Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Hipersuperfícies Tipo-espaço Completas com Curvatura Média Constante Imersas no Steady State Space

por

Bruno Fontes de Sousa †

sob orientação do

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima

e do

Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

Hipersuperfícies Tipo-espaço Completas com Curvatura Média Constante Imersas no Steady State Space

por

Bruno Fontes de Sousa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática: Geometria Diferencial

Aprovada por:

Prof. Dr. Ulisses Lima Parente (UECE)

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima (UFCG)

(Orientador)

Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez (UFCG)

(Co-orientador)

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

21/07/2011

Resumo

Neste trabalho estudamos hipersuperfícies tipo-espaço completas com curvatura média constante em uma região aberta do espaço de Sitter, chamada Steady State Space. Primeiro estabelecemos fórmulas adequadas para o Laplaciano de uma função altura e de uma função suporte naturalmente relacionadas com estas hipersuperfícies. Em seguida, considerando hipóteses apropriadas sobre a curvatura média e o crescimento da função altura, obtemos condições necessárias para a existência de tais hipersuperfícies. No caso bidimensional, estabelecemos e mostramos resultados tipo-Bernstein. Além disso, mostramos que se a hipersuperfície está entre dois slices então a sua curvatura média é igual a um. Obtemos também outras consequências para hipersuperfícies que estão abaixo de um slice. Por fim, estendemos um de nossos resultados para um certo espaço Robertson-Walker generalizado.

Palavras-chave: Variedades de Lorentz, Steady State Space, Hipersuperfícies tipo-espaço, curvatura média, teoremas tipo-Bernstein.

Abstract

In this work we study complete space-like hypersurfaces with constant mean curvature in the open region of de Sitter space, called the Steady State Space. First established suitable formulas for the Laplacian of a height function and of a suport function related to these hypersurfaces. Then, considering hypotheses appropriate on the mean curvature and growth of height functions we obtain necessary conditions for the existence of such hypersurfaces. In two-dimensional case, we set and show results-Bernstein type. Furthermore, we show that if the hypersurface is between two slices then its mean curvature is equal to one. We also obtain other consequences for hypersurfaces are below a slice. Finally, we extend one of our results to a certain space generalized Robertson-Walker.

Keywords: Manifold of the Lorentz, Steady State Space, space-like hypersurfaces, mean curvature, Bernstein's theorems.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por me permitir chegar até aqui.

Agradeço de coração a meus pais, José Agostinho de Sousa e Maria do Socorro Diniz Fontes, por me apoiarem sempre. Sem eles eu não teria chegado até aqui.

Agradeço à todos os meus irmãos por todo apoio que sempre me deram.

Agradeço ao Prof. Dr. Henrique Fernandez de Lima, que foi meu orientador, pela sua dedicação, compreensão e pela excelente orientação.

Agradeço ao Prof. Dr. Marco Antônio Lázaro Velásquez, que foi meu co-orientador, pela sua dedicação e pela grande ajuda que me deu na fase final do mestrado.

Agradeço ao Prof. Dr. Ulisses Lima Parente por ter aceitado o convite para participar da banca examinadora da minha dissertação.

Agradeço também aos amigos, colegas, aos funcionários e a todos os professores de graduação e pós-graduação da UAME-UFCG, que participaram direta ou indiretamente desde o início do meu curso de graduação. Agradeço ao Prof. Antônio Brandão por me ensinar Álgebra e sempre sempre estar disponível quando fui na sua sala tirar dúvidas. Agradeço ao Prof. Vanio Fragoso de Melo, por ter sido meu orientador de iniciação científica na graduação, pois essa foi a minha porta de entrada para o mestrado.

Agradeço à CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro e à Coordenação da Pós-Graduação em Matemática da UFCG.

Dedicatória

Aos meus pais e irmãos.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Nesta dissertação estudamos hipersuperfícies tipo-espaço completas com curvatura média constante H no steady state space $\mathcal{H}^{n+1}$, que é uma região aberta do espaço de Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$. K. Akutagawa provou que uma hipersuperfície tipo-espaço completa do espaço de Sitter com curvatura média constante H satisfazendo uma certa limitação é totalmente umbílica (cf. [7]). Obtemos condições necessárias para a existência de tais hipersuperfícies. Mais precisamente, colocando certas restrições sobre a curvatura média e no crescimento da função altura, provamos que $H = 1$.

Também provamos que, se a função altura de uma hipersuperfície tipo-espaço completa de $\mathcal{H}^{n+1}$, com curvatura média constante H, está entre dois slices então satisfaz $H = 1$ (cf. [2]). Como consequência deste resultado, usando resultados de Akutagawa e Montiel (cf. [8]), obtemos no caso bidimensional que essas superfícies são slices. Além disso, quando a função altura de tais hipersuperfícies está abaixo de um slice e o vetor curvatura média está no mesmo cone temporal de N, obtemos que $\frac{2\sqrt{n-1}}{n} \leq H \leq 1$. Finalmente, provamos um Teorema que estende um de nossos resultados para uma classe bem mais geral de espaços de Robertson-Walker generalizados.

A ferramenta analítica que usamos para provar este resultado é um princípio de máximo generalizado devido a Omori-Yau (veja Lema 4.4). Especificamente, aplicamos um resultado de Akutagawa (veja Proposição 4.1), que é uma consequência do princípio generalizado de Omori-Yau, em soluções não-negativas da desigualdade diferencial parcial $\Delta g \geq \alpha g^2$, onde $\alpha > 0$ é uma constante real. No caso bidimensional, para superfícies tipo-espaço completas com curvatura Gaussiana não-negativa, obtemos teoremas tipo-Bernstein, usando, em geral, o fato de que essas superfícies são parabólicas (cf. [5]).

Esta dissertação está organizada da seguinte forma. No Capítulo 2, apresentamos os conteúdos básicos, bem como as notações necessárias para o entendimento dos outros capítulos. No capítulo 3, trabalhamos com variedades Lorentzianas munidas com um campo de vetores conforme, e apresentamos uma fórmula para o laplaciano de uma função suporte associada a uma orientação da hipersuperfície tipo-espaço em tal espaço ambiente.

Proposição 1.1 *Sejam $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade Lorentziana e V um campo conforme em $\overline{M}^{n+1}$ um campo conforme com fator conforme denotado por ϕ. Se $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ é uma imersão tipo-espaço e $\eta = \langle V, N \rangle$, então*

$$\Delta\eta = n\langle V, \nabla H\rangle + \eta\{\overline{Ric}(N,N) + |A|^2\} + n\{H\phi - N(\phi)\}, \tag{1.1}$$

onde ∇H é o gradiente de H na métrica de Σ^n, $\overline{Ric}$ é o tensor de Ricci de $\overline{M}^n$ e $|A|$ é norma de Hilbert-Schmidt de A.

Em seguida, reformulamos o resultado anterior, para a situação específica dos espaços de Robertson-Walker generalizados (GRW) (para mais detalhes ver seção 2.5), além de calcularmos o Laplaciano da função altura de Σ^n com respeito ao campo ∂_t.

Proposição 1.2 *Seja $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ um espaço GRW, com base $(I, -dt^2)$ fibra Riemanniana (M, g) e função* warped *f. Se $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ é uma imersão tipo-espaço com curvatura média H constante então*

$$\Delta\eta = \eta\{Ric_M(N^*, N^*) + (n-1)(\log f)''(1 - \langle N, \partial_t\rangle^2) + |A|^2\} + nHf' \tag{1.2}$$

onde Ric_M denota o tensor de Ricci de M e $N^* = (\pi_M)_* N$.

Finalmente, o capítulo [3] é dedicado aos principais resultados desta dissertação. Provamos que uma hipersuperfície tipo-espaço, completa e com curvatura média constante $H \geq 1$, imersa no steady state space, cuja função altura tem crescimento controlado por um certo logaritmo, então $H = 1$, a curvatura escalar é não-negativa e não é limitada por baixo por nenhuma constante real positiva. Especificamente, obtemos o seguinte

Teorema 1.3 *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média constante $H \geq 1$. Se*

$$h \leq -\log(\cosh\theta - 1) \tag{1.3}$$

então:

(a) *$H = 1$ em Σ^n.*

(b) *A curvatura escalar S de Σ^n é não-negativa e existe uma sequência de pontos $\{p_k\}$ tal que $S(p_k) \to 0$ se $k \to \infty$.*

Um outro teorema é obtido no caso bidimensional, com as hipóteses anteriores, trocando a limitação da função altura por uma limitação adequada na norma do gradiente de H. Precisamente, obtemos o

Teorema 1.4 *Seja $\psi : \Sigma^2 \to \mathcal{H}^3$ uma imersão Riemanniana de uma superfície completa com curvatura Gaussiana K_Σ é não-negativa e curvatura média constante $H \geq 1$. Se*

$$|\nabla h|^2 \leq H^2 - 1 \tag{1.4}$$

então Σ^2 é um slice de $\mathcal{H}^3$.

Provamos também que uma hipersuperfície tipo-espaço completa CMC cuja função altura está entre dois slices satisfaz $H = 1$. Neste caso a função altura é limitada por constantes reais, diferentemente dos resultados anteriores, onde a função altura apenas tinha crescimento controlado por um logaritmo. Além disso, no caso bidimensional, obtemos que as únicas superfícies tipo-espaço completas com curvatura média constante situadas entre dois slices são as superfícies planas totalmente umbilicas. Mais precisamente, obtemos o seguinte

Teorema 1.5 *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média constante H. Se Σ^n está entre dois slices então $H = 1$. Além disso, no caso bidimensional Σ^2 é um slice de $\mathcal{H}^3$.*

Por outro lado, para uma hipersuperfície tipo-espaço completa CMC em $\mathcal{H}^{n+1}$ que está abaixo de um slice e tal que o vetor curvatura média está no mesmo cone temporal de N, obtemos que $\dfrac{2\sqrt{n-1}}{n} \leq H \leq 1$. Para ser mais preciso, obtemos o seguinte

Teorema 1.6 *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média constante H. Se Σ^n está abaixo de um slice de $\mathcal{H}^{n+1}$ e o vetor curvatura média $\overrightarrow{H} = HN$ está no mesmo cone tipo-tempo que contém N, então $\dfrac{2\sqrt{n-1}}{n} \leq H \leq 1$. Além disso, no caso bidimensional Σ^2 é um slice de $\mathcal{H}^3$.*

Finalmente, estendemos o Teorema 4.11 da seguinte forma

Teorema 1.7 *Seja M^n uma variedade Riemanniana (necessariamente completa) com curvatura seccional não-negativa e seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1} = -\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ uma hipersuperfície com curvatura média constante H. Se Σ^n está entre dois slices então $H = 1$. Além disso, no caso bidimensional, Σ^2 é necessariamente um slice $\{t\} \times M^2$.*

Capítulo 2

Preliminares

Neste primeiro capítulo, temos como objetivo estabelecer as notações que serão utilizadas nos demais capítulos deste trabalho, bem como os fatos básicos da teoria de imersões isométricas dos quais faremos uso posteriormente.

2.1 Tensores em Variedades

No que segue, K denota um anel e $V_1, \ldots, V_s$ denotam módulos sobre K. O conjunto $V_1 \times \ldots \times V_s$ de todas as s-uplas $(v_1, \ldots, v_s)$, com as operações usuais de adição e multiplicação por um elemento de K, é um módulo sobre K, chamado *produto direto* de $V_1, \ldots, V_s$. Se $V_i = V$, para cada $1 \leq i \leq s$, a notação $V_1 \times \ldots \times V_s$ é substituída por V^s.

Definição 2.1 *Se W é um módulo sobre K, uma aplicação*

$$A : V_1 \times \ldots \times V_s \to W$$

é dita multilinear sobre K se A é linear sobre K em cada entrada, isto é, para cada $1 \leq i \leq s$ e $v_j \in V_j (j \neq i)$, a função

$$v \to A(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_s)$$

é linear sobre K.

Se V é um módulo sobre K então $V^* = \{f : V \to K \, ; \, f \text{ é linear sobre } K\}$ com as definições usuais de adição de funções e multiplicação por um elemento de K é um módulo sobre K, chamado *módulo dual* de V.

Definição 2.2 *Sejam $r, s \geq 0$ números inteiros não simultaneamente nulos. Uma aplicação K-multilinear $A : (V^*)^r \times V^s \to K$ é chamada um tensor de tipo (r, s), ou um (r, s)-tensor sobre V. Um $(0, s)$-tensor é simplesmente uma aplicação linear $A : V^s \to K$ e, analogamente, um $(r, 0)$-tensor é uma aplicação linear $A : (V^*)^r \to K$.*

O conjunto $\mathfrak{T}_s^r(V)$ de todos os (r, s)-tensores sobre V, com as operações usuais de adição e multiplicação por elemento de K, é um módulo sobre K. Um tensor de tipo $(0, 0)$ é simplesmente um elemento de K.

No que segue $\overline{M}^{n+1}$ denota uma variedade diferenciável de dimensão $n + 1$ (cf. [9], Capítulo 1). Além disso $C^\infty\left(\overline{M}\right)$ denota o anel de todas as funções suaves reais definidas em $\overline{M}^{n+1}$ e $\mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$ o $C^\infty\left(\overline{M}\right)$-módulo de todos os campos vetorias definidos em $\overline{M}^{n+1}$.

Definição 2.3 *Um campo de tensores ou um campo tensorial A em uma variedade $\overline{M}^{n+1}$ é um tensor sobre o $C^\infty\left(\overline{M}\right)$-módulo $\mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$.*

Assim, um (r, s)-tensor A é uma aplicação

$$A : \mathfrak{X}^*\left(\overline{M}\right)^r \times \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)^s \to C^\infty\left(\overline{M}\right) \tag{2.1}$$

multilinear sobre $C^\infty\left(\overline{M}\right)$. Ou seja, A é uma aplicação multilinear sobre $C^\infty\left(\overline{M}\right)$ que associa a cada $(r + s)$-upla $(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)$ uma função diferenciável

$$f = A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) : \overline{M}^{n+1} \to \mathbb{R}.$$

A posição que θ^i ocupa é chamada *i-ésima entrada contravariante* e a posição que X_j ocupa é chamada de *j-ésima entrada covariante*. Desta maneira, os $(0, s)$-tensores são ditos *covariantes* e os $(r, 0)$-tensores são ditos *contravariantes*. Denotamos por $\mathfrak{T}_s^r\left(\overline{M}\right)$ o módulo de todos os (r, s)-tensores sobre $C^\infty\left(\overline{M}\right)$.

Observação 2.1

(i) Como toda função $f \in C^\infty\left(\overline{M}\right)$ é um $(0, 0)$-tensor, obtemos a identificação $\mathfrak{T}_0^0\left(\overline{M}\right) = C^\infty\left(\overline{M}\right)$.

(ii) Se θ é uma 1-forma em $\overline{M}^{n+1}$ então a função

$$\mathfrak{X}\left(\overline{M}\right) \ni X \mapsto \theta(X) \in C^\infty\left(\overline{M}\right) \tag{2.2}$$

é $C^\infty\left(\overline{M}\right)$-linear. Assim, podemos escrever $\mathfrak{T}_0^1\left(\overline{M}\right) = \mathfrak{X}^*\left(\overline{M}\right)$.

(iii) De forma análoga, se X é um campo vetorial em $\overline{M}^{n+1}$ então a função

$$\mathfrak{X}^*\left(\overline{M}\right) \ni \theta \mapsto \theta(X) \in C^\infty\left(\overline{M}\right) \tag{2.3}$$

é $C^\infty\left(\overline{M}\right)$-linear. Assim, podemos escrever $\mathfrak{T}_1^0\left(\overline{M}\right) = \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$.

(iv) Se $A : \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)^s \mapsto \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$ é $C^\infty\left(\overline{M}\right)$-linear então a aplicação

$$\mathfrak{X}^*\left(\overline{M}\right) \times \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)^s \ni (\theta, X_1, \cdots, X_s) = \theta(A(X_1, \cdots, X_s)) \in C^\infty\left(\overline{M}\right) \tag{2.4}$$

é $C^\infty\left(\overline{M}\right)$-linear. Assim, A pode ser considerado como um $(1, s)$-tensor.

A próxima definição nos ensina como fazer o produto de dois tensores.

Definição 2.4 *Sejam $A \in \mathfrak{T}_r^s\left(\overline{M}\right)$ e $B \in \mathfrak{T}_{r'}^{s'}\left(\overline{M}\right)$. O produto do tensor A pelo tensor B é o tensor*

$$A \otimes B : \mathfrak{X}^*\left(\overline{M}\right)^{r+r'} \times \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)^{s+s'} \to C^\infty\left(\overline{M}\right)$$

tal que

$$\begin{aligned} & (A \otimes B)(\theta^1, \cdots, \theta^{r+r'}, X_1, \cdots, X_{s+s'}) \\ = \; & A(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s)B(\theta^{r+1}, \cdots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \cdots, X_{s+s'}). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Se $r' = s' = 0$ então B é uma função $f \in C^\infty\left(\overline{M}\right)$. Então definimos

$$A \otimes f = f \otimes A = fA.$$

Além disso, se A é um $(0, 0)$-tensor então o produto tensorial reduz-se a multiplicação em $C^\infty\left(\overline{M}\right)$.

Agora, vamos mostrar que campos de tensores em uma variedade $\overline{M}^{n+1}$ podem ser definidos pontualmente, isto é, dado $A \in \mathfrak{T}_s^r\left(\overline{M}\right)$, associamos a cada ponto $p \in \overline{M}^{n+1}$ um único tensor A_p. O fato essencial é que a função a valores reais

$$A(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s),$$

onde $\theta^1, \cdots, \theta^r \in \mathfrak{X}^*\left(\overline{M}\right)$ e $X_1, \cdots, X_s \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$, quando avaliada em $p \in \overline{M}^{n+1}$, independe das 1-formas e dos campos de vetores, mas depende apenas de seus valores em uma vizinhança de p. É o que diz a seguinte proposição.

Proposição 2.5 *Sejam $p \in \overline{M}^{n+1}$ e $A \in \mathfrak{T}_s^r\left(\overline{M}\right)$. Considere 1-formas $\overline{\theta}^1, \cdots, \overline{\theta}^r$, $\theta^1, \cdots, \theta^r$ e campos $\overline{X}_1, \cdots, \overline{X}_s$, $X_1, \cdots, X_s$ tais que $\overline{\theta}^i|_p = \theta^i|_p$ e $\overline{X}_j\big|_p = X_j|_p$, para cada $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j \leq s$. Então*

$$A(\overline{\theta}^1, \cdots, \overline{\theta}^r, \overline{X}_1, \cdots, \overline{X}_s)(p) = A(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s)(p). \tag{2.6}$$

A prova será feita após o próximo lema.

Lema 2.1 *Se qualquer uma das 1-formas* $\theta^1, \cdots, \theta^r$ *ou um dos campos* $X_1, \cdots, X_s$ *é nulo em* $p \in \overline{M}^{n+1}$*, então* $A(\bar{\theta}^1, \cdots, \bar{\theta}^r, X_1, \cdots, X_s)(p) = 0$.

Prova. Suponha que $X_s|_p = 0$. Seja $\xi(x^1, \ldots, x^n)$ um sistema de coordenadas em uma vizinhança de $\mathcal{U}$ em p. Então

$$X_s = \sum X^i \partial_i,$$

onde $\partial = \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $X^i = X_s x^i \in C^\infty(\mathcal{U})$. Seja f uma função salto em p com suporte em $\mathcal{U}$. Então fX^i é uma função diferenciável em M e $f\partial_i \in \mathfrak{X}(M)$. Daí,

$$\begin{aligned} f^2 A(\theta^1, \ldots, \theta^r, \ldots, X^1, \ldots, X_s) \quad &= A(\theta^1, \ldots, \theta^r, \ldots, X^1, \ldots, f^2 X_s) \\ = A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X^1, \ldots, \sum_{i=1}^{n} fX^i f\partial_i) \quad &= \sum_{i=1}^{n} fx^i A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X^1 \ldots, f\partial_i). \end{aligned}$$

Desde que $X_s|_p = 0$, cada $X^i(p) = 0$ e $f = 1$. Portanto, avaliando a fórmula acima em p concluímos que $A(\theta^1, \cdots, X_s)(p) = 0$. ■

A seguir, faremos a

Prova da Proposição 2.5.

Basta observarmos a soma telescópica e denotarmos $\theta^1, \ldots, \theta^r, X^1, \ldots, X^s$ simplesmente por $X_1, \ldots, X_k$ onde $k = 1, \ldots, r+s$, e assim

$$\begin{aligned} &A(X_1, \ldots, X_s) - A(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_s) = \\ &+A(\overline{X}_1 - \overline{X}_2, X_2, \ldots, X_v) + A(X_1, X_2 - \overline{X}_2, X_3, \ldots, X_k) \\ &+ \ldots + A(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_{k-1}, X_k - \overline{X}_k), \end{aligned}$$

mostrando o resultado. ■

2.1.1 As Componentes de um Tensor

Definição 2.6 *Seja* $\xi = (x^1, \cdots, x^{n+1})$ *um sistema de coordenadas em* $\mathcal{U} \subset \overline{M}^{n+1}$*. Se* $A \in \mathfrak{T}^r_s\left(\overline{M}\right)$ *então as componentes de* A *relativamente a* ξ *são as funções a valores reais em* $\mathcal{U}$ *dadas por*

$$A^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} = A(dx^{i_1}, \cdots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \cdots, \partial_{j_s}), \tag{2.7}$$

onde $i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s \in \{1, \cdots, n+1\}$.

Para um $(0,1)$-tensor, que é uma 1-forma, estas componentes são dadas pela fórmula $\theta = \sum \theta(\partial_i) dx^i$. Para um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$ temos $X(dx^i) = dx^i(X) = X(x^i) = X^i$. Considere agora a situação de um tensor $A \in \mathfrak{T}_2^1(U)$. Assim

$$A = A_{ij}^k \partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j. \tag{2.8}$$

Para provarmos a equação (2.8) é só aplicar ambos os lados da igualdade na base associada ao sistema de coordenadas ξ e com o mesmo raciocínio se prova o lema

Lema 2.2 *Sejam $x^1, \ldots, x^{n+1}$ um sistema de coordenadas em $\mathcal{U} \subset \overline{M}$. Se A é um campo de (r,s)-tensores, então em $\mathcal{U}$, temos*

$$A = \sum A_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}, \tag{2.9}$$

onde cada índice é somado de 1 até $n+1$.

2.1.2 Contração de Tensores

Nesta subseção vamos apresentar uma operação que reduz o tipo de um tensor no seguinte sentido: tranforma um (r,s)-tensor num $(r-1, s-1)$-tensor.

Lema 2.3 *Existe uma única função $C^\infty\left(\overline{M}\right)$-linear $\mathcal{C} : \mathfrak{T}_1^1\left(\overline{M}\right) \to C^\infty\left(\overline{M}\right)$, denominada $(1,1)$-contração, tal que $\mathcal{C} X \otimes \theta = \theta X$, para todo $X \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$ e qualquer $\theta \in \mathfrak{X}^*\left(\overline{M}\right)$.*

Prova. Numa vizinhança coordenada U o tensor $A \in \mathfrak{T}_a^1\left(\overline{M}\right)$ é escrito como

$$A = \sum A_i^j \partial_i \otimes dx^j. \tag{2.10}$$

Como $\mathcal{C}(\partial_i \otimes dx^j) = dxj(\partial_i) = \delta_{ij}$ então $\mathcal{C}(A) = \sum A_i^i$. Assim temos a unicidade. Para a existência defina $\mathcal{C}$ pela expressão $\mathcal{C}(\partial_i \otimes dx^j) = dx^j(\partial_i) = \delta_{ij}$. Para mostrar a independência do sistema de coordenadas, é só observar

$$\sum_m A\left(dy^m \frac{\partial}{\partial y^m}\right) = \sum_m A\left(\sum_i \frac{\partial y^m}{\partial x^i} dx^i, \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial y^m} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) =$$

$$= \sum_{i,j,m} \frac{\partial y^m}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial y^m} A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{i,j} \delta_{ij} A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_i A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

■

Usando o Lema 2.3 vamos generalizar a definição de $(1,1)$-contração para um (r,s)-tensor A nas entradas i e j. Seja $A \in \mathfrak{T}_r^s\left(\overline{M}\right)$ um (r,s)-tensor e fixe $r-1$

1-formas $\theta^1, \cdots, \theta^{r-1} \in \mathfrak{X}^*\left(\overline{M}\right)$ e $s-1$ campos de vetores $X_1, \cdots, X_{s-1} \in \mathfrak{X}^*\left(\overline{M}\right)$. Então a função

$$(\theta, X) \rightarrow A(\theta^1, \cdots, \theta, \cdots, \theta^{r-1}, \cdots, X_1, \cdots, X, \cdots, X_{s-1}) \tag{2.11}$$

onde θ está na i-ésima entrada covariante e X está na j-ésima entrada contravariante, é um $(1,1)$-tensor, ou seja,

$$A(\theta^1, \cdots, \ \cdot\ , \cdots \theta^{r-1}, \cdots, X_1, \cdots, \ \cdot\ , \cdots, X_{s-1}) \in \mathfrak{T}_1^1\left(\overline{M}\right).$$

Aplicando o Lema 2.3 para este $(1,1)$-tensor produzimos uma função à valores reais que denotaremos por

$$\left(\mathcal{C}_j^i A\right)(\theta^1, \cdots, \theta^{r-1}, X_1, \cdots, X_{s-1}). \tag{2.12}$$

Observamos que $\mathcal{C}_j^i A$ é $C^\infty\left(\overline{M}\right)$-linear em cada entrada, ou seja, é um tensor de tipo $(r-1, s-1)$ chamada a *contração de A sobre i e j*.

Corolário 2.7 *Sejam $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j \leq s$. Relativamente a um sistema de coordenadas, se $A \in \mathfrak{T}_s^r\left(\overline{M}\right)$ tem componentes $A_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r}$, então $\mathcal{C}_j^i A$ tem componentes*

$$\sum_m A_{j_1 \ldots m \ldots j_s}^{i_1 \ldots m \ldots i_r}. \tag{2.13}$$

Prova. Vamos fazer as seguintes identificações

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{C}_j^i A\right)_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s} &= \left(\mathcal{C}_j^i A\right)\left(dx^{i_1}, \ldots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_s}\right) \\
&= \mathcal{C}\left\{A\left(dx^{i_1}, \ldots, \cdot, \ldots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \ldots, \cdot, \ldots, \partial_{j_s}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Assim, usando o Lema 2.3 obtemos

$$\left(\mathcal{C}_j^i A\right)_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s} = \sum_m A\left(dx^{i_1}, \ldots, dx^m, \ldots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \ldots, \partial_m, \ldots, \partial_{j_s}\right).$$

Como a Definição 2.6 nos diz que

$$A_{j_1 \ldots m \ldots j_s}^{i_1 \ldots m \ldots i_r} = A\left(dx^{i_1}, \ldots, dx^m, \ldots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \ldots, \partial_m, \ldots, \partial_{j_s}\right),$$

então, podemos concluir que

$$\left(\mathcal{C}_j^i A\right)_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s} = \sum_m A_{j_1 \ldots m \ldots j_s}^{i_1 \ldots m \ldots i_r}.$$

■

2.1.3 O Pullback de um Tensor Covariante

Definição 2.8 *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis e $\phi : M^m \to N^n$ uma aplicação diferenciável entre elas. Se $A \in \mathfrak{T}^0_s(N)$ com $s \geq 1$, seja*

$$\phi^*(A)(v_1, \cdots, v_s) = A(d\phi v_1, \cdots, d\phi v_s) \tag{2.14}$$

onde $(v_1, \cdots, v_s) \in T_p(M)^s$ e $p \in M$. Então $\phi^*(A)$ é chamado o pullback de A para ϕ.

Em cada ponto $p \in M^m$, $\phi^*(A)$ produz uma função $\mathbb{R}$-linear de $T_p(M)^s$ em $\mathbb{R}$, isto é, um $(0, s)$-tensor sobre $T_p(M)$. Fazendo um cálculo em coordenadas é possível mostrar que $\phi^*(A)$ é campo de tensores covariantes em M. No caso especial de um $(0, 0)$-tensor $f \in C^\infty(M)$, pullback para M^m é definido de forma que $\phi^*(f) = f \circ \phi \in C^\infty(M)$. Note que $\phi^*(df) = d(\phi^* f)$.

Temos as seguintes propriedades para o pullback de tensores covariantes.

Lema 2.4 *Sejam M^m, N^n, $\widetilde{N}^p$ variedades diferenciáveis e considere aplicações diferenciáveis $\phi : M^m \to N^n$, $\psi : N^n \to \widetilde{N}^p$. Então*

(i) *$\phi^* : \mathfrak{T}^0_s(N) \to \mathfrak{T}^0_s(M)$ é $\mathbb{R}$-linear para cada $s \geq 0$ e*

$$\phi^*(A \otimes B) = \phi^*(A) \otimes \phi^*(B), \tag{2.15}$$

para quaisquer tensores covariantes de tipos $(0, s)$ e $(0, s)$.

(ii) *para todo $s \geq 0$, $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^* : \mathfrak{T}^0_s(\widetilde{N}) \to \mathfrak{T}^0_s(M)$.*

Prova.

(i) A $\mathbb{R}$-linearidade do pullback de uma aplicação diferenciável $\phi : M^m \to N^n$ é consequência direta da Definição 2.8. Vamos provar a equação (2.15). De fato, sejam $A, B \in \mathfrak{T}^0_s(N)$. Se $(v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_n) \in T_pM^s$, onde T_pM é o espaço tangente no ponto $p \in M^n$ (cf. [9], Definição 1.9), então

$$\phi^*(A \otimes B)(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n) = (A \otimes B)(d\phi v_1, \ldots, d\phi v_n, d\phi w_1, \ldots, d\phi w_n).$$

Da Definição 2.4, segue que

$$\begin{aligned} \phi^*(A \otimes B)(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n) &= A(d\phi v_1, \ldots, d\phi v_n)B(d\phi w_1, \ldots, d\phi w_n) \\ &= \phi^*(A)\phi^*(B)(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n), \end{aligned}$$

como desejado.

(ii) Agora, sejam $\phi : M^m \to N^n$ e $\psi : N^n \to \widetilde{N}^p$ aplicações diferenciáveis e $A \in \mathfrak{T}^0_s(\widetilde{N})$. Observemos primeiramente que $\psi \circ \phi : M^n \to \widetilde{N}^p$, $\psi^*(A) \in \mathfrak{T}^0_s(N)$ e também $\phi^*(\psi^*(A)) \in \mathfrak{T}^0_s(M)$. Então

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \phi)^* (A)(v_1, \ldots, v_n) &= A(d(\psi \circ \phi)v_1, \ldots, d(\psi \circ \phi)v_n) \\
&= A\left(d\psi(\phi(v_1))(d\phi(v_1)), \ldots, d\psi(\phi(v_n))(d\phi(v_n))\right) \\
&= \psi^*(A)((d\phi(v_1), \ldots, d\phi(v_n)) \\
&= \phi^*(\psi^* A)\left(v_1, \ldots, v_n\right),
\end{aligned}$$

concluindo a prova. ∎

2.1.4 Derivação de Tensores

Definição 2.9 *Um tensor derivação $\mathfrak{D}$ em uma variedade diferenciável $\overline{M}^{n+1}$ é um conjunto de aplicações $\mathbb{R}$-lineares*

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^r_s : \mathfrak{T}^r_s(M) \to \mathfrak{T}^r_s(M) \quad , \quad r, s \geq 0, \tag{2.16}$$

tal que para quaisquer tensores A e B e toda contração tem-se $\mathcal{C}$,

(i) $\mathfrak{D}(A \otimes B) = \mathfrak{D}A \otimes B + A \otimes \mathfrak{D}B$,

(ii) $\mathfrak{D}(\mathcal{C}A) = \mathcal{C}(\mathfrak{D}A)$ *para toda contração* $\mathcal{C}$.

Portanto $\mathfrak{D}$ é $\mathbb{R}$-linear, preserva tipo de tensor, obedece a regra do produto e comuta com contrações. Para uma função $f \in C^\infty(M)$ temos $\mathfrak{D}(fA) = (\mathfrak{D}f)A + f\mathfrak{D}A$.

No caso especial em que $t = s = 0$, se $\mathfrak{D}^0_0$ é uma derivação em $\mathfrak{T}^0_0(M) = C^\infty\left(\overline{M}\right)$ existe um único campo de vetores $V \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$ tal que $\mathfrak{D}f = Vf$, para toda $f \in C^\infty\left(\overline{M}\right)$.

Proposição 2.10 *Se $\mathfrak{D}$ é um tensor derivação em $\overline{M}^{n+1}$ e $\mathcal{U}$ é um aberto de $\overline{M}^{n+1}$, então existe um único tensor derivação $\mathfrak{D}_\mathcal{U}$ em $\mathcal{U}$, chamado a restrição de $\mathfrak{D}$ para $\mathcal{U}$, tal que*

$$\mathfrak{D}_\mathcal{U}(A|\mathcal{U}) = (\mathfrak{D}A)|\mathcal{U} \tag{2.17}$$

para qualquer tensor A em $\overline{M}^{n+1}$ (no futuro, nos omitimos o sub-índice $\mathcal{U}$).

Prova. Sejam $B \in \mathfrak{T}^r_s(\mathcal{U})$ e f uma função salto em p em $\mathcal{U}$. Assim $fB \in \mathfrak{T}^r_s(M)$. Definamos

$$\mathfrak{D}_\mathcal{U} B = \mathfrak{D}(fB)_p. \tag{2.18}$$

Vamos mostrar que a definição acima não depende da escolha da função f. De fato, sejam f, g duas funções salto p. Assim

$$\mathfrak{D}(fg)(B)_p = f(p)\mathfrak{D}(gB)_p + \mathfrak{D}(f)(p)g(p)B|_p = \mathfrak{D}(gB)_p,$$

e, da comutatividade do produto de funções, segue o afirmado.

Além disso, pode-se provar que

(1) $\mathfrak{D}_{\mathcal{U}}B$ é um campo de tensores diferenciável em $\mathcal{U}$.

(2) $\mathfrak{D}_{\mathcal{U}}$ é um tensor derivação em $\mathcal{U}$.

(3) $\mathfrak{D}_{\mathcal{U}}(B|_{\mathcal{U}}) = \mathfrak{D}(B)_{\mathcal{U}}$ para qualquer $B \in \mathfrak{T}^r_s(M)$.

(4) $\mathfrak{D}|_{\mathcal{U}}$ é único.

■

A seguir vamos estabelecer uma regra para se calcular a derivada de tensores.

Proposição 2.11 (Regra do Produto) *Seja* $\mathfrak{D}$ *um tensor derivação em* $\overline{M}^{n+1}$*. Se* $A \in \mathfrak{T}^r_s\left(\overline{M}\right)$ *então*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}[A(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s)] &= (\mathfrak{D}A)(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1, \cdots, \mathfrak{D}\theta^i, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{s} A\left(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, \mathfrak{D}X_j, \cdots, X_s\right).
\end{aligned}$$

Prova. Por simplicidade faremos o caso $r = s = 1$. Nós afirmamos que

$$A(\theta, X) = \overline{\mathcal{C}}(A \otimes \theta \otimes X)$$

onde $\overline{\mathcal{C}}$ é uma composta de duas contrações. De fato, em relação a um sistema de coordenadas $A \otimes \theta \otimes X$ tem componentes $A^i_j \theta_k X^l$, enquanto $A(\theta, X) = \sum A^i_j \theta_i X^j$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}\left(A(\theta, X)\right) &= \mathfrak{D}\overline{\mathcal{C}}\left(A \otimes \theta \otimes X\right) = \overline{\mathcal{C}}\mathfrak{D}\left(A \otimes \theta \otimes X\right) \\
&= \overline{\mathcal{C}}\left(\mathfrak{D}A \otimes \theta \otimes X\right) + \overline{\mathcal{C}}\left(A \otimes \mathfrak{D}\theta \otimes X\right) + \overline{\mathcal{C}}\left(A \otimes \theta \otimes \mathfrak{D}X\right) \\
&= \left(\mathfrak{D}A\right)\left(\theta, X\right) + A\left(\mathfrak{D}\theta, X\right) + A\left(\theta, \mathfrak{D}X\right),
\end{aligned}$$

provando o resultado neste caso específico. ∎

Como uma consequência deste resultado temos o seguinte

Corolário 2.12 *Se $\mathfrak{D}_1$ e $\mathfrak{D}_2$ são tensores derivação que coincidem para funções em $C^\infty\left(\overline{M}\right)$ e para campos em $\mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$ então $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$.*

Prova. Basta observar que

$$(\mathfrak{D}\theta)\,(X) = \mathfrak{D}\,(\theta X) - \theta\mathfrak{D}(X).$$

∎

Teorema 2.13 *Considere $V \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$ e uma função $\mathbb{R}$-linear $\delta : \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right) \to \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$ tais que*

$$\delta(fX) = Vf\ X + f\ \delta(X), \tag{2.19}$$

para qualquer $f \in C^\infty\left(\overline{M}\right)$ e todo $X \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$. Então existe um único tensor derivação $\mathfrak{D}$ tal que $\mathfrak{D}^0_0 = V : C^\infty\left(\overline{M}\right) \to C^\infty\left(\overline{M}\right)$ e $\mathfrak{D}^1_0 = \delta$.

Prova. Vamos definir

$$(\mathfrak{D}\theta)\,(X) = V(\theta X) - \theta(\delta X)$$

para qualquer $X \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$.

Usando a equação (2.19) vemos que $\mathfrak{D}\theta$ é uma 1-forma em $\overline{M}$ e $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^0_1 : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ é $\mathbb{R}$-linear.

Para um tensor $A \in \mathfrak{T}^r_s$ com $r + s \geq 2$ vamos definir pela Proposição 2.11

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{D}A)\,(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) \;&=\; V\left(A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)\right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1, \ldots, \mathfrak{D}\theta^i, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, \delta X_j \ldots, X_s).
\end{aligned}$$

Com um cálculo direto se mostra que $\mathfrak{D}A \in \mathfrak{T}^r_s$ e é uma derivação (para mais detalhes ver capítulo 2 de [9]). ∎

Uma importante aplicação do Teorema 2.13 é a definição abaixo.

Definição 2.14 *Seja $V \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$. O tensor derivação $\mathcal{L}_V$ tal que*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V(f) &= Vf, \ \ \forall f \in C^\infty\left(\overline{M}\right), \\ \mathcal{L}_V(X) &= [V,X] \ \ \forall X \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right) \end{aligned}$$

é chamado a derivada de Lie com relação a V.

A definição acima está bem posta pois $\mathcal{L}_V$ aplicado em campos de vetores satisfaz a equação (2.19), ou seja

$$\mathcal{L}_V(fX) = [V,fX] = (Vf)X + f[V,X] = (Vf)X + f\mathcal{L}_V(X).$$

2.2 Variedades semi-Riemannianas

2.2.1 Formas Bilineares

Definição 2.15 *Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma forma bilinear simétrica $b = \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ é dita*

(i) positiva definida, se $\langle v,v\rangle > 0$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$.

(ii) negativa definida, se $\langle v,v\rangle < 0$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$.

(iii) não-degenerada, se $\langle v,w\rangle = 0$ para todo $w \in V$ implica em $v = 0$.

Se b é uma forma bilinear simétrica sobre V, um subespaço $W \subset V$ é dito *não-degenerado* se $b_{|W\times W} : W \times W \to \mathbb{R}$ for não-degenerada.

Definição 2.16 *O índice ν de uma forma bilinear simétrica b sobre V é a maior dimensão de um subespaço $W \subset V$ tal que $b_{|W\times W} : W \times W \to \mathbb{R}$ seja negativa definida.*

Segue, desta definição, que $\nu \in \{0, 1, \cdots, \dim V\}$, sendo $\nu = 0$ se, e somente se, b é positiva definida. A função $q : V \to \mathbb{R}$ dada por $q(v) = b(v,v)$ é uma forma quadrática em V, chamada *forma quadrática associada* a b. Em alguns casos é mais conveniente trabalhar com ela do que com a própria b, e não há perda de generalidade pois b pode ser recuperada pela identidade de polarização

$$b(v,w) = \frac{1}{2}\{q(v+w) - q(v) - q(w)\}. \tag{2.20}$$

Seja $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base para V. A matriz $[b_{ij}]_{n\times n} = [b(e_i,e_j)]_{n\times n}$ é chamada *matriz de b relativa a base $\mathcal{B}$*. Desde que b é simétrica, a matriz $[b_{ij}]_{n\times n}$ é simétrica.

Lema 2.5 *Uma forma bilinear simétrica b é não-degenerada se, e somente se, sua matriz relativa a uma base (e portanto a todas) é invertível.*

Prova. Seja $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base para V. Considere $v \in V$. Então $b(v, w) = 0$ para cada $w \in V$ se, e somente se, $b(v, e_i) = 0$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. Como $[b_{ij}]_{n \times n}$ é simétrica,

$$b(v, e_i) = b\left(\sum_{j=1}^{n} v_j e_j, e_i\right) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} v_j.$$

Assim, b é não-degenerada se, e só somente se, existem números $v_1, \ldots, v_n$ não todos nulos tal que $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} v_j = 0$, para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. Mas isso é equivalente a dependência linear das colunas de $[b_{ij}]_{n \times n}$. Assim, $[b_{ij}]_{n \times n}$ é invertível. ■

Definição 2.17 *Um produto escalar g em um espaço vetorial V é uma forma bilinear simétrica não-degenerada em V. Um produto interno em um espaço vetorial V é um produto escalar definido positivo.*

Exemplo 1 *Um exemplo padrão de um espaço vetorial com produto interno é $\mathbb{R}^n$ com a forma bilinear*

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i,$$

onde $v = (v_1, \cdots, v_n), w = (w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo 2 *Defina $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por*

$$g(v, w) = v_1 w_1 - v_2 w_2.$$

Claramente g é uma forma bilinear e simétrica. Tomando a base $\{(1, 0), (0, 1)\}$ e usando o Lema 2.5 obtemos que g é não-degenerada. Portanto g um produto escalar. A forma quadrática associada é $q(v) = v_1^2 - v_2^2$.

Definição 2.18 *Dados uma forma bilinear simétrica b sobre V e um subespaço W de V, definimos o complemento ortogonal $W^\perp$ de W em V por*

$$W^\perp = \{v \in V \ ; \ \langle v, w \rangle = 0 \ \textit{para todo} \ w \in W\}.$$

No seguinte resultado colecionamos alguns fatos relevantes sobre formas bilineares simétricas (cf. [9], Lema 2.22 e Lema 2.23).

Lema 2.6 *Seja b uma forma bilinear simétrica sobre o espaço vetorial de dimensão finita V, e W um subespaço de V. Então:*

(i) Se W é não-degenerado então $dim(W)+dim(W^{\perp}) = dim(V)$ e $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

(ii) W é não-degenerado se, e somente se, $V = W \oplus W^{\perp}$. Em particular, W é não-degenerado se e só se $W^{\perp}$ for não-degenerado.

No que segue, supomos que $b = \langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma forma bilinear simétrica e não-degenerada sobre o espaço vetorial real V. Em relação a b, dizemos que $v \in V \setminus \{0\}$ é:

(i) *tipo-tempo*, quando $\langle v, v \rangle < 0$;

(ii) *tipo-luz*, quando $\langle v, v \rangle = 0$;

(iii) *tipo-espaço*, quando $\langle v, v \rangle > 0$.

Analogamente, define-se o que significa para um subespaço não-degenerado W de V ser *tipo-tempo*, *tipo-luz* ou *tipo-espaço*. Se $v \in V \setminus \{0\}$ não for tipo-luz, define-se o *sinal* $\epsilon_v \in \{-1, 1\}$ de v por

$$\epsilon_v = \frac{\langle v, v \rangle}{|\langle v, v \rangle|}.$$

A *norma* de $v \in V$ é $|v| = \sqrt{\epsilon_v \langle v, v \rangle}$, e v é *unitário* se $|v| = 1$. Temos que V admite uma base $\{e_i\}$ ortonormal com respeito a b, isto é, tal que $\langle e_i, e_j \rangle = \epsilon_i \delta_{ij}$, onde ϵ_i denota o sinal de e_i (cf. [9], Lema 2.24). Desse modo, a expansão ortonormal de $v \in V$ com respeito a $\{e_i\}$ é dada por

$$v = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \langle v, e_i \rangle e_i. \tag{2.21}$$

2.2.2 Variedade de Lorentz

Voltando nossa atenção a partir de agora a variedades diferenciáveis, temos a seguinte

Definição 2.19 *Um tensor métrico sobre uma variedade diferenciável $\overline{M}^{n+1}$ é um $2-$tensor covariante e simétrico $\overline{g}$ sobre $\overline{M}^{n+1}$, tal que $\overline{g}_p$ é não-degenerada para todo $p \in \overline{M}^{n+1}$. Uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$ é um par $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$, onde $\overline{M}^{n+1}$ é uma variedade diferenciável e $\overline{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle$ é um tensor métrico de índice constante sobre $\overline{M}^{n+1}$.*

Como o índice de $\overline{g}$ é uma função semi-contínua inferiormente de $\overline{M}^{n+1}$ em $\mathbb{N}$, temos que ele é constante em toda componente conexa de $\overline{M}^{n+1}$. No que segue, por simplificação de notação, escreveremos $\overline{M}^{n+1}$ para o par $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para o tensor métrico $\overline{g}$ de $\overline{M}^{n+1}$ e ν para o seu índice. Quando o índice ν de $\overline{M}^{n+1}$ é zero, $\overline{M}^{n+1}$ é simplesmente uma *variedade Riemanniana*; quando $\nu = 1$, $\overline{M}^{n+1}$ é denominada uma *variedade de Lorentz*.

2.2.3 Orientação Temporal

Seja V um espaço vetorial no qual uma forma bilinear simétrica e não-degenerada $b = \langle \cdot, \cdot \rangle$ de índice 1 está definida, e $\mathcal{T} = \{u \in V;\ \langle u, u \rangle < 0\}$. Para cada $u \in \mathcal{T}$, definimos o *cone tipo-tempo* (ou *cone temporal*) de V contendo u por $C(u) = \{v \in \mathcal{T};\ \langle u, v \rangle < 0\}$.

No seguinte resultado colecionamos alguns fatos sobre cones tipo-tempo.

Lema 2.7 *Nas notações acima, se $v, w \in \mathcal{T}$, então:*

(i) O subespaço $\{v\}^{\perp}$ é tipo-espaço e $V = span\{v\} \oplus span\{v\}^{\perp}$. Assim, $\mathcal{T}$ é a união disjunta de $C(v)$ e $C(-v)$.

(ii) Desigualdade de Cauchy-Schwarz: $|\langle v, w \rangle| \geq |v||w|$, com igualdade se e só se v e w forem colineares.

(iii) Se $v \in C(u)$ para algum $u \in \mathcal{T}$, então $w \in C(u) \Leftrightarrow \langle v, w \rangle < 0$. Portanto, $w \in C(v) \Leftrightarrow v \in C(w) \Leftrightarrow C(v) = C(w)$.

Prova. (i) Primeiramente, vamos mostrar que $span(v)$ é não-degenerado com índice 1. De fato, desde que v é tipo-tempo $ind(span(v)) = 1$. Agora, suponha que para $u = av \in span(v)$ tem-se $0 = \langle w, u \rangle, \forall w \in span(v) \backslash \{0\}$. Novamente, desde que v é tipo-tempo temos $\langle v, v \rangle = -\beta^2$, para algum $\beta \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Dessa forma, $0 = \langle w, u \rangle = \langle av, bv \rangle = -ab\beta^2$. Daí $a = 0$ e, consequentemente, $u = 0$. Concluímos que $span(v)$ é não-degenerado. Assim

$$\begin{aligned} V &= span(v) \oplus span(v)^{\perp} = span(v) \oplus \{v\}^{\perp} \\ 1 &= ind(V) = ind(span(v)) + ind(\{v\}^{\perp}) = 1 + ind(\{v\}^{\perp}). \end{aligned}$$

Segue que $ind(\{v\}^{\perp}) = 0$. Concluímos que $\{v\}^{\perp}$ é tipo-espaço.

Agora, vamos mostrar a união disjunta $\mathcal{T} = \mathcal{C}(v)\bigcup\mathcal{C}(-v)$. Primeiramente, observe que já temos a inclusão $\mathcal{C}(v)\bigcup\mathcal{C}(-v) \subset \mathcal{T}$. Provemos a outra. Seja $w \in \mathcal{T}$. Então $\langle w, w\rangle < 0$. Logo, $w = av + \overrightarrow{w}$, com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $\overrightarrow{w} \in \{v\}^{\perp}$. Assim,

$$\langle w, v\rangle = \langle av + \overrightarrow{w}, v\rangle = a\langle v, v\rangle + \langle \overrightarrow{w}, v\rangle = a\langle v, v\rangle = -\beta^2.$$

Se $a > 0$ então $\langle w, v\rangle < 0$ e $w \in \mathcal{C}(v)$. Se $a < 0$ então $\langle w, v\rangle > 0$ e $w \in \mathcal{C}(-v)$. Mostrando a outra inclusão.

(ii) Faça $w = av + \overrightarrow{w}$, com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $\overrightarrow{w} \in \{v\}^{\perp}$. Desde que $\{v\}^{\perp}$ é tipo-espaço então $\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}\rangle \geq 0$. Como $w \in \mathcal{T}$ temos

$$\langle w, w\rangle = \langle av + \overrightarrow{w}, av + \overrightarrow{w}\rangle = a^2\langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle < 0.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\langle v, w\rangle^2 &= \langle v, av + \overrightarrow{w}\rangle^2 = a^2\langle v, v\rangle^2 \\
&= (\langle w, w\rangle - \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}\rangle)\langle v, v\rangle \\
&= \langle w, w\rangle\langle v, v\rangle - \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}\rangle\langle v, v\rangle
\end{aligned}$$

Desde que $\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}\rangle \geq 0$ e $\langle v, v\rangle < 0$, temos $-\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}\rangle\langle v, v\rangle \geq 0$. Então,

$$\langle v, w\rangle^2 \geq \langle w, w\rangle\langle v, v\rangle = |w|^2|v|^2.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}\rangle = 0$, equivalentemente $\overrightarrow{w} = 0$, ou seja, $w = av$.

(iii) Como $\mathcal{C}(\frac{u}{|u|}) = \mathcal{C}(u)$, vamos trabalhar com u sendo um vetor tipo-tempo unitário. Escreva $v = au + \overrightarrow{v}$ e $w = au + \overrightarrow{w}$, com a, b números reais não-nulos e $v, w \in \{u\}^{\perp}$. Como $v, w \in \mathcal{T}$ então $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}\rangle < 0$ e $\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}\rangle < 0$.

Sendo $\{u\}^{\perp}$ tipo-espaço então

$$\begin{aligned}
0 > \langle v, v\rangle &= \langle au + \overrightarrow{v}, au + \overrightarrow{v}\rangle \\
&= \langle au, au\rangle + 2\langle au, \overrightarrow{v}\rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}\rangle \\
&= a^2\langle u, u\rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}\rangle \\
&= -a^2|u|^2 + |v|^2 = -a^2 + |v|^2,
\end{aligned}$$

e, analogamente

$$0 > \langle v, v\rangle = -a^2|u|^2 + |v|^2 = -a^2 + |v|^2.$$

Segue que $|a| > |\overrightarrow{v}|$ e $|b| > |\overrightarrow{w}|$. Agora,

$$\begin{aligned} \langle v, w\rangle &= \langle au + \overrightarrow{v}, bu + \overrightarrow{w}\rangle \\ &= ab\langle u, u\rangle + a\langle u, \overrightarrow{v}\rangle + b\langle \overrightarrow{v}, u\rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\rangle \\ &= -ab + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\rangle. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle v, w\rangle| \;\leq\; |\overrightarrow{v}|\,|\overrightarrow{w}| < |a||b|.$$

Como $v \in \mathcal{C}(u)$ então

$$0 \;>\; \langle v, u\rangle = \langle au + \overrightarrow{v}, u\rangle = a\langle u, u\rangle = -a.$$

Segue que $a > 0$. Portanto

$$\text{sinal}(-ab) \;=\; \text{sinal}(-ab) = -\text{sinal}(b)$$

mostrando o resultado. ■

Definição 2.20 *Uma variedade de Lorentz* $\overline{M}^{n+1}$ *é* temporalmente orientável *se existir uma aplicação* τ *que associa a cada* $p \in \overline{M}^{n+1}$ *um cone tipo-tempo* τ_p *em* $T_p\overline{M}$*, a qual é suave no seguinte sentido: para cada* $p \in \overline{M}^{n+1}$ *existem uma vizinhança aberta* U *de* p *e um campo* $V \in \mathfrak{X}(U)$ *tais que* $V(q) \in \tau_q$ *para todo* $q \in U$*. Uma tal aplicação* τ *é chamada uma orientação temporal de* $\overline{M}^{n+1}$

O resultado a seguir torna operacional a definição anterior.

Lema 2.8 *Uma variedade de Lorentz* $\overline{M}^{n+1}$ *é temporalmente orientável se, e somente se, existir um campo vetorial tipo-tempo* $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$*.*

Prova. Se existe um tal campo V então associando a cada ponto $p \in \overline{M}^{n+1}$ o cone tipo-tempo contendo V_p obtemos uma orientação temporal.

Reciprocamente, seja τ um orientação temporal de $\overline{M}^{n+1}$. Desde que τ é diferenciável, cada ponto de $\overline{M}^{n+1}$ possui uma vizinhança $V_{\mathcal{U}}$ onde está definida um campo de vetores tal que $V_p \in \mathcal{U}$ para cada $p \in \mathcal{U}$. Agora seja $\{f_\alpha \;;\; \alpha \in A\}$ uma partição diferenciável da unidade subordinada a cobertura de $\overline{M}^{n+1}$ formada por todas estas vizinhanças. Assim, cada suppf_α está contido em algum membro $\mathcal{U}(\alpha)$ da cobertura.

As funções f_α são não-negativas e os cones de luz são convexos. Portanto, o campo de vetores $V = \sum_\alpha f_\alpha V_{\mathcal{U}(\alpha)}$ é tipo-tempo. ■

Sempre que uma variedade de Lorentz $\overline{M}^{n+1}$ for temporalmente orientável, a escolha de uma aplicação τ como na Definição 2.20, ou de um campo vetorial tipo-tempo $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ a ela correspondente, será denominada uma *orientação temporal* para $\overline{M}^{n+1}$.

Seja τ uma orientação temporal para $\overline{M}^{n+1}$ e $Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Se $Y(q) \in \tau_q$ (respectivamente, $-Y(q) \in \tau_q$) para todo $q \in \overline{M}^{n+1}$, dizemos que Y *aponta para o futuro* (respectivamente, *aponta para o passado*). Sendo $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ uma orientação temporal para $\overline{M}^{n+1}$, segue do item (c) do Lema 2.7 que um campo vetorial tipo-tempo Y sobre $\overline{M}^{n+1}$ aponta para o futuro (respectivamente, para o passado) se, e somente se, $\langle Y, V\rangle < 0$ (respectivamente, $\langle Y, V\rangle > 0$).

2.2.4 A Conexão de Levi-Civita

Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade semi-Riemanniana e considere $V, W \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$. O nosso objetivo agora é definir um outro campo que seja a derivada de W na direção de V.

Definição 2.21 *Uma conexão afim $\overline{\nabla}$ em uma variedade diferenciável $\overline{M}^{n+1}$ é uma função*

$$\begin{array}{rcl} \overline{\nabla} : \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right) \times \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right) & \to & \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right) \\ (V, W) & \mapsto & \overline{\nabla}_V W \end{array}$$

tal que

(i) $\overline{\nabla}_V W$ *é* $C^\infty\left(\overline{M}\right)$*-linear em* V*;*

(ii) $\overline{\nabla}_V W$ *é* $\mathbb{R}$*-linear em* W*;*

(iii) $\overline{\nabla}_V(fW) = V(f)W + f\overline{\nabla}_V W$*, para* $f \in C^\infty\left(\overline{M}\right)$*.*

O campo $\overline{\nabla}_V W$ *é dito derivada covariante de* W *na direção de* V *com relação a* $\overline{\nabla}$*.*

Nesta última definição, o item (i) nos diz que $\overline{\nabla}_V W$ é um tensor em V. Logo, de acordo com a Proposição 2.5, podemos calcular seu valor pontualmente, isto e, se $v \in Tp\overline{M}$ temos $\overline{\nabla}_v W \in Tp\overline{M}$.

A conexão afim está diretamente ligada à métrica, desde que acrescentemos uma compatibilidade com a métrica e outra propriedade de relacionada ao colchete de Lie. Mas primeiro vejamos um resultado algébrico.

Proposição 2.22 *Seja* $\overline{M}^{n+1}$ *uma variedade semi-Riemanniana. Se* $V \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$*, seja* V^* *a* 1*-forma em* $\overline{M}^{n+1}$ *satisfazendo*

$$V^*(X) = \langle V, X \rangle, \tag{2.22}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$*. Então a funcão*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right) & \rightarrow & \mathfrak{X}^*\left(\overline{M}\right) \\ V & \mapsto & V^* \end{array} \tag{2.23}$$

é um isomorfismo $C^\infty\left(\overline{M}\right)$*-linear.*

Prova. Segue de (2.22) que a aplicacão definida em (2.23) é $C^\infty\left(\overline{M}\right)$-linear.

Afirmamos que esta aplicação é um isomorfismo. De fato, se $V^* = W^*$ então para todo $X \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$ temos $\langle V, X\rangle = \langle W, X\rangle$. Logo, $\langle V - W, X\rangle = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$. Segue que $V = W$. Para a sobrejetividade, basta definir localmente

$$V = \sum_{ij} g^{ij}\theta_i\partial_j,$$

onde $\theta = \sum \theta_i dx^i$ é uma 1-forma local de $\overline{M}^{n+1}$. ■

Agora podemos estabelecer a ligação entre conexão afim e a métrica descita acima.

Teorema 2.23 (Levi-Civita) *Em uma variedade semi-Riemanniana* $\overline{M}^{n+1}$ *existe uma única conexão afim* $\overline{\nabla}$*, chamada de Levi-Civita, verificando*

(i) $[V, W] = \overline{\nabla}_V W - \overline{\nabla}_W V$ *(* $\overline{\nabla}$ *é simétrica),*

(ii) $X\langle V, W\rangle = \langle \overline{\nabla}_X V, W\rangle + \langle V, \overline{\nabla}_X W\rangle$ *(* $\overline{\nabla}$ *é compatível com a métrica),*

para todos $X, V, W \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$*. A conexão de Levi-Civita é caracterizada pela seguinte equação*

$$\begin{aligned} 2\langle \overline{\nabla}_V W, X\rangle &= V\langle W, X\rangle + W\langle X, V\rangle - X\langle V, W\rangle \\ &\quad -\langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle + \langle X, [V, W]\rangle, \end{aligned} \tag{2.24}$$

chamada fórmula de Koszul.

Prova. A fórmula de Koszul (2.24) mostra que $\overline{\nabla}$ está unicamente determinada pela métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Assim, caso exista, ela será única. Para mostrar a existência, defina $\overline{\nabla}$ por (2.24). É imediato verificar que $\overline{\nabla}$ verifica todos os itens da Definição 2.21, é simétrica e compatível com a métrica. ■

Lema 2.9 *Seja* $\overline{M}^{n+1}$ *uma variedade semi-Riemanniana com conexão de Levi-Civita* $\overline{\nabla}$ *e considere* $p \in \overline{M}^{n+1}$. *Existe uma vizinhança* $\mathcal{U}$ *de* p *em* $\overline{M}^{n+1}$ *e um referencial ortonormal* $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ *em* $\mathcal{U}$ *tais que* $(\overline{\nabla}_{e_i} e_j)(p) = 0$, *para cada* $i, j \in \{1, \cdots, n+1\}$.

Prova. Sejam $\mathcal{U} := B_\epsilon^{\overline{M}}(p)$ a bola normal (cf. [9], Proposição 3.30) de $\overline{M}^{n+1}$ em p, e E_k um referencial ortonomal em p. Definamos $e_k(q) := P(E_k)$, onde $P : T_p\overline{M} \to T_q\overline{M}$ é o transporte paralelo de E_k ao longo da geodésica radial γ_k conectando p à q. Como P é uma isometria então $\{e_k\}$ é um referencial ortonormal em $\mathfrak{X}(U)$, em outras palavras, $\{e_k(q)\} \subset T_q\overline{M}$ é um referencial em cada ponto $q \in \mathcal{U}$. Além disso, desde que γ_k é a geodésica em $\overline{M}$ tal que $\gamma_j(0) = p$ e $\gamma_j'(0) = e_j(p) = E_j$, temos:

$$\left(\nabla_{e_k} e_j\right)(p) = \left(\overline{\nabla}_{\gamma_j'} e_k(\gamma)(t)\right)\Big|_{t=0} = \frac{De_k(t)}{dt}\Big|_{t=0} = 0.$$

■

O referencial $\{e_1, \dots, e_n\}$ dado no último lema acima é chamado um *referencial geodésico* em p.

2.2.5 Alguns Operadores Diferenciáveis

Sejam $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade semi-Riemanniana com métrica $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ e conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ e $f \in C^\infty\left(\overline{M}\right)$. A seguir vamos definir alguns operadores diferenciais com os quais vamos trabalhar nesta dissertação.

Definição 2.24 *O gradiente de* f, *denotado por* ∇f, *é o campo vetorial em* $\overline{M}^{n+1}$ *metricamente equivalente a diferencial* $df \in \mathfrak{X}^*\left(\overline{M}\right)$.

Ou seja,

$$\langle \overline{\nabla} f, X \rangle = X(f) = df(X),$$

para qualquer $X \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$.

Se $\{e_i\}$ um referencial ortonormal em $p \in \overline{M}^{n+1}$, então

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i e_i(f) e_i, \tag{2.25}$$

onde $\epsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$ para cada $i \in \{1, \dots, n+1\}$.

De fato, de (2.21) obtemos

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle \nabla f, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i df(e_i) e_i = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i e_i(f) e_i.$$

Definição 2.25 *A divergência de um campo $X \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$, denotada por div$(X)$, é definida por*

$$div(X) = tr(Y \to \overline{\nabla}_Y X). \tag{2.26}$$

Se $\{e_i\}$ for um referencial geodésico (veja Lema 2.9) em p e $X = \sum_{i=1}^{n+1} X_i e_i$, então

$$\text{div}(X) = \sum_{i=1}^{n+1} e_i(X_i).$$

De fato,

$$\text{div}(X) \;=\; \text{tr}(Y \mapsto \overline{\nabla}_Y X) = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle \overline{\nabla}_{e_i} X, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle \overline{\nabla}_{e_i} (\sum_{j=1}^{n+1} X_j e_j), e_i \rangle.$$

Como

$$\overline{\nabla}_{e_j}(X_j e_j) = X_j \overline{\nabla}_{e_j} e_j + e_i(X_j) e_j$$

então

$$\begin{aligned} \text{div}(X) &= \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \sum_{j=1}^{n+1} \langle \left\{ X_j \overline{\nabla}_{e_j} e_j + e_i(X_j) e_j \right\}, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \sum_{j=1}^{n+1} \left\{ X_j \langle \nabla_{e_j} e_j, e_i \rangle + e_i(X_j) \langle e_j, e_i \rangle \right\}. \end{aligned}$$

Desde que o referencial $\{e_i\}$ é geodésico em p, $\left(\overline{\nabla}_{e_i} e_j\right)(p) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \text{div}(X) &= \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \sum_{j=1}^{n+1} e_i(X_j) \langle e_i, e_j \rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i^2 e_i(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} e_i(X_i). \end{aligned}$$

Definição 2.26 *O hessiano de f, denotado por $Hessf$, é a aplicação $Hessf : \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right) \times \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right) \to \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$ definida por*

$$Hessf(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle, \tag{2.27}$$

para $X, Y \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$.

Observação 2.2 *O hessiano de f satisfaz*

$$Hessf(X, Y) = X(Y(f)) - \left(\overline{\nabla}_X Y\right)(f) \tag{2.28}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$. De fato, se $X, Y \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$ então

$$\begin{aligned} X(Y(f)) &= X(\langle \nabla f, Y \rangle) = \langle \overline{\nabla}_X \nabla f, Y \rangle + \langle \nabla f, \overline{\nabla}_X Y \rangle \\ &= Hessf(X, Y) + \langle \nabla f, \overline{\nabla}_X Y \rangle \\ &= Hessf(X, Y) + \left(\overline{\nabla}_X Y\right)(f). \end{aligned}$$

Além disso, segue da Observação 2.2 que o hessiano Hess$f$ é uma forma bilinear e simétrica em $\mathfrak{X}(\overline{M})$. De fato, a bilinearidade é facilmente verificada a partir da definição. Vejamos a simetria. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Aplicando a Observação 2.2 e a definição do colchete $[X, Y]$ obtemos

$$\text{Hess}f(X,Y) = [X,Y] + Y(X(f)) - \left(\overline{\nabla}_X Y\right)(f). \tag{2.29}$$

Da simetria da conexão de Levi-Civita de $\overline{M}$ $\overline{\nabla}$ temos $[X,Y](f) = \left(\overline{\nabla}_X Y\right)(f) - \left(\overline{\nabla}_Y X\right)(f)$, que introduzida em (2.29) nos dá

$$\text{Hess}f(X,Y) = -\left(\overline{\nabla}_Y X\right)(f) + YX(f). \tag{2.30}$$

Segue da observação 2.2 que Hess$f(X,Y) = $ Hess$f(Y,X)$.

Definição 2.27 *O laplaciano em $\overline{M}^{n+1}$, denotado por Δ, é a aplicação $\Delta : C^\infty\left(\overline{M}\right) \to C^\infty\left(\overline{M}\right)$ tal que*

$$\Delta f = tr(Hess f). \tag{2.31}$$

Se $\{e_i\}$ for um referencial ortonormal em $p \in \overline{M}^{n+1}$ o laplaciano de f em $\overline{M}^{n+1}$ satisfaz

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle \overline{\nabla}_{e_i} \nabla f, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \left\{ e_i \langle \nabla f, e_i \rangle - \langle \nabla f, \overline{\nabla}_{e_i} e_i \rangle \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \left\{ e_i(e_i(f)) - (\overline{\nabla}_{e_i} e_i)(f) \right\}, \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos a compatibilidade da conexão $\overline{\nabla}$ com a métrica. Consequentemente, se o referencial $\{e_i\}$ for geodésico em p, então

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i e_i(e_i(f)) \tag{2.32}$$

Outra forma de definir o laplaciano de $f \in C^\infty\left(\overline{M}\right)$ é $\Delta f = \text{div}(\nabla f)$. De fato, seja $f \in \mathcal{D}(M^n)$. Então

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle \overline{\nabla}_{e_i} \nabla f, e_i \rangle = \text{tr}(Y \mapsto \overline{\nabla}_Y \nabla f) = \text{div}(\nabla f). \tag{2.33}$$

A seguir veremos uma forma para calcular o gradiente e o laplaciano para a composta de uma função real com uma função em uma variedade Riemanniana.

Lema 2.10 *Sejam M^n uma variedade Riemanniana com métrica $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ e conexão de Levi-Civita ∇, $h : M^n \to \mathbb{R}$ uma função em $C^\infty(M)$ e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função em $C^\infty(\mathbb{R})$. Então*

(a) $\nabla(\phi \circ h) = \phi'(h)\nabla h$;

(b) $\Delta(\phi \circ h) = \phi''|\nabla h|^2 + \phi'\Delta h$.

Prova.

(a) O gradiente de uma função é o campo de vetores métricamente equivalente a diferencial dessa função. Dessa forma,

$$\begin{aligned}\langle \nabla(\phi \circ h), X\rangle &= d(\phi \circ h)(X) = \phi'(h)dh(X)\\ &= \phi'(h)\langle \nabla h, X\rangle = \langle \phi'(h)\nabla h, X\rangle,\end{aligned}$$

para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$. Portanto $\nabla(\phi \circ h) = \phi'(h)\nabla h$.

(b) De fato,

$$\begin{aligned}\Delta(\phi \circ h) &= \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}(\phi \circ h)) = \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}\nabla(\phi \circ h), e_i\rangle\\ &= \phi'(h)\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}\nabla h, e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} e_i(\phi'(h))\langle \nabla h, e_i\rangle\\ &= \phi'(h)\Delta h + \langle \nabla(\phi'(h)), \nabla h\rangle\\ &= \phi''(h)\Delta h + \phi'(h)\langle \nabla h, \nabla h\rangle\\ &= \phi''(h)\Delta h + \phi'(h)|\nabla h|^2,\end{aligned}$$

onde usamos o item (a) nas igualdades acima.

■

2.2.6 Tensor Curvatura

Lema 2.11 ([9], Lema 3.35) *Se $\overline{M}^{n+1}$ é uma variedade semi-Riemanniana com conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$, então a aplicação $R : \mathfrak{X}(\overline{M})^3 \to \mathfrak{X}(\overline{M})$, dada para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ por*

$$R(X,Y)Z = \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z,$$

é $C^\infty(\overline{M})$-trilinear, sendo denominada o tensor de curvatura de $\overline{M}^{n+1}$.

Sempre que $p \in \overline{M}^{n+1}$ e $v, w \in T_p\overline{M}$ gerarem um subespaço de dimensão 2 não-degenerado de $T_p\overline{M}$, segue do item (a) do Lema 2.6 que $\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2 \neq 0$. Faz sentido, portanto, a seguinte

Definição 2.28 *Sejam $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade semi-Riemanniana, $p \in \overline{M}^{n+1}$ e $\sigma \subset T_p\overline{M}$ um subespaço de dimensão 2 não-degenerado de $T_p\overline{M}$. O número*

$$K(\sigma) = \frac{\langle \overline{R}(v,w)v, w\rangle}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}$$

independe da base escolhida $\{v, w\}$ de σ, e é denominado curvatura seccional de $\overline{M}^{n+1}$ em p, segundo σ.

Uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$ tem *curvatura seccional constante em* $p \in \overline{M}^{n+1}$ se os números $K(\sigma)$ da definição acima independerem do subespaço de dimensão não-degenerado σ de $T_p\overline{M}$. Se $\dim(\overline{M}) \geq 3$ e $\overline{M}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante, o análogo do teorema de Schur para variedades semi-Riemannianas (cf. [9], exercício 21 do Capítulo 3) garante que o valor de $K(\sigma)$ também independe do ponto $p \in \overline{M}^{n+1}$ escolhido.

Aproximando subespaços de dimensão 2 degenerados σ de $T_p\overline{M}$ através de subespaços não-degenerados, pode-se mostrar que o fato de $\overline{M}^{n+1}$ ter curvatura seccional constante determina seu tensor curvatura $\overline{R}$. Mais precisamente (cf. [9], Corolário 3.43), se $\overline{M}^{n+1}$ tiver curvatura seccional constante c, então

$$\overline{R}(X,Y)Z = c\left\{\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X\right\}, \tag{2.34}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$.

Definição 2.29 *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade semi-Riemanniana com $\overline{R}$ denotando seu tensor curvatura. O tensor curvatura de Ricci de $\overline{M}$, denotado por $\overline{Ric}$, é definido como sendo a contração $\mathcal{C}_3^1\left(\overline{R}\right) \in \mathfrak{T}_2^0\left(\overline{M}\right)$, cujas componentes em um sistema de coordenadas são $\overline{R}_j^i = \sum_{m=1}^{n+1} \overline{R}_{ijm}^m$.*

Em um referencial ortonormal E_i o tensor $\overline{Ric}$ é dado por

$$\overline{Ric}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle \overline{R}_{XE_i}Y, E_i\rangle, \tag{2.35}$$

onde $\epsilon_i = \langle E_i, E_i\rangle$ (ver Lema 52, Capítulo 3, de [9]).

2.3 Hipersuperfícies Tipo-espaço em Variedades de Lorentz

Sejam $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade de Lorentz de dimensão $n+1$ e com métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e M^n uma variedade diferenciável e conexa de dimensão n. Uma imersão suave $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ é dita uma *hipersuperfície tipo-espaço* de $\overline{M}^{n+1}$ se a métrica induzida em M^n pela imersão x for Riemanniana. Neste caso, também denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a métrica de M^n. O resultado a seguir garante que se $\overline{M}^{n+1}$ for temporalmente orientada, então suas hipersuperfícies tipo-espaço são necessariamente orientáveis.

Proposição 2.30 *Se M^n é uma hipersuperfície tipo-espaço de uma variedade de Lorentz temporalmente orientada $\overline{M}^{n+1}$, então M^n admite um campo vetorial normal unitário $N \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, apontando para o futuro. Em particular, M^n é orientável.*

Prova. Fixe um campo $V \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$ que dá a orientação temporal de $\overline{M}^{n+1}$, e observe que, para todo $p \in M$, o conjunto de todos os vetores tipo-tempo $v \in T_p\overline{M}$ é a união disjunta de $C\left(V(p)\right)$ e $C\left(-V(p)\right)$.

Tome, em cada $p \in M^n$, um vetor unitário $N(p) \in T_pM^{\perp}$. Desde que $N(p)$ é tipo-tempo, trocando $N(p)$ por $-N(p)$ se necessário, podemos supor que $N(p) \in C(V(p))$. Deste modo, definimos unicamente um campo vetorial normal unitário N sobre M^n, apontando para o futuro; resta-nos mostrar que tal campo N é suave.

Seja, então, $p \in M^n$ e tome um referencial móvel $\{e_i\}$ sobre uma vizinhança aberta e conexa U de p em M. Então $\tilde{N} = V - \sum_{i=1}^{n} \langle V, e_i \rangle e_i$ é diferenciável e normal a M em U, com

$$\langle \tilde{N}, \tilde{N} \rangle = \langle \tilde{N}, V \rangle = \langle V, V \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle V, e_i \rangle^2.$$

Mas $\langle V, V \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle V, e_i \rangle^2 - \langle V, N \rangle^2$, de modo que $\langle \tilde{N}, \tilde{N} \rangle = -\langle V, N \rangle^2 < 0$. Portanto, $\tilde{N}(q) \in C(V(q))$ para cada $q \in U$, e $N = \frac{\tilde{N}}{|\tilde{N}|}$, diferenciável. ■

Se $\overline{M}^{n+1}$ for uma variedade de Lorentz temporalmente orientada e $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ for uma hipersuperfície tipo-espaço, a escolha de um campo normal unitário N como na proposição anterior é dita uma *orientação temporal* para M^n. Diremos ainda que N é a *aplicação normal de Gauss* de M^n apontando para o futuro.

Ainda em relação à situação do parágrafo anterior, exceto pela métrica, objetos *sem barra* se referirão a M^n, ao passo que objetos *com barra* se referirão a $\overline{M}^{n+1}$.

Em particular, ∇ e $\overline{\nabla}$ denotarão as conexões de Levi-Civita, e R e $\overline{R}$ os tensores de curvatura de M^n e $\overline{M}^{n+1}$, respectivamente.

A seguir vamos considerar que $\overline{M}^{n+1}$ é uma variedade de Lorentz de dimensão $n+1$, $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ é uma hipersuperfície tipo-espaço orientada por um campo normal unitário N globalmente definido em M.

Não é difícil mostrar que

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ (cf. [9], Lema 4.3), onde $(\cdot)^T$ denota a componente tangente a M. Assim, podemos escrever

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \tag{2.36}$$

onde $\alpha(X, Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^\perp$ é a componente normal a M^n em $\overline{M}^{n+1}$.

Não é difícil provar que $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^\perp(M)$ é uma aplicação $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilinear e simétrica (cf. [9], Lema 4.4), denominada a *segunda forma fundamental* da imersão x. Portanto, definindo $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ pela igualdade

$$\langle AX, Y\rangle = \langle \alpha(X, Y), N\rangle, \tag{2.37}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos um campo de operadores lineares auto-adjuntos $A_p : T_pM \to T_pM$, $p \in M^n$, denominado o *operador de Weingarten* da imersão x.

Para referência futura, dado $p \in M^n$, dizemos que os autovalores de A_p são as *curvaturas principais* de x em p (em relação à orientação temporal escolhida para M). Ademais, um ponto $p \in M^n$ é *umbílico* se todas as curvaturas principais de x em p forem iguais.

Pela compatibilidade da conexão $\overline{\nabla}$ com a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, temos

$$0 = X\langle N, N\rangle = 2\langle \overline{\nabla}_X N, N\rangle \Rightarrow \langle \overline{\nabla}_X N, N\rangle = 0.$$

Assim,

$$(\overline{\nabla}_X N)^\perp = -\langle \overline{\nabla}_X N, N\rangle N = 0.$$

Portanto, obtemos a *fórmula de Weingarten da hipersuperfície*

$$\overline{\nabla}_X N = (\overline{\nabla}_X N)^T = -AX \tag{2.38}$$

para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Existe uma função $f \in C^{\infty}(M)$ tal que $\sigma(X,Y) = fN$. Então

$$\langle \sigma(X,Y), N\rangle = f\langle N, N\rangle = -f$$

donde, por (2.37) tem-se

$$f = -\langle \sigma(X,Y), N\rangle = -\langle AX, Y\rangle$$

e portanto

$$\sigma(X,Y) = -\langle AX, Y\rangle N \tag{2.39}$$

Substituindo em (2.36), obtemos a *fórmula de Gauss da hipersuperfície*

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \langle AX, Y\rangle N. \tag{2.40}$$

A proposição a seguir estabelece as equações fundamentais que relacionam as geometrias de M^n e $\overline{M}^{n+1}$ por intermédio da segunda forma fundamental da imersão.

Proposição 2.31 *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade semi-Riemanniana de dimensão $n+1$, $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço orientada por um campo normal unitário N globalmente definido em M e $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ o operador de Weingarten correspondente, chamado* aplicação de Gauss da hipersuperfície x. *Para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, temos:*

(*a*) (*Equação de Gauss*)

$$R(X,Y)Z = (\overline{R}(X,Y)Z)^T - \langle AX, Z\rangle AY + \langle AY, Z\rangle AX.$$

(*b*) (*Equação de Codazzi*)

$$(\overline{R}(X,Y)N)^{\perp} = \langle \nabla A(Y,X) - \nabla A(X,Y), Z\rangle$$

onde

$$\nabla A(Y,X) \;\; = \;\; \nabla_X(AY) - A(\nabla_X Y).$$

Prova. Com o objetivo de obter uma expresão para o tensor curvatura $\overline{R}(X,Y)Z$ de $\overline{M}^{n+1}$, desenvolveremos abaixo os termos $\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z$, $\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z$ e $\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z$. Comecemos com $\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z$. Das fórmulas (2.38) e (2.40), obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z &= \overline{\nabla}_Y\nabla_X Z - \overline{\nabla}_Y(\langle AX, Z\rangle N)\\
&= \nabla_Y\nabla_X Z - \langle AY, \nabla_X Z\rangle N - \big(\langle AX, Z\rangle\overline{\nabla}_Y N + Y\langle AX, Z\rangle N\big)\\
&= \nabla_Y\nabla_X Z - \langle AX, Z\rangle\overline{\nabla}_Y N - (\langle AY, \nabla_X Z\rangle N + Y\langle AX, Z\rangle N)\\
&= \nabla_Y\nabla_X Z + \langle AX, Z\rangle AY - (\langle AY, \nabla_X Z\rangle + Y\langle AX, Z\rangle)\, N\\
&= \nabla_Y\nabla_X Z + \langle AX, Z\rangle AY - \big(\langle AY, \nabla_X Z\rangle + \langle\overline{\nabla}_Y AX, Z\rangle + \langle AX, \overline{\nabla}_Y Z\rangle\big)\, N.
\end{aligned}$$

Logo

$$\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z = \nabla_Y\nabla_X Z + \langle AX, Z\rangle AY + (\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z)^{\perp}, \tag{2.41}$$

onde

$$(\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z)^{\perp} = -(\langle AY, \nabla_X Z\rangle + \langle\overline{\nabla}_Y AX, Z\rangle + \langle AX, \overline{\nabla}_Y Z\rangle)N.$$

Permutando X e Y em (2.41), obtemos

$$\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z \;=\; \nabla_X\nabla_Y Z + \langle AY, Z\rangle AX + (\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z)^{\perp}, \tag{2.42}$$

onde

$$(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z)^{\perp} = -\big(\langle AX, \nabla_Y Z\rangle + \langle\overline{\nabla}_X AY, Z\rangle + \langle AY, \overline{\nabla}_X Z\rangle\big)\, N.$$

Além disso, da equação (2.40), temos

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z \;=\; \nabla_{[X,Y]}Z - \langle A[X,Y], Z\rangle N. \tag{2.43}$$

Somando as equações (2.41) e (2.43) e subtraindo a equação (2.42), obtemos a equação que relaciona $\overline{R}$ e R. De fato,

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y)Z &= \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z\\
&= R(X,Y)Z + \langle AX, Z\rangle AY - \langle AY, Z\rangle AX + (\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp}
\end{aligned}$$

onde $(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z)^{\perp} - (\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z)^{\perp} - \langle A[X,Y], Z\rangle N$.

(a) Tomando a componente tangente da expressão de $\overline{R}(X,Y)Z$, obtemos a equação de Gauss

$$R(X,Y)Z \;=\; \big(\overline{R}(X,Y)Z\big)^{T} - \langle AX, Z\rangle AY + \langle AY, \nabla_X Z\rangle.$$

(b) Tomando a componente normal da expressão de $\overline{R}(X,Y)Z$, temos

$$\begin{aligned}
(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} &= (\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z)^{\perp} - (\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z)^{\perp} - \langle A[X,Y],Z\rangle N \\
&= -\left(\langle AY,\nabla_X Z\rangle + \langle\overline{\nabla}_Y AX,Z\rangle + \langle AX,\overline{\nabla}_Y Z\rangle\right) N \\
&\quad + \left(\langle AX,\nabla_Y Z\rangle + \langle\overline{\nabla}_X AY,Z\rangle + \langle AY,\overline{\nabla}_X Z\rangle\right) N - \langle A[X,Y],Z\rangle N.
\end{aligned}$$

Cancelando alguns termos e usando a definição do colchete de Lie, chegamos a equação de Codazzi

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = \langle\nabla A(Y,X) - \nabla A(X,Y),Z\rangle N,$$

onde

$$\nabla A(Y,X) = \nabla_X(AY) - A(\nabla_X Y).$$

■

Como uma consequência imediata deste último resultado temos, para ambientes de curvatura seccional constante, o seguinte

Corolário 2.32 *Nas hipóteses da proposição anterior, se $\overline{M}^{n+1}$ tiver curvatura seccional constante c e $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$, então:*

(*a*) (*Equação de Gauss*)

$$\begin{aligned}
\langle R(X,Y)Z,W\rangle &= c\{\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - \langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle\} \\
&\quad + \langle AX,W\rangle\langle AY,Z\rangle - \langle AX,Z\rangle\langle AY,W\rangle.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

(*b*) (*Equação de Codazzi*)

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X. \tag{2.45}$$

2.4 Campos Conformes

Se $\overline{M}^{n+1}$ é uma variedade de Lorentz, dizemos que um $V \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$ é *conforme* se

$$\mathcal{L}_V\langle\cdot,\cdot\rangle = 2\psi\langle\cdot,\cdot\rangle \tag{2.46}$$

para alguma função $\psi \in C^{\infty}\left(\overline{M}\right)$, onde $\mathcal{L}_V\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota a derivada de Lie da métrica de $\overline{M}^{n+1}$ na direção do campo V (veja Definição 2.14) e a função ψ é o *fator conforme* de V.

O seguinte lema caracteriza um campo conforme.

Lema 2.12 *$V \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$ é conforme se, e somente se,*

$$\langle \overline{\nabla}_X V, Y\rangle + \langle X, \overline{\nabla}_Y V\rangle = 2\psi\langle X, Y\rangle,$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$.

Prova. Da Proposição 2.11 temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_V\langle X, Y\rangle &= V\langle X, Y\rangle - \langle \mathcal{L}_V(X), Y\rangle - \langle X, \mathcal{L}_V(Y)\rangle \\
&= V(\langle X, Y\rangle) - \langle [V, X], Y\rangle - \langle X, [V, Y]\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_V X, Y\rangle + \langle X, \overline{\nabla}_V Y\rangle - \langle \overline{\nabla}_V X, Y\rangle \\
&\quad + \langle \overline{\nabla}_X V, Y\rangle - \langle X, \overline{\nabla}_V Y\rangle + \langle X, \overline{\nabla}_Y V\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X V, Y\rangle + \langle X, \overline{\nabla}_Y V\rangle,
\end{aligned}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$. ■

Como uma consequência imediata do último resultado, temos que V é um campo de Killing (isto é, um campo cujo fluxo é uma isometria, cf. [9], Proposição 9.23) em $\overline{M}^{n+1}$ se, e somente se, $\psi \equiv 0$.

2.5 Espaço de Robertson-Walker Generalizado (GRW)

A fim de descrever uma classe importante de variedades de Lorentz que possui um campo conforme, sejam M^n uma variedade Riemanniana completa, com métrica denotada por $g = \langle \cdot, \cdot \rangle_M$, e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Na variedade produto $I \times M^n$, sejam π_I e π_M as projeções canônicas sobre I e M^n, respectivamente. A partir dos tensores métricos $\langle , \rangle_I = dt^2$ e g vamos definir um tensor métrico Lorentziano $\overline{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\overline{M}^{n+1}$.

Proposição 2.33 *Sejam $p \in M^n$ e $v, w \in T_p\left(\overline{M}\right)$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável positiva. A aplicação*

$$\overline{g}_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p\left(\overline{M}\right) \times T_p\left(\overline{M}\right) \to \mathbb{R}$$

definida por

$$\langle v, w\rangle_p = -\langle (\pi_I)_* v, (\pi_I)_* w\rangle_I + f(p)^2 \langle (\pi_M)_* v, (\pi_M)_* w\rangle_M, \tag{2.47}$$

é um tensor métrico em $\overline{M}^{n+1}$, com índice igual a 1, onde $(\pi_I)_*$ e $(\pi_M)_*$ denotam as diferenciais de π_I e π_M em p, respectivamente, e na expressão acima estamos identificando f com a aplicação composta $f \circ \pi_I$.

Prova. Seja $p \in \overline{M}^{n+1}$. Inicialmente $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ é bilinear e simétrico por causa da bilinearidade de $\langle \cdot, \cdot \rangle_I$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$. Para provar que $\overline{g}_p$ é não-degenerado, seja $v \in T_p\left(\overline{M}\right)$ e suponha que

$$\langle v, w \rangle_p = 0, \quad \forall w \in T_p\left(\overline{M}\right). \tag{2.48}$$

Em particular, seja $w \in T_p(I) \subset T_p\left(\overline{M}\right)$ arbitrário. Assim $\langle v, w \rangle_p = 0$. Desde que $(\pi_I)_*(w) = w$ e $(\pi_M)_*(w) = 0$, segue de (2.48) que $\langle v, w \rangle_p = 0$. Assim,

$$\langle v, w \rangle_p = -\langle (\pi_I)_* v, (\pi_I)_* w \rangle_I = -\langle (\pi_I)_* v, w \rangle_I = 0 \Rightarrow (\pi_I)_* v = 0,$$

pois w é arbitrário em $T_p(I)$. Analogamente, seja $w \in T_p(M) \subset T_p\left(\overline{M}\right)$ arbitrário. Daí $(\pi_I)_*(w) = 0$ e $(\pi_M)_*(w) = w$, e assim

$$\langle v, w \rangle_p = f^2(p) \langle (\pi_M)_* v, (\pi_M)_* w \rangle_M = 0 \Rightarrow \langle v, w \rangle_p = f^2(p) \langle (\pi_M)_* v, w \rangle_M = 0$$

Uma vez que f é positiva temos $\langle (\pi_M)_* v, w \rangle_M = 0$. Logo $(\pi_M)_* v = 0$. Consequentemente $v = (\pi_I)_* v + (\pi_M)_* v = 0$. Isso mostra que $\overline{g}$ é não-degenerado.

Resta mostrar que o índice ν_p de $\overline{g}_p$ é constante e igual a 1. Para isto calcularemos a matriz de $\overline{g}_p$ em um sistema de coordenadas $\{t, x_1, \ldots, x_n\}$ em $\overline{M}^{n+1}$. Com efeito,

$$(\overline{g}_p)_{11} = \langle \partial_t, \partial_t \rangle = -\langle (\pi_I)_* \partial_t, (\pi_I)_* \partial_t \rangle_I = -1.$$

Se $i, j \neq 1$ então

$$(\overline{g}_p)_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle = f^2(p) \langle (\pi_M)_* \partial_i, (\pi_M)_* \partial_j \rangle_M = f^2(p) (g_p)_{ij}$$

Além disso, se $i = 1$ e $j \neq 1$, temos

$$(\overline{g}_p)_{1j} = \langle \partial_t, \partial_j \rangle_p = \langle (\pi_I)_* \partial_t, (\pi_I)_* \partial_j \rangle_I + f^2(p) \langle (\pi_M)_* \partial_t, (\pi_M)_* \partial_j \rangle_M = 0,$$

pois $(\pi_I)_* \partial_j = 0$ e $(\pi_M)_* \partial_t = 0$. Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é simétrica então $(\overline{g}_p)_{i1} = 0$ se $i \neq 1$. Desta forma, podemos montar a matriz que representa $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$.

$$(\overline{g}_p)_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & f^2(p)(g_p)_{11} & \ldots & f^2(p)(g_p)_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & f^2(p)(g_p)_{n1} & \ldots & f^2(p)(g_p)_{nn} \end{bmatrix}$$

onde a $(g_p)_{ij}$ são os termos da matriz que representa a métrica g de Σ^n. Observando a matriz acima concluímos que o índice de $\overline{g}_p$ igual a 1 para qualquer $p \in \overline{M}^{n+1}$. Portanto o índice de $\overline{M}^{n+1}$ é constante e igual a 1. Concluindo a demonstração. ■

Definição 2.34 *Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa de dimensão n, $(n \geq 2)$, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto munido da métrica $-dt^2$ e $f \in C^\infty(I)$ uma função positiva. A variedade produto $I \times M^n$ munida do tensor métrico $\overline{g}$ definido pela equação (2.47) é chamada um espaço de Robertson-Walker generalizado (GRW), e será denotado por $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$.*

A seguir apresentaremos algumas propriedades de campos de vetores em um espaço GRW, que serão importantes para nossos objetivos.

Observação 2.3 *Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, tem-se $[X, \partial_t] = 0$. De fato, seja $\{t, x_1, \ldots, x_n\}$ um sistema de coordenadas em $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$. Assim, se $h \in C^\infty(M)$ e $X = \sum_i \alpha_i \partial_i$ então*

$$
\begin{aligned}
\partial_t (X(h)) &= \partial_t \left(\sum_i \alpha_i \partial_i(h) \right) = \sum_i \partial_t (\alpha_i \partial_i(h)) \\
&= \sum_i \{\partial_t(\alpha_i)\partial_i(h) + \alpha_i \partial_t (\partial_i(h))\}
\end{aligned}
$$

Como α_i não depende de t então $\partial_t(\alpha_i) = 0$. Usando o Teorema de Schwarz do $\mathbb{R}^n$, obtemos

$$\partial_t (X(h)) = X (\partial_t(h))$$

Portanto o colchete $[X, \partial_t] = 0$.

Se X for um campo de vetores na fibra Riemanniana M^n de um espaço GRW $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ dizemos que X é um *campo horizontal*. Por outro lado, os campos na direção temporal são chamados de *campos verticais*. Em particular o campo ∂_t, que é por definição *o campo de vetores tipo-tempo na direção que contém I*, é um campo vertical.

Proposição 2.35 *Sejam $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ um espaço GRW e $X \in \mathfrak{X}(M)$, ou seja, X é um campo horizontal. Então*

(i) $\overline{\nabla}_X \partial_t = \overline{\nabla}_{\partial_t} X = \dfrac{f'}{f} X$,

(ii) $\overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t = 0$.

Prova.

(i) Mostremos que $\langle\overline{\nabla}_X\partial_t,\partial_t\rangle=0$. De fato, pela fórmula de Koszul (2.24), temos

$$\begin{aligned}2\langle\overline{\nabla}_X\partial_t,\partial_t\rangle = \quad & X\langle\partial_t,\partial_t\rangle+\partial_t\langle\partial_t,X\rangle-\partial_t\langle X,\partial_t\rangle\\ & -\langle X,[\partial_t,\partial_t]\rangle+\langle\partial_t,[\partial_t,X]\rangle+\langle\partial_t,[X,\partial_t]\rangle.\end{aligned}$$

Com exceção dos termos $\langle\partial_t,[\partial_t,X]\rangle$ e $\langle\partial_t,[X,\partial_t]\rangle$ todos os outros termos são nulos, de forma que a equação acima reduz-se a

$$2\langle\overline{\nabla}_X\partial_t,\partial_t\rangle=\langle\partial_t,[\partial_t,X]\rangle+\langle\partial_t,[X,\partial_t]\rangle.$$

Como o colchete de campos é anti-simétrico, ou seja, $[X,Y]=-[Y,X],\ \ \forall X,Y\in\mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$, temos $\langle\overline{\nabla}_X\partial_t,\partial_t\rangle=0$. Logo, $\overline{\nabla}_X\partial_t$ é horizontal. Segue da observação 2.3 e da simetria da conexão afim de $\overline{M}^{n+1}$ que $\overline{\nabla}_{\partial_t}X=\overline{\nabla}_X\partial_t$.

Para mostrarmos que $\overline{\nabla}_X\partial_t=\dfrac{f'}{f}X$ seja Y um campo horizontal. Assim

$$\begin{aligned}2\langle\overline{\nabla}_X\partial_t,Y\rangle = \quad & X\langle\partial_t,Y\rangle+\partial_t\langle Y,X\rangle-Y\langle X,\partial_t\rangle\\ & -\langle X,[\partial_t,Y]\rangle+\langle\partial_t,[Y,X]\rangle+\langle Y,[X,\partial_t]\rangle\\ = \quad & \partial_t\langle Y,X\rangle+\langle\partial_t,[Y,X]\rangle=\partial_t\langle Y,X\rangle,\end{aligned}$$

onde usamos a observação (2.3) e na última equação que $[X,Y]\in\mathfrak{X}(M)$ é ortogonal a ∂_t. Da definição da métrica de $\overline{M}^{n+1}$, Equação 2.33, segue que

$$2\langle\overline{\nabla}_X\partial_t,Y\rangle=\partial_t\left(f^2\langle X,Y\rangle_M\right),$$

pois $(\pi_I)_*(X)=0,\forall X\in\mathfrak{X}(M)$. Assim, como $\partial_t\left(\langle X,Y\rangle_M\right)=0$, então

$$2\langle\overline{\nabla}_X\partial_t,Y\rangle=\partial_t\left(f^2\right)\langle X,Y\rangle_M=2f\partial_t(f)\langle X,Y\rangle_M=\frac{2f'f^2}{f}\langle X,Y\rangle_M$$

Novamente da definição de $\overline{g}$, temos $\langle X,Y\rangle=f^2\langle X,Y\rangle_M$, assim,

$$\langle\overline{\nabla}_X\partial_t,Y\rangle=\langle\frac{f'}{f}X,Y\rangle. \tag{2.49}$$

Agora generalizaremos para um campo $Z\in\mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$ arbitrário. Como $Z=Z^*-\langle Z,\partial_t\rangle\partial_t$, onde $Z^*=(\pi_M)_*(Z)$ então

$$\begin{aligned}\langle\overline{\nabla}_X\partial_t,Z\rangle = \quad & \langle\overline{\nabla}_X\partial_t,Z^*\rangle-\langle Z,\partial_t\rangle\langle\overline{\nabla}_X\partial_t,\partial_t\rangle=\langle\overline{\nabla}_X\partial_t,Z^*\rangle\\ = \quad & \langle\frac{f'}{f}X,Z^*\rangle=\langle\frac{f'}{f}X,Z\rangle,\end{aligned}$$

onde usamos a equação (2.49) e $\langle \overline{\nabla}_X \partial_t, \partial_t \rangle = 0$.

Como Z é arbitrário e $\overline{g}$ é não-degenerado segue que $\overline{\nabla}_X \partial_t = \dfrac{f'}{f} X$.

(ii) Mostramos que $\langle \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t, \partial_t \rangle = 0$. De fato, pela compatibilidade da conexão com a métrica, temos

$$\begin{aligned} \langle \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t, \partial_t \rangle &= \partial_t(\langle \partial_t, \partial_t \rangle) - \langle \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t, \partial_t \rangle \Rightarrow \\ \langle \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t, \partial_t \rangle &= \frac{1}{2} \partial_t(-1) = 0. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Com o mesmo raciocínio e o item (i) dessa proposição vamos mostrar que $\langle \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t, X \rangle = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \langle \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t, X \rangle &= \partial_t(\langle \partial_t, X \rangle) - \langle \partial_t, \overline{\nabla}_{\partial_t} X \rangle \Rightarrow \\ \langle \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t, X \rangle &= \partial_t(\langle \partial_t, X \rangle) + \langle \partial_t, \frac{f'}{f} X \rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle \partial_t, X \rangle = 0$, então

$$\langle \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t, X \rangle = 0. \tag{2.51}$$

Segue de (2.50) e (2.51) que $\overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t$, é horizontal e vertical. Logo é nulo. Isto conclui a demonstração.

■

Um espaço GRW é um exemplo de variedades semi-Riemannianas que possuem um campo conforme, como mostra o seguinte resultado.

Proposição 2.36 *O campo vertical $V = f\partial_t$ em $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$, onde $f = f \circ \pi_I$, é um campo conforme. Além disso, o fator conforme de V é $\phi = f'$.*

Prova. Do Lema 2.12 precisamos provar que

$$\langle \overline{\nabla}_X V, Y \rangle + \langle X, \overline{\nabla}_Y V \rangle = 2f' \langle X, Y \rangle,$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$.

Mostremos primeiro que

$$\overline{\nabla}_X V = f' X,$$

para qualquer $X \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$. De fato, seja $X \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$. Assim $X = X^* - \langle X, \partial_t\rangle\partial_t$, onde $X^* = (\pi_M)_* X$. Daí

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X V &= \overline{\nabla}_{(X^*-\langle X,\partial_t\rangle\partial_t)}(f\partial_t) = \overline{\nabla}_{X^*}(f\partial_t) - \langle X,\partial_t\rangle\overline{\nabla}_{\partial_t}(f\partial_t)\\ &= \left\{f\overline{\nabla}_{X^*}\partial_t + X^*(f)\partial_t\right\} - \langle X,\partial_t\rangle\left\{f\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t + \partial_t(f)\partial_t\right\},\end{aligned}$$

Agora, usando a Proposição 2.35, e que $X^*(f) = 0$, pois $f \equiv f \circ \pi$ está definida em I, temos

$$\overline{\nabla}_X V = f'X^* - f'\langle X,\partial_t\rangle\partial_t = f'\{X^* - \langle X,\partial_t\rangle\partial_t\} = f'X,$$

para qualquer $X \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$.

Dessa forma

$$\langle\overline{\nabla}_X V, Y\rangle + \langle X, \overline{\nabla}_Y V\rangle = \langle f'X, Y\rangle + \langle X, f'Y\rangle = 2f'\langle X, Y\rangle,$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$. ■

Uma propriedade interessante dos espaços GRW é que a fibra Riemanniana $M_t^n = \{t\}\times M^n$ quando orientada pelo campo ∂_t, sua curvatura média H_t é a mesma, para cada t.

Proposição 2.37 *Seja $\overline{M}^{n+1} = -I\times_f M^n$ um GRW. Se orientarmos os slices $M_t^n = \{t\}\times M^n$ com o campo ∂_t, então a curvatura média $H(t)$ de M_t^n é igual a $\dfrac{f'(t)}{f(t)}$, para qualquer $t \in I$.*

Prova. Seja e_i um referencial ortonormal em p. Assim

$$\begin{aligned}H(t) &= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle Ae_i, e_i\rangle_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla_{e_i}N)^\top, e_i\rangle_p\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}\partial_t, e_i\rangle_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle\frac{f'(t)}{f(t)}e_i, e_i\rangle_p\\ &= \frac{1}{n}\langle\frac{f'(t)}{f(t)}\sum_{i=1}^{n}e_i, e_i\rangle_p = \frac{f'(t)}{f(t)},\end{aligned}$$

para qualquer $t \in I$. ■

2.6 O Steady State Space

Nesta seção vamos apresentar um exemplo muito importante de espaço GRW: o Steady State Space, denotado por $\mathcal{H}^{n+1}$.

Seja $\mathbb{L}^{n+2}$ o espaço de Lorentz-Minkowski $(n+2)$-dimensional, que é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+2}$ munido com a métrica Lorentziana

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} u_i v_i - u_{n+2}v_{n+2},$$

para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^{n+2}$.

A hiperquádrica

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+2}; \langle x, x\rangle = 1\}$$

formado por todos os vetores unitários tipo-espaço de $\mathbb{L}^{n+2}$, munida com a métrica induzida de $\mathbb{L}^{n+2}$, é chamada *o espaço de Sitter*.

Denotaremos por D e $\overline{\nabla}$ as conexões afim de $\mathbb{L}^{n+2}$ e $\mathbb{S}_1^{n+1}$, respectivamente. *O espaço de Sitter é uma variedade Lorentziana* $(n+1)$*-dimensional completa e com curvatura seccional constante e igual a* 1. De fato, seja $f : \mathbb{L}^{n+2} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(p) = \langle p, p\rangle$, $p \in \mathbb{L}^{n+2}$. Dessa forma $\mathbb{S}_1^{n+1} = f^{-1}(1)$. Como $\mathbb{S}_1^{n+1}$ está imerso em $\mathbb{L}^{n+2}$ via a inclusão, ele é orientado pelo campo normal unitário $N(p) = \dfrac{Df(p)}{|Df(p)|}$, onde D denota o gradiente em $\mathbb{L}^{n+2}$.

Calculemos o gradiente de f. Se $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}^{n+2})$, então

$$\langle Df(p), X(p)\rangle \;=\; X(f(p)) = X\left(\langle p, p\rangle\right) = 2\langle D_X p, p\rangle,$$

para qualquer $p \in \mathbb{L}^{n+2}$.

Desde que

$$(D_X p)(q) = \left.\frac{Dp(c(t))}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{dp(c(t))}{dt}\right|_{t=0} = c'(t)|_{t=0} = X(c(t))|_{t=0} = X(q),$$

para qualquer $q \in \mathbb{L}^{n+2}$, onde $c : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{L}^{n+2}$ é uma curva diferenciável tal que $q = c(0)$ e $c'(t) = X(t)$. Daí $\langle Df(p), X(p)\rangle = \langle 2p, X(p)\rangle$, para qualquer $p \in \mathbb{L}^{n+2}$. Como a métrica é não-degenerada então $Df(p) = 2p$. Assim $N(p) = p$, para qualquer $p \in \mathbb{S}_1^{n+1}$ é a aplicação de Gauss da inclusão do de Sitter em $\mathbb{L}^{n+2}$. Então, a fórmula de Weingarten da inclusão (cf. Seção 1.2 de [8]) é dada por

$$AX = -(D_X N)^\top = -(D_X p)^\top = -X^\top = -X,$$

para qualquer $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{n+1})$.

Como a curvatura de $\mathbb{L}^{n+2}$ é constante e igual a zero, se denotarmos a curvatura de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ por R, então a equação de Gauss (cf. Seção 1.2 de [8]), é dada por

$$R(X,Y)Z \;=\; \langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X,$$

e portanto a curvatura seccional de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ é constante e igual a 1 (cf. Seção 1.2 de [8]).

Além disso, a fórmula de Gauss da inclusão do espaço de Sitter em $\mathbb{L}^{n+2}$ é dada por (cf. Seção 1.2 de [8])

$$D_X Y \;=\; \overline{\nabla}_X Y + \langle X,Y\rangle N. \tag{2.52}$$

Uma vez que $e_{n+2} = (0,\ldots,0,1)$ é um campo de vetores tipo-tempo unitário globalmente definido em $\mathbb{L}^{n+2}$, segue da Proposição 2.8 que ele determina uma orientação temporal em $\mathbb{L}^{n+2}$.

Definição 2.38 *O steady state space é o espaço GRW* $\mathcal{H}^{n+1} = -\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$.

Denotaremos a conexão afim de $\mathcal{H}^{n+1}$ por ∇.

Seja $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ um vetor tipo-luz apontando para o passado, isto é, $\langle a,a\rangle = 0$ e $\langle a,e_0\rangle > 0$, onde $e_{n+2} = (1,0,\ldots,0)$. Então, a região aberta

$$\{x \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle x,a\rangle > 0\}$$

do espaço de Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$ é isométrica a $\mathcal{H}^{n+1}$. Por isso $\mathcal{H}^{n+1}$ é extendível. Logo é não-completa. $\mathcal{H}^{n+1}$ é apenas uma metade do espaço de Sitter.

Seja $\mathcal{K}(x) = a - \langle x,a\rangle x$, para qualquer $x \in \mathcal{H}^{n+1}$. Veremos que $\mathcal{K}$ é um campo tipo-tempo em $\mathcal{K} \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}^{n+1})$ que é conforme e fechado em $\mathcal{H}^{n+1}$. De fato,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{K}(x),\mathcal{K}(x)\rangle &= \langle a,a\rangle - 2\langle a,x\rangle^2 + \langle a,x\rangle^2\langle x,x\rangle \\ &= \langle a,a\rangle + \langle a,x\rangle^2(-2+\langle x,x\rangle) = -\langle a,x\rangle^2 < 0,\end{aligned}$$

onde usamos que a é tipo-luz e $x \in \mathcal{H}^{n+1}$.

Por outro lado, como $\dim\left(T_x\mathcal{H}^{n+1}\right) = \dim\left(T_x\mathbb{S}_1^{n+1}\right) = n+1$, então

$$T_x\mathbb{S}_1^{n+1} = T_x\mathcal{H}^{n+1} = \{v \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle v,x\rangle = 0\}.$$

Desde que $\langle \mathcal{K}(x), x\rangle = 0$, temos $\mathcal{K} \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}^{n+1})$. Além disso, da fórmula de Gauss equation (2.36), obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_V \mathcal{K} &= D_V\mathcal{K} - \langle AV, \mathcal{K}\rangle x = D_V\mathcal{K} + \langle V, \mathcal{K}\rangle x \\
&= D_V(a - \langle x, a\rangle x) + \langle V, \mathcal{K}\rangle x \\
&= D_V a - (\langle x, a\rangle D_V x + V(\langle x, a\rangle x)) + \langle V, a\rangle x - \langle x, a\rangle\langle V, x\rangle x \\
&= D_V a - \langle x, a\rangle D_V(x) - \langle D_V x, a\rangle x - \langle x, D_V a\rangle x + \langle V, a\rangle x \\
&\quad -\langle x, a\rangle\langle V, x\rangle x. \qquad (2.53)
\end{aligned}$$

Como $D_V a = 0$ então

$$\nabla_V \mathcal{K} = -\langle x, a\rangle V - \langle V, a\rangle x + \langle V, a\rangle x = -\langle x, a\rangle V,$$

para qualquer $x \in \mathcal{H}^{n+1}$, mostrando que K é um campo conforme com fator de conformalidade $-\langle x, a\rangle$.

A seguinte proposição foi apresentada pela primeira vez em [6] e afirma que o steady state space pode ser folheado por hipersuperfícies totalmente umbílicas isométricas ao $\mathbb{R}^n$.

Proposição 2.39 *Nas condições acima, a distribuição n-dimensional $\mathcal{D}$ definida em $\mathcal{H}^{n+1}$ por*

$$p \in \mathcal{H}^{n+1} \mapsto \mathcal{D}(p) = \{v \in T_p(\mathcal{H}^{n+1}); \langle \mathcal{K}(p), v\rangle = 0\}$$

determina uma folheção tipo-espaço $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ de codimensão 1 orientada por $\mathcal{K}$. Além disso, as folhas de $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ são as hipersufícies totalmente umbílicas de $\mathcal{H}^{n+1}$

$$L^n(\tau) = \{x \in \mathbb{S}^{n+1}; \langle x, a\rangle = \tau\}, \tau > 0,$$

que são isométricas ao $\mathbb{R}^n$. Além disso, $L^n(\tau)$ possui curvatura média constante com respeito a aplicação de Gauss

$$N_\tau(x) = \frac{-\mathcal{K}(x)}{|\mathcal{K}(x)|} = x - \frac{1}{\tau}a, x \in L^n(\tau),$$

onde $|\mathcal{K}(x)| = (-\langle \mathcal{K}(x), \mathcal{K}(x)\rangle)^{1/2} = \langle a, x\rangle = \tau$.

A curvatura média H_τ, da inclusão do steady state space no de Sitter, com respeito a esta aplicação de Gauss é constante e igual a 1. De fato,

$$
\begin{aligned}
-Av &= \nabla_v N_\tau = D_v N_\tau - \langle D_v N_\tau, x\rangle x \\
&= D_v\left(x - \frac{1}{\tau}a\right) - \langle D_v\left(x - \frac{1}{\tau}a\right), x\rangle x \\
&= D_v x - \langle D_v x, x\rangle x + \left\{D_v\left(-\frac{1}{\tau}a\right) - \langle D_v\left(-\frac{1}{\tau}a\right), x\rangle x\right\} \\
&= D_v x - \langle D_v x, x\rangle x,
\end{aligned}
$$

onde usamos que $D_v a = 0$.

Como $D_v x = v$ e $v \in T_x\mathcal{H}^{n+1}$, então

$$Av = -v,$$

para qualquer $v \in T_p\mathcal{H}^{n+1}$. Segue que

$$H_\tau = \frac{-1}{n}tr(A) = 1, \forall \tau > 0.$$

Capítulo 3

Funções Suporte e Altura num Espaço de Robertson-Walker Generalizado (GRW)

Neste capítulo, vamos apresentar algumas ferramentas analíticas que usaremos para demonstrar os principais teoremas dessa dissertação, os quais apresentaremos no próximo capítulo. Veremos como calcular o laplaciano de algumas funções que ajudam a entender a geometria das hipersuperfícies tipo-espaço que estamos estudando, as quais chamaremos de função suporte e função altura.

3.1 Função Suporte

Sejam $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade Lorentziana conexa com métrica $\overline{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle$ e conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ munida com um campo conforme V e Σ^n uma variedade diferenciável orientável de dimensão n, onde N denota sua orientação. A função $\eta : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ definida por $\eta = \langle V, N \rangle$ é chamada a *função suporte relacionada a* N.

Por simplicidade de notação, também denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a métrica Riemanniana de Σ^n e denotaremos por ∇ sua conexão de Levi-Civita. Além disso, em toda a dissertação as notações com barra referem-se a variedade $\overline{M}^{n+1}$, enquanto as notações sem barra fazem referência a Σ^n.

Proposição 3.1 *Seja V um campo conforme em $\overline{M}^{n+1}$ munida com um fator conforme denotado por ϕ. Se $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ é uma imersão tipo-espaço e $\eta = \langle V, N\rangle$, então*

$$\Delta\eta = n\langle V, \nabla H\rangle + \eta\left\{\overline{Ric}(N,N) + |A|^2\right\} + n\left\{H\phi - N(\phi)\right\}, \tag{3.1}$$

onde ∇H é o gradiente de H na métrica de Σ^n, $\overline{Ric}$ é o tensor de Ricci de $\overline{M}^{n+1}$ e $|A|$ é norma de Hilbert-Schmidt de A.

Prova. Fixe $p \in \Sigma^n$ e considere a base ortonormal $\{e_i\}$ de $T_p\Sigma$ que diagonaliza o operador de Weingarten A. Considerando uma bola normal de Σ^n contendo p e fazendo transporte paralelo de cada e_i ao longo das geodésicas radiais, obtemos um referencial geodésico $\{e_i\}$ em p (veja Lema 2.9). Extenda $\{e_i\}$ à uma vizinhança de p em $\overline{M}^{n+1}$. Logo, por meio do transporte paralelo de cada e_i ao longo da geodésica de $\overline{M}^{n+1}$ que passa por p e tem velocidade $N(p)$ no instante $t = 0$, obtemos $\left(\overline{\nabla}_N e_i\right)(p) = \left(\dfrac{De_i}{dt}\right)(0) = 0$.

Em p escrevamos

$$V = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l e_l - \eta N. \tag{3.2}$$

Pela compatibilidade da conexão com a métrica de $\overline{M}^{n+1}$ em p

$$e_i(\eta) = e_i\left(\langle N, V\rangle\right) = \langle\overline{\nabla}_{e_i} N, V\rangle + \langle N, \overline{\nabla}_{e_i} V\rangle,$$

Aplicando a definição do operador de Weingarten A de Σ^n, para o vetor e_i, na última equação acima, obtemos

$$e_i(\eta) = -\langle Ae_i, V\rangle + \langle N, \overline{\nabla}_{e_i} V\rangle. \tag{3.3}$$

Como $\{e_i\}$ é um referencial geodésico em p, então o laplaciano de Σ^n da função η em p é obtido pela fórmula $\Delta\eta = \sum_i e_i\left(e_i(\eta)\right)$. Usando a equação (3.3), temos

$$\Delta\eta = -\sum_i e_i\langle Ae_i, V\rangle + \sum_i e_i\langle N, \overline{\nabla}_{e_i} V\rangle. \tag{3.4}$$

Novamente, pela compatibilidade da conexão com a métrica de $\overline{M}^{n+1}$ em p

$$-\sum_i e_i\langle Ae_i, V\rangle = -\sum_i \langle\overline{\nabla}_{e_i} Ae_i, V\rangle - \sum_i \langle Ae_i, \overline{\nabla}_{e_i} V\rangle \quad \text{e}$$
$$\sum_i e_i\langle N, \overline{\nabla}_{e_i} V\rangle = \sum_i \langle\overline{\nabla}_{e_i} N, \overline{\nabla}_{e_i} V\rangle + \sum_i \langle N, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} V\rangle.$$

Substituindo essas expressões em (3.4) e aplicando a definição do operador de Weingarten A de Σ^n para e_i, temos

$$\Delta\eta = -\sum_i \langle \overline{\nabla}_{e_i} Ae_i, V\rangle - 2\sum_i \langle Ae_i, \overline{\nabla}_{e_i} V\rangle + \sum_i \langle N, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} V\rangle. \tag{3.5}$$

Analisemos separadamente cada termo de (3.5) em p. Para isto, definamos

$$a = \sum_i \langle \overline{\nabla}_{e_i} Ae_i, V\rangle, \quad b = \sum_i \langle Ae_i, \overline{\nabla}_{e_i} V\rangle \ \text{ e } \ c = \sum_i \langle N, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} V\rangle. \tag{3.6}$$

Assim, podemos reescrever a equação (3.5) na forma

$$\Delta\eta = -a - 2b + c. \tag{3.7}$$

Analizemos inicialmente o termo a. Escrevendo Ae_i na base de auto-vetores $\{e_i\}$ em $T_p\Sigma$ encontramos, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, números $h_{il} \in \mathbb{R}$ tais que $Ae_i = \sum_l h_{il} e_l$. Assim, temos funções $h_{il} : \Sigma^n \to \mathbb{R}$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Calculando a derivada covariante de Ae_i com respeito a e_i em p, temos

$$\overline{\nabla}_{e_i} Ae_i = \sum_l \overline{\nabla}_{e_i}(h_{il} e_l) \ = \ \sum_l h_{il} \overline{\nabla}_{e_i} e_l + \sum_l e_i(h_{il}) e_l.$$

Segue da expressão acima que

$$a \ = \ \sum_i \langle \overline{\nabla}_{e_i} Ae_i, V\rangle = \sum_{i,l} h_{il} \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_l, V\rangle + \sum_{i,l} e_i(h_{il})\langle e_l, V\rangle. \tag{3.8}$$

Aplicando a equação (2.36) e usando que N é um campo unitário e tipo-tempo, temos

$$\overline{\nabla}_{e_i} e_l = \nabla_{e_i} e_l + \frac{\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_l, N\rangle}{\langle N, N\rangle} N = \nabla_{e_i} e_l - \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_l, N\rangle N,$$

onde ∇ é a conexão de Σ^n. Desde que $(\nabla_{e_i} e_l)(p) = 0$, pois $\{e_i\}$ é um referencial geodésico de Σ^n em p, segue

$$\overline{\nabla}_{e_i} e_l = -\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_l, N\rangle N \tag{3.9}$$

Além disso,

$$\langle e_l, V\rangle = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l \langle e_l, e_l\rangle - \eta\langle N, e_l\rangle = \alpha_l. \tag{3.10}$$

Substituindo (3.9) e (3.10) em (3.8), obtemos

$$\begin{aligned} a \ &= \ -\langle V, N\rangle \sum_{i,l} h_{il} \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_l, N\rangle + \sum_{i,l} \alpha_l e_i(h_{il}) \\ &= \ -\eta \sum_{i,l} h_{il} \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_l, N\rangle + \sum_{i,l} \alpha_l e_i(h_{il}). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Por outro lado, usando a compatibilidade da conexão com a métrica de $\overline{M}^{n+1}$ em p, equação (2.23), na expressão $e_i\langle N, e_l\rangle = 0$, vamos mostrar que

$$\langle N, \overline{\nabla}_{e_i} e_l\rangle = h_{il}. \tag{3.12}$$

De fato,

$$\begin{aligned} e_i\langle N, e_l\rangle = 0 \;\; &\Rightarrow \;\; \langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_l\rangle + \langle N, \overline{\nabla}_{e_i} e_l\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \;\; \langle N, \overline{\nabla}_{e_i} e_l\rangle = -\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_l\rangle \\ &\Rightarrow \;\; \langle N, \overline{\nabla}_{e_i} e_l\rangle = \langle A e_i, e_l\rangle = \langle \sum_j h_{ij} e_j, e_l\rangle \\ &\Rightarrow \;\; \langle N, \overline{\nabla}_{e_l} e_l\rangle = \sum_j h_{ij}\langle e_j, e_l\rangle = \sum_j h_{ij}\delta_{jl} = h_{il}. \end{aligned}$$

Observemos que

$$|A|^2 \;\; = \;\; \sum_{i,l} h_{il}^2. \tag{3.13}$$

De fato,

$$\begin{aligned} |A|^2 \;\; &= \;\; \sum_i \langle A e_i, A e_i\rangle = \sum_i \langle \sum_l h_{il} e_l, A e_i\rangle \\ &= \;\; \sum_{i,l} h_{il}\langle e_l, A e_i\rangle = \sum_{i,l} h_{il}\left\{\sum_j h_{ij}\langle e_l, e_j\rangle\right\}, \end{aligned}$$

e desde que $\sum_j h_{ij}\langle e_l, e_j\rangle = h_{il}$, obtemos a expressão (3.13).

Substituindo (3.12) e (3.13) em (3.11), obtemos

$$a \;\; = \;\; -\eta|A|^2 + \sum_{i,l} \alpha_l e_i(h_{il}). \tag{3.14}$$

Para obter uma expressão para b, sejam λ_k os auto-valores de A em p, onde $k \in \{1, \ldots, n\}$, ou seja, $Ae_k = \lambda_k e_k$, para qualquer $k \in \{1, \ldots, n\}$. Aplicando o Lema 2.12 e a definição da curvatura média H de Σ^n, obtemos

$$b = \sum_i \langle A e_i, \overline{\nabla}_{e_i} V\rangle = \sum_i \lambda_i\langle e_i, \overline{\nabla}_{e_i} V\rangle = \sum_i \lambda_i \phi = -nH\phi. \tag{3.15}$$

Por último analizemos o termo c da equação (3.7). Como V é conforme em $\overline{M}^{n+1}$ pelo Lema 2.12, temos

$$\langle \overline{\nabla}_N V, e_i\rangle + \langle N, \overline{\nabla}_{e_i} V\rangle = 2\phi\langle e_i, N\rangle = 0,$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Calculando a derivada covariante da expressão acima com respeito a e_i, segue

$$\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_N V, e_i \rangle + \langle \overline{\nabla}_N V, \overline{\nabla}_{e_i} e_i \rangle + \langle \overline{\nabla}_{e_i} N, \overline{\nabla}_{e_i} V \rangle + \langle N, \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} V \rangle = 0. \tag{3.16}$$

Da equação (3.9), obtemos

$$\langle \overline{\nabla}_N V, \overline{\nabla}_{e_i} e_i \rangle \;\; = \;\; -\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle \langle \overline{\nabla}_N V, N \rangle.$$

Como $\langle N, \overline{\nabla}_{e_i} e_i \rangle = \langle A e_i, e_i \rangle = \langle \lambda_i e_i, e_i \rangle = \lambda_i$ e $\langle \overline{\nabla}_N V, N \rangle = \phi \langle N, N \rangle = -\phi$, então

$$\langle \overline{\nabla}_N V, \overline{\nabla}_{e_i} e_i \rangle \;\; = \;\; \lambda_i \phi.$$

Aplicando o Lema 2.12, segue

$$\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, \overline{\nabla}_{e_i} V \rangle = -\lambda_i \langle e_i, \overline{\nabla}_{e_i} V \rangle = -\lambda_i \phi$$

Somando estas expressões, obtém-se

$$\langle \overline{\nabla}_N V, \overline{\nabla}_{e_i} e_i \rangle + \langle \overline{\nabla}_{e_i} N, \overline{\nabla}_{e_i} V \rangle = 0. \tag{3.17}$$

Utilizando (3.17) em (3.16), temos

$$\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_N V, e_i \rangle + \langle N, \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} V \rangle = 0. \tag{3.18}$$

Desde que $(\overline{\nabla}_N e_i)(p) = 0$, segue

$$[N, e_i](p) = \left(\overline{\nabla}_N e_i \right)(p) - \left(\overline{\nabla}_{e_i} N \right)(p) = \lambda_i e_i. \tag{3.19}$$

Da definição do tensor curvatura $\overline{R}$ (equação (2.11)), segue

$$\begin{aligned} \langle \overline{R}(N, e_i) V, e_i \rangle_p &= \langle \overline{\nabla}_{[N, e_i]} V - \overline{\nabla}_N \overline{\nabla}_{e_i} V + \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_N V, e_i \rangle_p \\ &= \langle \overline{\nabla}_{[N, e_i]} V, e_i \rangle_p - \langle \overline{\nabla}_N \overline{\nabla}_{e_i} V, e_i \rangle_p + \langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_N V, e_i \rangle_p. \end{aligned}$$

Como $\overline{\nabla}$ depende apenas do valor de X em p e do valor de Y ao longo de uma curva tangente a X em p, então segue da equação (3.18) que

$$\begin{aligned} \langle \overline{R}(N, e_i) V, e_i \rangle_p &= \langle \overline{\nabla}_{\lambda_i e_i} V, e_i \rangle_p - N \langle \overline{\nabla}_{e_i} V, e_i \rangle_p - \langle N, \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} V \rangle_p \\ &= \lambda_i \langle \overline{\nabla}_{e_i} V, e_i \rangle_p - N \langle \overline{\nabla}_{e_i} V, e_i \rangle_p - \langle N, \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} V \rangle_p. \end{aligned}$$

Desde que V é conforme em $\overline{M}^{n+1}$, segue do Lema 2.12 que

$$\langle \overline{R}(N, e_i)V, e_i\rangle_p = \lambda_i\phi - N(\phi) - \langle N, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}V\rangle_p.$$

Daí,

$$\langle N, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}V\rangle_p = \lambda_i\phi - N(\phi) - \langle \overline{R}(N, e_i)V, e_i\rangle_p.$$

Da definição da curvatura de Ricci, equação (2.29), temos

$$\begin{aligned} c &= \sum_i \langle N, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}V\rangle_p \\ &= -nN(\phi) - nH\phi - \sum_i \langle \overline{R}(N, e_i)V, e_i\rangle_p \\ &= -nN(\phi) - nH\phi - \overline{Ric}(N, V)_p. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Da bilinearidade da curvatura de Ricci e da equação (3.2) para $\overline{Ric}(N, V)_p$, temos

$$\begin{aligned} \overline{Ric}(N, V) &= \sum_l \alpha_l \overline{Ric}(N, e_l) - \eta\overline{Ric}(N, N) \\ &= \sum_{i,l} \alpha_l \langle \overline{R}(e_i, e_l)e_i, N\rangle - \eta\overline{Ric}(N, N). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Novamente da equação (2.23) $\overline{M}^{n+1}$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \overline{R}(e_i, e_l)e_i, N\rangle_p &= \langle \overline{\nabla}_{e_l}\overline{\nabla}_{e_i}e_i - \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_l}e_i, N\rangle_p \\ &= e_l\langle \overline{\nabla}_{e_i}e_i, N\rangle_p - \langle \overline{\nabla}_{e_i}e_i, \overline{\nabla}_{e_i}N\rangle_p - e_i\langle \overline{\nabla}_{e_l}e_i, N\rangle_p + \langle \overline{\nabla}_{e_l}e_i, \nabla_{e_i}N\rangle_p. \end{aligned}$$

Segue da expressão

$$\langle \overline{\nabla}_{e_l}e_i, \overline{\nabla}_{e_i}N\rangle_p = -\langle \langle \overline{\nabla}_{e_l}e_i, N\rangle_p N, \overline{\nabla}_{e_i}N\rangle_p = \langle \overline{\nabla}_{e_l}e_i, N\rangle_p \langle N, Ae_i\rangle_p = 0,$$

e da equação (2.23) que

$$\langle \overline{R}(e_i, e_l)e_i, N\rangle_p = e_i\langle e_i, \overline{\nabla}_{e_l}N\rangle - e_l\langle e_i, \overline{\nabla}_{e_i}N\rangle. \tag{3.22}$$

Agora, desde que

$$\langle e_i, \overline{\nabla}_{e_l}N\rangle = -\langle e_i, Ae_l\rangle = -\sum_s h_{ls}\langle e_i, e_s\rangle = -h_{li},$$

segue de (3.22) que

$$\langle \overline{R}(e_i, e_l)e_i, N\rangle_p = -e_i(h_{li}) + e_l(h_{ii}). \tag{3.23}$$

Aplicando esta expressão em (3.21), obtemos

$$\overline{Ric}(N,V)_p = -\sum_{i,l}\alpha_l e_i(h_{li}) + \sum_{i,l}\alpha_l e_l(h_{ii}) - \eta\overline{Ric}(N,N)_p.$$

Substituindo em (3.20), temos

$$c = -nN(\phi) - nH\phi + \sum_{i,l}\alpha_l e_i(h_{li}) - \sum_{i,l}\alpha_l e_l(h_{ii}) + \eta\overline{Ric}(N,N)_p. \tag{3.24}$$

Como

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A) &= \sum_i \langle Ae_i, e_i\rangle = \sum_i \langle \sum_j h_{ij}e_j, e_i\rangle \\ &= \sum_i h_{ii} \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \sum_{i,l}\alpha_l e_l(h_{ii}) &= \sum_l \alpha_l e_l(\sum_i h_{ii}) \\ &= \sum_l \alpha_l e_l(tr(A)) = \sum_l \alpha_l e_l(-nH) \\ &= V^{\top}(-nH), \end{aligned}$$

onde usamos que $V^{\top}(-nH) = \sum_l \alpha_l e_l(-nH)$ é a componente tangente de V em Σ^n aplicado a $-nH$.

Portanto

$$c = -nN(\phi) - nH\phi + \sum_{i,l}\alpha_l e_i(h_{li}) - V^{\top}(-nH) + \eta\overline{Ric}(N,N)_p. \tag{3.25}$$

Substituindo (3.15), (3.14) e (3.25) em (3.7), obtemos a fórmula desejada. ■

Seja $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ um espaço GRW, com base $(I, -dt^2)$, fibra Riemanniana $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ e função warped f. Pelo Corolário 2.36, $V = f\partial_t$ é um campo conforme em $\overline{M}^{n+1}$, com fator conforme $\phi = f'$. Aplicando a Proposição 3.1 calcularemos o laplaciano da função suporte η.

Proposição 3.2 *Seja $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ um espaço GRW, com base $(I, -dt^2)$ fibra Riemanniana $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ e função warped f. Se $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ é uma imersão tipo-espaço com curvatura média H constante então*

$$\Delta\eta = \eta\left\{Ric_M(N^*, N^*) + (n-1)(\log f)''(1 - \langle N, \partial_t\rangle^2) + |A|^2\right\} + nHf', \tag{3.26}$$

onde Ric_M denota o tensor de Ricci de M e $N^* = (\pi_M)_* N$.

Prova. Como $\eta = \langle V, N\rangle = f\langle N, \partial_t\rangle$ e a curvatura média H de Σ^n é constante, então aplicando a Proposição 3.1 e observando que $\nabla H = 0$ e $\phi = f'$, temos

$$\Delta\eta = \eta\left\{\overline{Ric}(N,N) + |A|^2\right\} + n\left\{Hf' - N(f')\right\}. \tag{3.27}$$

O gradiente de f' em $\overline{M}^{n+1}$, denotado por $\overline{\nabla} f'$, é dado pela expressão (ver [9], página 85)

$$\overline{\nabla} f' = -f''\partial_t + \sum_{i,j} f^2 g_{ij}\partial_i(f)\partial_j$$

onde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial_{x_i}}$. Como f é identificado com $f\circ\pi_I$, onde $\pi_I : \overline{M}^{n+1} \to I$ é a aplicação projeção sobre I, e esta composição só depende de t então $\partial_i(f) = 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Assim $\overline{\nabla} f' = -f''\partial_t$.

Segue da definição de η que

$$N(f') = \langle\overline{\nabla} f', N\rangle = -f''\langle N, \partial_t\rangle = -\frac{f''}{f}\eta.$$

Desde que $N = N^* - \langle N, \partial_t\rangle\partial_t$, onde $N^* = (\pi_M)_* N$ e $\pi_M : \overline{M}^{n+1} \to M^n$ é a aplicação projeção sobre M^n, aplicando a bilinearidade de $\overline{Ric}$ obtemos

$$\overline{Ric}(N,N) = \overline{Ric}(N^*,N^*) - 2\langle N,\partial_t\rangle\overline{Ric}(N^*,\partial_t) + \langle N,\partial_t\rangle^2\overline{Ric}(\partial_t,\partial_t). \tag{3.28}$$

Agora, do Corolário 7.43 de [9], página 211, temos as seguintes expressões

$$\begin{aligned}
\overline{Ric}(N^*,N^*) &= Ric_M(N^*,N^*) + \langle N^*,N^*\rangle\left\{\frac{f''}{f} + (n-1)\frac{(f')^2}{f^2}\right\}\\
\overline{Ric}(\partial_t,\partial_t) &= -n\frac{f''}{f}\\
\overline{Ric}(\partial_t,N^*) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Substituindo as expressões de (3.29) em (3.28), temos

$$\overline{Ric}(N,N) = Ric_M(N^*,N^*) + \langle N^*,N^*\rangle\left\{\frac{f''}{f} + (n-1)\frac{(f')^2}{f^2}\right\} - n\frac{f''}{f}\langle N^*,\partial_t\rangle.$$

Como $\langle N^*,N^*\rangle = \langle N,\partial_t\rangle^2 - 1$, então

$$\begin{aligned}
\overline{Ric}(N,N) &= Ric_M(N^*,N^*) + (\langle N,\partial_t\rangle^2 - 1)\left\{\frac{f''}{f} + (n-1)\frac{(f')^2}{f^2}\right\} - n\frac{f''}{f}\langle N,\partial_t\rangle\\
&= Ric_M(N^*,N^*) - \left\{\frac{f''}{f} + (n-1)\frac{(f')^2}{f^2}\right\} + \left\{\frac{f''}{f} + (n-1)\frac{(f')^2}{f^2}\right.\\
&\quad \left. -n\frac{f''}{f}\right\}\langle N,\partial_t\rangle^2\\
&= Ric_M(N^*,N^*) - \left\{\frac{f''}{f} + (n-1)\frac{(f')^2}{f^2}\right\} - (n-1)\left\{\frac{f''}{f} - \frac{(f')^2}{f^2}\right\}\langle N,\partial_t\rangle^2.
\end{aligned}$$

Desde que $\left(\dfrac{f'}{f}\right)' = \dfrac{f''}{f} - \dfrac{(f')^2}{f^2}$, temos

$$\overline{Ric}(N,N) = Ric_M(N^*,N^*) - \left\{\frac{f''}{f} + (n-1)\frac{(f')^2}{f^2}\right\} - (n-1)\left(\frac{f'}{f}\right)'\langle N,\partial_t\rangle^2.$$

Substituindo esta expressão em (3.27),

$$\begin{aligned}
\Delta\eta &= \eta\overline{Ric}(N,N) + \eta|A|^2 + nHf' - nN(f') \\
&= \eta\left\{Ric_M(N^*,N^*) - \left(\frac{f''}{f} + (n-1)\frac{(f')^2}{f^2}\right) - (n-1)\left(\frac{f'}{f}\right)'\langle N,\partial_t\rangle^2\right\} \\
&\quad +\eta|A|^2 + nHf' - nN(f') \\
&= \eta\left\{Ric_M(N^*,N^*) - \frac{f''}{f} - (n-1)\frac{(f')^2}{f^2} - (n-1)(\log f)''\langle N^*,\partial_t\rangle^2 + |A|^2\right. \\
&\quad \left. +n\frac{f''}{f}\right\} + nHf'
\end{aligned}$$

Por último, como $\dfrac{(f')^2}{f^2} = \dfrac{f''}{f} - (\log f)''$ então

$$\begin{aligned}
\Delta\eta &= \eta\left\{Ric_M(N^*,N^*) - \frac{f''}{f} + (n-1)\left((\log f)'' - \frac{f''}{f}\right) - (n-1)(\log f)''\langle N,\partial_t\rangle^2\right. \\
&\quad \left. +|A|^2 + n\frac{f''}{f}\right\} + nHf' \\
&= \eta\left\{Ric_M(N^*,N^*) - \frac{f''}{f} + (n-1)(\log f)'' - n\frac{f''}{f} + \frac{f''}{f} - (n-1)(\log f)''\langle N,\right. \\
&\quad \left. \partial_t^2\rangle + |A|^2 + n\frac{f''}{f}\right\} + nHf' \\
&= \eta\left\{Ric_M(N^*,N^*) + (n-1)(\log f)'' - (n-1)(\log f)''\langle N,\partial_t\rangle^2 + |A|^2\right\} + nHf',
\end{aligned}$$

como desejado. ■

3.2 Função Altura

Sejam $\overline{M}^{n+1}$ um espaço GRW e $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço. A função $h : \Sigma^n \to I$, definida por $h(t,x) = (\pi_I \circ \psi)(t,x) = t$, é chamada *a função altura de Σ^n com respeito ao campo de vetores unitário ∂_t*. A seguinte proposição apareceu pela primeira vez em [12] como um caso particular do Lema 4.1. Nós apresentamos uma prova direta do caso particular que é necessário para nossos resultados.

Proposição 3.3 *Nas condições acima, seja* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço. Então*

$$\Delta h = -(\log f)'(h)\left\{n + |\nabla h|^2\right\} - nH\langle N, \partial_t\rangle, \tag{3.30}$$

onde H *denota a curvatura média de* Σ^n *com respeito a* N.

Prova. Vamos denotar a componente tangente de um vetor, ou de um campo de vetores, sobre Σ por $(\,\cdot\,)^T$. Seja $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Então

$$\langle \nabla h, X\rangle \;=\; X(h) = X^*(h) - \langle X, \partial_t\rangle \partial_t(h) = -\langle X, \partial_t\rangle,$$

onde acima $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota, ao mesmo tempo, tanto a métrica métrica de Σ^n quanto a métrica de $\overline{M}^{n+1}$. Portanto

$$\nabla h = -\partial_t^T = -\partial_t - \langle N, \partial_t\rangle N, \tag{3.31}$$

Fixe $p \in \Sigma^n$ e $v \in T_p\Sigma$. Então $v = w - \langle v, \partial_t\rangle \partial_t$, para algum $w \in T_pM$. Calculando a derivada covariante de ∂_t com respeito a v em $\overline{M}^{n+1}$ e usando a Proposição 2.35, temos

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_v \partial_t &= \overline{\nabla}_w \partial_t - \langle v, \partial_t\rangle \overline{\nabla}_{\partial t}\partial_t = \overline{\nabla}_w \partial_t \\ &= (\log f)' w = (\log f)'(v + \langle v, \partial_t\rangle \partial_t). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Calculando a derivada covariante de ∇h com respeito a v em Σ^n e usando a fórmula de Gauss de Σ^n, equação (2.36) temos

$$\nabla_v \nabla h \;=\; \overline{\nabla}_v \overline{\nabla} h - \langle Av, \overline{\nabla} h\rangle N.$$

Como $\overline{\nabla} h = \nabla h$, então

$$\nabla_v \nabla h \;=\; \overline{\nabla}_v \nabla h - \langle Av, \nabla h\rangle N. \tag{3.33}$$

Substituindo (3.31) em (3.33), temos

$$\begin{aligned} \nabla_v \nabla h &= \overline{\nabla}_v\left(-\partial_t - \langle N, \partial_t\rangle N\right) + \langle Av, \nabla h\rangle N \\ &= -\overline{\nabla}_v \partial_t - \langle N, \partial_t\rangle \overline{\nabla}_v N + \langle Av, \nabla h\rangle N. \end{aligned}$$

Aplicando (3.32) e a definição da aplicação de Gauss de Σ^n segue que

$$\begin{aligned} \nabla_v \nabla h &= -\left(\log f\right)' w - \overline{\nabla}_v\left(\langle N, \partial_t\rangle N\right) + \langle Av, \nabla h\rangle N \\ &= -\left(\log f\right)' w - \langle N, \partial_t\rangle \overline{\nabla}_v N - v\left(\langle N, \partial_t\rangle\right) N + \langle Av, \nabla h\rangle N \\ &= -\left(\log f\right)' w + \langle N, \partial_t\rangle Av - v\left(\langle N, \partial_t\rangle\right) N + \langle Av, \nabla h\rangle N. \end{aligned}$$

Pela compatibilidade da conexão $\overline{\nabla}$ de $\overline{M}^{n+1}$ com a métrica e aplicando novamente a equação (3.32), temos

$$\begin{aligned}
\nabla_v \nabla h &= -(\log f)'\, w + \langle N, \partial_t \rangle Av - \langle \overline{\nabla}_v N, \partial_t \rangle N - \langle N, \overline{\nabla}_v \partial_t \rangle N + \langle Av, \nabla h \rangle N \\
&= -(\log f)'\, w + \langle N, \partial_t \rangle Av + \langle Av, \partial_t \rangle N - \langle N, \overline{\nabla}_v \partial_t \rangle N + \langle Av, \nabla h \rangle N \\
&= -(\log f)'\, w + \langle N, \partial_t \rangle Av + \langle Av, \partial_t^T \rangle N - (\log f)' \langle N, w \rangle N + \langle Av, \nabla h \rangle N.
\end{aligned}$$

Como $\nabla h = -\partial_t^T$ então $\langle Av, \partial_t^T \rangle N + \langle Av, \nabla h \rangle N = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla_v \nabla h &= -(\log f)'\, w + \langle N, \partial_t \rangle Av - (\log f)' \langle N, w \rangle N \\
&= -(\log f)' (w + \langle N, w \rangle N) + \langle N, \partial_t \rangle Av \\
&= -(\log f)' \big(v + \langle v, \partial_t^T \rangle \partial_t + \langle N, v + \langle v, \partial_t^T \rangle \partial_t \rangle N \big) + \langle N, \partial_t \rangle Av \\
&= -(\log f)' (v - \langle v, \nabla h \rangle \partial_t + \langle N, v \rangle N - \langle v, \nabla h \rangle \langle N, \partial_t \rangle N) + \langle N, \partial_t \rangle Av.
\end{aligned}$$

Desde que $\langle N, v \rangle = 0$ e $-\langle N, \partial_t \rangle N = \nabla h + \partial_t$ segue que

$$\begin{aligned}
\nabla_v \nabla h &= -(\log f)'(v - \langle v, \nabla h \rangle \partial_t + \langle v, \nabla h \rangle \nabla h + \langle v, \nabla h \rangle \partial_t) + \langle N, \partial_t \rangle Av \\
&= -(\log f)'(v + \langle v, \nabla h \rangle \nabla h) + \langle N, \partial_t \rangle Av \\
&= (\log f)'(-v - \langle v, \nabla h \rangle \nabla h) + \langle N, \partial_t \rangle Av
\end{aligned}$$

Fixando uma base ortonormal e_i em $T_p\Sigma$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta h &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla h, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle (\log f)'(-e_i - \langle e_i, \nabla h \rangle \nabla h) + \langle N, \partial_t \rangle Ae_i, e_i \rangle \\
&= (\log f)' \{ -\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, e_i \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \nabla h \rangle^2 \} + \langle N, \partial_t \rangle \sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i, e_i \rangle \\
&= (\log f)' \left\{ -n - |\nabla h|^2 \right\} - nH \langle N, \partial_t \rangle,
\end{aligned}$$

concluindo a demonstração. ■

Capítulo 4

Resultados para Hipersuperfícies Tipo-espaço Completas no Steady State Space.

Neste capítulo vamos apresentar os principais teoremas dessa dissertação, os quais dão estimativas para a curvatura média de uma hipersuperfície tipo-espaço completa $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ com curvatura média H constante sob certas restrições para a função altura h de Σ^n.

4.1 Alguns Fatos Importantes

Nesta seção veremos apresentar algumas propriedades que serão utilizadas em nossos teoremas.

Sejam $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço e N uma aplicação de Gauss em Σ^n. Defina a *segunda curvatura* H_2 de Σ^n por $H_2 = \dfrac{2S_2}{n(n-1)}$, onde

$$S_2 = \sum_{i<j} k_i k_j$$

é chamada a *segunda função simétrica elementar de autovalores de* A.

Precisamos dos seguintes resultados, que serão utilizados para obter os resultados principais desta dissertação.

Lema 4.1 *Sejam $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço e N uma aplicação de Gauss em Σ^n. Então*

$$|A|^2 = n^2H^2 - n(n-1)H_2, \tag{4.1}$$

onde H é a curvatura média e A é o operador de Weingarten de Σ^n.

Prova. De fato, observemos que (4.1) equivale a

$$\sum_{i=1}^{n} k_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)^2 - 2\sum_{i<j,i,j=1}^{n} k_ik_j. \tag{4.2}$$

Mostremos por indução. Para $n = 2$ a igualdade é verdadeira. Suponhamos que (4.2) vale para algum $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n+1} k_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} k_i + k_{n+1}\right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)k_{n+1} + k_{n+1}^2
\end{aligned}$$

Usando a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{n+1} k_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} k_i^2 + 2\sum_{i<j} k_ik_j + 2(\sum_{i=1}^{n} k_i)k_{n+1} + k_{n+1}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} k_i^2 + 2\sum_{i<j,i,j=1}^{n+1} k_ik_j,
\end{aligned}$$

como desejado. ■

Lema 4.2 *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço. Então*

(a)

$$Ric(X,X) \geq n - 1 - \frac{n^2H^2}{4}, \tag{4.3}$$

onde Ric denota a curvatura de Ricci de Σ^n.

(b) *$S = n(n-1)(1 - H_2)$, onde S denota curvatura escalar de Σ^n.*

Prova.

(a) Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e R o operador curvatura de Σ^n. A equação de Gauss de Σ^n é dada por

$$\langle R(X,Y)X,Y\rangle = \langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2 - \langle AX,X\rangle\langle AY,Y\rangle + \langle AX,Y\rangle^2,$$

Se $\{E_i\}$ é um referencial ortonormal em $\mathfrak{X}(\Sigma)$ e $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ é unitário, então

$$\begin{aligned} Ric(X,X) &= \sum_{i=1}^{n} \langle R(X,E_i)X, E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(1 - \langle X, E_i\rangle^2 - \langle AX, X\rangle\langle AE_i, E_i\rangle + \langle AX, E_i\rangle^2\big) \\ &= n - \sum_{i=1}^{n} \langle X, E_i\rangle^2 - \langle AX, X\rangle \sum_{i=1}^{n} \langle AE_i, E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle AX, E_i\rangle^2 \\ &= n - |X|^2 + nH\langle AX, X\rangle + |AX|^2. \end{aligned}$$

Logo

$$Ric(X,X) = n - 1 + nH\langle AX, X\rangle + |AX|^2. \tag{4.4}$$

Como

$$\left|AX + \frac{nH}{2}X\right|^2 = |AX|^2 + nH\langle AX, X\rangle + \frac{n^2H^2}{4}, \tag{4.5}$$

então

$$Ric(X,X) \geq n - 1 + \left|AX + \frac{nH}{2}X\right|^2 - \frac{n^2H^2}{4}.$$

Portanto

$$Ric(X,X) \geq n - 1 - \frac{n^2H^2}{4}.$$

(b) A curvatura escalar S é definida por $S = \mathrm{tr}(Ric)$. Seja $\{E_j\}$ um referencial ortonormal em $\mathfrak{X}(\Sigma)$. Desde que

$$H = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \langle AE_j, E_j\rangle,$$

e

$$|A|^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle AE_j, AE_j\rangle,$$

segue de (4.4) que

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=1}^{n} Ric(E_j, E_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (n - 1 + nH\langle AE_j, E_j\rangle + \langle AE_j, AE_j\rangle) \\ &= n(n-1) + nH\sum_{j=1}^{n} \langle AE_j, E_j\rangle + \sum_{j=1}^{n} \langle AE_j, AE_j\rangle \\ &= n(n-1) - n^2H^2 + |A|^2. \end{aligned}$$

Usando o Lema 4.1

$$\begin{aligned} S &= n(n-1) - n(n-1)H_2 \\ &= n(n-1)(1-H_2). \end{aligned}$$

■

Lema 4.3 *Seja* $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço. Então* $H^2 \geq H_2$.

Prova. Do Lema 4.1 $|A|^2 = n^2H^2 - n(n-1)H_2$. Assim

$$\begin{aligned} H^2 - H_2 &= H^2 - \left(\frac{n^2H^2 - |A|^2}{n(n-1)}\right) \\ &= \frac{n(n-1)H^2 - n^2H^2 + |A|^2}{n(n-1)} \\ &= \frac{n^2H^2 - nH^2 - n^2H^2 + |A|^2}{n(n-1)} \\ &= \frac{|A|^2 - nH^2}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

Como $n(n-1) > 0$ então resta mostrar que $|A|^2 - nH^2 \geq 0$. Observe que $|A|^2 = \mathrm{tr}(A^2)$. De fato, seja $\{E_i\}$ o referencial ortonormal que diagonaliza A. Dessa forma

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A^2) &= \sum_{i=1}^{n} \langle A(AE_i), E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \langle E_i, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_i^2 = |A|^2, \end{aligned}$$

onde $AE_i = k_iE_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Além disso, $|A|^2 - nH^2 = \mathrm{tr}\left((A - \lambda I)^2\right)$ onde $\lambda = -H = \frac{\mathrm{tr}(A)}{n}$. De fato,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}((A-\lambda I)^2) &= \mathrm{tr}(A^2) - 2\lambda \mathrm{tr}(A) + \lambda^2 \mathrm{tr}(I) \\ &= \mathrm{tr}(A^2) - 2(-H)(-nH) + (-H)^2 n \\ &= \mathrm{tr}(A^2) - 2nH^2 + nH^2 \\ &= \mathrm{tr}(A^2) - nH^2. \end{aligned}$$

Mostrando que $|A|^2 - nH^2 = \mathrm{tr}\left((A-\lambda I)^2\right) \geq 0$. Portanto $H^2 - H_2 \geq 0$. ■

As seguintes proposições, devidas a Akutagawa, são ferramentas muito importantes para nossos objetivos.

Proposição 4.1 (Akutagawa) *Sejam Σ^n uma variedade Riemanniana completa, cujo tensor de Ricci é limitado inferiormente, e $u : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável não-negativa. Se $\Delta u \geq \alpha u^2$, para alguma constante $\alpha > 0$, então u é identicamente nula em Σ^n.*

Proposição 4.2 (Akutagawa) *Seja $x : \Sigma^n \to \mathbb{S}_1^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$, $n \geq 2$, uma hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média constante, verificando*

(a) $H^2 \leq 1$ *se* $n = 2$.

(b) $H^2 < \dfrac{4(n-1)}{n^2}$ *se* $n \geq 3$.

Então Σ^n é totalmente umbílica.

A próxima proposição é a ferramenta que permite classificar as hipersuperfícies totalmente umbílicas do espaço de Sitter.

Proposição 4.3 (Montiel) *Seja $x : \Sigma^n \to \mathbb{S}_1^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$, $n \geq 2$, uma hipersuperfície tipo-espaço conexa e totalmente umbílica.*

(a) *Se $0 \leq H^2 < 1$, então Σ^n é isométrica a $\mathbb{S}^n$.*

(b) *Se $H^2 = 1$, então Σ^n é isométrica ao $\mathbb{R}^n$.*

(c) *Se $H^2 > 1$, então Σ^n é isométrica ao $\mathbb{H}^n$.*

A seguir veremos um resultado muito forte de superfícies.

Definição 4.4 *Seja M^2 uma superfície Riemanniana. Uma função $f \in C^\infty(M)$ é dita subharmônica se $\Delta f \geq 0$. Além disso, dizemos que M é parabólica se M^2 não é compacta e toda função subharmônica negativa é constante em M^2.*

Temos a seguinte proposição devida a A. Hüber.

Proposição 4.5 (A. Hüber) *Toda superfície Riemanniana completa não-compacta e com curvatura Gaussiana K não-negativa é parabólica.*

4.2 Teoremas para Hipersuperfícies Tipo-espaço com CMC

Nesta seção veremos os principais teoremas dessa dissertação.

Definição 4.6 *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço, onde N denota sua aplicação de Gauss. Chamamos de ângulo hiperbólico de ψ a aplicação diferenciável $\theta : \Sigma^n \to [0, +\infty)$ definida por*

$$\cosh\theta = -\langle N, \partial_t\rangle \geq 1. \tag{4.6}$$

Teorema 4.7 *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média constante $H \geq 1$. Se*

$$h \leq -\log(\cosh\theta - 1) \tag{4.7}$$

então:

(a) *$H = 1$ em Σ^n.*

(b) *A curvatura escalar S de Σ^n é não-negativa e existe uma sequência de pontos $\{p_k\}$ tal que $S(p_k) \to 0$ se $k \to \infty$.*

Prova. Seja $g : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ definida por $g = -e^h - \eta$, onde h é a função altura de Σ^n com respeito a ∂_t. Observemos que

$$\begin{aligned} g &= -e^h - e^h\langle N, \partial_t\rangle \\ &= e^h(-\langle N, \partial_t\rangle - 1) \\ &= e^h(\cosh\theta - 1). \end{aligned}$$

Temos $0 \leq g \leq 1$. De fato, como $\cosh\theta \geq 1$ e $e^h > 0$, então $g = e^h(\cosh\theta - 1) \geq 0$. Desde que

$$h \leq -\log(\cosh\theta - 1),$$

temos

$$e^h \leq \frac{1}{\cosh\theta - 1}.$$

Se $\cosh\theta = 1$, então $g = 0$. Se $\cosh\theta > 1$, então

$$g = e^h(\cosh\theta - 1) \leq 1.$$

Em qualquer caso $0 \leq g \leq 1$.

O próximo passo é calcularmos o laplaciano de g. Aplicando o Lema 2.10, item (b), obtemos $\Delta e^h = e^h(|\nabla h|^2 + \Delta h)$. Dessa forma

$$\begin{aligned} \Delta g &= \Delta(-e^h - \eta) = -\Delta e^h - \Delta\eta \\ &= -e^h(|\nabla h|^2 + \Delta h) - \Delta\eta \end{aligned}$$

Da Proposição 3.2, da Proposição 3.3 e do fato que a fibra Riemanniana de $\mathcal{H}^{n+1}$ é o $\mathbb{R}^n$, que é flat, temos

$$\begin{aligned} \Delta\eta &= \eta|A|^2 + nHe^h, \\ \Delta h &= -n - |\nabla h|^2 - \frac{nH\eta}{e^h}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\Delta g = ne^h + nH\eta - \eta|A|^2 - nHe^h.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \Delta g &= ne^h + nH\eta - \eta|A|^2 - nHe^h \\ &= -ne^h(H-1) + nH\eta - n^2\eta H^2 + n(n-1)\eta H_2 \\ &= [-ne^h(H-1) - nH\eta(H-1)] + [nH\eta(H-1) + nH\eta] - n^2\eta H^2 \\ &\quad + n(n-1)\eta H_2 \\ &= n(H-1)(-e^h - H\eta) + nH^2\eta - n^2\eta H^2 + n(n-1)\eta H_2 \\ &= n(H-1)(-e^h - H\eta) - n(n-1)\eta H^2 + n(n-1)\eta H_2 \\ &= n(H-1)(-e^h - H\eta) - n(n-1)\eta(H^2 - H_2) \end{aligned}$$

Da definição de η e da desigualdade de Cauchy-Schwarz em variedades de Lorentz (Lema 2.7), obtemos $-\eta \geq 1$. Assim $-e^h - H\eta \geq g$. Consequentemente,

$$\Delta g \geq n(H-1)g + n(n-1)(H^2 - H_2) \tag{4.8}$$

Suponhamos por contradição que $H > 1$. Do Lema 4.3 temos $H^2 - H_2 \geq 0$. Assim,

$$\Delta g \geq n(H-1)g.$$

Como $0 \leq g \leq 1$ então $0 \leq g^2 \leq g \leq 1$. Daí

$$\Delta g \geq n(H-1)g^2.$$

Do Lema 4.2 a curvatura de Ricci de Σ^n, denotada por Ric, satisfaz

$$Ric \geq (n-1) - \frac{n^2H^2}{4}$$

e aplicando a Proposição 4.1 temos $g \equiv 0$. Assim $\langle N, \partial_t \rangle = -1$ e obtemos $N = \partial_t$. Mostrando que Σ^n é um slice de $\mathcal{H}^{n+1}$. Mas, na Proposição 2.37 vimos que os slices de $\mathcal{H}^{n+1}$, quando orientados pelo campo ∂_t, possuem curvatura média igual a 1. Chegamos a uma contradição, pois assumimos que $H > 1$. Provando o item (a).

Provaremos agora o item (b). Como $H = 1$ em Σ^n, então $H^2 - H_2 = 1 - H_2 \geq 0$. Pelo Lema 4.2 item (b)

$$S = n(n-1)(1 - H_2) \geq 0.$$

Da equação (4.8), temos $\Delta g \geq S \geq 0$.

Suponha por contradição que não existe sequência $\{p_k\}$ em Σ^n tal que $S(p_k) \to 0$, quando $k \to \infty$. Então existe uma constante $\alpha > 0$ tal que $S \geq \alpha > 0$. Como $\Delta g \geq S$ e $0 \leq g \leq 1$, então $\Delta g \geq \alpha > \alpha g^2$. Segue do Lema 4.1 que $g \equiv 0$. Chegamos a uma contradição, pois Σ^n seria um slice de $\mathcal{H}^{n+1}$ com curvatura escalar $S > 0$, mas os slices de $\mathcal{H}^{n+1}$ são isométricos a $\mathbb{R}^n$ que possui curvatura escalar nula. Concluindo a prova do item (b). ■

A seguinte observação é uma justificativa para a escolha da hipótese $H \geq 1$.

Observação 4.1 *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço com curvatura média constante H e tal que $|H| \leq \varrho < \dfrac{2\sqrt{n-1}}{n}$, onde ϱ é constante. Então Σ^n é compacta. De fato,*

$$\begin{aligned}
|H| &\leq \varrho < \frac{2\sqrt{n-1}}{n} \Rightarrow \\
-H^2 &\geq -\varrho^2 > \frac{-2(n-1)}{n^2} \Rightarrow \\
-n^2H^2 &\geq -n^2\varrho^2 > -2(n-1) \Rightarrow \\
\frac{-n^2H^2}{4} &\geq \frac{-n^2\varrho^2}{4} > \frac{1-n}{2} \Rightarrow \\
(n-1) - \frac{n^2H^2}{4} &\geq (n-1) - \frac{n^2\varrho^2}{4} > (n-1) - \frac{1-n}{2} = \frac{3n-3}{2} > 0
\end{aligned}$$

Usando o Lema 4.2, parte (a) temos

$$Ric_\Sigma \geq (n-1) - \frac{n^2\varrho^2}{4} > 0.$$

Do teorema de Bonnet-Myers Σ^n é compacta. Se Σ^n é um gráfico tipo-espaço completo então Σ^n é difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$, via a projeção canônica de $\mathcal{H}^{n+1}$ sobre $\mathbb{R}^n$, logo não pode ser compacta. Então a hipótese $H \geq 1$ sobre a curvatura média é natural para gráficos tipo-espaço completos.

No caso bidimensional, obtemos do teorema anterior o seguinte

Corolário 4.8 *Seja $\psi : \Sigma^2 \to \mathcal{H}^3$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média constante $H \geq 1$. Se $h \leq -\log(\cosh\theta - 1)$, então Σ^2 é um slice de $\mathcal{H}^3$.*

Prova. Aplicando o teorema anterior, obtemos $H = 1$ em Σ^2. Da Proposição 4.2 obtemos que Σ^2 é totalmente umbílica, e aplicando a Proposição 4.3 concluímos que Σ^2 é um slice de $\mathcal{H}^3$. ■

Aplicando a Proposição 3.3 obtemos outro teorema tipo-Bernstein para superfícies tipo-espaço completas em $\mathcal{H}^3$.

Teorema 4.9 *Seja $\psi : \Sigma^2 \to \mathcal{H}^3$ uma imersão Riemanniana de uma superfície completa com curvatura Gaussiana K_Σ é não-negativa e curvatura média constante $H \geq 1$. Se*

$$|\nabla h|^2 \leq H^2 - 1 \tag{4.9}$$

então Σ^2 é um slice de $\mathcal{H}^3$.

Prova. Aplicando a Proposição 3.3 e o Lema 2.10, temos

$$\begin{aligned} \Delta e^{-h} &= e^{-h}(|\nabla h|^2 - \Delta h) \\ &= 2e^{-h}(|\nabla h|^2 + 1 + H\langle N, \partial_t\rangle). \end{aligned}$$

Além disso, $|\nabla h|^2 = \langle N, \partial_t\rangle^2 - 1$. De fato,

$$\begin{aligned} |\nabla h|^2 &= \langle \nabla h, \nabla h\rangle = \langle(-\partial_t - \langle N, \partial_t\rangle N), (-\partial_t - \langle N, \partial_t\rangle N)\rangle \\ &= \langle \partial_t, \partial_t\rangle + \langle N, \partial_t\rangle^2 + \langle N, \partial_t\rangle^2 + \langle N, \partial_t\rangle^2\langle N, N\rangle \\ &= \langle \partial_t, \partial_t\rangle + (2 - \langle N, N\rangle)\langle N, \partial_t\rangle^2 \\ &= \langle N, \partial_t\rangle^2 - 1. \end{aligned}$$

Agora, de (4.9) obtemos

$$\langle N, \partial_t\rangle^2 = |\nabla h|^2 + 1 \leq H^2.$$

Segue que

$$\begin{aligned} -\langle N, \partial_t\rangle &\leq H \Rightarrow \\ H + \langle N, \partial_t\rangle &\geq 0, \end{aligned}$$

e assim

$$
\begin{aligned}
|\nabla h|^2 + 1 + H\langle N, \partial_t\rangle &= \langle N, \partial_t\rangle^2 + H\langle Nn, \partial_t\rangle \\
&= \langle N, \partial_t\rangle\left(\langle N, \partial_t\rangle + H\right) \leq 0.
\end{aligned}
$$

Assim $\Delta e^{-h} \leq 0$. Logo e^{-h} é uma função superharmônica positiva em Σ^2. Segue da Proposição 4.5 (cf. [5]) que h é constante. Portanto, Σ^2 é um slice. ■

Proposição 4.10 *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa. Se Σ^n está abaixo de um slice então ela é difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$. Em particular não existe hipersuperfície tipo-espaço completa compacta (sem-bordo) em $\mathcal{H}^{n+1}$.*

Prova. Para mostrar que Σ^n é difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$ exibiremos um difeomorfismo entre Σ^n e

$$L_1 = \{x \in \mathcal{H}^{n+1}; \langle x, a\rangle = 1\}.$$

Como L_1 é difeomorfa à $\mathbb{R}^n$, então Σ^n será difeomorfa a $\mathbb{R}^n$ via composição de difeomorfismos. Com efeito, seja $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa. Defina $\Pi : \Sigma^n \to L_1$ por

$$\Pi = \frac{1}{\langle \psi, a\rangle}\psi + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\langle \psi, a\rangle^2})a.$$

Mostremos que Π é um difeomorfismo. Comecemos calculando sua diferencial. Sejam $p \in \Sigma^n$, $v \in T_p\Sigma$ e $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \Sigma^n$, $\epsilon > 0$ uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
d\Pi_p(v) &= \left.\frac{d\Pi(\alpha(t))}{dt}\right|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\langle \psi(\alpha(t)), a\rangle}\psi(\alpha(t))\right)\Bigg|_{t=0} \\
&- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\langle \psi(\alpha(t)), a\rangle^2}\right)\Bigg|_{t=0} a \\
&= \left.\frac{-\frac{d}{dt}(\langle \psi(\alpha(t)), a\rangle)}{\langle \psi(\alpha(t)), a\rangle^2}\right|_{t=0} \psi(\alpha(t))|_{t=0} + \left.\frac{1}{\langle \psi(\alpha(t)), a\rangle}\right|_{t=0} \left.\frac{d}{dt}(\psi(\alpha(t)))\right|_{t=0} \\
&+ \frac{1}{2}\left.\frac{\frac{d}{dt}(\langle \psi(\alpha(t)), a\rangle^2)}{\langle \psi(\alpha(t)), a\rangle^4}\right|_{t=0} a \\
&= -\frac{\langle d\psi_p(v), a\rangle}{\langle \psi(p), a\rangle^2}\psi(p) + \frac{1}{\langle \psi(p), a\rangle}d\psi_p(v) + \frac{\langle d\psi_p(v), a\rangle}{\langle \psi(p), a\rangle^3}a.
\end{aligned}
$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\langle d\Pi_p(v), d\Pi_p(v)\rangle_\circ &= \frac{\langle d\psi_p(v), a\rangle^2\langle\psi(p),\psi(p)\rangle}{\langle\psi(p),a\rangle^4} - \frac{\langle d\psi_p(v), a\rangle\langle d\psi_p(v),\psi(p)\rangle}{\langle\psi(p),a\rangle^3}\\
&-\frac{\langle d\psi_p(v), a\rangle^2}{\langle\psi(p),a\rangle^4} - \frac{\langle d\psi_p(v), a\rangle\langle d\psi_p(v),\psi(p)\rangle}{\langle\psi(p),a\rangle^3}\\
&+\frac{\langle d\psi_p(v), d\psi_p(v)\rangle}{\langle\psi(p),a\rangle^2} + \frac{\langle d\psi_p(v), a\rangle^2}{\langle\psi(p),a\rangle^4}\\
&-\frac{\langle d\psi_p(v), a\rangle^2}{\langle\psi(p),a\rangle^4} + \frac{\langle d\psi_p(v), a\rangle^2}{\langle\psi(p),a\rangle^4} + \frac{\langle d\psi_p(v), a\rangle^2\langle a,a\rangle}{\langle\psi(p),a\rangle^6}\\
&= \frac{\langle d\psi_p(v), a\rangle^2\langle\psi(p),\psi(p)\rangle}{\langle\psi(p),a\rangle^4} - \frac{\langle d\psi_p(v), a\rangle\langle d\psi_p(v),\psi(p)\rangle}{\langle\psi(p),a\rangle^3}\\
&-\frac{\langle d\psi_p(v), a\rangle\langle d\psi_p(v),\psi(p)\rangle}{\langle\psi(p),a\rangle^3} + \frac{\langle d\psi_p(v), d\psi_p(v)\rangle}{\langle\psi(p),a\rangle^2}\\
&+\frac{\langle d\psi_p(v), a\rangle^2\langle a,a\rangle}{\langle\psi(p),a\rangle^6}.
\end{aligned}$$

Agora, desde que $\langle\psi(p),\psi(p)\rangle = 1$, pois $\psi(p)\in\mathcal{H}^{n+1}$, temos $\langle d\psi_p(v),\psi(p)\rangle = 0$, e usando que a é tipo-luz segue que

$$\langle d\Pi_p(v), d\Pi_p(v)\rangle_\circ = \frac{\langle d\psi_p(v), a\rangle^2}{\langle\psi(p),a\rangle^4} + \frac{\langle d\psi_p(v), d\psi_p(v)\rangle}{\langle\psi(p),a\rangle^2}.$$

Portanto,

$$\langle d\Pi_p(v), d\Pi_p(v)\rangle_\circ \geq \frac{1}{\langle\psi(p),a\rangle^2}\langle d\psi_p(v), d\psi_p(v)\rangle, p\in\Sigma^n, v\in T_p\Sigma^n. \tag{4.10}$$

Em outros termos

$$\Pi^*\left(\langle,\rangle_\circ\right) \geq \frac{1}{\langle\psi(p),a\rangle^2}\langle,\rangle,$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle_\circ$ denota a métrica Euclidiana flat em L_1 e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota a métrica Riemanniana Σ^n. Desde que Σ^n está abaixo de um slice de $\mathcal{H}^{n+1}$, existe $\tau > 0$ tal que $0 < \langle\psi, a\rangle \leq \tau$. Então

$$\Pi^*(\langle,\rangle_\circ) \geq \frac{1}{\tau^2}\langle,\rangle.$$

Vamos mostrar que $d\Pi_p : T_p\Sigma \to T_{\Pi(p)}L_1$ é um isomorfismo linear. De fato, desde que as dimensões de $T_p\Sigma$ e $T_{\Pi(p)}L_1$ são iguais, é suficiente mostrar que $d\Pi_p$ é injetora. Com efeito, suponha por contradição que existe $\widetilde{v}\in\ker\{d\Pi_p\}\backslash\{0\}$, isto é, $d\Pi_p(\widetilde{v}) = 0$ com $\widetilde{v}\neq 0$. Assim,

$$0 = \langle d\Pi_p(\widetilde{v}), d\Pi_p(\widetilde{v})\rangle_\circ \geq \frac{1}{\langle\psi(p),a\rangle^2}\langle d\psi_p(\widetilde{v}), d\psi_p(\widetilde{v})\rangle \geq 0. \tag{4.11}$$

Assim $d\psi_p(\widetilde{v}) = 0$. Como ψ é uma imersão $d\psi_p$ é injetora, para todo $p \in \Sigma^n$, então $\widetilde{v}$=0. Absurdo. Portanto $d\Pi_p$ é injetora, para todo $p \in \Sigma^n$. Usando o teorema 2.10 de [11], concluímos Π é um difeomorfismo local.

Por outro lado, definindo $\widetilde{\langle \cdot, \cdot \rangle} = \dfrac{1}{\tau^2 \langle \cdot, \cdot \rangle}$ temos que $\Upsilon : (L_1, \langle \cdot, \cdot \rangle) \to (L_1, \widetilde{\langle \cdot, \cdot \rangle})$ é uma homotetia. O Lema 64, página 92, de [9], afirma que homotetias preservam conexão de Levi-Civitta, logo preservam símbolos de Christoffel e consequentemente a equação fundamental das geodésicas. Portanto, homotetias preservam a propriedade de uma variedade ser completa. Desde que $(L_1, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é completa então $(L_1, \widetilde{\langle \cdot, \cdot \rangle})$ é completa. Resumindo estas últimas passagens, temos que Σ^n é uma variedade Riemanniana completa e $\Pi : (\Sigma^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) \to (L_1, \widetilde{\langle \cdot, \cdot \rangle})$ é um difeomorfismo local tal que $\langle d\Pi_p(v), d\Pi_p(v) \rangle \geq \widetilde{\langle v, v \rangle}$, para todo $p \in \Sigma^n$ e todo $v \in T_p\Sigma$. Segue do Lema 3.3 de [10] que Π é uma aplicação de recobrimento.

Finalmente, desde que L_1 é simplesmente conexo, do Corolário da Proposição 5 de [11], temos que Π é um homeomorfismo, em particular Π é injetora. Como todo difeomorfismo local injetivo é um difeomorfismo global concluímos a demonstração. ■

A partir de agora, usaremos a seguinte ferramenta analítica devida a Omori e Yau. Sua demonstração foje aos objetivos desse trabalho, porém ela pode ser encontrada com detalhes em [13].

Lema 4.4 (Omori-Yau) *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa cuja curvatura de Ricci é limitada inferiormente. Se $u \in C^\infty(M)$ então existe uma sequência de pontos $\{p_k\} \in M^n$ tal que*

$$\lim_{k \to \infty} u(p_k) = \sup_M u,\ |\nabla u(p_k)| < 1/k \ e\ \triangle u(p_k) < 1/k.$$

Sejam $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa e a $h : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ função altura de Σ^n com relação ao campo de vetores unitários ∂_t, ou seja, $h(p) = \langle \psi(p), \partial_t \rangle, p \in \Sigma^n$. Da Proposição 3.3 temos

$$\begin{aligned} \nabla h &= -\partial_t - \langle N, \partial_t \rangle N, \\ \Delta h &= -n - |\Delta h^2| - nH \langle N, \partial_t \rangle. \end{aligned}$$

Além disso, $|\nabla h|^2 = \langle N, \partial_t \rangle^2 - 1$.

Teorema 4.11 *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média constante H. Se Σ^n está entre dois slices então $H = 1$. Além disso, no caso bidimensional Σ^2 é um slice de $\mathcal{H}^3$.*

Prova. Pelo Lema 4.2 a curvatura de Ricci em $\mathcal{H}^{n+1}$ é limitada inferiormente. Como Σ^n está entre dois slices a função altura h é limitada superior e inferiormente. Usaremos o Lema 4.4 duas vezes, primeiramente para a função h e depois para $-h$. Mostraremos, no primeiro caso, que $H \leq 1$ e, no segundo, que $H \geq 1$. Com efeito, aplicando o Lema 4.4 para a função h encontramos uma sequência $\{p_k\} \subset \Sigma^n$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} h(p_k) = \sup_{\Sigma} h < +\infty, \tag{4.12}$$

$$|\nabla h(p_k)|^2 = \langle N(p_k), \partial_t\rangle^2 - 1 < \frac{1}{k^2} \tag{4.13}$$

e

$$\Delta h(p_k) = -n - |\nabla h(p_k)|^2 - nH\langle N(p_k), \partial_t\rangle < \frac{1}{k}.$$

Segue de (4.13) que $\lim\limits_{k\to\infty} |\nabla h(p_k)|^2 = 0$. Aplicando o limite de $k \to \infty$ na última equação acima, obtemos

$$-n - nH \lim_{k\to\infty} \langle N(p_k), \partial_t\rangle \leq 0 \tag{4.14}$$

Ainda de (4.13) temos $\lim\limits_{k\to\infty} \langle N(p_k), \partial_t\rangle^2 = 1$ e da continuidade da função $f(x) = \sqrt{x}, x > 0$, obtemos $\lim\limits_{k\to\infty} \langle N(p_k), \partial_t\rangle = -1$. Usando isto em (4.14), concluímos que $H \leq 1$.
Por outro lado, como h é limitada inferiormente $-h$ é limitada superiormente. Aplicando o Lema 4.4 para $-h$ exibimos uma sequência $\{q_k\}$ em Σ^n tal que

$$\lim_{k\to\infty} (-h(q_k)) = \sup_{\Sigma}(-h) = -\inf_{\Sigma}(h), \tag{4.15}$$

$$|\nabla h(q_k)|^2 = \langle N(q_k), \partial_t\rangle^2 - 1 < \frac{1}{k^2} \tag{4.16}$$

e

$$\Delta(-h)(q_k) \;\; = \;\; -\Delta h(q_k) = n + |\nabla h|^2 + nH\langle N(q_k), \partial_t\rangle < \frac{1}{k}.$$

Com um raciocínio análogo ao anterior obtemos $H \geq 1$. Portanto $H = 1$.

Além disso, no caso bidimensional, segue da Proposição 4.2 que Σ^2 é totalmente umbílica e, da Proposição 4.3 concluímos que Σ^2 é um slice de $\mathcal{H}^3$. ∎

Teorema 4.12 *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média constante H. Se Σ^n está abaixo de um slice de $\mathcal{H}^{n+1}$ e o vetor curvatura média $\overrightarrow{H} = HN$ está no mesmo cone tipo-tempo que contém N, então $\dfrac{2\sqrt{n-1}}{n} \leq H \leq 1$. Além disso, no caso bidimensional Σ^2 é um slice de $\mathcal{H}^3$.*

Prova. Como a função h é limitada apenas por cima repetindo a primeira parte da prova do teorema anterior obtemos $H \leq 1$. A inequação

$$n - 1 - \frac{n^2H^2}{4} > 0 \tag{4.17}$$

é equivalente à

$$H^2 < \frac{4(n-1)}{n^2}.$$

Suponha por contradição que a inequação (4.17) é verdadeira. Do Lema 4.2 a curvatura de Ricci é limitada inferiormente por uma constante positiva e pelo Teorema de Bonnet-Mayers Σ^n é compacta. Mas isto contradiz o Lema 4.10. Mostrando que não vale a equação (4.17) e, como H é constante, então $H^2 \geq \dfrac{4(n-1)}{n^2}$. Da hipótese sobre o vetor curvatura média $\overrightarrow{H}$ temos $\langle \overrightarrow{H}, N \rangle < 0$. Portanto $\dfrac{2\sqrt{n-1}}{n} \leq H \leq 1$.

Além disso, no caso bidimensional temos $\frac{2\sqrt{2-1}}{2} \leq H \leq 1$. Portanto $H = 1$. E, analogamente ao teorema anterior, usando as Proposições 4.2 e 4.3 concluímos que Σ^2 é um slice de $\mathcal{H}^3$. ■

Teorema 4.13 *Seja M^n uma variedade Riemanniana (necessariamente completa) com curvatura seccional não-negativa e seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1} = -\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ uma hipersuperfície com curvatura média constante H. Se Σ^n está entre dois slices então $H = 1$. Além disso, no caso bidimensional, Σ^2 é necessariamente um slice $\{t\} \times M^2$.*

Prova. A equação de Gauss de Σ^n é dada por

$$\langle R(X,Y)X, Y\rangle = \langle \overline{R}(X,Y)X, Y\rangle - \langle AX, X\rangle\langle AY, Y\rangle + \langle AX, Y\rangle^2, \tag{4.18}$$

para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, onde R e $\overline{R}$ são os tensores curvatura de Σ^n e $\overline{M}$, respectivamente. Denotaremos por Ric a curvatura de Ricci de Σ^n. Aplicando o traço na equação (4.18) para um referencial ortonormal $\{E_i\}$ em $\mathfrak{X}(\Sigma)$ e $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ com $|X| = 1$

temos

$$\begin{aligned} Ric(X,X) &= \sum_{i=1}^{n}\langle R(X,E_i)X,E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle - \langle AX,X\rangle \sum_{i=1}^{n}\langle AE_i,E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle AX,E_i\rangle^2 \end{aligned}$$

Desde que $\sum_{i=1}^{n}\langle AE_i,E_i\rangle = -nH$ e $\sum_{i=1}^{n}\langle AX,E_i\rangle^2 = |AX|^2$ temos

$$Ric(X,X) = \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle + nH\langle AX,X\rangle + |AX|^2.$$

Da equação (4.5) temos

$$\begin{aligned} Ric(X,X) &= \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle + |AX + \frac{nH}{2}X|^2 - \frac{n^2H^2}{4} \\ &\geq \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle - \frac{n^2H^2}{4}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

O nosso objetivo agora é relacionar o termo $\langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle$ com o tensor curvatura R_M de M, usando o item 4 da Proposição 7.42 de [8]. Com efeito, se $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ então $X = X^* - \langle X,\partial_t\rangle\partial_t$, onde $X^* = (\pi_M)_*X$. Assim,

$$\overline{R}(X,E_i)X = \overline{R}(X^* - \langle X,\partial_t\rangle\partial_t, E_i^* - \langle E_i,\partial_t\rangle\partial_t)(X^* - \langle X,\partial_t\rangle\partial_t)$$

Da multilinearidade do tensor curvatura $\overline{R}$

$$\begin{aligned} \overline{R}(X,E_i)X = {} & \overline{R}(X^*,E_i^*)X^* - \langle X,\partial_t\rangle\overline{R}(X^*,E_i^*)\partial_t - \langle E_i,\partial_t\rangle\overline{R}(X^*,\partial_t)X^* \\ & +\langle E_i,\partial_t\rangle\langle X,\partial_t\rangle\overline{R}(X^*,\partial_t)\partial_t - \langle X,\partial_t\rangle\overline{R}(\partial_t,E_i^*)X^* \\ & +\langle X,\partial_t\rangle^2\overline{R}(\partial_t,E_i^*)\partial_t + \langle X,\partial_t\rangle\langle E_i,\partial_t\rangle\overline{R}(\partial_t,\partial_t)X^* \\ & -\langle X,\partial_t\rangle^2\overline{R}(\partial_t,\partial_t)\partial_t. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Segue da antisimetria nas duas primeiras entradas do tensor curvatura e da primeira identidade de Bianchi que $\overline{R}(X,X)Y = 0$, para quaisquer $X,Y \in \mathfrak{X}\left(\overline{M}\right)$. Em particular $\overline{R}(\partial_t,\partial_t)\partial_t = 0$ e $\overline{R}(\partial_t,\partial_t)X^* = 0$. Além disso, segue da Proposição 7.2 de [8], que

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X^*, E_i^*)X^* &= R_M(X^*, E_i^*)X^* + \langle X^*, X^*\rangle E_i^* - \langle X^*, E_i^*\rangle X^*,\\
\overline{R}(X^*, E_i^*)\partial_t &= 0,\\
\overline{R}(X^*, \partial_t)X^* &= -\overline{R}(\partial_t, X^*)X^* = \langle X^*, X^*\rangle \partial_t,\\
\overline{R}(X^*, \partial_t)\partial_t &= X^*,\\
\overline{R}(\partial_t, E_i^*)X^* &= -\langle X^*, E_i^*\rangle \partial_t,\\
\overline{R}(\partial_t, E_i^*)\partial_t &= -\overline{R}(E_i^*, \partial_t)\partial_t = -E_i^*.
\end{aligned}$$

Substituindo estas expressões em (4.20), temos

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X, E_i)X &= R_M(X^*, E_i^*)X^* + \langle X^*, X^*\rangle E_i^* - \langle X^*, E_i^*\rangle X^* - \langle E_i, \partial_t\rangle\langle X^*, X^*\rangle \partial_t\\
&\quad +\langle E_i, \partial_t\rangle\langle X, \partial_t\rangle X^* + \langle X, \partial_t\rangle\langle X^*, E_i^*\rangle\partial_t - \langle X, \partial_t\rangle^2 E_i^*.
\end{aligned}$$

Fazendo o produto interno de $\overline{R}(X, E_i)X$ com $E_i = E_i^* - \langle E_i, \partial_t\rangle\partial_t$, temos

$$\langle\overline{R}(X, E_i)X, E_i\rangle = \langle\overline{R}(X, E_i)X, E_i^*\rangle - \langle E_i, \partial_t\rangle\langle\overline{R}(X, E_i)X, \partial_t\rangle$$

Daí

$$\begin{aligned}
\langle\overline{R}(X, E_i)X, E_i\rangle &= \langle R_M(X^*, E_i^*)X^*, E_i^*\rangle + \langle X^*, X^*\rangle\langle E_i^*, E_i^*\rangle - \langle X^*, E_i^*\rangle^2\\
&\quad +\langle E_i, \partial_t\rangle\langle X, \partial_t\rangle\langle X^*, E_i^*\rangle - \langle X, \partial_t\rangle^2\langle E_i^*, E_i^*\rangle\\
&\quad -\langle E_i, \partial_t\rangle^2\langle X^*, X^*\rangle + \langle E_i, \partial_t\rangle\langle X, \partial_t\rangle\langle X^*, E_i^*\rangle\\
&= \langle R_M(X^*, E_i^*)X^*, E_i^*\rangle + (\langle X^*, X^*\rangle - \langle X, \partial_t\rangle^2)\langle E_i^*, E_i^*\rangle\\
&\quad +(-\langle X^*, E_i^*\rangle^2 + 2\langle E_i, \partial_t\rangle\langle X, \partial_t\rangle\langle X^*, E_i^*\rangle) - \langle E_i, \partial_t\rangle^2\langle X^*, X^*\rangle.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Como $|X|^2 = |E_i|^2 = 1$ então

$$\begin{aligned}
\langle E_i^*, E_i^*\rangle - \langle E_i, \partial_t\rangle &= 1\\
\langle X^*, X^*\rangle - \langle X, \partial_t\rangle &= 1.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
-\langle X, E_i\rangle^2 &= -\langle X^* - \langle X, \partial_t\rangle, E_i^* - \langle E_i, \partial_t\rangle\rangle^2\\
&= -(\langle X^*, E_i^*\rangle - \langle X, \partial_t\rangle\langle E_i, \partial_t\rangle)^2\\
&= -\langle X^*, E_i^*\rangle^2 + 2\langle X, \partial_t\rangle\langle E_i, \partial_t\rangle\langle X^*, E_i^*\rangle - \langle X, \partial_t\rangle^2\langle E_i, \partial_t\rangle^2,
\end{aligned}$$

de forma que

$$-\langle X^*, E_i^*\rangle^2 + 2\langle X, \partial_t\rangle\langle E_i, \partial_t\rangle\langle X^*, E_i^*\rangle \;=\; \langle X, \partial_t\rangle^2\langle E_i, \partial_t\rangle^2 - \langle X, E_i\rangle^2.$$

Substituindo estas últimas expressões em (4.21) temos

$$\begin{aligned}
\langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i\rangle &= \langle R_M(X^*, E_i^*)X^*, E_i^*\rangle + \langle E_i^*, E_i^*\rangle \\
&\quad + \langle X, \partial_t\rangle^2\langle E_i, \partial_t\rangle^2 - \langle X, E_i\rangle^2 - \langle E_i, \partial_t\rangle^2\langle X^*, X^*\rangle \\
&= \langle R_M(X^*, E_i^*)X^*, E_i^*\rangle + \langle E_i^*, E_i^*\rangle \\
&\quad - (\langle X^*, X^*\rangle - \langle X, \partial_t\rangle^2))\langle E_i, \partial_t\rangle^2 - \langle X, E_i\rangle^2 \\
&= \langle R_M(X^*, E_i^*)X^*, E_i^*\rangle + (\langle E_i^*, E_i^*\rangle - \langle E_i, \partial_t\rangle^2) - \langle X, E_i\rangle^2 \\
&= \langle R_M(X^*, E_i^*)X^*, E_i^*\rangle + 1 - \langle X, E_i\rangle^2.
\end{aligned}$$

Da definição do tensor métrico de $\overline{M}$ temos

$$\begin{aligned}
\langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i\rangle &= e^{2h}\langle R_M(X^*, E_i^*)X^*, E_i^*\rangle_M + \langle E_i, E_i\rangle - \langle X, E_i\rangle\langle X, E_i\rangle \\
&= e^{2h}\langle R_M(X^*, E_i^*)X^*, E_i^*\rangle_M + 1 - \langle X, E_i\rangle^2,
\end{aligned}$$

para todo $1 \le i \le n$, onde $X^* = (\pi_M)_*X$ para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, ou seja, $X^* = X - \langle X, \partial_t\rangle\partial_t$.

Denotando por $K_M(X^* \wedge E_i^*)$ a curvatura seccional em M no plano gerado por X^* e E_i^*, temos

$$\langle R_M(X^*, E_i^*)X^*, E_i^*\rangle = K_M(X^* \wedge E_i^*)||X^* \wedge E_i^*||_M^2, \tag{4.22}$$

onde

$$||X^* \wedge E_i^*||_M^2 = \langle X^*, X^*\rangle_M\langle E_i^*, E_i^*\rangle_M - \langle X^*, E_i^*\rangle_M^2.$$

Substituindo a equação (4.22) na equação (4.22) segue

$$\langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i\rangle \;=\; K_M(X^* \wedge E_i^*)||X^* \wedge E_i^*||_M^2 + 1 - \langle X, E_i\rangle^2.$$

Usando isto em (4.19) obtemos

$$\begin{aligned}
Ric(X, X) &\ge \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i\rangle - \frac{n^2H^2}{4} \\
&= e^{2h}\sum_{i=1}^{n} K_M(X^* \wedge E_i^*)||X^* \wedge E_i^*||_M^2 + n - \sum_{i=1}^{n}\langle X, E_i\rangle^2 - \frac{n^2H^2}{4} \\
&= e^{2h}\sum_{i=1}^{n} K_M(X^* \wedge E_i^*)||X^* \wedge E_i^*||_M^2 + n - 1 - \frac{n^2H^2}{4}. \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

Como a curvatura seccional K_M de M é positiva segue que

$$Ric(X,X) \geq n-1-\frac{n^2H^2}{4}. \qquad (4.24)$$

Como Σ^n está entre dois slices de $\overline{M}^{n+1}$ aplicando o Lema 4.4 para as funções h e $-h$ e repetindo os passos da demonstração do Teorema 4.11 concluímos que $H = 1$. Considerando $n = 2$, a curvatura de Ricci de Σ^n, Ric_Σ, coincide com a curvatura Gaussiana K_Σ de Σ^n. Segue de 4.24 que $K_\Sigma \geq 0$ e, assim da Proposição 4.5 Σ^n é parabólica. Além disso, desde que

$$\begin{aligned}\Delta h &= -2-|\nabla h|^2-2\langle N,\partial_t\rangle \\ &= -2-(\langle N,\partial_t\rangle^2-1)-2\langle N,\partial_t\rangle \\ &= -(\langle N,\partial_t\rangle^2+2\langle N,\partial_t\rangle+1) \\ &= -(\langle N,\partial_t\rangle+1)^2 \leq 0.\end{aligned}$$

Segue da Proposição 4.5 que h é constante, mostrando que Σ^2 é um slice de $\overline{M}^{n+1}$.

$\blacksquare$

Bibliografia

[1] A. Caminha e H.F. de Lima, *Complete Vertical Graphs with Constant in Semi-Riemannian Warped Produts*, Bull.Belg. Math. Simon Stevin 16(2009), 91-105.

[2] A. L. Albujer e L. J. Alías, *Spacelike Hypersurfaces with constant mean curvature in the steady state space*, Proceedings of the American Mathematical Society, 137 (2009), 711-721 .

[3] L. J. Alías e M. Dajczer, *Uniqueness of constant mean curvature surfaces properly immersed in a slab*, Comment. Math. Helv. 81, (2006) 653-663.

[4] H.F. de Lima, *Spacelike Hypersurfaces with constant higher order mean curvature in the Sitter space*, Journal of Geometry and Physics 57,(2007) 967-975.

[5] A. Huber, *On subharmonic function and differential geometry in the large*, Coment. Math. Helv. 32,(1957) 13-72.

[6] S. Montiel, *Uniqueness of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in foliated spacetimes*, Math. Ann. 314, (1999), 529-553.

[7] K. Akutagawa, *On spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de de Sitter*, Math. Z., 196, (1987) 13-19.

[8] A. Sanches, *Hipersuperficies espaciales completas de curvatura media constante en el espacio de de Sitter*, Universidad de Murcia, Departamento de Matemáticas, (1998).

[9] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, (1983).

[10] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, IMPA, Rio de Janeiro, (2008).

[11] M. P. do Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, SBM, Rio de Janeiro, (2005).

[12] P.A. Souza, *The Laplacian of a Support-Type Function and Applications* (in portuguese), Master's Dissertation, Universidade federal do Ceará, Brasil, 2004.

[13] K.B. Silva, *Um Teorema de Rigidez para Hipersuperfícies Completas CMC em Variedades de Lorentz* (in portuguese), Master's Dissertation, Universidade federal do Ceará, Brasil, 2009.