j \\ &= \mathcal{B}_i(J_i\mathcal{B}_j) = \{0\}, \end{aligned}$$

desde que $\mathcal{B}_i\mathcal{A}_0 = \{0\}$, $\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j = \{0\}$, para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ distintos.

Portanto, pela definição de $d = d(\mathcal{A})$ dada em (3.4), no Capítulo 3, segue-se que $d = \max_i\{\dim \mathcal{B}_i\} = 1$, e assim, pelo Teorema 3.3.7, concluímos que $c_n(\mathcal{A})$ é polinomialmente limitada. ■

Segue do teorema acima e do Teorema 3.3.7 que se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de dimensão finita tal que $exp(\mathcal{A}) = 1$, então $\mathcal{A}$ tem crescimento polinomial das codimensões, uma vez que $exp(\mathcal{A}) = d = d(\mathcal{A})$. Uma outra consequência imediata do teorema acima é a seguinte.

Corolário 4.2.3 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado $\mathcal{K}$ satisfazendo as condições (a) e (b) do Teorema 4.2.2. Sejam J o radical de Jacobson de $\mathcal{A}$ e, para todo $i = 1, \ldots, m$, $\mathcal{C}_i = \mathcal{A}_i \oplus \mathcal{A}_0$. Então*

$$Id(\mathcal{A}) = Id(\mathcal{C}_1) \cap \cdots \cap Id(\mathcal{C}_m) \cap Id(J).$$

Demonstração: Suponhamos que possamos tomar $f \in (\bigcap_{i=1}^{m} Id(\mathcal{C}_i)) \cap Id(J)$ de forma que $f \notin Id(\mathcal{A})$. Desde que $\operatorname{char} \mathcal{K} = 0$, podemos assumir que f é multilinear, e assim tomemos $r_1, \ldots, r_s \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_m$ tais que $f(r_1, \ldots, r_s) \neq 0$.

Se $r_1, \ldots, r_s \in J$, então $f \notin Id(J)$, o que é contradição. Com isso, podemos tomar $i_0 \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $r_{i_0} \notin J$. Pela linearidade de f, podemos assumir que $r_{i_0} \in \mathcal{B}_k$, para algum $k \in \{1, \ldots, s\}$. Recordemos que $\mathcal{B}_l\mathcal{A}_0 = \{0\}$, J_l é um ideal à direita de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}_l\mathcal{A}_k = \{0\}$, para quaisquer $l, k \in \{1, \ldots, m\}$ distintos. Ademais, $\mathcal{A}_0\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}_0$ e $\mathcal{A}_i\mathcal{A}_0 = J_i\mathcal{A}_0 \subseteq J_i \subseteq \mathcal{A}_i$, para todo $i = 1, \ldots, m$.

Como $f = f(x_1, \ldots, x_s)$ é multilinear, podemos escrever $f = \sum_{\sigma \in S_s} \lambda_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(s)}$, com $\lambda_\sigma \in \mathcal{K}$. Fixando $\sigma \in S_s$, arbitrário, considere o produto

$$r_{\sigma(1)} \cdots r_{\sigma(j-1)} r_{i_0} r_{\sigma(j+1)} \cdots r_{\sigma(s)},$$

com $i_0 = \sigma(j)$. Se supusermos que algum $r_i \notin \mathcal{A}_k \cup \mathcal{A}_0$, com $i \in \{1, \ldots, s\}$ e $i \neq i_0$, então $r_{\sigma(1)} \cdots r_{\sigma(j-1)}$ ou $r_{\sigma(j+1)} \cdots r_{\sigma(s)}$ pertence a

$$\mathcal{A}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_{k-1} \cup \mathcal{A}_{k+1} \cup \cdots \cup \mathcal{A}_m.$$

Como $r_{i_0} \in \mathcal{B}_k \subseteq \mathcal{A}_k$, temos que $r_{\sigma(1)} \cdots r_{\sigma(i_0)} \cdots r_{\sigma(s)} = 0$, qualquer que seja $\sigma \in S_s$, e assim

$$f(r_1, \ldots, r_s) = 0.$$

Contradição! Portanto, $r_1, \ldots, r_{i_0-1}, r_{i_0+1}, \ldots, r_s \in \mathcal{A}_k \cup \mathcal{A}_0$. Dessa forma, $f \notin Id(\mathcal{C}_k)$. Contradição! Portanto, concluímos que $f \notin Id(\mathcal{A})$, e garantimos a igualdade procurada. ∎

Uma pergunta que fica sobre o teorema acima é: o que podemos dizer se o corpo $\mathcal{K}$ não é algebricamente fechado?

Para responder tal pergunta, tomemos inicialmente uma álgebra $\mathcal{A}$ de dimensão finita sobre um corpo $\mathcal{K}$. Escrevemos $\mathcal{A} = \mathcal{B} + J$, com $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_m$ uma álgebra semissimples. Sendo $\overline{\mathcal{K}}$ o fecho algébrico de $\mathcal{K}$, escrevemos $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}}$, e daí, pelo Teorema 1.3.10, temos que $J(\overline{\mathcal{A}}) = J(A) \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}}$. Segue disso que

$$\overline{\mathcal{A}} \cong \overline{\mathcal{B}_1} \oplus \cdots \oplus \overline{\mathcal{B}_m} + J(\overline{\mathcal{A}}),$$

onde $\overline{\mathcal{B}_i} = \mathcal{B}_i \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}}$ é uma álgebra semissimples.

Pelo Teorema 1.3.14 e pelo que foi feito na demonstração do Corolário 3.4.1, temos que $\overline{\mathcal{B}_i} \cong \mathcal{C}_{i1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{C}_{it_i}$, onde $t_i = \dim_{\mathcal{K}} Z(\mathcal{B}_i)$ e $\mathcal{C}_{i1} \cong \cdots \cong \mathcal{C}_{it_i}$ são álgebras centrais simples sobre $\overline{\mathcal{K}}$.

No caso em que $c_n(\mathcal{A}) = c_n(\overline{\mathcal{A}})$ é polinomialmente limitada, pelo Teorema 3.3.7, temos que $\mathcal{C}_{ik} \cong \overline{\mathcal{K}}$, para quaisquer i, k, e $\mathcal{C}_{ik} J(\overline{\mathcal{A}}) \mathcal{C}_{rs} = \{0\}$ se $(i,k) \neq (r,s)$. Observando que $\dim_{\mathcal{K}} \mathcal{B}_i = \dim_{\overline{\mathcal{K}}} \overline{\mathcal{B}_i} = \sum_{j=1}^{t_i} \dim_{\overline{\mathcal{K}}} \mathcal{C}_{ij} = t_i$, temos que $\mathcal{B}_i = Z(\mathcal{B}_i)$ é um corpo, sendo uma extensão de grau t_i de $\mathcal{K}$. Desde que $\operatorname{char} \mathcal{K} = 0$ e $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}_i$ é uma extensão algébrica, temos então que tal extensão é simples, e daí podemos escrever $\mathcal{B}_i = \mathcal{K}(a_i)$, para algum $a_i \in \mathcal{B}_i$. Portanto, nós mostramos que se $\mathcal{K}$ é um corpo qualquer e $\mathcal{A}$ é uma $\mathcal{K}$-álgebra com crescimento polinomial das codimensões, então

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{K}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{K}(a_m) + J(\mathcal{A}), \tag{4.1}$$

com $\mathcal{K}(a_i)J(\mathcal{A})\mathcal{K}(a_k) = \{0\}$, para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ distintos.

Daremos agora uma caracterização para o crescimento polinomial das codimensões de uma álgebra em função da sequência de cocaracteres.

No que segue, para $\lambda \vdash n$, também escreveremos $|\lambda| = n$. Note que se $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, então $|\lambda| - \lambda_1$ denota o número de caixas abaixo da primeira linha do diagrama de λ.

Teorema 4.2.4 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo $\mathcal{K}$. Então $(c_n(\mathcal{A}))_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada se, e somente se,*

$$\chi_n(\mathcal{A}) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ |\lambda| - \lambda_1 < q}} m_\lambda \chi_\lambda \quad ,$$

onde $J(\mathcal{A})^q = \{0\}$.

Demonstração: Lembremos que a decomposição de $\chi_n(\mathcal{A})$ em componentes irredutíveis não se altera quando "estendemos" o corpo base (ver Teorema 3.1.7). Além disso, como $J(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}})^l = J(\mathcal{A})^l \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}}$, para todo inteiro $l > 0$, temos que $J(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{K}} \overline{\mathcal{K}})^q = \{0\}$, uma vez que $J(\mathcal{A})^q = \{0\}$. Sendo assim, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\mathcal{K}$ é um corpo algebricamente fechado.

Primeiramente, suponhamos que $\chi_n(\mathcal{A}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$, com $m_\lambda = 0$ sempre que $|\lambda| - \lambda_1 \geq q$. Pelo Teorema 2.3.9, as multiplicidades m_λ's são polinomialmente limitadas, ou seja, podemos tomar $C, t > 0$ constantes tais que $m_\lambda \leq Cn^t$, para qualquer $\lambda \vdash n$. Daí, segue-se que

$$c_n(\mathcal{A}) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ |\lambda| - \lambda_1 < q}} m_\lambda d_\lambda \leq Cn^t \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ |\lambda| - \lambda_1 < q}} d_\lambda. \tag{4.2}$$

Para cada $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \vdash n$, com $|\lambda| - \lambda_1 < q$, considere $\lambda^* = (\lambda_1) \vdash \lambda_1$. Observe que $\lambda^* \leq \lambda$, seja qual for $\lambda \vdash n$. Como $n - |\lambda^*| = |\lambda| - \lambda_1 < q$, segue do Teorema 2.3.6 que

$$d_\lambda \leq n^q d_{\lambda^*} = n^q, \tag{4.3}$$

uma vez que λ^* é uma partição de um só termo e assim seu diagrama possui apenas uma linha, admitindo portanto uma única tabela standard, e daí $d_{\lambda^*} = 1$. Uma estimativa para o número de partições de $\lambda \vdash n$ tais que $|\lambda| - \lambda_1 < q$ é que esse número não supera n^q. Para ver isto, basta observar que se $|\lambda| - \lambda_1 < q$, então D_λ tem no máximo q linhas, com cada uma delas contendo um número de caixas menor ou igual a n.

Dessa forma, temos de (4.2) e de (4.3) que

$$\begin{aligned} c_n(\mathcal{A}) &\leq Cn^t \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ |\lambda| - \lambda_1 < q}} d_\lambda \\ &\leq Cn^t \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ |\lambda| - \lambda_1 < q}} n^q = Cn^{t+q} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ |\lambda| - \lambda_1 < q}} 1 \\ &\leq Cn^{t+q} n^q = Cn^{t+2q}, \end{aligned}$$

onde $C, t + 2q > 0$ são constantes, e portanto a sequência $(c_n(\mathcal{A}))_{n \geq 1}$ das codimensões de $\mathcal{A}$ é polinomialmente limitada.

Por outro lado, suponhamos que as codimensões de $\mathcal{A}$ são polinomialmente limitadas. Seja $\lambda \vdash n$ tal que $|\lambda| - \lambda_1 \geq q$ e suponhamos, por contradição, que $m_\lambda \neq 0$. Pelo Teorema 2.2.3, podemos tomar alguma tabela T_λ e algum $h \in P_n$ tais que $e_{T_\lambda} h \notin Id(\mathcal{A})$. Seja $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_t)$ a partição conjugada de λ, com $t = \lambda_1$. Observe que $e_{T_\lambda} h = \overline{R}_{T_\lambda}(\overline{C}_{T_\lambda} h)$ e assim $\overline{C}_{T_\lambda} h \notin Id(\mathcal{A})$. Observe também que $\overline{C}_{T_\lambda} h$ é uma combinação linear de polinômios $f = \overline{C}_{T_\lambda}(x_{i_1} \cdots x_{i_n})$, sendo cada um alternante em t conjuntos disjuntos entre si com $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_t$ variáveis, respectivamente. Chegaremos a uma contradição se provarmos que cada polinômio f se anula em $\mathcal{A}$.

Fixemos uma base de $\mathcal{A}$ que seja a união de bases de $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$ e J, respectivamente, onde $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_m + J$ é a decomposição garantida pelo Teorema de Wedderburn-Malcev (Teorema 1.3.9). Desde que, pelo Teorema 4.2.2, $\mathcal{B}_i \mathcal{B}_k = \{0\} = \mathcal{B}_i J \mathcal{B}_k$, para quaisquer $i, k \in \{1, \ldots, m\}$ distintos, para termos um valor não nulo de f, precisamos substituir todas as variáveis de f por elementos de J e de uma mesma componente simples, digamos $\mathcal{B}_i$. Também, desde que $\dim \mathcal{B}_i = 1$, poderemos no máximo substituir um elemento de $\mathcal{B}_i$ em cada um dos conjuntos alternantes. Daí, como o número de conjunto alternantes é $t = \lambda_1$, então podemos no máximo substituir as variáveis de f por t elementos de $\mathcal{B}_i$. Segue-se que para termos um valor não nulo de f, devemos substituir as variáveis de f por ao menos $|\lambda| - t = |\lambda| - \lambda_1 \geq q$ elementos de J. Mas, desde que $J^q = \{0\}$, esta substituição anularia f, e com isso temos uma contradição, provando assim que $m_\lambda = 0$ se $|\lambda| - \lambda_1 \geq q$, e portanto

$$\chi_n(\mathcal{A}) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ |\lambda|-\lambda_1 < q}} m_\lambda \chi_\lambda \quad ,$$

concluindo a demonstração do teorema. ■

O teorema anterior diz que $\mathcal{A}$ tem crescimento polinomial das codimensões se, e somente se, todos os caracteres irredutíveis que aparecem com multiplicidade não nula em $\chi_n(\mathcal{A})$ tem diagrama associado com no máximo $q-1$ caixas abaixo da primeira linha, onde $J^q = \{0\}$.

Dessa forma, concluímos que se $\mathcal{A}$ é uma PI-álgebra com crescimento polinomial das codimensões, então existe uma álgebra $\mathcal{B}$ de dimensão finita, com $Id(\mathcal{A}) = Id(\mathcal{B})$, tal que $\mathcal{B}$ possui uma decomposição semelhante a (4.1) e o n-ésimo cocaracter de $\mathcal{B}$ tem uma decomposição como a dada no Teorema 4.2.4. Observe que vale a recíproca, uma vez que teremos $c_n(\mathcal{A}) = c_n(\mathcal{B})$, para todo $n \geq 1$.

Bibliografia

[BD] Yu. A. Bahturin and V. Drensky, *Graded Polynomial Identities of Matrices.* Linear Algebra appl., 357 (2002), pp. 15-34.

[BR] A. Berele and A. Regev, *Applications of Hook Young Diagrams to PI-Algebras.* J. Algebra 82 (1983), pp. 559-567.

[B] H. Boerner, *Representations of Groups*, 2nd ed., North-Holland, Amsterdam, 1963.

[CR] C. W. Curtis and I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras.* Wiley, New York, 1962.

[D] V. Drensky, *Free Algebras and PI-Algebras.* Springer-Verlag, Singapore, 2000.

[Fe] B. Felzenszwalb, *Álgebras de Dimensão Finita*, 12º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA,1979.

[F] E. Formanek, *A conjecture of Regev about the Capelli polynomial.* J. Algebra 109 (1987), pp. 93-114.

[GMZ] A. Giambruno, S. Mishchenko and M. Zaicev. *Some Numerical Invariants of Multilinear Identities.* Serdica Math. J. 38 (2012), pp. 371–394.

[GRZ1] A. Giambruno, A. Regev, and M. Zaicev, *On the Codimension Growth of Finite-Dimensional Lie Algebras.* J. Algebra 220 (1999), pp. 466-474.

[GRZ] A. Giambruno, A. Regev, and M. Zaicev, *Simple and Semisimple Lie Algebras and Codimension Growth.* Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 352 (Number 4), 1999, pp. 1935–1946.

[GZ] A. Giambruno and M. Zaicev, *On Codimension Growth of Finitely Generated Associative Algebras.* Adv. Math. 140 (1998), pp. 145-155. CMP 99:05.

[GZ1] A. Giambruno and M. Zaicev, *Exponential Codimension Growth of PI-Algebras*: an Exact Estimate. Advances in Mathematics 142 (1999), 142, pp. 221-243.

[GZ3] A. Giambruno and M. Zaicev, *A Characterization of Algebras with Polynomial Growth of the Codimensions*. Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001), 59-67.

[GZ2] A. Giambruno and M. Zaicev, *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*. Mathematical Surveys and Monographs, Amer. Math. Soc. 122, Providence, RI, 2005.

[H] I. N. Herstein, *Noncommutative rings*. The Carus Math. Monographs 15, MAA, 1973.

[H1] I. N. Herstein, *Topics in algebra*. John Wiley and Soons, 2nd edition, Wiley, 1975.

[HK] K. Hoffman, R. Kunze, *Linear Algebra*, 2nd edition, Prentice Hall, 1971.

[J3] N. Jacobson, *Basic Algebra I*. 2 Ed, Dover, New York, 2009.

[J2] N. Jacobson, *Basic Algebra II*. 2 Ed, Dover, New York, 2009.

[Ja] G. D. James, *Representation Theory of the Symmetric Groups*, Springer Lecture Notes in Mathematics 692, Springer, 1978.

[JK] G. James and A. Kerber. *The Representation Theory of the Symmetric Group*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 16 (1981), Addison-Wesley, London.

[JL] G. James and M. W. Liebeck. *Representations and Characters of Groups*. Cambridge Mathematical Textbooks, 2001, Cambridge University Press.

[K3] A. Kemer, *T-ideals with power growth of the codimensions are Specht*. Sibirskii Matematicheskii Zhurnal 19 (1978), pp. 54-69; [in Russian. English translation: Siberian Math. J. 19 (1978), pp. 37-48.

[K1] A. Kemer, *Ideals of Identities of Associative Algebras*. Transl. Math. Monogr., vol. 87, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1988.

[K2] A. Kemer, *Identities of Finitely Generated Algebras over Infinite Field*. Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 54 (1990), no. 4, pp. 726-753.

[KR] A. Krakowsky and A. Regev, *The Polynomial Identities of the Grassmann Algebra*. Trans. AMS 181 (1973), pp. 429-438.

[L] T. Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 131. Springer-Verlag, New York, 2001.

[Li] E. L. Lima, *Análise Real, Vol. 1*. Coleção Matemática Universitária, IMPA. Rio de Janeiro, 1999.

[M] Yu. N. Mal'tsev, *A Basis for the Identities of the Algebra of Upper Triangular Matrices*. Algebra i Logika 10 (1971), pp. 393-400.

[R] A. Regev, *Existence of Identities in* $A \otimes B$. Israel J. Math. 11 (1972), pp. 131-152.

[R1] A. Regev, *Asymptotic Values for Degrees Associated with Stripes of Young Diagrams*. Adv. Math. 41 (1981), pp. 115-136.

[Ro1] L. H. Rowen, *Polynomial Identities in Ring Theory*. Academic Press, San Diego, 1980,

[Ro] L. H. Rowen, *Ring Theory*. Academic Press, New York, 1988.

[Rob] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*. Graduate Texts in Mathematics vol. 80, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1995.

[Rot] J. J. Rotman, *Advanced Modern Algebra*. Prentice Hall, 2002.

[S] J. P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*. Graduate Texts in Mathematics Vol. 42, Springer-Verlag, 1996.