Resumo

Neste trabalho estudamos os espaços $L^{p(x)}(\Omega)$ e $W^{1,\,p(x)}(\Omega)$, bem como a exitência de solução fraca para problemas elípticos do tipo

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = f(x,u), x \in \Omega, \\ u \in W^{1,\,p(x)}(\Omega), \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado ou $\Omega = \mathbb{R}^N$; $p(x) > 1$ é uma função contínua e $\Delta_{p(x)}$ denota o operador $p(x)-$Laplaciano, o qual é definido por

$$\Delta_{p(x)}u = div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u).$$

Usando técnicas variacionais, obtemos alguns resultados de existência de solução para os problemas em questão.

Abstract

In this work we study the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{1,p(x)}(\Omega)$, as well as existence of weak solutions for elliptic problems of type

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = f(x,u), x \in \Omega, \\ u \in W^{1,p(x)}(\Omega), \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain or $\Omega = \mathbb{R}^N$; $p(x) > 1$ is a continuous function and $\Delta_{p(x)}$ denotes $p(x)-$Laplacian operator, wich is defined by

$$\Delta_{p(x)}u = div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u).$$

Using variational techniques, we obtain some results of existence of solution for the problems in question.

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Teconologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sobre os Espaços de Lebesgue e Sobolev Generalizados e Aplicações Envolvendo o $p(x)$-Laplaciano.

por

Cícero Januário Guimarães

sob orientação do

Prof. Dr. Marco Aurelio Soares Souto

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB
Março/2006

Sobre os Espaços de Lebesgue e Sobolev Generalizados e Aplicações Envolvendo o $p(x)$-Laplaciano.

por

Cícero Januário Guimarães

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Prof. Dr. Marco Aurelio Soares Souto

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Março/2006

Agradecimentos

Ao professor Marco Aurelio, pela compreensão e excelente orientação.

Aos professores João Marcos do Ó e Daniel Cordeiro, pelas sugestões e por aceitarem a participar da banca examinadora.

Ao professor Claudianor, pelas sugestões.

Aos professores Francisco Morais e Rosana, por me recomendarem ao mestrado.

Aos professores com os quais cursei disciplinas no mestrado: Marco Aurelio, Claudianor, Vânio, Braulio e Daniel Pellegrino.

Aos demais professores da UAME.

A todos os funcionários da UAME, entre eles, Salete, Dona Argentina e Valdir, pela presteza e atenciosidade.

A Jesualdo, Lauriclécio e Lindomberg, por me ajudarem no LATEX.

A todos os colegas de mestrado.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

Dedicatória

Aos meus pais.

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho, estudamos os espaços de Lebesgue e Sobolev generalizados, bem como problemas elípticos envolvendo o operador $p(x)$-laplaciano, em domínios limitados e em $\mathbb{R}^N$. A importância de estudar os espaços mencionados é que eles fornecem a estrutura necessária para se resolver problemas elípticos com certas condições de crescimento.

O principal objetivo neste trabalho é estudar a existência de solução fraca para problemas elípticos do tipo

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = f(x,u), x \in \Omega, \\ u \in W^{1,p(x)}(\Omega), \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado ou $\Omega = \mathbb{R}^N$, $p(x) > 1$ é uma função contínua e $\Delta_{p(x)}$ denota o operador $p(x)-$Laplaciano, o qual é definido por

$$\Delta_{p(x)}u = div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u).$$

Sobre a função assumiremos hipóteses ao longo do trabalho.

O operador $p(x)$-laplaciano surge em alguns problemas físicos, por exemplo, em teoria da elasticidade e mecânica dos fluidos, mais precisamente, fluidos do tipo eletro-reológicos (ver [8] e [23]), cuja equação de movimento é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}u + divS(u) + (u \cdot \nabla)u + \nabla\pi = f,$$

onde $u : \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}^3$ é a velocidade do fluido em um ponto do espaço-tempo, $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ é o operador gradiente, $\pi : \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}^1$ é a pressão, $f : \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}^3$ representa forças externas e o tensor stress $S : W^{1,1}_{loc} \to \mathbb{R}^{3+3}$ é da forma

$$S(u)(x) = \mu(x)(1 + |Du(x)|^2)^{(p(x)-2/2)}Du(x),$$

onde $Du = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ é a parte simétrica do gradiente de u. Além disso, o operador $p(x)$-laplaciano possui uma propriedade interessante: ele é não-homogêneo quando a função p é não-constante. Como conseqüência disso, temos algumas dificuldades, como por exemplo: não podemos usar o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange na maioria dos problemas envolvendo esse operador.

Este trabalho é constituído de quatro capítulos e quatro apêndices.

No **Capítulo 1** estudamos o espaço de Lebesgue generalizado, ou seja, o seguinte espaço

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u \text{ é mensurável}, \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\},$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um conjunto mensurável e $p \in L^\infty(\Omega)$, com $p \geq 1$. Neste Capítulo demonstramos as principais propriedades desse espaço, tais como: completeza, reflexividade, separabilidade e densidade. Também demonstramos as propriedades básicas do operador de Nemytskii.

No **Capítulo 2** fazemos um estudo semelhante ao do **Capítulo 1**, agora para o espaço de Sobolev generalizado $W^{1,p(x)}(\Omega)$, o qual é definido por

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^{p(x)}(\Omega), j = 1, \ldots, N \right\},$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um domínio. Tal espaço é essencial neste trabalho, pois é sobre ele que estudaremos a existência de solução para os problemas em questão. É importante ainda observar que este espaço pode ser escrito da seguinte forma

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega) \right\},$$

onde

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

Ainda neste capítulo, supondo Ω limitado, demonstramos alguns resultados de imersão, entre eles um teorema tipo Sobolev e a Desigualdade de Poincaré, que serão de grande utilidade nos capítulos seguintes.

Os Capítulos 1 e 2 são baseados no artigo de Fan & Zhao [9].

No **Capítulo 3** estudamos a existência de solução fraca em $W_o^{1,p(x)}(\Omega)$ para o problema de Dirichlet

$$(P) \begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $p > 1,\ p \in C(\overline{\Omega})$. Ainda neste capítulo, estudamos as propriedades do operador $p(x)-$laplaciano e obtemos alguns resultados de existência de solução para o problema (P), impondo certas condições de crescimento sobre a função f.

O **Capítulo 3** é baseado no artigo de Fan & Zhang [10].

No **Capítulo 4** estudamos a exitência de solução fraca para a seguinte classe de problemas elípticos quasilineares

$$(P_\lambda)\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + u^{p(x)-1} = \lambda u^{q(x)}, x \in \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0, u \neq 0 \text{ e } u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro e $p, q : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções mensuráveis satisfazendo algumas condições de crescimento.

Estudaremos dois tipos de comportamento para a função q no infinito. No primeiro, supondo q constante no infinito, mostramos que o problema (P_λ) tem uma solução para todo $\lambda > 0$. No segundo, supondo q assintoticamente constante no infinito, mostramos que o problema (P_λ) tem uma solução para todo $\lambda > \lambda_o > 0$.

Para o **Capítulo 4** temos como referência o artigo de Alves & Souto [2].

No **Apêndice A** demonstramos que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^N$, valem as seguintes desigualdades

$$\left\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \right\rangle \geq \begin{cases} \dfrac{2^{3-p}}{p}|x-y|^p, & \text{se } p \geq 2 \\ (p-1)\dfrac{|x-y|^2}{(|x|^p + |y|^p)^{2-p}}, & \text{se } 1 < p < 2, \end{cases}$$

As desigualdades acima são importantes, pois através delas e do Teorema de Minty-Browder, demonstrado no **Apêndice B**, concluiremos que o operador

$$L : W_o^{1,p(x)}(\Omega) \longrightarrow (W_o^{1,p(x)}(\Omega))^*$$

definido por

$$(L(u), v) = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v dx, \text{ para todos } u, v \in W_o^{1,p(x)}(\Omega)$$

é um homeomorfismo. Tal propriedade será útil na busca de solução fraca para o problema (P).

No **Apêndice B** demonstramos o Teorema de Minty-Browder, que é um dos resultados básicos da teoria dos operadores monótonos.

No **Apêndice C** demonstramos o Teorema do Passo da Montanha, um resultado fundamental neste trabalho, já que estudamos problemas elípticos variacionais.

No **Apêndice D** enunciamos alguns resultados importantes utilizados ao longo da dissertação.

Capítulo 1

O Espaço $L^{p(x)}(\Omega)$

Neste capítulo estudaremos o espaço de Lebesgue generalizado $L^{p(x)}(\Omega)$, o qual é definido por

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u \text{ é mensurável}, \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\},$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um conjunto mensurável e $p \in L^\infty(\Omega)$, com $p \geq 1$. Tal espaço juntamente com espaço de Sobolev generalizado $W^{1,p(x)}(\Omega)$, que será estudado no capítulo 2, desempenham um papel fundamental quando se estuda problemas elípticos variacionais com certas condições de crescimento.

1.1 Definições e Resultados Básicos

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável. Considere o conjunto

$$L^\infty_+(\Omega) = \{u \in L^\infty(\Omega) : \text{ inf ess}\, u \geq 1\}.$$

Para $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $p \in L^\infty_+(\Omega)$, definimos

$$\rho(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}\, dx,$$

$$p^- = \text{ inf ess } p \;\text{ e }\; p^+ = \text{ sup ess } p.$$

A função ρ definida anteriormente é chamada de modular. Devido à sua importância, a seguir demonstraremos alguns resultados envolvendo tal função, e que se mostrarão úteis ao longo deste trabalho.

Proposição 1.1 *Para todos* $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$, *tem-se*

(a) $\rho(u) = 0$ *se e, somente se,* $u = 0$;

(b) $\rho(-u) = \rho(u)$;

(c) $\rho(tu + (1-t)v) \leq t\rho(u) + (1-t)\rho(v)$, *para todo* $t \in [0,1]$, *i.e.,* ρ *é uma função convexa.*

(d) $\rho(u+v) \leq 2^{p+}[\rho(u) + \rho(v)]$;

(e) *Se* $\lambda > 1$, *então*

$$\rho(u) \leq \lambda\rho(u) \leq \lambda^{p^-}\rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p^+}\rho(u),$$

e se $0 < \lambda < 1$, *temos*

$$\lambda^{p^+}\rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p^-}\rho(u) \leq \lambda\rho(u) \leq \rho(u).$$

(f) *Para cada* $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$, $\rho(\lambda u)$ *é uma função crescente, contínua e convexa em* $\lambda \in [0, \infty)$.

Demonstração. Sejam $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$.

(a) Note que

$$\rho(u) = 0 \Leftrightarrow |u(x)|^{p(x)} = 0,\ q.s. \text{ em } \Omega \Leftrightarrow |u(x)| = 0,\ q.s. \text{ em } \Omega \Leftrightarrow u(x) = 0,\ q.s. \text{ em } \Omega.$$

(b) Segue da definição de ρ.

(c) Note que a função $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x,s) = |s|^{p(x)}$ é convexa em $\mathbb{R}$. Logo, pelas propriedades da integral de Lebesgue, concluímos que ρ é convexa.

(d) Note que

$$|u(x) + v(x)|^{p(x)} \leq 2^{p(x)}(|u(x)|^{p(x)} + |v(x)|^{p(x)}),\ q.s. \text{ em } \Omega.$$

Integrando a desigualdade acima, obtemos o resultado.

(e) Se $\lambda > 1$, temos

$$|u(x)|^{p(x)} \leq \lambda|u(x)|^{p(x)} \leq \lambda^{p^-}|u(x)|^{p(x)} \leq |\lambda u(x)|^{p(x)} \leq \lambda^{p^+}|u(x)|^{p(x)},\ q.s. \text{ em } \Omega.$$

Se $0 < \lambda < 1$, temos

$$\lambda^{p^+}|u(x)|^{p(x)} \leq |\lambda u(x)|^{p(x)} \leq \lambda^{p^-}|u(x)|^{p(x)} \leq \lambda|u(x)|^{p(x)} \leq |u(x)|^{p(x)},\ q.s. \text{ em } \Omega.$$

Integrando em ambos os casos as desigualdades acima, obtemos o resultado.

(f) Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, \infty)$, tais que $\lambda_1 < \lambda_2$. Fixando $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$, temos

$$|\lambda_1 u(x)|^{p(x)} = |\lambda_1|^{p(x)}|u(x)|^{p(x)} < |\lambda_2|^{p(x)}|u(x)|^{p(x)} = |\lambda_2 u(x)|^{p(x)}, \text{ q.s. em } \Omega.$$

Integrando esta desigualdade, obtemos

$$\rho(\lambda_1 u) < \rho(\lambda_2 u).$$

Logo,

$$\rho(\lambda u) \text{ é crescente em } \lambda \in [0, \infty).$$

Mostremos a continuidade. Seja $\lambda_n \to \lambda$ em $[0, \infty)$. Note que, q.s. em Ω,

$$\varphi_n := |\lambda_n u(x)|^{p(x)} \text{ é uma seqüência crescente e } \varphi_n \to \varphi := |\lambda u(x)|^{p(x)}.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Monótona temos

$$\rho(\lambda_n u) \to \rho(\lambda u).$$

Portanto, $\rho(\lambda u)$ é contínua em $\lambda \in [0, \infty)$.

Com relação à convexidade, note que a função $\varphi(x, \lambda) = |\lambda u(x)|^{p(x)}, \lambda \geq 0$, é convexa em λ. Logo, pelas propriedades da integral de Lebesgue, concluímos que $\rho(\lambda u)$ é convexa em $\lambda \in [0, \infty)$. ■

Pelos itens $(a), (b), (d)$ e (e) da Proposição 1.1, temos

Proposição 1.2 *$L^{p(x)}(\Omega)$ é um espaço vetorial.*

Nas demonstrações seguintes, para cada $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ denotaremos

$$I_u = \left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

Note que I_u é um intervalo da forma $I_u = (0, \infty)$ se $u = 0$ e $I_u = [a, \infty), a > 0$, se $u \neq 0$. De fato, se $u = 0$ é imediato, pois neste caso $\rho(0) = 0$. Suponha que $u \neq 0$ e seja $a \in I_u$. Daí, se $\lambda > a$ temos que

$$\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{a}.$$

Assim,

$$\rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) < \rho\left(\frac{u}{a}\right) \leq 1,$$

logo $\lambda \in I_u$. Portanto, I_u é um intervalo.

Agora observe que, para $\lambda > 0$, a função

$$f(\lambda) = \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right)$$

é contínua convexa decrescente. Além disso,

$$I_u = f^{-1}(-\infty, 1] = f^{-1}(0, 1].$$

Logo, $I_u = [a, \infty)$, com $a = f^{-1}(\{1\})$.

Vamos agora definir uma norma no espaço $L^{p(x)}(\Omega)$, que será denotada por $||\cdot||_{p(x)}$.

Proposição 1.3 $||u||_{p(x)} = \inf\left\{\lambda > 0 \ : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$ *é uma norma em* $L^{p(x)}(\Omega)$.

Demonstração. Sejam $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Devemos mostrar que

(i) $||u||_{p(x)} \geq 0$,

(ii) $||u||_{p(x)} = 0 \Leftrightarrow u = 0$,

(iii) $||\alpha u||_{p(x)} = |\alpha| ||u||_{p(x)}$,

(iv) $||u + v||_{p(x)} \leq ||u||_{p(x)} + ||v||_{p(x)}$.

De fato,

(i) É imediato.

(ii) Se $u = 0$, então $I_u = (0, \infty)$. Logo, $||u||_{p(x)} = 0$. Suponha agora que $||u||_{p(x)} = 0$, mas $u \neq 0$. Existe $(\lambda_n) \subset (0, 1)$ tal que

$$\lambda_n \to 0 \ \text{ e } \ \rho\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$1 \geq \rho\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) = \int_\Omega \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^{p(x)} |u(x)|^{p(x)} dx > \left(\frac{1}{\lambda_n}\right) \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx.$$

Sendo $\rho(u) > 0$, teríamos

$$\rho\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) \longrightarrow +\infty, \text{ quando } n \longrightarrow \infty,$$

uma contradição. Portanto, $u = 0$.

(iii) Se $\alpha = 0$, o resultado é imediato. Se $\alpha \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} ||\alpha u||_{p(x)} &= \inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{\alpha u}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \\ &= \inf\left\{|\alpha|\lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \\ &= |\alpha| \inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \\ &= |\alpha|||u||_{p(x)}. \end{aligned}$$

(iv) Defina o conjunto

$$C = \left\{u \in L^{p(x)}(\Omega) : \rho(u) \leq 1\right\}.$$

Observe que $I_u = \{\lambda > 0 : \lambda^{-1}u \in C\}$. Sendo $L^{p(x)}(\Omega)$ um espaço vetorial e ρ uma função convexa, temos que C é convexo.

Denotando $||u||_{p(x)} = a$ e $||v||_{p(x)} = b$, temos

$$\frac{u}{a+\epsilon}, \frac{v}{b+\epsilon} \in C, \text{ para todo } \epsilon > 0,$$

pois $a + \epsilon \in I_u$ e $b + \epsilon \in I_v$.

Sendo C convexo, temos

$$\frac{tu}{a+\epsilon} + \frac{(1-t)v}{b+\epsilon} \in C, \text{ para } t \in [0,1].$$

Em particular, se

$$t = \frac{a+\epsilon}{a+b+2\epsilon},$$

temos

$$\frac{u+v}{a+b+2\epsilon} \in C.$$

Daí,

$$a + b + 2\epsilon \in I_{u+v}.$$

Logo,

$$||u+v||_{p(x)} \leq ||u||_{p(x)} + ||v||_{p(x)} + 2\epsilon, \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Portanto,

$$||u+v||_{p(x)} \leq ||u||_{p(x)} + ||v||_{p(x)},$$

o que conclui a demonstração. ■

Proposição 1.4 *Se a função $p(x) = p$ é constante, então*

$$||\cdot||_{p(x)} = ||\cdot||_p \ ,$$

onde $||\cdot||_p$ é a norma usual do espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Demonstração. Se $u = 0$ é imediato. Suponha $u \neq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} ||u||_{p(x)} &= \inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \\ &= \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \frac{1}{\lambda^{p(x)}}|u(x)|^{p(x)}dx \leq 1\right\} \\ &= \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{\lambda^p}||u||_p^p \ dx \leq 1\right\} \\ &= \inf\{\lambda > 0 : ||u||_p \leq \lambda\} \\ &= ||u||_p. \end{aligned}$$

Proposição 1.5 *Seja $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$. Então,*

$$||u||_{p(x)} = a \ \textit{se, e somente se,} \ \rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1.$$

Demonstração.

($\Rightarrow$). Seja $||u||_{p(x)} = a$. Então,

$$I_u = [a, \infty) \text{ e } \rho\left(\frac{u}{a}\right) \leq 1.$$

Suponha que

$$\rho\left(\frac{u}{a}\right) < 1.$$

Para $t > 0$, a função

$$\rho\left(\frac{u}{t}\right),$$

é contínua convexa decrescente. Logo, existe $\delta > 0$ tal que

$$\rho\left(\frac{u}{t}\right) < 1, \ \text{para } t \in (a - \delta, a + \delta).$$

Assim, teríamos $a - \frac{\delta}{2} \in I_u$, que é um absurdo. Portanto,

$$\rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1.$$

($\Leftarrow$). Seja $\rho\left(\dfrac{u}{a}\right) = 1$. Então, $a \in I_u$. Daí, $||u||_{p(x)} \leq a$. Suponha que $||u||_{p(x)} < a$. Assim, existe $\lambda_o \in I_u$ tal que

$$||u||_{p(x)} \leq \lambda_o < a.$$

Logo,

$$\rho\left(\frac{u}{a}\right) < \rho\left(\frac{u}{\lambda_o}\right) \leq 1,$$

um absurdo. Portanto, $||u||_{p(x)} = a$. ■

Proposição 1.6 *Seja $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. Então,*

(1) $||u||_{p(x)} < 1(= 1; > 1)$ *se, e somente se,* $\rho(u) < 1(= 1; > 1)$*;*

(2) Se $||u||_{p(x)} > 1$*, então* $||u||^{p^-}_{p(x)} \leq \rho(u) \leq ||u||^{p^+}_{p(x)}$*;*

(3) Se $||u||_{p(x)} < 1$*, então* $||u||^{p^+}_{p(x)} \leq \rho(u) \leq ||u||^{p^-}_{p(x)}$*.*

Demonstração.

(1). Seja $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. Se $u = 0$ é imediato. Suponha $u \neq 0$.

Que $||u||_{p(x)} = 1 \Leftrightarrow \rho(u) = 1$, segue da Proposição 1.5.

Se $||u||_{p(x)} = a < 1$, então $1 < \dfrac{1}{a}$. Sendo $\rho(\lambda u)$ crescente em $\lambda \in [0, \infty)$, temos

$$\rho(u) < \rho\left(\frac{u}{a}\right) < 1.$$

Se $\rho(u) < 1$, então $1 \in I_u$. Logo, pela Proposição 1.5, concluímos que $||u||_{p(x)} < 1$.

A prova da outra equivalência é similar.

(2). Seja $||u||_{p(x)} = a > 1$. Então,

$$\rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1.$$

Sendo $\dfrac{1}{a} < 1$, pelo item (e) da Proposição 1.1 temos

$$\frac{1}{a^{p+}}\rho(u) \leq \rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1 < \frac{1}{a^{p-}}\rho(u),$$

logo

$$||u||^{p-}_{p(x)} \leq \rho(u) \leq ||u||^{p+}_{p(x)}.$$

(3) É similar a (2). ■

Proposição 1.7 *Seja $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$. Se $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} ||u_n - u||_{p(x)} = 0$*;*

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(u_n - u) = 0$*.*

Demonstração.
(1)⇒(2). Se $\lim\limits_{n\to\infty} ||u_n - u||_{p(x)} = 0$, então dado $0 < \epsilon < 1$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_o$ implica

$$||u_n - u||_{p(x)} < \epsilon < 1.$$

Logo,

$$\rho(u_n - u) \leq ||u_n - u||_{p(x)}^{p-} < \epsilon^{p-} < \epsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \rho(u_n - u) = 0.$$

(2)⇒(1). Se $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(u_n - u) = 0$, então dado $0 < \epsilon < 1$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_o$ implica

$$\rho(u_n - u) < \epsilon^{p+} < \epsilon < 1.$$

Logo, pela Proposição 1.6 temos

$$||u_n - u||_{p(x)} < 1,$$

sempre que $n \geq n_o$. Daí, novamente pela Proposição 1.6,

$$||u_n - u||_{p(x)}^{p+} \leq \rho(u_n - u) < \epsilon^{p+}, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n - u||_{p(x)} = 0.$$

■

1.2 Propriedades do Espaço $L^{p(x)}(\Omega)$

Nesta seção, demonstraremos as principais propriedades de $L^{p(x)}(\Omega)$.

Teorema 1.8 *$L^{p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$ uma seqüência de Cauchy. Mostrando que (u_n) possui uma subseqüência convergente , demonstraremos o teorema.

Afirmação: existe uma subseqüência $(u_k) \subset (u_n)$ tal que

$$||u_{k+1} - u_k||_{p(x)} < \frac{1}{2^k}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

De fato, dado $\epsilon = \dfrac{1}{2}$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq n_1$ implica

$$||u_m - u_n||_{p(x)} < \frac{1}{2}.$$

Dado $\epsilon = \dfrac{1}{2^2}$ existe $n_2 \geq n_1$ tal que $m, n \geq n_2$ implica

$$||u_m - u_n||_{p(x)} < \frac{1}{2^2}.$$

Em particular,

$$||u_{n_2} - u_{n_1}||_{p(x)} < \frac{1}{2^2}.$$

Dado $\epsilon = \dfrac{1}{2^3}$ existe $n_3 \geq n_2$ tal que $m, n \geq n_3$ implica

$$||u_m - u_n||_{p(x)} < \frac{1}{2^2}.$$

Em particular,

$$||u_{n_3} - u_{n_2}||_{p(x)} < \frac{1}{2^3}.$$

E assim por diante. Denote $(u_{n_k}) = (u_k)$.

Mostraremos que (u_k) é convergente. Defina a seqüência não-decrescente

$$v_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |u_{k+1}(x) - u_k(x)|, \ x \in \Omega.$$

Então, $(v_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$ e, por (1.1), temos

$$||v_n||_{p(x)} \leq 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo, pela Proposição 1.6

$$\int_{\Omega} |v_n(x)|^{p(x)} dx \leq 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Usando (1.2) e o Teorema da Convergência Monótona , existe $v \in L^{p(x)}(\Omega)$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} v_n(x) = v(x), \text{q.s. em } \Omega. \tag{1.3}$$

Por outro lado, para $m, n \geq 2$ e $x \in \Omega$, temos

$$\begin{aligned} |u_m(x) - u_n(x)| &\leq |u_m(x) - u_{m-1}(x)| + |u_{m-1}(x) - u_{m-2}(x)| + \cdots \\ &+ |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq v(x) - v_{n-1}(x). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Por (1.3) e (1.4), segue que para quase todo $x \in \Omega$, $\{u_k(x)\} \subset \mathbb{R}$ é uma seqüência de Cauchy , logo convergente, digamos

$$\lim_{k\to\infty} \; u_k(x) = u(x), \text{q.s. em } \Omega. \tag{1.5}$$

Resulta de (1.4) e (1.5) que

$$|u_k(x) - u(x)| \leq v(x), \text{ para } k \geq 2 \text{ e q.s. em } \Omega. \tag{1.6}$$

Sendo $v \in L^{p(x)}(\Omega)$, então por (1.6) tem-se

$$u \in L^{p(x)}(\Omega).$$

Desde que, por (1.5) e (1.6),

$$|u_k(x) - u(x)|^{p(x)} \longrightarrow 0 \text{ e } |u_k(x) - u(x)|^{p(x)} \leq v(x)^{p(x)}, \text{q.s em } \Omega,$$

então pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |u_k(x) - u(x)|^{p(x)} = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{k\to\infty} \rho(u_k - u) = 0.$$

Portanto, pela Proposição 1.7:

$$\lim_{n\to\infty} ||u_k - u||_{p(x)} = 0,$$

concluindo a demonstração. ■

O resultado abaixo é um corolário da demonstração do Teorema 1.8.

Teorema 1.9 *Seja* $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$ *tal que* $u_n \to u$. *Então, existe uma subseqüência* $(u_{\mathrm{n_k}})$ *tal que*

(a) $u_{n_k}(x) \to u(x)$, *q.s. em* Ω;

(b) $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$, *para* $k \geq 1$, *q.s. em* Ω, *com* $h \in L^{p(x)}(\Omega)$.

Demonstração.

(a). Como a seqüência (u_n) é de Cauchy, existe uma subseqüência (u_{n_k}) verificando (1.1). Procedendo como na demonstração do Teorema 1.8, concluímos de (1.5) que

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k}(x) = g(x), \text{ q.s. em } \Omega. \tag{1.7}$$

Além disso, por (1.6):

$$|u_{n_k}(x) - g(x)| \leq v(x), \text{ para todo } k \geq 1, \text{q.s. em } \Omega, \tag{1.8}$$

com $v \in L^{p(x)}(\Omega)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada $g \in L^{p(x)}(\Omega)$ e

$$u_{n_k} \longrightarrow g \text{ em } L^{p(x)}(\Omega).$$

Logo, $u(x) = g(x)$, q.s. em Ω. E usando (1.7), obtemos (a).
(b). Escolha $h = g + v$ e aplique (1.8). ■

Proposição 1.10 (Desigualdade de Hölder) *Seja $p^- > 1$ e seja $q \in L^\infty_+(\Omega)$ tal que*

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Se $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $v \in L^{q(x)}(\Omega)$, então

$$\left| \int_\Omega u(x)v(x)dx \right| \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-} \right) ||u||_{p(x)} ||v||_{q(x)}.$$

Demonstração. Sejam $||u||_{p(x)} = a$ e $||v||_{q(x)} = b$. Pela desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega \frac{u(x)}{a} \cdot \frac{v(x)}{b} dx \right| &\leq \int_\Omega \frac{|u(x)|}{a} \cdot \frac{|v(x)|}{b} dx \\
&\leq \int_\Omega \frac{1}{p(x)} \left| \frac{u(x)}{a} \right|^{p(x)} dx + \int_\Omega \frac{1}{q(x)} \left| \frac{v(x)}{b} \right|^{q(x)} dx \\
&\leq \frac{1}{p^-} \int_\Omega \left| \frac{u(x)}{a} \right|^{p(x)} dx + \frac{1}{q^-} \int_\Omega \left| \frac{v(x)}{b} \right|^{q(x)} dx \\
&= \frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-},
\end{aligned}$$

de onde segue o resultado. ■

Teorema 1.11 *Se $p^- > 1$, então $L^{p(x)}(\Omega)$ é um espaço reflexivo.*

Demonstração. Defina os conjuntos

$$\Omega_- = \{x \in \Omega : 1 < p(x) < 2\} \text{ e } \Omega_+ = \{x \in \Omega : p(x) \geq 2\}.$$

Observe que $L^{p(x)}(\Omega) = L^{p(x)}(\Omega_+) \oplus L^{p(x)}(\Omega_-)$.

Mostraremos que:

(i) $L^{p(x)}(\Omega_+)$ é reflexivo;

(ii) $L^{p(x)}(\Omega_-)$ é reflexivo,

e daí concluiremos que $L^{p(x)}(\Omega)$ é reflexivo, pois a soma direta de dois espaços de Banach reflexivos é um espaço reflexivo.

Com efeito,

(i). Afirmação: $L^{p(x)}(\Omega_+)$ é uniformemente convexo. De fato, seja $\epsilon > 0$ e sejam $u, v \in L^{p(x)}(\Omega_+)$ tais que

$$||u||_{L^{p(x)}(\Omega_+)} \leq 1 \ , \ ||v||_{L^{p(x)}(\Omega_+)} \leq 1 \text{ e } ||u-v||_{L^{p(x)}(\Omega_+)} > \epsilon. \tag{1.9}$$

Desde que $p(x) \geq 2$ em Ω_+, então pela 1ª desigualdade de Clarkson (ver [5], pág. 59), temos

$$\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p(x)} + \left|\frac{u-v}{2}\right|^{p(x)} \leq \frac{1}{2}\left(|u|^{p(x)} + |v|^{p(x)}\right), \text{ para } x \in \Omega_+. \tag{1.10}$$

Integrando (1.10) em Ω_+ e usando (1.9), obtemos

$$\int_{\Omega_+}\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p(x)} dx + \int_{\Omega_+}\left|\frac{u-v}{2}\right|^{p(x)} dx \leq \int_{\Omega_+}\frac{1}{2}|u|^{p(x)}dx + \int_{\Omega_+}\frac{1}{2}|v|^{p(x)}dx \leq 1. \tag{1.11}$$

Segue desta desigualdade que

$$\int_{\Omega_+}\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p(x)} dx, \int_{\Omega_+}\left|\frac{u-v}{2}\right|^{p(x)} dx \leq 1. \tag{1.12}$$

Usando agora a Proposição 1.6 e (1.11) - (1.12), obtemos

$$\left|\left|\frac{u+v}{2}\right|\right|^{p+}_{L^{p(x)}(\Omega_+)} + \left|\left|\frac{u-v}{2}\right|\right|^{p+}_{L^{p(x)}(\Omega_+)} \leq 1. \tag{1.13}$$

Sendo $||u-v||_{L^{p(x)}(\Omega_+)} > \epsilon$, temos por (1.13) que

$$\left|\left|\frac{u+v}{2}\right|\right|_{L^{p(x)}(\Omega_+)} < 1 - \delta,$$

onde

$$\delta = 1 - \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{p+}\right]^{\frac{1}{p+}} > 0.$$

Logo, $L^{p(x)}(\Omega_+)$ é uniformemente convexo, e portanto reflexivo pelo Teorema de Milman-Pettis (ver [5], Teorema III.29).

(ii). Seja $q \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$ tal que

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Defina o operador linear

$$\begin{array}{rlll} T: & L^{p(x)}(\Omega_-) & \longrightarrow (L^{q(x)}(\Omega_-))^* \\ & u & \longmapsto \langle T(u), v\rangle = \displaystyle\int_{\Omega_-} u(x)v(x)dx. \end{array}$$

Pela desigualdade de Hölder (ver Proposição 1.10), temos

$$|\langle T(u), v\rangle| \leq C||u||_{L^{p(x)}(\Omega_-)}||v||_{L^{q(x)}(\Omega_-)},$$

onde $C = \left(\dfrac{1}{p^-} + \dfrac{1}{q^-}\right)$. Daí,

$$||T(u)||_{\left(L^{q(x)}(\Omega_-)\right)^*} \leq C||u||_{L^{p(x)}(\Omega_-)}, \tag{1.14}$$

ou seja, T é contínuo.

Seja $||u||_{L^{p(x)}(\Omega_-)} = a$ e considere a função

$$v_o(x) = \left|\frac{u(x)}{a}\right|^{p(x)-1} sgnu(x), x \in \Omega_-,$$

onde sgn é a função sinal, ou seja,

$$sgn\, t = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0, \\ 0, & \text{se } t = 0, \\ -1, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Observe que

$$v_o \in L^{q(x)}(\Omega_-) \quad \text{e} \quad ||v_o||_{L^{q(x)}(\Omega_-)} = 1.$$

Assim,

$$\langle T(u), v_o\rangle = \int_{\Omega_-} u(x)v_o(x)dx = \int_{\Omega_-} \left|\frac{u(x)}{a}\right|^{p(x)-1} |u(x)|dx = \int_{\Omega_-} a\left|\frac{u(x)}{a}\right|^{p(x)} dx = a.$$

Logo,

$$||u||_{L^{p(x)}(\Omega_-)} \leq ||T(u)||_{\left(L^{q(x)}(\Omega_-)\right)^*}. \tag{1.15}$$

De (1.14) e (1.15), obtemos

$$||u||_{L^{p(x)}(\Omega_-)} \leq ||T(u)||_{\left(L^{q(x)}(\Omega_-)\right)^*} \leq C||u||_{L^{p(x)}(\Omega_-)}, \text{ para todo } u \in L^{p(x)}(\Omega_-). \tag{1.16}$$

De (1.16), segue que T é injetivo. Sendo T linear, então $E = T(L^{p(x)}(\Omega_-))$ é um subespaço vetorial de $\left(L^{q(x)}(\Omega_-)\right)^*$. Como $L^{p(x)}(\Omega_-)$ é um espaço de Banach, concluímos de

(1.16) que E é fechado. Como $L^{q(x)}(\Omega_-)$ é reflexivo, por Brezis ([5], Corolário III.18) $\left(L^{q(x)}(\Omega_-)\right)^*$ é reflexivo. Logo, por Brezis ([5], Proposição III.17), E é reflexivo. De onde concluímos que $L^{q(x)}(\Omega_-)$ é reflexivo. ■

A seguir, demonstraremos o **Teorema da Representação de Riesz** para o espaço $L^{p(x)}(\Omega)$.

Teorema 1.12 *Seja $p^- > 1$ e seja $q \in L^\infty_+(\Omega)$ tal que*

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Então, dado $f \in (L^{p(x)}(\Omega))^*$ existe um único $v \in L^{q(x)}(\Omega)$ tal que

$$f(v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \text{ para todo } u \in L^{p(x)}(\Omega).$$

Demonstração. Defina o operador linear

$$\begin{array}{rll} T: & L^{q(x)}(\Omega) & \longrightarrow (L^{p(x)}(\Omega))^* \\ & v & \longmapsto \langle T(v), u\rangle = \displaystyle\int_\Omega u(x)v(x)dx. \end{array}$$

Procedendo como em (ii) da demonstração do Teorema 1.11 concluímos que T é injetivo e que $E = T(L^{q(x)}(\Omega))$ é um subespaço vetorial fechado de $(L^{p(x)}(\Omega))^*$.

Vamos mostrar que T é sobrejetivo. Sendo E fechado, basta mostrar que E é denso em $(L^{p(x)}(\Omega))^*$.

Seja $u \in (L^{p(x)}(\Omega))^{**} = L^{p(x)}(\Omega)$ (pois $L^{p(x)}(\Omega)$ é reflexivo) tal que

$$\langle T(v), u\rangle = 0, \text{ para todo } v \in L^{q(x)}(\Omega).$$

Afirmação: $u = 0$. De fato, considere a função

$$v_o(x) = |u(x)|^{p(x)-2}u(x), x \in \Omega.$$

Observe que $v_o \in L^{q(x)}(\Omega)$. Logo,

$$\int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx = \int_\Omega v_o(x)u(x)dx = \langle T(v_o), u\rangle = 0,$$

de onde concluímos que $u = 0$.

Por Brezis ([5], Corolário I.8), temos que E é denso em $(L^{p(x)}(\Omega))^*$. Daí, T é sobrejetivo, e portanto um isomorfismo. ■

No que segue, faremos sistemacamente a identificação

$$(L^{p(x)}(\Omega))^* = L^{q(x)}(\Omega).$$

Agora, abordaremos a questão da densidade em $L^{p(x)}(\Omega)$.

Teorema 1.13 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Então, o espaço $C_o(\Omega)$ é denso em $L^{p(x)}(\Omega)$.*

Demonstração. Sabemos que $C_o(\Omega)$ é denso em $L^1(\Omega)$. Suponha $p(x) > 1$ em Ω. Por Brezis (ver [5], Corolário I.8 e sua Observação 5) para demonstrarmos o teorema é suficiente verificar que se $v \in L^{q(x)}(\Omega)$ é tal que

$$\int_\Omega v(x)u(x)dx = 0, \text{ para } u \in C_o(\Omega),$$

então $v = 0$.

Observe que, para todo compacto $K \subset \Omega$, usando a desigualdade de Young, temos

$$\int_K |v(x)|\, dx \leq \int_K \frac{1}{p(x)}\, dx + \int_K \frac{|v(x)|^{q(x)}}{q(x)}\, dx \leq \frac{1}{p^-}|K| + \frac{1}{q^-}\int_K |v(x)|^{q(x)} dx < \infty.$$

Logo, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$. Pelo Lema de Du Bois-Reymond, $v = 0$. ∎

Teorema 1.14 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Então, o espaço $C_o^\infty(\Omega)$ é denso em $L^{p(x)}(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. Pelo Teorema 1.13, dado $\eta > 0$ existe $v \in C_o(\Omega)$ tal que

$$||u - v||_{p(x)} < \frac{\eta}{2}. \tag{1.17}$$

Por Adams ([1], Lema 2.18, itens (b) e (d)), para todo $\epsilon > 0$ temos

$$\varphi_\epsilon := J_\epsilon * v \in C_o^\infty(\Omega), \text{ se } \epsilon < \operatorname{dist}(supp\ v, \partial\Omega)$$

e

$$\varphi_\epsilon \to v \text{ uniformemente em } supp\ v, \quad \text{quando } \epsilon \to 0^+, \tag{1.18}$$

onde $J_\epsilon \in C_o^\infty(\Omega)$ é um **mollifier** (ver Adams [1], pág. 29) e

$$\varphi_\epsilon(x) = (J_\epsilon * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} J_\epsilon(x-y)\, v(y) dy.$$

Por (1.18) e pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\rho(\varphi_\epsilon - v) = \int_\Omega |\varphi_\epsilon - v|^{p(x)}dx = \int_{supp\ v} |\varphi_\epsilon - v|^{p(x)}dx \longrightarrow 0, \text{ quando } \epsilon \to 0^+.$$

Logo, pela Proposição 1.7 temos

$$||\varphi_\epsilon - v||_{p(x)} < \frac{\eta}{2}, \text{ quando } \epsilon \to 0^+. \tag{1.19}$$

Portanto, de (1.17) e (1.19),

$$||u - \varphi_\epsilon||_{p(x)} \leq ||u - v||_{p(x)} + ||\varphi_\epsilon - v||_{p(x)} < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta,$$

quando $\epsilon \to 0^+$, concluindo a demonstração. ■

Teorema 1.15 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Então, o espaço $L^{p(x)}(\Omega)$ é separável.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$\Omega_n = \left\{ x \in \Omega : \text{dist}\,(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n}, |x| < n \right\}.$$

Observe que cada $\overline{\Omega}_n$ é um subconjunto compacto de Ω.

Seja P o conjunto de todos os polinômios de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}$ com coeficientes racionais e defina

$$P_n = \left\{ \chi_{\overline{\Omega}_n} f : f \in P \right\}, n \in \mathbb{N},$$

onde $\chi_{\overline{\Omega}_n}$ é a função característica de $\overline{\Omega}_n$. Pelo Teorema de Stone-Weierstrass P_n é denso em $C(\overline{\Omega}_n)$. Além disso, o conjunto $P_o = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ é enumerável.

Seja $\epsilon > 0$ pequeno e seja $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. Então, pelo Teorema 1.13 existe $v \in C_o(\Omega)$ tal que

$$||u - v||_{p(x)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Se $\dfrac{1}{n} < \text{dist}\,(supp\, v, \partial\Omega)$, então $supp\, v \subset \overline{\Omega}_n$, e daí existe $f \in P_n$ tal que

$$||v - f||_{L^\infty(\overline{\Omega}_n)} \leq \frac{\epsilon}{2} |\overline{\Omega}_n|^{-1/c}, \tag{1.20}$$

onde

- $c = p^+$, se $|\overline{\Omega}_n| < 1$;
- $c = p^-$, se $|\overline{\Omega}_n| \geq 1$.

Em qualquer situação, usando (1.20) teremos

$$\int_{\Omega} |v-f|^{p(x)}dx = \int_{\overline{\Omega}_n} |v-f|^{p(x)}dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

Daí, pela Proposição 1.6, obtemos

$$||v-f||_{p(x)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo,

$$||u-f||_{p(x)} \leq ||u-v||_{p(x)} + ||v-f||_{p(x)} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

i.e., P_o é denso em $L^{p(x)}(\Omega)$. Portanto, $L^{p(x)}(\Omega)$ é separável. ■

1.3 O Operador de Nemytskii

Nesta seção estudaremos o operador de Nemytskii entre os espaços $L^{p(x)}(\Omega)'$s.

Sejam $f : \Omega\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory e N_f o operador de Nemytskii definido por f, i.e, $(N_f u)(x) = f(x, u(x))$, para toda função mensurável $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Teorema 1.16 *Se $N_f : L^{p(x)}(\Omega) \to L^{q(x)}(\Omega)$, então N_f é contínuo, limitado e existem uma constante $b \geq 0$ e uma função não-negativa $a \in L^{q(x)}(\Omega)$ tais que*

$$|f(x,s)| \leq a(x) + b|s|^{p(x)/q(x)}, \ \textit{para todos } x \in \Omega \textit{ e } s \in \mathbb{R}. \tag{1.21}$$

Reciprocamente, se f satisfaz (1.21), então $N_f : L^{p(x)}(\Omega) \to L^{q(x)}(\Omega)$, e N_f é contínuo e limitado.

Demonstração.

($\Rightarrow$). Seja $N_f : L^{p(x)}(\Omega) \to L^{q(x)}(\Omega)$. Suponha inicialmente que $f(x, 0) = 0$. Assim, devemos mostrar a continuidade de N_f em $u = 0$.

Seja $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$ tal que $u_n \to 0$. Pela Proposição (1.7), temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} |u_n(x)|^{p(x)}dx = 0. \tag{1.22}$$

Defina a função $h : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(x, s) = |f(x, sgn\, s|s|^{1/p(x)})|^{q(x)}.$$

Para $v \in L^1(\Omega)$, seja

$$(N_h v)(x) = h(x, v(x)) = |f(x, sgn\, v(x)|v(x)|^{1/p(x)})|^{q(x)}. \tag{1.23}$$

Desde que

$$sgn\, v(x)|v(x)|^{1/p(x)} \in L^{p(x)}(\Omega),$$

usando a hipótese, temos $N_h v \in L^1(\Omega)$, mostrando que

$$N_h : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega).$$

Portanto, N_h é contínuo em $v = 0$ (ver [24], Teorema 19.1 e [11], Teorema 2.3).

Seja a seqüência $(v_n) \subset L^1(\Omega)$, definida por $v_n = sgn\, u_n|u_n|^{p(x)}$. Daí, por (1.22)

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |v_n(x)|dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)} = 0,$$

Sendo N_h contínuo, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |(N_h v_n)(x)|dx = 0.$$

Logo, por (1.23),

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |(N_f u_n)(x)|^{q(x)}dx &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f(x, sgn\, u_n(x)|u_n(x)|)|^{q(x)}dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |(N_h v_n)(x)|dx = 0. \end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição 1.7,

$$\lim_{n\to\infty} ||N_f u_n||_{q(x)} = 0,$$

mostrando a continuidade de N_f em $u = 0$.

No caso geral, se $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, então basta considerar a função

$$g(x, s) = f(x, s + u(x)) - f(x, u(x)),$$

e observar que $g(x, 0) = 0$.

Mostremos que N_f é limitado. Seja $B \subset L^{p(x)}(\Omega)$ um conjunto limitado. Então, existe $r > 0$ tal que

$$||u||_{p(x)} \leq r, \text{ para todo } u \in B.$$

Daí, pela Proposição 1.6, existe $c > 0$ tal que

$$\int_\Omega |u(x)|^{p(x)} \leq c.$$

Desde que

$$N_h : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega),$$

então N_h é limitado (ver [24], Teorema 19.1 e [11], Teorema 2.3).

Observe que se $u \in B$, então $v = sgn\, u|u|^{p(x)} \in L^1(\Omega)$, pois

$$\int_\Omega |v(x)|dx = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx \leq c.$$

Sendo N_h limitado, existe $k > 0$ tal que

$$\int_\Omega |(N_f u)(x)|^{q(x)}dx = \int_\Omega |N_h(sgn\, u_n(x)|u_n(x)|^{p(x)})|dx \leq k.$$

Logo, pela Proposição 1.6, $N_f(B) \subset L^{q(x)}(\Omega)$ é limitado.

Desde que $N_h : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$, então existem uma constante $b_1 \geq 0$ e uma função não-negativa $a_1 \in L^1(\Omega)$ (ver [24], Teorema 19.1 e [11], Teorema 2.4) tais que

$$|(N_h v)(x)| \leq a_1(x) + b_1|v(x)|, \text{ para } v \in L^1(\Omega).$$

Seja $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. Então, $v = sgn\, u|u|^{p(x)} \in L^1(\Omega)$. Assim,

$$|(N_f u)(x)|^{q(x)} = |(N_h v)(x)|^{q(x)} \leq a_1(x) + b_1|u(x)|^{p(x)}.$$

Sendo $1/q(x) \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
|(N_f u)(x)| &\leq \left(a_1(x) + b_1|u(x)|^{p(x)}\right)^{1/q(x)} \\
&\leq (a_1(x))^{1/q(x)} + b_1^{1/q(x)}|u(x)|^{p(x)/q(x)} \\
&\leq a(x) + b|u(x)|^{p(x)/q(x)},
\end{aligned}$$

onde $a = a_1^{1/q(x)} \in L^{q(x)}(\Omega)$ e $b = b_1^{1/q^-} \geq 0$, mostrando assim a desigualdade (1.21).

($\Leftarrow$). Suponha que existem uma constante $b \geq 0$ e uma função não-negativa $a \in L^{q(x)}(\Omega)$ tais que a desigualdade (1.21) seja válida. Seja $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e observe que

$$\begin{aligned}
|(N_f u)(x)|^{q(x)} &\leq |a(x) + b|u(x)|^{p(x)/q(x)}|^{q(x)} \\
&\leq 2^{q(x)}(|a(x)|^{q(x)} + b^{q(x)}|u(x)|^{p(x)}) \\
&\leq 2^{q^+}|a(x)|^{q(x)} + 2^{q^+}b^{q(x)}|u(x)|^{p(x)}.
\end{aligned}$$

Desde que $a \in L^{q(x)}(\Omega)$, $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e a função $b^{q(x)}$ é limitada, concluímos da última desigualdade que

$$N_f u \in L^{q(x)}(\Omega),$$

mostrando que $N_f : L^{p(x)}(\Omega) \rightarrow L^{q(x)}(\Omega)$. Procedendo como na primeira parte da demonstração, mostra-se que N_f é contínuo e limitado. ■

Corolário 1.17 *Suponha que* $|\Omega| < \infty$ *e sejam* $p, q \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$. *Então*

$$L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$$

se, e somente se, $q(x) \leq p(x)$, *q.s. em* Ω. *E neste caso, a imersão é contínua.*

Demonstração.
($\Rightarrow$). Suponha que $L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$. Considere a função de Carathéodory

$$\begin{aligned} f: \ \Omega \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, s) & \longmapsto f(x, s) = s. \end{aligned}$$

Então, pelo Teorema 1.16, existem uma constante $b > 0$ e uma função não-negativa $a \in L^{q(x)}(\Omega)$ tais que

$$|s| \leq a(x) + b|s|^{p(x)/q(x)}.$$

Desta desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned} |s|^{q(x)} & \leq 2^{q(x)}(|a(x)|^{q(x)} + b^{q(x)}|s|^{p(x)}) \\ & \leq 2^{q^+}|a(x)|^{q(x)} + (2b)^{q^+}|s|^{p(x)}, \end{aligned} \tag{1.24}$$

o que implica $q(x) \leq p(x)$, q.s. em Ω, pois do contrário a desigualdade (1.24) não seria válida quando $s \longrightarrow \infty$.
($\Leftarrow$). Sem perda de generalidade, suponha $q(x) \leq p(x)$ em Ω. Seja $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e considere o conjunto

$$E = \{x \in \Omega : |u(x)| < 1\}.$$

Temos

$$\begin{aligned} \rho_q : & = \int_\Omega |u(x)|^{q(x)} dx = \int_E |u(x)|^{q(x)} dx + \int_{E^c} |u(x)|^{q(x)} dx \\ & \leq |E| + \int_{E^c} |u(x)|^{q(x)} dx \\ & \leq |\Omega| + \int_{E^c} |u(x)|^{p(x)} dx \\ & \leq |\Omega| + \rho_p(u) < \infty, \end{aligned} \tag{1.25}$$

daí $u \in L^{q(x)}(\Omega)$. Logo, $L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$.

Mostremos que a imersão $L^{p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ é contínua.

$$\text{Afirmação: se } ||u||_{p(x)} \leq 1, \text{ então } ||u||_{q(x)} \leq |\Omega| + 1. \tag{1.26}$$

De fato, seja $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ tal que $||u||_{p(x)} \leq 1$. Segue de (1.25) e da Proposição 1.6 que

$$\rho_q(u) \leq |\Omega| + \rho_p(u) \leq |\Omega| + 1.$$

Daí,

$$\rho_q\left(\frac{u}{|\Omega|+1}\right) := \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{|\Omega|+1}\right|^{q(x)} dx \leq \frac{1}{|\Omega|+1}\int_\Omega |u(x)|^{q(x)}dx \leq 1.$$

Novamente pela Proposição 1.6,

$$\left|\left|\frac{u}{|\Omega|+1}\right|\right|_{q(x)} \leq 1,$$

de onde segue a afirmação.

Seja $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e seja $||u||_{p(x)} = a \neq 0$. Usando a afirmação em (1.26) obtemos

$$\left|\left|\frac{u}{a}\right|\right|_{q(x)} \leq |\Omega| + 1.$$

Logo,

$$||u||_{q(x)} \leq (|\Omega| + 1)||u||_{p(x)},$$

mostrando que a imersão

$$L^{p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

é contínua. ∎

Capítulo 2

O Espaço $W^{1,\,p(x)}(\Omega)$

Neste capítulo estudaremos o espaço de Sobolev generalizado $W^{1,\,p(x)}(\Omega)$, ou seja, o seguinte espaço

$$W^{1,\,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^{p(x)}(\Omega), j = 1, \ldots, N \right\},$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um domínio. Tal espaço é muito importante em nosso trabalho, pois é sobre ele que estudaremos a exitência de solução para os problemas dos capítulos seguintes.

Observamos que, para $u \in W^{1,\,p(x)}(\Omega)$, então $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ denota a j-ésima derivada fraca de u, ou seja,

$$\int_\Omega u\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\, \varphi\, dx, \text{ para todo } \varphi \in C_o^\infty(\Omega).$$

Em $W^{1,\,p(x)}(\Omega)$, temos a seguinte norma

$$||u||_* = ||u||_{p(x)} + \sum_{j=1}^N \left|\left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|\right|_{p(x)}.$$

Se $u \in W^{1,\,p(x)}(\Omega)$, definimos

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

Note que podemos escrever o espaço $W^{1,\,p(x)}(\Omega)$ como

$$W^{1,\,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega) \right\}.$$

Neste caso, é mais conveniente usarmos a norma equivalente

$$||u|| = ||u||_{p(x)} + ||\nabla u||_{p(x)}.$$

2.1 Propriedades do Espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$

Nesta seção demonstraremos as principais propriedades de $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Teorema 2.1 *$W^{1,p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $\{u_n\} \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ uma seqüência de Cauchy. Então,

$$\{u_n\} \text{ e } \left\{\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\right\},$$

$j = 1, \ldots, N$, são seqüências de Cauchy em $L^{p(x)}(\Omega)$.

Sendo $L^{p(x)}(\Omega)$ um espaço de Banach, existem $u, w_j \in L^{p(x)}(\Omega)$ tais que

$$u_n \longrightarrow u \text{ e } \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \longrightarrow w_j, \text{ quando } n \to \infty, \tag{2.1}$$

$j = 1, \ldots, N$.

Usando a desigualdade de Hölder (ver Proposição 1.10), temos

$$\int_\Omega (u_n - u)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx \leq C||u_n - u||_{p(x)} \left|\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right|\right|_{q(x)}, \text{ para } \varphi \in C_o^\infty(\Omega), \tag{2.2}$$

onde $C = \dfrac{1}{p^-} + \dfrac{1}{q^-}$. Segue de (2.1) e (2.2) que

$$\int_\Omega u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx \longrightarrow \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx, \text{ para } \varphi \in C_o^\infty(\Omega), \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.3}$$

Analogamente,

$$\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_j}\, \varphi\, dx \longrightarrow \int_\Omega w_j\, \varphi\, dx, \text{ para } \varphi \in C_o^\infty(\Omega), \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.4}$$

Desde que

$$\int_\Omega u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_j}\, \varphi\, dx, \text{ para } \varphi \in C_o^\infty(\Omega), \tag{2.5}$$

passando ao limite em (2.5) de $n \to \infty$ e usando (2.3) e (2.4), obtemos

$$\int_\Omega u\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = -\int_\Omega w_j\, \varphi\, dx, \text{ para } \varphi \in C_o^\infty(\Omega). \tag{2.6}$$

Usando o lema de Du Bois-Reymond em (2.6), concluímos que

$$u \in W^{1,p(x)}(\Omega) \text{ e } w_j = \frac{\partial u}{\partial x_j},\ j = 1, \ldots, N.$$

Logo, usando (2.1), temos

$$||u_n - u||_* = ||u_n - u||_{p(x)} + \sum_{j=1}^{N} \left|\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j}\right|\right|_{p(x)} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Portanto, $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach. ■

Teorema 2.2 *O espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é separável e reflexivo, se $p^- > 1$.*

Demonstração. Observe que o espaço $E = \overbrace{L^{p(x)}(\Omega) \times \cdots \times L^{p(x)}(\Omega)}^{(N+1)\text{ cópias}}$ munido da norma $||\cdot||$ é reflexivo e separável. Defina o operador linear $T : W^{1,p(x)}(\Omega) \longrightarrow E$ por

$$T(u) = (u, \nabla u).$$

Note que

$$||T(u)|| = ||u||.$$

Desta última igualdade concluímos que $T(W^{1,p(x)}(\Omega))$ é um subespaço fechado de E. Por Brezis ([5], Proposições III.17 e III.22), temos que $T(W^{1,p(x)}(\Omega))$ é reflexivo e separável. Portanto, $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é reflexivo e separável. ■

Definição 2.1 *Definimos o espaço $W_o^{1,p(x)}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_o^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.*

Segue imediatamente da definição de $W_o^{1,p(x)}(\Omega)$ e das propriedades de $W^{1,p(x)}(\Omega)$ o seguinte resultado

Teorema 2.3 *$W_o^{1,p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach, separável e reflexivo, se $p^- > 1$.*

2.2 Imersões

Nesta seção, supondo Ω limtado, demonstraremos alguns resultados de imersão que serão bastante úteis nos capítulos seguintes. Dentre esses resultados, destacamos um teorema que generaliza os teoremas de Sobolev e Rellich-Kondrachov, bem como uma desigualdade do tipo Poincaré.

Teorema 2.4 *Sejam $p, q \in L_+^\infty(\Omega)$ tais que $q(x) \leq p(x)$, q.s. em Ω. Então*

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \subset W^{1,q(x)}(\Omega),$$

e tal imersão é contínua.

Demonstração. Suponha que $q(x) \leq p(x)$, q.s. em Ω. Então, pelo Corolário 1.17 a imersão

$$L^{p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

é contínua, ou seja, existe $C > 0$ tal que

$$||u||_{q(x)} \leq C||u||_{p(x)}, \text{ para todo } u \in L^{p(x)}(\Omega). \tag{2.7}$$

Desde que

$$W^{1,\,p(x)}(\Omega) \subset L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega),$$

então

$$W^{1,\,p(x)}(\Omega) \subset W^{1,\,q(x)}(\Omega),$$

e por (2.7) concluímos que a imersão

$$W^{1,\,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,\,q(x)}(\Omega)$$

é contínua. ■

No que segue, denotaremos

$$p^*(x) = \begin{cases} Np(x)/(N - p(x)), & p(x) < N, \\ \infty, & p(x) \geq N. \end{cases}$$

Teorema 2.5 *Sejam $p, q \in C(\overline{\Omega})$ tais que $p^-, q^- \geq 1$. Se*

$$q(x) < p^*(x), \text{ para todo } x \in \overline{\Omega},$$

então

$$W^{1,\,p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega),$$

e tal imersão é contínua e compacta.

Demonstração. Sendo $p, q \in C(\overline{\Omega})$, então para cada $x \in \overline{\Omega}$ existe uma vizinhança aberta $x \in V_x \subset \overline{\Omega}$ tal que

$$q^+(V_x) < (p^-(V_x))^*,$$

onde

$$q^+(V_x) = \sup\{q(y) : y \in V_x\} \text{ e } p^-(V_x) = \inf\{p(y) : y \in V_x\}.$$

Sendo $\{V_x\}_{x\in\overline{\Omega}}$ uma cobertura aberta do compacto $\overline{\Omega}$, então pelo Teorema de Borel-Lebesgue, existem $V_1, \ldots, V_s$ tais que $\overline{\Omega} = \bigcup\limits_{j=1}^{s} V_j$.

Para cada $j = 1, \ldots, s$, denote

$$p_j^- = p_j^-(V_j) \text{ e } q_j^+ = q_j^+(V_j).$$

Seja $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$. Então,

$$u \in W^{1,p(x)}(V_j), j = 1, \dots, s.$$

Pelo Teorema 2.4, temos

$$u \in W^{1,p_j^-}(V_j), j = 1, \dots, s.$$

Pelos teoremas de Sobolev e de Rellich-Kondrachov as seguintes imersões

$$W^{1,p_j^-}(V_j) \subset L^{q_j^+}(V_j), j = 1, \dots, s, \tag{2.8}$$

são contínuas e compactas. Assim,

$$u \in L^{q_j^+}(V_j), j = 1, \dots, s.$$

Pelo Corolário 1.17, as imersões

$$L^{q_j^+}(V_j) \subset L^{q(x)}(V_j), j = 1, \dots, s, \tag{2.9}$$

são contínuas. Daí,

$$u \in L^{q(x)}(V_j), j = 1, \dots, s.$$

Logo, $u \in L^{q(x)}(\Omega)$. Portanto, $W^{1,p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$.

Afirmação 1: a imersão $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ é contínua.

De fato, seja $(u_n) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que $u_n \to 0$. Desde que as imersões

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(V_j), j = 1, \dots, s,$$

são contínuas, então

$$u_n \to 0 \text{ em } L^{q(x)}(V_j), j = 1, \dots, s. \tag{2.10}$$

Usando (2.10), temos

$$\int_\Omega |u_n(x)|^{q(x)} dx \leq \sum_{j=1}^{s} \int_{V_j} |u_n(x)|^{q(x)} dx \longrightarrow 0.$$

Logo,

$$u_n \to 0 \text{ em } L^{q(x)}(\Omega).$$

Portanto, a imersão

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

é contínua.

Afirmação 2: a imersão $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ é compacta.

De fato, seja $(u_n) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ limitada. Então, pelo Teorema 2.4,

$$(u_n) \subset W^{1,p_j^-}(V_j), j = 1, \ldots, s,$$

é limitada.

Por (2.8) e (2.9), (u_n) possui subseqüências convergentes tais que

$$\{u_n^1\}_{n \in \mathbb{N}_1} \subset L^{q(x)}(V_1),$$

$$\{u_n^2\}_{n \in \mathbb{N}_2} \subset L^{q(x)}(V_2),$$

$$\cdots$$

$$\{u_n^s\}_{n \in \mathbb{N}_s} \subset L^{q(x)}(V_s),$$

onde $\mathbb{N}_s \subset \mathbb{N}_{s-1} \cdots \subset \mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$. Agora, considere a subseqüência

$$v_n(x) = \sum_{j=1}^{s} \chi_{\mathrm{V_j}} u_n^j(x), x \in \Omega, n \in \ \mathbb{N}_s.$$

Se $m, n \in \mathbb{N}_s$, então

$$\int_\Omega |v_m(x) - v_n(x)|^{q(x)} dx \leq \sum_{j=1}^{s} \int_{V_j} |u_m^j(x) - u_n^j(x)|^{q(x)} dx \longrightarrow 0,$$

para m, n suficientemente grandes. Logo, a subseqüência $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}_s}$ é de Cauchy em $L^{q(x)}(\Omega)$, portanto convergente, pois $L^{q(x)}(\Omega)$ é completo. Mostramos, assim, que a imersão

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

é compacta. ■

Observação 2.1 *Seguindo as mesmas idéias da demonstração do Teorema 2.5, é possível mostrar que, se $p, q \in C(\overline{\Omega})$ são tais que*

$$1 \leq p(x) \leq q(x) \leq p^*(x), \ \textit{para todo } x \in \overline{\Omega},$$

então

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega),$$

com imersão contínua.

Usaremos a Observação 2.1 para mostrar o seguinte resultado importante:

Teorema 2.6 (Desigualdade de Poincaré) *Seja $p \in C(\overline{\Omega})$ tal que $p^- > 1$. Então, existe $C > 0$ tal que*

$$||u||_{p(x)} \leq C||\nabla u||_{p(x)}, \text{ para todo } u \in W_o^{1,p(x)}(\Omega).$$

Demonstração. Defina a função $f : [0, N) \longrightarrow [0, +\infty)$ por

$$f(t) = \frac{Nt}{N-t}.$$

Note que f é uma bijeção crescente, com inversa $g : [0, +\infty) \longrightarrow [0, N)$ dada por

$$g(s) = \frac{Ns}{N+s}.$$

Sejam $p_o(x) := p(x)$ e $p_N(x) \equiv 1$. Agora, para cada $j = 0, 1, \ldots, N-1$, defina

$$p_{j+1}(x) = \max\{g(p_j(x)), 1\}, \text{ para } x \in \overline{\Omega}.$$

Assim, para $x \in \overline{\Omega}$, temos

$$p_{j+1}(x) < p_j(x) \leq p^*_{j+1}(x), j = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{2.11}$$

Pela Observação 2.1 do Teorema 2.5 e (2.11), concluímos que as seguintes imersões

$$W^{1,p_{j+1}(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_j(x)}(\Omega), j = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{2.12}$$

são contínuas.

Pelo Corolário 1.17 e (2.11), temos também que as seguintes imersões

$$L^{p_j(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_{j+1}(x)}(\Omega), j = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{2.13}$$

são contínuas.

Seja $u \in W_o^{1,p(x)}(\Omega)$. Usando sucessivamente (2.12) e (2.13), obtemos

$$\begin{aligned}
||u||_{L^{p(x)}(\Omega)} &\leq C_o(||\nabla u||_{L^{p_1(x)}(\Omega)} + ||u||_{L^{p_1(x)}(\Omega)}) \\
&\leq C_o'||\nabla u||_{L^{p(x)}(\Omega)} + C_o||u||_{L^{p_1(x)}(\Omega)}, \\
||u||_{L^{p_1(x)}(\Omega)} &\leq C_1(||\nabla u||_{L^{p_2(x)}(\Omega)} + ||u||_{L^{p_2(x)}(\Omega)}) \\
&\leq C_1'||\nabla u||_{L^{p(x)}(\Omega)} + C_1||u||_{L^{p_2(x)}(\Omega)},
\end{aligned}$$

$$\dots$$

$$\begin{aligned}||u||_{L^{p_{N-1}(x)}(\Omega)} &\leq C_{N-1}(||\nabla u||_{L^{p_N(x)}(\Omega)} + ||u||_{L^{p_N(x)}(\Omega)})\\ &\leq C'_{N-1}||\nabla u||_{L^{p(x)}(\Omega)} + C_{N-1}||u||_{L^{p_N(x)}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Agora, usando a Desigualdade de Poincaré em espaços de Sobolev (ver [5], Corolário IX.19), temos

$$||u||_{L^{p_N(x)}(\Omega)} = ||u||_{L^1(\Omega)} \leq C_N||\nabla u||_{L^{p_1}(\Omega)} \leq C'_N||\nabla u||_{L^{p(x)}(\Omega)}.$$

Combinando as desigualdades convenientes, concluímos a demonstração. ■

Observação 2.2 *Como conseqüência da Desigualdade de Poincaré, temos*

$$||\nabla u||_{p(x)} \leq ||u|| = ||u||_{p(x)} + ||\nabla u||_{p(x)} \leq (C+1)||\nabla u||_{p(x)},$$

para todo $u \in W_o^{1,p(x)}(\Omega)$, *ou seja, as narmas* $||u||$ *e* $||\nabla u||_{p(x)}$ *são equivalentes em* $W_o^{1,p(x)}(\Omega)$.

Capítulo 3

Problema Elíptico em Domínio Limitado

Neste capítulo, estudaremos a existência de solução fraca em $W_o^{1,p(x)}(\Omega)$ para o seguinte problema de Dirichlet

$$(P)\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = f(x,u), & x \in \Omega, \\ \quad u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $p > 1,\ p \in C(\overline{\Omega})$ e $\Delta_{p(x)}$ denota o operador $p(x)$-laplaciano, o qual é definido por

$$\Delta_{p(x)}u = div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u).$$

Sobre a função f colocaremos hipóteses posteriormente.

Os resultados aqui apresentados são generalizações daqueles para o problema de Dirichlet envolvendo o operador p-laplaciano.

No que segue, denotaremos

$$C_+(\overline{\Omega}) = \left\{h : h \in C(\overline{\Omega}),\ h(x) > 1,\ \text{para todo } x \in \overline{\Omega}\right\},$$

$$h^+ = \max_{x\in\overline{\Omega}} h(x) \text{ e } h^- = \min_{x\in\overline{\Omega}} h(x),\ \text{para todo } h \in C(\overline{\Omega}).$$

3.1 Propriedades do Operador $p(x)$-Laplaciano

Até o final deste Capítulo, denotaremos $X := W_o^{1,p(x)}(\Omega)$.

Teorema 3.1 *O funcional $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx,$$

é de classe $C^1(X, \mathbb{R})$.

Demonstração. Afim de mostrar que o funcional J é de classe $C^1(X, \mathbb{R})$, é suficiente mostrar que a derivada de Gateaux de J existe e é contínua.

Existência da derivada de Gateaux. Sejam $u, v \in X$. Dados $x \in \Omega$ e $0 < |t| < 1$, pelo Teorema do Valor Médio existe $\lambda(x,t) = \lambda \in (0,1)$ tal que

$$\frac{|\nabla u + t\nabla v|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}}{p(x)t} = |\nabla u + \lambda t \nabla v|^{p(x)-2}(\nabla u + \lambda t\nabla v)\nabla v.$$

Observe que

$$h := |\nabla u + \lambda t\nabla v|^{p(x)-2}(\nabla u + \lambda t \nabla v)\nabla v \longrightarrow |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v, \text{ q.s. em } \Omega, \tag{3.1}$$

quando $t \to 0$.

Observe também que

$$|h| \leq |\nabla u + \lambda t \nabla u|^{p(x)-1}|\nabla v| \leq (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}|\nabla v|. \tag{3.2}$$

Sabemos que

$$|\nabla u|, |\nabla v| \in L^{p(x)}.$$

Assim,

$$(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1} \in L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(\Omega).$$

Daí, usando a desigualdade de Hölder, concluímos que

$$(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}|\nabla v| \in L^1(\Omega). \tag{3.3}$$

Logo, usando (3.1)-(3.3) e o Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$J'(u).v = \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{|\nabla(u+tv)|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}}{p(x)t}\,dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v\, dx.$$

Continuidade da derivada de Gateaux. Seja $\{u_n\} \subset X$ tal que $u_n \to u$ em X. Assim,

$$\nabla u_n \longrightarrow \nabla u \text{ em } (L^{p(x)}(\Omega))^N. \tag{3.4}$$

Daí, pelo Teorema 1.9, existem uma subseqüência, ainda denotada por $\{u_n\}$, e uma função $g \in L^{p(x)}(\Omega)$ tais que

$$\nabla u_n(x) \longrightarrow \nabla u(x), \text{ q.s. em } \Omega, \tag{3.5}$$

e

$$|\nabla u_n(x)| \leq g(x), \text{ q.s. em } \Omega. \tag{3.6}$$

Por (3.5), temos que

$$|\nabla u_n(x)| \longrightarrow |\nabla u(x)|, \text{ q.s. em } \Omega. \tag{3.7}$$

Para todo $v \in X$, temos

$$\begin{aligned} |(J'(u_n) - J'(u), v)| &= \left| \int_\Omega (|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)\nabla v dx \right| \\ &\leq \int_\Omega ||\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u||\nabla v| dx \end{aligned} \tag{3.8}$$

Se

$$f_n := ||\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u|, \; n \in \mathbb{N}, \tag{3.9}$$

então

$$f_n \leq |\nabla u_n|^{p(x)-1} + |\nabla u|^{p(x)-1}, \; n \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Note que

$$(|\nabla u_n|^{p(x)-1} + |\nabla u|^{p(x)-1}) \in L^{q(x)}(\Omega),$$

onde

$$q(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}.$$

Logo, por (3.10) concluímos que

$$\{f_n\} \subset L^{q(x)}(\Omega).$$

Usando a desigualdade de Hölder em (3.8), obtemos que

$$\begin{aligned} |(J'(u_n) - J'(u), v)| &\leq C||f_n||_{q(x)}||\nabla v||_{p(x)} \\ &\leq C||f_n||_{q(x)}||v||, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$||J'(u_n) - J'(u)|| \leq C||f_n||_{q(x)} \tag{3.11}$$

Usando agora (3.5) e (3.7) em (3.9), obtemos

$$f_n(x) \longrightarrow 0, \quad \text{q.s. em } \Omega. \tag{3.12}$$

De (3.6) e (3.10), temos que

$$f_n(x) \leq g(x)^{p(x)-1} + |\nabla u(x)|^{p(x)-1} \text{ q.s. em } \Omega.$$

Daí,

$$f_n(x)^{q(x)} \leq 2^{q^+}(g(x)^{p(x)} + |\nabla u(x)|^{p(x)}) \in L^1(\Omega), \text{ q.s. em } \Omega. \tag{3.13}$$

De (3.12)-(3.13) e do Teorema da Convergência Dominada, resulta que

$$\int_\Omega f_n^{q(x)} dx \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Assim, pelo Teorema 1.7, tem-se

$$||f_n||_{q(x)} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Disto e de (3.11), obtemos

$$||J'(u_n) - J'(u)|| \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty,$$

ou seja, a derivada de Gateaux J' é contínua, o que conclui a demonstração. ■

Se definirmos $L := J' : X \longrightarrow X^*$, então

$$(L(u), v) = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx, \text{ para todos } u, v \in X.$$

O operador L tem propriedades interessantes, e será útil na busca de solução fraca para o problema (P).

Teorema 3.2 *O operador $L : X \longrightarrow X^*$ é*
(a) contínuo;
(b) limitado;
(c) estritamente monótono, i.e.,

$$(L(u) - L(v), u - v) > 0, \textit{ para todos } u, v \in X, \textit{ com } u \neq v;$$

(d) do tipo (S_+), i.e., se $u_n \rightharpoonup u$ e $\overline{\lim_{n\to\infty}}(L(u_n) - L(u), u_n - u) \leq 0$, então

$$u_n \longrightarrow u \textit{ em } X;$$

(e) um homeomorfismo.

Demonstração.

(a). Observe que $(L(u), v) = (J'(u), v)$, para todos $u, v \in X$. Assim, a continuidade de L segue da continuidade da derivada de Gateaux de J.

(b). Seja $B \subset X$ um conjunto limitado. Então, existe uma constante $k > 0$ tal que

$$||u|| \leq k, \text{ para todo } u \in B. \tag{3.14}$$

Se $u \in B$ e $v \in X$, então

$$|(L(u), v)| \leq \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-1}|\nabla v|dx. \tag{3.15}$$

Usando a desigualdade de Hölder em (3.15), temos

$$||L(u)|| \leq C||g||_{\frac{p(x)}{p(x)-1}}, \text{ para todo } u \in B. \tag{3.16}$$

onde

$$g = |\nabla u|^{p(x)-1}.$$

Desde que

$$||\nabla u||_{p(x)} \leq ||u|| \leq k, \text{ para todo } u \in B,$$

então existe $\widetilde{k} > 0$ tal que

$$\int_\Omega g(x)^{q(x)}dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx \leq \widetilde{k}.$$

Portanto, por (3.16), concluímos que L é limitado.

(c). Para quaisquer $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$, valem as seguintes desigualdades (ver Apêndice A):

$$\left\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \right\rangle \geq \begin{cases} \dfrac{2^{3-p}}{p}|\xi - \eta|^p, & \text{se } p \geq 2 \\ (p-1)\dfrac{|\xi - \eta|^2}{(|\xi|^p + |\eta|^p)^{2-p}}, & \text{se } 1 < p < 2, \end{cases}$$

Sejam $u, v \in X$ tais que $u \neq v$. Então, $\nabla u \neq \nabla v$. Considere os conjuntos

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega : p(x) \geq 2\} \text{ e } \Omega_- = \{x \in \Omega : 1 < p(x) < 2\}.$$

A monotonicidade estrita de L segue fazendo $\xi = \nabla u$ e $\eta = \nabla v$ nas desigualdades acima e integrando sobre Ω_+ ou Ω_-, conforme seja $p(x) \geq 2$ ou $1 < p(x) < 2$, respectivamente.

(d). Se $u_n \rightharpoonup u$ e $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(L(u_n) - L(u), u_n - u) \leq 0$, então

$$\lim_{n\to\infty}(L(u_n) - L(u), u_n - u) = 0.$$

Se $p(x) \geq 2$, então

$$C_1 \int_{\Omega_+} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx \leq (L(u_n) - L(u), u_n - u) \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Se $1 < p(x) < 2$, então pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} C_2 \int_{\Omega_-} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx &= C_2 \int_{\Omega_-} \frac{|\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}} (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}} dx \\ &\leq C||g_n||_{\frac{2}{p(x)}} ||h_n||_{\frac{2}{2-p(x)}}, \qquad (3.17) \end{aligned}$$

onde

$$g_n = \frac{|\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}}$$

e

$$h_n = (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}.$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u$ em X, então (u_n) é limitada. Daí, existe uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$\int_{\Omega_-} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \leq C_3.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \rho_{\frac{2}{2-p}}(h_n) &= \int_{\Omega_-} |h_n|^{\frac{2}{2-p(x)}} dx = \int_{\Omega_-} (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{p(x)} dx \\ &\leq 2^{p^+} \int_{\Omega_-} |\nabla u_n|^{p(x)} dx + 2^{p^+} \int_{\Omega_-} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq C_4. \qquad (3.18) \end{aligned}$$

Temos também

$$\rho_{\frac{2}{p}}(g_n) = \int_{\Omega_-} |g_n|^{\frac{2}{p(x)}} dx \leq C_5 (L(u_n) - L(u), u_n - u) \longrightarrow 0, \qquad (3.19)$$

quando $n \to \infty$.

Usando (3.18) e (3.19) em (3.17), obtemos

$$\int_{\Omega_-} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx \longrightarrow 0,$$

quando $n \to \infty$.

Logo,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx = \int_{\Omega_+} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega_-} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx \longrightarrow 0.$$

Portanto,

$$||\nabla(u_n - u)||_{p(x)} \longrightarrow 0,$$

o que implica

$$||u_n - u|| \longrightarrow 0 \text{ em } X.$$

(e). Sendo L estritamente monótono, então L é injetivo.

Suponha que $||\nabla u||_{p(x)} > 1$. Então, pela Proposição 1.6, temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx \geq ||\nabla u||_{p(x)}^{p^-}. \tag{3.20}$$

Como conseqüência da desigualdade de Poincaré (ver Teorema 2.6), existe $C > 0$ tal que

$$||\nabla u||_{p(x)} \geq C||u||. \tag{3.21}$$

Daí, de (3.20) e (3.21), temos

$$\frac{(L(u), u)}{||u||} = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx}{||u||} \geq \widetilde{C}||u||_{p(x)}^{p^- - 1}.$$

Logo,

$$\lim_{||u|| \to \infty} \frac{(L(u), u)}{||u||} = \infty, \tag{3.22}$$

ou seja, L é coercivo. Usando esta última propriedade, a continuidade e a monotonicidade de L, concluímos do Teorema de Minty-Browder (ver Apêndice B), que L é sobrejetivo. Assim, existe o operador inverso

$$L^{-1} : X^* \longrightarrow X.$$

Vamos mostrar que L^{-1} é contínuo. Seja $\{g_n\} \subset X^*$ tal que $g_n \to g$ em X^*. Considere

$$u_n = L^{-1}(g_n) \text{ e } u = L^{-1}(g).$$

Sendo L uma bijeção, temos

$$L(u_n) = g_n \text{ e } L(u) = g. \tag{3.23}$$

Note que

$$\frac{(L(u_n), u_n)}{||u_n||} \leq ||g_n||.$$

Daí, usando a limitação de $\{g_n\}$ e (3.22), concluímos que $\{u_n\}$ é limitada em X. Sendo X um espaço de Banach reflexivo, então a menos de subseqüência podemos supor que

$$u_n \rightharpoonup u_o.$$

Observe que

$$(L(u_n) - L(u_o), u_n - u_o) = (g_n, u_n - u_o) - (L(u_o), u_n - u_o).$$

Por outro lado, temos

$$(g_n, u_n - u_o) = (g_n - g, u_n - u_o) + (g, u_n - u_o)$$

Agora, tendo em vista que $g_n \to g$ e $u_n \rightharpoonup u_o$, temos

$$\lim_{n\to\infty} (L(u_n) - L(u_o), u - u_o) = 0.$$

Assim, sendo L do tipo (S_+), segue que

$$u_n \longrightarrow u_o. \tag{3.24}$$

Pela continuidade de L, temos

$$L(u_n) \longrightarrow L(u_o).$$

Por (3.23), obtemos

$$L(u) = L(u_o).$$

Desde que L é injetivo, temos $u = u_o$. Logo, de (3.24), obtemos

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } X,$$

mostrando que L^{-1} é contínuo. Portanto, L é um homeomorfismo. ∎

3.2 Existência de Solução

Nesta seção, discutiremos a existência de solução fraca para o problema (P).

Definição 3.1 *Dizemos que $u \in X$ é uma solução fraca do problema (P) se*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v\, dx = \int_\Omega f(x,u)v\, dx, \text{ para todo } v \in X.$$

Teorema 3.3 *Se $f(x,u) = f(x), f \in L^{\alpha(x)}(\Omega)$, onde $\alpha \in C_+(\overline{\Omega})$ é tal que*

$$\frac{1}{\alpha(x)} + \frac{1}{p^*(x)} < 1, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega},$$

então o problema (P) tem uma única solução fraca.

Demonstração. Considere o funcional $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$g(v) = \int_\Omega f(x)v\,dx.$$

Claramente, g é linear. Mostraremos que g é contínuo. Seja $\beta \in C_+(\overline{\Omega})$ tal que

$$\frac{1}{\alpha(x)} + \frac{1}{\beta(x)} = 1, \text{ para } x \in \overline{\Omega}.$$

Assim, usando a hipótese, temos

$$\frac{1}{\beta(x)} = \frac{\alpha(x)-1}{\alpha(x)} > \frac{1}{p^*(x)}, \text{ para } x \in \overline{\Omega}.$$

Daí,

$$\beta(x) < p^*(x), \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

Logo, pelo Teorema 2.5, a seguinte imersão

$$X \hookrightarrow L^{\beta(x)}(\Omega)$$

é contínua, ou seja, existe $C_1 > 0$ tal que

$$||v||_{\beta(x)} \leq C_1||v||, \text{ para todo } v \in X. \tag{3.25}$$

Pela a desigualdade de Hölder,

$$|g(v)| = |\int_\Omega f(x)v\,dx| \leq C||f||_{\alpha(x)}||v||_{\beta(x)}, \tag{3.26}$$

onde

$$C = \frac{1}{\alpha^-} + \frac{1}{\beta^-}.$$

Por (3.25) e (3.26), obtemos

$$|g(v)| \leq C_2||v||, \text{ para todo } v \in X,$$

o que mostra a continuidade de g.

Sendo $g \in X^*$ e L um homeomorfismo, então existe um único $u \in X$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v\,dx = \int_\Omega f(x)v\,dx, \text{ para todo } v \in X,$$

ou seja, o problema (P) possui uma única solução fraca. ■

De agora em diante, vamos supor que f satisfaz à seguinte condição

(f_o) $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory tal que

$$|f(x,t)| \leq C_1 + C_2|t|^{\alpha(x)-1}, \text{ para } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

onde

$$\alpha \in C_+(\overline{\Omega}) \text{ e } \alpha(x) < p^*(x).$$

Teorema 3.4 *O funcional $G : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$G(u) = \int_\Omega F(x,u)dx,$$

onde $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$, é de classe $C^1(X,\mathbb{R})$.

Demonstração. Sejam $u, v \in X$. Dados $x \in \Omega$ e $0 < |t| < 1$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda(x,t) = \lambda \in (0,1)$ tal que

$$\frac{F(x,u+tv) - F(x,u)}{t} = f(x,u+\lambda tv)v. \tag{3.27}$$

Daí,

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(x,u+tv) - F(x,u)}{t} = f(x,u)v, \text{ q.s em } \Omega. \tag{3.28}$$

Sabemos que

$$v \in L^1(\Omega), L^{\alpha(x)}(\Omega).$$

Assim,

$$(|u| + |v|)^{\alpha(x)-1} \in L^{\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}}(\Omega).$$

Logo, usando a desigualdade de Hölder e a condição (f_o), obtemos

$$\begin{aligned} |f(x,u+\lambda tv)v| &\leq C_1|v| + C_2|u+\lambda tv|^{\alpha(x)-1}|v| \\ &\leq C_1|v| + C_2(|u|+|v|)^{\alpha(x)-1}|v| \in L^1(\Omega). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Usando agora (3.27) - (3.29) e o Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$G'(u).v = \lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{F(x,u+tv) - F(x,u)}{t} dx = \int_\Omega f(x,u)vdx.$$

A continuidade de G' segue da imersão contínua

$$X \hookrightarrow L^{\alpha(x)}(\Omega)$$

e da Desigualdade de Hölder. Portanto, G é de classe $C^1(X,\mathbb{R})$. ■

Teorema 3.5 *O funcional* $G : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *definido por*

$$G(u) = \int_\Omega F(x,u)dx,$$

onde $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$, *é fracamente contínuo, i.e., se* $u_n \rightharpoonup u$, *então*

$$G(u_n) \longrightarrow G(u).$$

Demonstração. Desde que f satisfaz à condição (f_o), temos

$$\begin{aligned}
|F(x,t)| &= |\int_0^t f(x,s)ds| \\
&\leq \int_0^t (C_1 + C_2|s|^{\alpha(x)-1})ds \\
&\leq C_1|t| + C_2|t|^{\alpha(x)} \\
&\leq C(1+|t|^{\alpha(x)}), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

Por (3.30), o operador de Nemytskii é tal que

$$N_F : L^{\alpha(x)}(\Omega) \to L^1(\Omega).$$

Sabemos que a seguinte imersão

$$X \hookrightarrow L^{\alpha(x)}(\Omega)$$

é compacta. Assim, se $u_n \rightharpoonup u$ em X, então

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^{\alpha(x)}(\Omega). \qquad (3.31)$$

De (3.31) e da continuidade de N_F, temos

$$N_F(u_n) \longrightarrow N_F(u) \text{ em } L^1(\Omega). \qquad (3.32)$$

Note que

$$\begin{aligned}
|G(u_n) - G(u)| &= |\int_\Omega (F(x,u_n) - F(x,u))dx| \\
&\leq \int_\Omega |F(x,u_n) - F(x,u)|dx \\
&= \int_\Omega |N_F(u_n) - N_F(u)|dx. \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

Logo, combinando (3.32) e (3.33), concluímos que

$$G(u_n) \longrightarrow G(u).$$

■

Teorema 3.6 *O operador $G' : X \longrightarrow X^*$ dado por*

$$G'(u).v = \int_\Omega f(x,u)vdx$$

é completamente contínuo, i.e., se $u_n \rightharpoonup u$, então

$$G'(u_n) \longrightarrow G'(u).$$

Demonstração. Seja $u_n \rightharpoonup u$. Dado $v \in X$, usando a condição (f_o) e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} |(G'(u_n) - G'(u), v)| &= |\int_\Omega (f(x,u_n) - f(x,u))vdx| \\ &\leq C||N_f(u_n) - N_f(u)||_{\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}} ||v||_{\alpha(x)}. \\ &\leq \widetilde{C}||N_f(u_n) - N_f(u)||_{\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}} ||v||. \end{aligned}$$

Logo,

$$||G'(u_n) - G'(u)|| \leq \widetilde{C}||N_f(u_n) - N_f(u)||_{\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}}. \tag{3.34}$$

Da imersão compacta

$$X \hookrightarrow L^{\alpha(x)}(\Omega),$$

se $u_n \rightharpoonup u$, então

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^{\alpha(x)}(\Omega). \tag{3.35}$$

Sendo o operador

$$N_f : L^{\alpha(x)}(\Omega) \to L^{\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}}(\Omega)$$

contínuo, então por (3.35) temos

$$N_f(u_n) \longrightarrow N_f(u) \text{ em } L^{\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}}(\Omega).$$

Portanto, de (3.34), concluímos que

$$||G'(u_n) - G'(u)|| \longrightarrow 0.$$

■

Observação 3.1 *O funcional J, sendo contínuo e convexo, é fracamente semicontínuo inferiormente (ver [5], Corolário III.8). Pelo Teorema 3.5, o funcional $-G$ também é fracamente semicontínuo inferiormente. Portanto, o funcional de Euler-Lagrange associado ao problema (P), que é dado por*

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \int_\Omega F(x,u)dx,$$

é fracamente semicontínuo inferiormente.

Observação 3.2 *Pelos Teoremas (3.1) e (3.4) o funcional I é de classe $C^1(X,\mathbb{R})$, com*

$$I'(u).v = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f(x,u)v dx, \ \text{para todos } u, v \in X.$$

Dessa forma, as soluções fracas de (P) são exatamente os pontos críticos de I.

Teorema 3.7 *Se f satisfaz à condição*

$$|f(x,t)| \leq C_1 + C_2|t|^{\beta-1}, \ \text{para todos } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \ \text{onde } 1 \leq \beta < p^-, \tag{3.36}$$

então (P) tem uma solução fraca.

Demonstração. Sendo

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds,$$

então de (3.36), temos

$$\begin{aligned} |F(x,t)| &\leq C_1|t| + C_2|t|^\beta \\ &\leq C(1+|t|^\beta), \ \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Seja $||\nabla u||_{p(x)} > 1$. Segue de (3.37) que

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx - \int_\Omega F(x,u)dx \\ &\geq \frac{1}{p^+}||\nabla u||^{p-}_{p(x)} - C\int_\Omega |u|^\beta dx - C_3 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Pela imersão contínua

$$X \hookrightarrow L^\beta(\Omega),$$

existe $\widetilde{C} > 0$ tal que

$$\int_\Omega |u|^\beta dx \leq \widetilde{C}||u||^\beta. \tag{3.39}$$

Daí, de (3.38) e (3.39), e pelo fato de $\beta < p^-$, temos

$$I(u) \geq \frac{C_4}{p+}||u||^{p-} - C_5||u||^\beta - C_3 \longrightarrow +\infty. \tag{3.40}$$

quando $||u|| \longrightarrow \infty$. Logo, I é coercivo.

Sendo o funcional I fracamente semicontínuo inferiormente, segue de (3.40) e do Teorema 1.1 de [18] que I tem um ponto de mínimo, que é solução fraca de (P). ■

Nosso objetivo, a partir de agora, é mostrar que o funcional I satisfaz às hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, devido a Ambrosetti-Rabinowitz (ver Apêndice C). Comecemos, então, com a seguinte definição

Definição 3.2 *Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que I satisfaz à condição de Palais- Smale (PS) em X, se toda seqüência $\{u_n\} \subset X$ tal que*

$$\{I(u_n)\} \text{ é limitada e } ||I'(u_n)|| \longrightarrow 0,$$

possui uma subseqüência convergente.

Lema 3.8 *Suponha que f satisfaz à condição*
(f_1) existem $M > 0$ e $\theta > p^+$ tais que

$$0 < \theta F(x,t) \leq t f(x,t), \text{ para } |t| \geq M \text{ e } x \in \Omega,$$

então I satisfaz à condição (PS).

Demonstração. Seja $\{u_n\} \subset X$ tal que $\{I(u_n)\}$ é limitada e $||I'(u_n)|| \to 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina o conjunto

$$\Omega_n = \{x \in \Omega : |u_n(x)| \geq M\}.$$

Usando as hipóteses e a condição (f_o) , temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega F(x,u_n)dx &= \int_{\Omega_n} F(x,u_n)dx + \int_{\Omega_n^c} F(x,u_n)dx \\
&\leq \int_{\Omega_n} \frac{u_n}{\theta} f(x,u_n)dx + C_3 \int_{\Omega_n^c} (1 + M^{\alpha(x)})dx \\
&\leq \int_{\Omega_n} \frac{u_n}{\theta} f(x,u_n)dx + C_4. \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

Observe que, usando a condição (f_o), tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_n} \frac{u_n}{\theta} f(x,u_n)dx &= \int_\Omega \frac{u_n}{\theta} f(x,u_n)dx - \int_{\Omega_n^c} \frac{u_n}{\theta} f(x,u_n)dx \\
&\leq \int_\Omega \frac{u_n}{\theta} f(x,u_n)dx + \frac{M}{\theta} \int_{\Omega_n^c} (C_1 + C_2 M^{\alpha(x)-1})dx \\
&\leq \int_\Omega \frac{u_n}{\theta} f(x,u_n)dx + C_5. \qquad (3.42)
\end{aligned}$$

Suponha que $||\nabla u_n||_{p(x)} > 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, usando a limitação de $\{I(u_n)\}$ e (3.41) - (3.42), temos

$$\begin{aligned}
C \geq I(u_n) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx - \int_\Omega F(x,u_n)dx \\
&\geq \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} - \int_\Omega \frac{u_n}{\theta} f(x,u_n)dx - C_6 \\
&= \int_\Omega \left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{\theta} \right) |\nabla u_n|^{p(x)} + \frac{1}{\theta} \int_\Omega (|\nabla u_n|^{p(x)} - u_n f(x,u_n))dx - C_6. \\
&\geq \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\theta} \right) ||\nabla u_n||_{p(x)}^{p-} - \frac{1}{\theta} ||I'(u_n)|| \, ||u_n|| - C_6, \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

onde para concluir a última desigualdade usamos que

$$\int_{\Omega}(|\nabla u_n|^{p(x)} - u_n f(x,u_n))dx = I'(u_n).u_n \leq ||I'(u_n)||\,||u_n||.$$

Desde que

$$||I'(u_n)|| \longrightarrow 0,$$

deduzimos de (3.43) que $\{||u_n||\}$ é limitada. Sendo X um espaço de Banach reflexivo, podemos supor, a menos de subseqüência, que $u_n \rightharpoonup u$. Daí, pelo Teorema 3.6, segue que

$$G'(u_n) \longrightarrow G'(u). \tag{3.44}$$

Uma vez que

$$L(u_n) - G'(u_n) = I'(u_n) \longrightarrow 0,$$

então por (3.44), obtemos

$$L(u_n) \longrightarrow G'(u).$$

Logo,

$$u_n \longrightarrow L^{-1}(G'(u)),$$

pois L é um homeomorfismo. Desde que $u_n \rightharpoonup u$, concluímos que

$$u_n \longrightarrow u.$$

Portanto, I satisfaz à condição (PS). ∎

Teorema 3.9 *Se f satisfaz (f_o), (f_1) e*
(f_2) $f(x,t) = o(|t|^{p^+-1}), t \to 0,$ uniformemente em x, onde $p^+ < \alpha^-$,
então (P) tem uma solução não-trivial.

Demonstração. Mostraremos que o funcional I satisfaz às condicões do Teorema do Passo da Montanha. Primeiramente observe que $I(0) = 0$ e, pelo Lema 3.8, I satisfaz à condição de Palais-Smale.

Pelas hipóteses, temos

$$p^+ < \alpha^- \leq \alpha(x) < p^*(x), \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

Logo, a seguinte imersão

$$X \hookrightarrow L^{p^+}(\Omega)$$

é contínua, ou seja, existe $C_o > 0$ tal que

$$\int_\Omega |u|^{p^+}dx \leq C_o||u||^{p^+}, \text{ para todo } u \in X. \tag{3.45}$$

Por (f_2), dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $|t| < \delta$ implica

$$|f(x,t)| \leq \epsilon|t|^{p^+-1}, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Por (f_o), se $|t| \geq \delta$ então

$$\delta^{\alpha^+-1} < \delta^{\alpha(x)-1} \leq |t|^{\alpha(x)-1},$$

e daí

$$\frac{|f(x,t)|}{|t|^{\alpha(x)-1}} \leq \frac{C_1}{|t|^{\alpha(x)-1}} + C_2 \leq \frac{C_1}{\delta^{\alpha^+-1}} + C_2 = C_\epsilon.$$

Logo, pelas hipóteses (f_o) e (f_2) temos

$$|f(x,t)| \leq \epsilon|t|^{p^+-1} + C_\epsilon|t|^{\alpha(x)-1}, \text{ para } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

que integrando sobre Ω implica

$$F(x,t) \leq \frac{\epsilon}{p^+}|t|^{p^+} + C_\epsilon|t|^{\alpha(x)}, \text{ para } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{3.46}$$

Para $||u|| = s$, $s > 0$ suficientemente pequeno, usando (3.46) temos

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx - \int_\Omega F(x,u)dx \\ &\geq \frac{1}{p^+}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \frac{\epsilon}{p^+}\int_\Omega |u|^{p^+}dx - C_\epsilon\int_\Omega |u|^{\alpha(x)}dx \end{aligned} \tag{3.47}$$

Da imersão contínua

$$X \hookrightarrow L^{\alpha(x)}(\Omega),$$

existe $C_3 > 0$ tal que

$$||u||_{\alpha(x)} \leq C_3||u|| \leq sC_3 < 1. \tag{3.48}$$

Por (3.48) e pela Proposição 1.6, temos

$$\int_\Omega |u|^{\alpha(x)}dx \leq ||u||_{\alpha(x)}^{\alpha^-} \leq ||u||^{\alpha^-}. \tag{3.49}$$

Usando (3.45) e (3.49) em (3.47), obtemos

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{p^+}||\nabla u||_{p(x)}^{p^+} - \frac{\epsilon}{p^+}C_o^{p^+}||u||^{p^+} - C_\epsilon||u||^{\alpha^-} \\ &\geq \frac{C}{p^+}||u||^{p^+} - \frac{\epsilon C_o^{p^+}}{p^+}||u||^{p^+} - C_\epsilon||u||^{\alpha^-} \\ &\geq \left(\frac{C}{p^+} - \frac{\epsilon C_o^{p^+}}{p^+}\right)||u||^{p^+} - C_\epsilon||u||^{\alpha^-}. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Para

$$0 < \epsilon < \frac{C}{2C_o^{p^+}},$$

por (3.50), temos

$$I(u) \geq \frac{C}{2p^+}||u||_{p(x)}^{p^+} - C_\epsilon||u||^{\alpha^-}, \text{ para } ||u|| = s, \text{ s pequeno.} \tag{3.51}$$

Escolhendo

$$0 < s_o < \left(\frac{C}{2p^+ C_\epsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha^- - p^+}}$$

e

$$\delta = \frac{C}{2p^+} s_o^{p^+} - C_\epsilon s_o^{\alpha^-},$$

por (3.51) temos

$$I(u) \geq \delta > 0, \text{ para } ||u|| = s_o.$$

De (f_1), para $x \in \Omega$ e $\tau \geq M$, temos

$$\frac{\theta}{\tau} \leq \frac{f(x,\tau)}{F(x,\tau)} \tag{3.52}$$

Integrando (3.52) em τ de M até t, obtemos

$$F(x,t) \geq C_4|t|^\theta, \text{ para } x \in \Omega, \; t \geq M. \tag{3.53}$$

Por outro lado, se $\tau < -M$, então usando (f_1) obtemos

$$\frac{\theta}{\tau} \geq \frac{f(x,\tau)}{F(x,\tau)} \tag{3.54}$$

Integrando (3.54) em τ de t até $-M$, obtemos

$$F(x,t) \geq C_5|t|^\theta, \text{ para } x \in \Omega, \; t \leq -M. \tag{3.55}$$

Logo, segue de (3.53) e (3.55) que

$$F(x,t) \geq C_6|t|^\theta, \text{ para } x \in \Omega, \; |t| \geq M. \tag{3.56}$$

Fixe $u \in X \setminus \{0\}$ e $t > 1$. Por (3.56) e por um argumento similar para se obter os itens (3.41) e (3.42), temos

$$\begin{aligned} I(tu) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |t\nabla u|^{p(x)} dx - \int_\Omega F(x,tu)dx \\ &\leq t^{p^+} \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - C_6 t^\theta \int_\Omega |u|^\theta dx - C_7. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Por (3.57), usando a hipótese $\theta > p^+$, tem-se

$$\lim_{t\to\infty} I(tu) = -\infty,$$

o que implica que existe $t_o > 0$ tal que

$$||t_o u|| > s \text{ e } I(t_o u) < 0.$$

Logo, o funcional I satisfaz às condições do Teorema do Passo da Montanha, possuindo portanto um ponto crítico não-trivial. ■

Capítulo 4

Problemas Elípticos em $\mathbb{R}^N$

Neste capítulo estudamos a exitência de solução fraca para a seguinte classe de problemas elípticos quasilineares

$$(P_\lambda)\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + u^{p(x)-1} = \lambda u^{q(x)}, x \in \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0, u \neq 0 \text{ e } u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro e $p, q : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções mensuráveis satisfazendo algumas condições de crescimento.

Estudaremos dois tipos de comportamento para a função q no infinito. No primeiro, supondo q constante no infinito, mostramos que o problema (P_λ) tem uma solução para todo $\lambda > 0$. No segundo, supondo q assintoticamente constante no infinito, mostramos que o problema (P_λ) tem uma solução para todo $\lambda > \lambda_o > 0$.

Para $f, g \in L^\infty_+(\mathbb{R}^N)$, diremos que $f(x) << g(x)$, q.s. em $\mathbb{R}^N$ se

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^N}(g(x) - f(x)) > 0.$$

No que segue, $R > 0$ é um número real suficientemente grande.

4.1 Hipóteses sobre as funções $p(x)$ e $q(x)$

Ao longo de todo este capítulo, assumiremos as seguintes hipóteses preliminares sobre as funções $p(x)$ e $q(x)$:

(H_1) $p, q \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$,

(H_2) $p^-, q^- > 1$ e $p^+ < q^- + 1,$

(H_3) $p(x) << q(x) << p^*(x),$ para todo $x \in \mathbb{R}^N,$

(H_4) $p(x) \geq m,$ q.s. em $\mathbb{R}^N$ e $p(x) = m,$ para todo $|x| \geq R.$

4.2 Imersões Contínuas

Nesta seção mostraremos alguns resultados de imersão contínua em $\mathbb{R}^N$. Comecemos com uma desigualdade de interpolação.

Lema 4.1 *Seja* $h \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_+(\mathbb{R}^N)$ *tal que*

$$p(x) \leq q(x) \leq h(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Então,

$$L^{p(x)}(\mathbb{R}^N) \cap L^{h(x)}(\mathbb{R}^N) \subset L^{q(x)}(\mathbb{R}^N),$$

e tal imersão é contínua.

Demonstração. Para cada $x \in \mathbb{R}$, seja $\alpha(x) = \alpha \in [0, 1]$ tal que

$$q(x) = (1 - \alpha)p(x) - \alpha h(x).$$

Seja $u \in L^{p(x)}(\mathbb{R}^N) \cap L^{h(x)}(\mathbb{R}^N)$. Então, usando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} |u|^{q(x)} &= |u|^{(1-\alpha)p(x)}.|u|^{(\alpha)h(x)} \\ &\leq (1 - \alpha)|u|^{p(x)} + \alpha|u|^{h(x)} \\ &\leq |u|^{p(x)} + |u|^{h(x)}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Integrando a desigualdade (4.1), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q(x)}dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p(x)}dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{h(x)}dx, \tag{4.2}$$

logo

$$u \in L^{p(x)}(\mathbb{R}^N),$$

portanto

$$L^{p(x)}(\mathbb{R}^N) \cap L^{h(x)}(\mathbb{R}^N) \subset L^{q(x)}(\mathbb{R}^N). \tag{4.3}$$

Segue imediatamente de (4.2) que a imersão dada (4.3) é contínua. ■

Lema 4.2 *Se*

$$p(x) \leq q(x) \leq p^*(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N \text{ e } p(x) = m, \text{ para todo } |x| \geq R,$$

então a imersão

$$W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q(x)}(\mathbb{R}^N)$$

é contínua.

Demonstração. Seja $B = B_R(0)$. Pela Observação 2.1, a seguinte imersão

$$W^{1,p(x)}(B) \hookrightarrow L^{q(x)}(B) \tag{4.4}$$

é contínua. Como em (4.2) do Lema 4.1, para $u \in L^m(B^c) \cap L^{m^*}(B^c)$ temos

$$\int_{B^c} |u|^{q(x)} dx \leq \int_{B^c} |u|^m dx + \int_{B^c} |u|^{m^*} dx. \tag{4.5}$$

Usando em (4.5) as imersões de Sobolev:

$$W^{1,m}(B^c) \hookrightarrow L^{m^*}(B^c) \hookrightarrow L^m(B^c),$$

obtemos

$$\int_{B^c} |u|^{q(x)} dx \leq C_2 ||u||^{m^*}_{W^{1,p(x)}(B^c)}. \tag{4.6}$$

Logo, a imersão

$$W^{1,p(x)}(B^c) \hookrightarrow L^{q(x)}(B^c) \tag{4.7}$$

é contínua. Portanto, usando (4.4) e (4.7) concluímos que a imersão

$$W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q(x)}(\mathbb{R}^N)$$

é contínua. ∎

Lema 4.3 *A hipótese* (H_4) *implica que*

$$W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{1,m}(\mathbb{R}^N),$$

e que tal imersão é contínua.

Demonstração. Seja $B = B_R(0)$. Para $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$|u|^m \leq (1 + |u|^{p(x)})\chi_B(x) + |u|^m \leq (1 - \chi_B)(x), \text{ para } x \in \mathbb{R}^N, \tag{4.8}$$

$$|\nabla u|^m \leq (1 + |\nabla u|^{p(x)})\chi_B(x) + |\nabla u|^m \leq (1 - \chi_B)(x), \text{ para } x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.9}$$

Integrando (4.8) e (4.9) em $\mathbb{R}^N$, pela hipótese (H_4) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^m dx \leq |B| + \int_B |u|^{p(x)} dx + \int_{B^c} |u|^{p(x)} dx, \tag{4.10}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^m dx \leq |B| + \int_B |\nabla u|^{p(x)} dx + \int_{B^c} |\nabla u|^{p(x)} dx. \tag{4.11}$$

Por (4.10) e (4.11), segue que

$$u, \nabla u \in L^{1,m}(\mathbb{R}^N).$$

Logo, $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Portanto,

$$W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \subset W^{1,m}(\mathbb{R}^N).$$

Segue imediatamente de (4.10) e (4.11) que a aplicação identidade

$$i : W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow W^{1,m}(\mathbb{R}^N)$$

é limitada, e portanto contínua.

4.3 A geometria do Passo Da Montanha

Nesta seção demonstraremos que o funcional de Enler-Lagrange associado ao problema (P_λ), o qual é dado por

$$I_\lambda(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} + \frac{|u|^{p(x)}}{p(x)} \right] dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u_+^{q(x)+1}}{q(x)+1} dx,$$

satisfaz à Geometria do Passo da Montanha.

Observamos que, seguindo as mesmas idéias do Capítulo 3 (Seção 3.1), mostra-se que I_λ é de classe $C^1(W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ com

$$I'_\lambda(u).v = \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v + |u|^{p(x)-2} uv \right] dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q(x)-1} uv \, dx,$$

para todos $u, u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

Lema 4.4 *O funcional I_λ satisfaz à Geometria do Passo da Montanha.*

Demonstração. Seja $||u|| = r, r \geq 0$ suficientemente pequeno. Então, pela Proposição 1.6, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} + \frac{|u|^{p(x)}}{p(x)} \right] dx \geq \frac{1}{p^+} \left[||\nabla u||_{p(x)}^{p^+} + ||u||_{p(x)}^{p^+} \right] \geq C_1 ||u||^{p^+}. \tag{4.12}$$

Pelo Lema 4.2, a imersão

$$W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q(x)+1}(\mathbb{R}^N)$$

é contínua, i.e., existe $C_2 > 0$ tal que

$$||u||_{q(x)+1} \leq C_2 ||u|| = C_2 r < 1.$$

Logo, novamente pela Proposição 1.6, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{q(x)+1}}{q(x)+1} dx \leq \frac{1}{q^+ + 1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q(x)+1} dx \leq C_3 ||u||_{q(x)+1}^{q^-+1} \leq C_4 ||u||^{q^-+1}. \tag{4.13}$$

Desde que $q^- + 1 > p^+$, então por (4.12) e (4.13), temos

$$I_\lambda(u) \geq \delta > 0, \text{ para} ||u|| = r_o \tag{4.14}$$

com

$$0 < r_o < \left(\frac{C_1}{\lambda C_4} \right)^{\frac{1}{q^- + 1 - p^+}} \quad \text{e } \delta = C_1 r_o^{p^+} - \lambda C_4 r_o^{q^-+1}.$$

Fixe $\phi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$. Para $t > 1$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{|\nabla t\phi|^{p(x)}}{p(x)} + \frac{|t\phi|^{p(x)}}{p(x)} \right] dx \leq t^{p^+} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{|\nabla \phi|^{p(x)}}{p(x)} + \frac{|\phi|^{p(x)}}{p(x)} \right] dx \tag{4.15}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|t\phi|^{q(x)+1}}{q(x)+1} dx \geq t^{q^-+1} \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{q(x)+1} dx. \tag{4.16}$$

Logo, por (4.15) e (4.16), segue que

$$\lim_{t \to \infty} I_\lambda(t\phi) = -\infty. \tag{4.17}$$

Portanto, usando (4.14) e (4.17), e observando que $I_\lambda(0) = 0$, conclui-se que I_λ satisfaz à Geometria do Passo da Montanha.

Pelo Lema 4.4 e pelo Princípio Variacional de Ekeland, existe uma seqüência Palais-Smale $\{u_n\} \subset W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$I_\lambda(u_n) \longrightarrow c_\lambda,$$

$$I'_\lambda(u_n) \longrightarrow 0,$$

onde

$$c_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\lambda \in C([0,1], W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)) : \lambda(0) = 0 \ e \ I_\lambda(\lambda(t)) \leq 0\}.$$

De agora em diante, denotaremos por I_∞ o funcional de Euler-Lagrange do seguinte problema

$$(P_\infty) \begin{cases} -\Delta_m u + u^{m-1} = \lambda u^s, x \in \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0, u \neq 0 \text{ e } u \in W^{1,m}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

o qual é dado por

$$I_\infty(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{|\nabla u|^m}{m} + \frac{|u|^m}{m}\right] dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u_+^{s+1}}{s+1}\, dx,$$

onde $m < N$, $s \in (m-1, m^*-1)$ e $m^* = \frac{Nm}{N-m}$.

Sabe-se que I_∞ é de classe $C^1(W^{1,m}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e tal que

$$I'_\infty(u).v = \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^{m-2}\nabla u \nabla v + |u|^{m-2}uv]dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{s-1}uv\, dx,$$

para todos $u, v \in W^{1,m}(\mathbb{R}^N)$.

Lema 4.5 *Seja $\{u_n\}$ uma seqüência $(PS)_d$ de I_λ. Então, existem uma subseqüência, ainda denotada por $\{u_n\}$, e $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ tais que*
i) $\{u_n\}$ é limitada com $u_n \rightharpoonup u$;
ii) $u_n \longrightarrow u$ em $W^{1,p(x)}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e em $W^{1,m}_{loc}(\mathbb{R}^N)$;
iii) $u_n(x) \longrightarrow u(x)$, q.s. em $\mathbb{R}^N$;
iv) $u_n \longrightarrow u$ em $L^m_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $L^{s+1}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $L^{p(x)}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e em $L^{q(x)+1}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração.

i) Note que, sendo $p^+ < q^- + 1$ e $q^- \leq q(x)$, temos

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) - \frac{1}{q^-+1} I'_\lambda(u_n).u_n &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q^-+1}\right) [|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}]dx \\ &+ \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{q^-+1} - \frac{1}{q(x)+1}\right) |u_n|^{q(x)+1}\, dx \\ &\geq \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{q^-+1}\right) \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}]dx. \quad (4.18) \end{aligned}$$

Por outro lado, sendo $\{u_n\}$ $(PS)_d$, temos

$$I_\lambda(u_n) - \frac{1}{q^-+1} I'_\lambda(u_n).u_n \leq C_1 + C_2||u_n||. \quad (4.19)$$

Pela Proposição 1.6, (18) - (19) e após consideraçõe sobre as normas $||\nabla u_n||_{p(x)}$ e $||u_n||_{p(x)}$, obtemos

$$||u_n|| \leq C_3 + C_4||u_n||^{1/p^-}.$$

Logo, $\{u_n\}$ é limitada. Portanto, existe $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N).$$

ii) Seja $B = B_R(0)$. Fixe $\phi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \phi \leq 1$ e

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } |x| \geq 2R, \\ 1, \text{ se } |x| \leq R. \end{cases}$$

Denotando

$$P_n(x) = \left\langle |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u, \nabla u_n - \nabla u \right\rangle,$$

temos

$$\begin{aligned} \int_B P_n dx &= \int_B \phi P_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} \phi P_n dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi |\nabla u_n|^{p(x)}\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \phi |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \nabla u dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} \phi \left\langle |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u, \nabla u_n - \nabla u \right\rangle dx. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \phi |\nabla u_n|^{p(x)}\, dx &= I'_\lambda(u_n).(\phi u_n) - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p(x)-2} u_n \nabla u_n \nabla \phi\, dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} \phi |u_n|^{p(x)} dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \phi |u_n|^{q(x)+1} dx \end{aligned} \tag{4.21}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \phi |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \nabla u\, dx &= I'_\lambda(u_n).(\phi u) - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p(x)-2} u \nabla u_n \nabla \phi\, dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} \phi |u_n|^{p(x)-2} u_n u\, dx \\ &+ \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \phi |u_n|^{q(x)-1} u_n u\, dx. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Substituindo (4.21) e (4.22) em (4.20), obtemos

$$\begin{aligned} \int_B P_n dx &\leq I'_\lambda(u_n).(\phi u_n) - I'_\lambda(u_n).(\phi u) + C_1 \int_{B_{2R}} |\nabla u_n|^{p(x)-1}|u_n - u|\, dx \\ &+ C_2 \int_{B_{2R}} |u_n|^{p(x)-1}|u_n - u|\, dx + C_3 \int_{B_{2R}} |u_n|^{q(x)}|u_n - u|\, dx \\ &+ C_4 \int_{B_{2R}} \left\langle |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u, \nabla u_n - \nabla u \right\rangle dx, \end{aligned} \tag{4.23}$$

com $supp\,\phi \subset B_{2R}$.

Temos:

- $\lim\limits_{n\to\infty} I'_\lambda(u_n).(\phi u_n) = \lim\limits_{n\to\infty} I'_\lambda(u_n).(\phi u) = 0.$
- $\int_{B_{2R}} \left\langle |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u, \nabla u_n - \nabla u \right\rangle dx = \langle J'(u), u_n - u\rangle \longrightarrow 0$, onde

$$J(u) = \int_{B_{2R}} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx$$

- Usando a desigualdade de Hölder e as imersões compactas

$$W^{1,\,p(x)}(B_{2R}) \hookrightarrow L^{p(x)}(B_{2R}), L^{q(x)+1}(B_{2R}),$$

obtemos

$$\int_{B_{2R}} |\nabla u_n|^{p(x)-1}|u_n - u|\, dx \le C||f_n||_{L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(B_{2R})} ||u_n - u||_{L^{p(x)}(B_{2R})} \longrightarrow 0,$$

$$\int_{B_{2R}} |u_n|^{p(x)-1}|u_n - u|\, dx \le C||g_n||_{L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(B_{2R})} ||u_n - u||_{L^{p(x)}(B_{2R})} \longrightarrow 0,$$

$$\int_{B_{2R}} |u_n|^{q(x)}|u_n - u|\, dx \le C'||h_n||_{L^{\frac{q(x)+1}{q(x)}}(B_{2R})} ||u_n - u||_{L^{q(x)+1}(B_{2R})} \longrightarrow 0,$$

onde as seqüências

$$f_n = |\nabla u_n|^{p(x)-1}, g_n = |u_n|^{p(x)-1} \text{ e } h_n = |u_n|^{q(x)}$$

são limitadas, pois $\{u_n\}$ é limitada. Logo, por (4.23), segue que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_B P_n dx \le 0. \tag{4.24}$$

Segue de (4.24) e da convergência

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } W^{1,\,p(x)}(B)$$

que o operador $L : W^{1,\,p(x)}(B) \longrightarrow (W^{1,\,p(x)}(B))^*$ definido por

$$(L(u), v) = \int_B |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v\, dx$$

é do tipo (S_+). Daí,

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } W^{1,\,p(x)}(B).$$

Logo,

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } W^{1,\,p(x)}_{loc}(\mathbb{R}^N),$$

portanto, pelo Lema 4.3,

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } W^{1,m}_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

iii) Segue de ii) e da Proposição 1.9.

iv) Segue de ii), das hipóteses sobre p e q e do Lema 4.2. ■

4.4 Existência de Solução

Nesta seção discutiremos a existência de solução fraca para o problema (P_λ). Como estudaremos dois tipos de comportamento no infinito para a função q, dividiremos esta seção em duas subseções.

Primeiramente, explicitemos o que seja uma solução fraca para o problema (P_λ).

Definição 4.1 *Dizemos que $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca do problema (P_λ) se*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla \phi + |u|^{p(x)-2}u\phi\right]\, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q(x)-1}u\phi\, dx,$$

para todo $\phi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^N)$.

4.4.1 Primeiro Caso: Igualdade no Infinito

Nesta subseção, supondo q constante no infinito, mostraremos que o problema (P_λ) tem uma solução para todo $\lambda > 0$.

O próximo Lema estabelece uma importante desigualdade envolvendo o nível minimax c_∞ de I_∞.

Lema 4.6 *Seja $\{u_n\}$ uma seqüência $(PS)_d$ de I_λ tal que $u_n \rightharpoonup 0$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ e suponha que*

$$q(x) \leq s \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N \text{ e } q(x) \equiv s, \text{ para todo } |x| \geq R. \qquad (Q_1)$$

Então, $c_\infty \leq d$.

Demonstração. Afirmamos que

$$I'_\infty(u_n).(u_n) \longrightarrow 0 \text{ e } I_\infty(u_n) \longrightarrow d.$$

De fato, usando as hipóteses (H_4) e (Q_1) temos

$$\begin{aligned} I'_\lambda(u_n).(u_n) - I'_\infty(u_n).(u_n) &= \int_{|x|\leq R} \left[|\nabla u_n|^{p(x)} - |\nabla u_n|^m\right] dx \\ &+ \int_{|x|\leq R} \left[|u_n|^{p(x)} - |u_n|^m\right] dx \\ &+ \lambda \int_{|x|\leq R} \left[|\nabla u_n|^{s+1} - |u_n|^{q(x)+1}\right] dx. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Pelo Lema 4.5 cada termo do lado direito de (4.25) é $o_n(1)$, e sendo $\{u_n\}$ $(PS)_d$ e limitada, temos

$$I'_\lambda(u_n).(u_n) \leq ||I'_\lambda(u_n)||||u_n|| \longrightarrow 0,$$

portanto, usando (4.25) obtemos

$$I'_\infty(u_n).(u_n) \longrightarrow 0.$$

Analogamente, desde que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) - I_\infty(u_n) &= \int_{|x|\leq R} \left[\frac{|\nabla u_n|^{p(x)}}{p(x)} - \frac{|\nabla u_n|^m}{m}\right] dx \\ &+ \int_{|x|\leq R} \left[\frac{|u_n|^{p(x)}}{p(x)} - \frac{|u_n|^m}{m}\right] dx \\ &+ \lambda \int_{|x|\leq R} \left[\frac{|\nabla u_n|^{s+1}}{s+1} - \frac{|u_n|^{q(x)+1}}{q(x)+1}\right] dx, \end{aligned}$$

temos $I_\infty(u_n) \longrightarrow d$, pois $I_\lambda(u_n) \longrightarrow d$.

Fixemos $v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Sendo $s+1 > m$, a função $f(t) = I_\infty(tv), t > 0$, possui um único ponto de máximo. Então, fixemos $t_n > 0$ tal que

$$I_\infty(t_n u_n) = \max_{t>0} I_\infty(tu_n). \tag{4.26}$$

Afirmação: $t_n \longrightarrow 1$.

De fato, a menos de subseqüência, temos

$$||u_n|| \longrightarrow a \text{ e } ||u_n||_{s+1} \longrightarrow b \text{ em } \mathbb{R}. \tag{4.27}$$

Por outro lado, temos

$$I_\infty(u_n) = \frac{1}{m}||u_n||^m - \frac{\lambda}{s+1}||u_n||_{s+1}^{s+1} = d + o_n(1) \tag{4.28}$$

e

$$I'_\infty(u_n).(u_n) = ||u_n||^m - \lambda ||u_n||_{s+1}^{s+1} = o_n(1) \tag{4.29}$$

Usando (4.27) e passando ao limite em (4.28) e (4.29), obtemos

$$d = a^m \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{s+1} \right). \tag{4.30}$$

Segue de (4.26) que

$$\frac{d}{dt} I_\infty(t_n u_n) = 0,$$

o que implica

$$||u_n||_{s+1}^{s+1} = \frac{t_n^{m-1-s}}{\lambda} ||u_n||^m. \tag{4.31}$$

Logo, de (4.27) e (4.31) conclui-se que $\{t_n\}$ é convergente.

Agora, substituindo (4.31) em (4.28) resulta em

$$I_\infty(u_n) = ||u_n||^m \left(\frac{1}{m} - \frac{t_n^{m-1-s}}{s+1} \right). \tag{4.32}$$

Finalmente, passando ao limite em (4.32) e usando (4.27)-(4.30), obtemos $t_n \longrightarrow 1$.

Pela definição de c_∞, temos

$$\begin{aligned} c_\infty &\leq I_\infty(t_n u_n) = I_\infty(u_n) + I_\infty(t_n u_n) - I_\infty(u_n) \\ &\leq d + o_n(1) + \frac{t_n^m - 1}{m} \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u_n|^m + |u_n|^m] \, dx \\ &+ \frac{\lambda(1 - t_n^{s+1})}{s+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{s+1} \, dx. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Passando ao limite em (4.33) e tendo em vista que a seqüência $\{u_n\}$ é limitada em $W^{1,m}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $L^{s+1}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e que $t_n \longrightarrow 1$, concluímos que $c_\infty \leq d$. ■

Lema 4.7 *Se a hipótese (Q_1) é válida, então $c_\lambda < c_\infty$.*

Demonstração. Fixe uma ground state solution radialmente simétrica positiva ω do problema limite (ver [3])

$$(P_\infty) \begin{cases} -\Delta_m \omega + \omega^{m-1} = \lambda \omega^s, \ \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \omega \in W^{1,m}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Sejam $x_n = (0, 0, \ldots, n)$, $\omega_n = \omega(x - x_n)$ e t_n tais que

$$I_\lambda(t_n \omega_n) = \max_{t>0} I_\lambda(t \omega_n).$$

Afirmação: $\{t_n\}$ é limitada.

De fato, note que, sendo $c_\infty = I_\infty(\omega_n)$ e $I'_\infty(\omega_n) = 0$, temos

$$c_\infty = \frac{1}{m}\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla \omega_n^m| + \omega_n^m\right] dx - \frac{\lambda}{s+1}\int_{\mathbb{R}^N} \omega_n^{s+1}\, dx, \tag{4.34}$$

$$c_o := \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla \omega_n|^m + \omega_n^m\right] dx = \lambda\int_{\mathbb{R}^N} \omega_n^{s+1}\, dx. \tag{4.35}$$

Assim, usando (4.34) e (4.35), temos

$$c_o = \left(\frac{s+1-m}{m(s+1)}\right).$$

Pela hipótese (H_4):

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla \omega_n|^{p(x)} + \omega_n^{p(x)}\right] dx = o_n(1) + c_o, \tag{4.36}$$

onde

$$o_n(1) = \int_{|x|\leq R} \left[|\nabla \omega_n|^{p(x)} + \omega_n^{p(x)}\right] dx.$$

Uma vez que

$$\frac{d}{dt} I_\lambda(t\omega_n) = I'_\lambda(t\omega_n).\omega_n,$$

$$\frac{d}{dt} I_\lambda(t_n\omega_n) = 0,$$

obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} t_n^{p(x)-1}\left[|\nabla \omega_n|^{p(x)} + \omega_n^{p(x)}\right] dx = \lambda\int_{\mathbb{R}^N} t_n^{q(x)}\omega_n^{q(x)+1}\, dx. \tag{4.37}$$

Suponha que $t_n \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, usando (4.36) e (4.37), obtemos

$$t_n^{p^+-1}\left[o_n(1) + c_o\right] \geq \lambda t_n^{q^-}\left[o_n(1) + c_o\right]. \tag{4.38}$$

Logo, usando a hipótese $q^- > p^+ - 1$ e (4.38), concluímos que $\{t_n\}$ é limitada.

Pela definição de c_λ, temos

$$\begin{aligned}
c_\lambda &\leq I_\lambda(t_n\omega_n) = I_\infty(t_n\omega_n) + I_\lambda(t_n\omega_n) - I_\infty(t_n\omega_n)\\
&\leq c_\infty + \int_{|x|\leq R}\left[\frac{|\nabla t_n\omega_n|^{p(x)}}{p(x)} - \frac{|\nabla t_n\omega_n|^m}{m}\right] dx\\
&+ \int_{|x|\leq R}\left[\frac{|t_n\omega_n|^{p(x)}}{p(x)} - \frac{|t_n\omega_n|^m}{m}\right] dx\\
&+ \int_{|x|\leq R}\left[\frac{|t_n\omega_n|^{s+1}}{s+1} - \frac{|t_n\omega_n|^{q(x)+1}}{q(x)+1}\right] dx.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Agora, fixemos n suficientemente grande tal que

$$|\nabla t_n\omega_n| < 1, |t_n\omega_n| < 1 \text{ em } B_R(0).$$

Sendo a função $f(t) = t^{-1}a^t, 0 < a < 1$, decrescente em $(0, \infty)$, então, para tal n, os termos

$$\int_{|x|\leq R}\left[\frac{|\nabla t_n\omega_n|^{p(x)}}{p(x)} - \frac{|\nabla t_n\omega_n|^m}{m}\right] dx, \int_{|x|\leq R}\left[\frac{|t_n\omega_n|^{p(x)}}{p(x)} - \frac{|t_n\omega_n|^m}{m}\right] dx,$$

$$\int_{|x|\leq R}\left[\frac{|t_n\omega_n|^{s+1}}{s+1} - \frac{|t_n\omega_n|^{q(x)+1}}{q(x)+1}\right] dx$$

são negativos. Portanto, por (4.39), tem-se $c_\lambda < c_\infty$. ∎

Teorema 4.8 *Se a hipótese (Q_1) é válida, então o problema (P_λ) tem uma solução para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração. Para cada $\phi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^N)$, a seqüência $(PS)_{c_\lambda}$ $\{u_n\}$ satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left[|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n\nabla\phi + |u_n|^{p(x)-2}u_n\phi\right] dx = \lambda\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{q(x)-1}u_n\phi\, dx + o_n(1). \tag{4.40}$$

Pelo Lema 4.5, existe $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } W^{1,p(x)}_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

Por continuidade, temos

$$\int_{supp\,\phi}|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n\nabla\phi\, dx \longrightarrow \int_{supp\,\phi}|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\phi\, dx, \tag{4.41}$$

$$\int_{supp\,\phi}|u_n|^{p(x)-2}u_n\phi\, dx \longrightarrow \int_{supp\,\phi}|u|^{p(x)-2}u\phi\, dx, \tag{4.42}$$

$$\int_{supp\,\phi}|u_n|^{q(x)-1}u_n\phi\, dx \longrightarrow \int_{supp\,\phi}|u|^{q(x)-1}u\phi\, dx. \tag{4.43}$$

Passando ao limite (4.40) e usando (4.41) - (4.43), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left[|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\phi + |u|^{p(x)-2}u\phi\right] dx = \lambda\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{q(x)-1}u\phi\, dx,$$

para todo $\phi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^N)$, o que mostra que u é solução fraca de (P_λ). Logo, pelos Lemas (4.6) e (4.7), concluímos que $u > 0$. ∎

4.4.2 Segundo Caso: Assintoticamente Constante no Infinito

Nesta subseção, supondo q assntoticamente constante no infinito, mostraremos que o problema (P_λ) tem uma solução para todo $\lambda > \lambda_o > 0$.

O próximo resultado estabelece uma importante desigualdade envolvendo o nível minimax c_∞ do funcional I_∞.

Lema 4.9 *Seja $\{u_n\}$ uma seqüência $(PS)_c$ de I_λ tal que $u_n \rightharpoonup 0$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ e suponha que*

$$\lim_{|x|\to\infty} q(x) = s. \qquad (Q_2)$$

Então, $c_\infty \leq c$.

Demonstração. Afirmamos que

$$I'_\infty(u_n).(u_n) \longrightarrow 0 \text{ e } I_\infty(u_n) \longrightarrow c.$$

De fato, usando a hipótese (H_4) temos

$$\begin{aligned} I'_\lambda(u_n).(u_n) - I'_\infty(u_n).(u_n) &= \int_{|x|\leq R} \left[|\nabla u_n|^{p(x)} - |\nabla u_n|^m\right] dx \\ &+ \int_{|x|\leq R} \left[|u_n|^{p(x)} - |u_n|^m\right] dx \\ &+ \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left[|u_n|^{s+1} - |u_n|^{q(x)+1}\right] dx. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Pelo Lema 4.5, os dois primeiros termos do lado direito de (4.44) são $o_n(1)$. Quanto ao terceiro, note que podemos escrevê-lo como

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[|u_n|^{s+1} - |u_n|^{q(x)+1}\right] dx = o_n(1) + \int_{|x|\geq R} \left[|u_n|^{s+1} - |u_n|^{q(x)+1}\right] dx, \tag{4.45}$$

onde, pelo Lema 4.5,

$$o_n(1) = \int_{|x|\leq R} \left[|u_n|^{s+1} - |u_n|^{q(x)+1}\right] dx.$$

Fixemos $n \in \mathbb{N}$. Dado $|x| \geq R$, pelo Teorema do Valor Médio temos

$$||u_n|^{s+1} - |u_n|^{q(x)+1}| = |u_n|^\theta \log|u_n||q(x) - s|, \tag{4.46}$$

com $\theta(x,n) = \theta \in (q(x)+1, s+1)$. Agora, escolhamos $\xi > 0$ suficientemente pequeno de sorte que

$$m + \xi < \theta < m^* - \xi. \tag{4.47}$$

Note que

$$|u_n|^\theta \log|u_n| \leq |u_n|^{\theta-\xi} + |u_n|^{\theta+\xi}. \tag{4.48}$$

Logo, usando (4.46) - (4.48) e um argumento de interpolação, obtemos

$$\int_{|x|\geq R} \left[|u_n|^{s+1} - |u_n|^{q(x)+1}\right] dx \leq C \int_{|x|\geq R} \left[|u_n|^m + |u_n|^{m^*}\right] |q(x) - s| dx.$$

Usando agora a condição (Q_2), temos

$$\int_{|x|\geq R} \left[|u_n|^{s+1} - |u_n|^{q(x)+1}\right] dx \leq o_R(1) \int_{|x|\geq R} \left[|u_n|^m + |u_n|^{m^*}\right] dx. \tag{4.49}$$

Dado $\epsilon > 0$, podemos escolher $R > 0$ tal que

$$o_R(1) \int_{|x|\geq R} \left[|u_n|^m + |u_n|^{m^*}\right] dx < \epsilon/2. \tag{4.50}$$

Logo, por (4.45) - (4.50), temos

$$|I'_\lambda(u_n).(u_n) - I'_\infty(u_n).(u_n)| < o_n(1) + \epsilon/2,$$

portanto $I'_\infty(u_n).(u_n) \longrightarrow 0$. De maneira análoga, mostra-se que $I_\infty(u_n) \longrightarrow c$.

Fixe t_n tal que

$$I_\infty(t_n u_n) = \max_{t>0} I_\infty(t u_n).$$

Como foi mostrado no Lema 4.6, $t_n \longrightarrow 1$. Assim, pela definição de c_∞, temos

$$\begin{aligned} c_\infty &\leq I_\infty(t_n u_n) = I_\infty(u_n) + I_\infty(t_n u_n) - I_\infty(u_n) \\ &\leq c + o_n(1) + \frac{t_n^m - 1}{m} \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u_n|^m + |u_n|^m\right] dx \\ &+ \frac{\lambda(1 - t_n^{s+1})}{s+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{s+1} dx. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Passando ao limite em (4.51) e tendo em vista que a seqüência $\{u_n\}$ é limitada em $W^{1,m}(\mathbb{R}^N)$, $L^{s+1}(\mathbb{R}^N)$ e que $t_n \longrightarrow 1$, concluímos que $c_\infty \leq c$. ■

Lema 4.10 *Suponha que a condição (Q_2) é válida e que $q(x) \leq s$, q.s. em $\mathbb{R}^N$. Então, existe $\lambda_o > 0$ tal que $c_\lambda < c_\infty$, para $\lambda > \lambda_o$.*

Demonstração. Seja v uma ground state solution radialmente simétrica positiva do seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_m v + v^{m-1} = v^s, \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ v \in W^{1,m}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Assim, após alguns cálculos, constata-se que a função $\omega = \lambda^{(m-1)-s}v$ é ground state solution do problema

$$(P_\infty)\begin{cases} -\Delta_m\omega + \omega^{m-1} = \lambda\omega^s, \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ \omega \in W^{1,m}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Sendo $s > m-1$, podemos escolher $\lambda_o > 0$ suficientemente grande tal que

$$|\omega|_\infty, |\nabla\omega|_\infty < 1.$$

Fixemos t_n tal que

$$I_\lambda(t_n\omega_n) = \max_{t>0} I_\lambda(t\omega_n).$$

Usando a definição de c_λ e a hipótese (H_4) , temos que

$$\begin{aligned} c_\lambda &\leq I_\lambda(t_n\omega_n) = I_\infty(\omega_n) + I_\lambda(t_n\omega_n) - I_\infty(\omega_n) \\ &\leq c_\infty \int_{|x|\leq R}\left[\frac{|\nabla t_n\omega_n|^{p(x)}}{p(x)} - |t_n\nabla\omega_n|^m m\right]dx \\ &+ \int_{|x|\leq R}\left[\frac{|t_n\omega_n|^{p(x)}}{p(x)} - \frac{|t_n\omega_n|^m}{m}\right]dx \\ &+ \lambda\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{|t_n\omega_n|^{s+1}}{s+1} - \frac{|t_n\omega_n|^{q(x)+1}}{q(x)+1}\right]dx. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Fixe n suficientemente grande tal que

$$|t_n\omega_n|, |\nabla t_n\omega_n| < 1 \text{ em } B_R(0).$$

Agora, observe que, sendo a função $f(t) = t^{-1}a^t, 0 < a < 1$, decrescente em $(0, +\infty)$, temos que, para tal n, os termos

$$\int_{|x|\leq R}\left[\frac{|\nabla t_n\omega_n|^{p(x)}}{p(x)} - \frac{|\nabla t_n\omega_n|^m}{m}\right]dx, \int_{|x|\leq R}\left[\frac{|t_n\omega_n|^{p(x)}}{p(x)} - \frac{|t_n\omega_n|^m}{m}\right]dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{|t_n\omega_n|^{s+1}}{s+1} - \frac{|t_n\omega_n|^{q(x)+1}}{q(x)+1}\right]dx$$

são negativos. Portanto, por (4.52), tem-se $c_\lambda < c_\infty$. ■

Teorema 4.11 *Suponha que a condição (Q_2) é válida e que $q(x) \leq s$, q.s. em $\mathbb{R}^N$. Então, o problema (P_λ) tem uma solução para $\lambda > \lambda_o$.*

Demonstração. Para cada $\phi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^N)$, a seqüência $(PS)_{c_\lambda}$ $\{u_n\}$ satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \nabla\phi + |u_n|^{p(x)-2}u_n\phi\right]\, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q(x)-1}u_n\phi\, dx + o_n(1). \quad (4.53)$$

Pelo Lema 4.5, existe $u \in W^{1,\,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } W^{1,\,p(x)}_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

Por continuidade, temos

$$\int_{supp\,\phi} |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n\nabla\phi\, dx \longrightarrow \int_{supp\,\phi} |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\phi\, dx, \quad (4.54)$$

$$\int_{supp\,\phi} |u_n|^{p(x)-2}u_n\phi\, dx \longrightarrow \int_{supp\,\phi} |u|^{p(x)-2}u\phi\, dx, \quad (4.55)$$

$$\int_{supp\,\phi} |u_n|^{q(x)-1}u_n\phi\, dx \longrightarrow \int_{supp\,\phi} |u|^{q(x)-1}u\phi\, dx. \quad (4.56)$$

Passando ao limite (4.53) e usando (4.54) - (4.56), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\phi + |u|^{p(x)-2}u\phi\right]\, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q(x)-1}u\phi\, dx,$$

para todo $\phi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^N)$, o que mostra que u é solução fraca de (P_λ). Logo, se $\lambda > \lambda_o$, então pelos Lemas (4.9) e (4.10), concluímos que $u > 0$. ■

Apêndice A

Desigualdades

Neste Apêndice, demonstraremos duas desigualdades que foram utilizadas no Capítulo 3 (Seção 3.1). Adaptamos a demonstração de [20] (pág. 78).

Lema A.1 *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$. Então*

$$\left\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \right\rangle \geq \begin{cases} \dfrac{2^{3-p}}{p}|x-y|^p, & se\ p \geq 2 \\ (p-1)\dfrac{|x-y|^2}{(|x|^p + |y|^p)^{2-p}}, & se\ 1 < p < 2, \end{cases}$$

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$. Podemos supor $|x| = 1$ e $|y| \leq 1$, pois do contrário, supondo $|x| \geq |y|$, consideraríamos

$$\widetilde{x} = \frac{x}{|x|} \text{ e } \widetilde{y} = \frac{y}{|x|}.$$

Escolhendo uma base conveniente em $\mathbb{R}^N$, podemos supor

$$x = (1, 0, \ldots, 0) \text{ e } y = (y_1, y_2, 0, \ldots, 0).$$

i) $1 < p < 2$. Neste caso, a desigualdade requerida é equivalente à

$$g(y_1, y_2) = \left\{ 1 - y_1 - \frac{y_1}{|y|^{2-p}} + \frac{y_1^2 + y_2^2}{|y|^{2-p}} \right\} \frac{(1 + |y|)^{2-p}}{(1 - y_1)^2 + y_2^2} \geq C$$

ou

$$g(y_1, y_2) = \left\{ \left(1 - \frac{y_1}{|y|^{2-p}} \right)(1 - y_1) + \frac{y_2^2}{|y|^{2-p}} \right\} \frac{(1 + |y|)^{2-p}}{(1 - y_1)^2 + y_2^2} \geq C.$$

Se $0 \le y_1 \le 1$, então

$$\begin{aligned} 1-\frac{y_1}{|y|^{2-p}} &\ge 1-\frac{y_1}{|y_1|^{2-p}}=(1-y_1)(1+\frac{1}{|y_1|^{2-p}})+y_1-\frac{1}{|y_1|^{2-p}} \\ &\ge (1-y_1)p+y_1-1=(p-1)(1-y_1). \end{aligned}$$

Se $y_1 < 0$, então

$$1-\frac{y_1}{|y|^{2-p}} \ge 1-y_1 \ge (p-1)(1-y_1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} g(y_1,y_2) &\ge \left\{(1-y_1)^2(p-1)+\frac{y_2^2}{|y|^{2-p}}\right\}\frac{(1+|y|)^{2-p}}{(1-y_1)^2+y_2^2} \\ &\ge \left\{(1-y_1)^2(p-1)+(p-1)y_2^2\right\}\frac{1}{(1-y_1)^2+y_2^2} \\ &= (p-1)\{(1-y_1)^2+y_2^2\}\frac{1}{(1-y_1)^2+y_2^2} \\ &= (p-1). \end{aligned}$$

ii) $p \ge 2$. Substituindo $t=|y|$ e $s=\dfrac{\langle x,y\rangle}{|y|}$ na expressão

$$\frac{\langle |x|^{p-2}x-|y|^{p-2}y, x-y\rangle}{|x-y|^p},$$

temos

$$h(t,s)=\frac{1-(t+t^{p-1})s+t^p}{(1-2ts+t^2)^{\frac{p}{2}}}. \tag{A.1}$$

Mostraremos que a função h é limitada inferiormente.

Fixando t, temos que se

$$\frac{\partial h}{\partial s}=0,$$

então

$$1-(t+t^{p-1})s+t^p=\frac{1}{p}(t^{p-2}+1)(1-2ts+t^2). \tag{A.2}$$

Logo, se s_o é um ponto crítico de h, substituindo (A.2) em (A.1) temos

$$\begin{aligned} h(t,s_o) &= \frac{t^{p-2}+1}{p(1-2ts_o+t^2)^{\frac{p-2}{2}}} \\ &\ge \frac{t^{p-2}+1}{p(t+1)^{p-2}} \\ &\ge \frac{1}{p}\min_{0\le t\le 1}\frac{t^{p-2}+1}{(t+1)^{p-2}} \\ &= \frac{2^{3-p}}{p}. \end{aligned}$$

■

Apêndice B

O Teorema de Minty-Browder para Operadores Contínuos

Neste apêndice demonstraremos o Teorema de Minty-Browder, um dos resultados básicos na teoria dos operadores monótonos. Faremos a demonstração para operadores contínuos, embora tal teorema seja válido para operadores mais gerais (ver [13]). Para uma outra demonstração sugerimos a referência [6] (pág. 117).

No que segue, X é um espaço de Banach reflexivo e X^*, seu dual.

Definição B.1 *Um operador $T : X \longrightarrow X^*$ é dito ser monótono se*

$$\langle T(x) - T(y), x - y \rangle \geq 0, \text{ para todos } x, y \in X.$$

Definição B.2 *Um operador $T : X \longrightarrow X^*$ é dito ser coercivo se*

$$\lim_{||u|| \to \infty} \frac{\langle T(x), x \rangle}{||x||} = \infty.$$

Teorema B.1 (Minty-Browder) *Sejam X um espaço de Banach reflexivo e $T : X \longrightarrow X^*$ um operador contínuo monótono e coercivo. Então, T é sobrejetivo.*

Demonstração. Dividiremos a demonstração em dois casos:

(a) X tem dimensão finita;

(b) X tem dimensão infinita.

(a). Suponha inicialmente que $X = X^* = \mathbb{R}^N$. Basta mostrar que $0 \in Im(T)$, pois se

$y \in \mathbb{R}^N, y \neq 0$, o operador translação $T_y = T - y$ satisfaz às hipóteses do Teorema e $0 \in Im(T_y)$ se, e somente se, $y \in Im(T)$. Sendo T coercivo existe $r > 0$ tal que

$$\langle T(x), x\rangle > 0, \text{ para } |x| = r, \tag{B.1}$$

onde $|\cdot|$ é a norma em $\mathbb{R}^N$.

Afirmação: o operador

$$S = I_d - T : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

tem um ponto fixo $x_o \in B(0, r)$, o que implica $T(x_o) = 0$. Para demonstrar a afirmação vamos usar o seguinte corolário do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer:
"Uma aplicação contínua $S : B(0, r) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ tem um ponto fixo se

$$S(x) \neq \lambda x, \text{ para } |x| = r \text{ e } \lambda \geq 1."$$

De fato, suponha que existem $x_o \in B(0, r)$ e $\lambda_o \geq 1$ tais que

$$S(x_o) = \lambda_o x_o.$$

Logo, usando $(B.1)$ temos

$$(x_o, x_o) \leq (\lambda_o x_o, x_o) = (S(x_o), x_o) = (x_o, x_o) - (T(x_o), x_o) < (x_o, x_o),$$

uma contradição. Isto prova a afirmação.

Se $X \neq \mathbb{R}^N$, então existe um isomorfismo

$$i : \mathbb{R}^N \longrightarrow X$$

tal que

$$C_1|x| \leq ||i(x)|| \leq C_2|x|, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N. \tag{B.2}$$

Considere o operador

$$L = i^* \circ T \circ i : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N,$$

onde i^* é o adjunto de i. Note que o operador L é

- contínuo, por ser composição de aplicações contínuas.
- coercivo, pois usando a coercividade de T e (B.2) tem-se

$$\frac{\langle L(x), x\rangle}{|x|} = \frac{\langle (i^* \circ T \circ i)(x), x\rangle}{|x|} = \frac{\langle T(i(x)), i(x)\rangle}{|x|} \longrightarrow +\infty,$$

quando $|x| \longrightarrow \infty$.

• monótono, pois usando a monotonicidade de T temos

$$\begin{aligned}\langle L(x) - L(y), x - y\rangle &= \langle (i^* \circ T \circ i)(x) - (i^* \circ T \circ i)(y), x - y\rangle \\ &= \langle T(i(x)) - T(i(y)), i(x) - i(y)\rangle \geq 0.\end{aligned}$$

Logo, L é sobrejetivo, e portanto T também o será. Mostramos, assim, o item (a).

(b). Seja $\mathcal{F}$ a coleção de todos os subespaços F de dimensão finita de X. Sejam $i_F : F \longrightarrow X$ o operador de inclusão e $i^* : X^* \longrightarrow F^*$, seu adjunto. Considere o operador

$$T_F = i^* \circ T \circ i : F \longrightarrow F^*.$$

Observe que T_F satisfaz todas as hipóteses do Teorema C.1. Logo, pelo item (a), existe $x_F \in F$ tal que

$$T_F(x_F) = 0. \tag{B.3}$$

Usando a coercividade de T e (B.3), temos que existe uma constante $M > 0$ tal

$$||x_F|| \leq M, \text{ para todo } F \in \mathcal{F}. \tag{B.4}$$

Agora, para cada $F_o \in \mathcal{F}$, defina o conjunto

$$V_{F_o} = \text{fecho fraco de } \bigcup_{F \supset F_o} \{x_F\}.$$

Sendo X reflexivo, então por $(B.4)$ e pelo Teorema III.16 de [5], temos que a bola $\overline{B(0, M)}$ é fracamente compacta. Logo, V_{F_o} é fracamente compacto.

Agora, afirmamos que a família $\{V_{F_o} : F_o \in \mathcal{F}\}$ tem a propriedade da interseção finita. De fato, sejam

$$F_1, F_2, \ldots, F_p \in \mathcal{F},$$

e considere o subespaço

$$F_o = span\{F_1, F_2, \ldots, F_p\}.$$

Assim, $F_o \in \mathcal{F}$. Seja $x_{F_o} \in F_o$ tal que $T_{F_o}(x_{F_o}) = 0$. Desde que

$$F_j \subset F_o, j = 1, \ldots, p,$$

então

$$x_{F_o} \in V_{F_j}, j = 1, \ldots, p.$$

Donde,

$$x_{F_o} \in \bigcap_{i=j}^{p} V_{F_j}.$$

Logo, sendo $\{V_{F_o} : F_o \in \mathcal{F}\}$ uma família de compactos com a propriedade da interseção finita, existe $x_o \in X$ tal que

$$x_o \in \bigcap_{F_o \in \mathcal{F}} V_{F_o}.$$

Mostraremos que $T(x_o) = 0$.

De fato, dado $y \in X$, seja $F_o \in \mathcal{F}$ tal que $y \in F_o$. Assim, para $F \supset F_o$, temos que

$$\langle T(y) - T(x_F), y - x_F \rangle \geq 0.$$

Daí, por (B.3) segue que

$$\langle T(y), y - x_F \rangle \geq 0, \text{ para } F_o \subset F.$$

Desde que $x_o \in V_{F_o}$, existe $\{F_n\} \in \mathcal{F}$ tal que

$$F_o \subset F_n \text{ e } x_{F_n} \rightharpoonup x_o.$$

Logo,

$$\langle T(y), y - x_o \rangle \geq 0. \tag{B.5}$$

Fazendo $y = x_o + tz$, $z \in X$ e $t \in \mathbb{R}$, em (B.5) temos

$$\langle T(x_o + tz), z \rangle \geq 0, \text{ se } t \geq 0 \tag{B.6}$$

e

$$\langle T(x_o + tz), z \rangle \leq 0, \text{ se } t \leq 0. \tag{B.7}$$

Assim, se $t \longrightarrow 0^+$, segue de (B.6) que

$$\langle T(x_o), z \rangle \geq 0, \text{ para todo } z \in X. \tag{B.8}$$

Do mesmo modo, se $t \longrightarrow 0^-$, então usando (B.7) obtemos

$$\langle T(x_o), z \rangle \leq 0, \text{ para todo } z \in X. \tag{B.9}$$

Portanto, usando (B.8) e (B.9), concluímos que $T(x_o) = 0$. ■

Apêndice C

Teorema do Passo da Montanha

Neste Apêndice, através do Princípio Variacional de Ekeland, demonstraremos o Teorema do Passo da Montanha, devido a Ambrosetti-Rabinowitz. Este Teorema é um dos mais importantes da Análise Funcional não Linear, sendo de grande utilidade quando se estuda certos tipos de problemas elípticos. Seguimos, com poucas alterações, a demonstração encontrada em [17]. Para uma outra demonstração, usando lema de Deformação em vez do Princípio Variacional de Ekeland, sugerimos as referências [21] e [25].

Lembramos que, se X é um espaço topológico, um funcional $\Phi : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ é dito ser semicontínuo inferiormente (s.c.i.) se o conjunto

$$[\Phi \leq \lambda] = \{x \in X : \Phi(x) \leq \lambda\}$$

for fechado, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

O próximo resultado é conhecido como o **Princípio Variacional de Ekeland.**

Teorema C.1 *Sejam (M, d) um espaço métrico e $\varphi : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ um funcional s.c.i., limitado inferiormente e tal que $\Phi \not\equiv +\infty$. Então, dados $\epsilon > 0$ e $u \in M$ tais que*

$$\Phi(u) \leq \inf_M \Phi + \epsilon,$$

existe $v \in M$ com

$$\Phi(v) \leq \Phi(u) \text{ e } d(u, v) \leq 1. \tag{C.1}$$

Além disso, para cada $w \in M$, $w \neq v$, tem-se

$$\Phi(w) > \Phi(v) - \epsilon d(v, w). \tag{C.2}$$

Demonstração. Verifica-se facilmente que a seguinte relação

$$w \leq v \Leftrightarrow \Phi(w) + \epsilon d(v, w) \leq \Phi(v) \tag{C.3}$$

define uma ordem em M.

Vamos construir indutivamente uma seqüência em $\{u_n\}$ em M da seguinte maneira: começamos com $u_o = u$ e, supondo conhecido u_n, definimos o conjunto

$$S_n = \{w \in M : w \leq u_n\}.$$

Agora, escolhemos u_{n+1} tal que

$$\Phi(u_n) \leq \inf_{S_n} \Phi + \frac{1}{n+1}.$$

Observe que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

- $S_{n+1} \subset S_n$.

De fato, se $w \in S_{n+1}$, então $w \leq u_{n+1} \leq u_n$.

- S_n é fechado.

De fato, seja $\{w_j\} \subset S_n$ tal que

$$w_j \longrightarrow w \in M.$$

Desde que $w_j \leq u_n$, temos

$$\Phi(w_j) \leq \Phi(u_n) - \epsilon d(u_n, w_j). \tag{C.4}$$

Sendo Φ s.c.i. e d contínua, os conjuntos

$$A = \{w_j \in S_n : \Phi(w_j) \leq 2\Phi(u_n)\},$$

$$B = \{w_j \in S_n : \Phi(w_j) + 2\epsilon d(u_n, w_j) \leq 0\}$$

são fechados. Logo, o conjunto

$$A \cup B = \{w_j \in S_n : \Phi(w_j) \leq \Phi(u_n) - \epsilon d(u_n, w_j)\}$$

é fechado. Passando ao limite de $j \longrightarrow +\infty$ em (C.4) obtemos

$$\Phi(w) \leq \Phi(u_n) - \epsilon d(u_n, w),$$

o que implica $w \leq u_n$, portanto $w \in S_n$.

Seja $w \in S_{n+1}$. Então, $w \leq u_{n+1} \leq u_n$, e daí

$$\epsilon d(w,u_n) \leq \phi(u_n) - \Phi(w) \leq \inf_{S_n} \Phi + \frac{1}{n+1} - \inf_{S_n} \Phi = \frac{1}{n}.$$

Logo, se $v \in S_{n+1}$, então

$$d(w,v) \leq d(w,u_n) - d(v,u_n) \leq \frac{2}{n\epsilon} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Portanto,

$$diam\, S_{n+1} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty,$$

i.e.,

$$diam\, S_n \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty. \tag{C.5}$$

Desde que $(S_n) \subset M$ é uma seqüência decrescente de conjuntos fechados verificando (C.5) e M é completo, temos

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n = \{v\}, \tag{C.6}$$

para algum $v \in M$. Em particular, $v \in S_o$, i.e., $v \leq u_o = u$. Logo,

$$\Phi(v) \leq \Phi(u) - \epsilon d(v,w) \leq \Phi(u),$$

$$d(u,v) \leq \epsilon^{-1}(\Phi(u) - \Phi(u)) \leq \epsilon^{-1}(\inf_M \Phi + \epsilon - \inf_M \Phi) = 1,$$

com isto obtemos (C.1).

Para obter (C.2), por (C.3) basta mostrar que $w \leq v$ implica $w = v$. Então, se $w \leq v$, temos

$$w \leq u_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

pois $v \in S_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, por (C.6), concluímos que $w = v$. ■

Observação C.1 *Se usarmos a métrica λd, com $\lambda > 0$, as conlusões (C.1) e (C.2) podem ser substituídas, respectivamente, por*

$$d(u,v) \leq 1/\lambda,$$

$$\Phi(w) > \Phi(v) - \epsilon\lambda d(v,w). \tag{C.7}$$

Teorema C.2 *Seja X um espaço de Banach, $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional diferenciável e limitado inferiormente. Então, para cada $\epsilon > 0$ e cada $u \in X$ tais que*

$$\varphi(u) \leq \inf_X \varphi + \epsilon, \tag{C.8}$$

existe $v \in X$ tal que

$$\varphi(v) \leq \varphi(u), \tag{C.9}$$

$$||u - v|| \leq \epsilon^{1/2}, \tag{C.10}$$

$$||\varphi'(v)|| \leq \epsilon^{1/2}. \tag{C.11}$$

Demonstração. Usando a Observação C.1 com $\lambda = \epsilon^{-1/2}$ e fazendo $X = M$ e $\varphi = \Phi$ no Teorema C.1, temos que dados $\epsilon > 0$ e $u \in X$ satisfazendo (C.8), existe $v \in X$ tal que valem (C.9) e (C.10), e além disso tem-se

$$\varphi(w) > \varphi(v) - \epsilon^{1/2}||v - w||, \tag{C.12}$$

para todo $w \in X$, $w \neq v$.

Fazendo $w = v + th$, para $t \neq 0$ e $h \in X$, com ||h||=1, por (C.12) temos

$$\frac{\varphi(v + th) - \varphi(v)}{|t|} \geq -\epsilon^{1/2}. \tag{C.13}$$

Por (C.13) temos

- se $t \to 0^+$, então

$$\left\langle \varphi'_+(v), h \right\rangle \geq -\epsilon^{1/2}. \tag{C.14}$$

- se $t \to 0^-$, então

$$\left\langle \varphi'_-(v), h \right\rangle \leq \epsilon^{1/2}. \tag{C.15}$$

De (C.14) e (C.15), obtemos

$$|\left\langle \varphi'_-(v), h \right\rangle| \leq \epsilon^{1/2}, \text{ para } h \in X, \text{ com } ||h|| = 1,$$

portanto,

$$||\varphi'(v)|| \leq \epsilon^{1/2},$$

o que mostra (C.11). ■

Teorema C.3 *Sejam X um espaço de Banach, $u_o, u_1 \in X$ e $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Seja o espaço métrico completo*

$$\Gamma = \{g \in C([0,1], X) : g(0) = u_o \text{ e } g(1) = u_1\}$$

munido da norma usual d. Defina

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \varphi(g(t)) \text{ e } c_1 = \max(\varphi(u_o), \varphi(u_1)).$$

Se $c > c_1$, então dados $\epsilon > 0$ e $f \in \Gamma$ tais que

$$\max_{t \in [0,1]} \varphi(f(t)) \leq c + \epsilon, \tag{C.16}$$

existe $v \in X$ tal que

$$c - \epsilon \leq \varphi(v) \leq \max_{t \in [0,1]} \varphi(f(t)), \tag{C.17}$$

$$dist(v, f([0,1])) \leq \epsilon^{1/2}, \tag{C.18}$$

$$||\varphi'(v)|| \leq \epsilon^{1/2}. \tag{C.19}$$

Demonstração. Se $c > c_1$, então podemos supor $0 < \epsilon < c - c_1$. Seja f satisfazendo (C.16). Defina a função $\Phi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Phi(g) = \max_{t \in [0,1]} \varphi(g(t)).$$

Então,

$$c = \inf_{\Gamma} \Phi > c_1.$$

Segue da continuidade de φ no compacto $g([0,1])$ que Φ é contínua. Observe que Φ verifica às hipóteses do Teorema C.1. Logo, por (C.16), existe $h \in \Gamma$ tal que

$$\Phi(h) \leq \Phi(f) \leq c + \epsilon, \tag{C.20}$$

$$\max_{t \in [0,1]} |h(t) - f(t)| \leq \epsilon^{1/2}, \tag{C.21}$$

$$\Phi(g) > \Phi(h) - \epsilon^{1/2} d(h, g), \text{ para } g \in \Gamma,\ g \neq h. \tag{C.22}$$

Note que de (C.21) segue (C.18). Assim, para concluir a demonstração é suficiente mostrar que existe $t_o \in [0,1]$ tal que

$$c - \epsilon \leq \varphi(h(t_o)), \tag{C.23}$$

$$||\varphi'(h(t_o))|| \leq \epsilon^{1/2},$$

ou, em particular,

$$\langle \varphi'(h(t_o)), v\rangle \geq -\epsilon^{1/2}, \text{ para } v \in X, \ ||v|| = 1. \tag{C.24}$$

Observe que (C.23) é satisfeita. Suponha, por absurdo, que para cada $t \in I$, onde

$$I = \{t \in [0,1] : c - \epsilon \leq \varphi(h(t))\},$$

existe $v_t \in X, ||v_t|| = 1$, tal que

$$\langle \varphi'(h(t)), v_t\rangle < -\epsilon^{1/2}.$$

Logo, pela continuidade de φ', para cada $t \in I$, existem $\delta_t > 0$, $v_t \in X, ||v_t|| = 1$ e um intervalo aberto $t \in I_t \subset [0,1]$ tal que

$$\langle \varphi'(h(s) + u), v_t\rangle < -\epsilon^{1/2}, \text{ para } s \in I_t \text{ e } u \in X, \ ||u|| \leq \delta_t. \tag{C.25}$$

Sendo I compacto, a cobertura aberta

$$\bigcup_{t\in I} I_t$$

de I possui uma subcobertura finita $I_{t_1}, \ldots, I_{t_k}$. Defina a função $\psi_j : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ por

$$\psi_j(t) = \begin{cases} \dfrac{dist(t, I_{t_j}^c)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} dist(t, I_{t_i}^c)}, & \text{se } t \in \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} I_{t_i}, \\ 0, & \text{se } t \notin \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} I_{t_i}. \end{cases}$$

Seja $\delta = \min\{\delta_{t_1}, \ldots, \delta_{t_k}\}$. Pelo Lema de Urysohn, podemos construir uma função contínua $\psi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ tal que

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } c \leq \varphi(h(t)), \\ 0, & \text{se } \varphi(h(t)) \leq c - \epsilon. \end{cases}$$

Seja $g \in C([0,1], X)$ tal que

$$g(t) = h(t) + \delta\psi(t) \sum_{j=1}^{k} \psi_j(t) v_{t_j}. \tag{C.26}$$

Se $h \in \Gamma$, então

$$\varphi(h(t)) \leq c_1 < c - \epsilon, \text{ para } t \in \{0,1\}.$$

Daí, pela definição de ψ, temos

$$\psi(t) = 0, \text{ para } t \in \{0,1\}. \tag{C.27}$$

Logo, de (C.26) e (C.27), temos que $g \in \Gamma$.

Usando (C.25) e o Teorema do Valor Médio, para cada $t \in I$, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}
\varphi(g(t)) - \varphi(h(t)) &= \left\langle \varphi'(h(t) + \lambda\delta\psi(t)\sum_{j=1}^{k}\psi_j(t)v_{t_j}), \delta\psi(t)\sum_{j=1}^{k}\psi_j(t)v_{t_j} \right\rangle \\
&= \delta\psi(t)\sum_{j=1}^{k}\psi_j(t)\left\langle \varphi'(h(t) + \lambda\delta\psi(t)\sum_{j=1}^{k}\psi_j(t)v_{t_j}), v_{t_j} \right\rangle \\
&\leq -\epsilon^{1/2}\delta\psi(t).
\end{aligned} \tag{C.28}$$

Se $t \notin I$, então

$$\varphi(h(t)) < c - \epsilon,$$

daí $\psi(t) = 0$. Logo, por (C.26), tem-se

$$\varphi(g(t)) = \varphi(h(t)), \text{ para } t \notin I. \tag{C.29}$$

Seja $\bar{t} \in [0,1]$ tal que

$$\Phi(g) = \varphi(g(\bar{t})).$$

Assim, por (C.28) e (C.29), temos

$$\varphi(h(\bar{t})) \geq \varphi(g(\bar{t})) \geq c > c - \epsilon,$$

de onde segue que

$$\bar{t} \in I \text{ e } \psi(\bar{t}) = 1.$$

Por (C.28),

$$\Phi(g) + \epsilon^{1/2}\delta \leq \varphi(g(\bar{t})) + \epsilon^{1/2} \leq \varphi(h(\bar{t})) \leq \Phi(h),$$

logo $g \neq h$. Pela definição de g, temos

$$d(g,h) \leq \delta,$$

logo

$$\Phi(g) + \epsilon^{1/2} d(g,h) \leq \Phi(h),$$

que contradiz (C.22), e completa a demonstração. ■

Corolário C.4 *Com as hipóteses e notações do Teorema C.3, suponha que existe $S \subset X$ tal que*

$$g([0,1]) \cap S \neq \emptyset, \ \textit{para } g \in \Gamma \tag{C.30}$$

e

$$c_o = \inf_{g \in S} \varphi.$$

Se

$$c_1 < c_o,$$

então $c > c_1$.

Demonstração. Por (C.30), temos

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \varphi(g(t)) \geq c_o > c_1.$$

■

Antes de demonstrarmos o Teorema do Passo da Montanha, estabeleçamos a seguinte

Definição C.1 *Sejam X um espaço de Banach, $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que φ satisfaz à condição de Palais- Smale no nível c, $(PS)_c$, se toda seqüência $\{u_n\} \subset X$ tal que*

$$\varphi(u_n) \longrightarrow c \ \textit{e} \ \varphi'(u_n) \longrightarrow 0$$

possui uma subseqüência convergente.

Teorema C.5 (Passo da Montanha) *Com as hipóteses e notações do Teorema C.3 e seu Corolário C.4, suponha que existem $u_o, u_1 \in X$ e uma vizinhança aberta U de u_o tal que $u_1 \in X \setminus U$ e*

$$\inf_{\partial U} \varphi > c_1.$$

Se φ satisfaz à condição $(PS)_c$, então c é um valor crítico de φ e $c > c_1$.

Demonstração. Afirmamos que

$$g([0,1]) \cap U \neq \emptyset, \text{ para } g \in \Gamma.$$

De fato, sem perder a generalidade podemos supor que $U = B(u_o, r)$, bola aberta de centro u_o e raio r. Fixe $g \in \Gamma$ e defina a função contínua

$$\begin{aligned} h: \quad [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \quad &\longmapsto h(t) = ||g(t)||. \end{aligned}$$

Note que

$$h(0) = ||g(0)|| = ||u_o|| < r \text{ e } h(1) = ||g(1)|| = ||u_1|| \geq r.$$

Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_o \in [0,1]$ tal que

$$h(t_o) = ||g(t_o)|| = r,$$

e portanto

$$g([0,1]) \cap U \neq \emptyset, \text{ para } g \in \Gamma.$$

Além disso, Pelo Corolário C.4, tem-se $c > c_1$. Pelo Teorema C.3, existe uma seqüência $\{u_n\} \subset X$ tal que

$$\varphi(u_n) \longrightarrow c, \tag{C.31}$$

$$||\varphi'(u_n)|| \longrightarrow 0. \tag{C.32}$$

Desde que φ satisfaz à condição $(PS)_c$, existem uma subseqüência $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$ e $u \in X$ tais que

$$u_{n_j} \longrightarrow u. \tag{C.33}$$

Sendo φ contínuo, temos por (C.31) e (C.33) que

$$\varphi(u_{n_j}) \longrightarrow \varphi(u) = c. \tag{C.34}$$

Pela continuidade de φ', (C.32) e (C.33) segue que

$$\varphi'(u_{n_j}) \longrightarrow \varphi'(u) = 0. \tag{C.35}$$

Portanto, por (C.34) e (C.35), c é um valor crítico de φ. ■

Observação C.2 *No Capítulo 3, usamos o Teorema do Passo da Montanha com a condição (PS). No entanto, se um funcional* $\varphi \in C^1$ *satisfaz à condição (PS), então* φ *satisfaz à condição* $(PS)_c$*, para todo* $c \in \mathbb{R}$*. A recíproca, porém, não é verdadeira (ver [17], pág. 81).*

Apêndice D

Resultados Utilizados na Dissertação

Neste Apêndice, enunciamos alguns resultados importantes utilizados ao longo da dissertação.

No que segue, denotaremos

• $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida,

• $M^+=$ conjunto das funções mensuráveis não-negativas definidas em X e assumindo valores em $\overline{\mathbb{R}}$,

• $L = L(X, \mathcal{X}, \mu)=$ espaço das funções reais integráveis.

Teorema D.1 (Teorema da Convergência Monótona) *Se uma seqüência não-decrescente $\{f_n\} \subset M^+$ converge em quase todo ponto para uma função f, então*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Veja [4], Teorema 4.6 e Corolário 4.12.

Teorema D.2 (Teorema da Convergência Dominada) *Seja uma seqüência $\{f_n\} \subset L$ que converge em quase todo ponto para uma função real mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g \ \forall n$, então $f \in L$ e*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Veja [4], Teorema 5.6.

Lema D.3 (du Bois-Reymond) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto. Se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ é tal que*

$$\int fu = 0, \forall u \in C_o^\infty(\Omega),$$

então $f = 0$, q.s. em Ω.

Demonstração. Veja [4], Lema IV.2 e [18], Proposição 1.31.

Teorema D.4 (Sobolev-Gagliardo-Nirenberg) *Seja $1 \leq p < N$, então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N), \text{ onde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

e existe uma constante $C = C(p, N)$ tal que

$$||u||_{L^*} \leq C||\nabla u||_{L^p}, \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

Demonstração. Veja [5], Teorema IX.9.

Corolário D.5 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe C^1. Se $1 \leq p < N$, então*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [p, p^*],$$

com imersão contínua.

Demonstração. Veja [5], Corolário IX.14.

Teorema D.6 (Rellich-Kondrachov) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe C^1. Se $p < N$, então*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*), \text{ onde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

com imersão compacta.

Demonstração. Veja [5], Teorema IX.16.

Teorema D.7 *Sejam X um espaço de Banach reflexivo e uma seqüência $(x_n) \subset X$ limitada. Então, existem uma subseqüência (x_{n_k}) e $x \in X$ tais que $x_{n_k} \rightharpoonup x$.*

Demonstração. Veja [5], Teorema III.27.

Teorema D.8 *Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear compacto. Se $x_n \rightharpoonup x$ em X, então $Tx_n \longrightarrow Tx$ em Y.*

Demonstração. Veja [16], Teorema 8.1-7.

Teorema D.9 *Sejam X um espaço vetotial normado e uma seqüência $(x_n) \subset X$. Tem-se*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ *se, e somente se,* $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle, \forall f \in X^*$;

(ii) *se* $x_n \to x$, *então* $x_n \rightharpoonup x$;

(iii) *se* $x_n \rightharpoonup x$, *então* $||x_n||$ *é limitada e* $||x|| \leq \liminf ||x_n||$;

(iv) *se* $x_n \rightharpoonup x$ *e* $f_n \to f$ *em* X^*, *então* $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Demonstração. Veja [5], Proposição III.5.

Bibliografia

[1] Adams, R.A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] Alves, C.O. & Souto, M.A.S, *Existence of solutions for a class of problems in $\mathbb{R}^N$ involving p(x)-Laplacian*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol. 66. No. 1, pp 17-32. Published by Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland, 2005.

[3] Alves, C.O., do Ó, J.M. & Miyagaki, O.H., *On Pertubations of a class of a periodic m-Laplacian equation with critical growth*, Nonlinear Analysis 45 (2001) 849-863.

[4] Bartle, R.G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.

[5] Brezis, H., *Analyse Fonctionnelle, Thérie et Applications*, Dunod, Paris, 2005.

[6] Deimling, K., *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlim, 1985.

[7] DiBenedetto, E., *Real Analysis*, Birkhäuser, Boston, 2002.

[8] Diening, L., *Theoretical and Numerical Results for Electrorheological Fluids*, Ph.D thesis, University of Freiburg, Germany, 2002.

[9] Fan, X.L. & Zhao, D., *On the Spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 263, 424-446 (2001).

[10] Fan, X.L. & Zhang, Q.H., *Existence of solutions for p(x)-laplacian Dirichlet problem*, Nonlinear Analysis 52 (2003), 1843-1852.

[11] de Figueiredo, D.G., *Lectures on the Ekeland Variotional Principle with Applications and Detours*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[12] de Figueiredo, D.G., *Equacões Elípticas não Lineares*, 11º Colóquio Brasileiro de Matématica, IMPA, 1977.

[13] Gilbarg, D. & Trudinger *Ellíptic Partial Diffential Equations of Second Order*, Springer-Verlag , Second Edition, Berlin, 1983.

[14] Harjulehto, P. & Hästö, P, *An overview of variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces*, Future Trends in Geometric Function Theory(D. Herron (ed.), RNC Workshop, Jyväskylä, 2003), 85-93.

[15] Hästö, P.A, *The $p(x)-$Laplacian and applications*, National Conference on PDE and Applications , Coimbatore, Índia, 2005.

[16] Kreyszig, W., *Introductory Functional Analyses with Applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[17] Mawhin, J. & Willem, M., *Critical Point Theory and Hamiltonian Sistems*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[18] Medeiros, L.A. & Milla, M.A., *Espaços de Sobolev(Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos)*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.

[19] do Ó, J.M. & Medeiros, E.S., *Remarks on Least Energy Solutions for Quasilinear Elliptic Problems in $\mathbb{R}^N$*, Eletronic Journal of Differential Equations, vol. 2003 (2003), No. 83. pp. 1-14.

[20] Peral, I., *Multiplicity of solutions for the p-Laplacian*, Second School On Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations , Miramare-Trieste, 1997.

[21] Rabinowitz, P.H, *Minimax Methods in Critical Points Theory with Applications to Differential Equations*, Conference Board of Mathematical Sciences, AMS, Rhode Island, 1986.

[22] Royden, H.L., *Real Analysis*, Third Edition, Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1988.

[23] Ruzicka, M., *Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[24] Vainberg, M.M., *Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators*, Holden-Day, Series in Mathematical Physics, San Francisco, 1964.

[25] Willem, M., *Minimax Theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol. 24, Birkhäuser, Boston, 1996.