Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Algumas Propriedades de Equações Diferenciais em Espaços de Banach e Aplicações a Campos Neurais

por

Bruno Arthur Santos de Almeida †

sob orientação do

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

A447a Almeida, Bruno Arthur Santos de.
Algumas propriedades de equações diferenciais em espaços de Banach e aplicações a campos neurais / Bruno Arthur Santos de Almeida. – Campina Grande, 2015.
89 f. :

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2015.

"Orientação: Prof. Dr. Severino Horácio da Silva.".
Referências.

1. Equações Diferenciais. 2. Campos Neurais. 3. Atrator Global. I. Silva, Severino Horácio. II. Título.

CDU 517.91(043)

Algumas Propriedades de Equações Diferenciais em Espaços de Banach e Aplicações a Campos Neurais

por

Bruno Arthur Santos de Almeida

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Aprovada por:

Miriam Silva Pereira

Prof^{a}. Dr^{a}. Miriam da Silva Pereira - UFPB

José Lindomberg Possiano Barreiro

Prof. Dr. José Lindomberg Possiano Barreiro - UFCG

Severino Horácio da Silva

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Agosto/2015

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por esta conquista.

Aos meus pais, José e Lucinalva, por toda base, ensinamentos e amor. Também agradeço aos meus irmãos, Valéria, Diego e Milena.

Aos amigos da pós-graduação, pelas conversas e estudos, entre eles: Alan, Luando, Levi, Misaelle, Ailton, Keytt, Erivaldo e Claudemir. Também aos amigos da graduação na UPE, pelo apoio.

Aos professores do departamento de Matemática da UFCG, entre eles: Horácio, Marco Antônio, Aparecido, Joseilson e Marcelo, pelas aulas. Agradeço também o apoio dos meus professores da graduação na UPE, Vania, Mauricio e Janaina.

Ao professor Lindomberg e a professora Miriam, por aceitarem participar da banca examinadora e pelas sugestões dadas.

A meu orientador, professor Horácio, pela orientação, ensinamentos, conselhos e paciência.

Ao apoio financeiro da Capes.

E a todos que de alguma forma contribuíram para esta conquista.

Dedicatória

Aos meus pais e irmãos.

Resumo

Neste trabalho estudamos algumas propriedades de Equações Diferenciais em espaços de Banach e aplicamos os resultados abstratos no estudo da equação de evolução não local

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u(x,t) + J * (f \circ u)(x,t) + h, \;\; h > 0 \; ,$$

no espaço de fase $L^2(S^1)$, onde S^1 denota a esfera unitária. Mostramos que esta equação gera um fluxo de classe C^1 com relação às condições iniciais. E, além disso, provamos a existência de um atrator global para o fluxo gerado por esta equação.

Palavras-chave: Equações diferenciais; Campos neurais; Atrator global.

Abstract

In this work we study some properties of abstract differential equations in Banach spaces and we apply the results for study the non local evolution equation of neural fields

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u(x,t) + J * (f \circ u)(x,t) + h, \ \ h > 0,$$

in the phase space $L^2(S^1)$. We prove that this equation generates one C^1 flow, and we show the existence of a global attractor for this flow.

Keywords: Differential equations; Neural fields; Global attractor.

Conteúdo

Introdução 6

1 Preliminares **8**

1.1 Derivada de Gâteaux 8

1.2 Derivada de Fréchet 11

1.3 Convolução de Funções 20

2 Algumas Propriedades de Equações Diferenciais em Espaços de Banach **24**

2.1 Teoremas de Existência Local de Solução 24

2.2 Teoremas de Existência Global de Solução 30

2.3 Diferenciabilidade da Solução 40

3 Atrator Global para Sistemas Autônomos **43**

3.1 Semigrupos e Conjuntos Invariantes 43

3.2 Conjunto Absorvente e Conjunto Atrator 51

4 Aplicação a Campos Neurais **57**

4.1 Boa Posição em $L^2(S^1)$ 57

4.2 Suavidade da Solução 66

4.3 Existência de um Atrator Global 69

4.4 Um Exemplo Concreto 74

A Uma breve revisão dos espaços L^p e algumas propriedades **76**

B Alguns resultados de Análise Funcional **82**

B.1 Teorema de Hanh-Banach 82

B.2 Teorema do Ponto Fixo para Contrações 83
B.3 Espaço $W^{1,p}$ 85

Bibliografia **87**

Introdução

Equações diferenciais em espaços de Banach é uma área de pesquisa que tem atraído muita atenção nas últimas décadas. Tais equações modelam, entre outros, sistemas físicos e biológicos que dependem simultaneamente de variáveis espaciais e temporais, (veja, por exemplo, [12]). Nos últimos anos, a teoria de semigrupo é uma ferramenta que vem sendo exaustivamente utilizada na análise de diversas equações diferenciais em espaços de Banach, (veja, por exemplo, [12], [19], [20] e [23]).

Neste trabalho seguindo [2], [6], [14] e [19] estudamos algumas propriedades de Equações Diferenciais do tipo

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

com $f : I \times X \longrightarrow X$, onde X é um espaço de Banach e I um intervalo da reta. Estudamos condições de existência, unicidade, e diferenciabilidade da solução do problema de Cauchy associado a equação (1), bem como o semigrupo gerado por esta equação.

Além disso, seguindo [20] e [21] aplicamos os resultados abstratos no estudo de algumas propriedades para a equação de evolução não local

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u(x,t) + J * (f \circ u)(x,t) + h\,, \tag{2}$$

onde $u = u(x,t)$ é uma função de valores reais, $J \in C^1(\mathbb{R})$ é uma função não negativa com suporte no intervalo $[-1, 1]$, f é uma função não negativa e não-decrescente e h é uma constante positiva. E o símbolo $*$ acima denota o produto convolução.

A equação (2) foi obtida por Wilson e Cowan, [24], para modelar a atividade neural. Na equação (2), $u(x,t)$ denota o potencial da membrana do tecido nervoso na posição x e no tempo $t \geq 0$; a função J representa a conexão dos neurônios na posição x e posição y; a função f representa a taxa na qual a atividade neural é gerada e a constante h representa um estímulo externo aplicado uniformemente em todo campo neural (veja [19], [20] e [21]).

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira: no Capítulo 1 exibimos algumas definições e resultados que são úteis no decorrer deste trabalho, mais especificamente, seguindo [18], definimos as derivadas de Gâteaux e Fréchet e apresentamos alguns resultados envolvendo tais derivadas. Além disso, seguindo [8] e [9], definimos o produto convolução de funções e exibimos alguns resultados envolvendo tal conceito. No Capítulo 2, seguindo [2], [6], [14] e [19], estudamos o problema de Cauchy associado à equação (1), isto é, mostramos condições de existência local (global), unicidade e diferenciabilidade da solução com relação aos dados iniciais. No Capítulo 3, seguindo [6], [10] e [23], introduzimos os conceitos de semigrupo e conjuntos atratores, além disso, exibimos alguns resultados abstratos envolvendo tais conceitos. No Capítulo 4 aplicamos os resultados prévios no estudo da equação de evolução (2). Mais precisamente, seguindo [20] e [21], mostramos que esta equação gera um fluxo C^1 em $L^2(S^1)$ e que existe um atrator global para este fluxo. Por fim, no Apêndice, exibimos algumas definições e resultados que de alguma forma são utilizados nesta dissertação.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, exibimos algumas definições e resultados que serão úteis no decorrer deste trabalho.

1.1 Derivada de Gâteaux

Nesta seção, seguindo [18], apresentamos alguns resultados sobre a derivada de Gâteaux.

Definição 1.1 *Sejam X um espaço vetorial e Y espaço vetorial topológico. Considere um operador $f : X \longrightarrow Y$. Dados x e η em X, se*

$$Df(x)(\eta) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\eta) - f(x)}{t} \tag{1.1}$$

existe, dizemos que f é Gâteaux diferenciável em x na direção η, e $Df(x)(\eta) \in Y$ é chamada a derivada de Gâteaux de f em x na direção η.

Dizemos que f é Gâteaux diferenciável em x quando f é Gâteaux diferenciável em x para toda direção $\eta \in X$.

Denotamos por $[X, Y]$ o espaço dos operadores $T : X \longrightarrow Y$.

Observação 1.1 *O operador $Df(x) : X \longrightarrow Y$ que atribui para cada $\eta \in X$ o vetor $Df(x)(\eta) \in Y$ é chamado a derivada de Gâteaux de f em x. O operador $Df : X \longrightarrow [X, Y]$ que atribui para cada $x \in X$ o operador $Df(x) \in [X, Y]$ é chamado a derivada de Gâteaux de f.*

Exemplo 1.1 *Se* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $e_1 = (1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, ..., 0, 1)$, *então* $x \in \mathbb{R}^n$ *é tal que* $x = (x_1, ..., x_n) = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, *consequentemente*

$$Df(x)(e_i) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + t, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{t} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \ ,$$

isto é, a derivada parcial de f *com relação a* x_i *é a derivada de Gâteaux de* f *em* x *na direção* e_i.

Exemplo 1.2 *Seja* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}$ *se* $x = (x_1, x_2) \neq 0$ *e* $f(0) = 0$. *Dado* $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$, *temos que*

$$Df(x)(\eta) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1 + t\eta_1, x_2 + t\eta_2) - f(x_1, x_2)}{t} \ ,$$

donde

$$Df(0)(\eta) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[\frac{(0 + t\eta_1)(0 + t\eta_2)}{(0 + t\eta_1)^2 + (0 + t\eta_2)^2} - f(0) \right] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[\frac{\eta_1\eta_2}{\eta_1^2 + \eta_2^2} \right].$$

Logo $Df(0)(\eta)$ *existe se, e somente se* $\eta = (\eta_1, 0)$ *ou* $\eta = (0, \eta_2)$.

Observação 1.2 *O Exemplo 1.2 mostra que a existência das derivadas parciais não implica a existência da derivada de Gâteaux.*

Exemplo 1.3 *Seja* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \frac{x_1x_2^2}{x_1^2+x_2^2}$ *se* $x = (x_1, x_2) \neq 0$ *e* $f(0) = 0$. *Dado* $\eta \in \mathbb{R}^2$, *temos que*

$$Df(0)(\eta) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[\frac{t\eta_1t^2\eta_2^2}{t^2\eta_1^2 + t^2\eta_2^2} \right] = \frac{\eta_1\eta_2^2}{\eta_1^2 + \eta_2^2} \ .$$

Observação 1.3 *O Exemplo 1.3 mostra que a derivada de Gâteaux em um ponto não é necessariamente um operador linear. De fato, dados* $\eta, \xi \in X$ *temos* $Df(0)(\eta) + Df(0)(\xi) = \frac{\eta_1\eta_2^2}{\eta_1^2+\eta_2^2} + \frac{\xi_1\xi_2^2}{\xi_1^2+\xi_2^2}$ *e* $Df(0)(\eta + \xi) = \frac{(\eta_1+\xi_1)(\eta_2+\xi_2)^2}{(\eta_1+\xi_1)^2+(\eta_2+\xi_2)^2}$, *tome* $\eta = (1, 0)$, $\xi = (0, 1)$ *e, note que* $Df(0)(\eta) + Df(0)(\xi) = 0$ *enquanto* $Df(0)(\eta + \xi) = \frac{1}{2}$.

Como vimos anteriormente, a derivada de Gâteaux não é necessariamente um operador linear. Porém, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.1 *A derivada de Gâteaux de* f *em* x *é um operador homogêneo, isto é,* $Df(x)(\alpha\eta) = \alpha Df(x)(\eta)$, *para* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Prova: Temos que $Df(x)(\eta) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t\eta)-f(x)}{t}$. Substituindo t por $t\alpha$, segue que

$$Df(x)(\eta) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + t\alpha\eta) - f(x)}{t\alpha} = \frac{1}{\alpha}Df(x)(\alpha\eta).$$

Logo,

$$\alpha Df(x)(\eta) = Df(x)(\alpha\eta).$$

■

Proposição 1.2 *Se o funcional* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *tem um mínimo ou um máximo em* $x \in X$ *e* $Df(x)$ *existe, então* $Df(x) \equiv 0$.

Prova: Suponha que $Df(x)(\eta) > 0$, para algum $\eta \in X$. Para t suficientemente pequeno temos

$$\frac{f(x+t\eta)-f(x)}{t} > 0,$$

donde $f(x+t\eta) > f(x)$ para $t > 0$, e $f(x+t\eta) < f(x)$ para $t < 0$. Obtemos então $f(x+t\eta) > f(x)$ e $f(x+t\eta) < f(x)$, o que contradiz a hipótese de f ter um mínimo ou máximo em $x \in X$. Supondo $Df(x)(\eta) < 0$ o argumento é similar. Portanto, $Df(x) \equiv 0$.

■

Se X e Y são espaços vetoriais topológicos, então o espaço vetorial de todos os operadores lineares contínuos de X em Y será denotado por $\mathcal{L}[X, Y]$. Em particular, denotamos $\mathcal{L}[X, \mathbb{R}]$ por X' (dual topológico de X), cujos elementos são funcionais lineares contínuos.

Proposição 1.3 *Sejam* X *um espaço vetorial e* Y *um espaço linear normado. Considere um operador* $f : X \longrightarrow Y$. *Dados* $x, y \in X$ *suponha* f *Gâteaux difereciável para cada ponto de* $\{x + t(y-x); 0 \leq t \leq 1\}$ *na direção* $y - x$. *Então para cada* $\delta \in Y'$ *valem:*

(i) $\delta(f(y) - f(x)) = \delta(Df(x+\theta(y-x))(y-x))$, *para algum* $0 < \theta < 1$;

(ii) $\|f(y) - f(x)\| \leq \sup_{0<\theta<1} \|Df(x+\theta(y-x))(y-x)\|$.

Prova: Seja $g(t) = \delta(f(x+t(y-x)))$. Segue que $g'(t) = \delta(Df(x+t(y-x))(y-x))$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta, 0 < \theta < 1$, tal que $g(1) - g(0) = g'(\theta)$. Daí, segue que

$$\delta(f(y)) - \delta(f(x)) = \delta(Df(x+\theta(y-x))(y-x)),$$

sendo δ linear, obtemos

$$\delta(f(y) - f(x)) = \delta(Df(x+\theta(y-x))(y-x)),$$

o que prova (i).

Agora, pelo Teorema de Hahn-Banach (ver Corolário B.1) existe $\delta \in Y'$ tal que $\|\delta\| = 1$ e $\delta(f(y) - f(x)) = \|f(y) - f(x)\|$, e por (i), segue que

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\| = \delta(f(y) - f(x)) &= \delta(Df(x + \theta(y-x))(y-x)) \\ &\leq |\delta(Df(x + \theta(y-x))(y-x))| \\ &\leq \|\delta\| \|Df(x + \theta(y-x))(y-x)\| \\ &= \|Df(x + \theta(y-x))(y-x)\| \\ &\leq \sup_{0<\theta<1} \|Df(x + \theta(y-x))(y-x)\|, \end{aligned}$$

provando (ii).

■

Exemplo 1.4 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x_1^3}{x_2}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Temos que*

$$Df(0)(\eta) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\frac{t^3 \eta_1^3}{t \eta_2} - 0 \right] = \lim_{t \to 0} \frac{t \eta_1^3}{\eta_2} = 0$$

para todo $\eta \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(\eta_1, 0)\}$. Consequentemente $Df(0)$ existe e é um operador linear contínuo, mas f não é contínua em 0.

1.2 Derivada de Fréchet

Nesta seção, seguindo [18], apresentamos alguns resultados sobre a derivada de Fréchet, a qual generaliza o conceito de diferenciabilidade sobre o $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.2 *Considere $f : X \longrightarrow Y$, onde X e Y são espaços lineares normados. Dado $x \in X$, se existe um operador linear $f'(x) \in \mathcal{L}[X, Y]$ tal que*

$$\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \frac{\|f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)(\Delta x)\|}{\|\Delta x\|} = 0, \ \Delta x \in X, \tag{1.2}$$

então f é diferenciável segundo Fréchet e $f'(x)$ é chamada a derivada de Fréchet de f em x.

O operador

$$\begin{aligned} f' : X &\longrightarrow \mathcal{L}[X, Y] \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

é chamado a derivada de Fréchet de f.

Observação 1.4 *A derivada de Fréchet, $f'(x)$, é por definição um operador linear contínuo, o que não necessariamente ocorre com a derivada de Gâteaux $Df(x)$.*

Observação 1.5 *Usando (1.2) temos que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\|f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)(\Delta x)\| \ \leq \epsilon \|\Delta x\|\,, \tag{1.3}$$

para todo $\Delta x \in X$ tal que $\|\Delta x\| \ \leq \delta$.

Proposição 1.4 *Se $f : X \longrightarrow Y$ é Fréchet diferenciável em x, então f é contínua em x.*

Prova: Usando (1.3) note que

$$\begin{aligned} \|f(x+\Delta x) - f(x)\| - \|f'(x)(\Delta x)\| &\leq \|f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)(\Delta x)\| \\ &\leq \epsilon \|\Delta x\|. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \|f(x+\Delta x) - f(x)\| &\leq \epsilon \|\Delta x\| + \|f'(x)(\Delta x)\| \\ &\leq \epsilon \|\Delta x\| + \|f'(x)\| \|\Delta x\| \\ &= (\epsilon + \|f'(x)\|)\|\Delta x\|. \end{aligned}$$

Assim, para $\|\Delta x\| \ \leq \delta$ obtemos $\|f(x+\Delta x) - f(x)\| \ \leq (\epsilon + \|f'(x)\|)\delta$, o que implica no resultado desejado.

■

Observação 1.6 *Fréchet diferenciabilidade $\Longrightarrow$ Gâteaux diferenciabilidade. De fato, se $f'(x)$ existe, então substituindo Δx por $t\Delta x$ em (1.2), temos*

$$\lim_{\|t\Delta x\| \to 0} \frac{\|f(x+t\Delta x) - f(x) - f'(x)(t\Delta x)\|}{\|t\Delta x\|} = 0.$$

Como $t \to 0$ implica $\|t\Delta x\| \to 0$, segue que

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{f(x+t\Delta x) - f(x) - f'(x)(t\Delta x)}{t} \right\| = 0\,,$$

ou equivalentemente

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{f(x+t\Delta x) - f(x)}{t} - f'(x)(\Delta x) \right\| = 0.$$

Daí,

$$\|Df(x)(\Delta x) - f'(x)(\Delta x)\| = 0\,,$$

ou seja,

$$\|(Df(x) - f'(x))(\Delta x)\| = 0, \ \forall \ \Delta x \in X.$$

Logo, $Df(x) = f'(x)$.

Proposição 1.5 *A derivada de Fréchet é única.*

Prova: Suponha que existam duas derivadas de Fréchet para f em x, $f_1'(x)$ e $f_2'(x)$. Usando a desigualdade triângular e a Observação 1.6, temos

$$\|f_1'(x) - f_2'(x)\| \ \leq \ \|f_1'(x) - Df(x)\| + \|f_2'(x) - Df(x)\| = 0.$$

Daí,

$$\|f_1'(x) - f_2'(x)\| = 0,$$

e portanto, $f_1'(x) = f_2'(x)$.

■

Observação 1.7 *Se $Df(x)$ é um operador linear limitado, então $f'(x)$ existe se, e somente se, a convergência em (1.1) é uniforme com respeito a todo $\eta \in X$ tal que $\|\eta\| = 1$. De fato, se $f'(x)$ existe, vimos na Observação 1.6 que $Df(x) = f'(x)$. Substituindo $f'(x)$ por $Df(x)$ e Δx por $t\eta$ em (1.2), temos*

$$\lim_{\|t\eta\| \to 0} \frac{\|f(x+t\eta) - f(x) - Df(x)(t\eta)\|}{\|t\eta\|} = 0$$

o que implica em

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{f(x+t\eta) - f(x) - Df(x)(t\eta)}{t} \right\| = 0\,,$$

daí,

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{f(x+t\eta) - f(x)}{t} - Df(x)(\eta) \right\| = 0$$

ou equivalentemente

$$Df(x)(\eta) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t\eta) - f(x)}{t}\,.$$

Reciprocamente, se a convergência em (1.1) é uniforme para todo η tal que $\|\eta\| = 1$, temos

$$Df(x)(\eta) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t\eta) - f(x)}{t}\,,$$

daí,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t\eta) - f(x)}{t} - Df(x)(\eta) = 0.$$

Logo

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{f(x+t\eta) - f(x) - Df(x)(t\eta)}{t} \right\| = 0\,,$$

ou seja,

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|f(x+t\eta) - f(x) - Df(x)(t\eta)\|}{|t|\|\eta\|} = 0\,,$$

o que implica em

$$\lim_{\|t\eta\|\to 0} \frac{\|f(x+t\eta) - f(x) - Df(x)(t\eta)\|}{\|t\eta\|} = 0.$$

Como $Df(x)$ é um operador linear limitado, segue que $Df(x) = f'(x)$.

Observação 1.8 *Se $f : X \longrightarrow Y$ é Fréchet diferenciável, então por (ii) da Proposição 1.3 segue que*

$$\|f(y) - f(x)\| \;\le\; \sup_{0<\theta<1} \|Df(x + \theta(y-x))\| \|y - x\|.$$

Exemplo 1.5 *Suponha $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Fréchet diferenciável em x. Vamos calcular $f'(x)(\eta)$. Nós temos $f(x) = f(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$. Observe que $\eta = \eta_1 e_1 + \cdots + \eta_n e_n$ onde $e_1, ..., e_n$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Basta calcular $f'(x)(e_i)$, então $f'(x)(\eta) = \eta_1 f'(x)(e_1) + \cdots + \eta_n f'(x)(e_n)$.*
Mas,

$$f'(x)(e_i) = \left(\frac{\partial f_1(x_1, ..., x_n)}{\partial x_i}, ..., \frac{\partial f_m(x_1, ..., x_n)}{\partial x_i} \right),$$

consequentemente,

$$f'(x)(\eta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}.$$

Os Exemplos 1.2 e 1.3 mostram que $Df(x)$ pode existir e não ter matriz jacobiana, também a matriz jacobiana pode existir e $Df(x)$ não existir. Porém, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.6 *Suponha que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e que $Df(x)$ existe. Então $Df(x)$ é representado pela matriz jacobiana em x se, e somente se, $Df(x)$ é um operador linear.*

Prova: Suponha que $Df(x)$ é representada pela matriz jacobiana em x. Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ base canônica de $\mathbb{R}^n$. Dados $\eta, \xi \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$Df(x)(\eta + \xi) = \begin{pmatrix} Df_1(x)(e_1) & \cdots & Df_1(x)(e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Df_m(x)(e_1) & \cdots & Df_m(x)(e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 + \xi_1 \\ \vdots \\ \eta_n + \xi_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Df_1(x)(e_1) & \cdots & Df_1(x)(e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Df_m(x)(e_1) & \cdots & Df_m(x)(e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Df_1(x)(e_1) & \cdots & Df_1(x)(e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Df_m(x)(e_1) & \cdots & Df_m(x)(e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

$$= Df(x)(\eta) + Df(x)(\xi).$$

Logo, $Df(x)$ é linear.

Para a recíproca basta notar que no Exemplo 1.5 apenas a linearidade do operador $f'(x)$ foi usada para obter a matriz jacobiana. Assim, se $Df(x)$ é linear a matriz jacobiana existe.

■

Proposição 1.7 *Sejam X e Y espaços lineares normados. Suponha $f : X \longrightarrow Y$ Gâteaux diferenciável em X e, além disso, que para $x \in X$ fixo:*

(i) $Df(x)(\cdot) : X \longrightarrow Y$ é contínua em zero;

(ii) $Df(\cdot)(\eta) : X \longrightarrow Y$ é contínua em x para cada $\eta \in X$ fixo.

Então $Df(x) \in \mathcal{L}[X, Y]$, isto é, $Df(x)$ é um operador linear contínuo.

Prova: Pela Proposição 1.1 $Df(x)$ é um operador homogêneo, consequentemente $Df(x)(0) = Df(x)(0 \cdot \eta) = 0 \cdot Df(x)(\eta) = 0$. Por (i) existe $r > 0$ tal que $\|Df(x)(\eta)\| \leq 1$ sempre que $\|\eta\| \leq r$. Daí, segue-se que

$$\begin{aligned}
\|Df(x)(\eta)\| &= \left\| \frac{\|\eta\|}{r} \frac{r}{\|\eta\|} Df(x)(\eta) \right\| = \left\| \frac{\|\eta\|}{r} Df(x)(\frac{r}{\|\eta\|}\eta) \right\| \\
&= \frac{\|\eta\|}{r} \left\| Df(x)(\frac{r}{\|\eta\|}\eta) \right\| \leq \frac{1}{r}\|\eta\|.
\end{aligned}$$

Logo, $Df(x)$ é limitado. Agora, devemos mostrar que $Df(x)$ é aditivo, isto é, que $Df(x)(\eta_1 + \eta_2) = Df(x)(\eta_1) + Df(x)(\eta_2)$. Sejam $\eta_1, \eta_2 \in X$. Dado $\epsilon > 0$ existe $\tau > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\Bigg\| \quad Df(x)(\eta_1 + \eta_2) - Df(x)(\eta_1) - Df(x)(\eta_2) - \left(\frac{f(x + t\eta_1 + t\eta_2) - f(x)}{t} \right) \\
&+ \quad \left(\frac{f(x + t\eta_1) - f(x)}{t} \right) + \left(\frac{f(x + t\eta_2) - f(x)}{t} \right) \Bigg\| \quad \leq 3\epsilon
\end{aligned}$$

para $|t| \leq \tau$. Usando a desigualdade acima obtemos

$$\begin{aligned}
&\| \quad Df(x)(\eta_1 + \eta_2) - Df(x)(\eta_1) - Df(x)(\eta_2)\| - \left\| \left(\frac{f(x + t\eta_1 + t\eta_2) - f(x)}{t} \right) \right. \\
&- \quad \left. \left(\frac{f(x + t\eta_1) - f(x)}{t} \right) - \left(\frac{f(x + t\eta_2) - f(x)}{t} \right) \right\| \quad \leq 3\epsilon\,,
\end{aligned}$$

implicando que

$$\|Df(x)(\eta_1+\eta_2) - Df(x)(\eta_1) - Df(x)(\eta_2)\|$$

$$\leq \frac{1}{|\,t\,|}\|f(x+t\eta_1+t\eta_2) - f(x) - f(x+t\eta_1) + f(x) - f(x+t\eta_2) + f(x)\| + 3\epsilon. \quad (1.4)$$

Pelo Teorema de Hanh-Banach (ver Corolário B.1) existe $\delta \in Y'$ tal que $\|\delta\| = 1$ e $\delta(x) = \|x\|$. E, por (i) da Proposição 1.3, temos que

$$\|f(x+t\eta_1+t\eta_2) - f(x+t\eta_1) - f(x+t\eta_2) + f(x)\|$$

$$= \delta\left(f(x+t\eta_1+t\eta_2) - f(x+t\eta_1) - (f(x+t\eta_2) - f(x))\right)$$

$$= \delta\left(Df(x+t\eta_1+\theta_1(t\eta_2))(t\eta_2)\right) - \delta\left(Df(x+\theta_2(t\eta_2))(t\eta_2)\right)\,,$$

para algum $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$. Assim,

$$\|f(x+t\eta_1+t\eta_2) - f(x+t\eta_1) - f(x+t\eta_2) + f(x)\|$$

$$= t\delta\left(Df(x+t\eta_1+\theta_1 t\eta_2)(\eta_2) - Df(x)(\eta_2) + Df(x)(\eta_2) - Df(x+\theta_2 t\eta_2)(\eta_2)\right)$$

$$\leq |t\delta\left(Df(x+t\eta_1+\theta_1 t\eta_2)(\eta_2) - Df(x)(\eta_2) + Df(x)(\eta_2) - Df(x+\theta_2 t\eta_2)(\eta_2)\right)|$$

$$\leq |t|\|\delta\|\|Df(x+t\eta_1+\theta_1 t\eta_2)(\eta_2) - Df(x)(\eta_2) + Df(x)(\eta_2) - Df(x+\theta_2 t\eta_2)(\eta_2)\|$$

$$\leq |t|\|Df(x+t(\eta_1+\theta_1\eta_2))(\eta_2) - Df(x)(\eta_2)\| + |t|\|Df(x)(\eta_2) - Df(x+\theta_2 t\eta_2)(\eta_2)\|.$$

Agora, usando a hipótese (ii), temos que

$$\begin{aligned} |t|\|Df(x+t(\eta_1 \; &+ \; \theta_1\eta_2))(\eta_2) - Df(x)(\eta_2)\| \\ &+ \; |t|\|Df(x)(\eta_2) - Df(x+\theta_2 t\eta_2)(\eta_2)\| \;\leq 2|t|\epsilon \end{aligned} \quad (1.5)$$

para t suficientemente pequeno. De (1.4) e (1.5) obtemos

$$\|Df(x)(\eta_1+\eta_2) - Df(x)(\eta_1) - Df(x)(\eta_2)\| \;\leq \frac{1}{|t|}\,2|t|\epsilon + 3\epsilon = 5\epsilon.$$

Logo $Df(x)$ é aditivo e, da Proposição 1.1, é homogêneo. Consequentemente $Df(x)$ é um operador linear.

Portanto, $Df(x)$ é um operador linear limitado, donde segue o resultado.

■

Proposição 1.8 *Sejam X e Y espaços lineares normados. Considere $f : X \longrightarrow Y$. Suponha $Df : X \longrightarrow \mathcal{L}[X, Y]$ e Df contínua em x. Então $f'(x)$ existe e f' é contínua em x.*

Prova: Usando o Teorema de Hanh-Banach (ver Corolário B.1), e o item (i) da Proposição 1.3, temos que

$$\begin{aligned}
\|f(x+\eta) - f(x) - Df(x)(\eta)\| &= \delta\left(f(x+\eta) - f(x) - Df(x)(\eta)\right) \\
&= \delta\left(Df(x+\theta\eta)(\eta) - Df(x)(\eta)\right) \\
&\leq \left|\delta\left(Df(x+\theta\eta)(\eta) - Df(x)(\eta)\right)\right| \\
&\leq \|\delta\|\|Df(x+\theta\eta)(\eta) - Df(x)(\eta)\| \\
&\leq \|Df(x+\theta\eta) - Df(x)\|\|\eta\|.
\end{aligned}$$

Como Df é contínuo em x, temos $\|Df(x+\theta\eta) - Df(x)\|\|\eta\| < \epsilon\|\eta\|$, sempre que $\|\eta\| < r$, o que implica

$$\|f(x+\eta) - f(x) - Df(x)(\eta)\| < \epsilon\|\eta\|\,,$$

sempre que $\|\eta\| < r$. Dividindo ambos os lados da desigualdade acima por $\|\eta\|$ e passando ao limite com $\|\eta\| \to 0$, obtemos

$$\lim_{\|\eta\|\to 0} \frac{\|f(x+\eta) - f(x) - Df(x)(\eta)\|}{\|\eta\|} < \epsilon, \ \forall\, \epsilon > 0.$$

Então

$$\lim_{\|\eta\|\to 0} \frac{\|f(x+\eta) - f(x) - Df(x)(\eta)\|}{\|\eta\|} = 0.$$

Logo

$$Df(x) = f'(x).$$

Além disso, como Df é contínuo em x, segue que f' é contínua em x.

∎

Proposição 1.9 (Regra da Cadeia) *Seja X um espaço vetorial, Y e Z espaços lineares normados. Suponha*

(i) $h : X \longrightarrow Y$ Gâteaux diferenciável em X;

(ii) $g : Y \longrightarrow Z$ Fréchet diferenciável em Y.

Então $f = g \circ h : X \longrightarrow Z$ é Gâteaux diferenciável em X e $Df(x) = g'(h(x))Dh(x)$. Se X também é um espaço linear normado e h é Fréchet diferenciável em X, então f é Fréchet diferenciável em X e $f'(x) = g'(h(x))h'(x)$.

Prova: Dados $x, \eta \in X$, sejam $y = h(x)$ e $\Delta y = h(x+t\eta) - h(x)$. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+t\eta)-f(x)}{t} &= \frac{g(h(x+t\eta))-g(h(x))}{t} = \frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{t} \\
&= \frac{g'(y)(\Delta y) + g(y+\Delta y) - g(y) - g'(y)(\Delta y)}{t} \\
&= g'(y)\left(\frac{h(x+t\eta)-h(x)}{t}\right) \\
&+ \frac{g(y+\Delta y)-g(y)-g'(y)(\Delta y)}{\|\Delta y\|}\frac{\|h(x+t\eta)-h(x)\|}{t}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{f(x+t\eta)-f(x)}{t} - g'(y)\left(\frac{h(x+t\eta)-h(x)}{t}\right) + g'(y)Dh(x)(\eta) - g'(y)Dh(x)(\eta)$$

$$= \frac{g(y+\Delta y)-g(y)-g'(y)(\Delta y)}{\|\Delta y\|}\frac{\|h(x+t\eta)-h(x)\|}{t}.$$

Reorganizando os termos e aplicando a norma, obtemos

$$\left\|g'(y)Dh(x)(\eta) - \left(\frac{f(x+t\eta)-f(x)}{t}\right) - g'(y)\left(Dh(x)(\eta) - \left(\frac{h(x+t\eta)-h(x)}{t}\right)\right)\right\|$$

$$= \left\|\frac{g(y+\Delta y)-g(y)-g'(y)(\Delta y)}{\|\Delta y\|}\frac{\|h(x+t\eta)-h(x)\|}{t}\right\|.$$

Note que

$$\left\|g'(y)Dh(x)(\eta) - \left(\frac{f(x+t\eta)-f(x)}{t}\right)\right\| - \left\|g'(y)\left(Dh(x)(\eta) - \left(\frac{h(x+t\eta)-h(x)}{t}\right)\right)\right\|$$

$$\leq \left\|\frac{g(y+\Delta y)-g(y)-g'(y)(\Delta y)}{\|\Delta y\|}\frac{\|h(x+t\eta)-h(x)\|}{t}\right\|,$$

implicando que

$$\begin{aligned}
\left\|g'(y)Dh(x)(\eta) - \left(\frac{f(x+t\eta)-f(x)}{t}\right)\right\| &\leq \|g'(h(x))\|\left\|Dh(x)(\eta) - \left(\frac{h(x+t\eta)-h(x)}{t}\right)\right\| \\
&+ \frac{\|g(y+\Delta y)-g(y)-g'(y)(\Delta y)\|}{\|\Delta y\|}\frac{\|h(x+t\eta)-h(x)\|}{|t|}. \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

Agora, usando (ii) da Proposição 1.3, obtemos

$$\|\Delta y\| = \|h(x+t\eta)-h(x)\| \leq \sup_{0<\theta<1} \|tDf(x+\theta(t\eta))(\eta)\|,$$

logo $\|\Delta y\| \to 0$ quando $t \to 0$. Assim, passando (1.6) ao limite com $t \to 0$ e consequentemente $\|\Delta y\| \to 0$, obtemos

$$\lim_{t\to 0}\left\|g'(y)Dh(x)(\eta) - \left(\frac{f(x+t\eta)-f(x)}{t}\right)\right\| \leq \lim_{t\to 0}\|g'(h(x))\|\left\|Dh(x)(\eta) - \left(\frac{h(x+t\eta)-h(x)}{t}\right)\right\|$$
$$+ \lim_{t,\|\Delta y\|\to 0}\frac{\|g(y+\Delta y)-g(y)-g'(y)(\Delta y)\|}{\|\Delta y\|}\frac{\|h(x+t\eta)-h(x)\|}{|t|}.$$

Daí, segue que

$$\lim_{t\to 0}\left\|g'(y)Dh(x)(\eta) - \left(\frac{f(x+t\eta)-f(x)}{t}\right)\right\| = 0.$$

Consequentemente

$$g'(h(x))Dh(x)(\eta) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t\eta)-f(x)}{t},$$

ou seja,

$$g'(h(x))Dh(x)(\eta) = Df(x)(\eta),\ \forall\ \eta \in X.$$

Portanto, $Df(x) = g'(h(x))Dh(x)$.

Se X é um espaço linear normado e h é Fréchet diferenciável em X. Dados $x, \eta \in X$, sejam $y = h(x)$ e $\Delta y = h(x+t\eta) - h(x)$. Então,

$$\frac{\|f(x+t\eta)-f(x)-g'(h(x))h'(x)(t\eta)\|}{|t|} = \frac{\|g(h(x+t\eta))-g(h(x))-g'(h(x))h'(x)(t\eta)\|}{|t|}$$

$$= \frac{\|g(y+\Delta y)-g(y)-g'(y)(\Delta y)+g'(y)(\Delta y)-g'(y)h'(x)(t\eta)\|}{|t|}$$
$$\leq \frac{\|g(y+\Delta y)-g(y)-g'(y)(\Delta y)\|}{|t|}\frac{\|\Delta y\|}{\|\Delta y\|} + \frac{\|g'(y)(\Delta y)-g'(y)h'(x)(t\eta)\|}{|t|}$$
$$\leq \frac{\|g(y+\Delta y)-g(y)-g'(y)(\Delta y)\|}{\|\Delta y\|}\frac{\|h(x+t\eta)-h(x)\|}{|t|}$$
$$+ \|g'(y)\|\frac{\|h(x+t\eta)-h(x)-h'(x)(t\eta)\|}{|t|}.$$

Como foi observado na primeira parte da demonstração $\|\Delta y\| \to 0$ quando $t \to 0$, logo, passando ao limite com $t \to 0$ e consequentemente $\|\Delta y\| \to 0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} & \frac{\|f(x+t\eta)-f(x)-g'(h(x))h'(x)(t\eta)\|}{|t|} \\
& \leq \lim_{t,\|\Delta y\|\to 0} \frac{\|g(y+\Delta y)-g(y)-g'(y)(\Delta y)\|}{\|\Delta y\|}\frac{\|h(x+t\eta)-h(x)\|}{|t|} \\
& \quad + \lim_{t\to 0}\|g'(y)\|\frac{\|h(x+t\eta)-h(x)-h'(x)(t\eta)\|}{|t|}.
\end{aligned}
$$

Sendo g e h Fréchet diferenciáveis, resulta

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|f(x+t\eta)-f(x)-g'(h(x))h'(x)(t\eta)\|}{|t|}=0.$$

Logo f é Fréchet diferenciável e, pela unicidade da derivada de Fréchet (Proposição1.5), segue que $f'(x)=g'(h(x))h'(x)$.

■

1.3 Convolução de Funções

Nesta seção, seguindo [8] e [9], definimos o produto convolução de funções e exibimos alguns resultados importantes que envolvem tal conceito.

Definição 1.3 *Dadas duas funções mensuráveis $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. A convolução de f e g é a função $f * g$ definida por*

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy\,,$$

para todo x tal que a integral exista.

A seguir, algumas propriedades elementares da convolução.

Proposição 1.10 *Assumindo que todas as integrais em questão existam, temos:*

(i) $f*g=g*f$;

(ii) $f*(g+h)=f*g+f*h$;

(iii) $(f*g)*h=f*(g*h)$.

Prova: Para (i) basta fazer a mudança de variável $z=x-y$. Daí

$$
\begin{aligned}
(f*g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)dz \\
&= (g*f)(x).
\end{aligned}
$$

Para (ii),temos

$$\begin{aligned}
[f*(g+h)](x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)[(g+h)(y)]dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)[g(y)+h(y)]dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)h(y)dy \\
&= (f*g)(x)+(f*h)(x).
\end{aligned}$$

Por fim, usando (i) e o Teorema de Fubini (ver [3]), temos que

$$\begin{aligned}
[(f*g)*h](x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x-y)h(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-y-z)dzh(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z-y)h(y)dydz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)(g*h)(x-z)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (g*h)(x-z)f(z)dz \\
&= [(g*h)*f](x) \\
&= [f*(g*h)](x),
\end{aligned}$$

provando (iii).

■

Teorema 1.1 *(Ver [9], p.242.) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ é limitada para todo $i = 1, 2, ..., n$, então $f * g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(f*g) = f * \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)$ para todo $i = 1, 2, ..., n$.*

Prova: Por (i) da Proposição 1.10, temos que

$$(f*g)(x) = (g*f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)dy.$$

Como a função $x \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i} g(x-y)f(y)$ é contínua, então pela Regra de Leibniz (ver [15]), segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}(f*g)(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} g(x-y)f(y)dy \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} * f\right)(x) \\
&= \left(f * \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)\right)(x),
\end{aligned}$$

para todo $i = 1, 2, ..., n$.

∎

A seguir, $\|\cdot\|_p$ denota a norma em L^p, $1 \leq p \leq \infty$ (ver Apêndice A).

Teorema 1.2 (Desigualdade de Young Generalizada, [8]) *Sejam $X = \mathbb{R}^n$, $C > 0$ e seja K uma função mensurável sobre $X \times X$ tal que*

$$\sup_{x\in X} \int_X |K(x,y)|dy \ \leq \ C, \ \sup_{y\in X} \int_X |K(x,y)|dx \ \leq \ C.$$

Se $f \in L^p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$, a função Tf definida por

$$Tf(x) = \int_X K(x,y)f(y)dy$$

está bem definida para quase todo ponto, $Tf \in L^p(X)$ e $\|Tf\|_p \leq C\|f\|_p$.

Prova: Sejam $1 < p < \infty$ e q o expoente conjugado de p, isto é, q satisfaz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Note que

$$|K(x,y)f(y)| = |K(x,y)|^{\frac{1}{q}}(|K(x,y)|^{\frac{1}{p}}|f(y)|).$$

Daí,

$$\begin{aligned} |Tf(x)| \ &\leq \ \int_X |K(x,y)f(y)|dy \\ &= \ \int_X |K(x,y)|^{\frac{1}{q}}(|K(x,y)|^{\frac{1}{p}}|f(y)|)dy. \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Hölder (ver Proposição A.1), temos

$$\begin{aligned} |Tf(x)| \ &\leq \ \left(\int_X |K(x,y)|dy\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_X |K(x,y)||f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \ C^{\frac{1}{q}} \left(\int_X |K(x,y)||f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Elevando ambos os lados a potência p, integrando e usando o Teorema de Fubini(ver [3]), obtemos

$$\begin{aligned} \int_X |Tf(x)|^p dx \ &\leq \ C^{\frac{p}{q}} \int_X \int_X |K(x,y)||f(y)|^p dydx \\ &\leq \ C^{\frac{p}{q}+1} \int_X |f(y)|^p dy. \end{aligned}$$

Agora, elevando ambos os membros a $\frac{1}{p}$, segue que

$$\|Tf\|_p \ \leq \ C^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}\|f\|_p = C\|f\|_p \, .$$

Esta estimativa implica, em particular, que a integral definida por $Tf(x)$ converge absolutamente q.t.p., assim, o resultado segue para o caso $1 < p < \infty$. O caso $p = 1$ segue de maneira similar e requer somente a hipótese $\int_X |K(x,y)|dx \leq C$. Por fim, o caso $p = \infty$ é trivial e requer somente a hipótese $\int_X |K(x,y)|dy \leq C$.

∎

Teorema 1.3 (Desigualdade de Young, [8]) *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, então $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|f * g\|_p \;\leq\; \|f\|_1 \|g\|_p \,.$$

Prova: Tomando $K(x,y) = f(x-y)$, temos

$$Tg(x) = \int_X f(x-y)g(y)dy = (f * g)(x).$$

Daí, basta aplicar o Teorema 1.2.

∎

Capítulo 2

Algumas Propriedades de Equações Diferenciais em Espaços de Banach

Neste capítulo apresentamos resultados sobre existência, unicidade e diferenciabilidade de soluções de equações diferenciais ordinárias em espaços de Banach.

2.1 Teoremas de Existência Local de Solução

Nesta seção, seguindo as referências [2], [6], [14] e [19], exibimos resultados sobre existência local e unicidade de solução.

Seja X um espaço de Banach. Consideramos em X a seguinte equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{2.1}$$

com

$$\begin{array}{rccc} f & : & I \times X & \longrightarrow & X \\ & & (t,x) & \longmapsto & f(t,x) \end{array}$$

onde f é uma função contínua, e I um intervalo de $\mathbb{R}$.

Uma função continuamente diferenciável $\phi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$ é dita uma solução (clássica) de (2.1) no intervalo I se:

(i) O gráfico de ϕ em I, isto é, $\{(t,\phi(t)); t \in I\}$ está contido no domínio de f;

(ii) $\frac{d}{dt}\phi(t) = f(t,\phi(t))$ para todo $t \in I$.

O problema de Cauchy para (2.1), com condições iniciais (t_0, x_0), é denotado por

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \;\; x(t_0) = x_0\,, \;\; (t_0, x_0) \in I \times X. \tag{2.2}$$

Lema 2.1 *O problema (2.2) é equivalente à equação integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds\,, \quad t_0, t \in I. \tag{2.3}$$

Prova: Integrando ambos os membros de (2.1) de t_0 a t obtemos

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Reciprocamente, derivando com relação a t ambos os lados de (2.3) obtemos

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)),$$

além disso, de (2.3) temos $x(t_0) = x_0$.

■

Observação 2.1 *Se no problema de Cauchy (2.2) tivermos*

$$f(t,x) = Ax + g(t,x)\,,$$

com $A : X \longrightarrow X$ um operador linear limitado, então a solução de (2.2) é dada por

$$\varphi(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} g(s, x(s))ds\,,$$

onde e^{At} é o operador linear limitado (ver [17]), dado por $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$.
De fato, temos

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g(t,x).$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade acima por e^{-At} obtemos

$$e^{-At}\frac{dx}{dt} - e^{-At}Ax = e^{-At}g(t,x).$$

Observando que o lado esquerdo da igualdade acima é $\frac{d}{dt}\left[e^{-At}x\right]$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-At}x\right] = e^{-At}g(t,x). \tag{2.4}$$

Integrando (2.4) de t_0 a t, obtemos

$$e^{-At}x(t) - e^{-At_0}x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-As}g(s, x(s))ds.$$

Agora, multiplicando ambos os membros da igualdade acima por e^{At}, segue que

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}g(s, x(s))ds.$$

Se $X = \mathbb{R}^n$ e f é contínua, então o clássico Teorema de Peano garante a existência de soluções locais para (2.1). Mais precisamente, temos:

Teorema 2.1 (Teorema de Peano) *Consideremos um conjunto aberto* $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*. Seja* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *contínua em* Ω*, então para qualquer* $(t_0, x_0) \in \Omega$*,*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

tem pelo menos uma solução passando por (t_0, x_0)*, a qual está definida num intervalo* $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ *para algum* $\alpha > 0$*.*

Prova: (Ver [11], p. 14, Teorema 1.1).

■

Entretanto, o Teorema de Peano deixa de ser válido se X tem dimensão infinita, como mostra o contra-exemplo a seguir.

Contra-exemplo para o Teorema de Peano em dimensão infinita (ver [2] e [7]): Consideremos X o espaço de Banach contido em l^∞, dado por

$$c_0 = \left\{(x_n); x_n \in \mathbb{R}\ \forall\ n \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} x_n = 0\right\},$$

com norma $\|x\| = \sup_n |x_n|$. Para todo $x = (x_n) \in X = c_0$, tome y como sendo a sequêcia (y_n) definida por

$$y_n = \sqrt{|x_n| + \frac{1}{n+1}}\ .$$

Segue que $y_n \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, assim $y = (y_n) \in c_0$. Considere $y = f(x)$. Como a função $\sqrt{|x|}$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$, então $x \longmapsto f(x)$ é uma aplicação contínua do espaço c_0 nele mesmo. No entanto, mostraremos que a equação diferencial

$$x' = f(x) \tag{2.5}$$

não admite nenhuma solução em c_0, assumindo o valor zero no instante $t = 0$, isto é,

$$x(0) = \odot, \tag{2.6}$$

onde $\odot = (0, 0, ...) \in c_0$.

De fato, suponhamos por contradição, que $x(t)$ seja uma solução do problema (2.5)-(2.6), então como (2.5)-(2.6) é equivalente a

$$x_n' = f(x_n)$$

$$x_n(0) = 0,$$

para todo n, podemos escrever $x(t) = (x_n(t))$, onde cada n-ésima coordenada x_n é uma função derivável em uma vizinhaça de $t = 0$ e satisfaz a equação diferencial ordinária unidimensional

$$\begin{aligned} x_n'(t) &= \sqrt{|x_n(t)| + \frac{1}{n+1}} \\ x_n(0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

De (2.7) segue que $x_n(t)$ é estritamente crescente em t e, uma vez que $x_n(0) = 0$, então $x_n(t) > 0$ para $0 < t < \tau$, onde τ é suficientemente pequeno. Assim,

$$x_n'(t) > \sqrt{x_n(t)}\,,\ 0 < t < \tau\,,$$

ou ainda

$$\frac{x_n'(t)}{\sqrt{x_n(t)}} > 1,\ 0 < t < \tau. \tag{2.8}$$

Integrando ambos os lados de (2.8) de 0 a t obtemos

$$x_n(t) > \frac{t^2}{4}\,,\ 0 < t < \tau\,, \forall\ n.$$

Logo, x_n está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e para $0\ \leq t < \tau$ temos

$$x_n(t)\ \geq\ \frac{t^2}{4}\ ,\ \forall\ n.$$

Note que não importa o quão pequeno seja τ, a sequência $(x_n(t))$ não converge para zero quando $n \to \infty$, o que contradiz o fato que $x(t)$ é uma solução de (2.5)-(2.6) e que, em particular, $x(t) \in c_0$.

Um argumento análogo vale para a esquerda de $t = 0$. Portanto, mesmo f sendo contínua o problema (2.5)-(2.6) não possui solução em qualquer vizinhança de $t = 0$.

Vimos que quando X tem dimensão infinita, a continuidade da função f não é suficiente para assegurar a existência de soluções para o problema (2.2), no entanto, acrescentando a hipótese que a função f é localmente lipschitziana na segunda variável, podemos provar a existência local e unicidade de solução para o problema (2.2), de maneira análoga ao caso em que $X = \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.2 (Existência Local e Unicidade, [14]) *Consideremos o "cilindro"*

$$R_0 = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times X;\ t_0 \leq t \leq t_0 + a\ ,\ \|x - x_0\|\ \leq\ \beta\}\,,$$

onde a e β são constantes positivas. Seja $f : R_0 \longrightarrow X$ contínua em t para cada x fixado. Suponhamos que $\|f(t,x)\| \ \leq \ M$ para $(t,x) \in R_0$ e que f seja lipschitiziana em x, isto é, $\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \ \leq \ K\|x_1 - x_2\|$ para $(t,x_1),(t,x_2) \in R_0$, com K e M constantes não negativas. Então o problema de Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \ x(t_0) = x_0\,, \ (t_0,x_0) \in R_0\,, \tag{2.9}$$

tem uma única solução $x(t)$ sobre $[t_0, t_0 + \alpha]$, onde $\alpha = min\{a, \frac{\beta}{M}\}$.

Prova: Utilizaremos na demonstração o Teorema do Ponto Fixo para Contrações (ver Apêndice B). Consideramos inicialmente $C_\alpha = C([t_0, t_0 + \alpha], X)$, o espaço de Banach das funções contínuas $x : [t_0, t_0 + \alpha] \longrightarrow X$, com a norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in [t_0, t_0+\alpha]} \|x(t)\|.$$

Tomemos, neste espaço, a bola fechada

$$\overline{B}_\beta = \overline{B}_\beta(x_0) = \{x \in C_\alpha : \|x - x_0\|_\infty \ \leq \beta\}.$$

Definimos o operador

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Notemos que Tx é uma função contínua. Além disso, o operador T leva a bola fechada $\overline{B}_\beta$ nela mesma, isto é, $T\overline{B}_\beta \subset \overline{B}_\beta$, de fato

$$\begin{aligned}
\|(Tx)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds \right\| \ &\leq \ \int_{t_0}^{t} \|f(s,x(s))\|ds \\
&\leq \ M \int_{t_0}^{t} ds \\
&\leq \ M|t - t_0| \\
&\leq \ M\alpha \ \leq \ M\frac{\beta}{M} = \beta.
\end{aligned}$$

Logo

$$\sup_{t \in [t_0, t_0+\alpha]} \|(Tx)(t) - x_0\| \ \leq \ \beta \implies \|Tx - x_0\|_\infty \ \leq \ \beta.$$

Agora mostraremos que o operador T^n é uma contração sobre $\overline{B}_\beta$ para n suficientemente grande. Para isto, começamos observando que

$$\|(T^n x_2)(t) - (T^n x_1)(t)\| \ \leq \ K^n \frac{|t - t_0|^n}{n!} \|x_2 - x_1\|_\infty. \tag{2.10}$$

De fato, dados $x_1, x_2 \in \overline{B}_\beta$, para $n = 1$ temos

$$\begin{aligned}
\|(Tx_2)(t) - (Tx_1)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x_2(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))ds \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s))\| ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} K\|x_2(s) - x_1(s)\| ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} K\|x_2 - x_1\|_\infty ds \\
&\leq K|t - t_0| \|x_2 - x_1\|_\infty.
\end{aligned}$$

Supondo que (2.10) vale para $n = r$. Então para $n = r + 1$ temos

$$\begin{aligned}
\|(T^{r+1}x_2)(t) - (T^{r+1}x_1)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, (T^r x_2)(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s, (T^r x_1)(s))ds \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, (T^r x_2)(s)) - f(s, (T^r x_1)(s))\| ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} K\|(T^r x_2)(s) - (T^r x_1)(s)\| ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} K K^r \frac{|s - t_0|^r}{r!} \|x_2 - x_1\|_\infty ds \\
&= K^{r+1} \frac{|t - t_0|^{r+1}}{(r+1)!} \|x_2 - x_1\|_\infty \,,
\end{aligned}$$

provando (2.10). Logo, aplicando o $\sup_{t\in[t_0, t_0+\alpha]}$ em (2.10), obtemos

$$\|T^n x_2 - T^n x_1\|_\infty \;\leq\; \frac{(K\alpha)^n}{n!} \|x_2 - x_1\|_\infty.$$

Quando $n \to \infty$, segue que $\frac{(K\alpha)^n}{n!} \to 0$. Daí, existe $n_0 \geq 1$ tal que $\frac{(K\alpha)^{n_0}}{n_0!} < 1$. Assim, o operador T^n é uma contração em $\overline{B}_\beta$ para $n \to \infty$. Logo, pelo Lema da Contração (ver Teorema B.2), T^n possui um único ponto fixo $x(t) \in \overline{B}_\beta$. Pelo Corolário do Lema da Contração (ver Corolário B.2) o único ponto fixo de T^n é também o único ponto fixo de T. Portanto, segue que $x(t)$ é a única solução de (2.9), pois

$$(Tx)(t) = x(t) \implies x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \,,$$

daí,

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)) \;\text{ e }\; x(t_0) = x_0.$$

∎

2.2 Teoremas de Existência Global de Solução

Nesta seção, seguindo as referências [2], [6] e [14], mostramos a existência global de soluções, para tanto, vamos impor certas condições sobre a função f.

Iniciamos com o bem conhecido Lema de Gronwall (ver [22]).

Lema 2.2 *Sejam u, v funções contínuas não negativas em $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tais que, para $\alpha \geq 0$, satisfazem a desigualdade*

$$u(t) \;\leq\; \alpha + \int_a^t v(s)u(s)ds\,,\;\; t \in [a,b]. \tag{2.11}$$

Então,

$$u(t) \;\leq\; \alpha \exp\left(\int_a^t v(s)ds\right).$$

Em particular, se $\alpha = 0$ então $u \equiv 0$.

Prova: Se $\alpha > 0$. Seja

$$w(t) = \alpha + \int_a^t v(s)u(s)ds. \tag{2.12}$$

De (2.12) temos que $w(a) = \alpha$ e $w(t) \;\geq\; \alpha > 0$. Derivando w, obtemos

$$w'(t) = v(t)u(t).$$

De (2.11) e (2.12) temos $u(t) \leq w(t)$, então

$$w'(t) \;\leq\; v(t)w(t).$$

Como $w(t) > 0$, podemos escrever

$$\frac{w'(t)}{w(t)} \;\leq\; v(t). \tag{2.13}$$

Integrando (2.13) de a até t, obtemos

$$\int_a^t \frac{w'(s)}{w(s)}ds \;\leq\; \int_a^t v(s)ds \iff \ln(w(s))\Big|_a^t \;\leq\; \int_a^t v(s)ds.$$

Então

$$\ln(w(t)) - \ln(w(a)) \;\leq\; \int_a^t v(s)ds\,,$$

ou equivalentemente

$$\ln\left(\frac{w(t)}{w(a)}\right) \;\leq\; \int_a^t v(s)ds.$$

Sendo $w(a) = \alpha$, obtemos

$$\ln\left(\frac{w(t)}{\alpha}\right) \ \leq \ \int_a^t v(s)ds.$$

Daí resulta que

$$\frac{w(t)}{\alpha} \ \leq \ \exp\left(\int_a^t v(s)ds\right).$$

Logo,

$$w(t) \ \leq \ \alpha \exp\left(\int_a^t v(s)ds\right).$$

Como de (2.11) e (2.12) temos $u(t) \ \leq \ w(t)$, segue o resultado para $\alpha > 0$.

Para o caso $\alpha = 0$, note que

$$u(t) \ \leq \ \alpha' \exp\left(\int_a^t v(s)ds\right), \ \forall \ \alpha' > 0.$$

Passando ao limite com $\alpha' \to \alpha = 0$, obtemos

$$\lim_{\alpha' \to 0} u(t) \ \leq \ \lim_{\alpha' \to 0} \alpha' \exp\left(\int_a^t v(s)ds\right) = 0.$$

Sendo $u(t)$ não negativa, segue que $u(t) = 0$, para todo $t \in [a, b]$. Portanto, $u \equiv 0$.

■

No próximo teorema vamos impor uma condição sobre a função f que garantirá a existência global de solução para o problema de Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \ t \geq t_0\,; \ x(t_0) = x_0\,, \tag{2.14}$$

onde $f : J \times X \longrightarrow X$, com $J = [t_0, \infty)$, X é um espaço de Banach e $x_0 \in X$.

Teorema 2.3 *(Ver [14], p.161, Teorema 5.6.1) Suponha que:*

(i) $g \in C(J \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ e g seja não-decrescente em $r \geq 0$ para cada $t \in J$, e que a solução maximal $r(t; t_0, r_0)$ do problema de Cauchy escalar

$$r' = g(t, r), \ r(t_0) = r_0 \tag{2.15}$$

exista em todo J;

(ii) $f \in C(J \times X, X)$ satisfaz condições suficientes para garantir existência local de solução para o problema (2.14) através de qualquer ponto em $J \times X$, e que

$$\|f(t, x)\| \ \leq \ g(t, \|x\|) \ \textit{para todo} \ (t, x) \in J \times X.$$

Então, o maior intervalo de existência de qualquer solução $x(t;t_0,x_0)$ de (2.14) com $\|x_0\| \le r_0$ é J. Além disso, se $r(t;t_0,r_0)$ for limitada sobre J, então o limite $\lim_{t\to\infty} x(t;t_0,x_0)$ existe e é um elemento em X.

Prova: Seja $x(t) = x(t;t_0,x_0)$ uma solução de (2.14) com $\|x_0\| \le r_0$, que existe sobre $[t_0,\beta)$, para $t_0 < \beta < \infty$, e tal que o valor de β não possa ser estendido.

Definindo $m(t) = \|x(t)\|$ para $t_0 \le t < \beta$, temos que

$$m(t+h) - m(t) = \|x(t+h)\| - \|x(t)\| \;\le\; \|x(t+h) - x(t)\|\,,$$

então,

$$\frac{m(t+h)-m(t)}{h} \;\le\; \frac{\|x(t+h)-x(t)\|}{h}\,,\ (h>0). \tag{2.16}$$

Passando (2.16) ao limite com $h \to 0^+$ e usando (ii) obtemos

$$d^+m(t) \;\le\; \|x'(t)\| = \|f(t,x(t))\| \;\le\; g(t,\|x(t)\|) = g(t,m(t))\,,\ t_0 \le t < \beta\,,$$

onde $d^+m(t)$ é a derivada à direita de $m(t)$. Além disso, $m(t_0) = \|x(t_0)\| = \|x_0\| \le r_0$. Assim,

$$m(t) - m(t_0) \;\le\; \int_{t_0}^{t} g(s,m(s))ds\,,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} m(t) &\le m(t_0) + \int_{t_0}^{t} g(s,m(s))ds \\ &\le r_0 + \int_{t_0}^{t} g(s,\|x(s)\|)ds. \end{aligned}$$

Note que $r_0 + \int_{t_0}^{t} g(s,\|x(s)\|)ds$ é uma solução do problema escalar do tipo (2.15), com $g(t,r) = g(t,\|x(t)\|)$. Logo

$$\|x(t)\| \;\le\; r(t),\ t_0 \le t < \beta\,, \tag{2.17}$$

Agora, devemos estabelecer que $\lim_{t\to\beta^-} x(t)$ existe e é um elemento em X. Sendo $g(t,r)$ não-decrescente em $r \ge 0$, então para quaisquer t_1 e t_2 tais que $t_0 \le t_1 < t_2 < \beta$, temos

$$\begin{aligned} \|x(t_2) - x(t_1)\| &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(s,x(s))ds \right\| \\ &\le \int_{t_1}^{t_2} g(s,\|x(s)\|)ds \\ &\le \int_{t_1}^{t_2} g(s,r(s))ds \\ &= \int_{t_1}^{t_2} r'(s)ds. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| \ \leq \ r(t_2) - r(t_1). \tag{2.18}$$

Uma vez que $\lim_{t \to \beta^-} r(t)$ existe e é finito, então tomando os limites $t_1, t_2 \to \beta^-$, temos $\|x(t_2) - x(t_1)\| \to 0$. Logo, usando o critério de Cauchy para funções (ver [16]), concluímos que $\lim_{t \to \beta^-} x(t)$ existe.

Agora, defina $x(\beta) = \lim_{t \to \beta^-} x(t)$, e considere o problema de Cauchy

$$x' = f(t, x), \ x(\beta) = x_\beta \tag{2.19}$$

onde x_β é a condição inicial em $t = \beta$. Como estamos assumindo existência local de solução através de qualquer ponto em $J \times X$, segue que $x(t)$, solução de (2.19), existe em uma vizinhança de β, isto é, o intervalo de existência de solução pode ser estendido além de β, o que contradiz nossa hipótese de que o valor de β não pode ser estendido. Daí, qualquer solução de (2.14) existe sobre $[t_0, \infty)$, e então (2.17) e (2.18) valem com $\beta = \infty$.

Além disso, como $g(t, r) \geq 0$, então $r(t)$ é não-decrescente em J, e supondo que $r(t)$ é limitada sobre J, temos que $\lim_{t \to \infty} r(t)$ existe e é finito. Disto e das desigualdades (2.17) e (2.18), com $\beta = \infty$, segue que $\lim_{t \to \infty} x(t)$ existe e é um elemento em X.

■

Observação 2.2 *Substituindo $J = [t_0, \infty)$ por $\widetilde{J} = (-\infty, t_0]$ no Teorema 2.3, este pode ser estabelecido para o problema de Cauchy*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \ t \leq t_0, \ x(t_0) = x_0 \,, \tag{2.20}$$

com $f : \widetilde{J} \times X \longrightarrow X$. Então, substituindo J por $\widetilde{J}$ nas hipóteses do Teorema 2.3, a mesma conclusão do Teorema 2.3 vale para as soluções de (2.20) com $\lim_{t \to -\infty} x(t; t_0, x_0)$. Os intervalos J e $\widetilde{J}$ podem ser substituídos por quaisquer intervalos $[t_0, t_0 + \alpha)$ e $(t_0 - \alpha, t_0]$, respectivamente.

Corolário 2.1 *Assuma que $f \in C(J \times X, X)$ é globalmente Lipschitziana na variável x. Então, existe uma única solução do problema de Cauchy (2.14), definida sobre todo J, que depende continuamente do dado inicial (t_0, x_0).*

Prova: Seja $f \in C(J \times X, X)$ globalmente lipschitiziana na variável x, com constante de Lipschitz $K > 0$. Então, pelo Teorema 2.2, obtemos existência local e unicidade de solução para o problema (2.14).

Além disso, para todo $(t,x) \in J \times X$, temos

$$\|f(t,x)\| \;\leq\; K\|x\| + \|f(t,0)\|\,,$$

onde K é a constante de Lipschitz. Defina $F(t) = \|f(t,0)\|$. Tomando $g(t,r) = Kr + F(t)$, segue que $g \in C(J \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ e não decresce em $r \geq 0$ para cada $t \in J$, e ainda é globalmente Lipschitz em r. Note que

$$\|f(t,x)\| \;\leq\; K\|x\| + \|f(t,0)\| = K\|x\| + F(t) = g(t,\|x\|).$$

Além disso, sabemos que o problema de Cauchy

$$r' = g(t,r),\; r(t_0) = r_0 \in \mathbb{R}_+ \tag{2.21}$$

possui única solução (ver [22], p. 10, Exemplo 3), a qual pelo método de variação das constantes é dada por

$$r(t) = e^{K(t-t_0)}\left[r_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-K(s-t_0)}F(s)ds\right]. \tag{2.22}$$

Note que $r(t)$ existe em todo J. Portanto, segue do Teorema 2.3 que o maior intervalo de existência de qualquer solução $x(t,t_0,x_0)$ de (2.14) com $\|x\| \leq r_0$ é J. Como $f \in C(J \times X, X)$ é globalmente Lipschitz, então pelo Teorema 2.2, para todo $(t_0,x_0) \in J \times X$ temos unicidade de solução numa vizinhança de (t_0,x_0). Daí, supondo a existência de duas soluções de (2.14) definidas sobre todo J passando por (t_0,x_0), então numa vizinhança de (t_0,x_0) teríamos uma contradição. Portanto, existe uma única solução do problema (2.14) definida sobre todo J.

Para provar a dependência contínua com relação aos dados iniciais, sejam $x_1(t) = x(t;t_1,x_1)$ e $x_2(t) = x(t;t_2,x_2)$ soluções de (2.14) por (t_1,x_1) e (t_2,x_2), respectivamente. Então

$$\begin{aligned}\|x(t;t_1,x_1) - x(t;t_2,x_2)\| &= \|x(t;t_1,x_1) - x(t;t_2,x_1) + x(t;t_2,x_1) - x(t;t_2,x_2)\| \\ &\leq \|x(t;t_1,x_1) - x(t;t_2,x_1)\| + \|x(t;t_2,x_1) - x(t;t_2,x_2)\|\,. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\|x(t;t_2,x_1) - x(t;t_2,x_2)\| &= \left\|x_1 + \int_{t_2}^{t} f(s,x(s;t_2,x_1))ds - \left(x_2 + \int_{t_2}^{t} f(s,x(s;t_2,x_2))ds\right)\right\| \\ &\leq \|x_1 - x_2\| + \int_{t_2}^{t} \|f(s,x(s;t_2,x_1)) - f(s,x(s;t_2,x_2))\|ds \\ &\leq \|x_1 - x_2\| + \int_{t_2}^{t} K\|x(s;t_2,x_1) - x(s;t_2,x_2)\|ds.\end{aligned}$$

Usando o Lema 2.2 (Lema de Gronwall) em

$$\|x(t;t_2,x_1)-x(t;t_2,x_2)\| \;\leq\; \|x_1-x_2\|+\int_{t_2}^{t} K\|x(s;t_2,x_1)-x(s;t_2,x_2)\|ds\,,$$

temos

$$\|x(t;t_2,x_1)-x(t;t_2,x_2)\| \;\leq\; \|x_1-x_2\|e^{\int_{t_2}^{t} Kds}. \tag{2.24}$$

Substituindo (2.24) em (2.23), obtemos

$$\|x(t;t_1,x_1)-x(t;t_2,x_2)\| \;\leq\; \|x(t;t_1,x_1)-x(t;t_2,x_1)\|+\|x_1-x_2\|e^{\int_{t_2}^{t} Kds}.$$

Logo, $\|x(t;t_1,x_1)-x(t;t_2,x_2)\| \to 0$ quando $(t_1,x_1)\to(t_2,x_2)$, ou seja, $x(t;t_1,x_1)\to x(t;t_2,x_2)$ quando $(t_1,x_1)\to(t_2,x_2)$.

■

A seguir, temos um clássico resultado, devido a Cauchy, Lipschitz e Picard, para o caso particular de sistemas autônomos.

Teorema 2.4 (Cauchy, Lipschitz, Picard) *Sejam X um espaço de Banach e $F : X \longrightarrow X$ uma aplicação globalmente Lipschitz, isto é,*

$$\|F(x)-F(y)\| \;\leq\; L\|x-y\|\,,\ \forall\, x,y\in X,\ L\in\mathbb{R}_+.$$

Então, para todo $x_0\in X$, existe uma única solução $x\in C^1([0,\infty),X)$ que satisfaz o problema

$$\frac{dx}{dt}=F(x),\ x(0)=x_0. \tag{2.25}$$

Prova: Seguimos a mesma prova dada em [6].

Existência: Começamos observando que, pelo Lema 2.1, resolver (2.25) é equivalente a encontrar $x\in C^1([0,\infty),X)$ tal que

$$x(t)=x_0+\int_0^t F(x(s))ds. \tag{2.26}$$

Defina $E=\{x\in C^1([0,\infty),X); \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|x(t)\|<\infty\}$, para alguma constante $k>0$, a ser fixada posteriormente.

Afirmação 1: E é um espaço de Banach com a norma

$$\|x\|_E=\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|x(t)\|\,,\ k>0.$$

De fato, seja (x_n) uma sequência de Cauchy em E. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n > n_0$ temos

$$\|x_m - x_n\|_E = \sup_{t \geq 0} e^{-kt} \|x_m(t) - x_n(t)\| < \epsilon \, ,$$

daí,

$$e^{-kt} \|x_m(t) - x_n(t)\| < \epsilon \, , \ \forall \ m, n > n_0 \, , \ t \geq 0. \tag{2.27}$$

Para cada $t \in [0, \infty)$ fixado, segue de (2.27) que a sequência $(x_1(t), x_2(t), ...)$ é de Cauchy em X. Assim, existe $x^t \in X$ tal que $x_n(t) \to x^t$ quando $n \to \infty$. Defina

$$x : [0, \infty) \longrightarrow X,$$

tal que

$$x(t) = x^t = \lim_{n \to \infty} x_n(t) \, , \ \forall \ t \geq 0.$$

Observe que $x \in E$ e $x_n \to x$ em E. De fato, começamos notando que, como (x_n) é uma sequência de Cauchy em E, (x_n) é limitada em E. Com efeito, fixando $\epsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq n_0$ então

$$\|x_m - x_n\|_E < 1,$$

ou seja, se $n \geq n_0$ então

$$\|x_{n_0} - x_n\|_E < 1,$$

o que mostra que a sequência é limitada por $\max\{\|x_0\|_E, ..., \|x_{n_0 - 1}\|_E, \|x_{n_0}\|_E + 1\}$. Assim, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|x_n\|_E = \sup_{t \geq 0} e^{-kt} \|x_n(t)\| \ \leq \ c.$$

Por outro lado, pela definição de supremo, temos

$$e^{-kt} \|x_n(t)\| \ \leq \ \sup_{t \geq 0} e^{-kt} \|x_n(t)\| = \|x_n\|_E.$$

Daí,

$$e^{-kt} \|x_n(t)\| \ \leq \ c, \tag{2.28}$$

para todo $n \in \mathbb{N}, t \geq 0$ e $k > 0$ fixo. Passando o limite em (2.28) com $n \to \infty$, obtemos

$$e^{-kt} \|x(t)\| \ \leq \ c.$$

Assim,

$$\|x\|_E = \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|x(t)\| \ \leq \ c\,,$$

logo, $x \in E$. Para concluírmos a afirmação 1 é suficiente verificarmos que $x_n \to x$, uniformemente em $[0,\infty)$. Para isso, notamos que, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_m(t) - x_n(t)\| < \frac{\epsilon}{2} \tag{2.29}$$

para todo $m, n \geq n_0$ e qualquer $t \in [0,\infty)$. Então, fazendo $m \to \infty$ em (2.29), concluímos que, para $n > n_0$

$$\|x(t) - x_n(t)\| \ \leq \ \frac{\epsilon}{2} < \epsilon\,,$$

para todo $t \in [0,\infty)$, ou seja, segue que $x_n \to x$ uniformemente em $[0,\infty)$.

Além disso, para todo $x \in E$, a função

$$(\Phi x)(t) = x_0 + \int_0^t F(x(s))ds\,,$$

pertence a E. De fato,

(i) a continuidade de Φ segue do fato de termos uma soma de funções contínuas.

(ii) Mostraremos que $\|\Phi(x)\|_E < \infty$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x)\|_E &= \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|(\Phi(x))(t)\| \ = \ \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\left\|x_0 + \int_0^t F(x(s))ds\right\| \\
&\leq \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|x_0\| + \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\int_0^t \|F(x(s))\|ds. \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

A primeira parcela de (2.30) é claramente finita. Para mostrarmos que a segunda parcela é finita, observamos que

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|F(x(s))\|ds &= \int_0^t \|F(x(s)) - F(0) + F(0)\|ds \\
&\leq \int_0^t \|F(x(s)) - F(0)\|ds + \int_0^t \|F(0)\|ds \\
&\leq \int_0^t L\|x(s)\|ds + \int_0^t \|F(0)\|ds \\
&= \int_0^t L\|x(s)\|ds + \|F(0)\|t.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\int_0^t \|F(x(s))\|ds \ \leq \ \int_0^t L\|x(s)\|ds + \|F(0)\|t. \tag{2.31}$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade (2.31) por e^{-kt}, obtemos

$$e^{-kt}\int_0^t \|F(x(s))\|ds \;\leq\; \int_0^t e^{-kt}L\|x(s)\|ds + e^{-kt}\|F(0)\|t.$$

Daí,

$$e^{-kt}\int_0^t \|F(x(s))\|ds \;\leq\; \int_0^t Le^{-kt}e^{-ks}e^{ks}\|x(s)\|ds + e^{-kt}\|F(0)\|t. \tag{2.32}$$

Agora, consideramos o conjunto

$$G = \{e^{-kt}\|F(0)\|t; t \geq 0\}.$$

Este conjunto é limitado superiormente por $\frac{\|F(0)\|}{ek}$. Com efeito, seja $g : [0,\infty) \longrightarrow X$ a função definida por

$$g(t) = e^{-kt}\|F(0)\|t.$$

Derivando com relação a t, temos

$$g'(t) = \frac{\|F(0)\| - \|F(0)\|tk}{e^{kt}}.$$

Note que g tem um máximo local em $t = \frac{1}{k}$. Como a função g está definida em um domínio conexo, é contínua, $g'(t) > 0, \forall\, t < \frac{1}{k}$ e $g'(t) < 0, \forall\, t > \frac{1}{k}$, segue que este máximo é global, o que implica que G é um conjunto limitado superiormente. Portanto, $\sup G$ existe e é finito. A seguir, $\sup G$ será denotado por M.

Assim, de (2.32), temos que

$$\begin{aligned}
e^{-kt}\int_0^t \|F(x(s))\|ds &\leq \int_0^t Le^{-kt}e^{ks}e^{-ks}\|x(s)\|ds + M \\
&\leq \int_0^t Le^{-kt}e^{ks}\sup_{s\geq 0} e^{-ks}\|x(s)\|ds + M \\
&= \int_0^t L\|x\|_E e^{-kt}e^{ks}ds + M \\
&= L\|x\|_E e^{-kt}\int_0^t e^{ks}ds + M \\
&= L\|x\|_E e^{-kt}\left[\frac{e^{kt}}{k} - \frac{1}{k}\right] + M \\
&= L\|x\|_E \left[\frac{1}{k} - \frac{e^{-kt}}{k}\right] + M \\
&\leq L\|x\|_E\frac{1}{k} + M.
\end{aligned}$$

Logo,

$$e^{-kt}\int_0^t \|F(x(s))\|ds \ \leq \ L\|x\|_E\frac{1}{k}+M\,,$$

implicando que

$$\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\int_0^t \|F(x(s))\|ds \ \leq \ L\|x\|_E\frac{1}{k}+M<\infty. \tag{2.33}$$

Portanto, substituindo (2.33) em (2.30), concluímos que $\|\Phi(x)\|_E<\infty$.

Afirmação 2: Se escolhermos $k>L$, Φ é uma contração no conjunto $\{\Phi\in E; (\Phi x)(0)=x_0\}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x(s))-\Phi(y(s))\| &= \left\|\int_0^t [F(x(s))-F(y(s))]ds\right\| \\
&\leq \int_0^t \|F(x(s))-F(y(s))\|ds \\
&\leq \int_0^t L\|x(s)-y(s)\|ds.
\end{aligned}$$

Daí, multiplicando ambos os lados por e^{-kt} e procedendo como em (ii), obtemos

$$\|\Phi(x)-\Phi(y)\|_E \ \leq \ \frac{L}{k}\|x-y\|_E.$$

Portanto, se $k>L$, Φ é uma contração, logo possui um único ponto fixo x, o qual satisfaz (2.26) e consequentemente satisfaz (2.25).

Unicidade: Sejam x_1 e x_2 duas soluções de (2.25). Defina

$$\varphi(t)=\|x_1(t)-x_2(t)\|.$$

Por (2.26) temos que

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \|x_1(t)-x_2(t)\| = \left\|\int_0^t [F(x_1(s))-F(x_2(s))]ds\right\| \\
&\leq \int_0^t \|F(x_1(s))-F(x_2(s))\|ds \ \leq \ L\int_0^t \|x_1(s)-x_2(s)\|ds \\
&= L\int_0^t \varphi(s)ds.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\varphi(t) \ \leq \ L\int_0^t \varphi(s)ds\,,\ \forall\, t\geq 0. \tag{2.34}$$

Usando o Lema 2.2 (Lema de Gronwall) em (2.34), segue que $\varphi\equiv 0$, o que implica $x_1=x_2$.

$\blacksquare$

2.3 Diferenciabilidade da Solução

Nesta seção exibimos um resultado sobre a suavidade da solução com relação aos dados iniciais e a parâmetros.

Lema 2.3 *Sejam A um operador linear limitado sobre um espaço de Banach X, e $0 < T < \infty$. Então as aplicações:*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ \times X & \longrightarrow & C([0,T],X) \\ (\mu,\xi) & \mapsto & \{e^{-\mu At}\xi \ , \ 0 \leq t \leq T\} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ \times C([0,T],X) & \longrightarrow & C([0,T],X) \\ (\mu,g) & \mapsto & \left\{ \int_0^t e^{-\mu A(t-s)} g(s)ds \ , \ 0 \leq t \leq T \right\} \end{array}$$

são ambas analíticas.

Prova: (Ver [12], p.64, Lema 3.4.2).

■

Lema 2.4 *(Ver [12], p.64, Lema 3.4.3.) Sejam X, Y espaços de Banach, U um conjunto aberto em X, e J um intervalo compacto em $\mathbb{R}$. Se $F : J \times U \longrightarrow Y$ é contínua, então a composição*

$$\begin{array}{rcl} C(J,U) & \longrightarrow & C(J,Y) \\ x & \mapsto & F(\cdot \ , x(\cdot)) \end{array} \tag{2.35}$$

é contínua. Se $(t,x) \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k F(t,x)$ é contínua sobre $J \times U$ para $k = 0, 1, ..., r$, então a composição (2.35) é C^r.

Prova: Seja (x_n) uma sequência em $C(J,U)$ tal que $x_n(t) \to x(t)$ uniformemente em J quando $n \to \infty$. Suponha por contradição que a composta não é contínua, então existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\|F(\cdot, x_n(\cdot)) - F(\cdot, x(\cdot))\|_{C(J,Y)} \ \geq \ \epsilon > 0.$$

Então, existe (t_n) em J tal que

$$\|F(t_n, x_n(t_n)) - F(t_n, x(t_n))\|_Y \ \geq \ \frac{\epsilon}{2} > 0\,,$$

para todo n. Mas, sendo J compacto, existe uma subsequência $(t_n^{'})$ de (t_n) com $t_n^{'} \to t \in J$, daí

$$\|F(t_n^{'}, x_n(t_n^{'})) - F(t_n^{'}, x(t_n^{'}))\|_Y > 0\,,$$

o que contradiz a continuidade da F, pois $(t_n^{'}, x_n(t_n^{'})) \to (t, x(t))$ quando $n \to \infty$. Logo, se F é contínua, então a composição (2.35) é contínua, o que conclui a primeira parte da prova.

Agora, se $(t,x) \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k F(t,x)$ é contínua sobre $J \times U$ para todo $k = 0, 1, ..., r$. Então, note que $g_k(t,x) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k F(t,x)$ satisfaz as hipóteses da primeira parte do lema, para todo $k = 0, 1, ..., r$. Logo $x \mapsto g_k(\cdot\ , x(\cdot))$ é contínua para todo $k = 0, 1, ..., r$. Assim, segue o resultado.

■

Teorema 2.5 *(Ver [12], p.64, Teorema 3.4.4.) Sejam A um operador linear limitado sobre um espaço de Banach X, U um aberto em $\mathbb{R} \times X$, Λ um aberto em um espaço de Banach M. Suponha $f : U \times \Lambda \longrightarrow X$ com $f, D_x f, D_\lambda f$ contínuas sobre $U \times \Lambda$, e $t \mapsto f(t,x,\lambda)$ localmente Hölder contínua.*

Para $\mu > 0$, $\lambda \in \Lambda$, $(\tau, \xi) \in U$, seja $x(t) = x(t; \tau, \xi, \lambda, \mu)$ a solução máxima de

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + \mu A x &= f(t,x,\lambda)\,, \quad t > \tau \\ x(\tau) &= \xi. \end{aligned}$$

Então $(\xi, \lambda, \mu) \mapsto x(t; \tau, \xi, \lambda, \mu)$ é C^1 de $X \times \Lambda \times \mathbb{R}^+$ em X, sobre o domínio de existência da solução. As derivadas: $u(t) = D_\xi x(t)$, $v(t) = D_\lambda x(t)$, $w(t) = D_\mu x(t)$ são soluções suaves de

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + \mu A u &= D_x f(t, x(t), \lambda) u\,, \quad u(\tau) = I\,; \\ \frac{dv}{dt} + \mu A v &= D_x f(t, x(t), \lambda) v + D_\lambda f(t, x(t), \lambda)\,, \quad v(\tau) = 0\,; \\ \frac{dw}{dt} + \mu A w &= D_x f(t, x(t), \lambda) w - A x(t)\,, \quad w(\tau) = 0. \end{aligned}$$

Prova: Seguimos a prova dada por [12]. Sem perda de generalidade, consideramos $t \in [0, T]$ e $\tau = 0$. Defina o operador G sobre $C([0,T], X)$ (espaço das funções contínuas $x : [0,T] \longrightarrow X$), por

$$G(x; \xi, \lambda, \mu)(t) = e^{-\mu A t}\xi + \int_0^t e^{-\mu A (t-s)} f(s, x(s), \lambda) ds\,,\ 0 \le t \le T.$$

Para (ξ, λ, μ) em uma pequena vizinhança de $(\xi_0, \lambda_0, \mu_0)$, $(0, \xi_0, \lambda_0, \mu_0) \in U \times \Lambda \times \mathbb{R}^+$, G é uma contração em uma bola $B \subset C([0,T], X)$, cujo único ponto fixo é a solução $x(t; \tau, \xi, \lambda, \mu)$.

Agora, usando o Lema 2.4 notemos que $(x, \lambda) \mapsto f(\cdot\ , x(\cdot), \lambda) \in C([0, T], X)$ é continuamente diferenciável sobre $B \times \Lambda$, e G é a composição desta aplicação com uma aplicação analítica (ver Lema 2.3), assim, G é C^1 e, consequentemente, seu ponto fixo $x(t; \tau, \xi, \lambda, \mu)$ também é C^1 em seu intervalo de existência.

$\blacksquare$

Capítulo 3

Atrator Global para Sistemas Autônomos

Neste capítulo, seguindo as referências [6], [10] e [23], apresentamos alguns resultados sobre sistemas dinâmicos cuja evolução é descrita por um semigrupo.

3.1 Semigrupos e Conjuntos Invariantes

Definição 3.1 (ver [10], p. 35) *Sejam X um espaço métrico completo e $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Um C^r-Semigrupo, $r \geq 0$, é uma família de operadores (não necessariamente lineares) $S(t) : X \longrightarrow X$, $t \geq 0$, que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $S(0) = I$ (operador identidade sobre X);

(ii) $S(t + s) = S(t)S(s)$, $\forall\ t, s \geq 0$;

(iii) $S(t)x$ é contínuo em t e x, e tem derivada de Fréchet contínua em x até a ordem r, para $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times X$.

Consideramos sistemas dinâmicos cuja evolução é descrita por um semigrupo sobre X. Assim, se u_0 é o estado do sistema dinâmico no instante "zero", isto é, $S(0)u_0 = u_0$, então $u(s) = S(s)u_0$ é o estado do sistema no instante s e $S(t)u(s)$ é o estado do sistema no instante $t + s$.

Observação 3.1 *Seja X um espaço de Banach. Se $F : X \longrightarrow X$ é uma função globalmente Lipschitz, então a solução do problema de Cauchy*

$$x' = F(x),\ x(0) = x_0\,,$$

define um C^0-Semigrupo $S(t) : X \longrightarrow X$, $t \geq 0$. De fato, pelo Lema 2.1 a solução, $x(t) = x(t, x_0)$, do problema acima é dada por

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F(x(s))ds.$$

Defina $S(t)x_0 = x(t) = x(t, x_0)$, $t \geq 0$. Note que, dado $x_0 \in X$,

$$S(0)x_0 = x(0, x_0) = x_0\,,$$

logo $S(0) = I$ (operador identidade). Além disso, para todo $t, \tau \geq 0$ e $x_0 \in X$, temos

$$\begin{aligned} S(t+\tau)x_0 &= x(t+\tau, x_0) = x(t, x(\tau, x_0)) \\ &= S(t)x(\tau, x_0) = S(t)S(\tau)x_0\,. \end{aligned}$$

Assim, $S(t+\tau) = S(t)S(\tau)$. Por fim, devemos mostrar que $S(t)x_0$ é contínuo em t e em x_0. A continuidade em t segue da definição de $S(t)x_0$. Por outro lado, dados $x_0, y_0 \in X$, temos

$$\begin{aligned} \|S(t)x_0 - S(t)y_0\| &= \left\| x_0 + \int_0^t F(S(s)x_0)ds - y_0 - \int_0^t F(S(s)y_0)ds \right\| \\ &\leq \|x_0 - y_0\| + \int_0^t \|F(S(s)x_0) - F(S(s)y_0)\|ds. \end{aligned}$$

Como F é Lipschitz, então existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\|F(x) - F(y)\| \;\leq\; K\|x - y\|\,,\ \forall\ x, y \in X.$$

Daí,

$$\|S(t)x_0 - S(t)y_0\| \;\leq\; \|x_0 - y_0\| + \int_0^t K\|S(s)x_0 - S(s)y_0\|ds.$$

Usando o Lema de Gronwall (ver Lema 2.2) na desigualdade acima, obtemos

$$\|S(t)x_0 - S(t)y_0\| \;\leq\; \|x_0 - y_0\|e^{Kt}.$$

Assim, segue a continuidade de $S(t)x_0$ em x_0.

Os operadores $S(t)$ podem ou não serem injetivos. A injetividade de $S(t)$ é equivalente a unicidade "para trás"do sistema dinâmico. Quando $S(t)$, $t > 0$ é injetivo, denotamos por $S(-t)$ sua inversa que leva $S(t)X$ em X. Neste caso a família de operadores $\{S(t), t \in \mathbb{R}\}$ que satisfaz as propriedades da Definição 3.1 é chamada de *C^r-grupo.*

Dado $u_0 \in X$, definimos uma *órbita* iniciando em u_0 como o conjunto

$$\bigcup_{t \geq 0} S(t)u_0\,.$$

Analogamente quando existir, definimos uma *órbita* terminando em u_0 como o conjunto

$$\bigcup_{t\leq 0}\{u(t)\}.$$

onde $u : (-\infty, 0] \longrightarrow X$ tal que $u(0) = u_0$ e $u(t+s) = S(t)u(s)$, $\forall\ s, t$ tais que $s \leq 0$, $s+t \leq 0$ e $t \geq 0$ (ou equivalentemente $u(t) \in S(-t)^{-1}u_0$, $\forall\, t \geq 0$). As órbitas iniciando ou terminando em u_0 são também chamadas respectivamente de *órbita positiva* e *órbita negativa* por u_0. Uma *órbita completa* por u_0 é a união das órbitas positiva e negativa por u_0.

Para $u_0 \in X$, definimos o conjunto ω-limite de u_0 como

$$\omega(u_0) = \bigcap_{s\geq 0}\overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)u_0}\,.$$

Para um conjunto $A \subset X$, definimos o conjunto ω-limite de A como

$$\omega(A) = \bigcap_{s\geq 0}\overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)A}\,.$$

Analogamente, o conjunto α-limite de um ponto $u_0 \in X$ é definido como

$$\alpha(u_0) = \bigcap_{s\leq 0}\overline{\bigcup_{t\leq s} S(-t)^{-1}u_0}\,.$$

Para um conjunto $A \subset X$, definimos o conjunto α-limite de A como

$$\alpha(A) = \bigcap_{s\leq 0}\overline{\bigcup_{t\leq s} S(-t)^{-1}A}\,.$$

Lema 3.1 *Dado $\varphi \in X$, $\varphi \in \omega(A)$ se, e somente se, existe uma sequência (φ_n) em A e uma sequência $t_n \to \infty$ tal que $S(t_n)\varphi_n \to \varphi$ quando $n \to \infty$.*

Prova: Se $\varphi \in \omega(A)$, temos que

$$\varphi \in \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)A}\,,\ \forall\ s \geq 0\,,$$

daí, existe uma sequência (a_n) em $\bigcup_{t\geq 0} S(t)A$ tal que

$$a_n \to \varphi \text{ quando } n \to \infty, n \in \mathbb{N}.$$

Como $a_n \to \varphi$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \implies \|a_n - \varphi\|_X < 1.$$

Como $a_{n_0} \in \bigcup_{t\geq 0} S(t)A$, temos que existem $t_0 \geq 0$ e $\varphi_0 \in A$ tais que $a_{n_0} = S(t_0)\varphi_0$. Defina $x_0 = a_{n_0}$.

Como $\varphi \in \overline{\bigcup_{t\geq 1} S(t)A}$, existe uma sequência (b_n) em $\bigcup_{t\geq 1} S(t)A$ tal que

$$b_n \to \varphi\,,$$

daí, existe $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq n_0$ tal que se $n \geq n_1$, então

$$\|b_n - \varphi\|_X < \frac{1}{1+1}\,.$$

Como $b_{n_1} \in \bigcup_{t\geq 1} S(t)A$, então existem $t_1 \geq 1$ e $\varphi_1 \in A$ tais que $b_{n_1} = S(t_1)\varphi_1$. Defina $x_1 = b_{n_1}$.

Seguindo este procedimento, construímos uma sequência (x_n) com $x_n = S(t_n)\varphi_n$, $t_n \geq n$, $\varphi_n \in A$, tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N_0 \implies \|x_n - \varphi\|_X < \frac{1}{n+1} < \epsilon\,,$$

ou seja, existe (φ_n) em A e $t_n \to \infty$ tal que

$$S(t_n)\varphi_n \to \varphi \text{ quando } n \to \infty.$$

Reciprocamente, se $S(t_n)\varphi_n \to \varphi$ quando $n \to \infty$, podemos construir uma subsequência de t_n (a qual continuaremos denotando por t_n) tal que $t_n \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\varphi \in \overline{\{S(t_n)\varphi_n\ ,\ n \geq 0\}}.$$

Como qualquer subsequência de $(S(t_n)\varphi_n)$ também converge para φ, temos que

$$\varphi \in \overline{\{S(t_n)\varphi_n\ ,\ n \geq s\}}\ ,\ \forall\ s \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\varphi \in \overline{\{S(t_n)\varphi_n\ n \geq s\}} \subset \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)A}\ ,\ \forall\ s \in \mathbb{N}.$$

Daí,

$$\varphi \in \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)A}.$$

■

Observação 3.2 *De maneira similar ao Lema 3.1 mostra-se que $\varphi \in \alpha(A)$ se, e somente se, existe uma sequência (ψ_n) convergindo para φ em X e uma sequência $t_n \to \infty$, tal que $\varphi_n = S(t_n)\psi_n \in A$, para todo n.*

Definição 3.2 *Um ponto fixo, estacionário ou de equilíbrio do semigrupo $S(t)$ é um ponto $u_0 \in X$ tal que*

$$S(t)u_0 = u_0\,,\ \forall\ t \geq 0.$$

Definição 3.3 *Dizemos que um conjunto $A \subset X$ é positivamente invariante sob o semigrupo $S(t)$ se*

$$S(t)A \subset A\,,\ \forall\ t \geq 0.$$

Analogamente, $A \subset X$ é negativamente invariante se

$$S(t)A \supset A\,,\ \forall\ t \geq 0.$$

Definição 3.4 *Um conjunto $A \subset X$ é um conjunto invariante sob o semigrupo $S(t)$ se A é positivamente e negativamente invariante sob $S(t)$, ou seja,*

$$S(t)A = A\,,\ \forall\ t \geq 0. \tag{3.1}$$

Quando os operadores $S(t)$ são injetivos, a relação (3.1) implica que $S(-t)$ é bem definido para todo $t > 0$ e

$$S(t)A = A\,,\ \forall\ t \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Lema 3.2 *Dizer que um conjunto $A \subset X$ é invariante é equivalente a dizer que para qualquer $x \in A$, existe uma órbita completa por x, $\gamma(x)$, tal que $\gamma(x) \subset A$.*

Prova: Seguimos a mesma prova dada em [19]. Suponhamos que A seja invariante, ou seja, que $S(t)A = A$, para todo $t \geq 0$. Dado $x \in A$, note que existe $x_1 \in A$ tal que

$$S(1)x_1 = x.$$

Como $x_1 \in A$, existe $x_2 \in A$ tal que

$$S(1)x_2 = x_1\,,$$

e assim por diante. Fazendo $x_0 = x$, obtemos uma sequência (x_n) de pontos de A tal que

$$S(1)x_{n+1} = x_n\,,\ \text{para}\ n \geq 0. \tag{3.3}$$

Observe que, usando (3.3), temos

$$\begin{aligned} S(n)x_n &= \underbrace{S(1)\cdots S(1)}_{n\text{-vezes}}\, x_n \\ &= \underbrace{S(1)\cdots S(1)}_{(n-1)\text{vezes}}\, x_{n-1} \\ &= \underbrace{S(1)\cdots S(1)}_{(n-2)\text{vezes}}\, x_{n-2} \\ &\ \ \vdots \\ &= S(1)x_1 \\ &= x. \end{aligned}$$

Defina $\phi : (-\infty, \infty) \longrightarrow X$ por

$$\phi(t) = \begin{cases} S(t)x\ , & \text{se } t \geq 0 \\ S(n+t)x_n\ , & \text{se } t \in [-n, -n+1),\ \ n = 1, 2, ... \end{cases}$$

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $s \in [-n, -n+1)$. Se $t \geq -s$, então

$$\begin{aligned} S(t)\phi(s) &= S(t)S(n+s)x_n \\ &= S(t+s+n)x_n \\ &= S(t+s)S(n)x_n \\ &= S(t+s)x \\ &= \phi(t+s). \end{aligned}$$

Se $s \in [-k, -k+1)$, $k = 1, 2, ...$, e usando (3.3), então

$$\begin{aligned} \phi(s) &= S(k+s)x_k \\ &= S(k+s)S(1)x_{k+1} \\ &= S(k+s+1)x_{k+1} \\ &\ \ \vdots \\ &= S(k+j+s)x_{k+j} \end{aligned}$$

onde $j \in \{0, 1, 2, ...\}$. Se $n \geq k$ e $j = n-k$, então

$$\phi(s) = S(n+s)x_n \text{ se } s \in [-k, -k+1).$$

Agora, se $t < -s$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq k < n-1 \;\; \text{e} \;\; -1 \leq \tau \leq 0$$

tais que

$$-s = t + k - \tau. \tag{3.4}$$

Então,

$$\begin{aligned} S(t)\phi(s) &= S(t)S(n+s)x_n \\ &= S(t+s+n)x_n \\ &= S(n-(k-\tau))x_n. \end{aligned}$$

Daí, usando (3.4) e que $n = j + k$, com $j = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} S(t)\phi(s) &= S(1+k-(k-\tau))x_{k+1} \\ &= S(1+\tau)x_{k+1} \\ &= S(1+t+k+s)x_{k+1}. \end{aligned}$$

Note que de (3.4) tem-se $t + s \in [-(1+k), -k)$. Logo, pela definição de ϕ temos

$$S(1+t+k+s)x_{k+1} = \phi(t+s).$$

Portanto, em todos os casos temos $\phi(\mathbb{R}) \subset A$.

Reciprocamente, para $t = 0$ tem-se $S(0)A = A$. Para $t > 0$. Dado $x \in A$, existe uma órbita completa $\phi : (-\infty, \infty) \longrightarrow A$ tal que

$$\phi(0) = x \;\; \text{e} \;\; S(\tau)\phi(s) = \phi(\tau + s) \;, \; \text{para } \tau \geq 0 \text{ e } s \in \mathbb{R}.$$

Tomando $\tau = t$ e $s = 0$, temos

$$S(t)x = S(t)\phi(0) = \phi(t) \in A \;,$$

ou seja, $S(t)x \in A$. Logo, $S(t)A \subset A$. Para a inclusão contrária, observe que dado $x \in A$, tomando $\tau = t$ e $s = -t$, temos

$$S(t)\phi(-t) = \phi(t-t) = \phi(0) = x.$$

Logo, $A \subset S(t)A$. Portanto, $S(t)A = A$, para $t \geq 0$. ■

Definição 3.5 *Um subconjunto Y de um espaço métrico X é dito um conjunto relativamente compacto se seu fecho é compacto.*

Lema 3.3 *Assuma que para algum subconjunto $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, e para algum $t_0 > 0$, o conjunto $\bigcup_{t \geq t_0} S(t)A$ é relativamente compacto em X. Então $\omega(A)$ é não vazio, compacto e invariante. De maneira similar, se os conjuntos $S(t)^{-1}A$, $t \geq 0$, são não vazios e, se para algum $t_0 > 0$, $\bigcup_{t \geq t_0} S(t)^{-1}A$ for relativamente compacto, então $\alpha(A)$ é não vazio, compacto e invariante.*

Prova: Sendo A não vazio, então $\bigcup_{t \geq s} S(t)A$ é não vazio para todo $s \geq 0$, e os conjuntos $\overline{\bigcup_{t \geq t_0} S(t)A}$ são compactos não vazios. Como

$$\omega(A) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)A},$$

segue que $\omega(A)$ é fechado não vazio. Além disso, dado $\varphi \in \omega(A)$, então $\varphi \in \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)A}$, para todo $s \geq 0$, em particular $\varphi \in \overline{\bigcup_{t \geq t_0} S(t)A}$, daí, $\omega(A) \subset \overline{\bigcup_{t \geq t_0} S(t)A}$, logo $\omega(A)$ é compacto. Portanto, $\omega(A)$ é compacto não vazio. Pela caracterização dada no Lema 3.1, temos que $S(t)\omega(A) = \omega(A)$, para todo $t > 0$. Com efeito, se $\psi \in S(t)\omega(A)$, então $\psi = S(t)\varphi$, $\varphi \in \omega(A)$, e por $S(t)$ ser um operador contínuo de X em X, usando sequências (φ_n) e (t_n) (como no Lema 3.1), temos que

$$S(t + t_n)\varphi_n = S(t)S(t_n)\varphi_n \rightarrow S(t)\varphi = \psi\,,$$

o que mostra que $\psi \in \omega(A)$. Reciprocamente, se $\varphi \in \omega(A)$, tomamos novamente as sequências (φ_n), (t_n) e observamos que o conjunto dos pontos da sequência $(S(t_n - t)\varphi_n)$, com $t_n \geq t$, é relativamente compacto em X. Logo, existe uma subsequência $t_{n_i} \rightarrow \infty$ e $\psi \in X$ tal que

$$S(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \rightarrow \psi\ , \text{ quando } n_i \rightarrow \infty\,.$$

Assim, segue do Lema 3.1 que $\psi \in \omega(A)$, e por $S(t)$ ser contínuo segue que

$$S(t_{n_i})\varphi_{n_i} = S(t)S(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \rightarrow S(t)\psi = \varphi\ , \text{ quando } n_i \rightarrow \infty\,.$$

Portanto, $\varphi \in S(t)\omega(A)$. Para $\alpha(A)$ a demonstração é análoga.

∎

3.2 Conjunto Absorvente e Conjunto Atrator

Definição 3.6 *Um conjunto $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ é dito atrator sob o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ se:*

(i) A é um conjunto invariante sob $S(t)$;

(ii) A possui uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ tal que, para todo $u_0 \in \mathcal{U}$, $S(t)u_0$ tende para A quando $t \to \infty$, ou seja,

$$d(S(t)u_0, A) \to 0\,, \ \text{quando } t \to \infty\,.$$

A distância em (ii) é tomada como a distância de um ponto a um conjunto

$$d(x, A) = \inf_{y\in A} d(x, y).$$

Se A é um atrator, a maior vizinhança aberta $\mathcal{U}$ que satisfaz (ii) é chamada de *bacia de atração* de A. Dizemos que A atrai uniformemente um conjunto $B \subset \mathcal{U}$ se

$$d(S(t)B, A) \to 0\,, \ \text{quando } t \to \infty\,,$$

onde $d(B_0, B_1)$ é a semidistância entre dois conjuntos (B_0 e B_1), definida por

$$d(B_0, B_1) = \sup_{x\in B_0}\inf_{y\in B_1} d(x, y).$$

Para simplificar a notação, diremos apenas que A atrai B.

Definição 3.7 *Dizemos que $A \subset X$ é um atrator global (ou universal) sob o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ quando A é o maior (no sentido de inclusão de conjuntos) atrator compacto que atrai os conjuntos limitados de X.*

Definição 3.8 *Seja $B \subset X$ e $\mathcal{U}$ um conjunto aberto de X contendo B. Dizemos que B é absorvente em $\mathcal{U}$ se a órbita de qualquer subconjunto limitado de $\mathcal{U}$ entra em B após um certo tempo, ou seja, se para todo $B_0 \subset \mathcal{U}$, B_0 limitado, existe $t_1(B_0)$ tal que*

$$S(t)B_0 \subset B\,, \ \forall\ t \geq t_1(B_0). \tag{3.5}$$

Se B é absorvente em $\mathcal{U}$ também dizemos que B absorve os conjuntos limitados de $\mathcal{U}$.

Lema 3.4 *A existência de um atrator global A sob o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ implica a existência de um conjunto absorvente.*

Prova: Como A atrai os conjuntos limitados de X, ou seja, dado $C \subset X$, C limitado, temos que existe t_0 tal que $S(t)C$ esta contido em uma vizinhança aberta de A, para todo $t \geq t_0$. Esta vizinhança aberta será um conjunto absorvente deste sistema.

■

Para mostrar a recíproca do Lema 3.4 devemos considerar pelo menos uma das duas seguintes hipóteses:

(H_1) Os operadores $S(t)$ são uniformemente compactos para t grande, isto é, para todo conjunto limitado B existe t_0 tal que

$$\bigcup_{t \geq t_0} S(t)B$$

é relativamente compacto em X.

(H_2) X é um espaço de Banach e, para todo t, $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$, onde os operadores $S_1(\cdot)$ são uniformemente compactos para t grande (como em (H_1)) e $S_2(t)$ satisfaz, para todo conjunto limitado $C \subset X$,

$$r_c(t) = \sup_{\varphi \in C} \|S_2(t)\varphi\|_X \to 0\,, \text{ quando } t \to \infty\,.$$

A seguir apresentamos alguns lemas que serão úteis na demonstração da recíproca do Lema 3.4.

Lema 3.5 *Suponhamos válida a hipótese (H_2). Se (φ_n) é limitada e $t_n \to \infty$, então $S_2(t_n)\varphi_n \to 0$ e $S_1(t_n)\varphi_n$ é convergente se, e somente se, $S(t_n)\varphi_n$ converge (e terão limites iguais).*

Prova: Pela hipótese (H_2), $\|S_2(t_n)\varphi_n\|_X$ é uma sequência limitada superiormente pela sequência real $r_c(t_n)$ (pois (φ_n) é limitada, e portanto, contida em um limitado C) que converge para 0 e é limitada inferiormente pela sequência constante 0. Logo,

$$S_2(t_n)\varphi_n \to 0 \text{ quando } n \to \infty\,.$$

Para a segunda parte, observamos que, como

$$S(t_n)\varphi_n = S_1(t_n)\varphi_n + S_2(t_n)\varphi_n\,,$$

segue que $S(t_n)\varphi_n$ converge se, e somente se, $S_1(t_n)\varphi_n$ converge, e ambas as sequências convergem para o mesmo valor.

■

Lema 3.6 *Se o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaz (H_1) ou (H_2), então, para qualquer conjunto limitado não vazio B_0 de X, $\omega(B_0)$ é não vazio, compacto e invariante.*

Prova: Se a hipótese (H_1) é satisfeita, então para algum t_0 temos que $\bigcup_{t\geq t_0} S(t)B_0$ é relativamente compacto em X. E pelo Lema 3.3 segue o resultado.

Agora, supondo a hipótese (H_2), usando o Lema 3.5 e o Lema 3.1, temos que $\omega(B_0)$ é igual ao conjunto

$$\omega_1(B_0) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S_1(t)B_0}\,,$$

pois, dado $\varphi \in \omega(B_0)$, existe uma sequência (φ_n) em B_0 e uma sequência $t_n \to \infty$ tal que

$$S(t_n)\varphi_n \to \varphi \text{ quando } n \to \infty\,.$$

E pelo Lema 3.5, $S_1(t_n)\varphi_n \to \varphi$, assim, $\varphi \in \omega_1(B_0)$ o que implica que $\omega(B_0) \subset \omega_1(B_0)$. A inclusão contrária é análoga.

Agora, observamos que os conjuntos dados por $\overline{\bigcup_{t\geq s} S_1(t)B_0}$ são não vazios, fechados e diminuem (no sentido de inclusão) quando s cresce. Além disso, pela hipótese (H_2), temos que $\overline{\bigcup_{t\geq t_0} S_1(t)B_0}$ é compacto para algum t_0 suficientemente grande. Daí, $\omega(B_0)$ é não vazio e compacto.

Devemos mostrar agora que $\omega(B_0)$ é invariante, isto é, $S(t)\omega(B_0) = \omega(B_0)$. Inicialmente, tome $\psi \in S(t)\omega(B_0)$ dada por $\psi = S(t)\varphi$, $\varphi \in \omega(B_0)$. Pelo Lema 3.1 existem sequências (φ_n) e (t_n) tais que, usando as propriedades de semigrupo e de limites de sequências,

$$S(t+t_n)\varphi_n = S(t)S(t_n)\varphi_n \to S(t)\varphi = \psi\,.$$

Daí, existem sequências (φ_n) em B_0 e $t+t_n \to \infty$ que satisfazem a caracterização dada no Lema 3.1, ou seja, $\psi \in \omega(B_0)$, mostrando que $S(t)\omega(B_0) \subset \omega(B_0)$. Tomemos agora $\varphi \in \omega(B_0)$, e as sequências (t_n) e (φ_n) do Lema 3.1. Para $t_n - t \geq 0$, considere

$$S(t_n - t)\varphi_n = S_1(t_n - t)\varphi_n + S_2(t_n - t)\varphi_n\,.$$

Usando a hipótese (H_2), o conjunto dos pontos da sequência $(S_1(t_n - t)\varphi_n)$ é relativamente compacto, daí, existe uma subsequência convergente,

$$S_1(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \to \psi\ ,\ \text{quando } n_i \to \infty\,.$$

Pelo Lema 3.5, $S_2(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \to 0$ e

$$S(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \to \psi\,, \text{ quando } n_i \to \infty\,.$$

Assim, do Lema 3.1, segue que $\psi \in \omega(B_0)$ e

$$S(t)\psi = \lim_{n_i\to\infty} S(t)S(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} = \varphi.$$

Logo $\varphi = S(t)\psi$ com $\psi \in \omega(B_0)$, o que implica $\omega(B_0) \subset S(t)\omega(B_0)$. E portanto, $S(t)\omega(B_0) = \omega(B_0)$, ou seja, $\omega(B_0)$ é invariante, concluindo a demonstração.

∎

Lema 3.7 *Seja $\mathcal{U}$ um conjunto aberto convexo, e seja $K \subset \mathcal{U}$ um conjunto invariante compacto que atrai compactos sob o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Então, se (H_1) ou (H_2) ocorre, K é conexo.*

Para provar este lema, faremos uso da seguinte definição:

Definição 3.9 *Seja C um subconjunto de X. A casca convexa de C, denotada por $Conv\, C$, é o menor conjunto convexo que contém C.*

Prova do Lema 3.7: O fecho da casca convexa de K, $\overline{ConvK} = B$, é compacta (ver [1], p.185, Teorema 5.35), conexa e está contida em $\mathcal{U}$, portanto K atrai B.

Suponha por absurdo que K não é conexo. Daí, existe uma cisão não trivial de K, isto é, existem A_1 e A_2 tais que $A_1 \cap K \neq \emptyset$, $A_2 \cap K \neq \emptyset$, $K \subset A_1 \cup A_2$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Como $K \subset B$ e K é invariante, temos que

$$K = S(t)K \subset S(t)B.$$

Daí, $A_1 \cap S(t)B \neq \emptyset$ e $A_2 \cap S(t)B \neq \emptyset$. Como $S(t)$ é contínuo e B é conexo, segue que $S(t)B$ é conexo. Então, $A_1 \cup A_2$ não cobre $S(t)B$, portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in S(n)B$ tal que $x_n \notin A_1 \cup A_2$. Se a hipótese (H_1) é satisfeita, o conjunto dos pontos da seqência (x_n) é relativamente compacta. Por outro lado, se somente a hipótese (H_2) é satisfeita, escrevemos x_n como $x_n = S_1(n)y_n + S_2(n)y_n$. Por (H_2) e pelo Lema 3.5, o conjunto dos pontos da sequência $(S_1(n)y_n)$ será relativamente compacto e $S_2(n)y_n \to 0$, implicando que o conjunto dos pontos da sequência (x_n) é relativamente compacto. Como K atrai o conjunto dos pontos de (x_n), vai existir uma subsequência de (x_n) que converge para um ponto $x \in K$. Mas, este ponto x não pertence a $A_1 \cup A_2$, o que é um absurdo.

■

A seguir, supondo a hipótese (H_1) ou (H_2), mostramos que a existência de um conjunto absorvente implica a existência de um atrator global.

Teorema 3.1 *Seja X um espaço métrico, suponha que os operadores $S(t)$ (semigrupo) dados satisfaçam a hipótese (H_1) ou (H_2) e que existam um conjunto aberto $\mathcal{U}$ e um subconjunto limitado B de $\mathcal{U}$ tal que B é absorvente em $\mathcal{U}$. Então o conjunto $A = \omega(B)$ é o atrator compacto maximal que atrai os conjuntos limitados de $\mathcal{U}$ (isto é, A é atrator global). Além disso, se X é um espaço de Banach e $\mathcal{U}$ é convexo, então A é conexo.*

Prova: Suponhamos inicialmente que a hipótese (H_1) é satisfeita. Então, existe t_0 tal que $\bigcup_{t \geq t_0} S(t)B$ é relativamente compacto, e pelo Lema 3.3 $\omega(B)$ é não vazio, compacto e invariante. Supondo, por contradição, que A não é um atrator, ou seja, que para algum limitado B_0 de $\mathcal{U}$

$$d(S(t)B_0, A) \not\to 0 \text{ quando } t \to \infty\,,$$

segue que, existe um $\delta > 0$ e uma sequência $t_n \to \infty$, quando $n \to \infty$, tal que

$$d(S(t_n)B_0, A) \ \geq \ \delta > 0\,, \ \forall\, n.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ existirá um $b_n \in B_0$ tal que

$$d(S(t_n)b_n, A) \ \geq \ \frac{\delta}{2} > 0. \tag{3.6}$$

Como B é absorvente, $S(t_n)B_0$ estará contido em B para n suficientemente grande. Logo, $S(t_n)b_n$ estará contido em B, a partir de um n_0 suficientemente grande. Por (H_1), o conjunto dos pontos de $(S(t_n)b_n)$ é relativamente compacto. Daí, existe uma subsequência convergente tal que

$$\beta = \lim_{n_i \to \infty} S(t_{n_i})b_{n_i} = \lim_{n_i \to \infty} S(t_{n_i} - t_{n_0})S(t_{n_0})b_{n_i}\,.$$

Como $S(t_{n_0})b_{n_i} \in B$, segue que $\beta \in \omega(B) = A$, ou seja,

$$d(S(t_{n_i})b_{n_i}, A) \to 0 \text{ quando } n_i \to \infty\,,$$

o que contradiz (3.6). Portanto, A é atrator. Mostraremos agora que A é maximal. Seja A' um atrator limitado, $A' \subset \mathcal{U}$. Como A' é invariante e B é um conjunto absorvente, então para um t suficientemente grande, temos $A' = S(t)A' \subset B$. Como $A' \subset B$, segue que $A' = S(t)A' \subset S(t)B$, $t \geq 0$. Daí, $A' \subset \omega(B) = A$, mostrando que $A' \subset A$, logo, A é maximal. A conexidade de A segue do Lema 3.7, o que conclui a prova com a hipótese (H_1).

Supondo agora que apenas a hipótese (H_2) é satisfeita. Pelo Lema 3.6 $\omega(B)$ é não vazio, compacto e invariante. Supondo, por contradição, que A não é atrator, ou seja, que para algum B_0 limitado de $\mathcal{U}$

$$d(S(t)B_0, A) \not\to 0 \text{ quando } t \to \infty\,.$$

Daí, existe $\delta > 0$ e uma sequência $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, tal que

$$d(S(t_n)B_0, A) \;\geq\; \delta > 0\,,\; \forall\, n,$$

e para cada $n \in \mathbb{N}$ existirá um $b_n \in B_0$ tal que

$$d(S(t_n)b_n, A) \;\geq\; \frac{\delta}{2} > 0. \tag{3.7}$$

Como B é absorvente, $S(t_n)B_0$ estará contido em B para n suficientemente grande. Logo, $S(t_n)b_n$ estará contido em B a partir de um n_0 suficientemente grande. Por (H_2) o conjunto dos pontos de $(S_1(t_n)b_n)$ é relativamente compacto. Daí, pelo Lema 3.5 o conjunto dos pontos de $(S(t_n)b_n)$ é relativamente compacto. Portanto, existe uma subsequência convergente tal que

$$\beta = \lim_{n_i \to \infty} S(t_{n_i})b_{n_i} = \lim_{n_i \to \infty} S(t_{n_i} - t_{n_0})S(t_{n_0})b_{n_i}\,.$$

Como $S(t_{n_0})b_{n_i} \in B$, segue que $\beta \in \omega(B) = A$, ou seja,

$$d(S(t_{n_i})b_{n_i}, A) \to 0 \text{ quando } n_i \to \infty\,,$$

contradizendo (3.7). Portanto, A é atrator. De maneira análoga a prova com (H_1), mostra-se que A é maximal. A conexidade de A segue do Lema 3.7, concluindo a prova com (H_2).

■

Capítulo 4

Aplicação a Campos Neurais

Neste capítulo, seguindo [20] e [21], mostramos algumas propriedades para a equação de evolução não local:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u(x,t) + J * (f \circ u)(x,t) + h\,, \tag{4.1}$$

onde $u = u(x,t)$ é uma função de valores reais, $J \in C^1(\mathbb{R})$ é uma função não negativa com suporte no intervalo $[-1,1]$, f é uma função não negativa e não-decrescente e h é uma constante positiva. O símbolo $*$ acima denota o produto convolução.

4.1 Boa Posição em $L^2(S^1)$

Nesta seção, seguindo [20], mostramos que o problema de Cauchy para a equação (4.1) com condições iniciais em $L^2(S^1)$ (S^1 é a esfera unitária) é bem posto, isto é, a solução do problema existe, é única e depende continuamente do dado inicial.

Antes de enunciarmos o primeiro resultado deste capítulo, algumas observações são necessárias.

Dependendo das hipóteses assumidas para a função f, o problema de Cauchy para a equação (4.1) admite existência e unicidade de solução em vários espaços de Banach. Por exemplo, no espaço das funções contínuas e limitadas, $(C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, se f for localmente (globalmente) Lipschitz o problema de Cauchy para (4.1) admite existência e unicidade de solução local (global). De fato, considerando a função F :

$C_b(\mathbb{R}) \longrightarrow C_b(\mathbb{R})$ dada por

$$F(u) = -u + J * (f \circ u) + h.$$

Dados $u, v \in C_b(\mathbb{R})$, temos que

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v)\|_\infty &= \| - u + J * (f \circ u) + v - J * (f \circ v)\|_\infty \\ &\leq \|u - v\|_\infty + \|J * (f(u) - f(v))\|_\infty . \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Young (ver Teorema 1.3), obtemos

$$\|F(u) - F(v)\|_\infty \leq \|u - v\|_\infty + \|J\|_1 \|f(u) - f(v)\|_\infty .$$

Fixe $u \in C_b(\mathbb{R})$. Se f é localmente Lipschitz, então existe uma vizinhança $V = V(u)$ e uma constante não negativa M tal que

$$|f(u(x)) - f(v(x))| \leq M|u(x) - v(x)|.$$

Logo,

$$\|f(u) - f(v)\|_\infty \leq M\|u - v\|_\infty.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v)\|_\infty &\leq \|u - v\|_\infty + \|J\|_1 \|f(u) - f(v)\|_\infty \\ &\leq \|u - v\|_\infty + \|J\|_1 M \|u - v\|_\infty \\ &= \underbrace{(1 + \|J\|_1 M)}_{\widetilde{M}} \|u - v\|_\infty \\ &= \widetilde{M}\|u - v\|_\infty . \end{aligned}$$

Logo, F é localmente lipschitiziana. Assim, a existência e unicidade de solução local segue do Teorema 2.2. A existência e unicidade de solução global é obtida de maneira análoga aplicando o Teorema de Cauchy-Lipschitz-Picard (ver Teorema 2.4).

Agora, voltemos nossa atenção para o subespaço $\mathbb{P}_{2\tau}$, das funções 2τ-periódicas para algum $\tau > 0$. É uma consequência do Teorema de Existência e Unicidade que o espaço $\mathbb{P}_{2\tau}$ é invariante, isto é, se $u_0 = u(\cdot\ ,0) \in \mathbb{P}_{2\tau}$, então a solução $u(\cdot\ ,t)$ que vale u_0 quando $t = 0$ é 2τ-periódica. De fato, seja $u(x,t)$ a solução de (4.1) com

$u(\cdot\,,0) = u_0 \in \mathbb{P}_{2\tau}$. Definindo $v(x,t) = u(x+2\tau,t)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial u(x+2\tau,t)}{\partial t} \\
&= -u(x+2\tau,t) + J*(f\circ u)(x+2\tau,t) + h \\
&= -u(x+2\tau,t) + \int_{\mathbb{R}} J(x+2\tau-y)f(u(y,t))dy + h.
\end{aligned}$$

Mas, fazendo $y = z+2\tau$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} J(x+2\tau-y)f(u(y,t))dy &= \int_{\mathbb{R}} J(x-z)f(u(z+2\tau,t))dz \\
&= \int_{\mathbb{R}} J(x-z)f(v(z,t))dz.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} &= -v(x,t) + \int_{\mathbb{R}} J(x-z)f(v(z,t))dz + h \\
&= -v(x,t) + J*(f\circ v)(x,t) + h.
\end{aligned}$$

Logo, $v(x,t)$ é solução de (4.1). Além disso,

$$v(x,0) = u(x+2\tau,0) = u_0(x+2\tau) = u_0(x)\,,$$

logo $v(\cdot\,,0) = u(\cdot\,,0)$. Assim, segue do teorema de existência e unicidade que $v(x,t) = u(x,t)$, ou seja, $u(x+2\tau,t) = u(x,t)$, para todo $t \geq 0$. Portanto, $u(\cdot\,,t)$ é 2τ-periódica.

Considere $\tau > 1$ e defina J^τ como a extensão 2τ-periódica da restrição de J ao intervalo $[-\tau,\tau]$. Daí, se $u \in \mathbb{P}_{2\tau}$, temos

$$(J*u)(x) = \int_{-\tau}^{\tau} J^\tau(x-y)u(y)dy. \tag{4.2}$$

De fato, dada $u \in \mathbb{P}_{2\tau}$, temos

$$\begin{aligned}
(J*u)(x) &= \int_{\mathbb{R}} J(x-y)u(y)dy \\
&= \int_{x-\tau}^{x+\tau} J(x-y)u(y)dy \\
&= \int_{x-\tau}^{x+\tau} J^\tau(x-y)u(y)dy \\
&= \int_{-\tau}^{\tau} J^\tau(x-y)u(y)dy.
\end{aligned}$$

Usando (4.2), a equação (4.1) restrita a $\mathbb{P}_{2\tau}$, com $\tau > 1$, pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u(x,t) + \int_{-\tau}^{\tau} J^\tau(x-y)f(u(y,t))dy + h.$$

Agora, defina $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ por

$$\varphi(x) = e^{\frac{i\pi x}{\tau}}$$

e, para $u \in \mathbb{P}_{2\tau}$, $v : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$v(\varphi(x)) = u(x).$$

Em particular, escrevemos $\widetilde{J}(\varphi(x)) = J^\tau(x)$.

Proposição 4.1 *Uma função $u(x,t)$ é uma solução 2τ-periódica de (4.1) se, e somente se, $v(w,t) = u(\varphi^{-1}(w),t)$ é uma solução de*

$$\frac{\partial m(w,t)}{\partial t} = -m(w,t) + \widetilde{J} * (f \circ m)(w,t) + h \tag{4.3}$$

onde agora $*$ denota a convolução em S^1, dada por

$$(\widetilde{J} * m)(w) = \int_{S^1} \widetilde{J}(w \cdot z^{-1}) m(z) dz\,,\ dz = \frac{\tau}{\pi} d\theta\,,$$

onde $d\theta$ indica integração com respeito ao comprimento de arco.

Prova: Inicialmente, notamos que

$$(\widetilde{J} * v)(w) = (J * u)(x).$$

De fato, temos que $\varphi\left([-\tau,\tau]\right) = S^1$, $\varphi(x) = e^{\frac{i\pi x}{\tau}}$, e se $\varphi(x) = w$ então $\varphi^{-1}(w) = x$. Daí,

$$(\widetilde{J} * v)(w) = \int_{S^1} \widetilde{J}(w \cdot z^{-1}) v(z) dz = \int_{\varphi([-\tau,\tau])} \widetilde{J}(w \cdot z^{-1}) v(z) dz.$$

com $dz = \frac{\tau}{\pi} d\theta$. Usando o Teorema da Mudança de Variável (ver [15]), obtemos

$$\begin{aligned}
(\widetilde{J} * v)(w) &= \int_{\varphi([-\tau,\tau])} \widetilde{J}(w \cdot z^{-1}) v(z) dz \\
&= \int_{\varphi([-\tau,\tau])} \widetilde{J}(e^{\frac{i\pi(x-y)}{\tau}}) v(e^{\frac{i\pi y}{\tau}}) \frac{\tau}{\pi} |\varphi'(y)| dy \\
&= \int_{\varphi([-\tau,\tau])} \widetilde{J}(\varphi(x-y)) v(\varphi(y)) \frac{\tau}{\pi} |\varphi'(y)| dy \\
&= \int_{-\tau}^{\tau} J^\tau(x-y) u(y) dy \\
&= (J * u)(x).
\end{aligned}$$

Seja $u(x,t)$ uma solução 2τ-periódica de (4.1), então temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v(w,t)}{\partial t} &= \frac{\partial u(\varphi^{-1}(w),t)}{\partial t} \\
&= -u(\varphi^{-1}(w),t) + J*(f\circ u)(\varphi^{-1}(w),t) + h \\
&= -v(w,t) + J*(f\circ u)(x,t) + h \\
&= -v(w,t) + \widetilde{J}*(f\circ v)(w,t) + h.
\end{aligned}$$

Logo, $v(w,t)$ é solução de (4.3). A recíproca segue de maneira análoga.

■

No que segue, para simplificar a notação iremos escrever J ao invés de $\widetilde{J}$.

Observação 4.1 *Seja $u(w,t)$ a solução de (4.3) com condição inicial $u(w,0) = u_0(w)$, então*

$$u(w,t) = e^{-t}u_0(w) + \int_0^t e^{-(t-s)}[J*(f\circ u)(w,s) + h]ds. \tag{4.4}$$

De fato, se $u(w,t)$ é solução de (4.3), então

$$\frac{\partial u(w,t)}{\partial t} = -u(w,t) + J*(f\circ u)(w,t) + h.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade acima por e^t, e reorganizando os termos, obtemos

$$e^t\frac{\partial u(w,t)}{\partial t} + e^t u(w,t) = e^t[J*(f\circ u)(w,t) + h],$$

o que implica

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[e^t u(w,t)\right] = e^t[J*(f\circ u)(w,t) + h]. \tag{4.5}$$

Integrando ambos os membros de (4.5) de 0 a t, obtemos

$$e^t u(w,t) - e^0 u(w,0) = \int_0^t e^s[J*(f\circ u)(w,s) + h]ds.$$

Daí,

$$e^t u(w,t) = u_0(w) + \int_0^t e^s[J*(f\circ u)(w,s) + h]ds.$$

Por fim, multiplicando ambos os membros da igualdade acima por e^{-t}, segue que

$$u(w,t) = e^{-t}u_0(w) + \int_0^t e^{-(t-s)}[J*(f\circ u)(w,s) + h]ds.$$

Proposição 4.2 *Suponha que a função f é globalmente Lipschitz, isto é,*

$$|f(x) - f(y)| \;\leq\; K_1|x-y|\,,\;\forall\, x,y\in\mathbb{R}\,,\; K_1 > 0.$$

Então a função $F : L^2(S^1) \longrightarrow L^2(S^1)$ dada por

$$F(u) = -u + J*(f\circ u) + h$$

é uniformemente lipschitiziana em $L^2(S^1)$.

Prova: Dados $u, v \in L^2(S^1)$, temos

$$\begin{aligned}
\|F(u) - F(v)\|_2 &= \| -u + J * (f \circ u) + v - J * (f \circ v)\|_2 \\
&= \| -(u-v) + J * ((f \circ u) - (f \circ v))\|_2 \\
&\leq \|u - v\|_2 + \|J * (f(u) - f(v))\|_2 \,. \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Mas, usando a Desigualdade de Young (ver Teorema 1.3) e a hipótese de f ser Lipschitz, temos que

$$\begin{aligned}
\|J * (f(u) - f(v))\|_2 &\leq \|J\|_1 \|f(u) - f(v)\|_2 \\
&\leq \|J\|_1 K_1 \|u - v\|_2 \,. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

De (4.6) e (4.7), segue que

$$\begin{aligned}
\|F(u) - F(v)\|_2 &\leq \|u - v\|_2 + \|J\|_1 K_1 \|u - v\|_2 \\
&= \underbrace{(1 + \|J\|_1 K_1)}_{K} \|u - v\|_2 \,.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|F(u) - F(v)\|_2 \leq K\|u - v\|_2 \,, \ \forall\, u, v \in L^2(S^1).$$

■

Corolário 4.1 *Supondo f globalmente Lipschitz. Então o problema de Cauchy*

$$\frac{\partial u(w,t)}{\partial t} = -u(w,t) + J * (f \circ u)(w,t) + h \qquad (4.8)$$

$$u(\cdot\,,0) = u_0 \in L^2(S^1)\,, \qquad (4.9)$$

possui uma única solução, a qual está globalmente definida e é contínua com relação a condição inicial.

Prova: Pela Proposição 4.2 temos que $F(u) = -u + J * (f \circ u) + h$ é uma função uniformemente Lipschitz em $L^2(S^1)$. Daí, pelo Teorema de Cauchy-Lipschitz-Picard (ver Teorema 2.4) o problema (4.8)-(4.9) possui única solução, a qual está globalmente definida. Agora, sejam $u(w,t)$ e $v(w,t)$ soluções com condições iniciais u_0 e v_0 respectivamente. Usando a Observação 4.1, note que

$$e^t \|u(\cdot\,,t) - v(\cdot\,,t)\|_2 \leq \|u_0 - v_0\|_2 + \int_0^t e^s \|J * (f(u(\cdot\,,s)) - f(v(\cdot\,,s)))\|_2 ds.$$

Usando a Desigualdade de Young (ver Teorema 1.3) e em seguida a hipótese de f ser Lipschitz, obtemos

$$\begin{aligned} e^t\|u(\cdot\,,t)-v(\cdot\,,t)\|_2 &\leq \|u_0-v_0\|_2+\int_0^t e^s\|J\|_1\|f(u(\cdot\,,s))-f(v(\cdot\,,s))\|_2 ds \\ &\leq \|u_0-v_0\|_2+\int_0^t e^s\|J\|_1K_1\|u(\cdot\,,s)-v(\cdot\,,s)\|_2 ds \\ &= \|u_0-v_0\|_2+\int_0^t \|J\|_1K_1e^s\|u(\cdot\,,s)-v(\cdot\,,s)\|_2 ds. \end{aligned}$$

Logo, pelo Lema de Gronwall (ver Lema 2.2),

$$\begin{aligned} e^t\|u(\cdot\,,t)-v(\cdot\,,t)\|_2 &\leq \|u_0-v_0\|_2\exp\left(\|J\|_1K_1\int_0^t ds\right) \\ &= \|u_0-v_0\|_2\exp\left(\|J\|_1K_1t\right). \end{aligned}$$

Daí,

$$\|u(\cdot\,,t)-v(\cdot\,,t)\|_2 \leq \|u_0-v_0\|_2\exp\left(-(1-\|J\|_1K_1)t\right)\,,$$

e o resultado segue.

■

Lema 4.1 *Para $u\in L^2(S^1)$, temos que*

$$|(J*u)(w)| \leq \sqrt{2\tau}\|J\|_\infty\|u\|_2\,,\ \forall\ w\in S^1. \tag{4.10}$$

Prova: Note que

$$\begin{aligned} |(J*u)(w)| &= \left|\int_{S^1} J(w\cdot z^{-1})u(z)dz\right| \\ &\leq \int_{S^1}|J(w\cdot z^{-1})||u(z)|dz \\ &\leq \int_{S^1}\|J\|_\infty|u(z)|dz=\|J\|_\infty\int_{S^1}|u(z)|\cdot 1dz. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Usando que $g\equiv 1\in L^2(S^1)$, já que

$$\int_{S^1}|1|^2dw=\int_{S^1}dw=2\tau<\infty\,,$$

segue da Desigualdade de Hölder (ver Proposição A.1) que $u\cdot 1\in L^1(S^1)$ e

$$\int_{S^1}|u(z)\cdot 1|dz \leq \|1\|_2\|u\|_2=\sqrt{2\tau}\|u\|_2\,. \tag{4.12}$$

Substituindo (4.12) em (4.11) obtemos

$$|(J*u)(w)| \leq \|J\|_\infty\sqrt{2\tau}\|u\|_2\,,\ \forall\ w\in S^1.$$

■

Lema 4.2 *Seja f globalmente Lipschitz. Então, para $u \in L^2(S^1)$, temos que*

$$\|f \circ u\|_2 \;\leq\; K_1\|u\|_2 + K_2\sqrt{2\tau}. \tag{4.13}$$

Prova: Como f é globalmente Lipschitz,

$$|f(x) - f(0)| \;\leq\; K_1|x|\,,$$

daí,

$$|f(x)| \;\leq\; K_1|x| + |f(0)| = K_1|x| + K_2\,,$$

com $K_2 = |f(0)|$. Logo

$$\begin{aligned}
\|f \circ u\|_2 &= \left(\int_{S^1} |f(u(z))|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \;\leq\; \left(\int_{S^1} [K_1|u(z)| + K_2]^2 dz\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \|K_1 u + K_2\|_2 \;\leq\; K_1\|u\|_2 + K_2\sqrt{2\tau}.
\end{aligned}$$

■

Observação 4.2 *Para $u \in L^2(S^1)$, de (4.10) e (4.13), segue que*

$$\begin{aligned}
|J * (f \circ u)(w)| &\leq \|J\|_\infty\sqrt{2\tau}\|f \circ u\|_2\\
&\leq \|J\|_\infty\sqrt{2\tau}(\;K_1\|u\|_2 + K_2\sqrt{2\tau})\\
&= \|J\|_\infty\sqrt{2\tau}\;K_1\|u\|_2 + \|J\|_\infty\sqrt{2\tau}K_2\sqrt{2\tau}\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|J * (f \circ u)(w)| \;\leq\; \|J\|_\infty\sqrt{2\tau}\;K_1\|u\|_2 + \|J\|_\infty 2\tau K_2. \tag{4.14}$$

Supondo f globalmente Lipschitz mostramos no Corolário 4.1 que o problema (4.8)-(4.9) possui única solução em $L^2(S^1)$. Entretanto, supondo apenas que f é localmente Lipschitz ainda é possível obter o mesmo resultado, para mostrar isso usaremos o Teorema 2.3.

Proposição 4.3 *Suponha que a função f é localmente Lipschitz. Então o Problema de Cauchy (4.8)-(4.9) tem única solução, a qual é globalmente definida.*

Prova: Seja $F(u) = -u + J * (f \circ u) + h$. Como f é localmente Lipschitz, então de maneira similar a demonstração da Proposição 4.2 mostra-se que F é localmente

Lipschitz, o que garante existência local de solução para o problema (4.8)-(4.9) para qualquer $u_0 = u(\cdot, 0) \in L^2(S^1)$. Agora, observe que para $u \in L^2(S^1)$ temos

$$\begin{aligned} \|F(u)\|_2 &= \|-u + J*(f\circ u) + h\|_2 \\ &\leq \|u\|_2 + \|J*(f\circ u)\|_2 + \|h\|_2 \\ &= \|u\|_2 + h\sqrt{2\tau} + \|J*(f\circ u)\|_2\,. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Mas, usando (4.14), temos

$$\begin{aligned} \|J*(f\circ u)\|_2 &= \left(\int_{S^1} |J*(f\circ u)(w)|^2 dw\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{S^1} [\|J\|_\infty \sqrt{2\tau}\ K_1\|u\|_2 + \|J\|_\infty 2\tau K_2]^2 dw\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\|J\|_\infty\sqrt{2\tau}\ K_1\|u\|_2 + \|J\|_\infty 2\tau K_2)\sqrt{2\tau}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

De (4.15) e (4.16) obtemos

$$\begin{aligned} \|F(u)\|_2 &\leq \|u\|_2 + h\sqrt{2\tau} + \|J\|_\infty 2\tau\ K_1\|u\|_2 + \|J\|_\infty 2\tau\sqrt{2\tau}K_2 \\ &= \underbrace{(\|J\|_\infty 2\tau K_1 + 1)}_{c_1}\|u\|_2 + \underbrace{\|J\|_\infty K_2 2\tau\sqrt{2\tau} + h\sqrt{2\tau}}_{c_2} \\ &= c_1\|u\|_2 + c_2. \end{aligned}$$

Defina $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = c_1 x + c_2\,.$$

Então g é não-decrescente para $x \geq 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |c_1 x + c_2 - (c_1 y + c_2)| \\ &= |c_1(x-y)| \\ &= c_1|x-y|\,,\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Logo, g é globalmente Lipschitz. Daí, pelo Teorema de Cauchy-Lipschitz-Picard (ver Teorema 2.4), o problema

$$x' = g(x),\ \ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}_+ \tag{4.17}$$

possui uma única solução $x \in C^1([0,\infty), \mathbb{R})$. Além disso, temos

$$\|F(u)\|_2 \ \leq\ c_1\|u\|_2 + c_2 = g(\|u\|_2).$$

Portanto, pelo Teorema 2.3 o maior intervalo de existência de qualquer solução de (4.8)-(4.9) com $\|u_0\|_2 \leq x_0$ é $I = [0, \infty)$.

$\blacksquare$

4.2 Suavidade da Solução

Nesta seção, seguindo [21], mostramos que a equação (4.8) gera um fluxo de classe C^1 no espaço de fase $L^2(S^1)$.

Observação 4.3 *Se f é globalmente Lipschitz, então a solução do problema*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -u + J * (f \circ u) + h \\ u(\cdot\ , 0) &= u_0 \in L^2(S^1) \end{aligned}$$

define um C^0-Semigrupo $T(t) : L^2(S^1) \longrightarrow L^2(S^1)$, $t \geq 0$.

De fato, pela Proposição 4.2 sabemos que $F(u) = -u + J*(f \circ u) + h$ é globalmente Lipschitz. E pela Observação 3.1 segue que a solução do problema acima define um C^0-Semigrupo, o qual é dado por

$$T(t)u_0 = u(\cdot\ , t) = e^{-t}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)}[J * (f \circ u)(\cdot\ , s) + h]ds\,,\ \ t \geq 0,$$

onde $u(\cdot\ , t)$ é a solução de (4.8) que vale u_0 quando $t = 0$.

No que segue denotamos apenas por $T(t)$ o fluxo gerado por (4.8), o qual é dado por $T(t)u_0 = u(\cdot\ , t)$.

Proposição 4.4 *Suponha que $f \in C^1(\mathbb{R})$, que f' é localmente Lipschitz e que para alguma constante positiva K,*

$$0 < f'(x) < K\,,\ \ \forall\ x \in \mathbb{R}. \tag{4.18}$$

Então a função

$$F(u) = -u + J * (f \circ u) + h\,,$$

é continuamente Fréchet diferenciável em $L^2(S^1)$ com derivada dada por

$$F'(u)v = -v + J * (f'(u)v).$$

Prova: Dados $u, v \in L^2(S^1)$, a derivada de Gâteaux de F é dada por

$$\begin{aligned}
DF(u)v &= \lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv)-F(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{-(u+tv)+J*(f\circ(u+tv))-(-u+J*(f\circ u))}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{-tv+J*(f\circ(u+tv))-J*(f\circ u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} -v+\frac{J*(f(u+tv)-f(u))}{t} \\
&= -v+J*\left(\lim_{t\to 0}\frac{f(u+tv)-f(u)}{t}\right) \\
&= -v+J*(f'(u)v).
\end{aligned}$$

Devido a linearidade da convolução, $DF(u)$ é um operador linear. Agora, usando a Desigualdade de Young (ver Teorema 1.3) e (4.18) temos

$$\begin{aligned}
\|DF(u)v\|_2 &= \|-v+J*(f'(u)v)\|_2 \\
&\le \|v\|_2+\|J*(f'(u)v)\|_2 \\
&\le \|v\|_2+\|J\|_1\|f'(u)v\|_2 \\
&\le \|v\|_2+\|J\|_1K\|v\|_2=(1+K\|J\|_1)\|v\|_2.
\end{aligned}$$

Logo, $DF(u)$ é um operador linear limitado. Além disso, DF é contínuo. De fato, dado $v \in L^2(S^1)$, primeiramente notemos que

$$\begin{aligned}
|(J*(f'(u_1)v))(w)-(J*(f'(u_2)v))(w)| &= |(J*(f'(u_1)v-f'(u_2)v))(w)| \\
&= \left|\int_{S^1} J(w\cdot z^{-1})(f'(u_1(z))-f'(u_2(z)))v(z)dz\right| \\
&\le \int_{S^1} |J(w\cdot z^{-1})(f'(u_1(z))-f'(u_2(z)))v(z)|dz \\
&\le \|J\|_\infty \int_{S^1} |(f'(u_1(z))-f'(u_2(z)))v(z)|dz \\
&\le \|J\|_\infty\|f'(u_1)-f'(u_2)\|_2\|v\|_2\,, \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade acima foi usado a Desigualdade de Hölder (ver Proposição A.1). Daí, usando (4.19) temos

$$\begin{aligned}
\|DF(u_1)v-DF(u_2)v\|_2^2 &= \|J*(f'(u_1)v-f'(u_2)v)\|_2^2 \\
&= \int_{S^1} |(J*(f'(u_1)v-f'(u_2)v))(w)|^2dw \\
&\le \int_{S^1} \|J\|_\infty^2\|f'(u_1)-f'(u_2)\|_2^2\|v\|_2^2dw \\
&= \|J\|_\infty^2\|f'(u_1)-f'(u_2)\|_2^2\|v\|_2^2\int_{S^1} dw.
\end{aligned}$$

Mas, usando a parametrização do inicio da Seção 4.1, obtemos

$$\int_{S^1} dw = \int_{-\tau}^{\tau} dy = 2\tau.$$

Assim,

$$\|DF(u_1)v - DF(u_2)v\|_2^2 \;\leq\; \|J\|_\infty^2 \|f'(u_1) - f'(u_2)\|_2^2 \|v\|_2^2 2\tau. \tag{4.20}$$

Fixando u_1 e fazendo $u_2 \to u_1$ em $L^2(S^1)$, segue que $u_2(w) \to u_1(w)$ quase sempre em S^1 (ver [3]). E por hipótese f' é localmente Lipschitz, logo, existe $M > 0$ tal que

$$|f'(u_1(w)) - f'(u_2(w))| \;\leq\; M|u_1(w) - u_2(w)| \;\text{ em quase toda parte.}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\|f'(u_1) - f'(u_2)\|_2^2 &= \int_{S^1} |f'(u_1(w)) - f'(u_2(w))|^2 dw \\
&\leq \int_{S^1} M^2 |u_1(w) - u_2(w)|^2 dw = M^2 \|u_1 - u_2\|_2^2. \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

Substituindo (4.21) em (4.20) obtemos

$$\|DF(u_1)v - DF(u_2)v\|_2^2 \;\leq\; 2\tau \|J\|_\infty^2 M^2 \|u_1 - u_2\|_2^2 \|v\|_2^2.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|DF(u_1) - DF(u_2)\|_{\mathcal{L}(L^2(S^1), L^2(S^1))} &= \sup_{\|v\|_2 \leq 1} \|DF(u_1)v - DF(u_2)v\|_2 \\
&\leq \sup_{\|v\|_2 \leq 1} \sqrt{2\tau} \|J\|_\infty M \|u_1 - u_2\|_2 \|v\|_2 \\
&= M\sqrt{2\tau} \|J\|_\infty \|u_1 - u_2\|_2.
\end{aligned}$$

Donde segue que DF é contínuo.

Portanto, pela Proposição 1.8 segue que a função $F(u)$ é continuamente Fréchet diferenciável e,

$$F'(u)v = DF(u)v = -v + J * (f'(u)v).$$

∎

Observação 4.4 *Na Proposição 4.4 vimos que o lado direito de (4.8) é uma função de classe C^1. Portanto, segue do Teorema 2.5 que o fluxo $T(t)$ gerado por (4.8) é C^1 com relação as condições iniciais.*

4.3 Existência de um Atrator Global

Nesta seção, seguindo [20], mostramos a existência de um conjunto atrator global para o fluxo $T(t)$, gerado por (4.8), para tanto faremos uso do Teorema 3.1.

O primeiro resultado desta seção mostra a existência de um conjunto absorvente para o fluxo $T(t)$.

Lema 4.3 *Suponha $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ globalmente Lipschitz, isto é, que*

$$|f(x)-f(y)| \;\leq\; K_1|x-y|\,,\;\forall\; x,y\in\mathbb{R}\,,$$

e que $K_1\|J\|_1<1$. Então a bola B_r, de raio $r=\frac{2\sqrt{2\tau}(K_2\|J\|_1+h)}{1-K_1\|J\|_1}$, é um conjunto absorvente para o fluxo $T(t)$ gerado por (4.8).

Prova: Seja $u(w,t)$ a solução de (4.8) passando por $u(w,0)=u_0(w)$. Primeiramente notamos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{S^1}|u(w,t)|^2dw &= \int_{S^1}\frac{d}{dt}(u(w,t))^2dw\\
&= \int_{S^1}2u(w,t)\frac{d}{dt}u(w,t)dw\\
&= 2\int_{S^1}u(w,t)[-u(w,t)+J*(f\circ u)(w,t)+h]dw\\
&= -2\int_{S^1}u^2(w,t)dw+2\int_{S^1}u(w,t)[J*(f\circ u)(w,t)]dw\\
&+\;2\int_{S^1}u(w,t)hdw. \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

Sendo $h\in L^2(S^1)$, usando a Desigualdade de Hölder (ver Proposição A.1), obtemos

$$\int_{S^1}|hu(w,t)|dw \;\leq\; \|u(\cdot,t)\|_2\left(\int_{S^1}h^2dw\right)^{\frac{1}{2}}=\|u(\cdot,t)\|_2h\sqrt{2\tau}. \qquad (4.23)$$

Além disso, usando a Desigualdade de Hölder e em seguida a Desigualdade de Young (ver Teorema 1.3), temos

$$\begin{aligned}
\int_{S^1}u(w,t)[J*(f\circ u)(w,t)]dw &\leq \|u(\cdot,t)\|_2\left(\int_{S^1}[J*(f\circ u)(w,t)]^2dw\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \|u(\cdot,t)\|_2\|J\|_1\|f(u(\cdot,t))\|_2.
\end{aligned}$$

Como f é Lipschitz, escrevendo $K_2=|f(0)|$, obtemos

$$|f(x)| \;\leq\; K_1|x|+K_2\,,$$

daí, por (4.13), temos

$$\|f(u(\cdot,t))\|_2 \;\leq\; K_1\|u(\cdot,t)\|_2 + K_2\sqrt{2\tau}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{S^1} u(w,t)[J*(f\circ u)(w,t)]dw \;&\leq\; \|u(\cdot,t)\|_2\|J\|_1(K_1\|u(\cdot,t)\|_2 + K_2\sqrt{2\tau}) \\
&=\; K_1\|J\|_1\|u(\cdot,t)\|_2^2 \\
&+\; K_2\sqrt{2\tau}\|J\|_1\|u(\cdot,t)\|_2. \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

Substituindo (4.23) e (4.24) em (4.22) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|_2^2 \;&\leq\; -2\|u(\cdot,t)\|_2^2 + 2h\sqrt{2\tau}\|u(\cdot,t)\|_2 + 2K_1\|J\|_1\|u(\cdot,t)\|_2^2 + 2K_2\sqrt{2\tau}\|J\|_1\|u(\cdot,t)\|_2 \\
&=\; 2\|u(\cdot,t)\|_2^2\left(-1 + K_1\|J\|_1 + \frac{\sqrt{2\tau}(h + K_2\|J\|_1)}{\|u(\cdot,t)\|_2}\right). \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

Como $K_1\|J\|_1 < 1$, defina $\epsilon = 1 - K_1\|J\|_1 > 0$. Então, quando

$$\|u(\cdot,t)\|_2 \;\geq\; \frac{2\sqrt{2\tau}(h + K_2\|J\|_1)}{\epsilon},$$

tem-se

$$\frac{\epsilon}{2} \;\geq\; \frac{\sqrt{2\tau}(h + K_2\|J\|_1)}{\|u(\cdot,t)\|_2}.$$

Disto e de (4.25) temos

$$\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|_2^2 \;\leq\; 2\|u(\cdot,t)\|_2^2(-\epsilon + \frac{\epsilon}{2}) = -\epsilon\|u(\cdot,t)\|_2^2.$$

Reorganizando os termos e integrando ambos os lados de 0 a t obtemos

$$\int_0^t \frac{\frac{d}{ds}\|u(\cdot,s)\|_2^2}{\|u(\cdot,s)\|_2^2} \leq \int_0^t -\epsilon ds\,,$$

daí,

$$\ln\left(\|u(\cdot,t)\|_2^2\right) - \ln\left(\|u(\cdot,0)\|_2^2\right) \leq -\epsilon t\,,$$

e usando propriedades de logaritmo

$$\ln\left(\frac{\|u(\cdot,t)\|_2^2}{\|u(\cdot,0)\|_2^2}\right) \leq -\epsilon t\,,$$

o que implica em

$$\frac{\|u(\cdot,t)\|_2^2}{\|u(\cdot,0)\|_2^2} \leq e^{-\epsilon t}.$$

Então

$$\|u(\cdot,t)\|_2^2 \leq e^{-(1-K_1\|J\|_1)t}\|u(\cdot,0)\|_2^2\,. \tag{4.26}$$

Finalmente, fazendo $t\to\infty$ em (4.26), obtemos

$$\lim_{t\to\infty}\|u(\cdot,t)\|_2^2 = 0\,,$$

o que implica que

$$\|u(\cdot,t)\|_2 \to 0 \text{ quando } t\to\infty\,.$$

Portanto, a bola B_r de raio $r = \frac{2\sqrt{2\tau}(K_2\|J\|_1+h)}{1-K_1\|J\|_1}$ e centro na origem de $L^2(S^1)$ é um conjunto absorvente para o fluxo $T(t)$.

■

Observação 4.5 *Assumindo a hipótese de f ser limitada, podemos obter um resultado análogo ao Lema 4.3 sem assumirmos a hipótese $K_1\|J\|_1 < 1$. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.*

Lema 4.4 *Suponha que f é globalmente Lipschitz e que exista $M>0$ tal que $|f(x)|\leq M$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Seja $R = (\|J\|_\infty 2\tau M + h)\sqrt{2\tau}$ então, para cada $\epsilon>0$, a bola de centro na origem de $L^2(S^1)$ e raio $R+\epsilon$, $B_{R+\epsilon}$, é um conjunto absorvente para o fluxo $T(t)$ gerado por (4.8).*

Prova: Seja $u(w,t)$ a solução de (4.8) com condição inicial $u_0 = u(\cdot\,,0)\in L^2(S^1)$. Pela Observação 4.1 temos

$$u(w,t) = e^{-t}u(w,0) + \int_0^t e^{-(t-s)}[J*(f\circ u)(w,s)+h]ds.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}
|u(w,t)| &\leq e^{-t}|u(w,0)| + \int_0^t e^{-(t-s)}|J*(f\circ u)(w,s)+h|ds \\
&\leq e^{-t}|u(w,0)| + \int_0^t e^{-(t-s)}|J*(f\circ u)(w,s)|ds + h.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 4.1 e em seguida a hipótese de que f é limitada, obtemos

$$\begin{aligned}
|u(w,t)| &\leq e^{-t}|u(w,0)| + \int_0^t e^{-(t-s)}\|J\|_\infty\sqrt{2\tau}\|f(u(\cdot,s))\|_2 ds + h \\
&\leq e^{-t}|u(w,0)| + \int_0^t e^{-(t-s)}\|J\|_\infty\sqrt{2\tau}M\sqrt{2\tau}ds + h \\
&\leq e^{-t}|u(w,0)| + \|J\|_\infty 2\tau M + h.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|u(\cdot\,,t)\|_2 &\leq \|e^{-t}|u(\cdot\,,0)| + \|J\|_\infty 2\tau M + h\|_2\\ &\leq e^{-t}\|u(\cdot\,,0)\|_2 + (\|J\|_\infty 2\tau M + h)\sqrt{2\tau}\,.\end{aligned}$$

Logo, para $t > \ln\left(\frac{\|u_0\|_2}{\epsilon}\right)$, temos que

$$\|u(\cdot\,,t)\|_2 < \epsilon + R.$$

Portanto, a bola $B_{R+\epsilon}$, com $R = (\|J\|_\infty 2\tau M + h)\sqrt{2\tau}$, é um conjunto absorvente para o fluxo $T(t)$. ■

Teorema 4.1 *Suponha as mesmas hipóteses do Lema 4.3 (ou do Lema 4.4). Então, existe um atrator global, $\mathcal{A}$, para o fluxo $T(t)$ gerado por (4.8) em $L^2(S^1)$. Além disso, $\mathcal{A} \subset B_r$ (ou $\mathcal{A} \subset B_{R+\epsilon}$).*

Prova: Seja $u(w,t)$ a solução de (4.8) com condição inicial $u_0 = u(\cdot\,,0) \in L^2(S^1)$. Pela Observação 4.1 temos que

$$u(\cdot\,,t) = e^{-t}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)}[J * (f \circ u)(\cdot\,,s) + h]ds.$$

Como vimos na seção anterior, esta solução define um C^1-Semigrupo $T(t)$, $t \geq 0$, tal que $T(t)u_0 = u(\cdot\,,t)$. Consideremos

$$T(t)u_0 = T_1(t)u_0 + T_2(t)u_0$$

com

$$T_1(t)u_0 = e^{-t}u_0$$

e

$$T_2(t)u_0 = \int_0^t e^{-(t-s)}[J * (f \circ u)(\cdot\,,s) + h]ds.$$

Suponha $u_0 \in C$, onde C é um conjunto limitado em $L^2(S^1)$, digamos que C seja uma bola de raio ρ. Daí, tem-se

$$\|T_1(t)u_0\|_2 \to 0 \text{ quando } t \to \infty\,,\ \forall\ u_0 \in C. \tag{4.27}$$

Por outro lado, note que $\|u(\cdot,t)\|_2 \leq K$, para $t \geq 0$, onde $K = \max\{\rho, r\}$. De maneira análoga aos Lemas 4.1 e 4.2 obtemos

$$|J' * (f \circ u)(w)| \leq \|J'\|_\infty \sqrt{2\tau}K_1\|u\|_2 + \|J'\|_\infty K_2 2\tau. \tag{4.28}$$

Ainda, para $t \geq 0$, usando o Teorema 1.1, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (T_2(t)u_0)(w)}{\partial w} &= \int_0^t e^{s-t}\frac{\partial}{\partial w}\left[J*(f\circ u)(w,s)+h\right]ds\\
&= \int_0^t e^{s-t}[J'*(f\circ u)(w,s)]ds.
\end{aligned}$$

Daí, usando (4.28), segue que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial T_2(t)u_0(w)}{\partial w}\right| &\leq \int_0^t e^{s-t}[\|J'\|_\infty\sqrt{2\tau}K_1\|u(\cdot,s)\|_2+\|J'\|_\infty K_2 2\tau]ds\\
&\leq \int_0^t e^{s-t}[\|J'\|_\infty\sqrt{2\tau}K_1 K+\|J'\|_\infty K_2 2\tau]ds\\
&= [\|J'\|_\infty\sqrt{2\tau}K_1 K+\|J'\|_\infty K_2 2\tau]\int_0^t e^{s-t}ds\\
&= [\|J'\|_\infty\sqrt{2\tau}K_1 K+\|J'\|_\infty K_2 2\tau](1-e^{-t})\\
&\leq \|J'\|_\infty\sqrt{2\tau}K_1 K+\|J'\|_\infty K_2 2\tau.
\end{aligned}$$

Logo, para $t \geq 0$ e qualquer $u_0 \in C$, segue que o valor de $\left\|\frac{\partial T_2(t)u_0}{\partial w}\right\|_{L^2(S^1)}$ é limitado por uma constante (que não depende de t nem de u). Além disso, temos

$$\|T_2(t)u_0\|_2 < \infty\,.$$

De fato,

$$\|T_1(t)u_0 + T_2(t)u_0\|_2 = \|u(\cdot\,,t)\|_2 \;\leq\; K.$$

Daí,

$$\|T_2(t)u_0\|_2 \;\leq\; \|u(\cdot\,,t)\|_2 + \|T_1(t)u_0\|_2 < \infty\,.$$

Assim, para todo $u_0 \in C$, temos que $T_2(t)u_0$ pertence a uma bola de $W^{1,2}(S^1)$, pois,

$$\|T_2(t)u_0\|_{W^{1,2}(S^1)} = \|T_2(t)u_0\|_{L^2(S^1)} + \left\|\frac{\partial T_2(t)u_0}{\partial w}\right\|_{L^2(S^1)} < \infty\,.$$

Então, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov (ver Teorema B.3), segue que

$$\bigcup_{t\geq 0} T_2(t)C \;\text{ é relativamente compacto.} \tag{4.29}$$

Em resumo, de (4.27), (4.29) e do Lema 4.3 (ou Lema 4.4) temos que as hipóteses do Teorema 3.1 são satisfeitas. Portanto, segue que o conjunto $\mathcal{A} = \omega(B_r)$ (ou $\mathcal{A} = \omega(B_{R+\epsilon})$) é um atrator global para o fluxo $T(t)$. Além disso, como B_r (ou $B_{R+\epsilon}$) é absorvente, temos que $\mathcal{A} = \omega(B_r) \subset B_r$ (ou $\mathcal{A} = \omega(B_{R+\epsilon}) \subset B_{R+\epsilon}$).

∎

Teorema 4.2 *Assuma as mesmas hipóteses do Lema 4.3. Seja*

$$a = \sqrt{2\tau}K_1\|J\|_\infty \frac{2\sqrt{2\tau}(K_2\|J\|_1 + h)}{1 - K_1\|J\|_1} + K_2\|J\|_\infty 2\tau + h.$$

Então o conjunto atrator $\mathcal{A}$ *pertence a bola* $\|\cdot\|_\infty \leq a$ *em* $L^\infty(S^1)$.

Prova: Seja $r = \frac{2\sqrt{2\tau}(K_2\|J\|_1+h)}{1-K_1\|J\|_1}$, segue do Teorema 4.1 que o conjunto atrator está contido na bola B_r em $L^2(S^1)$.

Seja $u(w,t)$ solução de (4.8) com condição inicial $u(\cdot\ ,t_0) \subset \mathcal{A}$. Pela Observação 4.1 temos que

$$u(w,t) = e^{-(t-t_0)}u(w,t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)}[J * (f \circ u)(w,s) + h]ds.$$

Como $\|u(\cdot\ ,t_0)\|_2 \leq r$, fazendo $t_0 \to -\infty$ obtemos

$$u(w,t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)}[J * (f \circ u)(w,s) + h]ds.$$

Usando (4.14) da Observação 4.2 e o fato de $\mathcal{A} \subset B_r$ em $L^2(S^1)$, temos

$$\begin{aligned}
|u(w,t)| &= \left|\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)}[J * (f \circ u)(w,s) + h]ds\right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)}|J * (f \circ u)(w,s) + h|ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)}[\|J\|_\infty\sqrt{2\tau}\ K_1\|u(\cdot\ ,s)\|_2 + \|J\|_\infty 2\tau K_2 + h]ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)}[\|J\|_\infty\sqrt{2\tau}\ K_1 r + \|J\|_\infty 2\tau K_2 + h]ds \\
&= a\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)}ds \ \leq\ a\,,
\end{aligned}$$

portanto, segue o resultado.

■

4.4 Um Exemplo Concreto

Nesta seção, seguindo [21], exibimos exemplos concretos para funções f e J, as quais satisfazem as hipóteses dos resultados deste capítulo.

Sejam f e J funções reais dadas por

$$f(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$$

e

$$J(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{(1-x^2)}}\ , & \text{se } |x| < 1 \\ 0\ , & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Note que f e J são funções de classe C^1 e o suporte de J está contido no intervalo $[-1,1]$. Além disso, a função f é globalmente Lipschitz, com constante de Lipschitz $K_1 = 1$, f' é localmente Lipschitz com $0 < f'(x) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e a função J satisfaz $K_1\|J\|_1 < 1$.

De fato,

(i) Primeiramente notamos que $f'(x) = (1+e^{-x})^{-2}e^{-x} > 0$ e $(1+e^{-x})^{-2}e^{-x} < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, $0 < f'(x) < 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} |f''(x)| &= \left|2(1+e^{-x})^{-3}e^{-2x} - (1+e^{-x})^{-2}e^{-x}\right| \\ &\leq 2\left|(1+e^{-x})^{-3}\right| + \left|(1+e^{-x})^{-2}\right| \\ &< 3, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Consequentemente f' é localmente Lipschitz.

(ii) De (i), como $|f'(x)| < 1$, segue que f é globalmente Lipschitz com constante de Lipschitz $K_1 = 1$. Além disso, como $0 \leq J(x) \leq e^{-1}$, temos que

$$\begin{aligned} K_1\|J\|_1 &= \|J\|_1 = \int_{-1}^{1} e^{\frac{-1}{1-x^2}}\, dx \\ &\leq \frac{1}{e}\int_{-1}^{1} dx = \frac{2}{e} < 1. \end{aligned}$$

Portanto, as funções f e J satisfazem todas as hipóteses assumidas nas seções anteriores deste capítulo.

Considerando J^τ como a extensão 2τ periódica de J ao intervalo $[-\tau,\tau]$, $\tau > 1$, podemos reescrever (4.1), no espaço $\mathbb{P}_{2\tau}$, como

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u(x,t) + \int_{-\tau}^{\tau} e^{\frac{-1}{1-(x-y)^2}} \left(1 + e^{-u(y,t)}\right)^{-1} dy + h. \tag{4.30}$$

Definindo $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ por $\varphi(x) = e^{\frac{i\pi x}{\tau}}$ e, para $u \in \mathbb{P}_{2\tau}$, $v : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ por $v(\varphi(x)) = u(x)$. Escrevendo $\widetilde{J}(\varphi(x)) = J^\tau(x)$, segue da Proposição 4.1 que a equação (4.30) é equivalente a

$$\frac{\partial u(w,t)}{\partial t} = -u(w,t) + \int_{S^1} \widetilde{J}(w \cdot z^{-1}) \left(1 + e^{-u(z,t)}\right)^{-1} dz + h\,, \tag{4.31}$$

com $dz = \frac{\tau}{\pi} d\theta$, onde $d\theta$ indica integração com respeito ao comprimento de arco.

Apêndice A

Uma breve revisão dos espaços L^p e algumas propriedades

Nesta seção, seguindo [3] e [5], exibimos algumas definições e resultados da Teoria da Medida. Ao longo desta seção X denota um conjunto não-vazio qualquer, isto é, X pode ser um intervalo da reta, ou $\mathbb{R}^n$, ou algum outro conjunto.

Definição A.1 *Uma família $\mathcal{X}$ de subconjuntos de X é uma σ-álgebra sobre X se:*

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{X}$*;*

(ii) Se $A \in \mathcal{X}$, então o complementar $A^c \in \mathcal{X}$;

(iii) Se (A_n) é uma sequência de conjuntos em $\mathcal{X}$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{X}$.

Um *espaço mensurável* é um par ordenado $(X, \mathcal{X})$ consistindo de um conjunto X e uma σ-álgebra $\mathcal{X}$ sobre X.

Definição A.2 *Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é mensurável se para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto $\{x \in X; f(x) > \alpha\}$ pertence a $\mathcal{X}$.*

Na definição acima, podemos modificar a forma do conjunto trocando a desigualdade $>$ por $<$, $\leq$ ou $\geq$ (ver [3], Lema 2.4).

Definição A.3 *Uma função $\mu : \mathcal{X} \longrightarrow [0, \infty]$ é uma medida se:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$*;*

(ii) $\mu(A) \geq 0\ ,\ \forall\ A \in \mathcal{X}$*;*

(iii) Se (A_n) é uma sequência de conjuntos disjuntos em $\mathcal{X}$, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Uma medida μ é denominada σ-finita se existe uma sequência de conjuntos (A_n) em $\mathcal{X}$ tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \;\text{ e }\; \mu(A_n) < \infty\,,\ \forall\ n.$$

Um *espaço de medida* é uma tripla $(X, \mathcal{X}, \mu)$ consistindo de um conjunto X, uma σ-álgebra $\mathcal{X}$ sobre X, e uma medida μ definida sobre $\mathcal{X}$.

Observação A.1 *Dizemos que uma certa afirmação é válida μ-quase sempre (μ-q.s.) ou em quase toda parte (q.t.p.) se a afirmação é satisfeita para todo $x \in X\backslash N$, onde $N \in \mathcal{X}$ é tal que $\mu(N) = 0$. Por exemplo, duas funções mensuráveis f e g são iguais μ-q.s. se, e somente se, $\mu(N) = 0$, onde $N = \{x \in X; f(x) \neq g(x)\}$.*

Assumindo que o leitor está familiarizado com a noção de *funções integráveis* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ (ver [3] e [9]). Denotaremos por $L^1(X, \mu)$, ou simplesmente $L^1(X)$ (ou apenas L^1), o espaço das funções integráveis $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Com a norma

$$\|f\|_1 = \|f\|_{L^1} = \int_X |f| d\mu.$$

Definição A.4 *Seja $p \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$. Definimos o conjunto*

$$L^p(X) = \left\{f : X \longrightarrow \mathbb{R}\ ; f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(X)\right\}.$$

Com a norma

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposição A.1 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$ com $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, $fg \in L^1$ e*

$$\|fg\|_1 \;\leq\; \|f\|_p \|g\|_q\,.$$

Prova: Inicialmente mostraremos a seguinte afirmação: Sejam A e B números não negativos e $1 < p, q < \infty$ satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$A \cdot B \;\leq\; \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}\,. \tag{A.1}$$

De fato, considere a função $\varphi : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(t) = \alpha t - t^{\alpha}$$

onde $0 < \alpha < 1$. Temos que

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \alpha - \alpha t^{\alpha-1} \\ &= \alpha\left(1 - \frac{1}{t^{1-\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Note que $\varphi'(1) = 0$; $\varphi'(t) < 0$, para $0 < t < 1$; $\varphi'(t) > 0$, para $t > 1$. Daí, segue que $\varphi(t) \geq \varphi(1)$ para $t \geq 0$, isto é,

$$\alpha t - t^{\alpha} \;\geq\; \alpha - 1\,,$$

o que implica

$$t^{\alpha} \;\leq\; \alpha t + 1 - \alpha.$$

Para $a, b \geq 0$ e $t = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$, temos

$$\frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}} \;\leq\; \alpha\frac{a}{b} + (1-\alpha)\,,$$

assim,

$$a^{\alpha} \cdot b^{1-\alpha} \;\leq\; \alpha a + (1-\alpha)b.$$

Agora, fazendo

$$\alpha = \frac{1}{p}\ ,\ a = A^p \text{ e } b = B^q$$

e notando que $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$, temos

$$(A^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (B^q)^{\frac{1}{q}} \;\leq\; \frac{1}{p}A^p + \frac{1}{q}B^q\,,$$

isto é,

$$A \cdot B \;\leq\; \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}\ .$$

Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$ com $\|f\|_p$, $\|g\|_q > 0$, então usando (A.1) com

$$A = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \ \text{ e }\ B = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\ ,$$

temos que

$$\begin{aligned} \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} &= \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \\ &\leq \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}\ . \end{aligned}$$

Integrando ambos os lados obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int |f(x)g(x)|d\mu &\leq \frac{1}{p\|f\|_p^p}\int |f(x)|^p d\mu + \frac{1}{q\|g\|_q^q}\int |g(x)|^q d\mu \\
&= \frac{1}{p\|f\|_p^p}\cdot \|f\|_p^p + \frac{1}{q\|g\|_q^q}\cdot \|g\|_q^q \\
&= \frac{1}{p}+\frac{1}{q} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Daí, segue que

$$\int |f(x)g(x)|d\mu \;\leq\; \|f\|_p\|g\|_q.$$

Portanto, $fg \in L^1$ e $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q$. Caso $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$, tem-se $fg = 0 \in L^1$ e $\|fg\|_1 = \|f\|_p\|g\|_q = 0$.

■

Proposição A.2 (Desigualdade de Minkowski) *Se $f, g \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, então $f + g \in L^p$ e*

$$\|f+g\|_p \;\leq\; \|f\|_p + \|g\|_p\,.$$

Prova: Se $p = 1$, temos que

$$
\begin{aligned}
\int |f+g|d\mu &\leq \int (|f|+|g|)d\mu \\
&= \int |f|d\mu + \int |g|d\mu \\
&= \|f\|_1 + \|g\|_1\,.
\end{aligned}
$$

Logo, segue o resultado. Para $p > 1$, observe que

$$
\begin{aligned}
|f+g|^p &\leq (|f|+|g|)^p \\
&\leq [2\sup\{|f|,|g|\}]^p \\
&= 2^p|f|^p \;\;(\text{ ou } 2^p|g|^p) \\
&\leq 2^p(|f|^p+|g|^p).
\end{aligned}
$$

Como $f, g \in L^p$, segue que $f + g \in L^p$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
|f+g|^p &= |f+g|^{p-1}|f+g| \;\leq\; (|f|+|g|)|f+g|^{p-1} \\
&= |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}\,. \qquad \text{(A.2)}
\end{aligned}
$$

Note que $|f+g|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}$. Então, usando (A.2) e a Desigualdade de Hölder (Proposição A.1), temos

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int |f+g|^p d\mu \\
&\leq \int |f||f+g|^{p-1} d\mu + \int |g||f+g|^{p-1} d\mu \\
&= \left\|\left(|f||f+g|^{p-1}\right)\right\|_1 + \left\|\left(|g||f+g|^{p-1}\right)\right\|_1 \\
&\leq \|f\|_p \||f+g|^{p-1}\|_{\frac{p}{p-1}} + \|g\|_p \||f+g|^{p-1}\|_{\frac{p}{p-1}} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \||f+g|^{p-1}\|_{\frac{p}{p-1}} .
\end{aligned}$$

Mas,

$$\||f+g|^{p-1}\|_{\frac{p}{p-1}} = \left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}} = \|f+g\|_p^{p-1} .$$

Assim,

$$\|f+g\|_p^p \;\leq\; (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{p-1} ,$$

o que implica

$$\|f+g\|_p \;\leq\; \|f\|_p + \|g\|_p.$$

■

Definição A.5 *Uma sequência (f_n) em L^p é uma sequência de Cauchy em L^p se para todo $\epsilon > 0$, existe um $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq N$, então*

$$\|f_m - f_n\|_p \;<\; \epsilon.$$

Definição A.6 *Sejam (f_n) uma sequência em L^p e $f \in L^p$. A sequência (f_n) converge para f em L^p se para todo $\epsilon > 0$, existe um $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então*

$$\|f_n - f\|_p \;<\; \epsilon.$$

Teorema A.1 *O espaço L^p, $1 \leq p < \infty$, é um espaço de Banach com a norma*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Prova: (Ver [3], p.59, Teorema 6.14).

■

Sejam $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mensurável. Diz-se que f é limitada μ-q.s. se existe $c \geq 0$ tal que

$$|f(x)| \;\leq\; c\,,\; \forall\, x \in X \backslash N\,,$$

onde $N \in \mathcal{X}$ dado por $N = \{x \in X; |f(x)| > c\}$ é tal que $\mu(N) = 0$.

Definimos

$$L^\infty(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e limitada } \mu\text{-q.s. }\}.$$

Com a norma

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty} = \inf\{c\ ; |f(x)| \leq c\ \mu\text{-q.s. sobre } X\}. \tag{A.3}$$

Observação A.2 *Se $f \in L^\infty$, então*

$$|f(x)| \ \leq\ \|f\|_\infty \quad \mu\text{-}q.s.$$

De fato, pela definição de ínfimo, existe uma sequência (c_n) tal que $c_n \to \|f\|_\infty$ e para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|f(x)| \ \leq\ c_n \ \mu\text{-}q.s.\,,$$

ou seja,

$$|f(x)| \ \leq\ c_n\,,\ \forall\ x \notin N_n\,,\ \text{ onde } N_n \in \mathcal{X} \text{ com } \mu(N_n) = 0.$$

Definindo $N = \bigcup_{n=1}^\infty N_n$, temos $N \in \mathcal{X}$, $\mu(N) = 0$ e

$$|f(x)| \ \leq\ c_n\,,\ \forall\ x \notin N\,, n \in \mathbb{N}.$$

Logo, passando ao limite, obtemos $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$, para todo $x \notin N$.

Teorema A.2 *O espaço L^∞ é um espaço de Banach com a norma (A.3).*

Prova: (Ver [3], p.61, Teorema 6.16).

■

Apêndice B

Alguns resultados de Análise Funcional

Neste apêndice apresentamos alguns resultados importantes de análise funcional que são usados neste trabalho.

B.1 Teorema de Hanh-Banach

A seguir, um espaço vetorial normado X será um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e, X' é o espaço vetorial dos funcionais lineares contínuos (*dual topológico* de X) com a norma

$$\|\varphi\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |\varphi(x)| \ , \ \forall \ \varphi \in X'.$$

Teorema B.1 (Teorema de Hanh-Banach) [1] *Seja $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo, onde G é um subespaço de um espaço vetorial normado X. Então existe um funcional linear contínuo $\widetilde{\varphi} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ cuja restrição a G coincide com φ e $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Prova: (Ver [4]). ■

Corolário B.1 (Ver [4], p. 60) *Seja X um espaço vetorial normado. Para todo $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, existe um funcional linear $\widetilde{\varphi} \in X'$ tal que $\|\widetilde{\varphi}\| = 1$ e $\widetilde{\varphi}(x_0) = \|x_0\|$.*

[1] Existem outras versões do teorema de Hanh-Banach. Para mais detalhes sobre o teorema de Hanh-Banach e outras versões veja [4], [5] e [13].

Prova: Seja G um subespaço de X, G consistindo de todos os elementos $x = ax_0$ onde $a \in \mathbb{K}$. Defina um funcional linear

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{K}$$

por

$$\varphi(x) = \varphi(ax_0) = a\|x_0\|. \tag{B.1}$$

Note que φ é limitado e $\|\varphi\| = 1$. Com efeito, temos que

$$|\varphi(x)| = |\varphi(ax_0)| = |a|\|x_0\| = \|ax_0\| = \|x\|$$

e

$$\|\varphi\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |\varphi(x)| = 1.$$

Logo, φ é um funcional linear limitado e, consequentemente, contínuo. Pelo Teorema B.1 existe um funcional linear contínuo $\widetilde{\varphi} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ cuja restrição a G coincide com φ e $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\| = 1$. De (B.1) segue que

$$\widetilde{\varphi}(x_0) = \varphi(x_0) = \|x_0\|.$$

∎

B.2 Teorema do Ponto Fixo para Contrações

Definição B.1 *Seja (X, d) um espaço métrico. Uma aplicação $F : X \longrightarrow X$ é uma contração se existe λ, $0 \leq \lambda < 1$ tal que*

$$d(F(x), F(y)) \ \leq \ \lambda d(x, y)\,, \ \forall \ x, y \in X.$$

Teorema B.2 (Lema da Contração, [22]) *Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $F : X \longrightarrow X$ uma contração. Então existe um único ponto fixo p, por F, ou seja, existe um único ponto $p \in X$ tal que $F(p) = p$. Além disso, p é um atrator de F, isto é, $F^n(x) \to p$ quando $n \to \infty$, para todo $x \in X$. $F^n(x)$ é definido por $F(F^{n-1}(x))$.*

Prova: Dado $x \in X$, tome

$$x_1 = F(x)\,,\ x_2 = F(x_1) = F(F(x)) = F^2(x)\,,\ \cdots\ ,\ x_n = F^n(x)\,,\ \cdots\ ;\ n \in \mathbb{N}.$$

Devemos provar que a sequência (x_n) é de Cauchy. Primeiramente, mostramos por indução que existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que

$$d(x_{n+1}, x_n) \ \leq \ \lambda^n d(x_1, x_0)\,, \ \forall \ n \in \mathbb{N}. \tag{B.2}$$

Com efeito, como F é contração, então existe λ, $0 \leq \lambda < 1$ tal que

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(F(x_n), F(x_{n-1})) \ \leq \ \lambda d(x_n, x_{n-1}).$$

Para $n = 1$, segue que

$$d(x_2, x_1) \ \leq \ \lambda d(x_1, x_0).$$

Supondo que (B.2) vale para um certo $r \in \mathbb{N}$, e lembrando que F é contração, temos

$$\begin{aligned} d(x_{r+2}, x_{r+1}) &= d(F^{r+2}(x), F^{r+1}(x)) \\ &= d(F(F^{r+1}(x)), F(F^r(x))) \\ &= d(F(x_{r+1}), F(x_r)) \\ &\leq \lambda d(x_{r+1}, x_r) \\ &\leq \lambda \cdot \lambda^r d(x_1, x_0) = \lambda^{r+1} d(x_1, x_0)\,, \end{aligned}$$

provando que (B.2) vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dados $n, r \in \mathbb{N}$ e usando (B.2), temos que

$$\begin{aligned} d(x_{n+r}, x_n) &\leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+r}, x_{n+r-1}) \\ &\leq [\lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots + \lambda^{n+r-1}] d(x_1, x_0) \\ &= \lambda^n [1 + \lambda + \cdots + \lambda^{r-1}] d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Como $\lim_{n\to\infty} \lambda^n = 0$, segue que (x_n) é uma sequência de Cauchy e, como X é completo, essa sequência converge para um ponto $p \in X$. Afirmamos que p é o ponto fixo de F. De fato,

$$F(p) = F(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = p.$$

Além disso, p é o único ponto fixo de F. De fato, se $p, \widetilde{p} \in X$ são pontos fixos de F, então

$$d(p, \widetilde{p}) = d(F(p), F(\widetilde{p})) \ \leq \ \lambda d(p, \widetilde{p})\,,$$

o que implica

$$(1-\lambda)d(p,\widetilde{p}) \ \leq \ 0.$$

Daí, como $1-\lambda > 0$, resta ser $d(p,\widetilde{p}) = 0$, ou seja, $p = \widetilde{p}$.

■

Corolário B.2 *Seja (X,d) um espaço métrico completo. Se $F : X \longrightarrow X$ é contínua e, F^m é uma contração, para algum m, então existe um único ponto p fixo por F. Além disso, p é um atrator de F.*

Prova: Seguimos a demonstração dada por [22]. Seja p o ponto fixo atrator de F^m dado pelo Teorema B.2. Seja $n = mk + l$ com $0 \leq l < m$. Dado $x \in X$, note que $F^l(x)$ é um ponto de X. Como p é atrator de F^m, temos que

$$(F^m)^k(F^l(x)) \to p \ \text{ quando } k \to \infty.$$

Observe que $F^n(x) = (F^m)^k(F^l(x))$ e que $k \to \infty$ quando $n \to \infty$. Logo, segue que

$$F^n(x) \to p \ \text{ quando } n \to \infty\,,$$

isto é, p é um atrator de F. Agora, note que $F(p) = p$. Com efeito,

$$\begin{aligned} p &= \lim_{n\to\infty} F^n(F(p)) = \lim_{n\to\infty} F(F^n(p)) \\ &= F(\lim_{n\to\infty} F^n(p)) = F(p). \end{aligned}$$

■

B.3 Espaço $W^{1,p}$

A seguir, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$.

Definição B.2 *(Ver [5]) O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \Big\{ u \ \in \ L^p(\Omega) \ ; \ \exists \ g_1, g_2, ..., g_n \in L^p(\Omega) \ \textit{tal que} \ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \ , \\ \forall \ \ \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \ , \ \forall \ i = 1,2,...,n \Big\}\,,$$

onde $C_c^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções C^∞ com suporte compacto.

Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definimos $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, ..., n$. O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p .$$

Teorema B.3 (Rellich-Kondrachov, [5]) *Suponha que Ω é limitado e de classe C^1. Então temos as seguintes injeções compactas:*

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad &, \ \forall\ q \in [1, p^\star) \ , \ \textit{onde}\ \frac{1}{p^\star} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \ , \ \textit{se}\ p < n \ ; \\ W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad &, \ \forall\ q \in [p, +\infty) \ , \ \textit{se}\ p = n \ ; \\ W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}) \quad &, \ \textit{se}\ p > n \ . \end{aligned}$$

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ com injeção compacta para todo p (e todo n).

Prova: (Ver [5], p.285, Teorema 9.16).

∎

Bibliografia

[1] Aliprantis, C. D; Border, K. C., *Infinite Dimensional Analysis, A Hitchhiker's Guide*, Springer, 3^a ed., New York, 2007.

[2] Aragão, G. S., *Equações Diferenciais Ordinárias em Espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo, (2006).

[3] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Jonh Wiley & Sons, New York, 1995.

[4] Botelho, G., Pellegrino, D., Teixeira, E., *Fundamentos de Análise Funcional*, SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[5] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2010.

[6] Câmara, R. T. T., *Existência de Atrator Global para uma Equação de Evolução com Convolução*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, (2011).

[7] Dieudonné, J., *Deux Exemples Singuliers D'Équations Difféntielles*, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), v.12, p. 38-40, 1950.

[8] Folland, G. B., *Introduction to Partial Differential Equations*, 2^a ed., Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1995.

[9] Folland, G. B., *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, 2^a ed., Jonh Wiley & Sons, New York, 1999.

[10] Hale, J. K., *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Amarican Mathematical Society, Rhode Island, 1988.

[11] Hale, J. K., *Ordinary Differential Equations*, 2^a ed., Robert E. Krieger Publishing Company, Florida, 1980.

[12] Henry, D., *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[13] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis With Aplications*, Jonh Wiley & Sons, New York, 1978.

[14] Ladas, G. E., Laksmikantham, V., *Differential Equations in Abstract Spaces*, Academic Press, New York, 1972. (Mathematics in Science and Engineering, v. 85).

[15] Lima, E. L., *Curso de Análise vol. 2*, 11^a ed., IMPA (Projeto Euclides), Rio de Janeiro, 2010.

[16] Lima, E. L., *Espaços Métricos*, 4^a ed., IMPA (Projeto Euclides), Rio de Janeiro, 2011.

[17] Pazy, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, New York, 1983.

[18] Rall, L. B., *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, Academic Press, New York - London, 1971.

[19] Silva, M. B., *Comportamento Assintótico para Equação de Campos Neurais*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, (2014).

[20] da Silva, S. H., *Existence and upper semicontinuity of global attractors for neural network in a bounded domain*, Differential Equations and Dynamical Systems, 19, no. 1-2, (2011) 87-96.

[21] da Silva, S. H., *Properties of an equation for neural fields in a bounded domain*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2012 (2012), No. 42, pp. 1–9.

[22] Sotomayor, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[23] Temam, R., *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, 2^a ed., Springer, New York, 1997.

[24] Wilson, H. R., Cowan, J. D., *Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons*, Biophys, J. 12, 1-24, 1972.