Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sobre a Rigidez de Hipersuperfícies tipo-espaço imersa no steady state space

por

Carlos Antonio Pereira da Silva †

sob orientação do

Prof. Dr. Joseilson Raimundo de Lima

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

Sobre a Rigidez de Hipersuperfícies tipo-espaço imersa no steady state space

por

Carlos Antonio Pereira da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Aprovada por:

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva - UFC

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima - UFCG

Prof. Dr. Joseilson Raimundo de Lima - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Agosto/2014

Resumo

Neste trabalho, como uma aplicação adequada do bem conhecido Princípio do Máximo Generalizado de Omori-Yau, obtemos resultados relativos a rigidez para hipersuperfícies tipo-espaço completas imersas na metade $\mathcal{H}^{n+1}$ do espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$, que é chamado de *steady state space*. Por outro lado, usando uma isometria equivalente para o modelo $\mathcal{H}^{n+1}$, estenderemos nossos resultados a uma família maior de espaços-tempos. Por fim, estudaremos também a singularidade de gráficos verticais inteiros nesses espaços-tempos ambiente.

Palavras-chave: Variedades de Lorentz, Steady State space, hipersuperfícies tipo-espaço, Gráficos verticais inteiros.

Abstract

In this work, as a suitable application of the well known generalized Maximum Principle of Omori-Yau, we obtain rigidity results concerning to complete spacelike hypersurfaces immersed in the half $\mathcal{H}^{n+1}$ of the de Sitter space $\mathbb{S}_1^{n+1}$, which models the so-called steady state space. Moreover, by using an isometrically equivalent model for $\mathcal{H}^{n+1}$, we extend our results to a wider family of spacetimes. Finally, we also study the uniqueness of entire vertical graphs in such ambient spacetimes.

Keywords: Lorentz Manifolds, Steady State space, spacelike hypersurfaces, entire vertical graphs.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus e ao Senhor Jesus Cristo por estar sempre comigo. Agradeço aos meus pais e meu irmão por estarem sempre me apoiando. Ao meu orientador, o professor Jeseilson, pela paciência e toda contribuição no desenvolvimento e conclusão deste trbalho. Agradeço também a todos os professores do departamento, em particular, aqueles que tive a honra de aprender um pouco mais. Agradeço a todos os meus colegas de mestrado, em especial aqueles que estudamos juntos. Agradeço também a todos o funcionários do departamento. A CAPES pelo incentivo financeiro. Agradeço também, ao professor Dr. Jonatan Floriano da Silva por ter aceitado participar da minha banca examinadora. Enfim, agradeço a todos que contribuíram de forma direta ou indireta nesta conquista.

Dedicatória

Aos meus pais, Severino e Maria de Lourdes...

Conteúdo

Introdução

Nos últimos anos, o estudo de hipersuperfícies tipo-espaço no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$ tem sido de interesse substancial, tanto nos aspectos físicos quanto matemáticos. De um ponto de vista físico, o interesse é motivado pelo seu papel no estudo de diferentes problemas em relatividade geral (veja também [12],[5] e [25]). De um ponto de vista matemático, as hipersuperfícies tipo-espaço também desempenham um interessante papel devido suas boas propriedades tipo-Bernstein. Por exemplo, veja R. Aiyama em [24] e Y. L. Xin em [31], simultânea e independentemente, caracterizaram os hiperplanos tipo-espaço como sendo as únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas com curvatura média constante no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+2}$ cuja a imagem pela aplicação normal de Gauss está contida em uma bola geodésica do espaço hiperbólico n-dimensional $\mathbb{H}^n$ (veja também B. Palmer,[10], para uma primeira versão mais fraca deste resultado). Em J. A. Aledo e L. J. Alías, [16], entre outros resultados interessantes, caracterizaram os hiperplanos tipo-espaço em $\mathbb{L}^{n+1}$ como as únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas com curvatura média constante, que são delimitadas entre dois hiperplanos tipo-espaço paralelos.

Tal como para o caso do espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$, Goddard,[5], conjecturou que,

Conjectura (Goddard – 1977). *As únicas hipersuperfícies tipo-espaço, completas e com curvatura média constante do espaço de De Sitter são as totalmente umbílicas.*

Em 1988, Montiel [25] justificou que a conjectura de Goddard era falsa, por provar a existência de alguns cilindros hiperbólicos que são o produto de um espaço hiperbólico com uma esfera. *Eles são hipersuperfícies tipo-espaço, completas e com curvatura média constante do espaço de De Sitter que não são totalmente umbílicas.* Como veremos abaixo.

Exemplo 1. *Considere a hipersuperfície tipo-espaço contida no espaço de De Sitter*

$\mathbb{S}_1^{n+1}$ *dada por*

$$M = \{x \in \mathbb{S}_1^{n+1} / - x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_k^2 = -\sinh^2 r\},$$

onde r *é um número real positivo e* $1 \leq k \leq n$. M^n *é isométrica ao produto Riemanniano* $\mathbb{H}^k(1-\coth^2 r) \times \mathbb{S}^{n-k}(1-\tanh^2 r)$ *do espaço hiperbólico k-dimencional e uma esfera (n-k)-dimensional de curvaturas seccional constante* $1-\coth^2 r$ *e* $1-\tanh^2 r$, *respectivamente. Além disso, a aplicação*

$$N(p) = \frac{1}{\sinh r \cosh r}(p_o, \ldots, p_k, 0, \ldots, 0) + \tanh rp$$

para $p \in M^n$ *fornece um campo de vetores normal unitário em* M^n. *Assim, pela fómula de Gauss e Weingarten o operador* A *determina um endomorfismo associado a* N *e verifica-se que* A *tem dois autovalores distintos, isto é,* $\coth r$ *e* $\tanh r$ *com mutiplicidades* k *e* $n-k$, *respectivamente. Então,* M^n *tem curvatura média constante*

$$H = \frac{1}{n}[k \coth r + (n-k)\tanh r]$$

e consequentemente, M^n *não é umbílica. Além disso, pode ser verificado que*

$$H^2 = (\frac{1}{n^2}[\coth r + (n-1)\tanh r])^2 \geq \frac{4(n-1)}{n^2}.$$

A igualdade é atingida quando $k=1$ *e* $\coth^2 r = n-1$ *o que obriga* $n>2$. *Além disso, se* $k=1$ *e* $n>2$, *então* H^2 *leva todos os possíveis valores na faixa* $[\frac{4(n-1)}{n^2}, \infty\ )$.

No entanto, a intuição de Goddard não estava errada. Mais de uma década após a conjectura, usando uma fórmula integral semelhante a chamada fórmula de Minkowski em geometria Riemanniana, Montiel [27] mostrou que

Teorema (Montiel – 1988). *As únicas hipersuperfícies tipo-espaço compactas, completas do espaço de De Sitter com curvatura média constante são as totalmente umbílicas.*

Embora sendo falsa, em sua forma original, a conjectura de Goddard motivou uma grande quantidade de trabalhos de vários autores que tentam responder positivamente à conjectura sob hipóteses adicionais apropriadas.

Em 1987, Akutagawa [20] mostrou que a conjectura é verdadeira quando

$$\begin{cases} 0 \leq H^2 \leq 1 \quad \text{no caso} \quad n = 2; \\ 0 \leq H^2 < \dfrac{4(n-1)}{n^2} \quad \text{no caso} \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Além disso, J. A. Aledo e L. J. Alías,[17], mostraram que uma hipersuperfície tipo-espaço completa em $\mathbb{S}_1^{n+1}$ tal que a sua imagem pela aplicação de Gauss está contida em uma geodésica do espaço hiperbólico é necessariamente compacta. Como uma aplicação do seu resultado, eles também concluiram que a conjectura de Goddard é verdade sob o pressuposto de que a imagem hiperbólica da hipersuperfície é limitada.

Neste trabalho, nos dedicamos as hipersuperfícies tipo-espaço completas com curvatura média limitada imersa no $\mathcal{H}^{n+1}$, metade do espaço de De Sitter, chamado *steady state space*(cf. capítulo 2). Uma importância de considerar o $\mathcal{H}^{n+1}$ vem do fato que, em Cosmologia, $\mathcal{H}^4$ é o modelo estado estacionário do universo proposto por H. Bondi e T. Gold, [13], e F. Hoyle,[11], quando se olha para um modelo do universo que tem a mesma aparência, não só em todos os pontos e em todas as direções (ou seja, espacialmente isotrópico e homogêneo), mas também em todos os tempos (cf. [30], seção 14.8, e [11], seção 5.2).

Relacionadas ao nosso trabalho, A. L. Albujer e L.J. Alías,[6], provaram que se uma hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média constante é limitada no infinito do steady state space $\mathcal{H}^{n+1}$, então a sua curvatura média deve ser identicamente igual a 1. Como conseqüência deste resultado, concluíram que toda superfície tipo-espaço completa com curvatura média constante em $\mathcal{H}^3$, que é limitada no infinito, é uma superfície "flat"(plana) totalmente umbílica.

No capítulo 1, apresentaremos as notações e resultados preliminares que iremos utilizar no decorrer do nosso trabalho. No capítulo 2, apresentaremos a definição do steady state space $\mathcal{H}^{n+1}$ e a existência de um campo de vetores normal unitário tipo-tempo conforme fechado que determina em $\mathcal{H}^{n+1}$ uma codimensão 1 por uma folheação de hiperplanos tipo-espaço. No capítulo 3, motivados por algumas obras descritas acima, como uma aplicação adequada do bem conhecido princípio do máximo generalizado de H. Omori,[15], e S. T. Yau, [28], obteremos resultados de rigidez no staedy state space $\mathcal{H}^{n+1}$. Em primeiro lugar, através de uma restrição imposta no ângulo hiperbólico normal da hipersuperfície (isto é, o ângulo hiperbólico entre a aplicação de Gauss da hipersuperfície e o campo de vetores unitário tipo-tempo que determina em $\mathcal{H}^{n+1}$ uma codimensão 1 por uma folheação de hiperplanos tipo-espaço, veja Capítulo 2), provaremos o seguinte teorema (cf. Capítulo 3, Teorema 3.3).

Teorema 1. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-epaço completa e limitada no infinito futuro de $\mathcal{H}^{n+1}$, com curvatura média limitada $1 \leq H \leq \alpha$, para alguma* *constante α. Se o ângulo hiperbólico normal θ de Σ^n satisfaz $\cosh\theta \leq \inf_\Sigma H$, então Σ^n é um hiperplano e a imagem hiperbólica é exatamente uma horosfera.*

No capítulo 4, munindo uma variedade produto $\overline{M}^{n+1} = I \times M^n$ com a métrica (4.1), obtemos uma importante classe de variedades de Lorentz que possuem um campo conforme. Apresentaremos o espaço-tempo tipo Steady State $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ que é uma família mais ampla de espaço-tempo GRW e provaremos o seguinte teorema (cf. Capítulo 4, Teorema 4.6).

Teorema 2. Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional não negativa e $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa e limitada no infinito futuro de $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$, com curvatura média limitada $1 \leq H \leq \alpha$, para alguma constante α. Se o ângulo hiperbólico normal θ de Σ^n satisfaz $\cosh\theta \leq \inf_\Sigma H$, então Σ^n é um slice M_t^n, para algum $t \in \mathbb{R}$.

Finalmente, a partir da definição de Gráfico vertical inteiro em $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$, apresentaremos a prova do seguinte teorema (cf. Capítulo 4, Teorema 4.9).

Teorema 3. Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional não negativa e seja $\Sigma^n(u)$ um gráfico vertical tipo-espaço inteiro limitado no infinito de $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ e com curvatura média limitada $1 \leq H \leq \alpha$, para alguma constante α. Se

$$|Du|^2_{M^n} \leq e^{2u}\left(1 - \sup_{\Sigma(u)} \frac{1}{H^2}\right),$$

então $\Sigma^n(u)$ é um slice.

Esse trabalho de dissertação teve como base o artigo [2], intitulado por: *On Rigidity of Spacelike Hypersurfaces Immersed in the Steady State Space*, publicado em 2012 na Publicationes Mathematicae Debrechen.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas notações e resultados preliminares que utilizaremos nos próximos capítulos. Para maiores detalhes indicamos as referência [9] e [23].

1.1 Tensores em Variedades

A idéia de tensor é uma generalização natural da idéia de campos de vetores, e o ponto importante é que, analogamente aos campos de vetores, os tensores podem ser derivados covariantemente.

No que segue, indicaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $C^\infty(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M. Além disso, convem observar que $\mathfrak{X}(M)$ é um módulo sobre $C^\infty(M)$, isto é, $\mathfrak{X}(M)$ tem uma estrutura linear quando tomamos como "escalares" os elementos de $C^\infty(M)$.

Definição 1.1. *Uma 1-forma V em uma variedade suave M é uma função que a cada ponto $p \in M$ associa um elemento V_p no espaço cotangente $T_p(M)^*$.*

As um-formas (ou 1-forma) em uma variedade suave M são objetos dual para campos de vetores. Dado um ponto p de M o espaço dual $T_p(M)^*$ de um espaço tangente $T_p(M)$ é chamado o *espaço cotangente* de M em p. Os elementos de $T_p(M)^*$, as vezes chamados *covetores*, são aplicações lineares de $T_p(M)$ em $\mathbb{R}$.

Assim, V atribui um número para cada vetor tangente e é linear nos campos de vetores em cada ponto. Se V é uma 1-forma em M e X é um campo tangente em M, denotemos por VX a função de valor real em M cujo valor em cada ponto p é o valor de V_p em X_p. Uma 1-forma V é suave desde que VX é suave para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Seja $\mathfrak{X}^*(M)$ o conjunto de todas as 1-formas suaves em M. No contexto acima, vale observar que $\mathfrak{X}^*(M)$ é um módulo sobre $C^\infty(M)$.

As definições a seguir abrangem os dois principais casos que precisamos: o módulo $\mathfrak{X}(M)$ ao longo de $C^\infty(M)$ e o espaço vetorial $T_p(M)$ sobre $\mathbb{R}$. Para o que segue, $V_1, \ldots, V_s$ denotam módulos sobre um anel $\mathbb{K}$ e o conjunto

$$V_1 \times \ldots \times V_s = \{(v_1, \ldots, v_s);\ v_i \in V_i,\ 1 \leq i \leq s\},$$

munido com as operações usuais de soma e multiplicação por elementos de $\mathbb{K}$ é um módulo sobre $\mathbb{K}$ chamado *produto direto.*

Se W é também um módulo sobre $\mathbb{K}$, dizemos que a função

$$A : V_1 \times \ldots \times V_s \to W$$

é $\mathbb{K}$-*multilinear* quando A é $\mathbb{K}-$linear em cada entrada. Se V é um módulo sobre $\mathbb{K}$, consideremos o conjunto

$$V^* = \{f : V \to \mathbb{K};\ f \quad \text{é} \quad \mathbb{K} - linear\}.$$

Munido com as operações usuais de soma e multiplicação por elementos de $\mathbb{K}$, obtemos que V^* é um módulo sobre $\mathbb{K}$ chamado *módulo dual* de V ou simplesmente *dual* de V. Quando $V_i = V$ para todo $1 \leq i \leq s$, escrevemos

$$V^s = \underbrace{V \times \ldots \times V}_{s\ vezes}.$$

Definição 1.2. *Para inteiros $r \geq 0$ e $s \geq 0$ (ambos não nulos) uma função $\mathbb{K}$-multilinear*

$$A : (V^*)^r \times V^s \to \mathbb{K}$$

é chamado um tensor do tipo (r,s) em V. Quando r = 0 escrevemos $A : V^s \to \mathbb{K}$ e de maneira análoga, quando s = 0 escrevemos $A : (V^*)^r \to \mathbb{K}$.

Denotemos por

$$\mathfrak{T}^r_s(V) = \{A : (V^*)^r \times V^s \to \mathbb{K};\ A \quad \text{é} \quad \mathbb{K} - multilinear\}, \tag{1.1}$$

o conjunto do todos os tensores do tipo (r, s) em V.

Com as operações usuais de soma de funções e a multiplicação por elementos de $\mathbb{K}$, obtemos que $\mathfrak{T}_s^r(V)$ é um módulo sobre $\mathbb{K}$. Um tensor do tipo $(0,0)$ sobre V é simplesmente um elemento de $\mathbb{K}$.

Definição 1.3. *Um campo tensorial A em M é um tensor sobre $C^\infty(M)$-módulo. Assim, se A é um campo tensorial do tipo (r,s) em M então*

$$A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to C^\infty(M)$$

é uma função $C^\infty(M)$-multilinear.

Observação 1.1. *Observemos que se $\theta^1, \ldots, \theta^r \in \mathfrak{X}^*(M)$ e $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$ então*

$$A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) : M \to \mathbb{R}$$

é uma função suave, onde θ^i ocupa a i-ésima entrada contravariante e X_j a j-ésima entrada covariante.

De maneira análoga ao definido em (1.1), denotemos por $\mathfrak{T}_s^r(M)$ o conjunto de todos os tensores do tipo (r,s) sobre M que é um módulo sobre $C^\infty(M)$. Quando $r = s = 0$ temos $\mathfrak{T}_0^0(M) = C^\infty(M)$.

A próxima definição nos mostra uma maneira de fazer o produto tensorial entre dois tensores.

Definição 1.4. *Sejam $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ e $B \in \mathfrak{T}_{s'}^{r'}(M)$. Então $A \otimes B \in \mathfrak{T}_{s+s'}^{r+r'}(M)$, dado por*

$$\begin{aligned} &(A \otimes B)(\theta^1, \ldots, \theta^r, \theta^{r+1}, \ldots, \theta^{r+r'}, X_1, \ldots, X_s, X_{s+1}, \ldots, X_{s+s'}) \\ &= A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s,) \cdot B(\theta^{r+1}, \ldots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \ldots, X_{s+s'}) \end{aligned}$$

é um campo tensorial chamado produto tensorial de A e B.

Observação 1.2. *Quando $r' = s' = 0$ então B é uma função $f \in C^\infty(M)$ e definimos*

$$A \otimes f = f \otimes A = fA.$$

Assim, se A também é do tipo $(0,0)$, o produto tensorial se reduz a multiplicação usual em $C^\infty(M)$. Em geral o produto tensorial não é comutativo, mais a frente veremos uma definição na qual produto tensorial se torna comutativo.

O exemplo abaixo nos dá algumas interpretações as quais permitem identificar 1-formas e campos com tensores.

Exemplo 2. *(Identificações)*

1. *Seja ω uma 1-forma suave sobre a variedade M. Então a função*

$$A : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

dada por $A(X) = \omega(X)$ é $C^\infty(M)$-linear. Portanto, A é um campo tensorial do tipo $(0,1)$ em M. Assim todo campo tensorial do tipo (0,1) é dado de maneira única como uma 1-forma e escrevemos

$$\mathfrak{X}^*(M) = \mathfrak{T}^0_1(M).$$

2. *Seja V um campo vetorial suave sobre M. Então a função*

$$V : \mathfrak{X}^*(M) \to C^\infty(M)$$

dada por $V(\theta) = \theta(V)$ é $C^\infty(M)$-linear. Portanto, V é um campo tensorial do tipo (1,0) em M. Assim todo campo tensorial é dado de maneira única como um campo vetorial e escrevemos

$$\mathfrak{X}(M) = \mathfrak{T}^1_0(M).$$

3. *Se A :$\mathfrak{X}(M)^s$ $\to$$\mathfrak{X}(M)$ é $C^\infty(M)-$ multilinear, defina*

$$\overline{A} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^s \to C^\infty(M)$$

como sendo

$$\overline{A}(\theta, X_1, \ldots, X_s) = \theta(A(X_1, \ldots, X_n)),\ \forall\ \theta \in \mathfrak{X}^*(M) \text{ e } X_i \in \mathfrak{X}(M), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Observe que $\overline{A}$ é $C^\infty(M)$-multilinear e portanto $\overline{A}$ é um campo tensorial do tipo (1,s) em M.

Definição 1.5. *Os tensores do tipo $(0,s)$ são chamados de covariantes enquanto os tensores do tipo $(r,0)$ são chamados de contravariantes.*

Como haviamos dito na Observação (1.2), a condição a qual o produto tensorial é comutativo é quando A é contravariante e B covariante e vice-versa.

Observação 1.3. *No contexto acima vale observar que um campo tensorial $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ possui um valor A_p em cada ponto $p \in M$, especificamente, a função*

$$A_p : ((T_pM)^*)^r \times (T_pM)^s \to \mathbb{R}$$

definida da seguinte forma: se $\alpha^1, \ldots, \alpha^r \in (T_pM)^*$ e $v_1, \ldots, v_s \in T_pM$ então

$$A_p(\alpha^1, \ldots, \alpha^r, v_1, \ldots, v_s) = A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)(p),$$

onde $\theta^1, \ldots, \theta^r \in \mathfrak{X}^*(M)$ e $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$ são tais que $\theta^i|_p = \alpha^i$ $(1 \leq i \leq r)$ e $X_j|_p = v_j$ $(1 \leq j \leq s)$.

É fácil verificar que A_p é $\mathbb{R}$-multilinear. Então A_p é um tensor do tipo (r,s) em T_pM. Assim, podemos considerar $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ como um campo suave que associa a cada ponto $p \in M$ o tensor A_p.

Definiremos agora uma importante operação que por meio de uma aplicação diferenciável entre M e N, qualquer tensor covariante em N pode ser puxado de volta para M.

Definição 1.6. *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $\phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Se $A \in \mathfrak{T}^0_s(N)$, com $s \geq 1$, considere*

$$(\phi^* A)_p : (T_pM)^s \to \mathbb{R},$$

dada por

$$(\phi^* A)_p(v_1, \ldots, v_s) = A_{\phi(p)}(d\phi_p(v_1), \ldots, d\phi_p(v_n)),$$

para quaisquer $v_1, \ldots, v_s \in T_pM$ e qualquer $p \in M$. Então $\phi^* A$ é chamado "pullback" de A por ϕ.

Pela linearidade e multilinearidade das respectivas aplicações

$$d\phi_p : T_pM \to T_{\phi(p)}N \quad \text{e} \quad A_{\phi(p)} : (T_{\phi(p)}N)^s \to \mathbb{R},$$

obtemos que $(\phi^* A)_p : (T_pM)^s \to \mathbb{R}$ é $\mathbb{R}$-multilinear. Assim $(\phi^* A)_p$ é um tensor do tipo $(0, s)$ em T_pM. Portanto $\phi^* A \in \mathfrak{T}^0_s(M)$ e convém observar que no caso em que $s = 0$ temos $\phi^* A \in \mathfrak{T}^0_0(M) = C^\infty(M)$, e neste caso definimos

$$\phi^* A = A \circ \phi \in C^\infty(M).$$

O próximo Lema, nos fornece algumas propriedades importantes do *pullback*.

Lema 1.1. *Sejam M, N, P variedades diferenciáveis, $f \in C^\infty(N)$ e considere as seguintes aplicações*

$$\phi : M \to N, \ \psi : N \to P.$$

Então

1. $\phi^*(df) = d(\phi^* f)$;
2. $\phi^* : \mathfrak{T}^0_s(N) \to \mathfrak{T}^0_s(M)$ *é* $\mathbb{R}-$ *linear para cada* $s \geq 0$ *e* $\phi^*(A \otimes B) = (\phi^* A) \otimes (\phi^* B)$;
3. $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^* : \mathfrak{T}^0_s(P) \to \mathfrak{T}^0_s(M)$.

Demonstração. 1. Se $p \in M$ então usando a Regra da Cadeia temos que

$$d(\phi^* f)_p = d(f \circ \phi)_p = df_{\phi(p)}(d\phi_p) = \phi^*(df_p).$$

Como p foi escolhido arbitrariamente, seque que $d(\phi^* f) = \phi^*(df)$.

2. A $\mathbb{R}$-linearidade de ϕ^* é consequência da última definição.

   Sejam $A, B \in \mathfrak{T}^0_s(N)$ e se $v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_s \in T_pM$ então,

$$\begin{aligned}
&\phi^*(A \otimes B)(v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_s) \\
&\qquad = (A \otimes B)(d\phi(v_1), \ldots, d\phi(v_s), d\phi(w_1), \ldots, d\phi(w_s)) \\
&\qquad = A(d\phi(v_1), \ldots, d\phi(v_s)) \cdot B(d\phi(w_1), \ldots, d\phi(w_s)) \\
&\qquad = (\phi^*A)(v_1, \ldots, v_s) \cdot (\phi^*B)(w_1, \ldots, w_s) \\
&\qquad = (\phi^*A) \otimes (\phi^*B)(v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_s).
\end{aligned}$$

   Segue que $\phi^*(A \otimes B) = (\phi^*A) \otimes (\phi^*B)$.

3. Primeiramente observe que $\psi \circ \phi : M \to P$ e dado $A \in \mathfrak{T}^0_s(P)$, então $\psi^*A \in \mathfrak{T}^0_s(N)$ e $\phi^*(\psi^*A) \in \mathfrak{T}^0_s(M)$.

   Consideremos $v_1, \ldots, v_s \in T_pM$, daí

$$\begin{aligned}
((\psi \circ \phi)^*A)(v_1, \ldots, v_s) &= A(d(\psi \circ \phi)(v_1), \ldots, d(\psi \circ \phi)(v_s)) \\
&= A(d\psi(d\phi(v_1)), \ldots, d(\psi(d\phi(v_s)))) \\
&= (\psi^*A)(d\phi(v_1), \ldots, d(\phi(v_s))) \\
&= (\phi^*(\psi^*A))(v_1, \ldots, v_s) \\
&= ((\phi^* \circ \psi^*)A)(v_1, \ldots, v_s).
\end{aligned}$$

   Segue que $(\psi \circ \phi)^*A = (\phi^* \circ \psi^*)A$, para todo $A \in \mathfrak{T}^0_s(P)$, de onde concluímos que $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$.

$\square$

Existe uma operação chamada *contração* que transforma tensores do tipo (r, s) em tensores do tipo $(r-1, s-1)$. A definição geral deste tipo especial de tensores segue do seguinte lema.

Lema 1.2. *Existe uma única função $C^\infty(M)-$linear*

$$\mathfrak{C} : \mathfrak{T}^r_s(M) \to C^\infty(M),$$

chamada (1,1)-contração, tal que $\mathfrak{C}(X \otimes \theta) = \theta(X)$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$.

Definiremos agora o Tensor Derivação e veremos algumas de suas propriedades que serão usadas no desenvolvimento do nosso trabalho.

Definição 1.7. *Um tensor derivação $\mathfrak{D}$ em uma variedade diferenciável M é um conjunto de funções $\mathbb{R}-$lineares*

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^r_s : \mathfrak{T}^r_s(M) \to \mathfrak{T}^r_s(M) \ (r, s \geq 0),$$

tal que para quaisquer tensores A e B em $\mathfrak{T}^r_s(M)$ e toda contração $\mathfrak{C}$, tem-se

1. $\mathfrak{D}(A \otimes B) = (\mathfrak{D}A) \otimes B + A \otimes (\mathfrak{D}B)$;

2. $\mathfrak{D}(\mathfrak{C}(A)) = \mathfrak{C}(\mathfrak{D}A)$.

Definida desta maneira, $\mathfrak{D}$ é $\mathbb{R}$-linear, preserva o tipo do tensor, obedece a regra do produto e comuta com contrações. Para uma função $f \in C^\infty(M)$ temos $f \otimes A = f \cdot A$, assim $\mathfrak{D}(fA) = (\mathfrak{D}f)A + f(\mathfrak{D}A)$, e quando $t = s = 0$, se $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0^0 : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ é uma derivação em M, então existe um único $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\mathfrak{D}f = Xf$, para qualquer $f \in C^\infty(M)$.

A fórmula de Leibnitz $\mathfrak{D}(A \otimes B) = (\mathfrak{D}A) \otimes B + A \otimes (\mathfrak{D}B)$ pode ser reformulada da seguinte maneira.

Proposição 1.8. *(Regra do Produto) Seja $\mathfrak{D}$ uma derivação em M. Se $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ então*

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}(A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)) &= (\mathfrak{D}A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \\ &+ \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1, \dots, \mathfrak{D}\theta^i, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \\ &+ \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, \mathfrak{D}X_j, \dots, X_s).\end{aligned}$$

Demonstração. Por simplicidade, façamos $r = s = 1$ e afirmemos que

$$A(\theta, X) = \overline{\mathfrak{C}}(A \otimes \theta \otimes X),$$

onde $\overline{\mathfrak{C}}$ é a composta de duas contrações.

Com efeito, seja $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ um sistema de coordenadas local em M. Então $A \otimes \theta \otimes X$ tem componentes $A_j^i \theta_k X^l$.

Como $A(\theta, X) = \sum_{i,j} A_j^i \theta_i X^j$ temos,

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}(A(\theta, X)) &= \mathfrak{D}\overline{\mathfrak{C}}(A \otimes \theta \otimes X) = \overline{\mathfrak{C}}\mathfrak{D}(A \otimes \theta \otimes X) \\ &= \overline{\mathfrak{C}}(\mathfrak{D}A \otimes \theta \otimes X) + \overline{\mathfrak{C}}(A \otimes \mathfrak{D}\theta \otimes X) + \overline{\mathfrak{C}}(A \otimes \theta \otimes \mathfrak{D}X) \\ &= (\mathfrak{D}A)(\theta, X) + A(\mathfrak{D}\theta, X) + A(\theta, \mathfrak{D}X).\end{aligned}$$

a demonstração do caso geral segue deste. □

Usando a Proposição 1.8, para um tensor A com $r + s \geq 2$ obtemos

$$\begin{aligned}(\mathfrak{D}A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) &= \mathfrak{D}(A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)) \\ &- \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1, \dots, \mathfrak{D}\theta^i, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \\ &- \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, \delta X_j, \dots, X_s).\end{aligned}$$

Pode ser mostrado que $\mathfrak{D}A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ e $\mathfrak{D} : \mathfrak{T}^r_s(M) \to \mathfrak{T}^r_s(M)$ é uma derivação em M.

Definição 1.9. *Se $V \in \mathfrak{X}(M)$ então a derivação $\mathcal{L}_V$ tal que*

1. $\mathcal{L}_V(f) = V(f), \ \forall\ f \in C^\infty(M)$

2. $\mathcal{L}_V(X) = [V, X], \ \forall\ X \in \mathfrak{X}(M),$

é chamada Derivada de Lie com relação a V.

Observação 1.4. *Veja que*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_V(fX) &= [V, fX] = V(fX) - fX(V) \\
&= V(f)X + fV(X) - fX(V) = V(f)X + f[V, X] \\
&= V(f)X + f\mathcal{L}_V(X),
\end{aligned}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e qualquer $f \in C^\infty(M)$.

Assim, $\mathcal{L}_V$ esta bem definida, ou seja, é um tensor derivação.

1.2 Variedades Semi-Riemannianas

Nesta seção, apresentaremos algumas resultados relevantes inerentes a Variedades Semi-Riemanniana, que faremos uso no decorrer do nosso trabalho.

1.2.1 Formas Bilineares Simétricas

No que segue, V será sempre um espaço vetorial de dimensão finita. Como sabemos, uma forma bilinear $b : V \times V \to \mathbb{R}$ é uma aplicação que satisfaz:

1. $b(au, v) = ab(u, v) = b(u, av), \quad \forall\ u, v \in V;$

2. $b(u + w, v) = b(u, v) + b(w, v)$ e $b(u, v + w) = b(u, v) + b(u, w), \quad \forall\ u, v, w \in V.$

Além disso, b é dita *simétrica* se $b(u, v) = b(v, u) \quad \forall\ u, v \in V$.

Definição 1.10. *Uma forma bilinear simétrica b em V é*

1. *positiva definida se para todo $v \in V$ com $v \neq 0$ implicar $b(v, v) > 0$;*

2. *negativa definida se para todo $v \in V$ com $v \neq 0$ implicar $b(v, v) < 0$;*

3. *não degenerada se $b(v, w) = 0$ para qualquer $w \in V$ implicar $v = 0$.*

Analogamente, define-se forma bilinear simétrica *semi-definida* trocando as desigualdades estritas por $\geq$ e $\leq$, respectivamente. Além disso, se $W \subset V$ é um subespaço de V, a restrição $b\big|_{W\times W}$, denotada por $b\big|_{W}$, é ainda simétrica e bilinear.

Definição 1.11. *O índice ν de uma forma bilinear simétrica b em V é o maior inteiro que denota a dimensão do subespaço W de V tal que $b\big|_{W}$ é negativa definida.*

Assim $0 \leq \nu \leq dimV$ e $\nu = 0$ se, e somente se, b é positivo definido. A função $q : V \to \mathbb{R}$ dada por $q(v) = b(v, v)$ é chamada a *forma quadrática associada* de b. Em alguns casos é mais conveniente trabalhar com ela do que com a própria b, e não há perda de generalidade pois b pode ser recuperada pela identidade de polarização

$$b(u, v) = \frac{1}{2}(q(u + v) - q(u) - q(v)).$$

Se $e_1, \ldots, e_n$ é uma base para V, a matriz $n \times n$ $(b_{ij}) = b(e_i, e_j)$ é chamada matriz de b relativa a base $e_1, \ldots, e_n$. Uma vez que b é simétrica, esta matriz é simétrica.

Lema 1.3. *Uma forma bilinear simétrica é não degenerada se, e somente se, a matriz relativa a uma base (e portanto a todas) é invertível.*

Demonstração. Seja $e_1, \ldots, e_n$ uma base para V. Se $u \in V$, então $b(u, v) = 0$ para todo $v \in V$ se, e somente se, $b(u, e_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Uma vez que (b_{ij}) é simétrica,

$$b(u, e_i) = b\left(\sum_j u_j e_j, e_i\right) = \sum_j u_j b(e_j, e_i) = \sum_j b_{ij} u_j.$$

Assim b é degenerada se, e somente se, existem números não todos nulos $u_1, \ldots, u_n$ tais que $\sum_j b_{ij} u_j = 0$ para $i = 1, \ldots, n$, isto é, b é degenerada se, e somente se, (b_{ij}) para $i = 1, \ldots, n$ formam um conjunto linearmente dependente, ou seja (b_{ij}) é singular. $\square$

Definição 1.12. *Um produto escalar g em um espaço vetorial V é uma forma bilinear simétrica e não degenerada sobre V.*

Note que o produto interno é um produto escalar positivo definido. Quando $V = \mathbb{R}^n$, temos o produto interno canônico definido por

$$u \cdot v = \sum_i u_i v_i.$$

Muitas propriedades do produto interno valem para produtos escalares, porém alguns fenômenos novos surgem quando g é indeterminado, isto é, $g(v, v) = 0$, mas $v \neq 0$.

O próximo exemplo nos mostra que mudando o sinal do produto escalar usual do $\mathbb{R}^2$ temos um exemplo de produto escalar indefinido.

Exemplo 3. *Defina* $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dado por*

$$g(u, v) = u_1 v_1 - u_2 v_2.$$

Observe que g *é simétrica e bilinear. Considerando a base* $\{(1, 0), (0, 1)\}$ *do* $\mathbb{R}^2$*, temos pelo lema (1.3) que* g *é não degenerada. Assim,* g *é um produto escalar indefinido e a sua forma quadrática associada é dada por* $q(v) = u_1^2 - u_2^2$*.*

Definiremos agora tensor métrico e o que vem a ser uma variedade de Lorentz.

Definição 1.13. *Um tensor métrico* g *em uma variedade diferenciável* M *é uma aplicação suave*

$$\begin{array}{ccccccccc} g & : & M & \longrightarrow & \mathfrak{T}_2^0(M) & & & & \\ & & p & \longmapsto & g_p & : & T_pM \times T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & & & & (u, v) & \longmapsto & g_p(u, v) \end{array}$$

tal que,

1. $g_p(u, v) = g_p(v, u), \quad \forall\ u, v \in T_pM$
2. $g_p(u, v) = 0, \quad \forall\ v \in T_pM$*, implica* $u = 0$*;*
3. $ind(T_pM) = ind(T_qM), \quad \forall\ p, q \in M.$

Definição 1.14. *Uma variedade semi-Riemanniana é uma variedade diferenciável* M *munida com um tensor métrico* g*.*

O valor comum ν do índice de g_p em uma variedade semi-Riemanniana M é chamado *índice de M*. Note que $0 \leq \nu \leq n = dim(M)$. Se $\nu = 0$, então M é uma variedade Riemanniana. Neste caso, cada g_p é um produto interno em T_pM. Quando $\nu = 1$ e $n \geq 2$, então M é dita uma *variedade de Lorentz*.

Notação 1.15. *Denotemos por* $g = \langle , \rangle$ *o tensor métrico. Assim podemos escrever* $g(u, v) = \langle u, v\rangle \in \mathbb{R},$ *para todos* $u, v \in T_pM$ *e* $g(U, V) = \langle U, V\rangle$ *e para* $U, V \in \mathfrak{X}(M)$*.*

Para um sistema de coordenadas podemos escrever g sendo

$$g(U, V) = \langle U, V\rangle = \sum_{i,j} g_{ij} U^i V^j.$$

De fato, se $\xi = x^1, \ldots, x^n$ é um sistema de coordenadas em $U \subset M$ então as componentes de g em U são

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j\rangle, \quad \forall\ i = 1, \ldots, n.$$

Assim, se $V = \sum_i v^i \partial_i$ e $U = \sum_j u^j \partial_j$, temos que

$$g(U,V) = \langle U, V\rangle = \sum_{i,j} g_{ij} V^i U^j.$$

Como g é não degenerada temos que em cada $p \in M$ a matriz $(g_{ij}(p))_{n\times n}$ é invertível e a sua inversa é denotada por $(g^{ij}(p))_{n\times n}$. A fórmula usual para a inversa de uma matriz nos garante que as funções g_{ij} são suaves em U. Além disso, como g é simétrica, então $g_{ij} = g_{ji}$ e consequentemente $g^{ij} = g^{ji}$, para quaisquer $i = 1, \ldots, n$. Finalmente, em U, o tensor métrico g pode ser escrito como

$$g = \sum_{ij} g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Assim, se $U, V \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$\begin{aligned} g(U,V) &= \sum_{ij} g_{ij}(dx^i \otimes dx^j)(U,V) \\ &= \sum_{ij} g_{ij} dx^i(U) \cdot dx^j(V) \\ &= \sum_{ij} g_{ij} U^i \cdot V^j. \end{aligned}$$

Exemplo 4. *Seja $M = \mathbb{R}^n$. Para cada $p \in M$ temos que T_pM é isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Assim, se $(x^1, \ldots, x^n)$ é um sistema de coordenadas usuais do $\mathbb{R}^n$, então*

$$\langle u_p, v_p\rangle = \sum_i u^i v^i,$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^n$, onde $u_p = \sum_i u^i \partial_i$ e $v_p = \sum_j v^j \partial_j$. Desta maneira, $\mathbb{R}^n$ munido com esta métrica nos dá uma variedade Riemanniana chamada espaço Euclidiano $n-$dimensional.

Um outro exemplo.

Exemplo 5. *Seja ν um inteiro tal que $0 \leq \nu \leq n$. Então $\mathbb{R}^n$ munido com o tensor métrico*

$$\langle u_p, v_p\rangle = -\sum_{i=1}^{\nu} u^i v^i + \sum_{j+\nu=1}^{n} u^j v^j,$$

de índice ν nos dá uma variedade semi-Riemanniana $\mathbb{R}^n_\nu$, chamado espaço semi-Euclidiano. Observe que $\mathbb{R}^n_0 = \mathbb{R}^n$, e para $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n_1$ é o espaço de Lorentz-Minkowski n-dimensional.

Fixando a notação

$$\epsilon_i = \begin{cases} -1, \text{se} & 1 \leq i \leq \nu; \\ +1, \text{se} & \nu + 1 \leq j \leq n, \end{cases}$$

então o tensor métrico de $\mathbb{R}^n_\nu$ pode ser escrito como

$$g = \sum_i \epsilon_i dx^i \otimes dx^i.$$

Definição 1.16. *Seja M uma variedade semi-Riemanniana com tensor métrico $\langle , \rangle$. Dizemos que $v \in T_pM$ é*

1. *tipo-espaço se $\langle v, v \rangle > 0$ ou $v = 0$;*
2. *tipo-tempo se $\langle v, v \rangle < 0$;*
3. *nulo se $\langle v, v \rangle = 0$ e $v \neq 0$.*

O conjunto $\{v \in T_pM;\ \langle v, v \rangle = 0, \quad v \neq 0\}$ de todos os vetores nulos de T_pM é chamado *cone nulo* em $p \in M$. Quando M é uma variedade de Lorentz, os vetores nulos são chamados de *tipo-luz*.

Para cada $p \in M$, seja

$$\begin{array}{rcccl} q & : & T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & v & \longmapsto & q(v) = \langle v, v \rangle, \end{array}$$

a forma quadrática associada ao produto escalar $\langle , \rangle$. Temos que q determina $\langle , \rangle$. Mas observe que

$$q(fV) = \langle fV, fV \rangle = f^2 \langle V, V \rangle = f^2 q(V),$$

para qualquer $V \in \mathfrak{X}(M)$ e toda $f \in C^\infty(M)$. Assim, temos que q não é $C^\infty(M)$-linear e portanto não é um campo tensor.

1.2.2 A Conexão de Levi-Civita

Sejam V e W campos de vetores em uma variedade semi-Riemanniana M. O objetivo desta seção é mostrar como definir um novo campo vetorial $D_V W$ em M, cujo valor em cada ponto $p \in M$ é taxa de variação de W na direção de V_p. Fazemos isso naturalmente no espaço Euclidiano com a derivada de um campo em relação a outro. Para o nosso contexto vamos introduzir o conceito de conexão.

Definição 1.17. *Sejam $u^1, \ldots, u^n$ as coordenadas naturais de $\mathbb{R}^n_\nu$ com $0 \leq \nu \leq n$. Se V e $W = \sum_i W^i \partial_i$ são campos de vetores em $\mathbb{R}^n_\nu$, o vetor*

$$D_V W = \sum_i V(W^i)\partial_i,$$

é chamada a derivada covariante de W na direção de V.

Agora definiremos a conexão.

Definição 1.18. *Uma conexão ∇ em uma variedade M é uma função*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

satisfazendo, para quaisquer $V, W \in \mathfrak{X}(M)$,

1. *$\nabla_V W$ é $C^\infty(M)$-linear em V;*
2. *$\nabla_V W$ é $\mathbb{R}$-linear em W;*
3. *$\nabla_V(fW) = f\nabla_V W + V(f)W$ para toda função $f \in C^\infty(M)$.*

Assim, $\nabla_V W$ é chamada a "derivada covariante" de W na direção de V com respeito a conexão ∇.

Observe que o axioma (1) nos diz que $\nabla_V W$ é um tensor em V, então dado $v \in T_pM$, o vetor $\nabla_v W \in T_pM$, está bem definido e denotamos por $(\nabla_V W)_p$ onde V é um campo tensorial tal que $V_p = v$. O axioma (3) nos diz que $\nabla_V W$ não é um tensor em W.

Vejamos agora um resultado de caráter algébrico, o qual nos diz que na presença da métrica podemos identificar campos com 1-formas.

Proposição 1.19. *Seja M uma variedade semi-Riemanniana. Se $V \in \mathfrak{X}(M)$ seja V^* uma 1-forma em M tal que*

$$V^*(X) = \langle V, X\rangle, \quad \forall\ X \in \mathfrak{X}(M).$$

Então a função

$$\begin{array}{rcccll} f & : & \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}^*(M) & \\ & & V & \longmapsto & f(V) & = V^*(X) = \langle V, X\rangle \end{array}$$

é um isomorfismo $C^\infty(M)$-linear de $\mathfrak{X}(M)$ para $\mathfrak{X}^*(M)$.

Demonstração. Primeiramente observemos que f é $C^\infty(M)$-linear, pois é dada por uma 1-forma que é $C^\infty(M)$-linear. Para mostrar o isomorfismo, basta mostrar que a aplicação é uma bijeção, uma vez que já temos a linearidade.

1. f é injetora.

   De fato, seja $f(V) = f(W)$, então

   $$\langle V, X\rangle = \langle W, X\rangle, \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

   Logo

   $$\langle V, X\rangle = \langle W, X\rangle \Leftrightarrow \langle V - W, X\rangle = 0 \Leftrightarrow V = W,$$

   uma vez que $X \in \mathfrak{X}(M)$ é qualquer e a métrica é não degenerada.

   Portanto f é injetora.

2. f é sobrejetora.

   É necessário exibirmos um $V \in \mathfrak{X}(M)$ tal que

   $$\theta(X) = \langle V, X\rangle, \; \forall \; X \in \mathfrak{X}(M).$$

   A unicidade é dada pelo item (1). Mostraremos que podemos encontrar um tal campo V em uma vizinhança coordenada U arbitrária. Seja $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, então podemos escrever $\theta = \sum_i \theta_i dx^i$ em U e tomemos $V \in \mathfrak{X}(M)$ dado por $V = \sum_{ij} g^{ij}\theta_i\partial_j$. Então, desde que (g^{ij}) e (g_{ij}) são matrizes inversíveis, temos

   $$\begin{aligned} \langle V, \partial_k\rangle &= \left\langle \sum_{ij} g^{ij}\theta_i\partial_j, \partial_k \right\rangle = \sum_{ij} g^{ij}\theta_i \langle \partial_j, \partial_k\rangle \\ &= \sum_{ij} g^{ij}\theta_i g_{jk} = \sum_i \theta_i\delta_{ik} = \theta_k = \theta(\partial_k). \end{aligned}$$

   Portanto f é sobrejetora. □

O próximo resultado nos diz que se uma conexão $\bigtriangledown$ é simétrica e compatível com a métrica em M então a conexão é única. É o que diz o teorema

Teorema 1.20. *(Levi-Civita) Em uma variedade semi-Riemanniana M existe uma única conexão ∇ tal que*

1. $[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V$; *(simetria)*
2. $X\langle V, W\rangle = \langle \nabla_X V, W\rangle + \langle V, \nabla_X W\rangle, \quad \forall \; X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$. *(compatibilidade)*

∇ é chamada a conexão de Levi-Civita de M, e é caracterizada pela "Fórmula de Koszul"

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_V W, X\rangle &= V\langle W, X\rangle + W\langle V, X\rangle - X\langle V, W\rangle \\ &\quad - \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [V, X]\rangle + \langle X, [V, W]\rangle. \end{aligned}$$

Demonstração. Suponha que ∇ é uma conexão em M satisfazendo os axiomas (1) e (2) do teorema acima. Do lado direito da fórmula de Koszul, usemos o axioma (2) nas três primeiras parcelas e o axioma (1) nas três últimas. Com isso, alguns pares irão ser cancelados o que nos levará a $2\langle\nabla_V W, X\rangle$. Assim, ∇ satisfaz a fórmula de Koszul, portanto se tal conexão existe ela é única. Para a existência, considere $F(V, W, X)$ como o lado direito da fórmula de Koszul. Para campos V, W fixados, um cálculo direto mostra que F é $C^\infty(M)$-linear e portanto é uma 1-forma. Pela Proposição (1.19), existe um único campo vetorial, que denotaremos por $\nabla_V W$, tal que $2\langle\nabla_V W, X\rangle = F(V, W, X)$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Não é difícil verificar que F satisfaz os três axiomas da definição (1.18), a simetria e a compatibilidade com a métrica. Usando a unicidade, mostramos a existência da conexão. □

1.2.3 Campos Conformes

Definição 1.21. *Uma campo vetorial tangente $Y \in \mathfrak{X}(M)$ é dito um campo conforme se a derivada de Lie da métrica Lorentziana com respeito a Y satisfaz*

$$\mathcal{L}_Y\langle,\rangle = 2\phi\langle,\rangle,$$

para alguma função suave $\phi \in C^\infty(M)$.

O resultado que mostraremos agora caracteriza os campos conformes.

Lema 1.4. *Um campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ é conforme se, e somente se,*

$$\langle\nabla_V Y, W\rangle + \langle\nabla_W Y, V\rangle = 2\phi\langle V, W\rangle,$$

para quaisquer $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ e para alguma função suave $\phi \in C^\infty(M)$.

Demonstração. De fato, sendo $\mathcal{L}_Y$ um tensor derivação pela Proposição 1.8), temos

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_Y g)(V, W) &= \mathcal{L}_Y\langle V, W\rangle \\
&= Y\langle V, W\rangle - \langle\mathcal{L}_Y(V), W\rangle - \langle V, \mathcal{L}_Y(W)\rangle \\
&= \langle\nabla_Y V, W\rangle + \langle V, \nabla_Y W\rangle - \langle[Y, V], W\rangle - \langle V, [Y, W]\rangle \\
&= \langle\nabla_Y V, W\rangle + \langle V, \nabla_Y W\rangle - \langle\nabla_Y V, W\rangle \\
&\quad + \langle\nabla_V Y, W\rangle - \langle V, \nabla_Y W\rangle + \langle V, \nabla_W Y\rangle \\
&= \langle\nabla_V Y, W\rangle + \langle\nabla_W Y, V\rangle.
\end{aligned}$$

Logo, pela definição (1.21), temos

$$\langle\nabla_V Y, W\rangle + \langle\nabla_W Y, V\rangle = 2\phi\langle V, W\rangle,$$

para quaisquer $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. □

Como consequência do Lema acima, temos que se a função conforme ϕ é identicamente nula, Y é dito um campo de Killing.

Definição 1.22. *Numa variedade semi-Riemanniana M, um campo conforme K é dito fechado se para qualquer $V \in \mathfrak{X}(M)$ temos $\nabla_V K = \phi V$, onde ϕ é uma função suave em M.*

Observe que a definição acima equivale a dizer que a 1-forma dual ω_K de K é fechada, isto é, a derivada exterior de ω_K é identicamente nula.

1.2.4 Curvaturas

Definição 1.23. *Seja M uma variedade semi-Riemanniana. O tensor curvatura R de M é a aplicação*

$$\begin{array}{rcccl} R : & \mathfrak{X}(M)^3 & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) & \\ & (X, Y, Z) & \longmapsto & R(X, Y, Z) & = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z. \end{array}$$

Uma vez que fixados os campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, podemos considerar o operador curvatura $R(X, Y)$ dado por

$$\begin{array}{rcccl} R : & \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) & \\ & Z & \longmapsto & R(X, Y)Z & = R(X, Y, Z). \end{array}$$

Observe que o tensor curvatura é linear em relação a aditividade e trilinear em relação ao produto com elementos do anel $C^\infty(M)$. Além disso, o tensor curvatura satisfaz as seguintes propriedades ???? (veja, por exemplo, [31], Proposição 3.36). ?????

Proposição 1.24. *Com as notações acima, para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$,*

1. $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$;
2. $\langle R(X, Y)Z, W\rangle + \langle R(Y, Z)X, W\rangle + \langle R(Z, X)Y, W\rangle = 0$;
3. $\langle R(X, Y)Z, W\rangle = -\langle R(Y, X)Z, W\rangle$;
4. $\langle R(X, Y)Z, W\rangle = -\langle R(X, Y)W, Z\rangle$;
5. $\langle R(X, Y)Z, W\rangle = \langle R(Z, W)X, Y\rangle$.

A equção do ítens (i) é conhecida como *identidade de Bianchi.* Definiremos agora a curvatura seccional a qual está intimamente relacionado com o operador de curvatura.

Lema 1.5. *Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Demonstração. Para qualquer duas bases de σ podemos relaciona-las pelas equações

$$\begin{array}{rcccl} v & = & ax & + & by, \\ w & = & cx & + & dy, \end{array}$$

onde o determinante dos coeficientes $ad - bc$ é diferente de zero. Um cálculo mais aprofundado mostra que

$$\langle R(v,w)v, w\rangle = (ad - bc)^2 \langle R(x,y)x, y\rangle,$$

e

$$(|v|^2|w|^2 - \langle v, w\rangle^2) = (ad - bc)^2(|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2).$$

Portanto $K(v,w) = K(x,y)$. □

Definição 1.25. *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_pM$, o número real $K(x,y) = K(\sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamada a curvatura seccional de σ em p.*

Dizemos que uma aplicação multilinear $F : T_p(M)^4 \to \mathbb{R}$ é tipo-curvatura se ela satisfaz todos os itens da Proposição 1.24. Assim, se $F(x,y,x,y) = 0$ para quaisquer $x, y \in T_pM$ tais que $\sigma = span(x,y)$ é um plano não-degenerado, então $F \equiv 0$.

Lema 1.6. *Seja F uma função tipo-curvatura em T_pM tal que*

$$K(x,y) = \frac{F(x,y,x,y)}{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2}$$

sempre que $\sigma = span(x,y)$ é um plano não-degenerado. Então,

$$\langle R(x,y)z, w\rangle = F(x,y,z,w),$$

para todos $x, y, z, w \in T_pM$.

Demonstração. Como a diferença de funções tipo-curvatura também é tipo curvatura definimos $\Delta(x,y,z,w) = F(x,y,z,w) - \langle R(x,y)z, w\rangle$. Por hipótese, $\Delta(x,y,x,y) = 0$ se $\sigma = span(x,y)$ é um plano não degenerado de T_pM. Assim pela observação feita antes deste corolário, $\Delta = 0$. □

Uma variedade semi-Riemanniana M tem *curvatura constante* se a função curvatura seccional é constante. O próximo resultado nos fornece uma fórmula para R quando K é constante.

Corolário 1.26. *Se M tem curvatura seccional constante C, então*

$$R(x,y)z = C(\langle z,x\rangle y - \langle z,y\rangle x).$$

Demonstração. Observe que definindo $F(x,y,z,w) = C(\langle z,x\rangle\langle y,w\rangle - \langle z,y\rangle\langle x,w\rangle)$, temos que F é uma função tipo-curvatura em cada ponto, e

$$F(x,y,x,y) = C(\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2.$$

Se $\sigma = span(x,y)$ é um plano não-degenerado, então

$$K(x,y) = C = \frac{F(x,y,x,y)}{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2},$$

e o resultado segue do lema anterior. □

1.2.5 Imersões Isométricas

No que segue, M^n e $\overline{M}^m$ são duas variedades diferenciáveis de dimensão n e m respectivamente. Quando não houver possibilidade de confusão, denotaremos simplesmente por M e $\overline{M}$, respectivamente.

Definição 1.27. *Sejam M^n e $\overline{M}^m$ variedades diferenciáveis de dimensões n e m respectivamente com $m > n$. Dizemos que a aplicação $x : M \to \overline{M}$ é uma imersão se a aplicação diferencial $dx_p : T_pM \to T_{x(p)}\overline{M}$ é injetiva para todo $p \in M$.*

O número $k = m - n$ é chamado *codimensão* de x. Uma imersão $x : M \to \overline{M}$ entre duas variedades semi-Riemannianas com métricas $\langle , \rangle_M$ e $\langle , \rangle_{\overline{M}}$, respectivamente é chamada imersão isométrica se

$$\langle u,v\rangle_M = \langle dx_p(u), dx_p(v)\rangle_{\overline{M}},$$

para todo $p \in M$ e $u,v \in T_pM$.

Observamos que se $x : M \to \overline{M}$ é uma imersão e $\langle , \rangle_{\overline{M}}$ é a métrica em $\overline{M}$, podemos definir uma métrica $\langle , \rangle_M$ em M pelo *pullback*.

Seja $x : M \to \overline{M}$ uma imersão isométrica. Em torno de cada ponto $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ tal que $x\big|_U$ é um mergulho sobre $x(U)$. Assim podemos identificar U com a sua imagem $x(U)$, isto é x é localmente a aplicação inclusão.

Assim, podemos considerar o espaço tangente de M em p com um subespaço do espaço tangente de $\overline{M}$ em p e escrevemos

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$.

Definição 1.28. *Sejam $\overline{M}^m$ uma variedade semi-Riemanniana com a conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ e $x : M \to \overline{M}$ uma imersão isométrica. Então dados campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos que*

$$\overline{\nabla}_X Y = (\nabla_X Y)^{\top} + (\nabla_X Y)^{\perp}.$$

E segue da unicidade da conexão de Levi-Civita que $(\nabla)^{\top}$ é a conexão de Levi-Civita de M e denotamos por ∇.

Assim obtemos a *Fórmula de Gauss*

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

a qual define uma aplicação

$$\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$$

chamada a *Segunda Forma Fundamental* da imersão x.

Proposição 1.29. *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, então a aplicação $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ dada por $\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ é bilinear e simétrica.*

Demonstração. Observe que pelas propriedades da conexão, segue que α é linear na primeira entrada e na segunda entrada. Para a simetria, basta ver que

$$\begin{aligned}
\alpha(X, Y) - \alpha(Y, X) &= \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y - \overline{\nabla}_Y X + \nabla_Y X \\
&= (\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X) + (\nabla_Y X - \nabla_X Y) \\
&= [\overline{X}, \overline{Y}] + [Y, X] \\
&= [X, Y] - [X, Y] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que quando restritos a M os campos são iguais e segue o resultado. $\square$

Consideremos agora campos de vetores $X \in M$ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, e denotemos por $A_\xi X$ a componente tangencial de $-\overline{\nabla}_X \xi$, isto é,

$$A_\xi X = -\left(\overline{\nabla}_X \xi\right)^{\top}.$$

Uma vez que para cada $Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$0 = X\langle \xi, Y\rangle = \langle \overline{\nabla}_X \xi, Y\rangle + \langle \xi, \overline{\nabla}_X Y\rangle,$$

pela fórmula de Gauss, temos

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle.$$

Em particular, a aplicação $A : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^{\perp} \to \mathfrak{X}(M)$ dada por $A(X,\xi) = A_\xi X$ é bilinear sobre $C^{\infty}(M)$. Assim, a aplicação $A_\xi : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é linear sobre $C^{\infty}(M)$ e também auto adjunta, isto é, $\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle X, A_\xi Y\rangle$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. A aplicação A_ξ é chamada *Operador de Forma* ou *Operador de Weingarten* da imersão x.

Não é difícil ver que a componente normal de $\overline{\nabla}_X \xi$, que é denotada por $(\overline{\nabla}_X \xi)^{\perp}$, define uma conexão compatível com o fibrado tangente normal $TM^{\perp}$. Dizemos que $\nabla^{\perp}$ é a conexão normal de x, e obtemos a fórmula de Weingarten

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^{\perp}_X \xi.$$

Agora, usando a fórmula de Gauss e Weingarten, obteremos as equações básicas das imersões isométricas para o nosso interesse: a equação de Gauss e Codazzi.

Proposição 1.30. *Seja M uma subvariedade semi-Riemanniana de $\overline{M}$. Sejam R e $\overline{R}$ os tensores curvatura de M e $\overline{M}$ respectivamente, e α o operador de forma de M. Então para $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ temos*

1. *(Equação de Gauss)*

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle \overline{R}(X,Y)Z, W\rangle + \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle;$$

2. *(Equação de Codazzi)*

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_Y \alpha)(X,Z);$$

Demonstração. 1. Pela definição de tensor curvatura

$$\overline{R}(X,Y)Z = -\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z + \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z,$$

então

$$\begin{aligned}
-\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z &= \overline{\nabla}_X(\nabla_Y Z - \alpha(Y,Z)) = -\overline{\nabla}_X\nabla_Y Z - \overline{\nabla}_X\alpha(Y,Z)\\
&= -\nabla_X\nabla_Y Z - \alpha(X,\nabla_Y Z) - \overline{\nabla}_X\alpha(Y,Z)\\
&= -\nabla_X\nabla_Y Z - \alpha(X,\nabla_Y Z) + A_{\alpha(Y,Z)}X - \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z),
\end{aligned}$$

de maneira análoga encontramos,

$$\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z = \nabla_Y\nabla_X Z + \alpha(Y,\nabla_X Z) - A_{\alpha(X,Z)}Y + \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z),$$

e

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z = \nabla_{[X,Y]}Z + \alpha([X,Y],Z).$$

Somando os termos acima temos

$$\begin{aligned}
-\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z + \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z &= -\nabla_X\nabla_Y Z - \alpha(X,\nabla_Y Z) + A_{\alpha(Y,Z)}X\\
&- \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) + \nabla_Y\nabla_X Z + \alpha(Y,\nabla_X Z)\\
&- A_{\alpha(X,Z)}Y + \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z)\\
&+ \nabla_{[X,Y]}Z + \alpha([X,Y],Z),
\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z - \alpha(X,\nabla_Y Z) + \alpha(Y,\nabla_X Z) + A_{\alpha(Y,Z)}X - A_{\alpha(X,Z)}Y\\
&- \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) + \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z) + \alpha([X,Y],Z), \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

fazendo produto escalar com um campo $W \in \mathfrak{X}(M)$ qualquer, temos

$$\begin{aligned}
\langle\overline{R}(X,Y)Z,W\rangle &= \langle R(X,Y)Z,W\rangle - \langle\alpha(X,\nabla_Y Z),W\rangle + \langle\alpha(Y,\nabla_X Z),W\rangle\\
&+ \langle A_{\alpha(Y,Z)}X,W\rangle - \langle A_{\alpha(X,Z)}Y,W\rangle - \langle\nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z),W\rangle\\
&+ \langle\nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z),W\rangle + \langle\alpha([X,Y],Z),W\rangle,
\end{aligned}$$

logo

$$\langle\overline{R}(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle A_{\alpha(Y,Z)}X,W\rangle - \langle A_{\alpha(X,Z)}Y,W\rangle,$$

mas

$$\langle A_{\alpha(Y,Z)}X,W\rangle = \langle\alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle \quad \text{e} \quad \langle A_{\alpha(X,Z)}Y,W\rangle = \langle\alpha(Y,W),\alpha(X,Z)\rangle,$$

e portanto

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle\overline{R}(X,Y)Z,W\rangle + \langle\alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle - \langle\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle.$$

2. Antes de mostrar esta equação faremos uma pequena observação. Uma vez que $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ é um campo, pelo exemplo (2) podemos vê-lo como um tensor, isto é,

$$\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times (\mathfrak{X}(M)^{\perp})^{*} \to C^{\infty}(M).$$

Pela Proposição (1.19) sabemos que na presença da métrica podemos identificar campos com 1-formas, assim $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^{\perp} \to C^{\infty}(M)$ é um tensor do tipo $(0,3)$ cuja diferencial covariante é o tensor

$$\overline{\nabla}\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^{\perp} \times \mathfrak{X}(M) \to C^{\infty}(M)$$

do tipo $(0,4)$ em M.

Diante do exposto acima, dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, temos pela regra do produto para tensores,

$$(\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z,\eta) = X(\alpha(Y,Z,\eta)) - \alpha(\nabla_X Y, Z, \eta) - \alpha(Y, \nabla_X Z, \eta) - \alpha(Y, Z, \nabla_X \eta),$$

mas

$$(\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z,\eta) = \langle (\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z), \eta \rangle,$$

então

$$\langle (\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z), \eta \rangle = \langle \nabla^{\perp}_{X}\alpha(Y,Z), \eta \rangle - \langle \alpha(\nabla_X Y, Z), \eta \rangle - \langle \alpha(Y, \nabla_X Z), \eta \rangle. \quad (1.3)$$

De maneira análoga encontramos

$$\langle (\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(X,Z), \eta \rangle = \langle \nabla^{\perp}_{Y}\alpha(X,Z), \eta \rangle - \langle \alpha(\nabla_Y X, Z), \eta \rangle - \langle \alpha(X, \nabla_Y Z), \eta \rangle. \quad (1.4)$$

Por outro lado, fazendo o produto escalar com um campo qualquer $\eta \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ na expressão (1.2), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \overline{R}(X,Y)Z, \eta \rangle &= \langle R(X,Y)Z, \eta \rangle - \langle \alpha(X, \nabla_Y Z), \eta \rangle + \langle \alpha(Y, \nabla_X Z), \eta \rangle \\ &\quad + \langle A_{\alpha(Y,Z)}X, \eta \rangle - \langle A_{\alpha(X,Z)}Y, \eta \rangle - \langle \nabla^{\perp}_{X}\alpha(Y,Z), \eta \rangle \\ &\quad + \langle \nabla^{\perp}_{Y}\alpha(X,Z), \eta \rangle + \langle \alpha([X,Y],Z), \eta \rangle, \end{aligned}$$

e daí

$$\begin{aligned} \langle (\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp}, \eta \rangle &= - \langle \alpha(X, \nabla_Y Z), \eta \rangle + \langle \alpha(Y, \nabla_X Z), \eta \rangle - \langle \nabla^{\perp}_{X}\alpha(Y,Z), \eta \rangle \\ &\quad + \langle \nabla^{\perp}_{Y}\alpha(X,Z), \eta \rangle + \langle \alpha([X,Y],Z), \eta \rangle. \end{aligned}$$

Ainda neste contexto, podemos reescrever a expressão acima como

$$\begin{aligned} \langle (\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp}, \eta \rangle &= - \langle \alpha(X, \nabla_Y Z), \eta \rangle + \langle \alpha(Y, \nabla_X Z), \eta \rangle - \langle \nabla^{\perp}_{X}\alpha(Y,Z), \eta \rangle \\ &\quad + \langle \nabla^{\perp}_{Y}\alpha(X,Z), \eta \rangle + \langle \alpha(\nabla_X Y, Z), \eta \rangle - \langle \alpha(\nabla_Y X, Z), \eta \rangle, \end{aligned}$$

substituir as expressões (1.3) e (1.4) na mesma, e concluir que

$$\langle(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp},\eta\rangle = \langle(\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z),\eta\rangle - \langle(\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(X,Z),\eta\rangle.$$

Como $\eta \in \mathfrak{X}(M)$ foi escolhido arbitrariamente segue o resultado.

$\square$

Corolário 1.31. *(da Equação de Gauss) Se $\{X, Y\}$ é uma base para um plano tangente não degenerado de M gerado por $X, Y \in T_pM$, então*

$$\overline{K}(X,Y) = K(X,Y) + \frac{\langle\alpha(X,Y),\alpha(X,Y)\rangle - \langle\alpha(X,X),\alpha(Y,Y)\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2},$$

onde $\overline{K}$ e K denotam as curvaturas seccionais de $\overline{M}$ e M respectivamente.

Demonstração. Observe que fazendo $X = Z$ e $W = Y$ na equação de Gauss (1.30), temos que

$$\langle R(X,Y)X,Y\rangle = \langle\overline{R}(X,Y)X,Y\rangle + \langle\alpha(X,Y),\alpha(Y,X)\rangle - \langle\alpha(X,X),\alpha(Y,Y)\rangle,$$

uma vez que $|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2 \neq 0$ temos

$$\frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2} = \frac{\langle\overline{R}(X,Y)X,Y\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2} + \frac{\langle\alpha(X,Y),\alpha(Y,X)\rangle - \langle\alpha(X,X),\alpha(Y,Y)\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2},$$

o que implica

$$K(X,Y) = \overline{K}(X,Y) + \frac{\langle\alpha(X,Y),\alpha(X,Y)\rangle - \langle\alpha(X,X),\alpha(Y,Y)\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2}.$$

$\square$

Se a variedade semi-Riemanniana $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante C, então para todos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ podemos reescrever as equações de Gauss e Codazzi da seguinte maneira:

1. *Equação de Gauss*

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,W\rangle &= C(\langle Z,X\rangle\langle Y,W\rangle - \langle Z,Y\rangle\langle X,W\rangle)\\ &\quad + \langle\alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle - \langle\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle;\end{aligned}$$

2. *Equação de Codazzi*

$$(\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z) = (\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(X,Z).$$

1.2.6 Orientação Temporal

Seja V um espaço vetorial Lorentziano, isto é, um espaço vetorial munido de um produto escalar de índice constante igual a 1. Considere o conjunto

$$\mathcal{T} = \{u \in V;\ \langle u, u\rangle < 0\}.$$

Para cada $u \in \mathcal{T}$ defina

$$C(u) = \{v \in \mathcal{T};\ \langle u, v\rangle < 0\}$$

o qual é chamado o *cone temporal* de V contendo u.

Temos o seguinte lema.

Lema 1.7. *Sejam $u, v \in \mathcal{T}$. Então,*

1. *O subespaço $\{v\}^{\perp}$ é tipo-espaço e*

$$V = span\{v\} \oplus \{v\}^{\perp}.$$

Consequentemente, $\mathcal{T}$ é a união disjunta de $C(v)$ e $C(-v)$;

2. *$|\langle v, w\rangle| \geq |v||w|$, onde $|v| = (-\langle v, v\rangle)^{1/2}$, valendo a igualdade se, e somente se, v e w são linearmente dependentes (Desigualdade de Cauchy-Schwarz reversa);*

3. *Se $v \in C(u)$ para algum $u \in \mathcal{T}, w \in C(u)$ se, e somente se, $\langle v, w\rangle < 0$. Consequentemente*

$$w \in C(v) \Leftrightarrow v \in C(w) \Leftrightarrow C(v) = C(w).$$

Demonstração. 1. Afirma-se que $span\{v\}$ é não degenerado, isto é, a métrica de V restrita a $span\{v\}$ é não degenerada, com índice igual a 1. Com efeito, sendo v um vetor tipo-tempo, temos que

$$ind\ (span\{v\}) = 1 \quad \text{e} \quad \langle v, v\rangle = -\ \beta^2,$$

para algum $\beta \in \mathbb{R},\ \beta > 0$. Agora dado $u \in span\{v\}$, então u é escrito como $u = av$, onde $a \in \mathbb{R}$. Logo se

$$0 = \langle u, v\rangle = \langle av, v\rangle = a\langle v, v\rangle = -\ a\beta^2,$$

então $a = 0$. Logo $u = 0$ e portanto, concluímos que o subespaço $span\{v\}$ é não degenerado, o que mostra a nossa afirmação.

Sendo $span\{v\}$ um subespaço não degenerado com índice 1, temos que

$$V = span\{v\} \oplus span\{v\}^{\perp} = span\{v\} \oplus \{v\}^{\perp}$$

e

$$1 = ind\ (V) = ind\ (span\{v\}) + ind\ (\{v\}^{\perp}) = 1 + ind\ (\{v\}^{\perp}).$$

Assim, $ind\ (\{v\}^{\perp}) = 0$ e portanto $\{v\}^{\perp}$ é tipo-espaço.

Afirmemos agora que

$$\mathcal{T} = C(v) \cup C(-v),$$

onde esta união é disjunta.

De fato, se $z \in \mathcal{T}$ então $z \in V$ *e* $\langle z, z\rangle < 0$. Como $V = span\{v\} \oplus \{v\}^{\perp}$ então $z = av + w$, com $a \in \mathbb{R},\ a > 0$ e $w \in \{v\}^{\perp}$. Logo,

$$\langle z, v\rangle = \langle av + w, v\rangle = \langle av, v\rangle + \langle w, v\rangle = -a\beta^2.$$

Se $a > 0$ então $\langle z, v\rangle < 0$, e neste caso, $z \in C(v)$. Agora se $a < 0$ então $\langle z, v\rangle > 0$. Equivalentemente $\langle z, -v\rangle < 0$ e neste caso, $z \in C(-v)$. Reciprocamente, se $z \in C(v) \cup C(-v)$ então $z \in C(v)$ ou $z \in C(-v)$. Se $z \in C(v)$ então $z \in \mathcal{T}$ e $\langle z, v\rangle < 0$. Se $z \in C(-v)$ então $z \in \mathcal{T}$ e $\langle z, -v\rangle < 0$. Em qualquer caso, $z \in \mathcal{T}$ e portanto $\mathcal{T} = C(v) \cup C(-v)$.

2. Escreva $w = av + \widehat{w}$, com $a \in \mathbb{R}$ e $\widehat{w} \in \{v\}^{\perp}$. Sendo $\{v\}^{\perp}$ tipo-espaço então $\langle \widehat{w}, \widehat{w}\rangle \geq 0$. Como $w \in \mathcal{T}$ então $\langle w, w\rangle < 0$. Assim

$$\langle w, w\rangle = \langle av + \widehat{w}, av + \widehat{w}\rangle = a^2\langle v, v\rangle + \langle \widehat{w}, \widehat{w}\rangle,$$

logo

$$\begin{aligned}
\langle v, w\rangle^2 &= \langle v, av + \widehat{w}\rangle^2 = (\langle v, av\rangle + \underbrace{\langle v, \widehat{w}\rangle}_{=0})^2 = a^2\langle v, v\rangle^2 \\
&= a^2\langle v, v\rangle \cdot \langle v, v\rangle = (\langle w, w\rangle - \langle \widehat{w}, \widehat{w}\rangle)\langle v, v\rangle \\
&= \langle w, w\rangle\langle v, v\rangle - \underbrace{\langle \widehat{w}, \widehat{w}\rangle}_{\geq 0}\underbrace{\langle v, v\rangle}_{<0} \\
&\geq \langle w, w\rangle\langle v, v\rangle = (-\langle w, w\rangle)(-\langle v, v\rangle) \\
&= |w|^2|v|^2,
\end{aligned}$$

uma vez que, $-\ \langle \widehat{w}, \widehat{w}\rangle\langle v, v\rangle \geq 0$.

Além disso a igualdade ocorre se, e somente se, $\langle \widehat{w}, \widehat{w}\rangle = 0$, isto é $\widehat{w} = 0$. Assim, a igualdade acontece se, e somente se, $w = av$.

3. Como $C\left(\dfrac{u}{|u|}\right) = C(u)$, assumiremos que u é um vetor unitário tipo-tempo. Assim, escrevendo $v = au + \widehat{v}$ e $w = bu + \widehat{w}$, com $a, b \in \mathbb{R}^*$ e $\widehat{v}, \widehat{w} \in \{u\}^{\perp}$ temos que, como $u, v \in \mathcal{T}$ então $\langle v, v\rangle < 0$ e $\langle u, u\rangle < 0$. Logo

$$\begin{aligned}
0 > \langle v, v\rangle &= \langle au + \widehat{v}, au + \widehat{v}\rangle = a^2\langle u, u\rangle + \langle \widehat{v}, \widehat{v}\rangle \\
&= -\ a^2(-\ \langle u, u\rangle) + |\widehat{v}|^2 = -\ a^2|u|^2 + |\widehat{v}|^2 \\
&= -\ a^2 + |\widehat{v}|^2.
\end{aligned}$$

Com um cálculo análogo encontramos que

$$0 > \langle w, w \rangle = -\, b^2 + |\widehat{w}|^2.$$

Então

$$|a| > |\widehat{v}| \quad e \quad |b| > |\widehat{w}|,$$

logo

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \langle au + \widehat{v}, bu + \widehat{w} \rangle = ab\langle u, u \rangle + a\langle u, \widehat{w} \rangle + b\langle \widehat{v}, u \rangle + \langle \widehat{v}, \widehat{w} \rangle \\ &= -\, ab + \langle \widehat{v}, \widehat{w} \rangle. \end{aligned}$$

Agora como $v, w \in C(u)$ temos

$$0 > \langle v, u \rangle = \langle au + \widehat{v}, u \rangle = a\langle u, u \rangle = -\, a,$$

e seque que $a > 0$. Analogamente $0 > \langle v, u \rangle = -\, b \implies b > 0$, e assim $ab > 0$. Agora usando a desigualdade de Cauchy-Scharwz clássica para $\widehat{v}, \widehat{w}$ temos

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= -\, ab + \langle \widehat{v}, \widehat{w} \rangle \leq -\, ab + |\langle \widehat{v}, \widehat{w} \rangle| \\ &\leq -\, ab + |\widehat{v}||\widehat{w}| < -\, ab + |a||b| \\ &= -\, ab + ab = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $w \in C(u)$ se, e somente se, $\langle v, w \rangle < 0$.

□

Definição 1.32. *Seja M uma variedade de Lorentz e $\mathcal{T}$ uma função em M a qual corresponde a cada ponto $p \in M$ um cone tipo-tempo $\mathcal{T}_p \in T_pM$. Dizemos que $\mathcal{T}$ é diferenciável quando para cada $p \in M$ existem uma vizinhança U de p e $V \in \mathfrak{X}(M)$ tais que $V(q) \in \mathcal{T}_q$, $\forall\ q \in U$. Uma tal função diferenciável é dita uma orientação temporal de M. Se M admite uma orientação temporal então dizemos que M é temporalmente orientado.*

O próximo resultado nos fornece uma maneira de mostrar que uma variedade é temporalmente orientada.

Proposição 1.33. *Uma variedade Lorentziana M é temporalmente orientada se, e somente se, existe um campo $K \in \mathfrak{X}(M)$ tipo-tempo globalmente definido em M.*

Demonstração. Se $K \in \mathfrak{X}(M)$ é tipo-tempo então, defina

$$\mathcal{T}_p = C(K(p)),$$

e observe que $\mathcal{T}_p$ é diferenciável e determina uma orientação temporal em M.

Reciprocamente, seja $\mathcal{T}$ uma orientação temporal em M. Como $\mathcal{T}$ é diferenciável em ponto $p \in M$, existe uma vizinhança U de M na qual o campo de vetores tipo-tempo K_U esta definido, tal que $K_U(q) \in \mathcal{T}_q$, para todo $q \in U$. Assim, obtemos uma cobertura $\{U_\alpha\}$ de M e campos de vetores tipo-tempo K_{U_α} tais que $K_{U_\alpha}(q) \in \mathcal{T}_q$, para $q \in U_\alpha$.

Seja $\{f_\alpha\}$ uma partição diferenciável da unidade subordinada a cobertura $\{U_\alpha\}$ e considere o campo

$$K = \sum_\alpha f_\alpha K_{U_\alpha}.$$

Temos que K esta bem definido pois em cada ponto de M a soma em α é finita. Além disso

$$\begin{aligned} \langle K(q), K(q) \rangle &= \left\langle \sum_\alpha f_\alpha(q) K_{U_\alpha}(q), \sum_\beta f_\beta(q) K_{U_\beta}(q) \right\rangle \\ &= \sum_{\alpha,\beta} f_\alpha(q) f_\beta(q) \langle K_{U_\alpha}(q), K_{U_\beta}(q) \rangle, \end{aligned}$$

como $K_{U_\alpha}, K_{U_\beta} \in \mathcal{T}_q$ então, pelo item (3) do Lema (1.7), temos

$$\langle K_{U_\alpha}(q), K_{U_\beta}(q) \rangle < 0,$$

e como a soma das $f_\alpha(q)$ é igual a 1, então deve existir um índice α tal que $f_\alpha(q) > 0$. De maneira análoga obtemos $f_\beta(q) > 0$. Logo

$$\langle K(q), K(q) \rangle < 0.$$

Uma vez que q é um ponto arbitrário de M, temos que K é um campo de vetores em M tipo-tempo. □

Sempre que uma variedade de Lorentz M for temporalmente orientável, a escolha de uma aplicação $\mathcal{T}$ como na Definição (1.32), ou de um campo vetorial tipo-tempo $X \in \mathfrak{X}(M)$ a ela correspondente, será denominada uma orientação temporal para M.

Observação 1.5. *Seja $\mathcal{T}$ uma orientação temporal para M e $K \in \mathfrak{X}(M)$. Então,*

1. *se $K(q) \in \mathcal{T}_q$ para todo $q \in M$, dizemos que K aponta para o futuro;*
2. *se $-K(q) \in \mathcal{T}_q$ para todo $q \in M$, dizemos que K aponta para o passado.*

Sendo $X \in \mathfrak{X}(M)$ uma orientação temporal para M, segue do item (3) do Lema (1.7) que um campo vetorial tipo-tempo K sobre M,

1. *aponta para o futuro se, e somente se, $\langle K, X \rangle < 0$;*
2. *aponta para o passado se, e somente se, $\langle K, X \rangle > 0$.*

Definição 1.34. *Uma imersão suave* $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ *de uma variedade* n*-dimensional conexa em uma variedade de Lorentz* $(n+1)$*-dimensional é dita uma hipersuperfície tipo-espaço quando a métrica induzida pela imersão* x *em* M^n *for Riemanniana. E neste caso denotemos a métrica de* M *e* $\overline{M}$ *por* $\langle , \rangle$.

Uma vez escolhida a orientação temporal da hipersuperfície tipo-espaço imersa num espaço-tempo, $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, denotaremos por N essa escolha e também denominaremos N como sendo a *Aplicação Normal de Gauss* de M.

Seja $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ a hipersuperfície tipo-espaço dada acima. Como só existe uma direção normal, deixaremos de escrever o subíndice em A para denotar a direção normal. Com exceção da métrica, denotaremos por $\overline{\nabla}$ e $\overline{R}$ a conexão de Levi-Civita e o tensor curvatura de $\overline{M}$, respectivamente e por ∇ e R a conexão de Levi-Civita e o tensor curvatura de M respectivamente.

Então dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, é fácil ver que a fórmula de Gauss é dada por

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \langle AX, Y \rangle N. \tag{1.5}$$

Por outro lado, uma vez que N é um campo unitário e normal, temos $\langle \overline{\nabla}_X N, N \rangle = 0$, e portanto $\nabla_X^{\perp} N = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Assim, podemos escrever a fórmula de Weingarten como

$$\overline{\nabla}_X N = -\, AX. \tag{1.6}$$

Usando o fato que $\alpha(X, Y) = -\, \langle AX, Y \rangle N$, podemos ver que a equação de Gauss pode ser escrita como

$$R(X, Y)Z = (\overline{R}(X, Y)Z)^{\top} - \langle AX, Z \rangle AY + \langle AY, Z \rangle AX,$$

e a equação de Codazzi por

$$(\overline{R}(X, Y)N)^{\top} = (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X, \tag{1.7}$$

onde por definição

$$(\nabla_X A)Y = \nabla_X (AY) - A(\nabla_X Y).$$

No caso em que a curvatura seccional de $\overline{M}$ é constante C, as equações de Gauss e Codazzi são, respectivamente

$$R(X, Y)Z = C(\langle Z, X \rangle Y - \langle Z, Y \rangle X) - \langle AX, Z \rangle AY + \langle AY, Z \rangle AX$$

e

$$(\nabla_Y A)X = (\nabla_X A)Y.$$

1.2.7 Alguns Operadores Diferenciáveis

Estenderemos agora os conceitos de vetor gradiente, divergente, Hessiano e Laplaciano para variedades semi-Riemannianas. O referencial $E_1, \ldots, E_n$ sempre denotará um referencial ortonormal em um ponto $p \in M$.

Definição 1.35. *O gradiente de uma função $f \in C^{\infty}(M)$, o qual denotaremos por ∇f, é um campo vetorial metricamente equivalente a diferencial $df \in \mathfrak{X}^*(M)$.*

Assim

$$\langle \nabla f, X \rangle = df(X) = X(f), \quad \forall\ X \in \mathfrak{X}(M).$$

Em termos de um referencial ortonormal

$$\langle \nabla f, E_j \rangle = df(E_j) = E_j(f),$$

e sendo $E_1, \ldots, E_n$ uma base ortonormal, podemos escrever $\nabla f = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla f, E_i \rangle E_i$ e portanto

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} E_i(f) E_i.$$

Definição 1.36. *Dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ definimos a divergência do campo X como a função $divX : M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$divX = traço(Y(p) \to \nabla_Y X(p)),\ p \in M.$$

Assim em um referencial ortonormal podemos escrever

$$divX = \sum_i \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle.$$

Definição 1.37. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O Hessiano de f, denotado por $Hessf$, é o campo tensorial $Hessf : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dado por*

$$(Hessf)(X, Y) = \langle \nabla_X(\nabla f), Y \rangle.$$

O próximo resultado, nos dá algumas propriedades do *Hessiano*.

Lema 1.8. *O Hessiano de f é um campo tensorial do tipo $(0,2)$ simétrico tal que*

$$(Hessf)(X,Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f, \quad \forall\ X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Demonstração. Não é difícil mostrar que $Hessf$ é $C^\infty(M)$-linear em cada entrada. Desta forma, $Hessf$ é um tensor do tipo $(0,2)$.

Como $\langle \nabla f, Y\rangle = Y(f)$, temos que

$$\begin{aligned} X(Y(f)) &= X\langle \nabla f, Y\rangle = \langle \nabla_X(\nabla f), Y\rangle + \langle (\nabla f), \nabla_X Y\rangle \\ &= (Hessf)(X,Y) + \langle (\nabla f), \nabla_X Y\rangle \\ &= (Hessf)(X,Y) + (\nabla_X Y)f,\ \forall\ X,Y \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Para a simetria, vamos usar a definição dos colchetes. Observe que por um lado

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

mas por outro lado usando a simetria da conexão de Levi-Civita, temos

$$[X,Y](f) = (\nabla_X Y)f - (\nabla_Y X)f,$$

daí

$$X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)f.$$

Assim pela equação (1.8) temos

$$(Hessf)(X,Y) = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)f = (Hessf)(Y,X), \quad \forall\ X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

O que conclui o Lema. □

Definição 1.38. *Seja M uma variedade semi-Riemanniana. Definimos o operador Laplaciano de M, $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ por*

$$\Delta f = \textit{traço}(Hessf),\ \forall\ f \in C^\infty(M).$$

Observe que o Laplaciano também pode ser visto da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sum_i \varepsilon_i \langle (Hessf)(E_i), E_i\rangle \\ &= \sum_i \varepsilon_i \langle \nabla_{E_i}(\nabla f), E_i\rangle \\ &= div(\nabla f). \end{aligned}$$

Lema 1.9. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana com métrica $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ e conexão de Levi-Civita ∇, $h : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função em $C^\infty(M)$ e $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função em $C^\infty(\mathbb{R})$. Então*

1. $\nabla(\phi \circ h) = \phi'(h)\nabla h$;

2. $\triangle(\phi \circ h) = \phi''|\nabla h|^2 + \phi'\triangle h$.

Demonstração. (i) O gradiente de uma função é o campo metricamente equivalente a diferencial dessa função. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \langle \nabla(\phi \circ h), X\rangle &= d(\phi\phi \circ h)(X) = \phi'(h)dh(X) \\ &= \phi'(h)\langle \nabla h, X\rangle = \langle \phi'(h)\nabla h, X\rangle, \end{aligned}$$

para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$. Portanto, $\nabla(\phi \circ h) = \phi'(h)\nabla h$.

(ii) Temos

$$\begin{aligned} \triangle(\phi \circ h) &= tr(Hess(\phi \circ h)) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i}\nabla(\phi \circ h), e_i\rangle \\ &= \phi'(h)\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}\nabla h, e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} e_i(\phi'(h))\langle \nabla h, e_i\rangle \\ &= \phi'(h)\triangle h + \langle \nabla(\phi'(h)), \nabla h\rangle \\ &= \phi'(h)\triangle h + \phi''\langle \nabla h, \nabla h\rangle \\ &= \phi''|\nabla h|^2 + \phi'\triangle h, \end{aligned}$$

onde usamos o ítem (i) nas desigualdades acima.

□

1.2.8 Produtos Warped

Em um produto semi-Riemanniano $B \times F$, o tensor métrico definido sobre a mesma é dado por $\pi_B^*(g_B) + \pi_F^*(g_F)$ onde π_B^* e π_F^* são as projeções de $B \times F$ sobre B e F, respectivamente. Uma rica classe de métricas em $B \times F$ pode ser obtida "torcendo" homotéticamente a métrica produto, como veremos a seguir (para maiores detalhes ver [30]).

Definição 1.39. *Suponha que B e F sejam variedades semi-Riemannianas, e considere $f > 0$ uma função suave em B. O produto warped $\overline{M} = B \times_f F$ é a variedade produto $B \times F$ munida com o tensor métrico*

$$\overline{g} = \pi_B^*(g_B) + (f \circ \pi_B)^2\pi_F^*(g_F).$$

Observe que se $f = 1$, temos a variedade produto semi-Riemanniana $B \times F$. Chamamos B a *base* de $\overline{M} = B \times_f F$ e F a *fibra.* Nosso objetivo agora é expressar a geometria de M em termos da função warped f e da geometria de B e F.

Como no caso do produto warped semi-Riemanniano, não é difícil mostrar que as fibras $\{p\} \times F = \pi_F^{-1}(p)$ e as folhas $B \times \{q\} = \pi_B^{-1}(q)$ são subvariedades semi-Riemannianas de $\overline{M}$.

Observação 1.6. *A métrica warped é caracterizada por:*

1. Para cada $p \in F$, a aplicação $\pi_B\big|_{B\times\{q\}}$ é uma isometria sobre B;
2. Para cada $q \in B$, a aplicação $\pi_F\big|_{\{p\}\times F}$ é uma homotetia positiva sobre F com fator homotético $\frac{1}{f(p)}$;
3. Para cada $(p,q) \in \overline{M}$, a folha $B \times \{q\}$ e a fibra $\pi_F\big|_{\{p\}\times F}$ são ortogonais em (p,q);

Os vetores tangentes as folhas são chamados *horizontais* enquanto os tangentes as fibras são ditos *verticais.*

Funções, vetores tangentes e campos de vetores em F e em B, podem ser levantados para $B \times F$ usando a projeções π_F e π_B, constituindo assim, funções, vetores e campos em $B \times F$. Denotamos por $\mathcal{H}(B)$ o conjunto dos levantamentos horizontais e por $\mathcal{V}(F)$ o conjunto dos levantamentos verticais. Notemos que $\mathcal{H}(B)$ e $\mathcal{V}(F)$ são subespaços vetoriais de $\mathfrak{X}(B \times F)$. Além disso, se $X \in \mathcal{H}(B)$ e $V \in \mathcal{V}(F)$, não é difícil verificar que $[X,V] = 0$.

Proposição 1.40. *Seja o produto warped $\overline{M} = B \times_f F$. Considerando $X, Y \in \mathcal{H}(B)$ e $V, W \in \mathcal{V}(F)$, temos*

1. $\overline{\nabla}_X V \in \mathcal{H}(B)$ *é o levantamento de* $\overline{\nabla}_X V$ *em* B*;*

2. $\overline{\nabla}_X V = \overline{\nabla}_V X = \dfrac{X(f)}{f} V.$

Demonstração. 1. Pelo item (iii) da observação (1.40) e usando o fato de que $[X,V] = 0 = [Y,V]$, a fórmula de Koszul (1.2)

$$\begin{aligned} 2\langle \overline{\nabla}_X Y, V\rangle &= X\langle Y,V\rangle + Y\langle V,X\rangle - V\langle X,Y\rangle \\ &\quad - \langle X,[Y,V]\rangle + \langle Y,[V,X]\rangle + \langle V,[X,Y]\rangle, \end{aligned}$$

se reduz a

$$2\langle \overline{\nabla}_X Y, V\rangle = -V\langle X,Y\rangle - \langle V,[X,Y]\rangle.$$

Por outro lado, como $X, Y \in \mathcal{H}(B)$ então $\langle X,Y\rangle$ é constante nas fibras, e como $V \in \mathcal{V}(F)$ temos que $V\langle X,Y\rangle = 0$. E assim, $2\langle \overline{\nabla}_X Y, V\rangle = 0$, para qualquer $V \in \mathcal{V}(F)$, isto é, $\overline{\nabla}_X Y$ é um campo horizontal. Agora, pelo item (i) da observação (1.6), segue que $\overline{\nabla}_X V \in \mathcal{H}(B)$ é o levantamento de $\overline{\nabla}_X V$ em B.

2. Como $0 = [X,V] = \overline{\nabla}_X V - \overline{\nabla}_V X$ então $\overline{\nabla}_X V = \overline{\nabla}_V X$ e estes campos são verticais, pois pelo item (i) temos que

$$\langle \overline{\nabla}_X V, Y\rangle = X\langle V, Y\rangle - \langle V, \overline{\nabla}_V X\rangle = 0.$$

Seja agora W um campo vertical a F, logo a fórmula de Koszul (1.2)

$$\begin{aligned} 2\langle \overline{\nabla}_X V, W\rangle &= X\langle V, W\rangle + V\langle W, X\rangle - W\langle X, V\rangle \\ &- \langle X, [V,W]\rangle + \langle V, [W,X]\rangle + \langle W, [X,V]\rangle, \end{aligned}$$

reduz-se a $2\langle \overline{\nabla}_X Y, V\rangle = X\langle Y, V\rangle$.

Por outro lado pela definição da métrica warped,

$$\begin{aligned} \langle V, W\rangle_{(p,q)} &= \langle 0 + V, 0 + W\rangle_{(p,q)} \\ &= \langle 0, 0\rangle_B + f^2(p)\langle V_q, W_q\rangle_F, \end{aligned}$$

escrevendo $f = f \circ \pi_B$ temos que

$$\langle V, W\rangle = f^2(\langle V_q, W_q\rangle_F \circ \pi_F).$$

Observando que $\langle V_q, W_q\rangle_F \circ \pi_F$ é constante nas folhas onde X é tangente, temos

$$\begin{aligned} X\langle V, W\rangle &= X(\langle V_q, W_q\rangle_F \circ \pi_F) \\ &= 2fX(f)(\langle V_q, W_q\rangle_F \circ \pi_F) \\ &= \frac{2X(f)}{f}\left(f^2(\langle V_q, W_q\rangle_F \circ \pi_F)\right) \\ &= \frac{2X(f)}{f}\langle V, W\rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$2\langle \nabla_X V, W\rangle = X\langle V, W\rangle = \frac{2X(f)}{f}\langle V, W\rangle.$$

Sendo a métrica não degenerada e $W \in \mathcal{V}(F)$ qualquer, segue que

$$\overline{\nabla}_X V = \overline{\nabla}_V X = \frac{X(f)}{f} V.$$

□

De posse dos conhecimentos descritos acima, passemos a descrever algumas propriedades importantes de uma classe de variedades de Lorentz do nosso interesse.

Definição 1.41. *Sejam (F^n, g) uma variedade Riemanniana completa de dimensão $n \geq 2$, $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ munido com a métrica $-dt^2$ e $f \in C^\infty(I \times F)$*

uma função positiva. A variedade produto $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f F$ *munida com a métrica Lorentziana* $\overline{g}$ *dada por*

$$\overline{g} = \pi_I^*(-dt^2) + f(\pi)\pi_F^*(g),$$

onde π_I *e* π_F *denotam, respectivamente, as projeções sobre* I *e* F*, é dita um espaço-tempo de Robertson-Walker Generalizado (GRW). Isto é, um espaço-tempo GRW* $(\overline{M}^{n+1}_{,}\overline{g})$ *é um produto warped com base* $(I, -dt^2)$*, fibra Riemanniana* (F, g) *e função warped* f*.*

O campo vertical, $\frac{\partial}{\partial_t}$ é por definição o campo de vetores tipo-tempo na direção que contém I. Para simplificar a notação, denotemos $\frac{\partial}{\partial_t}$ por ∂_t e $\overline{g}$ por $\langle,\rangle$.

Proposição 1.42. *Seja* $(\overline{M}^{n+1}_{,}\overline{g})$ *um espaço-tempo GRW com base* $(I, -dt^2)$*, fibra Riemanniana* (F^n, g) *e função warped f. Então o campo* $K = f(\pi_I)\partial_t \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ *é conforme fechado, tipo-tempo globalmente definido em* $\overline{M}$*, onde* $\pi_I : \overline{M} \to I$ *denota a projeção sobre I.*

Demonstração. Identifiquemos $f = f(\pi_I)$. Então

$$\langle K, K\rangle = \langle f\partial_t, f\partial_t\rangle = f^2\langle\partial_t, \partial_t\rangle = -f^2 < 0,$$

isto é, K é tipo-tempo.

Por outro lado, $\langle\partial_t, \partial_t\rangle = -1$, dai

$$0 = \partial_t\langle\partial_t, \partial_t\rangle = 2\langle\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t, \partial_t\rangle,$$

e pelo item (i) da Proposição (1.40) temos $\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = 0$. Logo qualquer $V \in \mathfrak{X}(M)$ pode ser escrito como $V = -h\partial_t + V_F$, onde $h \in C^\infty(M)$ e $V_F \in \mathcal{V}(F)$ e pelo item (ii) da Proposição (1.40)

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_V K &= \overline{\nabla}_{-h\partial_t + V_F}(f\partial_t) = -h\overline{\nabla}_{\partial_t}(f\partial_t) + \overline{\nabla}_{V_F}(f\partial_t) \\
&= -hf\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t - h\partial_t(f)\partial_t + \frac{f\partial_t(f)}{f}V_F \\
&= -f'h\partial_t + f'V_F = f'(-h\partial_t + V_F) = f'V.
\end{aligned}$$

Logo para quaisquer $V, W \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, temos

$$\langle\overline{\nabla}_V K, W\rangle + \langle V, \overline{\nabla}_W K\rangle = \langle f'V, W\rangle + \langle V, f'W\rangle = 2f'\langle V, W\rangle,$$

de onde concluímos que K é conforme e fechado segundo a definição (1.22). $\square$

Capítulo 2

O Steady State Space $\mathcal{H}^{n+1}$

O principal objetivo desta seção é definir o Steady State space $\mathcal{H}^{n+1}$ e apresentar alguns resultados que serão usados nos próximos capítulos. Iniciaremos com a definição e algumas propriedades do espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$.

Seja $\mathbb{L}^{n+2}$ o espaço de Lorentz-Minkowski $(n+2)$-dimensional $(n \geq 2)$, que é o espaço vetorial real $\mathbb{R}^{n+2}$ munido com a métrica Lorentziana definida por

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} v_i w_i - v_{n+2} w_{n+2},$$

$$\forall\ v, w \in \mathbb{R}^{n+2}.$$

A hiperquádrica $(n+1)$-dimensional

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = \{p \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle p, p \rangle = 1\},$$

formada por todos os vetores unitários tipo-espaço de $\mathbb{L}^{n+2}$, munida com a métrica induzida de $\mathbb{L}^{n+2}$ é chamado *o espaço de De Sitter*.

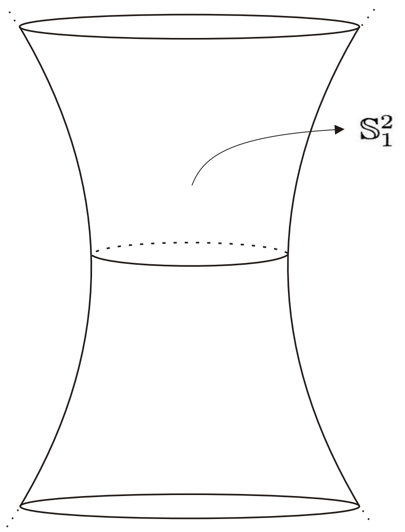

Figura 2.1: O espaço de De Sitter no caso tridimencional.

A métrica induzida de $\mathbb{L}^{n+2}$ faz de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ uma variedade de Lorentz com curvatura seccional constante igual a 1.

Afirmamos que $\mathbb{S}_1^{n+1}$ é uma variedade de Lorentz com curvatura seccional constante igual a 1. De fato, considere a função $f : \mathbb{L}^{n+2} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(p) = \langle p, p \rangle,$$

e note que $\mathbb{S}_1^{n+1} = f^{-1}(1)$, isto é, $\mathbb{S}_1^{n+1}$ é uma variedade de Lorentz.

Consideremos agora K e $\overline{K}$ as curvaturas seccionais de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ e $\mathbb{L}^{n+2}$ respectivamente. Então, dados $p \in \mathbb{S}_1^{n+1}$, $\eta(p) \in (T_p\mathbb{S}_1^{n+1})^{\perp}$ e $E_1, \ldots, E_{n+1}$ um referencial ortonormal que diagonaliza o operador de Weingarten $A_\eta = A$ de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ em p, isto é, $AE_i = \lambda_i E_i$, $i = 1, \ldots, n+1$, onde λ_i são os autovalores de A, cuja existência do referencial ortonormal $E_1, \ldots, E_{n+1}$ segue do fato de A ser simétrico. Agora, pela equação de Gauss, Proposição (1.30), temos

$$K(E_i, E_j) = \overline{K}(E_i, E_j) + \langle \alpha(E_i, E_i), \alpha(E_j, E_j) \rangle - \langle \alpha(E_i, E_j), \alpha(E_i, E_j) \rangle, \qquad (2.1)$$

mas

$$\langle \alpha(E_i, E_i), \eta \rangle = \langle AE_i, E_i \rangle = \lambda_i \langle E_i, E_i \rangle = \lambda_i,$$

logo, $\alpha(E_i, E_i) = \lambda_i \eta$.

De maneira análoga obtemos $\alpha(E_j, E_j) = \lambda_j \eta$ e $\alpha(E_i, E_j) = 0$.

Assim, da equação (2.1), segue que

$$K(E_i, E_j) = \overline{K}(E_i, E_j) + \lambda_i \lambda_j, \quad i, j = 1, \ldots, n+1. \tag{2.2}$$

Seja $p \in \mathbb{L}^{n+2}$ tal que $p = \sum_i u^i \partial_i$. Como $\langle p, p \rangle = 1$, temos que

$$0 = X\langle p, p \rangle = 2\langle \nabla^{\circ}_X p, p \rangle.$$

Mas

$$\nabla^{\circ}_X p = \sum_i X(u^i)\partial_i = X, \quad \forall\ X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{n+1}),$$

o que implica $\langle X, p \rangle = 0, \forall\ X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{n+1})$. Assim, p é ortogonal ao De Sitter.

Considerando $N = -p$, e usando a fórmula de Weingarten (1.6), temos que para qualquer $v \in T_p\mathbb{S}_1^{n+1}$

$$Av = -\overline{\nabla}_v N = -\nabla^{\circ}_v N = \nabla^{\circ}_v p = v.$$

Desta maneira $\mathbb{S}_1^{n+1}$ é uma variedade totalmente umbilíca com $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n+1} = 1$.

Sendo a curvatura seccional de $\mathbb{L}^{n+2}$ constante e igual a zero, segue da equação (2.2) que $K(E_i, E_j) = 1$. Pela linearidade podemos estender para todos os campos tangente a $\mathbb{S}_1^{n+1}$.

Além disso, se $p \in \mathbb{S}_1^{n+1}$, temos

$$T_p(\mathbb{S}_1^{n+1}) = \{v \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle v, p \rangle = 0\}.$$

Veja que $e_{n+2} = (0, \ldots, 0, 1)$ é um campo de vetores tipo-tempo unitário e globalmente definido em $\mathbb{L}^{n+2}$, determinando assim, uma orientação temporal em $\mathbb{L}^{n+2}$. Logo, dada uma hipersuperfície tipo-espaço no espaço de De Sitter $x : M^n \to \mathbb{S}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ podemos escolher um único campo normal unitário de vetores tipo-tempo N ao longo de M^n apontando para o futuro em $\mathbb{L}^{n+2}$, isto é, $\langle N, e_{n+2} \rangle < 0$. Deste modo, podemos assumir que M^n é orientada por N. De agora em diante denotaremos por ∇°, $\overline{\nabla}$ e ∇ as conexões de Levi-Civita de $\mathbb{L}^{n+2}$, $\mathbb{S}_1^{n+1}$ e M^n, respectivamente. Então a fórmula de Gauss e Weingarten de M^n em $\mathbb{S}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} \nabla^{\circ}_V W &= \overline{\nabla}_V W - \langle V, W \rangle x \\ &= \nabla_V W - \langle AV, W \rangle N - \langle V, W \rangle x \end{aligned} \tag{2.3}$$

e

$$A(V) = -\ \nabla^{\circ}_{V} N = -\ \overline{\nabla}_{V} x, \tag{2.4}$$

para todos $V, W \in \mathfrak{X}(M)$.

De fato, para a fórmula de Weingarten observemos que como $\langle W, N \rangle = 0$, temos pela compatibilidade da conexão, que

$$0 = V \langle W, N \rangle = \langle \nabla^{\circ}_{V} W, N \rangle + \langle W, \nabla^{\circ}_{V} N \rangle \ \Rightarrow\ \langle \nabla^{\circ}_{V} W, N \rangle = -\ \langle W, \nabla^{\circ}_{V} N \rangle.$$

Por outro lado

$$\langle AV, W \rangle = \langle \alpha(V, W), N \rangle = \langle \nabla^{\circ}_{V} W - \nabla_{V} W, N \rangle = \langle \nabla^{\circ}_{V} W, N \rangle = -\ \langle W, \nabla^{\circ}_{V} N \rangle,$$

como a métrica é não degenerada, segue que $AV = -\ \nabla^{\circ}_{V} N$, analogamente mostra-se que $AV = -\ \overline{\nabla}_{V} x$.

Portanto

$$A(V) = -\ \nabla^{\circ}_{V} N = -\ \overline{\nabla}_{V} x.$$

Para a fórmula de Gauss, observemos que podemos decompor o espaço tangente do espaço de Minkowski como

$$T_p \mathbb{L}^{n+2} = T_p M^n \oplus span\{N\} \oplus span\{x\}.$$

Logo, para campos tangente a M, temos

$$\nabla^{\circ}_{V} W = \nabla_{V} W + cN + dx, \quad c, d \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Fazendo produto escalar com N na expressão (2.5) obtemos

$$\langle \nabla^{\circ}_{V} W, N \rangle = \langle \nabla_{V} W, N \rangle + \langle cN, N \rangle + \langle dx, N \rangle.$$

Mas pela fórmula de Weingarten (2.4)

$$0 = V \langle W, N \rangle = \langle \nabla^{\circ}_{V} W, N \rangle + \langle W, \nabla^{\circ}_{V} N \rangle \ \Rightarrow\ \langle \nabla^{\circ}_{V} W, N \rangle = \langle W, AV \rangle.$$

Como

$$\langle \nabla_{V} W, N \rangle = \langle dx, N \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle cN, N \rangle = c\ \langle N, N \rangle = -\ c$$

temos que

$$c = -\,\langle AV, W\rangle.$$

Com um raciocínio análogo encontramos $d = -\,\langle V, W\rangle$ e portanto pela expressão (2.5) concluímos que

$$\nabla^{\circ}_{V} W = \nabla_V W - \langle AV, W\rangle N - \langle V, W\rangle x.$$

Agora, seja $a \in \mathbb{L}^{n+2}$, $a \neq 0$ um vetor nulo apontando para o passado, isto é, $\langle a, a\rangle = 0$ *e* $\langle a, e_{n+2}\rangle > 0$, onde $e_{n+2} = (0, \ldots, 0, 1)$.

Então a região aberta do De Sitter $\mathbb{S}^{n+1}_1$ dada por,

$$\mathcal{H}^{n+1} = \{x \in \mathbb{S}^{n+1}_1; \langle x, a\rangle > 0\},$$

é chamada *Steady State Space*.

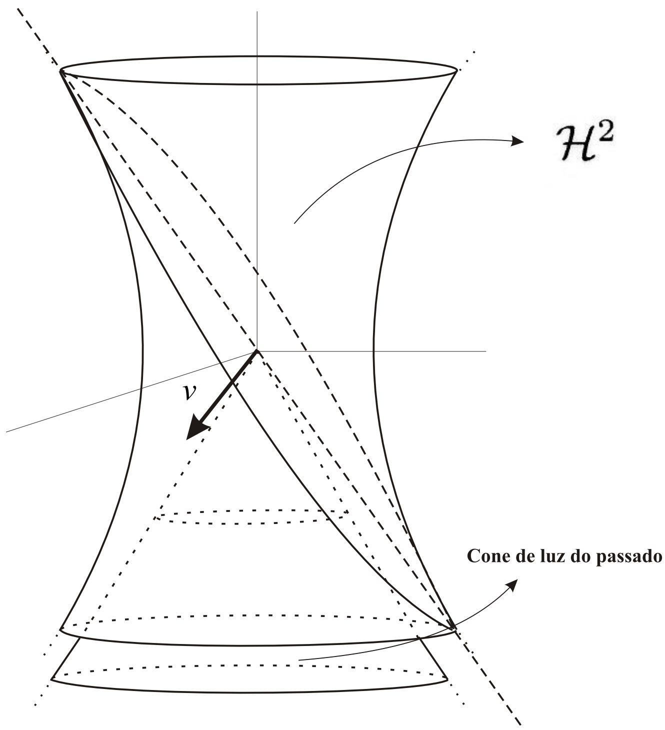

Figura 2.2: O Steady State Space no caso tridimencional.

Agora, como $dim(T_x\mathbb{S}_1^{n+1}) = dim(T_x\mathcal{H}^{n+1}) = n+1, \quad \forall x \in \mathcal{H}^{n+1}$ segue que

$$T_x(\mathbb{S}_1^{n+1}) = T_x(\mathcal{H}^{n+1}) = \{v \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle v, x\rangle = 0\}.$$

Observe que $\mathcal{H}^{n+1}$ é estendível, uma vez que $\mathcal{H}^{n+1}$ é isométrica a um aberto de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ e por isso é não-completo (em verdade, $\mathcal{H}^{n+1}$ é apenas uma metade do De Sitter). A sua fronteira, como um subconjunto de $\mathbb{S}_1^{n+1}$, é a hipersuperfície nula

$$\{x \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle x, a\rangle = 0\},$$

cuja a topologia é equivalente a de $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$ (cf. [27], pág. 126).

Como vimos no capítulo anterior, uma imerção suave $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathcal{H}^{n+1}$ de uma variedade compacta Σ^n é dita uma hipersuperfície tipo-espaço se a métrica induzida por ψ é uma mética Riemanniana em Σ^n. Neste contexto, existe um único campo de vetores normal unitário tipo-tempo N globalmente definido em Σ^n apontando para o futuro, isto é, $\langle N, e_{n+2}\rangle < 0$. Ao longo deste trabalho vamos nos referir a N como sendo a aplicação de Gauss de Σ^n apontando para o futuro. A funçao curvatura média de uma hipersuperfície tipo-espaço Σ^n é definida como

$$H = -\frac{1}{n}tr(A),$$

onde A representa o Operador de Forma de Σ^n com respeito a aplicação de Gauss N apontando para o futuro.

Consideremos, em $\mathcal{H}^{n+1}$, o seguinte campo

$$\mathcal{K}(x) = \mathcal{K} = a - \langle x, a\rangle\, x.$$

O campo de vetores $\mathcal{K}$ definido acima pertence a $\mathfrak{X}(\mathcal{H}^{n+1})$ e é um campo tipo-tempo. Com efeito,

$$\langle \mathcal{K}(x), x\rangle = \langle a - \langle a, x\rangle\, x, x\rangle\ = \langle a, x\rangle - \langle a, x\rangle \langle x, x\rangle\ = \langle a, x\rangle - \langle a, x\rangle = 0.$$

Logo $\mathcal{K} \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}^{n+1})$.

Para verificar que $\mathcal{K}$ é tipo-tempo, veja que

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{K}(x), \mathcal{K}(x) \rangle &= \langle a - \langle x, a \rangle x, a - \langle x, a \rangle x \rangle \\
&= \langle a, a \rangle - 2 \langle a, \langle x, a \rangle x \rangle + \langle x, a \rangle^2 \langle x, x \rangle \\
&= -\ 2 \langle a, x \rangle \langle x, a \rangle + \langle x, a \rangle^2 \langle x, x \rangle \\
&= -2 \langle x, a \rangle^2 + \langle x, a \rangle^2 \\
&= \langle x, a \rangle^2 (1 - 2) \\
&= -\ \langle x, a \rangle^2 .
\end{aligned}$$

Como $\langle x, a \rangle > 0$, segue que $\langle x, a \rangle^2 > 0$, donde $- \langle x, a \rangle < 0$. Portanto $\langle \mathcal{K}(x), \mathcal{K}(x) \rangle < 0$, e assim $\mathcal{K}$ é um campo tipo-tempo.

Por outro lado, denotando $\overline{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\mathcal{H}^{n+1}$, temos pela fórmula de Gauss (2.3)

$$\nabla^{\circ}_V \mathcal{K} = \overline{\nabla}_V \mathcal{K} - \langle V, \mathcal{K} \rangle x.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_V \mathcal{K} &= \overline{\nabla}_V \mathcal{K} - \langle V, \mathcal{K} \rangle x \\
&= \nabla^{\circ}_V (a - \langle x, a \rangle x) + \langle V, a - \langle x, a \rangle x \rangle x \\
&= \nabla^{\circ}_V a - \nabla^{\circ}_V (\langle x, a \rangle x) + \langle V, a \rangle x - \langle x, a \rangle \langle V, x \rangle x \\
&= - \langle x, a \rangle \nabla^{\circ}_V x - V \langle x, a \rangle x + \langle V, a \rangle x - \langle x, a \rangle \langle V, x \rangle x \\
&= - \langle x, a \rangle V - \langle \nabla^{\circ}_V a, x \rangle x - \langle a, \nabla^{\circ}_V x \rangle x + \langle V, a \rangle x \\
&= - \langle x, a \rangle V - \langle V, a \rangle x + \langle V, a \rangle x \\
&= - \langle x, a \rangle V.
\end{aligned}$$

Além disso, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}^{n+1})$, temos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{\nabla}_X \mathcal{K}, Y \right\rangle + \left\langle X, \overline{\nabla}_Y \mathcal{K} \right\rangle &= -2 \langle x, a \rangle \langle X, Y \rangle \\
&= 2\phi \langle X, Y \rangle ,
\end{aligned}$$

onde $\phi = - \langle x, a \rangle$. Mostrando que $\mathcal{K}$ é um campo conforme fechado em $\mathcal{H}^{n+1}$.

Definição 2.1. *Dizemos que uma distribuição $\mathcal{D}$ é involutiva quando dados quaisquer pares de campos de vetores X e Y definidos em um subconjunto aberto de M tais que $X_p, Y_p \in \mathcal{D}_p$ tem-se $[X_p, Y_p] \in \mathcal{D}_p$.*

A seguinte proposição foi apresentada pela primeira vez por Montiel (cf. [26], Proposição 1) e afirma que o Steady State space pode ser folheado por hipersuperfícies totalmente umbílicas isométricas ao $\mathbb{R}^n$.

Proposição 2.2. *Seja $\mathcal{H}^{n+1}$, $n \geq 1$ uma variedade de Lorentz dotada de um campo tipo-tempo $\mathcal{K}$ conforme e fechado. Então a distribuição n-dimensional $\mathcal{D}$ definida em $\mathcal{H}^{n+1}$ por*

$$p \in \mathcal{H}^{n+1} \mapsto \mathcal{D}(p) = \{v \in T_p\mathcal{H}^{n+1}; \langle \mathcal{K}(p), v \rangle = 0\}$$

determina uma folheação $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ tipo-espaço de codimenção 1 orientada por $\mathcal{K}$. Além disso, as folhas de $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ são as hipersuperfícies totalmente umbílicas de $\mathcal{H}^{n+1}$

$$L^n(\tau) = \{x \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle x, a \rangle = \tau\},$$

$\tau \in \mathbb{R}$ e $\tau > 0$ que são isométricas ao $\mathbb{R}^n$. Mais ainda, $L^n(\tau)$ possui curvatura média constante igual a 1 com respeito ao campo normal unitário

$$N_\tau = \frac{-\mathcal{K}(x)}{|\mathcal{K}(x)|} = x - \frac{1}{\tau}a,$$

$x \in L^n(\tau)$, onde $|\mathcal{K}(x)| = (-\langle \mathcal{K}(x), \mathcal{K}(x) \rangle)^{\frac{1}{2}} = (\langle x, a \rangle^2)^{\frac{1}{2}} = \langle x, a \rangle = \tau.$

Demonstração. Mostremos inicialmente que $\mathcal{D}$ definida em $\mathcal{H}^{n+1}$ por

$$p \in \mathcal{H}^{n+1} \mapsto \mathcal{D}(p) = \{v \in T_p\mathcal{H}^{n+1}; \langle \mathcal{K}(p), v \rangle = 0\}$$

determina uma folheação $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ tipo-espaço de codimenção 1 orientada por $\mathcal{K}$.
De acordo com a Definição (2.1), mostremos que a distribuição $\mathcal{D}$, definida acima, é involutiva. Considere X e Y duas seções suaves em $\mathcal{D}$ definidas em uma vizinhança aberta $U \subset \mathcal{H}^{n+1}$. Seja $p \in U$ tal que $X_p, Y_p \in \mathcal{D}(p)$. Devemos mostrar que o colchete de Lie é uma seção suave de $\mathcal{D}$.
De fato,

$$\begin{aligned} \langle [X_p, Y_p], \mathcal{K}(p) \rangle &= \left\langle \overline{\nabla}_X Y(p) - \overline{\nabla}_Y X(p), \mathcal{K}(p) \right\rangle \\ &= \left\langle \overline{\nabla}_X Y(p), \mathcal{K}(p) \right\rangle - \left\langle \overline{\nabla}_Y X(p), \mathcal{K}(p) \right\rangle, \end{aligned}$$

como $X_p, Y_p \in \mathcal{D}(p)$, temos que $\langle X_p, \mathcal{K}(p) \rangle = \langle Y_p, \mathcal{K}(p) \rangle = 0$, logo pela compatibilidade da métrica,

$$0 = X_p \langle Y_p, \mathcal{K}(p) \rangle = \left\langle \overline{\nabla}_X Y, \mathcal{K} \right\rangle (p) + \left\langle Y, \overline{\nabla}_X \mathcal{K} \right\rangle (p)$$

e

$$0 = Y_p \langle X_p, \mathcal{K}(p) \rangle = \left\langle \overline{\nabla}_Y X, \mathcal{K} \right\rangle (p) + \left\langle X, \overline{\nabla}_Y \mathcal{K} \right\rangle (p),$$

daí, como $\mathcal{K}$ é fechado, por (1.22), temos

$$\begin{aligned} \langle [X_p, Y_p], \mathcal{K}(p) \rangle &= -\left\langle Y(p), \overline{\nabla}_X \mathcal{K}(p) \right\rangle + \left\langle X(p), \overline{\nabla}_Y \mathcal{K}(p) \right\rangle \\ &= -\phi \langle Y(p), X(p) \rangle + \phi \langle X(p), Y(p) \rangle = 0, \end{aligned}$$

logo $[X_p, Y_p] \in \mathcal{D}(p)$. Como $p \in U$ é arbitrário, segue que $\mathcal{D}$ é involutivo. Portanto pelo *Teorema de Frobenius*, (cf. [18]), $\mathcal{D}$ é completamente integrável, isto é, existe uma (única) folheação $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ de dimensão n e de classe C^∞ em $\mathcal{H}^{n+1}$ tal que $T\mathcal{F}(\mathcal{K}) = \mathcal{D}$, a qual é orientada por $\mathcal{K}$ (pela própria definição de $\mathcal{D}$) e é tipo-espaço (pois $\mathcal{K}$ é tipo-tempo).

Agora mostremos que as folhas $L^n(\tau)$ de $\mathcal{H}^{n+1}$ são isométricas ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Para tanto, definamos a seguinte aplicação $\psi_\tau : L^n(\tau) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\psi_\tau(x) = x - \frac{\tau + \langle a, e_0\rangle\langle x, e_0\rangle}{\langle a, e_0\rangle^2}a - \frac{\tau}{\langle a, e_0\rangle}e_0,$$

onde $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ é um vetor tipo-luz tal que $\langle a, e_0\rangle > 0$ e $e_0 = (1, 0, \ldots, 0)$. Observemos que ψ_τ é diferenciável e mostremos que ψ_τ é um difeomorfismo, para isto definamos a candidata a inversa $\psi_\tau^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow L^n(\tau)$ dada por

$$\psi_\tau^{-1}(x) = x + \frac{\tau}{\langle a, e_0\rangle}e_0 + \frac{\langle a, e_0\rangle^2(1 - \langle x, x\rangle) + \tau^2}{2\tau\langle a, e_0\rangle^2}a.$$

Note que ψ_τ^{-1} é diferenciável e está bem definida uma vez que $\langle\psi_\tau^{-1}(x), a\rangle = \tau$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e provemos então que $\psi_\tau \circ \psi_\tau^{-1} = \psi_\tau^{-1} \circ \psi_\tau = id$.

De fato, para a primeira parte observemos que para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\langle\psi_\tau^{-1}(x), e_0\rangle &= \left\langle x + \frac{\tau}{\langle a, e_0\rangle}e_0 + \frac{\langle a, e_0\rangle^2(1 - \langle x, x\rangle) + \tau^2}{2\tau\langle a, e_0\rangle^2}a, e_0\right\rangle \\
&= \langle x, e_0\rangle + \frac{\tau}{\langle a, e_0\rangle}\langle e_0, e_0\rangle + \left(\frac{\langle a, e_0\rangle^2(1 - \langle x, x\rangle) + \tau^2}{2\tau\langle a, e_0\rangle^2}a\right)\langle a, e_0\rangle \\
&= -\frac{\tau}{\langle a, e_0\rangle} + \frac{\langle a, e_0\rangle^2(1 - \langle x, x\rangle) + \tau^2}{2\tau\langle a, e_0\rangle}a \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

e também que

$$\frac{\tau + \langle a, e_0\rangle\langle\psi_\tau^{-1}(x), e_0\rangle}{\langle a, e_0\rangle^2}a = \frac{\langle a, e_0\rangle^2(1 - \langle x, x\rangle) + \tau^2}{2\tau\langle a, e_0\rangle}a. \qquad (2.7)$$

Então, de (2.6) e (2.7) temos

$$\begin{aligned}
\psi_\tau(\psi_\tau^{-1}(x)) &= \psi_\tau^{-1}(x) - \left(\frac{\tau + \langle a, e_0\rangle\langle\psi_\tau^{-1}(x), e_0\rangle}{\langle a, e_0\rangle^2}a\right) - \frac{\tau}{\langle a, e_0\rangle}e_0 \\
&= x + \frac{\tau}{\langle a, e_0\rangle}e_0 + \frac{\langle a, e_0\rangle^2(1 - \langle x, x\rangle) + \tau^2}{2\tau\langle a, e_0\rangle^2}a \\
&\quad - \frac{\langle a, e_0\rangle^2(1 - \langle x, x\rangle) + \tau^2}{2\tau\langle a, e_0\rangle^2}a - \frac{\tau}{\langle a, e_0\rangle}e_0 = x,
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Para a outra parte, vejamos que

$$\begin{aligned}\langle \psi_\tau(x), \psi_\tau(x)\rangle &= \langle x, x\rangle - 2\left(\frac{\tau + \langle a, e_0\rangle\langle x, e_0\rangle}{\langle a, e_0\rangle^2}\right)\langle x, a\rangle - \frac{2\tau\langle x, e_0\rangle}{\langle a, e_0\rangle} \\ &+ \left(\frac{\tau + \langle a, e_0\rangle\langle x, e_0\rangle}{\langle a, e_0\rangle^2}\right)^2\langle a, a\rangle + \frac{2\tau}{\langle a, e_0\rangle}\left(\frac{\tau + \langle a, e_0\rangle\langle x, e_0\rangle}{\langle a, e_0\rangle^2}\right)\langle a, e_0\rangle \\ &+ \frac{\tau^2}{\langle a, e_0\rangle}\langle e_0, e_0\rangle = 1 - \frac{2\tau\langle x, e_0\rangle}{\langle a, e_0\rangle} - \frac{\tau^2}{\langle a, e_0\rangle^2} \qquad (2.8)\end{aligned}$$

e que

$$\frac{\langle a, e_0\rangle^2(1 - \langle\psi_\tau(x), \psi_\tau(x)\rangle) + \tau^2}{2\tau\langle a, e_0\rangle}a = \frac{\tau + \langle x, e_0\rangle\langle a, e_0\rangle}{\langle a, e_0\rangle^2}a. \qquad (2.9)$$

Então, de (2.8) e (2.9) obtemos

$$\begin{aligned}\psi_\tau^{-1}(\psi_\tau(x)) &= \psi_\tau(x) + \frac{\tau}{\langle a, e_0\rangle}e_0 + \frac{\langle a, e_0\rangle^2(1 - \langle\psi_\tau(x), \psi_\tau(x)\rangle) + \tau^2}{2\tau\langle a, e_0\rangle^2}a \\ &= x - \frac{\tau + \langle a, e_0\rangle\langle x, e_0\rangle}{\langle a, e_0\rangle^2}a - \frac{\tau}{\langle a, e_0\rangle}e_0 \\ &+ \frac{\tau}{\langle a, e_0\rangle}e_0 + \frac{\langle a, e_0\rangle^2(1 - \langle\psi_\tau(x), \psi_\tau(x)\rangle) + \tau^2}{2\tau\langle a, e_0\rangle^2}a \\ &= x - \frac{\tau + \langle a, e_0\rangle\langle x, e_0\rangle}{\langle a, e_0\rangle^2}a + \frac{\tau + \langle x, e_0\rangle\langle a, e_0\rangle}{\langle a, e_0\rangle^2}a = x.\end{aligned}$$

Portanto ψ_τ é uma bijeção diferenciável, isto é, um difeomorfismo.

Mostremos agora que ψ_τ preserva a métrica. Dado $v \in T_pL^n(\tau)$, existe uma curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to L^n(\tau)$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Então

$$\begin{aligned}d(\psi_\tau)_p(v) &= \frac{d}{dt}(\psi \circ \alpha)(t)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\alpha(t) - \frac{\tau + \langle a, e_0\rangle\langle \alpha(t), e_0\rangle}{\langle a, e_0\rangle^2}a - \frac{\tau}{\langle a, e_0\rangle}e_0\right)\Bigg|_{t=0} \\ &= v - \frac{\tau + \langle a, e_0\rangle\langle v, e_0\rangle}{\langle a, e_0\rangle^2}a,\end{aligned}$$

logo

$$\langle d(\psi_\tau)_p(v), d(\psi_\tau)_p(v)\rangle = \left\langle v - \frac{\tau + \langle a, e_0\rangle\langle v, e_0\rangle}{\langle a, e_0\rangle^2}a, v - \frac{\tau + \langle a, e_0\rangle\langle v, e_0\rangle}{\langle a, e_0\rangle^2}a\right\rangle = \langle v, v\rangle,$$

uma vez que $\langle a, a\rangle = \langle v, a\rangle = 0$.

Logo, pela identidade de polarização, obtemos que

$$\langle d(\psi_\tau)_p(u), d(\psi_\tau)_p(v)\rangle = \langle u, v\rangle,$$

para quaisquer $u, v \in T_pL^n(\tau)$, de onde concluímos que ψ_τ é uma isometria.

Finalmente mostremos que $L^n(\tau)$ possui curvatura média constante igual a 1 com respeito ao campo normal unitário

$$N_\tau = \frac{-\mathcal{K}(x)}{|\mathcal{K}(x)|} = x - \frac{1}{\tau}a,$$

$x \in L^n(\tau)$, onde $|\mathcal{K}(x)| = (-\langle \mathcal{K}(x), \mathcal{K}(x) \rangle)^{\frac{1}{2}} = (\langle x, a \rangle^2)^{\frac{1}{2}} = \langle x, a \rangle = \tau$.

Com efeito, basta mostrar que a curvatura média H_τ, da inclusão do Steady State Space no De Sitter, com relação ao campo N_τ é constante igual a 1. Primeiro observe que como $x \in \mathcal{H}^{n+1}$, tem-se que $x \in T_x\mathcal{H}^{n+1}$, donde

$$\langle v, x \rangle = 0 = \langle v, a \rangle, \forall v \in \mathcal{H}^{n+1} \tag{2.10}$$

e pela fórmula de Gauss

$$\nabla^\circ_v N_\tau = \overline{\nabla}_v N_\tau + \alpha(v, N_\tau).$$

Daí, como $x \in (T_x\mathcal{H}^{n+1})^\perp$, temos

$$\langle \alpha(v, N_\tau), x \rangle = \langle A^\circ v, N_\tau \rangle = \langle -\nabla^\circ_v x, N_\tau \rangle,$$

donde

$$\alpha(v, N_\tau) = -\langle \nabla^\circ_v x, N_\tau \rangle x, \tag{2.11}$$

onde A° é o operador de Weingarten da imersão de S_1^{n+1} em $\mathbb{L}^{n+2}$.

Assim, pela fómula de Weingarten e pelas equações (2.10) e (2.11), para todo $v \in T_x\mathcal{H}^{n+1}$ com $x \in \mathcal{H}^{n+1}$, temos

$$\begin{aligned} -Av = \overline{\nabla}_v N_\tau &= \nabla^\circ_v N_\tau - (\nabla^\circ_v N_\tau)^\perp = \nabla^\circ_v N_\tau - \alpha(v, N_\tau) \\ &= \nabla^\circ_v N_\tau + \langle \nabla^\circ_v x, N_\tau \rangle x = \nabla^\circ_v N_\tau + \langle v, N_\tau \rangle x \\ &= \nabla^\circ_v N_\tau = \nabla^\circ_v (x - \frac{1}{\tau}a) \\ &= \nabla^\circ_v x - \frac{1}{\tau}\nabla^\circ_v a = \nabla^\circ_v x \\ &= v, \end{aligned}$$

pois $\nabla^\circ_v a = 0$ e $\nabla^\circ_v x = v$, $\forall v \in T_x\mathcal{H}^{n+1}$.

Logo,

$$Av = -v, \forall v \in T_x\mathcal{H}^{n+1}$$

e portanto,

$$H_\tau = -\frac{1}{n}tr(A) = 1, \forall \tau > 0.$$

$\square$

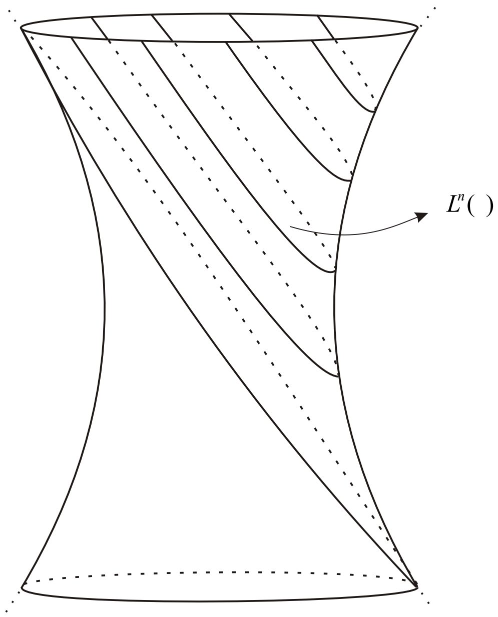

Figura 2.3: O Steady State Space folheado no caso tridimencional.

Capítulo 3

Teoremas de Rigidez em $\mathcal{H}^{n+1}$

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados sobre rigidez de hipersuperfícies tipo-espaço Σ^n imersas no Steady State Space quando a curvatura média de Σ^n é limitada, isto é, $1 \leq H \leq \alpha$, para alguma constante α. Para tanto, usaremos o princípio do máximo generalizado devido a H. Omori, [15] e S.T.Yau, [28].

A seguinte definição é devido a A. L. Albujer, [6].

Definição 3.1. *Dizemos que uma hipersuperfície tipo-espaço Σ^n em $\mathcal{H}^{n+1}$ é limitada no infinito futuro se existe $\overline{\tau} > 0$ tal que*

$$\psi(\Sigma) \subset \{x \in \mathcal{H}^{n+1}; \langle x, a\rangle \leq \overline{\tau}\}$$

e dizemos que limitada no infinito passado se existe $\underline{\tau} > 0$ tal que

$$\psi(\Sigma) \subset \{x \in \mathcal{H}^{n+1}; \langle x, a\rangle \geq \underline{\tau}\}.$$

Dizemos que Σ^n é limitada no infinito se é limitada no infinito futuro e no infinito passado.

Pela definição acima, Σ^n é limitada no infinito se existem $0 < \underline{\tau} < \overline{\tau}$ tal que $\psi(\Sigma)$ está contida entre as folhas $L^n(\underline{\tau})$ e $L^n(\overline{\tau})$.

Observemos que a aplicação de Gauss N de uma hipersuperfície tipo-espaço Σ^n imersa no Steady State Space $\mathcal{H}^{n+1}$ pode ser vista como uma aplicação

$$N : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$$

tomando valores no espaço hiperbólico

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{x \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle x, x\rangle = -1, \langle x, x\rangle > 0\},$$

onde $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ é um vetor nulo apontando para o passado como definimos no capítulo anterior. Neste sentido, a imagem $N(\Sigma)$ é chamada a *imagem hiperbólica* de Σ^n.

Definição 3.2. *Uma horoesfera é uma hipersuperfície com curvatura média constante igual a 1 em $\mathbb{H}^{n+1}$ e pode ser descrita como uma esfera Euclidiana em $\mathbb{R}^{n+1}_{+}$ tangente a $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ ou como uma hiperplano Euclidiano horizontal $\{x_{n+1} = cte\}$ em $\mathbb{H}^{n+1}$.*

Notemos que todas as horosferas de $\mathbb{H}^{n+1}$ podem ser vistas no modelo de Minkowsk, da seguinte forma:

$$L(\rho) = \{x \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle x, a\rangle = \rho\}, \rho > 0.$$

Neste sentido, considere o ângulo normal hiperbólico θ de Σ^n como sendo o ângulo hiperbólico entre a aplicação de Gauss N de Σ^n apontando para o futuro e o campo de vetor unitário tipo-tempo $\nu = \frac{\mathcal{K}}{|\mathcal{K}|}$, onde $|\mathcal{K}| = \sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K}\rangle}$. Em outras palavras, o ângulo θ é tal que

$$\cosh\theta = -\langle N, \nu\rangle .$$

Agora para estabelecer outros resultados, será necessário estabelecer o conhecido princípio do máximo generalizado apresentado por H. Omori, [15] e S.T.Yau, [28].

Lema 3.1. *(Princípio do Máximo Generalizado)*
Seja Σ^n uma variedade Riemanniana n-dimensional completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente e $u : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave a qual é limitada superiormente em Σ^n. Então existe uma sequência de pontos $\{p_k\}$ em Σ^n tal que

$$\lim_{k\to\infty} u(p_k) = \sup_{\Sigma} u, \quad \lim_{k\to\infty} |\nabla u(p_k)| = 0 \quad e \quad \lim_{k\to\infty} \triangle u(p_k) \leq 0.$$

Teorema 3.3. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-epaço completa e limitada no infinito futuro de $\mathcal{H}^{n+1}$, com curvatura média limitada $1 \leq H \leq \alpha$, para alguma constante α. Se o ângulo hiperbólico normal θ de Σ^n satisfaz $\cosh\theta \leq \inf_\Sigma H$, então Σ^n é um hiperplano e a imagem hiperbólica é exatamente uma horosfera.*

Demonstração. Recordemos que a equação de Gauss de Σ^n em $\mathcal{H}^{n+1}$ descreve a curvatura de Σ^n, denotada por R e, em termos do operador A, é dada por

$$\langle R(X,Y)X, Y\rangle = \langle X, X\rangle \langle Y, Y\rangle - \langle X, Y\rangle^2 - \langle AX, X\rangle \langle AY, Y\rangle + \langle AX, Y\rangle^2, \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Agora, veja que se $\{E_i\}$ é um referencial ortonormal em $\mathfrak{X}(\Sigma)$ e $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ com $|X| = 1$, temos

$$\begin{aligned} Ric_\Sigma(X,X) &= \sum_{i=1}^{n} \langle R(X,E_i)X,E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}(1-\langle X,E_i\rangle^2 - \langle AX,X\rangle \langle AE_i,E_i\rangle + \langle AX,E_i\rangle^2) \\ &= n - \sum_{i=1}^{n}\langle X,E_i\rangle^2 - \langle AX,X\rangle \sum_{i=1}^{n}\langle AE_i,E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle AX,E_i\rangle^2 \\ &= n - |X|^2 + nH\langle AX,X\rangle + |AX|^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$Ric_\Sigma(X,X) = n-1+nH\langle AX,X\rangle + |AX|^2 \tag{3.1}$$

Como

$$0 \le |AX + \frac{nHX}{2}|^2 = |AX|^2 + nH\langle AX,X\rangle + \frac{n^2H^2}{4},$$

temos

$$|AX|^2 + nH\langle AX,X\rangle = |AX + \frac{nHX}{2}|^2 - \frac{n^2H^2}{4}.$$

Logo, de (3.1)

$$Ric_\Sigma(X,X) = n-1+|AX + \frac{nHX}{2}|^2 - \frac{n^2H^2}{4},$$

donde

$$Ric_\Sigma(X,X) \ge n-1-\frac{n^2H^2}{4}. \tag{3.2}$$

Assim, desde que supomos $1 \le H \le \alpha$, para alguma constante α, segue de (3.2) que

$$Ric_\Sigma(X,X) \ge n-1-\frac{n^2\alpha^2}{4},$$

isto é, Ric_Σ é limitada em Σ^n.

Agora seja $u : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave dada por

$$u(p) = \langle \psi(p), a\rangle, \quad \forall p \in \Sigma^n.$$

Veja que o gradiente de u é dado por

$$\nabla u = a^\top,$$

onde $a^\top$ denota a componente tangencial de a ao longo de Σ^n.

De fato, primeiro veja que ∇u é um campo de $\mathfrak{X}(\Sigma)$ tal que

$$\langle \nabla u(p), X\rangle = du_p(X) = X(u(p)), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla u(p), X\rangle &= X\,\langle \psi(p), a\rangle = \langle \nabla_X \psi(p), a\rangle + \langle \psi(p), \nabla_X a\rangle \\
&= \langle \nabla_X \psi(p), a\rangle = \langle X(\psi(p)), a\rangle \\
&= \left\langle X, a^\top\right\rangle = \left\langle a^\top, X\right\rangle,
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\nabla u = a^\top.$$

Agora, pela fórmula de Gauss (2.3), desde que $a \in \mathbb{L}^{n+2}$, obtemos

$$a = a^\top - \langle N, a\rangle N + \langle \psi, a\rangle \psi = \nabla u - \langle N, a\rangle N + \langle \psi, a\rangle \psi \tag{3.3}$$

e, pela fórmula de Weingarten (2.4), $\forall\;\; X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, temos

$$\begin{aligned}
\nabla_X(\nabla u) &= \nabla_X(a + \langle N, a\rangle N - \langle \psi, a\rangle \psi) \\
&= \nabla_X a + \langle N, a\rangle \nabla_X N - \langle \psi, a\rangle \nabla_X \psi \\
&= -\langle N, a\rangle AX - uX.
\end{aligned}$$

Além disso, o Laplacino da função u em Σ^n é dado por

$$\begin{aligned}
\triangle u &= div(\nabla u) = tr(\nabla_X(\nabla u)) = tr(-\langle N, a\rangle AX - uX) \\
&= -\langle N, a\rangle tr(AX) - utr(Id(X)) \\
&= nH\langle N, a\rangle - nu.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Da equação (3.3), temos

$$\begin{aligned}
|\nabla u|^2 &= \langle \nabla u, \nabla u\rangle = \langle a + \langle N, a\rangle N - \langle \psi, a\rangle \psi, a + \langle N, a\rangle N - \langle \psi, a\rangle \psi\rangle \\
&= \langle a, a\rangle + \langle N, a\rangle^2 - \langle \psi, a\rangle^2 + \langle N, a\rangle^2 - \langle N, a\rangle^2 - \langle \psi, a\rangle^2 + \langle \psi, a\rangle^2 \\
&= \langle N, a\rangle^2 - \langle \psi, a\rangle^2 \\
&= \langle N, a\rangle^2 - u^2.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Desde que $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ é um vetor nulo apontando para o passado e N aponta para o futuro, temos

$$\langle N, a\rangle > 0.$$

Como supomos que Σ^n é limitada no infinito futuro de $\mathcal{H}^{n+1}$ e a curvatura de Ricci em Σ^n é limitada, pelo Lema (3.1), existe uma sequência $\{p_k\}$ em Σ^n tal que

$$\lim_{k\to\infty} u(p_k) = \sup_\Sigma u, \quad \lim_{k\to\infty} |\nabla u(p_k)| = 0 \quad e \quad \lim_{k\to\infty} \triangle u(p_k) \le 0.$$

Consequentemente, desde que a função curvatura média H é limitda em Σ^n, existe uma subsequência $\{p_{k_j}\}$ de $\{p_k\}$ tal que $\{H(p_{k_j})\}$ é convergente. Da equação (3.5) e como $\lim_{k\to\infty} u(p_k) = \sup_\Sigma u$, temos que

$$0 = \lim_{j\to\infty} |\nabla u(p_{k_j})|^2 = \lim_{j\to\infty} (\langle N, a\rangle^2 - (u(p_{k_j}))^2).$$

Daí, pelas propriedades de limite,

$$\sup_{\Sigma} u = \lim_{j\to\infty} u(p_{k_j}) = \langle N, a\rangle . \tag{3.6}$$

Agora da equações (3.4) e (3.6), temos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{j\to\infty} \triangle u(p_{k_j}) = \lim_{j\to\infty}(nH(p_{k_j})\langle N, a\rangle - nu(p_{k_j})) \\ &= n\sup_{\Sigma} u(\lim_{j\to\infty}(H(p_{k_j}) - 1) \geq 0. \end{aligned}$$

Desde que $\sup_{\Sigma} u > 0$, devemos ter $\lim_{j\to\infty}(H(p_{k_j}) = 1$. Logo $\inf_{\Sigma} H = 1$. Como $1 \leq \cosh\theta \leq \inf_{\Sigma} H = 1$, tem-se $\cosh\theta = 1$, isto é, o ângulo hiperbólico normal θ de Σ^n é zero. Portanto, Σ^n é um hiperplano $L^n(\tau)$, para algum $\tau > 0$. Além disso, da equação $N_\tau = \psi - \frac{1}{\tau}a$, obtemos

$$\langle N, a\rangle = \langle N_\tau, a\rangle = \left\langle \psi - \frac{1}{\tau}a, a\right\rangle = \langle \psi, a\rangle = \tau.$$

Assim, concluimos que a imagem hiperbólica de Σ^n é exatamente a horosfera

$$L_\tau = \{x \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle x, a\rangle = \tau\}.$$

□

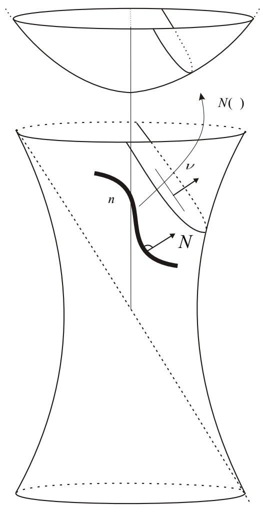

Figura 3.1: Esboço geométrico no caso tridimencional.

A seguinte observação é uma justificativa para a escolha da hipótese $H \geq 1$.

Observação 3.1. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa com média H(não necessariamente constante) tal que $|H| \leq c < \frac{2\sqrt{n-1}}{n}$, onde c é uma constante real positiva. Então Σ^n é compacta. De fato, de (3.2) segue que*

$$Ric_\Sigma \geq (n-1) - \frac{n^2c^2}{4}.$$

Do Teorema de Bonnet-Myers Σ^n é compacta. Entretanto, se Σ^n é limitada no infinito futuro de $\mathcal{H}^{n+1}$, então Σ^n é difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$, em particular,$\mathcal{H}^{n+1}$ não possui nenhuma hipersuperfície tipo-espaço compacta(sem limite)(Cof.[6], Lema 1). Além disso, observe que $\frac{2\sqrt{n-1}}{n} \leq 1$ para $n \geq 2$. Por outro lado, levando em conta a classificação das hipersuperfícies tipo-espaço totalmente humbílicas do espaço de De Sitter(Cof.[25], Exemplo 1), segue do principal teorema de [20](Teorema 1) que não existe hipersuperfícies tipo-espaço completa totalmente umbílica com curvatura média $0 \leq H < 1$ imersa no Steady State Space. Portanto, motivado por este resultado, é natural restrigirmos nossa ateção para as hipersuperfícies tipo-espaço imersas no $\mathcal{H}^{n+1}$ com curvatura média $H \geq 1$.

Observação 3.2. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathcal{H}^{n+1}$ uma imersão tipo-espaço de uma variedade compacta Σ^n com fronteira covexa $\partial\Sigma$ contida no hiperplano $L^n(\tau)$, para algum τ. Suponha que ψ tem curvatura média constante $H > 1$. Do Teorema 7 de [27] e levando em conta a nossa escolha da orientação de Σ^n, obtemos*

$$0 < \langle N, a \rangle \leq H\tau \tag{3.7}$$

Consequentemente de $N_\tau = x - \frac{1}{\tau}a$, $x \in L_\tau$ e (3.7), concluimos que o ângulo hiperbólico normal θ de Σ^n satisfaz

$$\cosh\theta = -\langle N, \nu \rangle \leq -\langle N, N_\tau \rangle = \frac{1}{\tau}\langle N, a \rangle \leq H.$$

Do Teorema 3.3, obtemos o seguinte resultado

Corolário 3.4. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa limitada no infinito de $\mathcal{H}^{n+1}$, com curvatura média limitada $1 \leq H \leq \alpha$, para alguma constante α. Suponha que a imagem hiperbólica $N(\Sigma)$ está contida no fecho de um domínio interior limitado pela horosfera L_ρ. Se $\frac{\rho}{\tau} \leq \inf_\Sigma H$, onde $\tau > 0$ é tal que $\langle \psi(p), a \rangle \geq \tau$ para todo $p \in \Sigma^n$, então Σ^n é um hiperplano e a imagem hiperbólica é exatamente uma horosfera.*

Demonstração. Desde que ν é um campo apontando para o futuro, temos que o ângulo hiperbólico normal θ de Σ é tal que

$$\cosh\theta = -\langle N, \nu \rangle = -\langle N, -\nu \rangle = -\left\langle N, \psi - \frac{1}{\langle \psi, a \rangle}a \right\rangle = \frac{1}{\langle \psi, a \rangle}\langle N, a \rangle.$$

Como supomos que $\psi(\Sigma)$ está "acima"do hiperplano $L^n(\tau)$, isto é, $\langle \psi(p), a \rangle \geq \tau$ para todo $p \in \Sigma^n$, temos

$$\cosh\theta \leq \frac{1}{\tau} \langle N, a \rangle .$$

Agora, pela hipótese feita sobre a imagem hiperbólica, tem-se $\langle N, a \rangle = \langle N(p), a \rangle \leq \rho$, logo

$$\cosh\theta \leq \frac{\rho}{\tau} \leq \inf_{\Sigma} H.$$

Aplicando o Teorema 3.3, temos o resultado desejado. $\square$

Observação 3.3. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathcal{H}^{n+1}$ uma imersão tipo-espaço de uma variedade compacta Σ^n com fronteira convexa $\partial\Sigma$ contida no hiperplano $L^n(\tau)$, para algum $\tau > 0$. Pela Observação (3.2), concluimos que a imagem hiperbólica de Σ^n está contida no fecho do domínio interior limitado pela horosfera L_ρ, com $\frac{\rho}{\tau} \leq H$.*

Capítulo 4

O Espaço-tempo tipo Steady State

Neste capítulo, apresentaremos o Steady State Space como um espaço-tempo de Robertson-Walker Generalizado(GRW). Para tanto, apresentaremos inicialmente alguns resultados inerentes ao (GRW).

4.1 Espaço-tempo de Robertson-Walker Generalizado

A fim de descrever algumas propriedades importantes de uma classe de variedades de Lorentz que possuem um campo conforme, seja M^n uma vriedade Riemaniana conexa n-dimensional($n \geq 2$), $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave positiva. Na variedade produto $\overline{M}^{n+1} = I \times M^n$ sejam π_I e π_I as projeções de $I \times M^n$ sobre I e M, respectivamente. A partir dos tensores métricos $\langle \cdot, \cdot \rangle_I = dt^2$ e $g = \langle \cdot, \cdot \rangle_M$, temos uma classe particular de variedades Lorentziana obtida, munindo a variedade produto $\overline{M}^{n+1}$ pelo tensor métrico $\overline{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle_M$ dado por

$$\langle v, w \rangle_p = - \langle (\pi_I)_* v, (\pi_I)_* w \rangle + (f \circ \pi_I)^2(p) \langle (\pi_M)_* v, (\pi_M)_* w \rangle , \tag{4.1}$$

para todo $p \in \overline{M}^{n+1}$ e todo $v, w \in T_p\overline{M}$.

Definição 4.1. *Seja (M^n,g) uma variedade Riemanniana conexa n-dimensional, ($n \geq 2$), $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto munido da métrica $-dt^2$ e $f \in C^\infty(I)$ uma função positiva. A variedade produto $I \times M^n$ munida do tensor métrico $\overline{g}$ definida pela equção (4.1) é chamada um espaço de Robertson-Walker Generalizado (GRW), e será denotado por $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$. Quando M^n tem curvatura seccional constante, então $-I \times_f M^n$ é chamada um espaço-tempo de Robertson-Walker (RW).*

A seguir apresentaremos algumas propriedades de campos de vetores em um espaço GRW, que serão importantes para o nosso objetivo.

Observação 4.1. *Dado* $X \in \mathfrak{X}(M)$, *tem-se* $[X, \partial_t] = 0$, *onde* ∂_t *é um campo de vetores tipo-tempo na direção de I. De fato, seja* $\{t, x_1, \ldots, x_n\}$ *um sistema de coordenadas em* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$. *Assim, se* $h \in C^\infty(M)$ *e* $X = \sum_i \alpha_i \partial_i$, *onde* $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$ *então*

$$\begin{aligned} \partial_t(X(h)) &= \partial_t(\sum_i \alpha_i \partial_i(h)) = \sum_i \partial_t(\alpha_i \partial_i(h)) \\ &= \sum_i [\partial_t(\alpha_i)(\partial_i(h)) + \alpha_i \partial_t(\partial_i(h)).] \end{aligned}$$

Como α_i *não depende de* t *então* $\partial_t(\alpha_i) = 0$. *Pelo Teorema de Schwarz de* $\mathbb{R}^n$, *obtemos*

$$\partial_t(X(h)) = X(\partial_t(h)).$$

Portanto, $[X, \partial_t] = 0$.

Quando X for um campo de vetores na fibra Riemaniana M^n de um espaço GRW $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ dizemos que X é um *campo horizontal.* Por outro lado, os campos na direção temporal são chamados de *campos verticais.* Neste sentido o campo de vetores tipo-tempo na direção de I ,∂_t, é um campo vertical.

Proposição 4.2. *Sejam* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ *um espaço GRW e* $X \in \mathfrak{X}(M)$, *ou seja, X é um campo horizontal. Então*

1. $\overline{\nabla}_X \partial_t = \overline{\nabla}_{\partial_t} X = \frac{f'}{f} X$,
2. $\overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t$.

Demonstração. (i) Mostremos inicialmente que $\left\langle \overline{\nabla}_X \partial_t, \partial_t \right\rangle = 0$. De fato, pela Fórmula de Koszul, temos

$$\begin{aligned} 2\left\langle \overline{\nabla}_X \partial_t, \partial_t \right\rangle &= X \langle \partial_t, \partial_t \rangle + \partial_t \langle \partial_t, X \rangle - \partial_t \langle X, \partial_t \rangle \\ &\quad - \langle X, [\partial_t, \partial_t] \rangle + \langle \partial_t, [\partial_t, X] \rangle + \langle \partial_t, [X, \partial_t] \rangle . \end{aligned}$$

Com exceção dos termos $\langle \partial_t, [\partial_t, X] \rangle$ e $\langle \partial_t, [X, \partial_t] \rangle$ todos os outros são nulos, neste caso a equação acima se reduz a

$$2\left\langle \overline{\nabla}_X \partial_t, \partial_t \right\rangle = \langle \partial_t, [\partial_t, X] \rangle + \langle \partial_t, [X, \partial_t] \rangle .$$

Como o colchete de campos é anti-simétrico, isto é, $[X, Y] = -[Y, X]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, temos $\left\langle \overline{\nabla}_X \partial_t, \partial_t \right\rangle = 0$. Logo, $\overline{\nabla}_X \partial_t$ é horizontal. Segue da Observação (4.1) e da simetria da conexão afim de $\overline{M}^{n+1}$ que $\overline{\nabla}_X \partial_t = \overline{\nabla}_{\partial_t} X$. Agora, para mostrar que $\overline{\nabla}_X \partial_t = \frac{f'}{f} X$, seja Y um campo horizontal. Assim, novamente pela Fórmula de Koszul, temos

$$\begin{aligned} 2\left\langle \overline{\nabla}_X \partial_t, Y \right\rangle &= X \langle \partial_t, Y \rangle + \partial_t \langle Y, X \rangle - Y \langle X, \partial_t \rangle \\ &\quad - \langle X, [\partial_t, Y] \rangle + \langle \partial_t, [Y, X] \rangle + \langle Y, [X, \partial_t] \rangle \\ &= \partial_t \langle Y, X \rangle + \langle \partial_t, [Y, X] \rangle \\ &= \partial_t \langle Y, X \rangle , \end{aligned}$$

onde usamos novamente a Observação (4.1) e o fato do campo $[X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$ ser ortogonal a ∂t. Da definição da métrica em $\overline{M}^{n+1}$, Equação (4.1), temos que

$$2\left\langle \overline{\nabla}_X \partial_t, Y \right\rangle = \partial_t(f^2 \langle X, Y \rangle_M),$$

uma vez que $(\pi_I)_*(X) = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$. Assim, desde que $\partial_t(\langle X, Y \rangle_M) = 0$, então

$$2\left\langle \overline{\nabla}_X \partial_t, Y \right\rangle = \partial_t(f^2) \langle X, Y \rangle_M = 2f\partial_t(f) \langle X, Y \rangle_M = \frac{2f' f^2}{f} \langle X, Y \rangle_M .$$

Novamente, pela definição de métrica em $\overline{M}^{n+1}$, temos $\langle X, Y \rangle = f^2 \langle X, Y \rangle_M$, logo

$$\left\langle \overline{\nabla}_X \partial_t, Y \right\rangle = \left\langle \frac{f'}{f} X, Y \right\rangle. \tag{4.2}$$

Para o caso geral, seja $Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ qualquer. Como $Z = Z^* - \langle Z, \partial_t \rangle \partial_t$, onde $Z^* = (\pi_M)_*(Z)$, então

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{\nabla}_X \partial_t, Z \right\rangle &= \left\langle \overline{\nabla}_X \partial_t, Z^* \right\rangle - \langle Z, \partial_t \rangle \left\langle \overline{\nabla}_X \partial_t, \partial_t \right\rangle \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_X \partial_t, Z^* \right\rangle = \left\langle \frac{f'}{f} X, Z^* \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{f'}{f} X, Z \right\rangle,
\end{aligned}$$

onde usamos a equação (4.2) e o fato que $\left\langle \overline{\nabla}_X \partial_t, \partial_t \right\rangle = 0$. Como Z é arbitrário e $\overline{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\overline{M}^{n+1}}$ é não-degenerada segue que

$$\overline{\nabla}_X \partial_t = \frac{f'}{f} X.$$

Finalmente mostremos que $\left\langle \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t, \partial_t \right\rangle = 0$. De fato, pela compatibilidade da métrica, obtemos

$$\left\langle \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t, \partial_t \right\rangle = \partial_t \langle \partial_t, \partial_t \rangle - \left\langle \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t, \partial_t \right\rangle,$$

donde

$$\left\langle \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t, \partial_t \right\rangle = \frac{1}{2} \partial_t(-1) = 0. \tag{4.3}$$

Por outro lado, se X é um campo horizontal qualquer, temos

$$\left\langle \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t, X \right\rangle = \partial_t(\langle \partial_t, X \rangle) - \left\langle \partial_t, \overline{\nabla}_{\partial_t} X \right\rangle = \partial_t(\langle \partial_t, X \rangle - \left\langle \partial_t, \frac{f'}{f} X \right\rangle.$$

Como $\langle \partial_t, X \rangle = 0$, temos

$$\left\langle \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t, X \right\rangle = 0. \tag{4.4}$$

Segue de (4.3) e (4.4) que $\overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t$ é horizontal e vertical, isto é, $\overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t$ é nulo. □

Uma imersão suave $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -I \times_f M^n$ de uma variedade conexa n-dimensional Σ^n é dita uma *hipersuperfície tipo-espaço* se métrica induzida via ψ é uma métrica Riemanniana em Σ^n, a qual denotaremos também por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Neste sentido, $H = -\frac{1}{n}tr(A)$ é a curvatura média de Σ^n.

Agora, para cada $t \in I$ vamos orientar a fibra Riemaniana(tipo-espaço) $M_t^n = \{t\} \times M^n$, chamado de *slice*, pelo campo de vetor normal unitário ∂_t.

Uma propriedade interessante dos espaços GRW é que a fibra Riemanniana(slice) $M_t^n = \{t\} \times M^n$ quando orientada pelo campo ∂_t, sua curvatura média H_t é a mesma para cada t.

O próximo resultado é devido a L. J. Alías, A. Romero e M. Sánchez, [22] e garante que M_t^n tem curvatura média constante igual a $H = \frac{f'}{f}(t)$ com respeito ao campo ∂_t.

Proposição 4.3. *Sejam $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ um espaço GRW. Se orientarmos os slice $M_t^n = \{t\} \times M^n$ com o campo ∂_t, então a curvatura média $H(t)$ de M_t^n é igual a $\frac{f'(t)}{f(t)}$, para qualquer $t \in I$.*

Demonstração. Seja $\{e_i\}$ um referencial ortonormal em p. Pelo ítem (i) da Proposição (4.2), temos

$$
\begin{aligned}
H(t) &= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle Ae_i, e_i\rangle_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\langle (\nabla_{e_i}N)^{\top}, e_i\right\rangle_p \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}\partial_t, e_i\rangle_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{f'(t)}{f(t)}e_i, e_i\right\rangle_p \\
&= \frac{1}{n}\left\langle \frac{f'(t)}{f(t)}\sum_{i=1}^{n} e_i, e_i\right\rangle_p \\
&= \frac{f'(t)}{f(t)},
\end{aligned}
$$

para todo $t \in I$ □

Observemos que, como ∂_t é um campo de vetor unitário tipo-tempo globalmente definido no espaço-tempo ambiente, existe um único campo de vetor normal unitário tipo-tempo N globalmente definido na hipersuperfície tipo-espaço Σ^n o qual está na mesma orientação temporal com ∂_t. Agora, usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz Lema (1.7) item (ii), obtemos

$$\langle N, \partial_t\rangle \leq -1 < 0$$

em Σ^n.

Vamos nos referir ao campo de vetor normal unitário N apontando para o futuro como sendo a aplicação de Gauss da hipersuperfície tipo-espaço Σ^n. No contexto do espaço-tempo RW, temos a seguinte definição:

Definição 4.4. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço, onde N denota sua aplicação de Gauss. Chamamos de ângulo hiperbólico normal de Σ^n a aplicação diferenciável $\theta : \Sigma^n \longrightarrow [0, +\infty)$ definida por*

$$\cosh\theta = -\langle N, \partial_t\rangle \geq 1. \tag{4.5}$$

Como no capítulo anterior, dizemos que uma hipersuperfície tipo-espaço $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -I \times_f M^n$ é *limitada no infinito futuro* de $-I \times_f M^n$ se existir $\bar{t} \in I$ tal que

$$\psi(\Sigma) \subset \{(t, x) \in -I \times_f M^n; t \leq \bar{t}\}.$$

Analogamente, dizemos que Σ^n é *limitada no infinito passado* de $-I \times_f M^n$ se existir $\underline{t} \in I$ tal que

$$\psi(\Sigma) \subset \{(t, x) \in -I \times_f M^n; t \geq \underline{t}\}.$$

Finalmente, dizemos que Σ^n é *limitada no infinito* de $-I \times_f M^n$ se é limitada no infinito passado e no infinito futuro de $-I \times_f M^n$. Em outras palavras, Σ^n é limitada no infinito de $-I \times_f M^n$ se existem $\underline{t} < \bar{t}$ tal que $\psi(\Sigma)$ está contido entre os slices $M^n_{\underline{t}}$ e $M^n_{\bar{t}}$.

Sejam $\overline{M}^{n+1}$ um espaço de GRW e $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço. A função $h : \Sigma^n \longrightarrow I$, definida por $h(t, x) = (\pi_I \circ \psi)(t, x) = t$, é chamada *função altura* de Σ^n com respeito ao campo de vetor unitário ∂_t.

Sejam $\overline{\nabla}$ e ∇ os gradientes com respeito as métricas de $I \times_f M^n$ e Σ^n, respectivamente. Agora, dado $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, temos que o gradiente de π_I em $I \times_f M^n$ é dado por

$$\left\langle \overline{\nabla}\pi_I, X \right\rangle = X(\pi_I) = X^*(\pi_I) - \langle X, \partial_t\rangle\, \partial_t(\pi_I) = -\langle X, \partial_t\rangle\,,$$

de onde segue que

$$\overline{\nabla}\pi_I = -\partial_t, \tag{4.6}$$

de (4.6), obtemos que o gradiente de h em Σ^n é dado por

$$\nabla h = (\overline{\nabla}\pi_I)^\top = -\partial_t^\top = -\partial_t - \langle N, \partial_t \rangle N. \tag{4.7}$$

Agora, de (4.6) e (4.7), obtemos

$$|\nabla h|^2 = \langle N, \partial_t \rangle^2 - 1 = \cosh^2\theta - 1, \tag{4.8}$$

onde $|\cdot|$ denota a norma de um campo de vetor em Σ^n.

A formula que aparece no lema seguinte é um caso particular de um resultado obtido por L. J. Alías e A. G. Colares (cf. [21], Lema 4.1).

Lema 4.1. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -I \times_f M^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW, com aplicção de Gauss N. Então, denotando por $h = (\pi_I \circ \psi)$ a função altura de Σ^n, obtemos*

$$\triangle h = -(\ln f)'(h)\{n + |\nabla h|^2\} - nH \langle N, \partial_t \rangle .$$

4.2 Espaço-tempo tipo Steady State

Nesta secção mostraremos que o Steady State Space $\mathcal{H}^{n+1}$ também pode ser expresso isometricamente equivalente ao espaço-tempo RW $-\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$. No tocante, apresentaremos alguns resultados de rigidez de hipersuperfícies tipo-espaço imersa em $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ e, por fim, alguns resultados de gráficos verticais inteiros em $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$.

A seguinte proposição é devido a A. L. Albujer e L. J. Alías, ([6], seção 4), e mostra que podemos considerar uma extensão natural do Steady state space $\mathcal{H}^{n+1} = -\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{R}^n$. Em particular, temos

$$\phi(L^n(\tau)) = \{\ln \tau\} \times \mathbb{R}^n$$

e

$$\phi_*(N_\tau) = \partial_t.$$

Proposição 4.5. *O Steady State Space $\mathcal{H}^{n+1}$ é isométrico ao GRW $- \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$ que é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ munido da métrica Lorentziana*

$$\langle , \rangle = -\, dt^2 + e^{2t}(dx_1^2 + \ldots + dx_n^2).$$

Demonstração. De fato, sejam $b \in \mathbb{L}^{n+2}$ um vetor nulo tal que $\langle a, b \rangle = 1$ e a seguinte aplicação $\phi : \mathcal{H}^{n+1} \longrightarrow -\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$ dada por

$$\phi(p) = \left(\log(\langle p, a \rangle), \frac{p - \langle p, a \rangle b - \langle p, b \rangle a}{\langle p, a \rangle} \right).$$

Veja que ϕ é diferenciável e que dado $v \in T_p\mathcal{H}^{n+1}$ existe uma curva diferenciável $\alpha : I \to \mathcal{H}^{n+1}$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Então

$$\begin{aligned}
d\phi_p(v) &= \frac{d}{dt}(\phi \circ \alpha)(t)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\log(\langle \phi(\alpha(t)), a \rangle), \frac{\phi(\alpha(t)) - \langle \phi(\alpha(t)), a \rangle b - \langle \phi(\alpha(t)), b \rangle a}{\langle \phi(\alpha(t)), a \rangle} \right)\Bigg|_{t=0} \\
&= \left(\frac{d}{dt}\log(\langle \phi(\alpha(t)), a \rangle)\Big|_{t=0}, \frac{d}{dt}\left(\frac{\phi(\alpha(t)) - \langle \phi(\alpha(t)), a \rangle b - \langle \phi(\alpha(t)), b \rangle a}{\langle \phi(\alpha(t)), a \rangle} \right)\Bigg|_{t=0} \right) \\
&= \left(\frac{\langle v, a \rangle}{\langle p, a \rangle}, \frac{d}{dt}\left(\frac{\phi(\alpha(t)) - \langle \phi(\alpha(t)), a \rangle b - \langle \phi(\alpha(t)), b \rangle a}{\langle \phi(\alpha(t)), a \rangle} \right)\Bigg|_{t=0} \right) \\
&= \left(\frac{\langle v, a \rangle}{\langle p, a \rangle}, \frac{(v - \langle v, a \rangle b - \langle v, b \rangle a)\langle p, a \rangle - \langle v, a \rangle (p - \langle p, a \rangle b - \langle p, b \rangle a)}{\langle p, a \rangle^2} \right) \\
&= \left(\frac{\langle v, a \rangle}{\langle p, a \rangle}, \frac{(v - \langle v, b \rangle a)\langle p, a \rangle - \langle v, a \rangle (p - \langle p, b \rangle a)}{\langle p, a \rangle^2} \right).
\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\langle d\phi_p(v), d\phi_p(v) \rangle = \frac{1}{\langle p, a \rangle^2}\langle v, v \rangle, \quad \forall\, v \in T_p\mathcal{H}^{n+1}.$$

Pela identidade de polarização concluímos que

$$\langle d\phi_p(u), d\phi_p(v) \rangle = \frac{1}{\langle p, a \rangle^2}\langle u, v \rangle, \quad \forall\, u, v \in T_p\mathcal{H}^{n+1}, \tag{4.9}$$

isto é, ϕ preserva métrica.

Pela equação (4.9) ϕ preserva a métrica, assim $d\phi_p$ é injetora, isto é, o determinante da matriz Jacobiana da transformação linear $d\phi_p$ é não nulo, logo pelo teorema da aplicação inversa ϕ é um difeomorfismo local. Como ϕ é injetora, concluímos que a aplicação

$$\phi : \mathcal{H}^{n+1} \longrightarrow \phi(\mathcal{H}^{n+1}) \subset -\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$$

é uma isometria.

Mostremos agora que $\phi(\mathcal{H}^{n+1}) = -\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$. Com efeito, como a função logaritmo é sobrejetiva temos que $\phi(\mathcal{H}^{n+1}) = -\mathbb{R} \times_{e^t} A^n$, onde A^n é um aberto do $\mathbb{R}^n$. Mas munindo $\mathcal{H}^{n+1}$ da parametrização $y : \mathbb{R} \times L^n(\tau) \longrightarrow \mathcal{H}^{n+1}$, temos que para algum $\tau > 0$ fixado a aplicação $\phi_\tau : L^n(\tau) \longrightarrow A^n$ é uma isometria. Por outro lado, sabemos pela Proposição (2.2) que a aplicação $\psi : L^n(\tau) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma isometria. Logo, como a composição de isometrias ainda é uma isometria, segue que a nova aplicação

$g = \phi_\tau \circ \psi^{-1} : A^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma isometria. Sendo $A^n \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, obtemos que $A^n = \mathbb{R}^n$ e portanto $\phi(\mathcal{H}^{n+1}) = -\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$ de onde concluímos que $\mathcal{H}^{n+1}$ é isométrico a $-\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$. $\square$

Seja M^n uma variedade Riemanniana conexa n-dimensional e considere o espaço-tempo GRW

$$-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n.$$

Vamos nos referir a tal família mais ampla de espaços-tempo GRW como sendo os espaços-tempo *tipo Steady State.* Por exemplo, quando M^n é o n-Toro plano, obtemos o cúspide do espaço de De Sitter, como definido em [12].

Neste sentido, aplicando um procedimento similar ao aplicado na prova do Teorema 3.3, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 4.6. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional não negativa e $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa e limitada no infinito futuro de $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$, com curvatura média limitada $1 \leq H \leq \alpha$, para alguma constante α. Se o ângulo hiperbólico normal θ de Σ^n satisfaz $\cosh\theta \leq \inf_\Sigma H$, então Σ^n é um slice M^n_t, para algum $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.1 e da equação (4.5), obtemos

$$\begin{aligned} \triangle h &= -n - |\nabla h|^2 + nH\langle N, \partial_t\rangle = -n - |\nabla h|^2 + nH\cosh\theta \\ &= n(H\cosh\theta - 1) - |\nabla h|^2. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Por outro lado, como supomos que a curvatura média H é limitada, segue de [6] (equação (16))

$$Ric_\Sigma(X, X) \geq n - 1 - \frac{n^2H^2}{4}, \tag{4.11}$$

uma vez que a curvatura seccional K_M é não negativa. Logo, a curvatura de Ricci de Σ^n é limitada inferiormente. Assim, desde que supomos Σ^n limitada no infinito futuro de $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$, aplicando o Lema 3.1 para a função h, obtemos uma sequência $\{p_k\}$ em Σ^n tal que

$$\lim_{k\to\infty} h(p_k) = \sup_\Sigma h, \quad \lim_{k\to\infty} |\nabla h(p_k)| = 0 \quad e \quad \lim_{k\to\infty} \triangle h(p_k) \leq 0.$$

Consequentemente, desde que $\cosh\theta \geq 1$ em Σ^n, de (4.10) obtemos

$$0 \geq \lim_{j\to\infty} \triangle h(p_{k_j}) = \lim_{j\to\infty} n(H(p_{k_j})\cosh\theta - 1) \geq n(\lim_{j\to\infty} H(p_{k_j}) - 1) \geq 0,$$

para alguma subsequência $\{p_{k_j}\}$ de $\{p_k\}$. Então $\lim_{j\to\infty} H(p_{k_j}) = 1$ e, daí, $\inf_\Sigma H = 1$. Assim, pela hipótese feita sobre o ângulo hiperbólico normal θ de Σ^n, concluimos que $\cosh\theta = 1$ em Σ^n. Portanto, Σ^n é um slice M^n_t, para algum $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Observação 4.2. *Do Lema 7 de [6], vemos que se o espaço-tempo tipo Steady State* $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ *admite uma hipersuperfície tipo-espaço completa* Σ^n *a qual é limitada no infinito futuro, então a fibra Riemanniana* M^n *é necessariamente completa. Por outro lado, supondo que* M^n *tem curvatura seccional não negativa e que a hipersuperfície tipo-espaço* Σ^n *tem curvatura média limitada, pela inequação (4.11), obtemos que a curvatura de Rcci de* Σ^n *é limitada inferiormente. Consequentemente, como na Observação (3.1), temos que a curvatura média* H *de* Σ^n *satisfaz* $|H| \leq c < \frac{2\sqrt{n-1}}{n}$*, onde* $c > 0$ *concluimos que* Σ^n *é necessariamente compacta. Neste caso, o ambiente espaço-tempo tipo Steady State é necessariamente espacialmente fechado (isto é, sua fibra Riemanniana é compacta; veja [22], Proposição 3.2).*

Definição 4.7. *Seja* M^2 *uma superfície Riemanniana. Uma função* $f \in C^\infty(M)$ *é dita subharmônica se* $\triangle f \geq 0$*. Dizemos que* f *é superharmônica se* $-f$ *é subharmônica. Além disso, dizemos que* M *é parabólica se* M^2 *não é compacta e toda função subharmônica negativa é constante em* M^2*.*

O seguinte resultado é devido a A. Huber, [4].

Lema 4.2. *(A. Huber) Toda superfície Riemanniana completa não-compacta e com curvatura Gaussiana* K *não-negativa é parabólica.*

No caso 3-dimensional ou quando $n = 2$ no Teorema 4.6, obtemos o seguinte resultado de rigidez sobre superfícies tipo-espaço completa de curvatura Gaussiana não-negativa.

Teorema 4.8. *Sejam* M^2 *uma superfície Riemanniana completa com curvatura seccional não negativa e* $\psi : \Sigma^2 \longrightarrow -\mathbb{R} \times_{e^t} M^2$ *uma superfície tipo-espaço completa de curvatura Gaussiana não-negativa, com curvatura média* $H \geq 1$*. Se o ângulo hiperbólico normal* θ *de* Σ^2 *satisfaz* $\cosh\theta \leq H$*, então* Σ^2 *é um slice* M_t^2*, para algum* $t \in \mathbb{R}$*.*

Demonstração. Pelo Lema 1.9, item (ii), temos

$$\triangle e^{-h} = e^{-h}(|\nabla h|^2 - \triangle h). \tag{4.12}$$

Aplicando o Lema 4.1, desde que $\triangle h = 2(-H\langle N, \partial_t\rangle - 1) - |\nabla h|^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \triangle e^{-h} &= e^{-h}(|\nabla h|^2 - \triangle h) \\ &= e^{-h}(|\nabla h|^2 + 2H\langle N, \partial_t\rangle + 2 + |\nabla h|^2) \\ &= 2e^{-h}(|\nabla h|^2 + 1 + H\langle N, \partial_t\rangle). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Assim, de (4.5), (4.8) e (4.13), temos

$$\triangle e^{-h} = 2e^{-h}(\cosh^2\theta - 1 + 1 - H\cosh\theta) = 2e^{-h}\cosh\theta(\cosh\theta - H).$$

Pela hipótese feita sobre o ângulo hiperbólico normal θ de Σ^2, temos que $\triangle e^{-h} \leq 0$, isto é, e^{-h} é uma função superharmônica positiva em Σ. Além disso, como $n = 2$, a curvatura de Ricci de Σ^2, coincide com a curvatura Gaussiana K_Σ de Σ^2. Pela inequação (4.11), $K_\Sigma \geq 0$. Assim, pelo Lema 4.2, Σ^2 é parabólica. Portanto, h é constante em Σ^2, isto é, Σ^2 é um slice M_t^2, para algum $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Observação 4.3. *Na Proposição 13 de [27], S. Montiel prova que quando Σ^n é uma hipersuperfície tipo-espaço completa imersa com curvatura média constante $H \geq 1$ em $\mathbb{S}_1^{n+1}$, supondo que a imagem hiperbólica de Σ^n está contida no fecho de um domínio interior limitado por uma horosfera, então obtemos que $H = 1$. Quando $n = 2$, do principal teorema de [20](veja também [19]), isto implica que Σ^2 é uma superfície umbílica e a imagem hiperbólica é exatamente uma horosfera.*

4.3 Gráficos verticais inteiros em $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$

Seja $\Omega \subseteq M^n$ um domínio conexo de M^n. Um *gráfico vertical* sobre Ω é determinado por uma função suave $u \in C^\infty(\Omega)$ e é dado por

$$\Sigma^n(u) = \{(u(x), x); x \in \Omega\} \subset -\mathbb{R} \times_{e^t} M^n.$$

A métrica induzida em Ω da métrica Lorentziana no espaço ambiente via Σ^n é

$$\langle , \rangle = -du^2 + e^{2u} \langle , \rangle_{M^n} . \tag{4.14}$$

O gráfico é dito inteiro se $\Omega = M^n$. Podemos ver, sem grande dificuldade, que um gráfico $\Sigma^n(u)$ é uma hipersuperfície tipo-espaço se, e somente se, $|Du|_{M^n}^2 \leq e^{2u}$, onde Du denota o gradiente de u em Ω e $|Du|_{M^n}$ sua norma, com respeito a sua métrica $\langle , \rangle_{M^n}$ em Ω.

Observe que pelo Lema 3.1 em [22], no caso onde M^n é um variedade simplesmente conexa, cada hipersuperfície tipo-espaço completa Σ^n limitada no infinito de $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ é um gráfico tipo-espaço inteiro em tal espaço. No entanto, em contraste com o caso de gráficos num espaço de Riemann, um gráfico tipo-espaço inteiro num espaço-tempo Lorentziano não é necessariamente completo, no sentido de que a métrica Riemanniana induzida (4.14) não é necessariamente completa em M^n.

Neste contexto, usando as idéias de [7], obtém-se o seguinte resultado não-paramétrico:

Corolário 4.9. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional não negativa e seja $\Sigma^n(u)$ um gráfico vertical tipo-espaço inteiro limitado no* *infinito de $-\mathbb{R}\times_{e^t} M^n$ e com curvatura média limitada $1\leq H\leq\alpha$, para alguma constante α. Se*

$$|Du|^2_{M^n}\leq e^{2u}\left(1-\sup_{\Sigma(u)}\frac{1}{H^2}\right), \tag{4.15}$$

então $\Sigma^n(u)$ é um slice.

Demonstração. Primeiro, veja que pelas hipóteses do teorema, $\Sigma^n(u)$ é uma hipersuperfície completa. Na verdade, de (4.14) e da desigualdade de Calchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned}\langle X,X\rangle = -\langle Du,X\rangle^2_{M^n}+e^{2u}\langle X,X\rangle_{M^n}&\\ &\geq -|Du|^2_{M^n}|X|^2_{M^n}+e^{2u}\langle X,X\rangle_{M^n}\\ &= (e^{2u}-|Du|^2_{M^n})\langle X,X\rangle_{M^n},\end{aligned}$$

para todo campo de vetor tangente X em $\Sigma^n(u)$.

Assim, de (4.15), obtemos

$$\langle X,X\rangle\geq e^{2u}\sup_{\Sigma(u)}\frac{1}{H^2}\langle X,X\rangle_{M^n}\geq c\langle X,X\rangle_{M^n},$$

para a constante positiva $c=e^{2\inf_{\Sigma(u)}u}\sup_{\Sigma(u)}\frac{1}{H^2}$. Isto implica que $L\geq\sqrt{c}L_{M^n}$, onde L e L_{M^n} denotam o comprimento de uma curva em $\Sigma^n(u)$ com respeito as métricas Riemannianas $\langle,\rangle$ e $\langle,\rangle_{M^n}$, respectivamente. Como consequência, como M^n é completa por hipótese, a métrica induzida em $\Sigma^n(u)$ a partir da métrica de $-\mathbb{R}\times_{e^t} M^n$ também é completa. Por outro lado, temos que

$$N=-\langle N,\partial_t\rangle\partial_t+N^*, \tag{4.16}$$

onde N^* denota a projeção de N sobre a fibra Riemanniana M^n. Consequentemente da equação (4.7) e (4.16), obtemos

$$N^{*^\top}=-\langle N,\partial_t\rangle\nabla h, \tag{4.17}$$

e temos também

$$|\nabla h|^2=e^{2h}\langle N^*,N^*\rangle_{M^n}. \tag{4.18}$$

Além disso, com um cálculo simples verificamos que

$$N=\frac{e^u}{\sqrt{e^{2u}-|Du|^2_{M^n}}}\left(\partial_t-\frac{1}{e^{2u}}Du\right).$$

Assim, de (4.16), (4.17) e (4.18), obtemos

$$|\nabla h|^2=\frac{|Du|^2_{M^n}}{e^{2u}-|Du|^2_{M^n}}. \tag{4.19}$$

Portanto, levando em conta as equações (4.8) e (4.19), e usando hipótese (4.15), garantimos que $\cosh\theta\leq\inf_\Sigma H$, e o resultado segue do Teorema 4.6. □

Seguindo as mesmas idéias da prova do Teorema 4.9, obtemos também um versão não-paramétrica do Teorema 4.8.

Corolário 4.10. *Sejam M^2 uma superfície Riemanniana completa com curvatura seccional não-negativa e seja $\Sigma^2(u)$ um gráfico vertical tipo-espaço inteiro limitado no infinito de $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^2$. Suponha que $\Sigma^2(u)$ tem curvatura Gaussiana não-negativa e curvatura média limitada $H \geq 1$. Se*

$$|Du|^2_{M^2} \leq e^{2u}\left(1 - \frac{1}{H^2}\right),$$

então $\Sigma^2(u)$ é um slice.

Observação 4.4. *Em A. L. Albujer, F. E. C. Camargo and H. F. de Lima,[8], foi obtido resultados referentes a singularidade para hipersuperfícies tipo-espaço completa com curvatura média constante imersa em um espaço-tempo RW. Como aplicação de tais resultados de singularidade para o caso de gráficos verticais em um espaço-tempo RW, eles também obteram resultados não-paramétricos de rigidez.*

Bibliografia

[1] A. Caminha and H. F. de Lima, *Complete Vertical Graphs with Constant Mean Curvature in Semi-Riemannian Warped Products*, Bull. of the Belgian Math. Soc. Simon Stevin **16**(2009), 91-105.

[2] A. G. Colares and H. F. de Lima, On Rigidity of Spacelike Hypersurfaces Immersed in the Steady State Space, Publicationes Mathematicae Debrechen 81/1-2 (2012), 103-119.

[3] A. G. Colares and H. F. de Lima, *Spacelike Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in the Stesdy State Space*, Bull. of the Belgian Math. Soc. Simon Stevin **17**(2010), 287-302.

[4] A. Huber, *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv.**32**(1957), 13–72.

[5] A. J. Goddard, *Some remarks on the existence of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **82**(1977), 489–495.

[6] A. L. Albujer and L. J. Alías, *Spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the steady state space*, Proc. Amer. Math Soc. **137** (2009), 711-721.

[7] A. L. Albujer, F. E. C. Camargo and H.F. de Lima, *Complete spacelike hypersurfaces with constant mean in* $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$, J. Math. Anal. Appl. **368**(2010), 650-657.

[8] A. L. Albujer, F. E. C. Camargo and H.F. de Lima, *Complete spacelike hypersurfaces in a Robertson-Walker spacetime*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **151**(2011), 271-282.

[9] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, (1983).

[10] B. Palmer, *The Gauss map of a spacelike constant mean curvature hypersurface in Minkowski space*, Comment. Math. Helv. **65**(1990), 52-57.

[11] F. Hoyle, *A new model for the expanding universe*, Monthly Not. Roy. Astr. Soc.**108**(1948), 372–382.

[12] G. J. Galloway, *Cosmological spacetimes wint* $\Lambda > 0$, Contemp. Math. **359**(2004), 87-101.

[13] H. Bondi and T. Gold, *On the generation of magnetism by fluid motion*, Monthly Not. Roy. Astr. Soc. **108**(1948), 252-270.

[14] H. F. de Lima, *Spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in de Sitter space*, Jornal of Geometry an Physics, **57**(2007, 967-975.

[15] H. Omori, *Isometric immersion of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan **19**(1967), 205-214.

[16] J. A. Aledo and L. J. Alías, *On the curvatures of bounded complete s2010acelike hypersurfaces in the Lorentz- Minkowski space*, Manuscripta Math. **101**(2000), 401-413.

[17] J. A. Aledo and L. J. Alías, *On the volume and the Gauss map image of complete spacelike hypersurfaces in de Sitter space*, Proc. Amer. Math Soc. **130** (2001), 1145-1151.

[18] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Matematical **218**, Ed. Board, (2003).

[19] J. Ramanathan, *Complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in de Sitter space*, Indiana Univ. Math. J. **36**(1987), 349-359.

[20] K. Akutagawa, *On spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space*, Math. Z. **196** (1987) 13-19.

[21] L. J. Alías and A. G. Colares,*Uniqueness of spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in Generalized Robertson-Walker spacetimes*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **143**(2007), 703-729.

[22] L. J. Alías, A. Romero and M. Sánchez, *Uniqueness of complete spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in Generalized Robertson-Walker spacetimes*, Gen. Relativity Gravitation **27**(1995), 71-84.

[23] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, IMPA, Rio de Janeiro,(2009).

[24] R. Aiyama, *On the Gauss map of complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in Minkowski space*, Tsukuba J. Math. **16** (1992), 353-361.

[25] S. Montiel, *An integral inequality for compact spacelike hypersurfaces in de Sitter space and applications to the case of constant mean curvature*, Indiana Univ. Math. J. **37**(1988), 909–917.

[26] S. Montiel, *Uniqueness of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in foliated spacetimes*, Math. Ann. **314** (1999), 529–553.

[27] S. Montiel, *Complete non-compact spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in de Sitter spaces*, J. Math. Soc. Japan **55**(2003), 915–938.

[28] S. T. Yau, *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*, Appl. Math. **28**(1975), 201-228.

[29] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Spacetime*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.

[30] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: Pinciples and aplicatons of the general theory of relativity*, John Wiley and Sons, New York, 1972.

[31] Y. L. Xin, *On the Gauss image of a spacelike hypersurface with constant mean curvature in Minkowski space*, Comment. Math. Helv. **66**(1991), 590-598.