Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Identidades Polinomiais e Polinômios Centrais com Involução

por

Claudemir Fideles Bezerra Júnior †

sob orientação do

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes

Identidades Polinomiais e Polinômios Centrais com Involução

por

Claudemir Fideles Bezerra Júnior

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:

Prof. Dra. Manuela da Silva Souza - USP

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior - UFCG

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Fevereiro/2014

Resumo

Nesta dissertação são descritas bases para as identidades polinomiais e os polinômios centrais com involução para a álgebra das matrizes 2×2 sobre um corpo infinito K de característica $p \neq 2$, considerando-se a involução transposta, denotada por t, e também a involução simplética, denotada por s. É conhecido que, como o corpo K é infinito, se $*$ é uma involução em $M_2(K)$, então o ideal de identidades $(M_2(K), *)$ coincide com $(M_2(K), t)$ ou com $(M_2(K), s)$. Consideramos também as álgebras $M_n(E)$, $M_{k,l}(E)$ e $M_{1,1}(E)$ sobre corpos de característica 0. Para as álgebras $M_n(E)$ e $M_{k,l}(E)$, provamos que para uma classe ampla de involuções as identidades polinomiais com involução coincidem com as identidades ordinárias, e para a álgebra $M_{1,1}(E)$ com a involução $*$ induzida pela superinvolução transposta na superálgebra $M_{1,1}(K)$, exibimos uma base finita para as $*$-identidades polinomiais.

Palavras-Chave: PI-Álgebras, Álgebras com Involução, Identidades Polinomiais com Involução, Polinômios Centrais com Involução.

Abstract

In this dissertation we describe basis for the polynomial identities and central polynomials with involution for the algebra of 2×2 matrices over an infinite field K of characteristic $p \neq 2$ considering the transpose involution, denoted by t, and also the symplectic involution, denoted by s. It is known that, since the field K is infinite, if $*$ is an involution on $M_2(K)$, then the ideal of identities $(M_2(K), *)$ coincides with $(M_2(K), t)$ or with $(M_2(K), s)$. We also consider the algebras $M_n(E)$, $M_{k,l}(E)$ and $M_{1,1}(E)$ over fields of characteristic 0. For the algebras $M_n(E)$ and $M_{k,l}(E)$ we prove that for a large class of involutions the polynomial identities with involution coincide with the ordinary identities, and for the algebra $M_{1,1}(E)$ with the involution $*$ induced by the transposition superinvolution of the superalgebra $M_{1,1}(K)$ we exhibit finite basis for the $*$-polynomial identities.

Keywords: PI-Algebras, Algebras with Involution, Polynomial Identities with Involution, Central Polynomials with Involution.

Agradecimentos

Considerando esta dissertação como resultado de uma caminhada que não começou na UFCG, agradecer pode não ser tarefa fácil, nem justa. Para não correr o risco da injustiça, agradeço de antemão a todos que de alguma forma passaram pela minha vida e contribuíram para a construção de quem sou hoje.

E agradeço, particularmente, a algumas pessoas pela contribuição direta na construção deste trabalho:

À Deus, o que seria de mim sem a fé que eu tenho nele.

À minha querida esposa Elis, por estar sempre ao meu lado, nos momentos alegres e tristes, sempre me incentivando para a realização dos meus ideais, a minha principal razão para persistir e prosseguir.

Aos meus pais, Maria do Livramento e Claudemir, que me auxiliaram na minha vida acadêmica, profissional, financeira e afetiva. À minha irmã, Liliane por estarmos sempre juntos nos momentos mais importantes.

Aos amigos Diego, Kennedy, Reinaldo e Antônio, por me mostrar que amizades sinceras e puras faz uma diferença enorme e como podem ser importantes em nossas vidas.

Aos amigos Rafael, Luciano, Alex, Anaxsuel e Erivaldo, pela convivência, ajudas e pelos momentos de distração nestes dois anos, em especial ao amigo Brito, mais que amigo, um irmão que estava comigo em todos os momentos deste mestrado. Aos meus irmãos de entrada Jogli e Michel que me ajudaram a entender conceitos abstratos, me auxiliando nos estudos deste mestrado. Aos colegas do mestrado, Nancy, Luis, Luciano, Romildo, Patrício, Débora, Elizabeth, Fabrício, Alan de Araújo, Alan Carlos, Carlos, Arlandson, Levi, Bruno e Misaelle, pelas trocas de experiência na sala de estudo e pelo bom convívio. Em especial a Emanuela, Arthur, Antônio Marcos e Fábio pelos conselhos e amizade.

Aos professores de graduação na UFPB-LN Carlos, Marcos e Cristiane que além da amizade, sempre me incentivaram e com certeza são os grandes responsáveis por eu estar aqui terminando meu mestrado.

A todos os professores da pós-graduação, em especial a Ângelo e Marco Antônio, pelas lições de análise e geometria, e também ao professor Jefferson pela disponibilidade e boa vontade de auxiliarmos nas lições de Análise Funcional.

Ao professor Brandão pelos ensinamentos em álgebra, possibilitando o meu desenvolvimento como estudante e pela disponibilidade de participar da minha defesa de dissertação como examinador.

Ao professor Diogo, só tenho que agradecer, por me aceitar como orientando, por toda paciência e disposição dedicada a mim, que me ajudou com conversas fora e dentro da sala de aula, sempre acreditando e confiando em minhas habilidades e aptidões. Além disso, por ter sido companheiro na orientação deste trabalho no qual foi mais que um orientador, foi um amigo, um "pai acadêmico". Muito Obrigado!

À professora Manuela por ter aceitado participar da minha banca examinadora e pelas contribuições feita a este trabalho.

Ao departamento de matemática por ter me acolhido pela pessoa do professor Ângelo e aos funcionários Andrezza, Aninha, Suênia, Rodrigo, David e Renato por sempre estar dispostos a ajudar na medida do possível.

E por fim, mas não menos importante, à CAPES pelo incentivo financeiro.

Meus sinceros agradecimentos a todos.

"Quando tudo nos parece dar errado acontecem coisas boas que não teriam acontecido se tudo tivesse dado certo."
Renato Russo

Dedicatória

À minha maravilhosa esposa, Elis Fideles, que sempre me incentivou para a realização dos meus ideais, encorajando-me a enfrentar todos os momentos difíceis da vida, a minha principal razão para persistir e prosseguir.

Sumário

Introdução

A Teoria das **Álgebras com Identidades Polinomiais**, ou PI-Álgebras (do inglês *Polynomial Identities*), é uma parte importante da Teoria de Anéis. A classe das PI-Álgebras é ampla e engloba as álgebras comutativas, álgebras de dimensão finita, álgebras nilpotentes, entre outras. Além disso, o produto tensorial de duas PI-Álgebras, as subálgebras e imagens homomórficas de uma PI-álgebra e o produto direto de uma família de PI-álgebras são também álgebras com identidades polinomiais.

As principais linhas de pesquisa envolvem a *teoria estrutural das PI-álgebras* dentro da qual podemos destacar o Teorema de Kaplansky e a *teoria combinatória das PI-álgebras*, dentro da qual podemos destacar o Teorema de Amitsur e Levitsky. O Teorema de Kaplansky afirma que qualquer PI-álgebra primitiva é central simples e de dimensão finita sobre seu centro, foi demonstrado em 1948 no artigo [26] onde o autor introduziu o termo identidade polinomial. Dois anos depois, em [3], Amitsur e Levitsky provaram, usando métodos puramente combinatórios, que o polinômio standard de grau $2k$ é uma identidade de grau mínimo para a álgebra das matrizes $k \times k$.

Nos últimos anos várias generalizações do conceito de identidade polinomial têm sido estudadas tais como: identidades polinomiais graduadas, identidade polinomiais com traço e identidades polinomiais com involução (ou $*$-identidades), sendo esta última o objeto de estudo desta dissertação. Kemmer utilizou identidades graduadas na sua Teoria dos Ideais de Identidades em Álgebras Associativas (indicamos [27] para mais detalhes). As identidades com traço foram introduzidas por Razmyslov em [31] e como consequência dos resultados obtidos deu uma nova demonstração do Teorema de Amitsur-Levitsky. Já as identidades polinomiais com involução têm relação com as identidades polinomiais (ordinária). Em [2], Amitsur demonstrou que uma álgebra satisfazendo uma identidade com involução é uma PI-álgebra.

Muitos dos conceitos e resultados sobre álgebras com identidades polinomiais têm sido estudados no contexto das identidades polinomiais com involução. Em [21] a teoria das representações do grupo hiperoctaedral é aplicada ao estudo das $*$-identidades polinomiais de uma álgebra com involução $(R, *)$ sobre um corpo de característica zero e em [33] a autora estende um dos teoremas de Kemer para o caso de álgebras com involução.

O problema de descrever as identidades de uma álgebra com involução $(R, *)$ foi resolvido para alguns casos apenas, por exemplo, em [11] são descritas as identidades com involução da álgebra de matrizes 2×2, sobre corpos infinitos de característica diferente de 2, considerando-se a involução transposta e também a involução simplética. Em [16] são descritas as identidades da álgebra $M_{1,1}(E)$ com a involução $*$ induzida pela superinvolução transposta na superálgebra $M_{1,1}(K)$. Além disso é demonstrado que para uma classe ampla de involuções as identidades com involução nas álgebras $M_n(E)$ e $M_{k,l}(E)$ são as identidades ordinárias. Estes são alguns resultados apresentados nesta dissertação. Além das duas referências anteriores, apresentamos também a descrição dos polinômios centrais com involução para a álgebra $M_2(K)$ que foi dada em [9].

A dissertação consiste em 5 capítulos e a seguir descreveremos como ela está organizada.

No primeiro capítulo, introduzimos vários conceitos fundamentais para o desenvolvimento do trabalho. Decidimos incluir as principais definições e notações da PI-teoria, para tornar a dissertação mais independente de outras fontes. Mas para não exagerar muito no volume da dissertação, optamos por omitir algumas demonstrações que podem ser consultadas nos livros [17], [19] e [20] e também na dissertação [15]. Assim, introduzimos os conceitos de polinômio central, identidade polinomial, identidade multihomogênea e multilinear, e por fim, apresentamos alguns resultados sobre matrizes genéricas que são importantes no desenvolvimento dos Capítulos 3 e 5.

No segundo capítulo, estudamos os fatos básicos sobre álgebras com involução, baseado no livro [32], nas teses [10] e [13] e no artigo [33]. Apresentamos os conceitos de identidade e polinômio central com involução e também a classificação das involuções em álgebras centrais simples. Além disso, fazemos um breve estudo sobre polinômios $*$-próprios, estudo este importante no desenvolvimento de toda dissertação.

No Capítulo 3, considerando K um corpo infinito de característica diferente de

2, apresentaremos a descrição feita por Colombo e Koshlukov em [11], das identidades polinomiais com involução para álgebra das matrizes de ordem 2. Os principais resultados do capítulo descrevem bases das identidades com involução para esta álgebra. Consideramos os dois tipos de involução, a transposta e a simplética. No primeiro caso, utilizamos métodos afim de diminuir o estudo para identidades polinomiais que dependam apenas de variáveis simétricas, e em seguida definimos um operador L e estudamos as tabelas admissíveis com o intuito de concluir o resultado, baseado nos artigos [28], [29] e [34]. O segundo caso, resolve-se através da descrição das identidades fracas de $M_2(K)$ feita em [29].

No Capítulo 4, como no capítulo anterior, K será considerado um corpo infinito de característica diferente de 2. Apresentaremos a descrição feita por Brandão e Koshlukov, em [9], dos polinômios centrais com involução para a álgebra das matrizes de ordem 2, considerando-se as involuções transposta e simplética. Nestas descrições são usadas ideias e resultados desenvolvidos no capitulo anterior.

Finalmente, no quinto capítulo, apresentamos a descrição feita por Di Vincenzo e Koshlukov, em [16], sobre as identidades com involução das álgebras $M_n(E)$, $M_{k,l}(E)$ e $M_{1,1}(E)$ sobre corpos de característica 0. Primeiramente, é feito um estudo sobre alguns conceitos que serão importantes no decorrer do capítulo, tais como superálgebras, superinvolução, entre outros, estudo este baseado no artigo [24]. Em seguida, considerando-se as álgebras $M_n(E)$ e $M_{k,l}(E)$, provamos que para uma classe ampla de involuções as identidades polinomiais com involução coincidem com as identidades ordinárias. Por fim, consideramos a álgebra $M_{1,1}(E)$ com a involução $*$ induzida pela superinvolução transposta na superálgebra $M_{1,1}(K)$ e exibimos uma base finita para as $*$-identidades polinomiais dessa álgebra. Para isto determinamos algumas $*$-identidades satisfeitas em $(M_{1,1}(E), *)$ e consideraremos o T_*-ideal I gerado por estas identidades. Em seguida, tomaremos o espaço dos polinômios multilineares $*$-próprios na álgebra relativamente livre $K\langle X \cup Y\rangle/I$, fixaremos um conjunto de geradores para cada um desses espaços, provaremos que estes polinômios são linearmente independentes módulo $T_*(M_{1,1}(E))$ e concluiremos que $I = T_*(M_{1,1}(E))$.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Neste primeiro capítulo, temos como objetivo estabelecer as notações, os conceitos e resultados básicos necessários que serão utilizadas nos demais capítulos deste trabalho. Vamos, inicialmente, falar sobre PI-álgebras, que é o nosso objeto fundamental de estudo. Em todo o capítulo, K é um corpo qualquer, $charK$ denotará a característica do corpo K e, a menos que se diga o contrário, todas as álgebras e espaços vetoriais serão sobre K.

1.1 Álgebra

Definição 1.1.1 *Define-se uma K-álgebra, ou simplesmente álgebra, como sendo um par $(A;*)$, onde A é um espaço vetorial e "$*$" é uma operação em A que é uma aplicação bilinear, ou seja, $* : A \times A \to A$ satisfaz:*

(i) $a * (b + c) = a * b + a * c$;

(ii) $(a + b) * c = a * c + b * c$;

(iii) $(\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b)$,

para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda \in K$.

Na definição acima, "$*$" chama-se produto ou multiplicação. Em geral, denotaremos $a * b$, com $a, b \in A$, simplesmente por ab. Definimos $a_1a_2a_3$ como sendo $(a_1a_2)a_3$ e, indutivamente, $a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n$ como sendo $(a_1a_2 \ldots a_{n-1})a_n$, para $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Dizemos que um subconjunto β da álgebra A é uma *base* se β é uma base de A como espaço vetorial e definimos a *dimensão de* A como sendo a dimensão de A como espaço vetorial.

Definição 1.1.2 *Uma álgebra A será dita:*

(i) **Associativa**, *se $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer $a, b, c \in A$;*

(ii) **Comutativa**, *se $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in A$;*

(iii) **Unitária** *(ou com unidade), se existir $1_A \in A$ tal que $1_A a = a 1_A = a$, para todo $a \in A$;*

(iv) **Álgebra de Lie** *se valem $a^2 = aa = 0$ e $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$ (identidade de Jacobi), para quaisquer $a, b, c \in A$. Observe que $a^2 = 0$ implica que $ab = -ba$, para quaisquer $a, b \in A$. Dizemos que uma álgebra de Lie é abeliana se $ab = 0$, para quaisquer $a, b \in A$.*

Sendo A uma álgebra unitária e $\lambda \in K$, identificaremos λ como sendo o elemento $\lambda 1_A$ de A e o corpo K como o subconjunto $\{\lambda 1_A \ ; \ \lambda \in K\}$ (subespaço de A gerado pelo elemento 1_A). Apresentaremos agora exemplos importantes de álgebras.

Exemplo 1.1.3 (Álgebra das matrizes) *Sendo K um corpo e $n \in \mathbb{N}$, o espaço vetorial $M_n(K)$ munido de seu produto usual é uma álgebra associativa com unidade (a matriz identidade I_n). Destacamos nesta álgebra as matrizes elementares E_{ij}, que possuem 1 na entrada da i-ésima linha e j-ésima coluna e 0 nas demais. É fácil verificar que elas formam uma base para $M_n(K)$. De modo mais geral, se A é uma álgebra, consideramos o espaço vetorial $M_n(A)$ de todas as matrizes de ordem n com entradas em A. O produto de matrizes em $M_n(A)$ é análogo ao produto de matrizes com entradas em K. Temos então uma estrutura de álgebra em $M_n(A)$.*

Exemplo 1.1.4 (Álgebra de Grassmann) *Sejam K um corpo e V o espaço vetorial sobre K com base $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$. Definimos a álgebra de Grassmann (ou álgebra exterior) de V , denotada por $E = E(V)$, como sendo a álgebra associativa e unitária com base*

$$\{1, e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k} \ ; \ i_1 < i_2 < \ldots < i_k; k \geq 1\},$$

através do produto induzida pela relação $e_ie_j = -e_je_i$, *para quaisquer* $i, j \in \mathbb{N}$. *Destacamos em* E *os subespaços:*

$$E^{(0)} = \langle 1_E, e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_m}\ ;\ m \text{ é par, } i_1 < i_2 < \ldots < i_m\rangle$$

e

$$E^{(1)} = \langle e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_m}\ ;\ m \text{ é ímpar, } i_1 < i_2 < \ldots < i_m\rangle.$$

Claramente, $E = E^{(0)} \oplus E^{(1)}$. *Uma vez que* $e_ie_j = -e_je_i$, *temos*

$$(e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_m})(e_{j_1}e_{j_2}\ldots e_{j_n}) = (-1)^{mn}(e_{j_1}e_{j_2}\ldots e_{j_n})(e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_m}),$$

para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$. *Assim, podemos concluir que* $ax = xa$ *para quaisquer* $a \in E^{(0)}$ *e* $x \in E$, *e* $xy = -yx$ *para quaisquer* $x, y \in E^{(1)}$. *Note que, se* $charK = 2$, *então* E *é uma álgebra comutativa.*

Considere E' *o subespaço de* E *gerado por*

$$\{e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_m}\ ;\ m \in \mathbb{N}, i_1 < i_2 < \ldots < i_m\}.$$

Temos que E', *munido da operação de* E, *é uma álgebra chamada* **álgebra exterior sem unidade**. *Observe que* $E' = E'^{(0)} \oplus E^{(1)}$, *onde* $E'^{(0)}$ *é o subespaço gerado por* $\{e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_m}\ ;\ m \text{ é par, } i_1 < i_2 < \ldots < i_m\}$.

O próximo resultado nos permite obter uma estrutura de álgebra a partir de um espaço vetorial.

Proposição 1.1.5 *Sejam* A *um espaço vetorial e* β *uma base de* A. *Dada* $f : \beta \times \beta \to A$, *existe uma única aplicação bilinear* $\cdot : A \times A \to A$ *tal que* $u_1 \cdot u_2 = f(u_1, u_2)$ *para quaisquer* $u_1, u_2 \in \beta$.

Demonstração: Veja a prova em [15], p.13. ■

Assim, para definir uma estrutura de álgebra em A basta definir o produto para os elementos de uma base. Uma vez definido o produto, verifica-se que A é uma álgebra associativa se, e somente se, $(v_1v_2)v_3 = v_1(v_2v_3)$, para quaisquer $v_1, v_2, v_3 \in \beta$.

Exemplo 1.1.6 (Produto tensorial de álgebras) *Sejam* A *e* B *álgebras. Recordamos que o produto tensorial dos espaços vetoriais* A *e* B, *denotado por* $A \otimes B$, *é o espaço vetorial gerado por* $\{a \otimes b\ ;\ a \in A, b \in B\}$. *Os elementos da forma* $a \otimes b$ *são chamados de* **tensores** *e satisfazem:*

(i) $(a_1 + a_2) \otimes b = (a_1 \otimes b) + (a_2 \otimes b)$;

(ii) $a \otimes (b_1 + b_2) = (a \otimes b_1) + (a \otimes b_2)$;

(iii) $\lambda(a \otimes b) = (\lambda a) \otimes b = a \otimes (\lambda b)$,

para quaisquer $a_1, a_2, a \in A, b_1, b_2, b \in B$ *e* $\lambda \in K$.

É um fato bastante conhecido que se β_1 *e* β_2 *são bases de* A *e* B*, respectivamente, então o conjunto* $\{u \otimes v \ ; \ u \in \beta_1, v \in \beta_2\}$ *é uma base de* $A \otimes B$*. Se* V *é um espaço vetorial e* $f : A \times B \to V$ *é uma aplicação bilinear, então existe uma única transformação linear* $T_f : A \otimes B \to V$ *satisfazendo* $T_f(a \otimes b) = f(a, b)$ *(propriedade universal do produto tensorial). Para maiores detalhes, veja [1], Capítulo 2.*

Para definir uma estrutura de álgebra em $A \otimes B$*, fixemos duas bases* β_1 *e* β_2 *de* A *e* B*, respectivamente, e definamos* $(u_1 \otimes v_1)(u_2 \otimes v_2) = u_1u_2 \otimes v_1v_2$*, para todo* $u_1, u_2 \in \beta_1$ *e* $v_1, v_2 \in \beta_2$*. Se* A *e* B *são álgebras associativas então* $A \otimes B$*, munido deste produto, é uma álgebra associativa, pela proposição anterior. Além disso, se* A *e* B *são álgebras com unidade, a unidade da álgebra* $A \otimes B$ *é* $1_A \otimes 1_B$.

Sendo A uma álgebra associativa e $a, b \in A$, definimos o **comutador de a e b**, denotado por $[a, b]$, e o **produto de Jordan de a e b**, denotado por $a \circ b$, como sendo

$$[a, b] = ab - ba \qquad \text{e} \qquad a \circ b = (ab + ba).$$

De modo geral, definimos o **comutador de comprimento n** como sendo

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = [[a_1, \ldots, a_{n-1}], a_n],$$

para $a_i \in A$. É fácil verificar que

$$[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b, \text{ para } a, b, c \in A. \tag{1.1}$$

Fazendo indução sobre n podemos mostrar que:

$$[a_1a_2 \ldots a_n, c] = \sum_{i=1}^{n} a_1 \ldots a_{i-1}[a_i, c]a_{i+1} \ldots a_n, \tag{1.2}$$

para cada $a_i, c \in A$.

Observação 1.1.7 *Caso a característica do corpo seja diferente de 2, podemos definir o produto de Jordan de* a *e* b *da seguinte forma:*

$$a \circ b = (1/2)(ab + ba).$$

Definição 1.1.8 *Seja A uma K-álgebra. Dizemos que:*

(i) Um subespaço B de A é uma **subálgebra** *de A, se é fechado com respeito a multiplicação, isto é, $b_1b_2 \in B$ para quaisquer $b_1, b_2 \in B$;*

(ii) Um subespaço I de A é um **ideal** *(bilateral) de A se $AI \subseteq I$ e $IA \subseteq I$, ou seja, se $ax, xa \in I$ para quaisquer $a \in A$ e $x \in I$.*

Podemos definir ideias unilaterais. Um subespaço I é dito ideal à direita (respectivamente à esquerda) se $IA \subseteq I$ (respectivamente $AI \subseteq I$).

Exemplo 1.1.9 *Considere a álgebra exterior E (Exemplo 1.1.4). Dado $k \in \mathbb{N}$, tomemos o subespaço E_k de E gerado por*

$$\{1, e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_l} \ ; \ i_1 < i_2 < \ldots < i_l \leq k\}.$$

Temos que E_k é uma subálgebra de E de dimensão 2^k e é a álgebra exterior do espaço vetorial com base $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$.

Exemplo 1.1.10 (Centro de uma álgebra) *Seja A uma álgebra associativa. O conjunto*

$$Z(A) = \{a \in A \ ; \ ax = xa, \text{ para todo } x \in A\}$$

é uma subálgebra de A chamado de **centro de A**. *É fácil verificar que dado $n \in \mathbb{N}$, $Z(M_n(K)) = \{\lambda I_n \ ; \ \lambda \in K\}$ e que $Z(E) = E^{(0)}$.*

Sejam A uma álgebra e I um ideal de A. Definimos uma relação em A da seguinte forma: Dados $a, b \in A$, a é dito congruente a b módulo I se, e somente se, $a - b \in I$. Tal relação será denotada por $a \equiv b \pmod{I}$ ou $a \equiv_I b$. O conjunto $a + I = \{a + i \ ; \ i \in I\}$ é chamado de **classe de equivalência de a módulo I** e pode ser denotado por $\bar{a}$. O conjunto de todas as classes de equivalência módulo I de A será representado por A/I.

Considere o K-espaço vetorial A/I, com as operações soma e multiplicação por escalar usuais ($\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$ e $\lambda\bar{a} = \overline{\lambda a}$, para todo $\lambda \in K$ e quaisquer $a, b \in A$), podemos considerar a operação multiplicação

$$\begin{array}{rcl} \cdot : A/I \times A/I & \rightarrow & A/I \\ (\bar{a}, \bar{b}) & \rightarrow & \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}. \end{array}$$

Como I é um ideal, temos que esta operação está bem definida e faz de A/I uma álgebra chamada **Álgebra Quociente de $\boldsymbol{A}$ por $\boldsymbol{I}$**.

Definição 1.1.11 *Sejam A uma álgebra e S um subconjunto não vazio de A. Definimos:*

(i) **Subálgebra de $\boldsymbol{A}$ gerada por $\boldsymbol{S}$**, *denotada por $K(S)$, como sendo a interseção de todas as subálgebras de A que contêm S (ou $S \cup \{1_A\}$, caso A seja unitária).*

(ii) **Ideal de $\boldsymbol{A}$ gerado por $\boldsymbol{S}$**, *denotado por I_S, como sendo a interseção de todos os ideais de A que contêm S.*

Claramente, da definição anterior, $K(S)$ é a menor subálgebra de A que contém S, e o ideal de A gerado por S é o menor ideal de A contendo S. Sendo A uma álgebra, dizemos que $S \subseteq A$ gera A, como álgebra, ou é **um conjunto gerador para a álgebra $\boldsymbol{A}$**, se $K(S) = A$. Além disso, A é dita uma **álgebra finitamente gerada** se existe $S \subseteq A$, finito, tal que $K(S) = A$. Sendo A uma álgebra associativa unitária e S um subconjunto não vazio de A, não é difícil mostrar que $K(S)$ coincide com o subespaço de A gerado por $\{1, s_1 s_2 \ldots s_n \ ; \ n \in \mathbb{N}, s_i \in S\}$ e o ideal de A gerado por S coincide com o subespaço de A gerado por $\{asb \ ; \ a, b \in A, s \in S\}$.

Definição 1.1.12 *Sejam A e B duas álgebras. Dizemos que uma transformação linear $\varphi : A \to B$ é um* **homomorfismo de álgebras**, *se $\varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)$, para quaisquer $a_1, a_2 \in A$. Se A e B possuem unidade, exigimos que $\varphi(1_A) = 1_B$.*

Chamamos φ de **monomorfismo** (ou **mergulho**) se φ é um homomorfismo injetivo, de **epimorfismo** se φ é um homomorfismo sobrejetivo, e de **isomorfismo** se φ é um homomorfismo bijetivo. Dizemos que φ é um **endomorfismo** de A, se φ é um homomorfismo de A em A e que é um **automorfismo** de A se φ é um endomorfismo bijetivo de A. Denotamos por $End(A)$ e $Aut(A)$ os conjuntos dos endomorfismos e automorfismos, respectivamente, da álgebra A. Quando existe um isomorfismo $\varphi : A \to B$, dizemos que as álgebras A e B são isomorfas e denotamos por $A \simeq B$.

Seja $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de álgebras. Denotamos o **núcleo de $\boldsymbol{\varphi}$** por $Ker\varphi = \{a \in A \ ; \ \varphi(a) = 0\}$ e a **imagem de $\boldsymbol{\varphi}$** por $Im\varphi = \{\varphi(a) \ ; \ a \in A\}$. É de fácil verificação que $Ker\varphi$ é um ideal de A e a $Im\varphi$ é uma subálgebra de B.

Apresentaremos a seguir alguns exemplos importantes de homomorfismos.

Exemplo 1.1.13 *Sejam A uma álgebra e I um ideal de A. A aplicação $\pi : A \to A/I$, definida por $\pi(a) = \bar{a}$, é um epimorfismo de álgebras chamado de* **projeção canônica**.

Exemplo 1.1.14 *Seja A uma álgebra associativa e unitária. Dizemos que um elemento $a \in A$ é invertível se existe $a^{-1} \in A$ tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Vamos denotar por $U(A)$ o conjunto dos elementos invertíveis de A. Tomando $r \in U(A)$, podemos considerar a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \zeta_r : A & \to & A \\ x & \to & \zeta_r(x) = r^{-1}xr. \end{array}$$

É fácil verificar que esta aplicação é um automorfismo de A, chamado de **automorfismo interno determinado por r**.

Exemplo 1.1.15 *Seja A' uma álgebra sem unidade. Consideremos o espaço vetorial*

$$A = K \oplus A' = \{(\lambda, a) | \lambda \in K, a \in A'\}$$

Definimos em A o seguinte produto $(\lambda_1, a_1)(\lambda_2, a_2) = (\lambda_1\lambda_2, \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1 + a_1 a_2)$. O conjunto A munido deste produto é uma álgebra associativa com unidade (1,0). A aplicação $\phi : A' \to A$ definida por $\phi(a) = (0, a)$ é um monomorfismo. Dizemos que A é obtida de A' por **adjunção da unidade**.

1.2 Álgebra Associativa Livre

Nesta seção construiremos as Álgebras Associativas Livres, cuja importância está no fato de serem os ambientes onde são introduzidos o conceito de identidades polinomiais e polinômios centrais utilizados em todo este trabalho. Começaremos com a definição de Álgebras Livres.

Definição 1.2.1 *Seja $\mathcal{B}$ uma classe de álgebras e $F \in \mathcal{B}$ uma álgebra gerada por um conjunto $X \subseteq F$. A álgebra F é dita livre na classe $\mathcal{B}$, se satisfaz a seguinte* **propriedade universal***: para cada álgebra $A \in \mathcal{B}$ e cada aplicação $h : X \longrightarrow A$ existir um único homomorfismo $F \to A$ estendendo h. Neste caso, dizemos que F é livremente gerada pelo conjunto X. Além disso, a cardinalidade $|X|$ do conjunto X será chamada de posto de F.*

Exemplo 1.2.2 *A álgebra unitária dos polinômios associativos e comutativo nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, denotada por $K[x_1, \ldots, x_n]$, é gerada pelo conjunto $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Sejam A uma álgebra associativas, comutativas e unitárias, $a_i \in A$ e a aplicação $\varphi : X \to A$, $\varphi(x_i) = a_i$. O homomorfismo $\phi : K[x_1, \ldots, x_n] \to A$ dado por $\phi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(a_1, \ldots, a_n)$ estende φ. Portanto, $K[x_1, \ldots, x_n]$ é a álgebra livre livremente gerada pelo conjunto X na classe de todas as álgebras associativas, comutativas e unitárias.*

Agora construiremos uma álgebra livre na classe de todas as álgebras associativas unitárias. A menos de menção contrária, as álgebras consideradas serão associativas com unidade.

Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto não vazio e enumerável cujos elementos iremos chamar de variáveis não comutativas. Definimos uma *palavra* em X de comprimento $n \in \mathbb{N}$ como sendo uma sequência finita $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$ e $x_{i_j} \in X$. Quando $n = 0$, vamos chamar esta palavra de *palavra vazia*, que denotaremos por 1. Dizemos que duas palavras $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$ e $x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_m}$ são iguais se $n = m$ e $i_1 = j_1$, $i_2 = j_2, \ldots, i_n = j_n$.

Consideremos $K\langle X\rangle$ o espaço vetorial que tem como base o conjunto de todas as palavras em X. Tal espaço munido do produto (chamado de concatenação)

$$(x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n})(x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_m}) = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_m}$$

é uma álgebra associativa unitária e X gera $K\langle X\rangle$ como álgebra.

Os elementos de $K\langle X\rangle$, que chamaremos de **polinômios**, são somas (formais) de termos (ou monômios) que por sua vez são produtos (formais) de um escalar por uma palavra em X.

Proposição 1.2.3 *A álgebra $K\langle X\rangle$ é livre, livremente gerada por X na classe das álgebras associativas unitárias.*

Demonstração: Seja A uma álgebra associativa com unidade e $h : X \to A$ uma aplicação qualquer. Para cada $i \in \mathbb{N}$, denotaremos por a_i a imagem de x_i por h. Consideremos agora a aplicação linear $\varphi_h : K\langle X\rangle \to A$ tal que $\varphi_h(1) = 1_A$ e $\varphi_h(x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}) = a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_n}$. Temos que φ_h é um homomorfismo de álgebras e é o único satisfazendo $\varphi_h|_X = h$. ■

Observação 1.2.4 *A imagem de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pelo homomorfismo φ_h será denotada por $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, ou seja, o elemento $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é obtido pela substituição das variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pelos elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no polinômio associativo $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

1.3 Álgebra Envolvente

Sendo A uma álgebra associativa. Podemos obter uma nova álgebra $A^{(-)}$ munida do produto $[a_1, a_2] = a_1a_2 - a_2a_1$. Com este produto $A^{(-)}$ é uma álgebra de Lie.

Definição 1.3.1 *Diremos que uma álgebra associativa A é uma* **álgebra envolvente** *para a álgebra de Lie L, se L é isomorfa a uma subálgebra de $A^{(-)}$.*

Exemplo 1.3.2 *Seja L uma álgebra de Lie com base $\{u, v\}$ tal que $u * v = v$. A álgebra $M_2(K)$ é uma álgebra envolvente de L, pois a subálgebra $M_2(K)^{(-)}$ gerada por $\{E_{11}, E_{12}\}$ é isomorfa a L.*

Definição 1.3.3 *Seja L uma álgebra de Lie. Dizemos que a álgebra associativa $U = U(L)$ é uma* **álgebra universal envolvente de $\boldsymbol{L}$**, *se L é uma subálgebra de $U^{(-)}$ e U satisfaz a seguinte propriedade universal: para qualquer álgebra associativa A e qualquer homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : L \to A^{(-)}$ existe um único homomorfismo $\psi : U(L) \to A$ que estende ϕ.*

Os próximos resultados serão úteis para o Capítulo 2, precisamente para a seção 2.4.

Lema 1.3.4 *Se U_1 e U_2 são álgebras universais envolventes da álgebra de Lie L, então $U_1 \simeq U_2$.*

Demonstração: Sabendo que U_1 e U_2 são álgebras associativas (por definição), podemos considerar $\phi_1 : L \to {U_1}^{(-)}$ e $\phi_2 : L \to {U_2}^{(-)}$ os homomorfismos inclusões. Claramente, ϕ_1 e ϕ_2 são homomorfismos de Lie e podemos tomar $\psi_1 : U_2 \to U_1$ e $\psi_2 : U_1 \to U_2$ as extensões correspondentes. Observe ainda que $(\psi_1 \circ \psi_2)(x) = \psi_1(x) = x$, para quaisquer $x \in L$. Portanto, $\psi_1 \circ \psi_2$ é um homomorfismo que estende a identidade e assim

$\psi_1 \circ \psi_2 = Id_{U_1}$. De modo totalmente análogo obtemos $\psi_2 \circ \psi_1 = Id_{U_2}$ e concluímos que $U_1 \simeq U_2$. ■

Teorema 1.3.5 (Poincaré-Birkoff-Witt) *Toda álgebra de Lie L possui uma única (a menos de isomorfismo) álgebra universal envolvente $U = U(L)$. Se L é um álgebra de Lie e o conjunto $\{e_i \; ; \; i \in I\}$ é uma base de L ordenada por uma ordem no conjunto dos índices I, então $U(L)$ tem uma base dada por*

$$\{e_{i_1} \ldots e_{i_p} \; ; \; i_1 \leq \ldots \leq i_p, p = 0, 1, \ldots\}$$

onde $p = 0$ nos dá a unidade de $U(L)$.

Demonstração: Veja a prova em [19], p.11. ■

Teorema 1.3.6 (Witt) *A subálgebra de Lie $L(X)$ de $K\langle X\rangle^{(-)}$ gerada por X é livre na classe das álgebras de Lie com X como conjunto de geradores livres. Além disso, $U(L(X)) = K\langle X\rangle$.*

Demonstração: Inicialmente mostraremos que $L(X)$ é livre na classe das álgebras de Lie. Considere G uma álgebra de Lie e a aplicação $h : X \to G$, dada por $h(x_i) = g_i$. Sejam $A = U(G)$ e a homomorfismo inclusão $G \hookrightarrow A$, podemos considerar o homomorfismo $\varphi : K\langle X\rangle \to A$ que estende h. Obtemos então um homomorfismo $\tilde{\varphi} : K\langle X\rangle^{(-)} \to A^{(-)}$ de álgebras de Lie e denotaremos por $\phi : L(X) \to A^{(-)}$ a restrição de $\tilde{\varphi}$ à $L(X)$. Note que $\phi(x_i) = g_i$ e $X = \{x_i \; ; \; i \in I\}$ gera $L(X)$. Portanto, $\phi(L(X)) \subseteq G$ e obtemos um homomorfismo $\tilde{\phi} : L(X) \to G$, com $\tilde{\phi}(x_i) = g_i$.

Mostraremos, agora, que $U(L(X)) = K\langle X\rangle$. É imediato que $L(X) \subseteq K\langle X\rangle$. Suponha agora que $\phi : L(X) \to A^{(-)}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, onde A é uma álgebra associativa. Seja $\varphi : K\langle X\rangle \to A$ o único homomorfismo tal que $\varphi(x_i) = \phi(x_i) = a_i$, $i \in I$. Como $\varphi(x_i) = \phi(x_i)$ para todo $x_i \in X$ e X gera $L(X)$, temos que φ é único que estende ϕ. Portanto, $U(L(X)) = K\langle X\rangle$. ■

1.4 Identidades Polinomiais

Sejam $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ e $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre com unidade livremente gerada por X.

Definição 1.4.1 *Sejam A uma álgebra associativa e $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$. Dizemos que $f = 0$ é uma* **identidade polinomial de A** *(ou identidade polinomial ordinária de A) se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$. Neste caso, diremos que A satisfaz a identidade $f(x_1, \ldots, x_n)$.*

É imediato que o polinômio $f = 0$ (polinômio nulo) é uma identidade polinomial para qualquer álgebra A.

Observação 1.4.2 *Considere $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$. Então $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é uma identidade polinomial de A se, e somente se, f pertence aos núcleos de todos os homomorfismos de $K\langle X\rangle$ em A.*

Definição 1.4.3 *Se A satisfaz uma identidade polinomial $f \neq 0$, dizemos que A é uma* **PI-álgebra**.

Denotaremos por $T(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais de A. Sendo A e B álgebras, dizemos que A e B são **PI-equivalentes** se $T(A) = T(B)$.

Exemplo 1.4.4 *Seja A uma álgebra comutativa. Então, $[x_1, x_2] \in K\langle X\rangle$ é uma identidade polinomial de A. Em particular, toda álgebra comutativa é uma PI-álgebra.*

Exemplo 1.4.5 *Seja A uma álgebra associativa de dimensão finita, digamos $dimA < n$. Então A satisfaz a identidade standard de grau n*

$$s_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)},$$

onde S_n é o grupo simétrico das permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ e $(-1)^\sigma$ é o sinal da permutação $\sigma \in S_n$. Assim, toda álgebra de dimensão finita é uma PI-álgebra. Em particular, $M_n(K)$ é uma PI-álgebra.

Exemplo 1.4.6 *(***Teorema Amistsur-Levitzki***) A álgebra $M_n(K)$ das matrizes de ordem n satisfaz a identidade standard de grau $2n$. Para mais detalhes veja [20], pág. 16.*

1.5 Variedades de Álgebra e Álgebras Relativamente Livres

Definição 1.5.1 *Seja S um subconjunto de $K\langle X\rangle$. A classe $\mathcal{V}$ de todas as álgebras que têm todos os polinômios de S como identidades é chamada de variedade (de álgebras associativas) definida por S.*

Definição 1.5.2 *Um ideal I de $K\langle X\rangle$ é um T-ideal se é invariante por todos os endomorfismos de $K\langle X\rangle$, ou seja, $\varphi(I) \subseteq I$, para todo $\varphi \in End(K\langle X\rangle)$.*

Proposição 1.5.3 *Se A é uma álgebra, então $T(A)$ é um T-ideal de $K\langle X\rangle$. Reciprocamente, se I é um T-ideal de $K\langle X\rangle$, então existe uma álgebra B tal que $T(B) = I$.*

Demonstração: É fácil verificar que $T(A)$ é um ideal de $K\langle X\rangle$. Resta mostrar que $T(A)$ é invariante por todo endomorfismo de $K\langle X\rangle$. Tomemos arbitrariamente $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in T(A)$ e $\varphi \in End(K\langle X\rangle)$. Note que se $\psi : K\langle X\rangle \to A$ é um homomorfismo qualquer de álgebras, então $\psi(\varphi(f)) = (\psi \circ \varphi)(f) = 0$, pois

$$\psi \circ \varphi : K\langle X\rangle \to A$$

é um homomorfismo de álgebras e $f \in T(A)$. Portanto, $\varphi(f) \in Ker\psi$ e deste modo $\varphi(f) \in T(A)$.

Reciprocamente, dado I um T-ideal de $K\langle X\rangle$, consideremos a álgebra quociente $B = K\langle X\rangle/I$ e a projeção canônica $\pi : K\langle X\rangle \to K\langle X\rangle/I$. Se $f \in T(B)$, então $f \in Ker\pi$. Como $Ker\pi = I$, temos que $T(B) \subseteq I$. Por outro lado, se $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ e $g_1, \ldots, g_n \in K\langle X\rangle$, então $f(g_1, \ldots, g_n) \in I$ e daí $f(\bar{g_1}, \ldots, \bar{g_n}) = \overline{f(g_1, \ldots, g_n)} = \bar{0}$. Assim, $I \subseteq T(B)$ e disso segue o resultado. ■

É possível mostrar que a interseção de uma família qualquer de T-ideais ainda é um T-ideal. Portanto, dado um subconjunto S qualquer de $K\langle X\rangle$, podemos definir o ***T*-ideal gerado por S**, o qual denotaremos por $\langle S\rangle_T$, como sendo a interseção de todos os T-ideias de $K\langle X\rangle$ que contêm S. Assim, $\langle S\rangle_T$ é o menor T-ideal de $K\langle X\rangle$ contendo S.

Observação 1.5.4 *$\langle S\rangle_T$ é o subespaço de $K\langle X\rangle$ gerado por*

$$\{h_1 f(g_1, \ldots, g_n) h_2 \ ; \ h_1, h_2, g_1, \ldots g_n \in K\langle X\rangle \ e \ f \in S\}.$$

Se $\mathcal{V}$ é uma variedade de álgebras. Definimos o T-ideal da variedade $\mathcal{V}$, denotado por $T(\mathcal{V})$, como sendo a interseção de todos os T-ideais $T(A)$ com $A \in \mathcal{V}$. A variedade de álgebras definida por $T(\mathcal{V})$ é chamada de variedade gerada por $\mathcal{V}$ e denotada por $var(\mathcal{V})$. Se $\mathcal{V} = \{A\}$, então denotamos $var(\mathcal{V})$ simplesmente por $var(A)$. Observe que a variedade definida por S é igual à variedade definida por $\langle S \rangle_T$.

Exemplo 1.5.5 *A classe de todas as álgebras associativas é uma variedade, definida pelo subconjunto $S = \{0\}$ de $K\langle X \rangle$.*

Exemplo 1.5.6 *A classe de todas as álgebras associativas e comutativas é uma variedade, definida pelo subconjunto $S = \{[x_1, x_2]\}$ de $K\langle X \rangle$.*

Definição 1.5.7 *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebra. Dizemos que uma álgebra $F \in \mathcal{V}$ é uma* **álgebra relativamente livre de $\mathcal{V}$** *se existe um subconjunto Y (enumerável) gerador de F tal que para toda álgebra $A \in \mathcal{V}$ e toda aplicação $\rho : Y \to A$ existe um único homomorfismo $\varphi : F \to A$ que estende ρ. F é então dita ser livremente gerada por Y. Além disso, a cardinalidade de Y é chamada posto de F.*

Exemplo 1.5.8 *$K\langle X \rangle$ é relativamente livre, livremente gerada por X, na variedade $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\{0\})$.*

O teorema seguinte caracteriza as álgebras relativamente livres em qualquer variedade.

Teorema 1.5.9 *Seja $\mathcal{V}$ a variedade de álgebras associativas definida pelo conjunto $S = \{f_i \ ; \ i \in I\} \subseteq K\langle X \rangle$. Se Y é um conjunto (não vazio) e $\langle S \rangle_T$ é o T-ideal de $K\langle Y \rangle$, então $A = K\langle Y \rangle / \langle S \rangle_T$ é a álgebra relativamente livre na variedade $\mathcal{V}$, livremente gerada por $\overline{Y} = \{\overline{y} = y + \langle S \rangle_T \ ; \ y \in Y\}$. Além disso, duas álgebras relativamente livres em $\mathcal{V}$ de mesmo posto são isomorfas.*

Demonstração: Sejam $f_i(x_1, \ldots, x_n) \in S$ e $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_n$ elementos arbitrários de A, onde $\bar{g}_j = g_j + \langle S \rangle_T$, com $g_j \in K\langle Y \rangle$. Então, $f_i(\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_n) = \overline{f_i(g_1, g_2, \ldots, g_n)} = \bar{0}$ em A, uma vez que $f_i(g_1, g_2, \ldots, g_{n_i}) \in \langle S \rangle^T$. Logo, $A \in \mathcal{V}$.

Resta provar a propriedade universal de A. Seja $R \in \mathcal{V}$ e $\phi : \overline{Y} \to R$ uma aplicação. Considere agora a aplicação

$$\begin{aligned} \theta : Y &\to R \\ y &\to \theta(y) = \phi(\bar{y}). \end{aligned}$$

Seja $\theta_1 : K\langle Y\rangle \to R$ o homomorfismo de álgebras que estende θ. Como $S \subseteq T(R)$ e daí $\langle S\rangle_T \subseteq Ker\theta_1$, temos que a aplicação

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_1 : A &\to R \\ \bar{g} &\to \bar{\theta}(\bar{g}) = \phi(\bar{g}), \end{aligned}$$

é bem definida e é o único um homomorfismo de álgebras que estende ϕ.

Suponha agora A_1 e A_2 relativamente livres em $\mathcal{V}$, com conjuntos geradores livres Y_1 e Y_2 de mesma cardinalidade. Sejam $g : Y_1 \to Y_2$ bijetora, g e g^{-1} se estendendo aos homomorfismos $\varphi_1 : A_1 \to A_2$ e $\varphi_2 : A_2 \to A_1$, respectivamente. Daí, $(\varphi_1 \circ \varphi_2)(y_2) = y_2$ e $(\varphi_2 \circ \varphi_1)(y_1) = y_1$, para quaisquer $y_1 \in Y_1$ e $y_2 \in Y_2$. Logo, $\varphi_1 = \varphi_2^{-1}$. ■

1.6 T-espaços e Polinômios Centrais

Seja A uma álgebra associativa com unidade, e considerando $Z(A)$ o centro de A.

Definição 1.6.1 *Dizemos que* $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ *é um* **polinômio central** *para* A *se* f *tem termo constante nulo e* $f(a_1, \ldots, a_n) \in Z(A)$*, para quaisquer* $a_1, \ldots, a_n \in A$*. Denotaremos por* $C(A) \subseteq K\langle X\rangle$ *o conjunto de todos os polinômios centrais de* A*.*

Observação 1.6.2 *De acordo com esta definição, dizer que* f *é um polinômio central para* A *significa dizer que* $[f, g]$ *é uma identidade polinomial para* A*, para todo polinômio* $g \in K\langle X\rangle$*. Segue que se duas álgebras são PI-equivalentes, então elas têm exatamente os mesmos polinômios centrais.*

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.6.3 *As identidades polinomiais de* A *são claramente polinômios centrais. Chamamos esses polinômios de* **polinômios centrais triviais***.*

Exemplo 1.6.4 *Seja $A = M_2(K)$. Então $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]^2$ é um polinômio central não trivial de A.*

Exemplo 1.6.5 *Sejam K um corpo qualquer e E a álgebra de Grassmann sobre K. Temos que $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$ é um exemplo de polinômio central para E. No caso de $charK = p > 0$, temos que $g(x) = x^p$ é um polinômio central para E.*

Definição 1.6.6 *Um subespaço V de $K\langle X\rangle$ é dito ser um T-espaço se $\varphi(V) \subseteq V$, para todo $\varphi \in End(K\langle X\rangle)$.*

É fato conhecido que dado um subconjunto $\{g_i \ ; \ i \in \mathbb{N}\}$ de $K\langle X\rangle$, existe um único endomorfismo φ de $K\langle X\rangle$ tal que $\varphi(x_i) = g_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim, dizer que V é um T-espaço de $K\langle X\rangle$ significar dizer que V é um subespaço de $K\langle X\rangle$, tal que $f(g_1, \ldots, g_n) \in V$, para quaisquer $f(x_1, \ldots, x_n) \in V$ e $g_1, \ldots, g_n \in K\langle X\rangle$.

Exemplo 1.6.7 *Todo T-ideal de $K\langle X\rangle$ é um T-espaço. O corpo K é também um exemplo de T-espaço de $K\langle X\rangle$.*

Podemos verificar que a interseção de uma família qualquer de T-espaços ainda é um T-espaço. Assim, dado um subconjunto S de $K\langle X\rangle$, podemos definir $V = V(S)$, o **T-espaço de $K\langle X\rangle$ gerado por S**, como sendo a interseção de todos os T-espaços que contém S, ou seja, $V(S)$ é o menor T-espaço que contém S. O próximo resultado nos dará uma caracterização do T-espaço gerado por um conjunto.

Proposição 1.6.8 *Se $S \subseteq K\langle X\rangle$ e $V = V(S)$, então V é o subespaço de $K\langle X\rangle$ gerado por*

$$\{f(g_1, \ldots, g_n) \ ; \ f \in S, g_1, \ldots, g_n \in K\langle X\rangle\}$$

Demonstração: Comecemos observando que o conjunto definido acima é exatamente igual a

$$(EndK\langle X\rangle)(S) = \{\varphi(f) \ ; \ \varphi \in End(K\langle X\rangle)ef \in S\}.$$

Seja V_1 o subespaço de $K\langle X\rangle$ gerado por $(EndK\langle X\rangle)(S)$. Como $S \subseteq V$ segue que $\varphi(S) \subseteq V$, para todo $\varphi \in EndK\langle X\rangle$. Logo $(EndK\langle X\rangle)(S) \subseteq V$ e portanto $V_1 \subseteq V$.

Por outro lado, como $\psi(g) \in (EndK\langle X\rangle)(S)$, para todo $\psi \in EndK\langle X\rangle$ e para todo $g \in S$ segue que V_1 é um T-espaço com $S \subseteq V_1$. Concluímos então que $V \subseteq V_1$, o que conclui a demonstração. ■

Observação 1.6.9 *Sejam* $S \subseteq K\langle X\rangle$ *e* J *o* T*-ideal gerado por* S*. Tomando*

$$S_1 = \{x_{n+1}f(x_1,\ldots,x_n)x_{n+2} \ ; \ f \in S\}$$

temos que J *é exatamente o* T*-espaço de* $K\langle X\rangle$ *gerado por* S_1*. Assim, a partir de uma base de um* T*-ideal é possível construir um conjunto capaz de gerá-lo como* T*-espaço.*

1.7 Polinômios Multihomogêneos, Multilineares e Próprios

Os resultados apresentados nesta seção serão ferramentas básicas no decorrer de todo nosso trabalho.

Definição 1.7.1 *Sejam* $m \in K\langle X\rangle$ *um monômio e* $x_i \in X$*. Definimos o grau de* m *em* x_i*, denotado por* $deg_{x_i}m$*, como sendo o número de ocorrências de* x_i *em* m*. Um polinômio* $f \in K\langle X\rangle$ *é dito* **homogêneo** *em* x_i*, se todos os seus monômios têm o mesmo grau em* x_i*. Em particular, um polinômio em* $K\langle X\rangle$ *é dito* **multihomogêneo** *quando é homogêneo em todas as variáveis.*

Dado $m = m(x_1,\ldots,x_k)$ um monômio em $K\langle X\rangle$, definimos o **multigrau** de m como sendo a k-upla $(a_1,\ldots,a_k)$, onde $a_i = deg_{x_i}m$. Sendo $f \in K\langle X\rangle$ a soma de todos os monômios de f com um dado multigrau é chamado de **componente multihomogêneo** de f. Quando $f \in K\langle X\rangle$ possui uma única componente multihomogêneo, dizemos que f é **multihomogêneo**.

Exemplo 1.7.2 *O polinômio* $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2^2 + x_2x_1x_3^2$ *é homogêneo em* x_1*, mas não é multihomogêneo.*

Teorema 1.7.3 *Seja* K *um corpo infinito. Se* $f \equiv 0$ *é uma identidade polinomial para a algebra* A*, então toda componente multihomogêneo de* f *é também uma identidade polinomial para* A*. Consequentemente,* $T(A)$ *é gerado por seus polinômios multihomogêneos.*

Demonstração: Ver [20], p. 6. ■

Definição 1.7.4 *Um polinômio $f \in K\langle X\rangle$ é* **linear** *na variável x_i se x_i ocorre com grau 1 em todos os monômios de f. Em particular, $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in K\langle X\rangle$ é* **multilinear** *se é multihomogêneo de multigrau $(1, 1, \ldots, 1)$. Neste caso f pode ser escrito na forma*

$$\sum_{\sigma \in S_k} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(k)}, \text{ com } \alpha_\sigma \in K.$$

Denotaremos por P_n o espaço vetorial dos polinômios multilineares de $K\langle X\rangle$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$. É fácil observar que $\beta = \{x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)} \ ; \ \sigma \in S_n\}$ é uma base para P_n.

Proposição 1.7.5 *Seja A uma K-algebra gerada por um conjunto β sobre K. Se um polinômio multilinear f se anula sobre elementos de β, então f é uma identidade polinomial de A.*

Demonstração: Ver [20], p. 7. ■

Exemplo 1.7.6 *A álgebra de Grassmann E satisfaz a identidade $[x_1, x_2, x_3]$.*

De fato, sejam $e_{i_1} \ldots e_{i_n}, e_{j_1} \ldots e_{j_m}$ e $e_{k_1} \ldots e_{k_r}$ elementos da base de E. Observe que

$$[e_{i_1} \ldots e_{i_n}, e_{j_1} \ldots e_{j_m}] = (1 - (-1)^{nm}) e_{i_1} \ldots e_{i_n} e_{j_1} \ldots e_{j_m}$$

Se $[e_{i_1} \ldots e_{i_n}, e_{j_1} \ldots e_{j_m}] \neq 0$, então n e m são ímpares. Consequentemente, $e_{i_1} \ldots e_{i_n} e_{j_1} \ldots e_{j_m} \in E^{(0)}$ e dessa forma $[e_{i_1} \ldots e_{i_n}, e_{j_1} \ldots e_{j_m}, e_{k_1} \ldots e_{k_r}] = 0$, para qualquer $r \in \mathbb{N}$. Se $[e_{i_1} \ldots e_{i_n}, e_{j_1} \ldots e_{j_m}] = 0$, então $[e_{i_1} \ldots e_{i_n}, e_{j_1} \ldots e_{j_m}, e_{k_1} \ldots e_{k_r}] = 0$. Além disso, concluímos que E é uma PI-álgebra.

Agora, observaremos um exemplo que ilustra o processo de multilinearização. Para maiores detalhes sobre este método ver [23], pág. 14.

Exemplo 1.7.7 *Se $f = x_1^2$, então $g = (x_1 + x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2 = x_1 x_2 + x_2 x_1$, que é multilinear.*

O próximo resultado é uma importante consequência desse método.

Teorema 1.7.8 *Se $charK = 0$, então $f \equiv 0$ é equivalente a um conjunto finito de identidades polinomiais multilineares.*

Demonstração: Pelo Teorema 1.7.3, f é equivalente ao conjunto de suas componentes multihomogêneas. Assim, podemos supor que $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_3)$ é multihomogêneo. Aplicamos a f o processo de multilinearização: se $deg_{x_1} f = d > 1$, então escrevemos:

$$h = f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{d} g_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n),$$

onde $deg_{y_1} g_i = i$, $deg_{y_2} g_i = d - i$ e $deg_{x_t} g_i = deg_{x_t} f$, para todo $t = 2, \ldots, n$. Assim todos os polinômios $g_i = g_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, d-1$ são consequências de f. Note que para todo i,

$$g_i(y_1, y_1, x_2, \ldots, x_n) = \binom{d}{i} f(y_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Como $charK = 0$, teremos $\binom{d}{i} \neq 0$, portanto f é uma consequência de qualquer g_i, $i = 1, \ldots, d-1$. Aplicando indução podemos completar a demonstração. ■

Corolário 1.7.9 *Seja $charK = 0$. Se I é um T-ideal de $K\langle X\rangle$, então I é gerado por seus polinômios multilineares.*

Seja X um conjunto enumerável e bem ordenado, e considere o conjunto

$$ComX = \{[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}]\ ;\ k \geq 2, x_{i_j} \in X\}.$$

Sejam $B = B(X)$ a subálgebra (com unidade) de $K\langle X\rangle$ gerada por $ComX$. Os polinômios de B são chamados de **polinômios próprios**. Defini-se $B_m = B \cap K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle$, para $m = 1, 2, \ldots$, e $\Gamma_n = B \cap P_n$, para $n = 1, 2, \ldots$.

Caso A seja uma PI-álgebra, denotaremos por $B(A), B_m(A)$ e $\Gamma_m(A)$ as imagens pelo homomorfismo projeção de B, B_m e Γ_n em $K\langle X\rangle/T(A)$, respectivamente.

Consideremos a álgebra de Lie $L(X)$, dada na seção 1.3. Uma base ordenada para $L(X)$ consiste dos elementos

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_m, \ldots$$

onde $\{u_1, u_2, \ldots\} \subseteq ComX$. As incógnitas precedem os comutadores e os comutadores de comprimento n precedem os comutadores de comprimento k, com $n \leq k$. Dos Teoremas 1.3.5 e 1.3.6, segue que $K\langle X\rangle$ possui uma base formada pelos elementos

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k} u_{j_1} \ldots u_{j_q}, k, q, n_i \geq 0 \qquad (1.3)$$

onde $j_1 < j_2 < \ldots < j_q$. Além disso, os elementos da base tais que $n_i = 0$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ formam uma base para $B(X)$ e se $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$, então

$$f = \sum_a \alpha_a {x_1}^{a_1} {x_2}^{a_2} \ldots {x_n}^{a_n} g_a \tag{1.4}$$

onde $g_a \in B, \alpha_a \in K$ e $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, com $a_i \geq 0$. Além disso, pela independência linear dos elementos em (1.3), temos que esta maneira de expressar f é única (para maiores detalhes ver [19], p. 43). Deste comentário, segue a seguinte proposição.

Proposição 1.7.10 *Suponha que os elementos*

$$x_1, x_2, \ldots, [x_{i_1}, x_{i_2}], \ldots, [x_{l_1}, \ldots, x_{l_p}]$$

formem uma base ordenada de $L(X)$, onde os elementos $x_i \in X$ precedem os comutadores. Então

1. *O espaço vetorial $K\langle X\rangle$ tem uma base formada pelos elementos*

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_m^{a_m} [x_{i_1}, x_{i_2}]^b \ldots [x_{l_1}, \ldots, x_{l_p}]^c,$$

   onde $a_1, \ldots, a_m, b, \ldots, c \geq 0$ e $[x_{i_1}, x_{i_2}] < \ldots < [x_{l_1}, \ldots, x_{l_p}]$ na ordenação da base de $L(X)$;

2. *Os elementos desta base tais que $a_i = 0$, para $i = 1 \ldots, m$, formam uma base para o espaço vetorial B.*

Proposição 1.7.11 *Se A é uma PI-álgebra associativa com unidade sobre um corpo infinito K, então todas as identidades polinomiais de A seguem de suas identidades próprias. Se $charK = 0$, então todas as identidades polinomiais de A seguem de suas identidade próprias multilineares.*

Demonstração: Ver [19], p.43. ■

1.8 Identidades Estáveis, Elementos e Matrizes Genéricas

Nesta seção faremos um estudo resumido sobre identidades estáveis, elementos genéricos e matrizes genéricas, e introduziremos alguns resultados que serão úteis nos Capítulos 3 e 5.

Considere A uma álgebra qualquer, C uma álgebra comutativa e a álgebra $A \otimes_K C$. Algumas das identidades polinomiais de A podem não ser identidades para $A \otimes_K C$. Assim, segue a seguinte definição.

Definição 1.8.1 *Seja f uma identidade da álgebra A. Dizemos que f é uma* **identidade estável** *de A, se para toda álgebra comutativa C, f ainda é uma identidade para $A \otimes_K C$.*

Exemplo 1.8.2 *Se K é um corpo com n elementos, então $f(x) = x^n - x$ é uma identidade para K, vista como álgebra, mas não é identidade para qualquer extensão própria de K. De fato, basta tomar C uma extensão do corpo K com mais de n elementos, logo $c^n \neq c$, para algum $c \in C$. Assim, para $a \in K$ não nulo,*

$$f(a \otimes c) = (a \otimes c)^n - (a \otimes c) = a^n \otimes c^n - a \otimes c = a \otimes c^n - a \otimes c = a \otimes (c^n - c) \neq 0$$

Portanto, f não é estável.

Lema 1.8.3 *Se K é um corpo infinito e A é uma K-álgebra, então toda identidade de A é estável.*

Demonstração: Sejam $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ uma identidade polinomial de A, C uma K-álgebra comutativa e $\bar{A} = A \otimes_K C$. Como K é infinito, podemos assumir que f é multihomogêneo de multigrau $(m_1, \ldots, m_n)$. Dados $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \in \bar{A}$ devemos mostrar que $f(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) = 0$.

Suponha, inicialmente, que $\bar{a}_1 = a_1 \otimes c_1, \ldots, \bar{a}_n = a_n \otimes c_n$, com $a_1, \ldots, a_n \in A$ e $c_1, \ldots, c_n \in C$. Como f é multihomogêneo, então

$$f(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) = f(a_1, \ldots, a_n) \otimes {c_1}^{m_1} \ldots {c_n}^{m_n} = 0.$$

Supondo agora $\bar{a}_1 = b_1 \otimes d_1 + b_2 \otimes d_2, \ldots, \bar{a}_n = a_n \otimes c_n$, pelo processo de multilinearização teremos que,

$$\begin{aligned} f(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) &= f(b_1 \otimes d_1, a_2 \otimes c_2, \ldots, a_n \otimes c_n) + f(b_2 \otimes d_2, a_2 \otimes c_2, \ldots, a_n \otimes c_n) \\ &+ \sum_{i=1}^{m_1-1} f_i(b_1 \otimes d_1, b_2 \otimes d_2, a_2 \otimes c_2, \ldots, a_n \otimes c_n), \end{aligned}$$

onde

$$f(x_1 + y_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(y_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m_1-1} f_i(x_1, y_1, x_2, \ldots, x_n)$$

e $deg_{x_1} f_i = i$ e $deg_{y_1} f_i = m_1 - i$. Como todo polinômio f_i é consequência multihomogêneo de f segue da primeira parte do argumento que $f(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) = 0$. Por fim, generalizando o argumento anterior para $\bar{a}_1 = \sum a_{1i} \otimes c_{1i}, \ldots, \bar{a}_n = \sum a_{ni} \otimes c_{ni}$, onde $a_{ij} \in A$ e $c_{ij} \in C$ são arbitrários. Daí, escrevendo $f(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)$ como uma soma de expressões da forma

$$\bar{g} = g(a_{i_1 j_1} \otimes c_{i_1 j_1}, \ldots, a_{i_k j_k} \otimes c_{i_k j_k}),$$

onde $g = g(x_1, \ldots, x_k)$ é consequência multihomogênea de f, novamente pelo argumento inicial temos que $f(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) = 0$. ■

Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo K. Considere $\{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de A sobre K. Tome agora $\xi_j^{(i)}$ para $i \geq 1, 1 \leq j \leq m$, variáveis comutativas e assim podemos considerar $K[\xi_j^{(i)}]$ a álgebra dos polinômios com coeficientes em K. Construímos $B = A \otimes K[\xi_j^{(i)}]$, a álgebra produto tensorial de A e $K[\xi_j^{(i)}]$.

Definição 1.8.4 *Os elementos*

$$\xi^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} u_j \otimes \xi_j^{(i)}, \ \ com\ i = 1, 2, \ldots$$

são chamados **elementos genéricos**. *A subálgebra $\bar{A}$ de B gerada por $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots$ sobre K é chamada* **álgebra dos elementos genéricos** *de A.*

Teorema 1.8.5 *Se K é infinito, então a álgebra $\bar{A}$ é uma álgebra relativamente livre de posto enumerável na variedade $\mathcal{V} = \mathcal{V}(A)$, isto é, $\bar{A} \simeq K\langle X\rangle / T(A)$, onde X é enumerável.*

Demonstração: Sejam $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável e $\varphi : K\langle X\rangle \to \bar{A}$ o homomorfismo induzido pela aplicação $x_i \to \xi^{(i)}$, com $i = 1, 2, \ldots$. Demonstraremos que $Ker\varphi = T(A)$.

Pelo Lema 1.8.3, teremos que $T(A \otimes K[\xi_j^{(i)}]) = T(A)$, assim $T(A) \subseteq Ker\varphi$.

Reciprocamente, suponha que $g = g(x_1, \ldots, x_m) \in Ker\varphi$, isto é, $g = g(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)}) = 0$ em $\bar{A}$ e sejam $a_1, \ldots, a_m$ elementos arbitrários de A. Podemos escrever cada a_i como combinação linear de elementos da base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de A, ou seja,

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^i u_j, \text{ com } \lambda_1^i, \ldots, \lambda_n^i \in K$$

Como $K[\xi_j^{(i)}]$ é uma álgebra comutativa livre de posto enumerável, qualquer aplicação $\xi_j^{(i)} \to \lambda_j^{(i)}$ se estende a um homomorfismo $K[\xi_j^{(i)}] \to K$. Assim, devido à propriedade universal do produto tensorial, o homomorfismo de álgebras $\psi : A \otimes K[\xi_j^{(i)}] \to A$, onde $\psi(\xi^{(i)}) = a_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, estende a aplicação:

$$u_j \otimes \xi_j^{(i)} \to \lambda_j^{(i)} u_j, \text{ para } j = 1, \ldots, n \text{ e } i = 1, \ldots, m.$$

Assim,

$$0 = \psi(g(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)})) = g(\psi(\xi^{(1)}), \ldots, \psi(\xi^{(n)})) = g(a_1, \ldots, a_n)$$

Como $a_1, \ldots, a_n$ são elementos arbitrários de A, $g \equiv 0$ é uma identidade para A e $Ker\varphi = T(A)$. ■

Um caso interessante é quando $A = M_n(K)$, a álgebra das matrizes de ordem n sobre K. Neste caso, escolhendo as matrizes elementares E_{ij}'s como base de $M_n(K)$ e $K[\xi_{ij}^{(t)}]$ a álgebra dos polinômios com coeficientes em K, nas variáveis $\xi_{ij}^{(t)}$, com $t \geq 1, 1 \leq i, j \leq n$, então

$$M_n(K) \otimes_K K[\xi_{ij}^{(t)}] \simeq M_n(K[\xi_{ij}^{(t)}]),$$

isso motiva a seguinte definição.

Definição 1.8.6 *Sejam E_{ij} as matrizes que formam a base canônica do espaço vetorial $M_n(K)$. As matrizes $n \times n$*

$$y_r = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_{ij}^{(r)} E_{ij}, \; r = 1, 2, \ldots$$

são chamadas **matrizes genéricas de ordem *n***. *A álgebra Gen_n gerada pelas matizes y_r é chamada* **álgebra das matrizes genéricas de ordem *n***.

Corolário 1.8.7 *A álgebra Gen_n das matrizes genéricas de ordem n sobre o corpo infinito K é a algebra relativamente livre de posto enumerável na variedade gerada por $M_n(K)$. Ou seja, $Gen_n \simeq K\langle X\rangle/T(M_n(K))$, onde X é enumerável.*

Demonstração: Ver [17], Proposição 1.3.2, pág. 13. ■

Capítulo 2

Álgebras com Involução

Neste capítulo iremos fazer um breve estudo sobre involuções, estudar os conceitos básicos sobre uma álgebra com involução, como também, iremos construir uma álgebra livre com involução com o objetivo de apresentar os conceitos de identidades e polinômios centrais com involução. Além disso, iremos classificar as involuções em álgebras centrais simples afim de servir como embasamento teorico para os capítulos posteriores.

Em todo o capítulo, K denotará um corpo de característica diferente de 2 e, a menos de menção contrária, A denotará uma álgebra associativa com unidade.

2.1 Conceitos Básicos

Nesta seção estudaremos o conceito de involução. Vamos ver exemplos e propriedades básicas para álgebras com involução.

Definição 2.1.1 *Seja A uma K-álgebra. Dizemos que uma aplicação $* : A \to A$ dada por $a \mapsto a^*$ é uma involução de A, se satisfaz:*

(1) $a^{**} = a$,

(2) $(a+b)^* = a^* + b^*$,

(3) $(ab)^* = b^*a^*$,

para quaisquer $a, b \in A$.

Escrevemos $*$ para denotar uma dada involução de uma álgebra. As K-álgebras com involução formam uma classe. Vamos chamar essas álgebras de $*$-álgebras sobre o corpo K. Uma álgebra A com involução $*$ é denotada por $(A,*)$.

Observação 2.1.2 *Note que:*

(i) Sendo $*$ uma involução em A, onde A é uma álgebra associativa com unidade temos que $a \cdot 1^* = 1^* \cdot a = a$ e assim $1^* = 1$.

(ii) A involução $*$ é uma transformação linear se, e somente se, $*$ restrito ao corpo K é a aplicação identidade.

Seja $Z(A)$ o centro da álgebra A, já foi mencionado que $Z(A)$ é uma subálgebra de A. Denotamos $Z(A,*) = \{a \in Z(A) \ ; \ a^* = a\}$.

Definição 2.1.3 *Diremos que $*$ é do primeiro tipo se a involução é uma transformação linear, caso contrário, dizemos que é do segundo tipo.*

Vejamos alguns exemplos de involuções.

Exemplo 2.1.4 *A aplicação $t : M_n(K) \to M_n(K)$, definida por $A^t =$ transposta de A, é uma involução do **primeiro tipo** em $M_n(K)$, chamada de **involução transposta**.*

Exemplo 2.1.5 *A aplicação $s : M_{2n}(K) \to M_{2n}(K)$, definida por*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{pmatrix}$$

*onde $A, B, C, D \in M_n(K)$, é uma involução do **primeiro tipo** em $M_{2n}(K)$, chamada de **involução simplética**.*

Exemplo 2.1.6 *Considerando $M_2(\mathbb{C})$ como uma $\mathbb{C}$-álgebra, temos que $* : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$, definida por*

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 & \bar{z}_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_4 \end{pmatrix}$$

*é uma involução do **segundo tipo***

Observação 2.1.7 *Se $*$ é uma involução em A, então $G_* = \{x \in U(A)\ ;\ x^*x = 1\}$ é um subgrupo de $U(A)$ (elementos invertíveis da álgebra A). No caso $A = M_n(K)$, temos $U(A) = GL_n(K)$, o grupo linear, e $G_t = O_n(K)$, o grupo ortogonal (logo, a involução transposta é também chamada de ortogonal). Se n é par, temos $G_s = Sp_n(K)$, o grupo simplético.*

Definição 2.1.8 *Dizemos que um elemento $a \in (A, *)$ é **simétrico** se $a^* = a$ e é **antissimétrico** se $a^* = -a$.*

Denotaremos por $A^+ = \{a \in A\ ;\ a^* = a\}$ e $A^- = \{a \in A\ ;\ a^* = -a\}$, os subespaços de A dos elementos simétricos e dos elementos antissimétricos, respectivamente, e teremos $A^+ \cap A^- = \{0\}$.

Observe ainda que:

$$(a + a^*)^* = a^* + a = a + a^*$$
$$\text{e}$$
$$(a - a^*)^* = a^* - a = -(a - a^*).$$

Logo, $a + a^* \in A^+$ e $a - a^* \in A^-$. Como a característica do corpo K é diferente de 2, podemos considerar que

$$a = \frac{(a + a^*)}{2} + \frac{(a - a^*)}{2}.$$

Portanto, $A = A^+ \oplus A^-$.

Considerando A uma álgebra, definimos a álgebra oposta de A, denotada por A^{op}, como tendo a mesma estrutura aditiva de A, mas com multiplicação na ordem reversa, isto é, o produto entre a e a' em A^{op} será $a'a$. Daí, dadas A_1 e A_2 álgebras, dizemos que uma transformação linear

$$\psi : A_1 \to A_2,$$

é um **antihomomorfismo** se $\psi(ab) = \psi(b)\psi(a)$, para todo $a, b \in A_1$. Se ψ for um isomorfismo de espaços vetoriais, dizemos que ψ é um **antiisomorfismo**, e se $A_1 = A_2$, chamamos ψ de **antiautomorfismo** de A_1.

Observação 2.1.9 *(i) A aplicação*

$$\begin{aligned} \varphi : A &\to A^{op} \\ r &\to r \end{aligned}$$

é um antiisomorfismo se, e somente se, A e A^{op} são isomorfos como espaços vetoriais.

(ii) *Uma involução é um antiautomorfismo σ tal que $\sigma^2 = 1$, ou seja, possui ordem 2.*

Definição 2.1.10 *(i) Um homomorfismo com involução $\psi : (A_1, *) \to (A_2, \eta)$ é um homomorfismo $\psi : A_1 \to A_2$ tal que $\psi(a^*) = \psi(a)^\eta$, para todo $a \in A_1$. Nestas condições, dizemos que ψ é um $*$-homomorfismo.*

(ii) *Dizemos que I é um ideal de $(A, *)$ se I é um ideal de A e $I^* \subseteq I$. Isto é equivalente a dizer que I é um $*$-ideal de A.*

Além disso, se I é um $*$-ideal, claramente $(*)$ induz uma involução sobre A/I por $(a + I)^* = a^* + I$, e observe ainda que a aplicação canônica $A \to A/I$ é um $*$-homomorfismo sobrejetivo, cujo núcleo é o $*$-ideal I. É fácil verificar que o núcleo de todo $*$-homomorfismo é um $*$-ideal.

2.2 Álgebra Livre com Involução

Antes de falar sobre identidades e polinômios centrais com involução devemos definir a álgebra associativa livre com involução, ambiente importante para o desenvolvimento dos capítulos posteriores.

Seja $\tilde{Z} = \{z_i \ ; \ i \in \mathbb{N}\}$ um conjunto enumerável. Considere uma aplicação sobre $\tilde{Z}$, dada por

$$z_{2i-1} \to z_{2i} \qquad \text{e} \qquad z_{2i} \to z_{2i-1}$$

para todo i. Claramente os conjuntos $Z = \{z_{2i-1} \ ; \ i \in \mathbb{N}\}$ e $Z^* = \{z_{2i} \ ; \ i \in \mathbb{N}\}$ são disjuntos. Renomeamos as indeterminadas, escrevendo z_i e z_i^*, ao invés de z_{2i-1} e z_{2i}, respectivamente. Definimos assim um antiautomorfismo

$$* : K\langle Z, Z^* \rangle \to K\langle Z, Z^* \rangle$$

que estende a aplicação acima.

Denotaremos $K\langle Z, * \rangle = K\langle Z, Z^* \rangle$. Claramente, $z^{**} = z$, para todo $z \in Z \cup Z^*$.

Além disso, sejam (A, η) uma álgebra qualquer com involução η e $h : Z \cup Z^* \to A$ uma aplicação qualquer. Para cada $i \in \mathbb{N}$, denotaremos por a_i a imagem de z_i por h, analogamente por a_i^* a imagem de z_i^*. Denotando agora por M_* o conjunto de todos os monômios formados por elementos de $Z \cup Z^*$, e considerando $a_{i_1}^{\theta_1}, \ldots, a_{i_n}^{\theta_n}$ elemento da η-álgebra A, com $\theta_j \in \{1, \eta\}$, para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entenderemos a expressão $(a_{i_1}^{\theta_1} \ldots a_{i_n}^{\theta_n})^\eta$ como sendo a imagem do monômio $(z_{i_n}^{\star_n} \ldots z_{i_1}^{\star_1})^*$, com $\star_l \in \{1, *\}$, pela aplicação $K\langle Z, *\rangle \to (A, \eta)$ que estende h, para todo $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Como M_* é uma base para o espaço vetorial $K\langle Z, *\rangle$, então podemos estendê-la naturalmente pela involução sobre a álgebra associativa livre $K\langle Z\rangle$. Então, pelo que foi discutido obtemos o seguinte teorema.

Teorema 2.2.1 *$K\langle Z, *\rangle$ é uma álgebra associativa com involução livremente gerada por Z.*

Segue que a álgebra $K\langle Z, *\rangle = K\langle Z, Z^*\rangle = K\langle z, z^* \ ; \ z \in Z\rangle$ será chamada de *álgebra associativa livre com involução gerada por Z sobre o corpo K* e seus elementos podem ser escritos da forma

$$f(z_1, \ldots, z_n, {z_1}^*, \ldots, {z_n}^*) = \sum_{j,\theta} \alpha_{j,\theta} {z_{j_1}}^{\theta_1} \ldots {z_{j_m}}^{\theta_m}, \text{ onde } z_i \in Z,\ \alpha_{j,\theta} \in K \text{ e } \theta_r \in \{1, *\}$$

Esses elementos são chamados de *$*$-polinômios* e cada $*$-polinômio pode ser escrito como combinação linear de elementos de M_* que são chamados *$*$-monômios.*

Para um $*$-monômio h, denotaremos por $deg_i(h)$, o número de vezes que x_i e ${x_i}^*$ aparecem em h. Por exemplo, para $h = {x_1}^* {x_2}^* {x_2}^2$, temos $deg_1(h) = 1, deg_2(h) = 3$ e $deg_j(h) = 0$, para $j \geq 3$. Para um $*$-polinômio f,

$$deg^i(f) = max\{deg_i(h) \ ; \ h \text{ é um } *\text{-monômio de } f\}$$

e

$$deg_i(f) = min\{deg_i(h) \ ; \ \text{ é um } *\text{-monômio de } f\}.$$

Escrevendo $f(x_1, \ldots, x_t, {x_1}^*, \ldots, {x_t}^*)$ tem-se $deg^i(f) = deg_i(f) = 0$, para todo $i > t$.

Definição 2.2.2 *Sendo f um $*$-polinômio, dizemos que f é:*

(i) **Homogêneo** *na i-ésima variável, se $deg^i(f) = deg_i(f)$;*

(ii) **Multihomogênea**, *se f é homogêneo em cada variável (que ocorre em f);*

(iii) **Linear** *na i-ésima variável, se $deg^i(f) = deg_i(f) = 1$;*

(iv) **Multilinear**, *se f é linear em cada variável (que ocorre em f).*

2.3 Identidades e Polinômios Centrais com Involução

Nesta seção faremos um estudo semelhante ao feito no Capítulo 1, Seção 1.4. Iremos associar os principais conceitos e resultados do estudo feito anteriormente afim de dar um embasamento teórico ao nosso trabalho. Em todo trabalho, vamos considerar somente as involuções do primeiro tipo, pois é conhecido que se $*$ é uma involução do segundo tipo sobre as álgebras das matrizes, então todas as $*$-identidades são ordinárias (ver [32] Proposição 2.3.39, p. 132).

Analogamente ao caso de identidade polinomial (PI) em uma álgebra A, vamos definir uma identidade polinomial com involução ou $*$-identidade polinomial ($*$-PI) em uma álgebra $(A, *)$ com involução.

Definição 2.3.1 *Um $*$-polinômio $f(z_1, \ldots, z_n, z_1^*, \ldots, z_n^*) \in K\langle Z, Z^*\rangle$ é dito ser uma identidade polinomial com involução ou, simplesmente, $*$-identidade polinomial ($*$-PI) para uma $*$-álgebra A, se $f(a_1, \ldots, a_n, a_1^*, \ldots, a_n^*) = 0$, para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$.*

Diremos que uma $*$-PI f é uma **$*$-PI especial** se ao substituirmos as entradas z_i^* por quaisquer elementos de A obtivermos uma PI no sentido ordinário, ou seja, se ao fizermos $z_i^* = y_i$, e obtemos que $f(z_1, , \ldots, z_n, y_1, \ldots, y_n)$ é uma identidade polinomial para A.

Observação 2.3.2 *Dado qualquer polinômio podemos supor que todas as suas entradas ou são simétricas ou antissimétricas. De fato, caso apareça uma variável z que não seja simétrica, nem antissimétrica, podemos tomar a parte simétrica $x = z + z^*$ e a parte antissimétrica $y = z - z^*$ de z e assim temos ainda $z = (1/2)(x + y)$. Logo, podemos substituir a variável z pela expressão $(1/2)(x + y)$ e podemos fazer isto para todas as variáveis que ainda não foram reduzidas. Portanto podemos concluir a afirmação inicial.*

No que foi mencionado na Observação 2.3.2, levando-se em conta a decomposição da $*$-álgebra em parte simétrica e antissimétrica, podemos considerar uma outra construção da álgebra associativa livre com involução. Considerando X e Y conjuntos enumeráveis de letras (variáveis) disjuntos, onde reservamos as letras do conjunto X para serem as variáveis simétricas e as letras do conjunto Y para serem as variáveis antissimétricas, induzimos um isomorfismo de álgebras com involução entre $K\langle Z, Z^*\rangle$ e $K\langle X \cup Y\rangle$. Assim usamos ambas as notações para denotar a álgebra associativa livre com involução e quando quisermos falar de uma variável que ainda não foi reduzida vamos utilizar o conjunto Z. Dizemos que um conjunto de variáveis $S \subseteq X$ ou $S \subseteq Y$ é $*$-homogêneo de $K\langle X \cup Y\rangle$, se S não contém variáveis de X e Y simultaneamente.

Proposição 2.3.3 *Sejam x_i e y_i da forma mencionada na Observação 2.3.2. Um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m)$ é uma $*$-identidade polinomial para a $*$-álgebra A se, e somente se, $f(a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_m) = 0$, para quaisquer $a_1, \ldots, a_l \in A^+$ e $b_1, \ldots, b_m \in A^-$.*

Demonstração: Dados $c_i \in (A, *)$, então $c_i = a_i + b_i$, com $a_i{}^* = a_i$ e $b_i{}^* = -b_i$. Suponha, sem perda de generalidade, que $l \geq m$. Então, considere o homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \varphi : K\langle Z, *\rangle & \to & (A, *) \\ (z_i + z_i^*)/2 = x_i & \to & a_i \\ (z_i - z_i^*)/2 = y_i & \to & b_i. \end{array}$$

Por hipótese, f é uma $*$-identidade polinomial, então

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \varphi(f(x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m)) \\ & = & f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_l), \varphi(y_1), \ldots, \varphi(y_m)) \\ & = & f(a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_m), \end{array}$$

para quaisquer $a_i \in A^+$ e $b_i \in A^-$.

Reciprocamente, suponha que $f(a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_m) = 0$ e considere um $*$-homomorfismo qualquer

$$\varphi : K\langle Z, *\rangle \to (A, *)$$

tal que $a_i = (1/2)(\varphi(z_i) + \varphi(z_i{}^*)) = (1/2)(\varphi(z_i + z_i{}^*)) = \varphi(x_i)$ e, analogamente, $b_i = \varphi(y_i)$. Segue que

$$\begin{aligned}\varphi(f(x_1,\ldots,x_l,y_1,\ldots,y_m)) &= f(\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_l),\varphi(y_1),\ldots,\varphi(y_m))\\ &= f(a_1,\ldots,a_l,b_1,\ldots,b_m)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, $f \in \bigcap Ker\varphi$ para qualquer $*$-homomorfismo φ, ou seja, f é uma $*$-identidade polinomial para a $*$-álgebra A. ■

Como $charK \neq 2$, é útil considerarmos no decorrer de todo texto a álgebra $K\langle Z, *\rangle$ sendo gerada pelas variáveis simétricas X e as variáveis antissimétricas Y, ou seja, $K\langle Z, *\rangle = K\langle X \cup Y\rangle$.

Dada uma $*$-álgebra A, definimos

$$T_*(A) = \{f \in K\langle X \cup Y\rangle \ ; \ f \text{ é identidade para } (A,*)\}$$

o conjunto de todas as identidades com involução sobre a álgebra A. Analogamente, ao caso das identidades ordinárias, é fácil verificar que $T_*(A)$ é um ideal bilateral de $K\langle X \cup Y\rangle$.

Além disso, se $f = f(x_1,\ldots,x_l,y_1,\ldots,y_m) \in T_*(A)$, dados $g_1, g_2, \ldots, g_l$ elementos simétricos e $h_1, h_2, \ldots, h_m$ elementos antissimétricos de $K\langle X \cup Y\rangle$, então $f(g_1,\ldots,g_l,h_1,\ldots,h_m) \in T_*(A)$. Dizemos que um endomorfismo φ de $K\langle X \cup Y\rangle$ é um $*$-endomorfismo se $\varphi(x_i)$ é simétrico e $\varphi(y_i)$ é antissimétrico para todo $i \in \mathbb{N}$ (isto é equivalente a dizer que φ comuta com $*$).

Assim, qualquer $*$-endomorfismo de $K\langle X \cup Y\rangle$ é determinado pela aplicação

$$\begin{aligned}K\langle X \cup Y\rangle &\to K\langle X \cup Y\rangle\\ x_i &\to g_i\\ y_i &\to h_i,\end{aligned}$$

para qualquer $x_i \in X$, $y_i \in Y$ e $g_i, h_i \in K\langle X \cup Y\rangle$, com g_i simétrica e h_i antissimétrica.

Os $*$-ideais com esta propriedade são chamados de $\boldsymbol{T_*}$**-ideais**.

Definição 2.3.4 *Um ideal J de $K\langle X \cup Y\rangle$ é um T_*-ideal se $\varphi(J) \subseteq J$, para todo $*$-endomorfismo φ de $K\langle X \cup Y\rangle$ (ou seja, φ comuta com $*$).*

Claramente, as álgebras associativas livres $K\langle Z\rangle$ (sem involução) podem ser consideradas como uma subálgebras de $K\langle Z,*\rangle$. Particularmente, uma identidade polinomial ordinária de uma certa álgebra A, pode ser considerado como uma $*$-identidade polinomial para álgebra $(A,*)$. Logo, $T(A)\subseteq T_*(A)$.

Agora, utilizando as ideias expostas em toda Seção 2.1 e os comentários feitos no Capítulo 1, Seção 1.6, estamos prontos para definir polinômios centrais para uma álgebra com Involução.

Definição 2.3.5 *Sejam $f=f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)\in K\langle X\cup Y\rangle$ e $(A,*)$ uma álgebra com involução. Dizemos que f é um polinômio central para $(A,*)$ se $f(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m)\in Z(A,*)$, para quaisquer $a_i\in A^+$ e $b_j\in A^-$.*

Definição 2.3.6 *Dizemos que um subespaço J de $K\langle X\cup Y\rangle$ é um T_*-espaço se $\varphi(J)\subseteq J$ para todo $*$-endomorfismo φ de $K\langle X\cup Y\rangle$.*

A definição acima equivale a dizer que $f(g_1,\ldots,g_n,h_1,\ldots,h_m)\in J$ para quaisquer $f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ pertencente a J, $g_1,\ldots,g_n$ elementos simétricos e $h_1,\ldots,h_m$ elementos antissimétricos de $K\langle X\cup Y\rangle$. Temos que o conjunto $C(A,*)$ dos polinômios centrais da álgebra $(A,*)$ é um T_*-espaço.

A demonstração de que todo T_*-espaço e todo T_*-ideal podem ser gerados por um conjunto de polinômios multihomogêneos (caso K seja infinito) e multilinear (caso $charK=0$) são análogas àquelas relacionadas com identidades e polinômios centrais ordinários.

2.4 Polinômio $*$-Próprio

Nesta seção, falaremos de polinômio $*$-próprio e posto de um polinômio. Vamos considerar um comutador de grau 1 como sendo simplesmente uma variável de $X\cup Y$.

Definição 2.4.1 *Dizemos que um polinômio $f\in K\langle X\cup Y\rangle$ é $*$-próprio se f é uma combinação linear de produtos de variáveis antissimétricas seguidas por comutadores de grau maior ou igual a 2. Denotaremos por B_* o conjunto formado pelos polinômios $*$-próprios.*

Observando o que foi feito no Capítulo 1, Seção **??**, consideremos uma base ordenada de $L(X \cup Y)$ formada por

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, y_1, y_2, y_3, \ldots, u_1, u_2, u_3, \ldots,$$

onde $u_i = [z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_k}]$, com $z_{i_j} \in X \cup Y$ e $k \geq 2$. Temos então que existe uma base de $K\langle X \cup Y\rangle$ formada pelos elementos

$$x_{i_1}{}^{n_1} x_{i_2}{}^{n_2} \ldots x_{i_p}{}^{n_p} y_{j_1}{}^{m_1} y_{j_2}{}^{m_2} \ldots y_{j_q}{}^{m_q} u_{l_1} u_{l_2} \ldots u_{l_k}, \quad p, q, k, n_i, m_j \geq 0.$$

Definição 2.4.2 *Seja f um polinômio multihomogêneo em $K\langle X \cup Y\rangle$. Escrevendo*

$$f = \sum_a \alpha_a x_1{}^{a_1} x_2{}^{a_2} \ldots x_n{}^{a_n} g_a$$

onde g_a é um polinômio $*$-próprio, definimos o posto de f, denotado por $r(f)$, como sendo a maior n-upla $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ na ordem lexicográfica.

Como f possui uma única expressão na forma acima, temos que $r(f)$ está bem definido. Note que, pela definição, dizer que f é $*$-próprio, equivale a dizer que $r(f) = (0, 0, \ldots, 0)$. É importante observar também que a ordem lexicográfica é uma boa ordem no conjunto $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \ldots \times \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$) e assim o princípio da indução é válido.

Exemplo 2.4.3 *Dado um $f \in K\langle Y\rangle$, ou seja, polinômios formado apenas de variáveis antissimétricas, então f é $*$-próprio.*

Consideraremos agora o espaço

$$\Gamma_{l,m} = P_{l,m} \cap B_*, \text{onde } l, m \geq 0$$

ou seja, o espaço de todos os polinômios multilineares $*$-próprios em $x_1, \ldots, x_l$, $y_1, \ldots, y_m$ na álgebra livre $K\langle X \cup Y\rangle$, espaço que será importante no decorrer de todo o Capítulo 5.

Vejamos agora um importante resultado do conceito de polinômio $*$-próprio. Considere um polinômio multihomogêneo

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = \alpha x_1{}^{b_1} \ldots x_n{}^{b_n} g + \sum_a \alpha_a x_1{}^{a_1} \ldots x_n{}^{a_n} g_a, \qquad (2.1)$$

onde $\alpha, \alpha_a \in K - \{0\}$, g e g_a são $*$-próprios e $a = (a_1, \ldots, a_n) < (b_1, \ldots, b_n) = r(f)$ (na ordem lexicográfica). Observe que quanto maior a entrada a_1 na n-upla a, menor será o grau de x_1 em g_a.

Como em g e em g_a não aparecem variáveis simétricas fora de comutadores, a substituição de x_i por $x_i + 1$ não altera estes polinômios. Logo, tomando o polinômio $f = f(x_1 + 1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, teremos

$$f = \alpha(x_1+1)^{b_1} {x_2}^{b_2} \ldots {x_n}^{b_n} g + \sum_a \alpha_a (x_1+1)^{a_1} {x_2}^{a_2} \ldots {x_n}^{a_n} g_a.$$

Observe que a componente de menor grau em x_1 deste polinômio é

$$f_1 = \alpha {x_2}^{b_2} \ldots {x_n}^{b_n} g + \sum_a \alpha_a {x_2}^{a_2} \ldots {x_n}^{a_n} g_a$$

onde o somatório é sobre todos os a's tais que $a_1 = b_1$. Observe também que para $a_1 = b_1$, temos $(a_2, \ldots, a_n) < (b_2, \ldots, b_n)$

Consideremos agora o polinômio $f_1(x_1, x_2 + 1, x_3, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ e tomemos a sua componente de menor grau em x_2, que é

$$f_2 = \alpha {x_3}^{b_3} \ldots {x_n}^{b_n} g + \sum_a \alpha_a {x_3}^{a_3} \ldots {x_n}^{a_n} g_a$$

onde o somatório é sobre todos os a's tais que $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$. Temos que para $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$ vale $(a_3, \ldots, a_n) < (b_3, \ldots, b_n)$. Continuando com esse processo, vamos chegar ao polinômio $f_n = \alpha g$. A partir dessas ideias, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.4.4 *([18] Lema 2.1) Se A é uma álgebra unitária com involução sobre um corpo infinito K, então $B_* \cap T_*(A)$ gera $T_*(A)$ como T_*-ideal. Se char$K = 0$, então $T_*(A)$ é gerado pelo espaço $\Gamma_{l,m} \cap T_*(A)$.*

Demonstração: Pelo Teorema 1.3.6, Capítulo 1, a álgebra livre com involução $K\langle X \cup Y\rangle$ é a álgebra universal envolvente da álgebra livre de Lie, a menos de isomorfismo. Segue do Capítulo 1, Teorema 1.3.5, que o conjunto

$$\{{x_1}^{p_1} \ldots {x_l}^{p_l} {y_1}^{q_1} \ldots {y_m}^{q_m} {u_1}^{k_1} \ldots {u_n}^{k_n} \ ; \ p_h, q_i, r_j \geq 0\}$$

é uma base para $K\langle X \cup Y\rangle$, onde $u_1, u_2, \ldots$ são comutadores em $X \cup Y$ tais que $u_1 < u_2 < \cdots$. Como K é um corpo infinito, suponha, sem perda de generalidade, que o polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m) \in K\langle X \cup Y\rangle$ seja multihomogêneo. Como para todo j, $u_j = u_j(x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m)$ é um comutador de comprimento maior ou igual a 2 e os elementos de K são ditos elementos simétricos. Assim, podemos observar que

$$u_j(x_1 + \beta, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m) = u_j(x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m), \text{para quaisquer } \beta \in K.$$

Segue que

$$f(x_1 + \beta, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m) = \sum_p \sum_q \sum_r \alpha_{p,q,r}(x_1 + \beta)^{p_1} {x_2}^{p_2} \ldots {x_l}^{p_l} {y_1}^{q_1} \ldots {y_m}^{q_m} g_r,$$

onde $g_r = {u_1}^{k_1} \ldots {u_n}^{k_n}$. Utilizando o comentário feito antes da proposição, temos que

$$\sum_{p_1 \max} \alpha_{p,q,r} {x_2}^{p_2} \ldots {x_l}^{p_l} {y_1}^{q_1} \ldots {y_m}^{q_m} g_r \in T_*(A).$$

Repetindo o argumento e usando indução, concluímos que

$$f_p = \sum_q \sum_r \alpha_{p,q,r} {y_1}^{q_1} \ldots {y_m}^{q_m} g_r \in T_*(A).$$

Assim, claramente $f_p \in B_* \cap T_*(A)$, ou seja, $B_* \cap T_*(A)$ gera $T_*(A)$. Caso $charK = 0$, podemos supor f multilinear, e daí segue o resultado. ■

Observe que este processo de "eliminação" de variáveis simétricas fora de comutadores usado na proposição anterior não funciona para variáveis antissimétricas, uma vez que a substituição de y_i por $y_i + 1$ não define um $*$-endomorfismo de $K\langle X \cup Y\rangle$, já que $y_i + 1$ não é uma elemento antissimétrico.

Definição 2.4.5 *Se I é um T_*-ideal de $K\langle X \cup Y\rangle$, denotaremos por $\Gamma_{l,m}(I)$ o espaço vetorial $\Gamma_{l,m}/I \cap \Gamma_{l,m}$. Por simplicidade de notação, se $I = T_*(A)$, para alguma álgebra com involução $(A, *)$, escrevemos $\Gamma_{l,m}(A)$ em vez de $\Gamma_{l,m}(T_*(A))$.*

Corolário 2.4.6 *Sendo $charK = 0$ e I, J são T_*-ideais de $K\langle X \cup Y\rangle$. Então $I = J$ se, e somente se, $\Gamma_{l,m}(I) = \Gamma_{l,m}(J)$.*

Demonstração: Suponha que $I = J$, então

$$\Gamma_{l,m}(I) = \Gamma_{l,m}/I \cap \Gamma_{l,m} = \Gamma_{l,m}/J \cap \Gamma_{l,m} = \Gamma_{l,m}(J)$$

Reciprocamente, suponha que $\Gamma_{l,m}(I) = \Gamma_{l,m}(J)$ e consideremos o homomorfismo projeção

$$\varphi : \Gamma_{l,m} \to \Gamma_{l,m}(I)$$

Como $Ker\varphi = I \cap \Gamma_{l,m} = J \cap \Gamma_{l,m}$ e $charK = 0$, Proposição 2.4.4, concluiremos que $I = J$. ■

2.5 Involução em Álgebras Centrais Simples

Apresentaremos nesta seção conceitos e resultados importantes sobre álgebra simples, com o objetivo de estudar a ideia de equivalência de involuções. Como resultado desse estudo, teremos a classificação das involuções do primeiro tipo na álgebra $M_n(K)$, e assim, com a conclusão desta seção, deveremos considerar, na álgebra $M_n(K)$, apenas as involuções *transposta* e *simplética*.

Definição 2.5.1 *Seja A uma álgebra. Dizemos que A é* ***simples****, se $\{0\}$ e A são os seus únicos ideias. A é dita* ***central simples****, se A é simples e $Z(A) = K$.*

Considere agora o **automorfismo interno** determinado por $a \in U(A)$, definido no Exemplo 1.1.14, Capítulo 1.

Proposição 2.5.2 *(Skolem-Noether) Se A é uma álgebra central simples de dimensão finita, então todo automorfismo de A é interno.*

Demonstração: Ver [32], pg. 152, Teorema 3.1.2. ■

Consideraremos K um corpo infinito e A uma álgebra central simples de dimensão finita sobre K. Denotaremos por $Inv(A)$ o conjunto das involuções do primeiro tipo em A e ζ_a o automorfismo interno de A determinado por a. Sejam $*, J \in Inv(A)$.

Lema 2.5.3 *Se $* = J\zeta_a$ para algum $a \in U(A)$, então $a^* = a^J = \pm a$.*

Demonstração: Temos $a^{J*} = a^{JJ\zeta_a} = a^{\zeta_a} = a^{-1}aa = a$ e daí $a^J = a^*$. Segue que para $x \in A$ arbitrário temos

$$x = x^{**} = (x^{J\zeta_a})^* = (a^{-1}x^Ja)^* = a^*x^{J*}(a^*)^{-1} = a^*a^{-1}xa(a^*)^{-1}$$

e assim $a^*a^{-1} \in Z(A)$. Como A é uma álgebra central simples, então existe $\lambda \in K$ tal que $a^* = \lambda a$. Como $a^{**} = a$, temos $(\lambda a)^* = a$, e daí $\lambda^2 a = a$. Portanto, $\lambda^2 = 1$. Concluímos que $\lambda = \pm 1$. ■

Agora, iremos demonstrar um resultado conhecido como o Teorema de Albert, que nos possibilitará caracterizar as involuções de álgebras centrais simples do primeiro tipo.

Teorema 2.5.4 *(Albert). Existe $a \in U(A)$, com $a^J = a^* = \pm a$, tal que $* = J\zeta_a$. Reciprocamente, se $a \in U(A)$ e $a^J = \pm a$, então $J\zeta_a \in Inv(A)$.*

Demonstração: Como $J*$ é um automorfismo de A, temos, pela Proposição 2.5.2, que $J*$ é interno, ou seja, $J* = \zeta_a$ para algum $a \in U(A)$, e daí $* = J\zeta_a$. Pelo lema anterior, $a^* = a^J = \pm a$. Reciprocamente, tomando $J_1 = J\zeta_a$, com $a \in U(A)$ e $a^J = \pm a$, temos:

(i) $x^{J_1 J_1} = a^{-1}(x^{J_1})^J a = a^{-1}(a^{-1}x^J a)^J a = a^{-1}a^J x^{JJ}(a^{-1})^J a = a^{-1}axa^{-1}a = x$

(ii) $(xy)^{J_1} = a^{-1}(xy)^J a = a^{-1}y^J x^J a = a^{-1}y^J aa^{-1}x^J a = y^{J_1}x^{J_1}$

(iii) J_1 é linear, pois J e ζ_a são lineares.

Portanto, $J\zeta_a \in Inv(A)$. ■

Definição 2.5.5 *Diremos que $*$ e J são* ***equivalentes*** *se existir $a \in U(A)$ $*$-simétrico tal que $* = J\zeta_a$.*

Observando a definição, discutiremos o seguinte teorema.

Teorema 2.5.6 *(i) A definição é de fato uma relação de equivalência.*

(ii) A relação dada na Definição 2.5.5 determina, no máximo, duas classes de equivalência em $Inv(A)$.

(iii) Se $*, J \in Inv(A)$ e $* = J\zeta_a$ para algum $a \in U(A)$ $*$-antissimétrico, então $*$ e J não são equivalentes.

Demonstração: Afim de demonstrar (i) observe que as propriedades reflexiva e simétrica são imediatas. Para provar a propriedade transitiva, suponha $J_1, J_2, J_3 \in Inv(A)$ e $a_1, a_2 \in U(A)$, com ${a_1}^{J_1} = a_1$ e ${a_2}^{J_2} = a_2$, tais que

$$J_1 = J_2\zeta_{a_1} \quad e \quad J_2 = J_3\zeta_{a_2}$$

donde segue que

$$J_1 = J_3\zeta_{a_2}\zeta_{a_1} = J_3\zeta_{a_2a_1}.$$

Daí,

$$(a_2a_1)^{J_1} = {a_1}^{J_1}{a_2}^{J_1} = a_1{a_2}^{J_1} = a_1{a_2}^{J_2\zeta_{a_1}} = a_1{a_1}^{-1}{a_2}^{J_2}a_1 = a_2a_1$$

Logo, J_1 e J_3 são equivalentes.

Quanto a afirmação (ii) suponhamos que $J_1, J_2, J_3 \in Inv(A)$, com J_1 não equivalentes a J_2 e J_3 não equivalente a J_2. Afirmamos que J_1 e J_3 estão na mesma classe de equivalência. De fato, pelo Teorema de Albert, existem $a_1, a_2 \in U(A)$, com ${a_1}^{J_1} = {a_1}^{J_2} = -a_1$ e ${a_2}^{J_2} = {a_2}^{J_3} = -a_2$, tais que $J_1 = J_2\zeta_{a_1}$ e $J_2 = J_3\zeta_{a_2}$. Daí, $J_1 = J_3\zeta_{a_1}\zeta_{a_2}$ e $(a_2a_1)^{J_1} = a_2a_1$. Logo, existe $(a_2a_1) \in U(A)$ que é J_1-simétrico. Pela Definição 2.5.5, conclui-se que J_1 e J_3 são equivalentes.

Para a conclusão do teorema, basta provar o item (iii). Suponha, por contradição, que $*$ e J sejam equivalentes, ou seja, $* = J\zeta_{a_2}$, com ${a_2}^* = a_2$. Por hipótese, $* = J\zeta_{a_1}$, com ${a_1}^* = -a_1$, segue que

$$\zeta_{a_1} = (JJ)\zeta_{a_1} = J(J\zeta_{a_1}) = J* = (JJ)\zeta_{a_2} = \zeta_{a_2}$$

Assim, $\zeta_{a_1} = \zeta_{a_2}$ Tomando $x \in A$ arbitrário, temos que

$$a_1^{-1}xa_1 = a_2^{-1}xa_2 \Rightarrow (a_2a_1^{-1})x = x(a_2^{-1}a_1).$$

Pela arbitrariedade de x, temos que $(a_2{a_1}^{-1}) \in Z(A)$. Logo, deve existir $\lambda \in K$ tal que $a_2 = \lambda a_1$. Donde segue que,

$${a_2}^* = (\lambda a_1)^* = \lambda a_1^* = -\lambda a_1 = -a_2$$

o que é uma contradição. Assim, $*$ e J não podem ser equivalentes. ■

Vamos particularizar os resultados para a álgebra das matrizes $M_n(K)$. Considerando a involução transposta (t) e a involução simplética (s), obteremos o seguinte resultado.

Corolário 2.5.7 *Quando n é par, (t) e (s) são involuções não equivalentes de $M_n(K)$. Quando n for ímpar, $Inv(M_n(K))$ tem apenas uma classe de equivalência.*

Demonstração: Suponha inicialmente $n = 2m$ e $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \in M_{2m}(K)$, com $X_1, X_2, X_3, X_4 \in M_m(K)$. Considere então

$$X^t = \begin{pmatrix} {X_1}^t & {X_3}^t \\ {X_2}^t & {X_4}^t \end{pmatrix} \text{ e } X^s = \begin{pmatrix} {X_4}^t & -{X_2}^t \\ -{X_3}^t & {X_1}^t \end{pmatrix}.$$

Note que $t = s\zeta_C$, onde $C = \begin{pmatrix} 0 & -I_{m\times m} \\ I_{m\times m} & 0 \end{pmatrix}$ e $C^t = -C$. De fato, observe que $C \in GL_n(K)$. Logo,

$$X^{s\zeta_C} = C^{-1}X^sC = X^t$$

Portanto, pelo teorema anterior, item (iii), temos que (t) e (s) são involuções não equivalentes.

Supondo agora n um número ímpar e $* \in Inv(M_n(K))$ qualquer, temos que $t = *\zeta_B$, para algum $B \in Gl_n(K)$ tal que $B^* = \pm B$. Suponha, por absurdo, que $B^t = -B$. Então,

$$det(B) = det(B^t) = det(-B) = -det(B),$$

(a última igualdade segue do fato que n é ímpar) de onde concluímos que $det(B) = 0$, que é um absurdo, já que $B \in GL_n(K)$. Logo, $B^t = B$.

Portanto, $*$ é equivalente a (t), para qualquer $* \in Inv(A)$. ■

Baseado neste último resultado, segue a seguinte definição.

Definição 2.5.8 *Seja $A = M_n(K)$. A classe de equivalência de (t) é chamada a* ***classe de involução tipo ortogonal*** *e a classe de equivalência de (s) (quando n é par) é chamado a* ***classe de involução tipo simplética****.*

Seja F uma extensão do corpo K. Considerando a álgebra $A_F = A \otimes_K F$ e $f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$, segue do Lema 1.8.3 (Capítulo 1, Seção 1.8) que se $f \in T(A)$, então $f \in T(A_F)$. Pode-se mostrar que isto vale para as álgebras com involução.

Lema 2.5.9 *Seja $a \in GL_n(K)$. Se K contém as raízes quadradas de todas os autovalores de a, então existe $p(x) \in K[x]$ tal que $a = p(a)^2$.*

Demonstração: Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ os autovalores distintos de a e considere a decomposição do espaço vetorial $V = K^{(n)}$ como uma soma direta de autoespaços com respeito a a. Assim, $V = V_1 \oplus V_2 \ldots \oplus V_n$, onde $V_i = \{v \in V \ ; \ v(a - \alpha_i I_n)^{m_i} = 0\}$. Para provar o lema, é suficiente encontrar os polinômios $p_i(x) \in K[x]$ tais que $V_i(a - p_i(a)^2) = 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Pelo Teorema do resto chinês (ver [32] pg. 55), observando os polinômios $(x - \alpha_1)^{m_1}, \ldots, (x - \alpha_n)^{m_n}$, deve existir $f(x) \in K[X]$ tal que

$$f(x) \equiv p_i(x) \pmod{(x - \alpha_i)^{m_i}}, i = 1, \ldots, m.$$

Daí restringindo a ação de a para o subespaço V_i, podemos substituir V por V_i, e assumir que para algum $\alpha \in K$ e $m = m_i$, temos

$$V(a - \alpha)^m = 0.$$

Escrevendo $b = a - \alpha$ e considerando a expansão binomial, temos

$$(\alpha + b)^{\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\alpha^{-\frac{1}{2}} b - \frac{1}{8}\alpha^{-\frac{3}{2}} b^2 + \ldots \ .$$

Como $b^m = 0$, a expressão acima tem apenas $m + 1$ termos não nulo. Substituindo b por $a - \alpha$ e como $\alpha \in K$, temos

$$p(a) = \alpha^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\alpha^{-\frac{1}{2}}(a - \alpha) - \tfrac{1}{8}\alpha^{\frac{3}{2}}(a - \alpha)^2 + \ldots \quad (m + 1 \text{ termos})$$

Daí, $a^{\frac{1}{2}} = p(a)$, implica, $p(a)^2 = a$ e substituindo a por x obtemos o polinômio desejado. ■

Concluiremos esta seção com a demonstração do teorema que caracteriza todas as identidades de involuções do primeiro tipo da álgebra $M_n(K)$.

Teorema 2.5.10 *Sejam K um corpo infinito cujo a característica é diferente 2 e $*$ uma involução de $M_n(K)$, então*

$$T(M_n(K), *) = T(M_n(K), t) \text{ ou } T(M_n(K), *) = T(M_n(K), s),$$

e a segunda possibilidade pode ocorrer apenas quando n for par.

Demonstração: Suponha, inicialmente, que K seja algebricamente fechado. Pelo Teorema 2.5.4, existe $a \in GL_n(K)$ com $* = t\zeta_a$ tal que a é simétrico ou antissimétrico.

Suponha que $a = a^t$, ou seja, a seja simétrico. Como K é algebricamente fechado, então K deve conter as raízes quadradas dos autovalores de a e, pelo Lema 2.5.9, existe $p(x) \in K[x]$ expressão polinomial e $p(a) = v$ tal que $a = p(a)^2 = v^2$. Como $a^t = a$, temos

$$v^t = p(a)^t = p(a^t) = p(a) = v,$$

ou seja, v é simétrico. Além disso,

$$v^* = a^{-1}v^t a = a^{-1}va = v.$$

Considere agora a aplicação

$$\zeta_v : (M_n(K), t) \to (M_n(K), *).$$

Temos que ζ_v é um isomorfismo de álgebras com involução. De fato, para $x \in M_n(K)$, sabendo que $a = v^2$ e que $* = t\zeta_a$, temos

$$\zeta_v(x^t) = v^{-1}x^t v = v^{-1}ax^*a^{-1}v = vx^*v^{-1} = (v^{-1}xv)^* = (\zeta_v(x))^*,$$

isto prova o teorema para o caso a simétrico.

Suponha agora que a seja um elemento antissimétrico. Se n for ímpar, como já foi mencionado no Corolário 2.5.7, teríamos $det(a) = 0$, o que é uma contradição. Assim, podemos supor que $a \in GL_n(K)$, com n par. Lembrando que $t = s\zeta_C$, onde $C = \begin{pmatrix} 0 & -I_{m\times m} \\ I_{m\times m} & 0 \end{pmatrix}$, segue que

$$* = t\zeta_a = s\zeta_{Ca}$$

Como, $C^t = -C$ e $a^t = -a$, teremos

$$(Ca)^s = (Ca)^{t\zeta_C^{-1}} = C(Ca)^t C^{-1} = Ca^t C^t C^{-1} = Ca.$$

Em outras palavras, Ca é um elemento simétrico. Como na primeira parte da demonstração, pode-se construir um isomorfismo

$$(M_n(K), s) \to (M_n(K), *)$$

de álgebras com involução, e isto completa a demonstração quando K for algebricamente fechado. Agora, seja K um corpo qualquer e $\bar{K}$ seu fecho algébrico. Como K é infinito, é fato conhecido que toda $*$-identidade é estável .

Portanto, $T(M_n(K),*) = T(M_n(\bar{K}),*)$.

Analogamente, $(M_n(K),j)$ e $(M_n(\bar{K}),j)$ têm as mesmas $*$-identidade sobre K, com $j = t$ ou $j = s$. Consequentemente, temos que $(M_n(\bar{K}),*) \simeq (M_n(\bar{K}),j)$, com $j = t$ ou $j = s$. Concluímos que $(M_n(K),*)$ tem as mesmas $*$-identidade sobre K. Daí concluímos a demonstração. $\blacksquare$

Segue imediatamente deste teorema e pela Observação 1.6.2 que $C(M_n(K),*) = C(M_n(K),t)$, se $*$ é equivalente a t, ou $C(M_n(K),*) = C(M_n(K),s)$, se $*$ é equivalente a s. Assim, é suficiente estudar apenas os T_*-espaços $C(M_n(K),t)$ e $C(M_n(K),s)$.

Capítulo 3

Identidades Polinomiais com Involução para a Álgebra das Matrizes de Ordem 2

Em [30], Levchenko exibiu uma base para as identidades polinomiais com involução da álgebra das matrizes $(M_2(K), *)$ sobre corpos com característica 0. Neste capítulo iremos apresentar o resultado obtido por Colombo e Koshlukov, em [11], o qual determina uma base para o T_*-ideal da álgebra com involução $M_2(K)$ sobre corpos infinitos e de característica diferente de 2. Utilizaremos também [13], como base para os estudos deste capítulo.

Pelo argumento dado no inicio da Seção 2.3 podemos nos restringir as involuções do primeiro tipo e pelo Teorema 2.5.10, ambos do Capítulo 2, há apenas duas classes de involuções. A primeira classe é representada pela involução transposta (t) dada por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

e a segunda classe é representada pela involução simplética (s), dada por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Em todo capítulo, K denotará um corpo infinito, cuja a característica é diferente de 2, o produto de Jordan será definido por $a \circ b = (1/2)(ab + ba)$, e por simplicidade de notação, iremos nos referir as variáveis como comutadores de grau 1. Recordamos que as letras $x_i \in X$ denotam variáveis simétricas e as $y_i \in Y$ representam variáveis antissimétricas.

3.1 Involução Transposta

Nesta seção estudaremos a construção de uma base para o T_*-ideal de $(M_2(K), t)$ com involução transposta, denotada por $*$.

Os seguintes polinômios são $*$-identidades de $M_2(K)$:

$$[y_1, y_2]; \tag{3.1}$$

$$[y_1y_2, x]; \tag{3.2}$$

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] - [x_1, x_3][x_2, x_4] + [x_1, x_4][x_2, x_3]; \tag{3.3}$$

$$[y_1x_1y_2, x_2] - y_1y_2[x_2, x_1]. \tag{3.4}$$

De fato, sejam $X_i = \begin{pmatrix} b_i & d_i \\ d_i & c_i \end{pmatrix} \in M_2(K)^+$ e $Y_i = \begin{pmatrix} 0 & -a_i \\ a_i & 0 \end{pmatrix} \in M_2(K)^-$.

É fácil verificar que os polinômios (3.1) e (3.2) são $*$-identidades, uma vez que $Y_1Y_2 = -a_2a_1I_2$ e assim está no centro de $M_2(K)$. Observe ainda que $[x_1, x_2]^* = -[x_1, x_2]$, ou seja, $[x_1, x_2]$ é um elemento antissimétrico. Logo, pela identidade (3.1), temos

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] = [x_3, x_4][x_1, x_2].$$

Pelo Teorema de Amistsur-Levitzki, $s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \in T(M_2(K))$, poderemos tomar $X_1, X_2, X_3, X_4 \in M_2(K)^+$ e assim

$$0 = s_4(X_1, X_2, X_3, X_4) = 2([X_1, X_2][X_3, X_4] - [X_1, X_3][X_2, X_4] + [X_1, X_4][X_2, X_3]),$$

como a característica de K é diferente de 2, concluímos que o polinômio (3.3) é uma $*$-identidade para $M_2(K)$. Por fim, por simplicidade de notação iremos denotar por

"A" e "B" os comutadores $[Y_1X_1Y_2, X_2]$ e $Y_1Y_2[X_2, X_1]$, respectivamente, assim,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -a_1c_1a_2 & a_1d_1a_2 \\ a_1d_1a_2 & -a_1b_1a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & d_2 \\ d_2 & c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 & d_2 \\ d_2 & c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a_1c_1a_2 & a_1d_1a_2 \\ a_1d_1a_2 & -a_1b_1a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -a_1c_1a_2b_2 + a_1d_1a_2d_2 & -a_1c_1a_2d_2 + a_1d_1a_2c_2 \\ a_1d_1a_2b_2 - a_1b_1a_2d_2 & a_1d_1a_2d_2 - a_1b_1a_2c_2 \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} -a_1c_1a_2b_2 + a_1d_1a_2d_2 & a_1d_1a_2b_2 - a_1b_1a_2d_2 \\ -a_1c_1a_2d_2 + a_1d_1a_2c_2 & a_1d_1a_2d_2 - a_1b_1a_2c_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por outro lado, em B temos:

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} -a_1a_2 & 0 \\ 0 & -a_1a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -b_1d_2 - d_1c_2 + b_2d_1 + d_2c_1 \\ -b_2d_1 - d_2c_1 + b_1d_2 + d_1c_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a_1a_2b_1d_2 + a_1a_2d_1c_2 - a_1a_2b_2d_1 - a_1a_2d_2c_1 \\ a_1a_2b_2d_1 + a_1a_2d_2c_1 - a_1a_2b_1d_2 - a_1a_2d_1c_2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, verifica-se imediatamente que o polinômio (3.4) é também uma $*$-identidade.

Denotaremos por I o ideal das $*$-identidades em $K\langle X \cup Y\rangle$ gerado pelas identidades (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4), e seja $R = K\langle X \cup Y\rangle/I$ a álgebra relativamente livre correspondente.

Observação 3.1.1 *Podemos verificar que os polinômios $[x_1, x_2]$ e $(x \circ y)$ são antissimétricos e que os polinômios $[x, y]$ e $(x_1 \circ x_2)$ são simétricos.*

Observação 3.1.2 *O produto de Jordan e o comutador satisfazem a seguinte relação na álgebra associativa livre:*

$$[a \circ b, c] = a \circ [b, c] + b \circ [a, c].$$

Segue da $*$-identidade $[y_1, y_2]$ que $[[x_1, x_2], y] = 0$ e $[x_1 \circ y_1, y_2] = 0$ em R. Desta última identidade e da observação anterior segue que

$$y_1 \circ [x, y_2] = 0 \tag{3.5}$$

em R. Expandido a $*$-identidade $y_1 \circ [x, y_2] = 0$, obtemos $y_1xy_2 = y_2xy_1$ e como $y_1yy_2 = y_2yy_1$, concluímos que

$$y_1zy_2 = y_2zy_1, \tag{3.6}$$

para qualquer $z = (1/2)(x + y)$.

Por (3.5), em R, temos

$$[y_1, x, y_2] = [y_1, x]y_2 - y_2[y_1, x] = [y_1, x]y_2 + [y_1, x]y_2 = 2[y_1, x]y_2.$$

Logo,

$$[y_1, x, y_2] = 2[y_1, x]y_2 \tag{3.7}$$

e pelas $*$-identidade (3.14), (3.6), (3.2) e (3.4), aplicadas nesta ordem, temos:

$$\begin{aligned}
[y_1, x_1, y_2, x_2] &= 2[[y_1, x_1]y_2, x_2] \\
&= 2[y_1x_1y_2 - x_1y_1y_2, x_2] \\
&= 2([y_1x_1y_2, x_2] - [x_1y_1y_2, x_2]) \\
&= 2([y_1x_1y_2, x_2] - [x_1, x_2]y_1y_2 - x_1[y_1y_2, x_2]) \\
&= 2([y_1x_1y_2, x_2] + y_1y_2[x_2, x_1]) \\
&= 4y_1y_2[x_2, x_1].
\end{aligned}$$

Logo,

$$[y_1, x_1, y_2, x_2] = 4y_1y_2[x_2, x_1]. \tag{3.8}$$

Por outro lado, se aplicarmos a identidade de Jacobi, obtemos

$$[y_1, x_1, y_2, x_2] = [[y_1, x_1], [y_2, x_2]] + [y_1, x_1, x_2, y_2].$$

Observe que $[y_1, x_1, x_2]$ é antissimétrico, logo $[y_1, x_1, x_2, y_2] = 0$. Assim,

$$[[y_1, x_1], [y_2, x_2]] = 4y_1y_2[x_2, x_1]. \tag{3.9}$$

Observe ainda que

$$\begin{aligned}
[[y_1, x_1], [y_2, x_2]] &= 4y_1y_2[x_2, x_1] \\
&= 2[[y_1, x_1]y_2, x_2] \\
&= 2[y_1, x_1][y_2, x_2] + 2[y_1, x_1, x_2]y_2.
\end{aligned}$$

Segue de (3.9) que

$$[y_1, x_1][y_2, x_2] = 2y_1y_2[x_2, x_1] - [y_1, x_1, x_2]y_2. \tag{3.10}$$

Lema 3.1.3 *O ideal I contém o polinômio*

$$[v, x_3, x_4, x_1, x_2] - [v, x_1, x_2, x_3, x_4],$$

onde v é um comutador antissimétrico com grau ≥ 1.

Demonstração: Seja v um comutador qualquer de grau ≥ 1. Então aplicando a identidade de Jacobi obtemos

$$[v, x_2, x_1] = [v, x_1, x_2] + [v, [x_2, x_1]]. \tag{3.11}$$

Sendo v um comutador antissimétrico, por (3.1), temos

$$[v, x_2, x_1] = [v, x_1, x_2]. \tag{3.12}$$

Segue das identidades de Jacobi e (3.8) que

$$\begin{aligned} [v, x_1, x_3, x_2, x_4] &= [v, x_1, x_2, x_3, x_4] + [v, x_1, [x_3, x_2], x_4] \\ &= [v, x_1, x_2, x_3, x_4] + 4v[x_3, x_2][x_4, x_1], \end{aligned}$$

isto é,

$$[v, x_1, x_3, x_2, x_4] = [v, x_1, x_2, x_3, x_4] + 4v[x_3, x_2][x_4, x_1]. \tag{3.13}$$

Assim, das identidades (3.12) e (3.13) temos que

$$\begin{aligned} [v, x_3, x_4, x_1, x_2] &= [v, x_3, x_1, x_4, x_2] + 4v[x_4, x_1][x_2, x_3] \\ &= [v, x_1, x_3, x_2, x_4] + 4v[x_4, x_1][x_2, x_3] \\ &= [v, x_1, x_2, x_3, x_4] + 4v[x_3, x_2][x_4, x_1] + 4v[x_4, x_1][x_2, x_3]. \end{aligned}$$

Daí de (3.1), segue a igualdade

$$[v, x_3, x_4, x_1, x_2] = [v, x_1, x_2, x_3, x_4].$$

■

Segue deste último lema que podemos comutar os pares de variáveis simétricas dentro de comutador antissimétrico, provocando no máximo uma mudança de sinal. Portanto, para qualquer comutador antissimétrico, podemos ordenar as entradas de tal forma que as colocamos em ordem crescente. Consequentemente, seguem os seguintes lemas.

Lema 3.1.4 *O seguinte polinômio pertence a I*

$$[y_1, x_1, \ldots, x_n, y_2] - [y_2, x_1, \ldots, x_n, y_1]$$

Demonstração: Para o caso em que n é par, é trivial, pois $[y_i, x_1, x_2, \ldots, x_n]$ é antissimétrico para $i = 1, 2$, ou seja,

$$[y_1, x_1, x_2, \ldots, x_n, y_2] = 0 = [y_2, x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1].$$

Assim, resta considerar o caso em que n é ímpar. Daí segue

$$\begin{aligned}
[y_1, x_1, \ldots, x_n, y_2] &= [y_1x_1 - x_1y_1, x_2, \ldots, x_n, y_2] \\
&= [y_1x_1, x_2, \ldots, x_n, y_2] - [x_1y_1, x_2, \ldots, x_n, y_2] \\
&= y_1[x_1, x_2, \ldots, x_n, y_2] + [y_1, x_2, \ldots, x_n, y_2]x_1 \\
&- x_1[y_1, x_2, \ldots, x_n, y_2] - [x_1, x_2, \ldots, x_n, y_2]y_1 \\
&= y_1([x_1, x_2, \ldots, x_n]y_2 - y_2[x_1, x_2, \ldots, x_n]) + \underbrace{[y_1, x_2, \ldots, x_n, y_2]}_{0}x_1 \\
&- x_1\underbrace{[y_1, x_2, \ldots, x_n, y_2]}_{0} - ([x_1, x_2, \ldots, x_n]y_2 - y_2[x_1, x_2, \ldots, x_n])y_1.
\end{aligned}$$

Pelas identidades (3.1) e (3.6), teremos

$$\begin{aligned}
[y_1, x_1, \ldots, x_n, y_2] &= y_2([x_1, x_2, \ldots, x_n]y_1 - y_1[x_1, x_2, \ldots, x_n]) + \underbrace{[y_2, x_2, \ldots, x_n, y_1]}_{0}x_1 \\
&- x_1\underbrace{[y_2, x_2, \ldots, x_n, y_1]}_{0} - ([x_1, x_2, \ldots, x_n]y_1 - y_1[x_1, x_2, \ldots, x_n])y_2 \\
&= (y_2[x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1] + [y_2, x_2, \ldots, x_n, y_1]x_1) \\
&- (x_1[y_2, x_2, \ldots, x_n, y_1] + [x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1]y_2) \\
&= [y_2x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1] - [x_1y_2, x_2, \ldots, x_n, y_1] \\
&= [y_2, x_1, \ldots, x_n, y_1].
\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração do lema. ■

Lema 3.1.5 *O ideal I contém o polinômio*

$$[v, x_1, \ldots, x_{2k}][y_1, x'_1, \ldots, x'_q] - y_1[v, x_1, \ldots, x_{2k}, x'_1, \ldots, x'_q]$$

onde v é um comutador antissimétrico com grau ≥ 2, as variáveis x_i, $i = 1, \ldots, 2k$ e x'_j, $j = 1, \ldots, q$, são simétricas e $k, q = 1, 2, \ldots$.

Demonstração: Provaremos, inicialmente, a seguinte afirmação

$$yz[y_1, x_1, \ldots, x_q] = y_1 z[y, x_1, \ldots, x_q], \text{ para } z = x + y \text{ e para todo } q \in \mathbb{N}.$$

De fato, provaremos por indução sobre q. Para $q = 1$ obtemos, pela identidade (3.6), que

$$\begin{aligned} yz[y_1, x_1] &= yzy_1x_1 - yzx_1y_1 \\ &= y_1zyx_1 - y_1zx_1y \\ &= y_1z[y, x_1]. \end{aligned}$$

Supondo que o resultado seja válido para q, provaremos que vale para $q + 1$.

$$vz[y_1, x_1, \ldots, x_q, x_{q+1}] = vz[y_1, x_1, \ldots, x_q]x_{q+1} - vzx_{q+1}[y_1, x_1, \ldots, x_q].$$

Por hipótese de indução temos

$$vz[y_1, x_1, \ldots, x_q, x_{q+1}] = y_1z[v, x_1, \ldots, x_q]x_{q+1} - y_1zx_{q+1}[v, x_1, \ldots, x_q].$$

Assim, a afirmação está provada.

Agora provaremos o lema usando indução sobre q e denotando $y = [v, x_1, \ldots, x_{2k}]$. Para $q = 1$, usando as identidades (3.2) e (3.5), tem-se:

$$y[y_1, x_1'] = y_1[y, x_1'].$$

Supondo que o resultado seja válido para q, provaremos que vale para $q + 1$. Observe

$$y[y_1, x_1', \ldots, x_q', x_{q+1}'] = y[y_1, x_1', \ldots, x_q']x_{q+1}' - yx_{q+1}'[y_1, x_1', \ldots, x_q'].$$

Usando a afirmação e a hipótese de indução obtemos o resultado.

■

Lema 3.1.6 *Seja $f \in B_*$ multihomogêneo. Então f se escreve como $f = f_1 + f_2 + f_3$, onde f_1, f_2 e f_3 são combinações lineares de polinômios das seguintes formas:*

$$u_1u_2 \ldots u_{2k}; \quad u_1u_2 \ldots u_{2k+1}; \quad u_1u_2 \ldots u_kw$$

respectivamente. Aqui os u_i's são comutadores antissimétricos de grau ≥ 1, e w é um comutador simétrico de grau ≥ 2. Além disso, entre os comutadores de grau ≥ 2 aparece apenas uma variável antissimétrica.

Demonstração: Etapa 1: Pela identidade $[y_1, x_1][y_2, x_2] = 2y_1y_2[x_2, x_1] - [y_1, x_1, x_2]y_2$, o produto de dois comutadores simétricos, com grau ≥ 2 pode ser escrito como uma soma de produtos de comutadores antissimétricos.

Etapa 2: Pela identidade $y_1 \circ [x, y_2] = 0$, obtemos que os comutadores antissimétricos anticomutam com os simétricos de grau ≥ 2, e por $[y_1, y_2]$ os comutadores antissimétricos comutam entre si.

Etapa 3: Se é dado um produto de vários comutadores antissimétricos e simétricos, então pela etapa 2 podemos reordená-los, a menos de sinal, de tal maneira que os comutadores antissimétricos precedem os simétricos.

Etapa 4: Aplicando quantas vezes for necessária as etapas 1 e 3. Concluímos que

$$f = f_1 + f_2 + f_3$$

.

Resta mostrar que em cada um dos comutadores existe somente uma variável antissimétrica. Seja u um comutador que contém duas ou mais variáveis antissimétricas, digamos que $degu = 3$. Se possui 3 variáveis antissimétricas, não tem o que fazer, pela $*$-identidade (3.1) segue que $u = 0$ em R. Supondo $u = [y_1, x_1, y_2]$, podemos aplicar a identidade

$$[y_1, x, y_2] = 2[y_1, x]y_2. \tag{3.14}$$

Suponha agora que o comutador u tenha grau ≥ 4, ou seja, $u = [w, y_1, z]$, onde $z = y_2$ ou $z = x$ e $degw \geq 2$.

Se w for antissimétrico, então $u = 0$.

Se w simétrico, então podemos escrever $w = [v, w_1]$, onde v é um comutador antissimétrico e w_1 é simétrico, ambos de grau ≥ 1.

Aplicando a identidade (3.14), obtemos

$$[w, y, z] = [v, w_1, y, z] = 2[[v, w_1]y, z].$$

Caso $z = y_2$, temos:

$$[w, y, y_2] = 2[[v, w_1]y, y_2] = 2[v, w_1, y_2]y = 4yy_2[v, w_1].$$

Caso $z_2 = x$, por

$$[y_1, x_1, y_2, x_2] = 4y_1y_2[x_2, x_1],$$

temos que

$$[w, y, x] = [v, w_1, y, x] = 4vy[x, w_1].$$

Com isso, conclui-se a demonstração. ■

3.1.1 Matrizes Genéricas com a Involução Transposta

Recordamos a definição da álgebra das matrizes genéricas, que foi dada na Seção 1.8, Capítulo 1. para o caso $n = 2$, a matriz genérica a_r é dada por

$$a_r = \begin{pmatrix} \xi_{11}^{(r)} & \xi_{12}^{(r)} \\ \xi_{21}^{(r)} & \xi_{22}^{(r)} \end{pmatrix},$$

em que $\xi_{11}^{(r)} \in K[\xi] = K[\xi_{ij}^{(r)}]$, $i, j = 1, 2, r = 1, \ldots, m$. Denotaremos por Gen_2 a subálgebra gerada pelas matrizes a_r em $M_2(K[\xi_{ij}^{(r)}])$. Então, Gen_2 é a álgebra relativamente livre na variedade de álgebras definida por $M_2(K)$.

Analogamente, baseado no artigo [18], usando uma ideia similar à construção das matrizes genéricas podemos definir a involução transposta $*$ em Gen_2.

Seja $(M_2(K[\xi_{ij}^{(r)}]), *)$ a álgebra das matrizes de ordem 2 com entradas na álgebra dos polinômios

$$K[\xi] = K[\xi_{ij}^{(r)}] \ , \ i, j = 1, 2, r = 1, \ldots, m,$$

munida da involução transposta. A álgebra das matrizes genéricas $(Gen_2, *)$ é $*$-gerada por

$$s_r = \begin{pmatrix} \chi_{11}^{(r)} & \chi_{12}^{(r)} \\ \chi_{12}^{(r)} & \chi_{22}^{(r)} \end{pmatrix}, \text{ com } \chi_{ij}^{(r)} = (1/2)(\xi_{ij}^{(r)} + \xi_{ji}^{(r)});$$

$$t_r = \begin{pmatrix} 0 & \zeta^{(r)} \\ -\zeta^{(r)} & 0 \end{pmatrix}, \text{ com } \zeta^{(r)} = (1/2)(\xi_{12}^{(r)} - \xi_{21}^{(r)}).$$

Observe que s_r e t_r são geradores simétricos e o antissimétricos, respectivamente.

Então $s_r = (1/2)(a_r + a^*{}_r)$ e $t_r = (1/2)(a_r - a^*{}_r)$, e de acordo com que foi feito em [18], temos que $(Gen_2, *)$ é isomorfa a uma álgebra relativamente livre na variedade das álgebras com involução determinada por $(M_2(K), *)$.

Corolário 3.1.7 *Sendo $f = f_1 + f_2 + f_3$, como no Lema 3.1.6, então:*

(i) *f é uma identidade com involução de $M_2(K)$ se, e somente se, f_1, f_2 e f_3 também são.*

(ii) *Se f é $*$-identidade para $M_2(K)$, então todo f_i segue de algum f_i', $i = 1, 2, 3$, onde $degf_i' \leq degf_i$ e f_i' depende de no máximo uma variável antissimétrica.*

Demonstração: Para provar (i) suponha que $f = f(x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m)$ seja uma identidade e vamos provar que f_1, f_2 e f_3 são identidades. Tomemos s_i e t_j matrizes genéricas, e avaliado f nestas matrizes temos

$$\bar{f} = f(s_1, \ldots, s_l, t_1, \ldots, t_m) = \underbrace{p_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\bar{f}_1} + \underbrace{p_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{pmatrix}}_{\bar{f}_2} + \bar{f}_3,$$

onde p_1, p_2 e r são polinômios nas variáveis $\{\chi_{ij}^k, \zeta^k\}$, com $i, j = \{1, 2\}$ e $k = 1, 2, \ldots$ e $\bar{f}_n = f_n(s_1, \ldots, s_l, t_1, \ldots, t_m)$, para $n = 1, 2, 3$. Iremos determinar $\bar{f}_3 = f_3(s_1, \ldots, s_l, t_1, \ldots, t_m)$. Se a quantidade de comutadores antissimétrico em um polinômio do tipo 3 for par temos que $\bar{f}_3 = p_3 \cdot \begin{pmatrix} r_3 & q_3 \\ q_3 & -r_3 \end{pmatrix}$, caso seja ímpar temos que $\bar{f}_3 = p_4 \cdot \begin{pmatrix} r_4 & -q_4 \\ -q_4 & -r_4 \end{pmatrix}$, ou seja,

$$\bar{f}_3 = p_3 \cdot \begin{pmatrix} r_3 & q_3 \\ q_3 & -r_3 \end{pmatrix} + p_4 \cdot \begin{pmatrix} r_4 & -q_4 \\ -q_4 & -r_4 \end{pmatrix},$$

onde p_3, p_4, r_3, r_4, q_3 e q_4 são polinômios nas variáveis $\{\chi_{ij}^k, \zeta^k\}$, com $i, j = \{1, 2\}$ e $k = 1, 2, \ldots$. Observe que o polinômio f_1 quando avaliado sobre $M_2(K)$ produz apenas uma matriz escalar, por outro lado, f_2 produz uma matriz antissimétrica e f_3 nos dá uma matriz simétrica de traço zero. Como toda matriz pode ser decomposto unicamente como soma direta desses três tipos de matrizes, concluímos que se f é $*$-identidade, então f_1, f_2 e f_3 também são. Como a reciproca é imediata, demonstramos (i).

Provaremos (ii). Pelo Lema 3.1.5 e pelas identidades (3.2) e $y_1 \circ [y_2, x_1]$, podemos escolher qual das variáveis antissimétricas colocaremos para fora dos comutadores e ainda colocando-as na frente dos comutadores de grau ≥ 2. Portanto, se

$$f_i = f_i(x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m) = 0,$$

podemos assumir, sem perda de generalidade, que y_1 está em comutadores e o restante das variáveis antissimétricas estão fora dos comutadores, e assim

$$f_i = y_2 y_3 \dots y_m g(y_1, x_1, \dots, x_l).$$

Vamos novamente tomar as matrizes genéricas s_i e t_i e fazendo a avaliação $f_i(s_1, \dots, s_l, t_1, \dots, t_m)$ obteremos $P \cdot g(t_1, s_1, \dots, s_l) = 0$, onde P é uma expressão obtida por colocar os y_i's em evidência, e substituindo-os por $t_i = \begin{pmatrix} 0 & \zeta^{(i)} \\ -\zeta^{(i)} & 0 \end{pmatrix}$, com $i = 2, 3, \dots, m$, teremos $detP = (\zeta^{(2)} \dots \zeta^{(m)})^2 \neq 0$. Logo, P é inversível, e como $Pg(t_1, s_1, \dots, s_l) = 0$ concluímos que $g(t_1, s_1, \dots, s_l) = 0$. Como estamos tratando de matrizes genéricas, temos que o lema está provado. ■

Lema 3.1.8 *Sejam f_2, f_3 polinômios como no Corolário 3.1.7, que dependem de apenas uma variável antissimétrica. Suponha que f_2 e f_3 são escritos como combinação linear de comutadores de grau ≥ 4. Então, em R, temos*

$$f_2(y, x_1, \dots, x_l) = \alpha[y, x_{i_1}, \dots, x_{i_l}] + 4yg_1(x_1, \dots, x_l)$$
$$f_3(y, x_1, \dots, x_l) = \beta[y, x_{i_1}, \dots, x_{i_l}] + 4yg_3(x_1, \dots, x_l)$$

onde $\alpha, \beta \in K$, $i_1 \leq \ldots \leq i_n$ e g_1 e g_3 são polinômios do tipo f_1 e f_3, respectivamente do Lema 3.1.6.

Demonstração: Primeiramente, podemos supor sem perda de generalidade que a variável antissimétrica y aparece na primeira entrada dos comutadores. Considerando o polinômio do tipo f_2, obtemos o resultado requerido apenas utilizando a demonstração do Lema 3.1.3. Para polinômio do tipo f_3, utilizaremos o Lema 3.1.4, e as identidades (3.2) e (3.14), e ainda considerando v um comutador antissimétrico de comprimento ≥ 1, temos:

$$\begin{aligned}
[v, x_1, x_3, x_2] &= [v, x_1, x_2, x_3] + [v, x_1, [x_3, x_2]] \\
&= [v, x_1, x_2, x_3] + 2[v, x_1][x_3, x_2] \\
&= [v, x_1, x_2, x_3] - 2v[[x_3, x_2], x_1] \\
&= [v, x_1, x_2, x_3] + 2[[x_3, x_2], x_1]v \\
&= [v, x_1, x_2, x_3] + 2[x_3, x_2, x_1]v.
\end{aligned}$$

Desta forma, podemos reordenar as variáveis neste caso. Assim, concluímos a demonstração. ■

Neste próximo resultado, vamos utilizar as identidades (3.14), (3.8) e o Lema 3.1.5, mas de maneira diferente da que vimos utilizando, agora vamos utilizá-las para aglutinar dois ou três comutadores em apenas um comutador.

Proposição 3.1.9 *Sejam f_1, f_2 e f_3, como no Corolário 3.1.7, $*$-identidades para $M_2(K)$. Suponha que todo f_i contém, no máximo, uma entrada com variável antissimétrica. Então, em R, cada um dos f_1, f_2, f_3 é consequência de algumas $*$-identidades que não dependem de variáveis antissimétricas. Assumindo que os polinômios f_i não dependem dessas variáveis e que $deg f_i \geq 4$, podemos rescrevê-los, em R, da seguinte maneira:*

(a) O polinômio f_1 é representado como combinação linear de produtos de dois comutadores antissimétricos, onde um deles tem grau 2.

(b) O polinômio f_2 é uma combinação linear de comutadores antissimétricos.

(c) O polinômio f_3 é uma combinação linear de comutadores simétricos.

Demonstração: Pelo Lema 3.1.6, sabemos que f_i, para $i = 1, 2, 3$ pode ser escrito como combinação linear de produtos de comutadores, e pelo Corolário 3.1.7 (ii), cada produto depende no máximo de uma variável antissimétrica, e que esta pode ser colocada na primeira entrada do primeiro comutador, pelo Lema 3.1.4.

Consideramos primeiramente f_1. Utilizando a identidade (3.8), temos

$$u_1u_2[v, x_1] = (1/4)[u_1, x_1, u_2, v],$$

onde u_1, u_2 são comutadores antissimétricos de grau ≥ 2 e v é um comutador simétrico de grau ≥ 1. Como f_1 é combinação linear de produtos de uma quantidade par de comutadores antissimétricos, podemos escrevê-lo como combinação linear de produtos de dois comutadores antissimétricos. Daí, dividiremos em dois casos:

1° caso: f_1 não depende de variável antissimétrica. Logo, pelo Lema 3.1.5, podemos fazer com que um dos comutadores tenha grau dois.

<u>2° caso</u>: f_1 depende de uma variável antissimétrica, ou seja, $f_1 = f(y, x_1, \ldots, x_l)$. Usando o Lema 3.1.5, podemos rescreve-lo da seguinte forma

$$f_1 = yf_2(x_1, \ldots, x_l).$$

Portanto, esta identidade é equivalente a uma identidade do tipo f_2, a qual não depende de variáveis antissimétricas.

Consideremos agora um polinômio do tipo f_2. Novamente pela identidade (3.8), podemos rescreve-lo como combinação linear de comutadores antissimétricos. Se f_2 não contém variável antissimétrica, não há o que demonstrar. Suponha, então, que f_2 dependa de uma variável antissimétrica. Pelo Lema 3.1.8, podemos escrevê-lo da forma

$$f_2(y, x_1, \ldots, x_l) = \alpha[y, x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}] + 4yg_1(x_1, \ldots, x_l)$$

para algum polinômio g_1 do tipo f_1 e $\alpha \in K$. Como f_2 é uma $*$-identidade para $M_2(K)$, podemos avaliá-lo nos seguintes elementos:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X_1 = X_2 = \ldots = X_l = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

É fácil verificar que $[Y, X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}] = \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \beta Q$, com $\beta = \pm 2^l$. Por outro lado, como g_1 é um produto de comutadores que está sendo avaliado em um mesmo elemento, então temos que $g_1(x_1, \ldots, x_l) = 0$. Como a característica de K é diferente de 2 e por Q ser uma matriz invertível, concluímos que $\alpha = 0$. Logo,

$$f_2(y, x_1, \ldots, x_l) = 4yg_1(x_1, \ldots, x_l).$$

Sabendo que a matriz Y é invertível, como foi feito no Corolário 3.1.7, concluímos que $g_1(x_1, \ldots, x_l)$ é uma $*$-identidade. Portanto, $f_2(y, x_1, \ldots, x_l)$ é equivalente a uma identidade do tipo f_1 que não depende de variáveis antissimétricas.

Para finalizar a demonstração, consideremos o polinômio do tipo f_3. Aplicando a identidade (3.14) no comutador simétrico e em um dos antissimétricos, podemos admitir, sem perda de generalidade, que f_3 pode ser rescrito como combinação linear de comutadores simétricos. Daí, pelo Lema 3.1.8 e seguindo a mesma ideia do caso de polinômios do tipo f_2, podemos concluir a demonstração. ∎

Corolário 3.1.10 *Seja $f \in R$. Se f é uma identidade para $(M_2(K), *)$, então f segue de algumas $*$-identidades que dependem apenas de variáveis simétricas.*

Demonstração: Basta observar o Corolário 3.1.7 e aplicar o proposição anterior. ■

Portanto, quando $*$ é a involução transposta sobre $M_2(K)$ podemos, apenas, considerar os polinômios que dependem de variáveis simétricas. Até o final desta seção, consideraremos apenas polinômios que dependem apenas de variáveis simétricas.

Definição 3.1.11 *Definiremos os seguintes subespaços de R:*

1. *Seja F_1 o subespaço de R gerado por produtos de dois comutadores antissimétricos, onde um deles é de grau 2.*

2. *Seja F_2 o subespaço de R gerado por todos os comutadores antissimétricos de grau maior ou igual à* 4.

3. *Seja F_3 o subespaço de R gerado por todos os comutadores simétricos de grau maior ou igual à* 4.

3.1.2 O Operador L

Nesta seção, estudaremos o operador L, estudo feito por Vasilovsky em [34], mas agora sobre o espaço $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

Em [12], foi demonstrado que as identidades ordinárias de $M_2(K)$, para o caso em que a $char K = p > 3$, são geradas por

$$s_4 = \sum_{\sigma \in S_4} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)},$$
$$h_5 = [[x_1, x_2] \circ [x_3, x_4], x_5].$$

E, no caso em que $p = 3$, além dessas identidades temos ainda a identidade r_6, definida por:

$$[x_1, x_2] \circ (u \circ v) - (1/8)([x_1, u, v, x_2] + [x_1, v, u, x_2] - [x_2, u, x_1, v] - [x_2, v, x_1, u]),$$

onde $u = [x_3, x_4]$ e $v = [x_5, x_6]$.

Observe que os polinômios s_4, h_5 e r_6 pertencem a I. De fato, seja x_i variáveis simétricas e observe que s_4 pode ser escrito da forma

$$s_4 = [x_1, x_2] \circ [x_3, x_4] - [x_1, x_3] \circ [x_2, x_4] + [x_1, x_4] \circ [x_2, x_3],$$

e pelo gerador $[y_1, y_2]$ temos, módulo I,

$$s_4 = 2([x_1, x_2][x_3, x_4] - [x_1, x_3][x_2, x_4] + [x_1, x_4][x_2, x_3]),$$

que pertence a I. A identidade h_5 segue diretamente do gerador (3.2).

Para concluir, resta verificar que identidade r_6 está em I. Como u, v são comutadores antissimétricos, segue da identidade (3.8) que

$$\begin{aligned} [x_1, u, v, x_2] = -[u, x_1, v, x_2] &= -4uv[x_2, x_1] \\ &= -4vu[x_2, x_1] \\ &= -[v, x_1, u, x_2] \\ &= [x_1, v, u, x_2], \end{aligned}$$

ou seja,

$$[x_1, u, v, x_2] = [x_1, v, u, x_2]. \tag{3.15}$$

Observe que $[x_2, u, x_1], [x_2, v, x_1]$ são comutadores antissimétricos, e assim os dois últimos comutadores de r_6 se anulam em R. Consequentemente,

$$\begin{aligned} r_6 &= [x_1, x_2] \circ (u \circ v) - (1/4)[x_1, u, v, x_2] \\ &= [x_1, x_2] \circ (uv) + (1/4)[u, x_1, v, x_2] \\ &= [x_1, x_2]uv + uv[x_2, x_1]. \end{aligned}$$

Logo, r_6 também se anula em R.

Observação 3.1.12 *Segue dos comentários feitos acima que as identidades ordinárias de $M_2(K)$ se anulam em R.*

Isso nos motiva a definir o operador linear $L(a, b)$, para a, b variáveis simétricas, sobre o espaço $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

Definição 3.1.13 *Sejam w_1, w_2 variáveis simétricas ou comutadores e a, b variáveis simétricas, então $[w_1, w_2]L(a, b)$ é definido por:*

$$(1/8)([w_1, a, b, w_2] + [w_1, b, a, w_2] - [w_2, a, w_1, b] - [w_2, b, w_1, a]).$$

Se w_1 e w_2 são comutadores antissimétricos e $deg(w_2) = 2$ então definimos

$$(w_1 w_2)L(a, b) = w_1(w_2 L(a, b)).$$

Verifica-se, utilizando o Lema 3.1.3 e usando a identidade de Jacobi, que para quaisquer $x_1, x_2, a, b \in R$ variáveis simétricas, vale a identidade

$$[x_1, x_2]L(a, b) = (1/4)[x_1, x_2, a, b]. \tag{3.16}$$

Observe agora as seguintes identidades satisfeitas na álgebra de Lie $Sl_2(K)$ das matrizes de ordem 2 e de traço 0, segundo [34]:

$$\begin{aligned} [x_1, x_2, x_3]L(a, b) &= [[x_1, x_2]L(a, b), x_3]; & (3.17)\\ [x_1, a]L(x_2, b) - [x_2, a]L(x_1, b) &= (1/4)[x_1, x_2, b, a]; & (3.18)\\ [x_1, x_2]L(a, b)L(c, d) &= [x_1, x_2]L(c, d)L(a, b). & (3.19) \end{aligned}$$

Observe inicialmente que:

$$\begin{aligned} [x_1, x_2, x_3]L(a, b) &= (1/8)([x_1, x_2, a, b, x_3] + [x_1, x_2, b, a, x_3] - [x_3, a, [x_1, x_2], b] \\ &- [x_3, b, [x_1, x_2], a]) \\ &= (1/8)([x_1, x_2, a, b, x_3] + [x_1, x_2, b, a, x_3] - [[x_3, a], [x_1, x_2], b] \\ &- [[x_3, b], [x_1, x_2], a]) \\ &= (1/8)([x_1, x_2, a, b, x_3] + [x_1, x_2, a, b, x_3]) \\ &= (1/4)([x_1, x_2, a, b, x_3]) \\ &= [[x_1, x_2]L(a, b), x_3]. \end{aligned}$$

Além disso, usando a relação

$$4[(x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z)] = [z, x, y], \tag{3.20}$$

que vale para qualquer álgebra associativa, obtemos

$$\begin{aligned}
[x_1, a]L(x_2, b) - [x_2, a]L(x_1, b) &= 1/4([x_1, a, x_2, b] - [x_2, a, x_1, b]) \\
&= 1/4([[x_1, a, x_2] - [x_2, a, x_1], b]) \\
&= [[(a \circ x_2) \circ x_1 - a \circ (x_2 \circ x_1)] \\
&- [(a \circ x_1) \circ x_2 - a \circ (x_1 \circ x_2)], b] \\
&= [(a \circ x_2) \circ x_1 - (a \circ x_1) \circ x_2, b] \\
&= (1/4)[x_1, x_2, a, b] \\
&= (1/4)[x_1, x_2, b, a].
\end{aligned}$$

Por fim, analogamente ao que foi feito na identidade (3.16), pode-se verificar que

$$[v, x_2]L(a, b) = (1/4)[v, x_2, a, b],$$

para qualquer v comutador simétrico e consequentemente

$$\begin{aligned}
[x_1, x_2]L(a, b)L(c, d) &= (1/4)[x_1, x_2, a, b]L(c, d) \\
&= (1/4)[[x_1, x_2, a], b]L(c, d) \\
&= (1/16)[[x_1, x_2, a], b, c, d] \\
&= (1/16)[x_1, x_2, a, b, c, d] \\
&= (1/16)[x_1, x_2, c, d, a, b] \\
&= [x_1, x_2]L(c, d)L(a, b).
\end{aligned}$$

Temos então que identidades (3.17), (3.18) e (3.19) são satisfeitas em R. Assim, pelo teorema principal em [34], que diz que todas identidades da álgebra de Lie $Sl_2(K)$ segue de (3.17)-(3.19), concluímos então que todas as identidades de $Sl_2(K)$ são satisfeitas em R, desde que todas as variáveis sejam simétricas. Além disso, é fato conhecido que todas as identidades de Lie da álgebra das matrizes $M_2(K)$ seguem do polinômio standard s_4, veja [22] ou [28].

Pela Observação 3.1.12, obtemos imediatamente que se w_1 e w_2 são comutadores antissimétricos de grau maior ou igual a 2, então $w_1(w_2L(a, b)) = (w_1L(a, b))w_2$ em R, bastando usar a Definição 3.1.13, a identidades (3.16) e observar que $(w_1L(a, b))$ é um elemento antissimétrico. Do que foi discutido segue o seguinte resultado.

Lema 3.1.14 *A transformação L é um operador linear bem definido em $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.*

Note que precisamos utilizar o Lema 3.1.5 na verificação da boa definição de L sobre F_1.

Proposição 3.1.15 *Assuma que $f_i \in F_i$, com $degf_i \geq 4$, para cada $i = 1, 2, 3$. Então, em R, f_i pode ser escrito da seguinte forma.*

1. $f_1 = \sum\limits_i \alpha_i [x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}] \prod\limits_j L(a_{ij}, b_{ij})$. *Além disso, podemos supor que $i_1 < i_2$, $i_3 < i_4$, $i_1 \leq i_3$, e $i_2 \leq i_4$.*

2. $f_2 = \sum\limits_i \beta_i [x_{i_1}, x_{i_2}] \prod\limits_j L(a_{ij}, b_{ij})$. *Além disso, podemos supor que $i_1 < i_2$.*

3. $f_3 = \sum\limits_i \gamma_i [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}] \prod\limits_j L(a_{ij}, b_{ij})$. *Além disso, podemos supor que $i_1 < i_2 \leq i_3$.*

Em todos os casos $a_{ij}, b_{ij} \in X$, ou seja, são variáveis simétricas e $\alpha, \beta, \gamma \in K$.

Demonstração: Para demonstrar a primeira parte do lema basta utilizar as identidades (3.17), (3.18) e (3.19) que são satisfeitas em R. Assim, resta mostrar a desigualdade entre os indices. Para o caso (1) pode-se escrever, a menos de sinal, que $i_1 < i_2$ e $i_3 < i_4$ e que $i_1 \leq i_3$, está última segue da identidade (3.1). Suponha, agora, que $i_2 > i_4$. Então pela identidade (3.3) obtemos, em R, que:

$$[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}] = -[x_{i_1}, x_{i_3}][x_{i_4}, x_{i_2}] + [x_{i_1}, x_{i_4}][x_{i_3}, x_{i_2}],$$

e os termos do lado direito satisfazem a condição (1).

O caso (2) e (3) segue do que foi discutido. ■

Pela identidade (3.19), concluímos que os operadores $L(a, b)$ geram uma subálgebra comutativa da álgebra das transformações lineares de $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$. Agora, iremos fazer um breve comentário sobre o que será feito mais adiante. Consideraremos $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ como um módulo sobre a álgebra comutativa gerada pelos operadores L. Vamos encontrar os elementos que geram os F_i's. Posteriormente, mostraremos que estes elementos, quando avaliados sobre as matrizes genéricas com involução, são linearmente independentes. Disso concluiremos que a álgebra R será isomorfa à $*$-álgebra relativamente livre determinada por $(M_2(K), *)$.

Agora, apresentaremos o conceito de identidade polinomial fraca para a álgebra $M_n(K)$, assunto que será importante no decorrer desta seção.

Definição 3.1.16 *Seja $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$. Dizemos que f é uma* ***identidade polinomial fraca*** *para o par $(M_n(K), Sl_n(K))$, onde $Sl_n(K)$ é a álgebra de Lie das matrizes de ordem n cujo o traço é zero, se $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$, para quaisquer $a_1, a_2, \ldots, a_n \in Sl_n(K)$. Dizemos que f é* **identidade polinomial fraca essencial** *se f não for uma identidade polinomial para $M_n(K)$.*

Exemplo 3.1.17 *O polinômio $[x_1^2, x_2]$ é uma identidade polinomial fraca essencial para $M_2(K)$. De fato, se $A \in M_2(K)$, então $x^2 - tr(A)x + det(A)$ é o polinômio característico de A. Supondo $tr(A) = 0$ segue, pelo Teorema de Cayley-Hamilton, que $A^2 = -det(A)I_2$ e portanto A^2 comuta com qualquer elemento de $M_2(K)$. Porém tomando E_{11}, E_{12} elementos da base canônica de $M_2(K)$, teremos que $[E_{11}^2, E_{12}] = E_{12} \neq 0$, e assim temos o resultado.*

Os polinômios que consideramos são $*$-próprios. Assim, ao calcular tal polinômio em $M_2(K)$ podemos dispensar a componente escalar das respectivas matrizes. Em outras palavras, se $m_i \in M_2(K)$ e $m'_i = m_i - [(1/2)tr(m_i)]I_2 \in Sl_2(K)$, então $f(m_1, \ldots, m_n) = f(m'_1, \ldots, m'_n)$, para todo polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in B_*$ dependendo apenas de variáveis simétricas. Portanto, $f \in B_*$ é $*$-identidade para $M_2(K)$ se, e somente se, ele é uma identidade fraca para o par $(M_2(K), Sl_2(K))$.

Por argumentos padrões podemos supor, sem perda de generalidade, que K é um corpo algebricamente fechado. Portanto, podemos tomar as matrizes

$$e_0 = I_2,\ e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

com $i^2 = -1$ em K. Observe que as matrizes acima formam uma base para o espaço vetorial $M_2(K)$ e e_1, e_2 e e_3, formam uma base para a álgebra de Lie $Sl_2(K)$. Note ainda que

$$(x_{11}e_1 + x_{12}e_2 + x_{13}e_3)^2 = -({x_{11}}^2 + {x_{12}}^2 + {x_{13}}^2)e_0$$

De fato,

$$\left[\begin{pmatrix} x_{11}i & 0 \\ 0 & -x_{11}i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x_{12}i \\ x_{12}i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -x_{13} \\ x_{13}i & 0 \end{pmatrix}\right]^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11}i & x_{12}i - x_{13} \\ x_{12}i + x_{13}i & -x_{11}i \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} {x_{11}}^2 + {x_{12}}^2 + {x_{13}}^2 & 0 \\ 0 & {x_{11}}^2 + {x_{12}}^2 + {x_{13}}^2 \end{pmatrix}.$$

Então o par $(M_2(K), Sl_2(K))$ satisfaz as identidades $[x^2, y]$ e $[x \circ y, z]$ (observe que a segunda se obtém linearizando a primeira e multiplicando por $1/2$). Como a característica do corpo é diferente de 2, então as duas identidades são equivalentes. Aqui, identificaremos o corpo K como o centro de $M_2(K)$, ou seja, $K \simeq Ke_0 = \{\alpha e_0 \ ; \ \alpha \in K\}$. Logo, em $Sl_2(K)$, podemos definir uma forma bilinear não degenerada da seguinte maneira:

$$\langle a, b\rangle = a \circ b, \text{ para quaisquer } a, b \in Sl_2(K).$$

Utilizaremos este mesmo produto interno, mas nos restringiremos ao espaço gerado por e_1, e_2, ou seja, o espaço das matrizes simétricas.

Observe que se substituímos x_1, x_2, a, b por matrizes de traço zero, segue de [34], que

$$[x_1, x_2]L(a, b) = [x_1, x_2] \circ (a \circ b).$$

Aqui, $(a \circ b)$ é o produto interno no espaço gerado por e_1 e e_2.

3.1.3 Tabelas Admissíveis

Nesta subseção faremos um breve estudo sobre a descrições das tabelas duplas. Voltamos a lembrar que nos restringimos apenas às variáveis simétricas. Além disso, pelo que foi comentado anteriormente, nossas variáveis também são elementos da álgebra de Lie $Sl_2(K)$.

Os invariantes do grupo ortogonal para o produto interno acima são descritas em termos de tabelas duplas (para maiores detalhes ver [14]).

Definição 3.1.18 *Uma tabela dupla é uma tabela*

$$T = \left(\begin{array}{ccc|ccc} p_{11} & \cdots & p_{1m_1} & q_{11} & \cdots & q_{1m_1} \\ p_{21} & \cdots & p_{2m_2} & q_{21} & \cdots & q_{2m_2} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ p_{k1} & \cdots & p_{km_k} & q_{k1} & \cdots & q_{km_k} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right),$$

onde $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_k$ *e* p_{ij}, q_{ij} *são inteiros para cada* i, j.

Definiremos, agora, as i-tabelas, para $i = 0, 1, 2$, que serão tabelas importantes na associação das $*$-identidades da álgebra $M_2(K)$.

Definição 3.1.19 *Dizemos que* T *é:*

(i) ***0-tabela****, quando todas as entradas de* T *são inteiros positivos e* $m_1 \geq 2$*;*

(ii) ***1-tabela****, quando* $m_1 \geq 2$, $p_{11} = 0$ *e as outras entradas de* T *são inteiros positivos;*

(iii) ***2-tabela****, quando* $m_1 \geq 2$, $p_{11} = -1, p_{12} = 0$ *e as outras entradas são inteiros positivos.*

Associaremos a T um polinômio $\varphi(T)$ em R, da seguinte maneira:

Definição 3.1.20 *Seja* $T = \left(\begin{array}{cccc|cccc} p_1 & p_2 & \cdots & p_m & q_1 & q_2 & \cdots & q_m \end{array} \right)$ *uma tabela com apenas uma linha.*

(i) Se T *é uma* 0*-tabela, então*

$$\varphi(T) = (1/4) \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma [x_{p_1}, x_{p_2}][x_{q_{\sigma(1)}}, x_{q_{\sigma(2)}}] L(x_{p_3}, x_{q_{\sigma(3)}}) \cdots L(x_{p_m}, x_{q_{\sigma(m)}});$$

(ii) Se T *é uma* 1*-tabela, então*

$$\varphi(T) = (-1/4) \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma [x_{q_{\sigma(1)}}, x_{q_{\sigma(2)}}, x_{p_2}] L(x_{p_3}, x_{q_{\sigma(3)}}) \cdots L(x_{p_m}, x_{q_{\sigma(m)}});$$

(iii) Se T *é uma* 2*-tabela, então:*

Se $m = 2$*, então* $\varphi(T) = (-1/4)[x_{q_1}, x_{q_2}]$.

No caso em que $m \geq 3$*, então*

$$\varphi(T) = (-1/4) \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma [x_{q_{\sigma(1)}}, x_{q_{\sigma(2)}}] L(x_{p_3}, x_{q_{\sigma(3)}}) \cdots L(x_{p_m}, x_{q_{\sigma(m)}}).$$

No caso geral, seja $T_1, T_2, \ldots, T_k$ *as sucessivas linhas de* T. *Então associamos*

$$\varphi(T) = \varphi(T_1) l_2 \cdots l_k,$$

onde l_j *denota o produto de transformações lineares que comutam entre si, ou seja,*

$$l_j = \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^{\sigma} L(x_{p_{j1}}, x_{q_{j\sigma(1)}}) \cdots L(x_{p_{jm}}, x_{q_{j\sigma(m)}}), m = m_j.$$

Aqui, S_m *denota o grupo simétrico agindo no conjunto* $\{1, 2, \cdots, m\}$ *e* $(-1)^{\sigma}$ *é o sinal de* $\sigma \in S_m$.

Observando que

$$det(L(x_{p_{jb}}, x_{q_{j\sigma(b)}})) = \begin{vmatrix} L(x_{p_{j1}}, x_{q_{j1}}) & \cdots & L(x_{p_{j1}}, x_{q_{jm}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L(x_{p_{jm}}, x_{q_{j1}}) & \cdots & L(x_{p_{jm}}, x_{q_{jm}}) \end{vmatrix} = l_j,$$

note que l_j é o "determinante" de uma matriz de ordem m onde $L(x_{p_{ab}}, x_{q_{a\sigma(b)}})$ está na entrada (a, b).

Lema 3.1.21 *Suponha que* T *é uma i-tabela,* $i = 0, 1, 2$. *Se* $m_1 \geq 3$, *então* $\varphi(T) = 0$ *em* R.

Demonstração: É suficiente demonstrar o lema para o caso de uma tabela T consistindo de apenas uma linha e $m_1 = 3$, já que no caso geral a tabela T é associada a $\varphi(T) = \varphi(T_1) l_2 \cdots l_k$, onde T_1 é a primeira linha, e além disso, $[v, x_i, x_j] = [v, x_j, x_i]$, para qualquer comutador antissimétrico v.

Daí, se $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ é uma 0-tabela, então

$$\varphi(T) = (1/4) \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^{\sigma} [x_1, x_2][x_{q_{\sigma(4)}}, x_{q_{\sigma(5)}}] L(x_3, x_{q_{\sigma(6)}}).$$

Assim, aplicando a identidade (3.16) obtemos

$$\begin{aligned} \varphi(T) &= (1/16) \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^{\sigma} [x_1, x_2][x_{q_{\sigma(4)}}, x_{q_{\sigma(5)}}, x_3, x_{q_{\sigma(6)}}] \\ &= (1/16)[x_1, x_2]([x_4, x_5, x_3, x_6] - [x_4, x_6, x_3, x_5] + [x_5, x_6, x_3, x_4] + \\ &+ [x_6, x_4, x_3, x_5] - [x_5, x_4, x_3, x_6] - [x_6, x_5, x_3, x_4]) \\ &= (1/8)[x_1, x_2]([x_4, x_5, x_3, x_6] - [x_4, x_6, x_3, x_5] + [x_5, x_6, x_3, x_4]) \\ &= (1/8)[x_1, x_2]([x_4, x_5, x_6, x_3] - [x_4, x_6, x_5, x_3] + [x_5, x_6, x_4, x_3]). \end{aligned}$$

Pela identidade de Jacobi, obtemos

$$\begin{aligned}\varphi(T) &= (1/8)[x_1,x_2][[x_4,x_5,x_6]-[x_4,x_6,x_5]+[x_5,x_6,x_4],x_3]\\ &= 0.\end{aligned}$$

Agora, seja $T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$ uma 1-tabela, então

$$\varphi(T)=(-1/4)\sum_{\sigma\in S_3}(-1)^{\sigma}[x_{q_{\sigma(3)}},x_{q_{\sigma(4)}},x_1]L(x_2,x_{q_{\sigma(5)}}).$$

Aplicando, as identidades (3.16) e (3.17) obtemos

$$\begin{aligned}\varphi(T) &= (-1/16)\sum_{\sigma\in S_3}(-1)^{\sigma}[x_{q_{\sigma(3)}},x_{q_{\sigma(4)}},x_2,x_{q_{\sigma(5)}},x_1]\\ &= (-1/16)\sum_{\sigma\in S_3}(-1)^{\sigma}[x_{q_{\sigma(3)}},x_{q_{\sigma(4)}},x_{q_{\sigma(5)}},x_2,x_1,]\\ &= (-1/8)([x_3,x_4,x_5,x_2,x_1]-[x_3,x_5,x_4,x_2,x_1]+[x_4,x_5,x_3,x_2,x_1]).\end{aligned}$$

Pela identidade de Jacobi, concluímos novamente que $\varphi(T)=0$.

Para finalizar, tomemos uma 2-tabela. Logo, $T=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & | & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$, implicará

$$\begin{aligned}\varphi(T) &= (-1/4)\sum_{\sigma\in S_3}(-1)^{\sigma}[x_{q_{\sigma(2)}},x_{q_{\sigma(3)}}]L(x_1,x_{q_{\sigma(4)}})\\ &= (-1/16)\sum_{\sigma\in S_3}(-1)^{\sigma}[x_{q_{\sigma(2)}},x_{q_{\sigma(3)}},x_1,x_{q_{\sigma(4)}}]\\ &= (-1/8)([x_2,x_3,x_1,x_4]-[x_2,x_4,x_1,x_3]+[x_3,x_4,x_1,x_2].\end{aligned}$$

Analogamente ao que foi feito nos anteriores, obteremos $\varphi(T)=0$. Assim, concluímos a demonstração do lema. ■

Definição 3.1.22 *A tabela dupla T é chamada de (duplamente) standard se $p_{ij}<p_{ij+1}$, $q_{ij}<q_{ij+1}$ e $p_{ij}\leq q_{ij}\leq p_{i+1j}$, para quaisquer i,j que fazem sentido nas desigualdades anteriores.*

Observação 3.1.23 *Dado $\{x_{ij}\ ;\ i\geq 1, 1\leq j\leq n\}$, denotando por V um K-espaço vetorial que tem como base o conjunto "de vetores genéricos" $x_i=(x_{i1},\ldots,x_{in})$, para $i\geq 1$. Definimos sobre V uma forma bilinear simétrica não degenerada dada por*

$$x_i\circ x_j=\sum_k x_{ik}x_{jk}.$$

É fato conhecido (ver [14]) que a álgebra de invariantes do grupo ortogonal O_n é gerada pelo produto $x_i \circ x_j$ e tem uma base indexado pelas tabelas standard T tal que $m_1 \leq m$.

Se $T = \left(\begin{array}{ccccccc} p_1 & \cdots & p_m & | & q_1 & \cdots & q_m \end{array} \right)$ consiste de um linha, então o elemento da base correspondente é $\tilde{T} = det(x_{p_i} \circ x_{q_j})_{m \times m}$.

Se as linhas de T são $T_1, T_2, \ldots, T_k$, então $\tilde{T} = \tilde{T}_1 \tilde{T}_2 \ldots \tilde{T}_k$.

Vamos aplicar a discussão feita na observação anterior ao caso em que o espaço vetorial é o espaço gerado pelas matrizes de ordem 2 simétricas e de traço zero. Observe que o produto interno $Sl_2 \times Sl_2 \to \mathbb{R}$ definida é dado por $u \circ v = (1/2)(uv + vu)$, para quaisquer $u, v \in Sl_2(K)$, uma vez que $(uv + vu)$ é uma matriz escalar. Assim, mostraremos que os polinômios $\tilde{T}$ tais que T é standard e $m_1 \leq 2$ são linearmente independentes.

Definição 3.1.24 *T é chamada de admissível se é uma tabela duplamente standard e o comprimento de sua primeira linha satisfaz $m_1 \leq 2$. Denotaremos por Adm o conjunto de todas as i-tabelas admissíveis, $i = 0, 1, 2$.*

Antes dos resultados, iremos definir uma ordem no conjunto das i-tabelas duplas, com $i = 0, 1, 2$.

Definição 3.1.25 *Seja T uma tabela dupla. Definimos:*

*(i) O **contorno** de T, denotada por $m(T)$, como sendo o vetor*

$$m(T) = (m_1, m_2, \ldots, m_k),$$

onde m_j representa o comprimento da respectiva meia-linha de T.

*(ii) A **forma** de T, denotado por $p(T)$, como sendo o vetor*

$$p(T) = (p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1m_1}, q_{11}, q_{12}, \cdots, q_{1m_1}, p_{21}, \cdots, q_{km_k}).$$

*(iii) O **conteúdo** de T, denotado por $d(T)$, como sendo o vetor*

$$d(T) = (d_{-k}, \ldots, d_{-1}, d_0, d_1, d_2, \ldots)$$

onde d_j é o número de entradas de T que são igual a j, para $j = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

A ordem no conjunto das i-tabelas duplas, com $i = 0, 1, 2$, será dada da seguinte forma: *sejam T_1 e T_2 duas i-tabelas duplas com o mesmo conteúdo, isto é, $d(T) = d(Q)$. Diremos que, $T_1 < T_2$ se $m(T_1) < m(T_2)$ na ordem lexicográfica usual ou caso $m(T_1) = m(T_2)$ então $p(T_1) > p(T_2)$ também com a ordem lexicográfica usual.*

Proposição 3.1.26 *Os polinômios $\{\varphi(T) \; ; \; T \in Adm\}$ gera o espaço vetorial $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ de todos os polinômios $*$-próprios em R que dependem somente de variáveis simétricas.*

Demonstração: É suficiente mostrar que cada polinômio $f_k \in F_k$ é uma combinação linear de polinômios $\varphi(T_j)$ para algumas i-tabelas standard $T_j \in Adm$.

Começaremos com $f_1 \in F_1$. Pela Proposição 3.1.15, podemos escrever

$$f_1 = \sum_i \alpha_i \varphi(T_i), \text{onde } \alpha_i \in K \text{ e } T_i \text{ são 0-tabelas.}$$

Pelo Lema 3.1.21, podemos assumir, sem perda de generalidade, que todas as linhas de T_i são de comprimento menor ou igual a 2. Assim, é suficiente mostrar que todo $\varphi(T_i)$ pode ser escrito como combinação de polinômios correspondentes a 0-tabelas standard.

Escrevendo $T = T_i$, suponha que T não seja standard. É fácil ver que podemos considerar que cada meia linha de T pode ser colocada em ordem ascendente. Se isto não ocorrer e a respectiva meia linha não é a primeira, podemos reordenar suas entradas, provocando no máximo uma mudança de sinal (vale lembrar que $m_i \leq 2$). Se a violação ocorre na primeira basta aplicar a Proposição 3.1.15. Além disso, se a violação das desigualdades da definição de tabela standard ocorre abaixo da primeira linha, podemos aplicar os argumentos de ([29], Lema 2.7) e expressar $\varphi(T)$ como uma combinação de tabelas maiores do que T, em relação à ordenação definida anteriormente.

Se por outro lado tivermos que $p_{1r} > q_{1r}$, aplicaremos novamente a Proposição 3.1.15. Portanto, o único caso a considerar é $q_{1r} > p_{2r}$, com $r = 1$ ou 2. Mas isto se resolve aplicando ([28], Lema 4.2, Proposição 4.2) e as observações feitas antes do Lema 3.1.14. Portanto $\varphi(T)$ é uma combinação linear da seguinte forma:

$$\varphi(T) = \sum_i \beta_i \varphi(T_i), \; \beta_i \in K, \; T_i > T.$$

Na sequência consideremos os polinômios $\varphi(T_i)$ e as correspondentes tabelas T_i. Tratando-os da mesma maneira obteremos que as tabelas são maiores que T, em relação à ordenação definida. Mas este processo deve acabar e assim todas as tabelas que participam dessa combinação devem ser standard. Note que o conjunto de todas as tabelas standard com conteúdo d é finito e, portanto, lidamos com um conjunto finito de tabelas duplas.

Agora seja T uma 2-tabela. Como anteriormente, podemos supor que T não é standard e que a violação do argumento standard é do tipo $q_{1r} > p_{2r}$. Neste caso, procede-se da mesma maneira que o anterior usando o resultado para as identidades da álgebra de Lie $Sl_2(K)$ em [34], Proposição 2.1 em vez do argumento de [28].

O último caso a considerar é quando T é 1-tabela, e como nos dois primeiros casos, supomos que a violação é $q_{1r} > p_{2r}$. O caso é tratado usando novamente [34], Proposição 2.1. Assim, concluímos a demonstração. ■

Recordemos que I é o ideal das $*$-identidades gerado pelas identidades (3.1)-(3.4). Vamos mostrar que $I = T(M_2(K), *)$. Como $I \subseteq T(M_2(K), *)$ é imediato que temos um epimorfismo canônico

$$\psi : R = K\langle X \cup Y\rangle/I \to K\langle X \cup Y\rangle/T(M_2(K), *) = \bar{R}.$$

Portanto, pela Proposição 3.1.26, a imagem do conjunto $\{\varphi(T)\ ;\ T \in Adm\}$ gera o espaço vetorial de todos os polinômios $*$-próprios em $\bar{R}$, que dependem apenas das variáveis simétricas. O teorema estará provado se conseguirmos mostrar que as imagens dos polinômios $\varphi(T)$, com $T \in Adm$, são linearmente independentes.

Aqui, faremos uso das identidades fracas para o par $(M_2(K), Sl_2(K))$. Primeiro temos a identidade $[x_1, x_2]L(a, b) = [x_1, x_2] \circ (a \circ b)$. Como consequência de $[x_1 \circ x_2, x_3] = 0$ obtemos $[x_1, x_2] \circ x_3 = x_1 \circ [x_2, x_3]$. Observe que a identidade fraca

$$[x_1, x_2] \circ [x_3, x_4] = -4((x_1 \circ x_3)(x_2 \circ x_4) - (x_1 \circ x_4)(x_2 \circ x_3) = -4\tilde{T},$$

vale para $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Com efeito, note que a identidade

$$[x, y, z] = 4[(y \circ z) \circ x - y \circ (z \circ x)],$$

para todo $x, y, z \in K\langle X\rangle$, é válida para qualquer álgebra associativa. Como $(x_1 \circ x_2)$ é um polinômio central para a álgebra $Sl_2(K)$, obteremos $(x_1 \circ x_2) \circ x_3 = (x_1 \circ x_2) \cdot x_3$.

Segue que

$$\begin{aligned}
[x_1,x_2]\circ[x_3,x_4] &= x_1\circ[x_4,x_3,x_2]\\
&= 4\cdot x_1\circ[(x_3\circ x_2)\circ x_4 - x_3\circ(x_2\circ x_4)]\\
&= 4\cdot x_1\circ[(x_3\circ x_2)x_4 - x_3(x_2\circ x_4)]\\
&= 2\cdot[x_1(x_3\circ x_2)x_4 - x_1x_3(x_2\circ x_4) + (x_3\circ x_2)x_4x_1 - x_3(x_2\circ x_4)x_1]\\
&= 2\cdot[(x_1x_4+x_4x_1)(x_3\circ x_2) - (x_1x_3+x_3x_1)(x_2\circ x_4)]\\
&= 4\cdot[(x_1\circ x_4)(x_3\circ x_2) - (x_1\circ x_3)(x_2\circ x_4)]\\
&= -4\cdot[(x_1\circ x_3)(x_2\circ x_4) - (x_1\circ x_4)(x_3\circ x_2)] = -4\tilde{T}.
\end{aligned}$$

Como queríamos. Agora, iremos necessitar do seguinte lema.

Lema 3.1.27 *Seja T uma $k=0,1,2$. Então valem as seguintes igualdades em $\bar{R}$.*

(1) Quando T é uma 0-tabela, $\varphi(T) = -2\tilde{T}$;

(2) Quando T é uma 1-tabela, $x_0\circ\varphi(T) = -2\tilde{T}$;

(3) Quando T é uma 2-tabela, $[x_1,x_0]\circ\varphi(T) = \tilde{T}$.

Aqui será usada a mesma notação $\varphi(T)$ de seu correspondente polinômio em R assim como suas respectivas imagens em $\bar{R}$.

Demonstração: A afirmação (1) segue do que foi provado acima, ou seja, tomando a igualdade $[x_1,x_2]\circ[x_3,x_4] = -4\tilde{T}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\varphi(T) &= (1/4)[[x_1,x_2]([x_3,x_4]-[x_4,x_3])]\\
&= (1/2)([x_1,x_2][x_3,x_4])\\
&= (1/2)([x_1,x_2]\circ[x_3,x_4]) = -2\tilde{T}.
\end{aligned}$$

E assim fica provado para (1). Para provar a afirmação (2), observamos que da identidade fraca $[x_1,x_2]\circ x_3 = x_1\circ[x_2,x_3]$ segue a igualdade $x_0\circ[x_3,x_2,x_1] = [x_0,x_1]\circ[x_2,x_3]$, que é também uma identidade fraca para $(M_2(K), Sl_2(K))$. Tomando T sendo 1-tabela, segue que

$$\begin{aligned} x_0 \circ \varphi(T) &= (-1/4)x_0 \circ ([x_2, x_3, x_1] - [x_3, x_2, x_1]) \\ &= (1/2)x_0 \circ ([x_3, x_2, x_1]) \\ &= (1/2)[x_0, x_1] \circ [x_2, x_3] \\ &= -2\tilde{T}, \end{aligned}$$

donde segue a afirmação (2). Para terminar a demonstração do lema, resta a afirmação (3). Tomando T 2-tabela, segue que

$$[x_{-1}, x_0] \circ \varphi(T) = (-1/4)([x_{-1}, x_0] \circ [x_2, x_3]) = \tilde{T}.$$

O que conclui a demonstração do lema. ■

Teorema 3.1.28 *As identidades (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4) formam uma base das $*$-identidades de $M_2(K)$, onde $*$ é a involução transposta.*

Demonstração: Pela Observação 3.1.23, os polinômios $\tilde{T}$ para T standard e $m_1 \leq 2$ são linearmente independentes em $\bar{R}$. Pelo Lema 3.1.27 temos que os polinômios $\{\varphi(T) \; ; \; T \in Adm\}$ são linearmente independentes em $\bar{R}$. Note que para uma 0-tabela T, o polinômio $\varphi(T)$ representa matrizes escalares em $M_2(K)$; se T é uma 1-tabela, $\varphi(T)$ nos fornece matrizes simétricas de traço zero, e para 2-tabela, $\varphi(T)$ nos fornece matrizes antissimétricas em $M_2(K)$.

Portanto, $\{\varphi(T) \; ; \; T \in Adm\}$ é linearmente independente em $\bar{R}$, e forma uma base do espaço vetorial $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$. Com isso concluímos o resultado. ■

3.2 Involução Simplética

Nesta seção estudaremos a construção de uma base para o T_*-ideal de $(M_2(K), s)$ com involução simplética. Aqui (s) será denotada por $*$. Lembre que a involução simplética é dada por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

É fácil verificar que os elementos simétricos e antissiméticos da álgebra $(M_2(K), *)$ são dados por

$$X_i = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix} \text{ e } Y_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix},$$

respectivamente.

É imediato que o polinômio

$$[x_1, z], \tag{3.21}$$

onde z é uma variável antissimétrica ou simétrica de $K\langle X \cup Y\rangle$, é uma $*$-identidade para $M_2(K)$. Como na seção anterior, tomaremos R a álgebra obtida por tomarmos o quociente da álgebra livre pelo ideal das identidades com involução gerado pela identidade (3.21). Vale lembrar que estamos trabalhando com K sendo um corpo infinito de característica diferente de 2.

Teorema 3.2.1 *Seja K um corpo. Então as identidades polinomiais da álgebra $M_2(K)$ com a involução simplética têm base que consiste da identidade (3.21).*

Demonstração: Seja $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_l, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ uma $*$-identidade para $M_2(K)$. Como x_i é um elemento central, para todo $i = 1, 2, \ldots, l$, então deve existir $g(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, tal que

$$f = {x_1}^{r_1}{x_2}^{r_2}\ldots{x_l}^{r_l} g(y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

onde $r_1, r_2, \ldots, r_l$ são inteiros não negativos. Portanto, usando a mesma ideia do Corolário 3.1.7(ii), podemos admitir que se f é uma $*$-identidade e multihomogêneo, uma vez que K é um corpo infinito, então ela depende somente de variáveis antissimétricas.

Por outro lado, os elementos antissimétricos de $(M_2(K), *)$ coincidem com os elementos de $Sl_2(K)$, e portanto se f é uma $*$-identidade para $M_2(K)$, então f também é uma identidade fraca para o par $(M_2(K), Sl_2(K))$. Então, pelo Teorema 3.2 de [29], podemos escrever f da seguinte forma:

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \sum_i \alpha_i u_i [v_i \circ w_i, t_i] r_i$$

onde $\alpha_i \in K$, u_i, t_i e r_i são polinômios adequados e v_i e w_i são comutadores de grau ≥ 2 que dependem apenas de variáveis antissimétricas. Agora observemos que

$$[y_1, y_2]^* = -[y_1, y_2]$$

e daí, verifica-se , por indução, que v_i e w_i também são antissimétricos. Temos ainda

$$(y_1 \circ y_2)^* = (1/2)(y_1 y_2 + y_1 y_2)^* = (1/2)(y_1^* y_2^* + y_1^* y_2^*) = (1/2)(y_1 y_2 + y_1 y_2) = y_1 \circ y_2$$

Isto quer dizer que $y_1 \circ y_2$ é simétrico. Este último fato conclui a demonstração. ■

Capítulo 4

Polinômios Centrais com Involução para a Álgebra das Matrizes de Ordem 2

Neste capítulo apresentaremos as descrições dos polinômios centrais com involução para a álgebra $M_2(K)$, resultado obtido por Brandão e Koshlukov em [9], consideramos, como no capítulo 3, apenas as involuções transposta e simplética, para um corpo K infinito de característica diferente de 2. Para o desenvolvimento de tal estudo recorreremos a alguns resultados desenvolvidos nos Capítulos 2 e 3.

Em todo capítulo fixaremos $A = M_2(K)$ e o produto de Jordan será definido por

$$a \circ b = (1/2)(ab + ba).$$

4.1 A Involução Transposta

Nesta seção iremos estudar os polinômios centrais para a álgebra A com a involução transposta. A involução transposta é a aplicação dada por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

e estudaremos a construção de uma base para o T_*-espaço dos polinômios $*$-centrais da álgebra $(A, *)$.

Observe que os seguintes polinômios são $*$-centrais para a álgebra A:

$$y_1y_2; \tag{4.1}$$

$$z_1[y_1y_2, x]z_2; \tag{4.2}$$

$$z_1[y_1, y_2]z_2; \tag{4.3}$$

$$z_1([x_1, x_2][x_3, x_4] - [x_1, x_3][x_2, x_4] + [x_1, x_4][x_2, x_3])z_2; \tag{4.4}$$

$$z_1([y_1x_1y_2, x_2] - y_1y_2[x_2, x_1])z_2, \tag{4.5}$$

onde os z_i's são monômios em $X \cup Y$.

A partir de agora vamos denotar $T(M_2(K), *)$ por I. Seja V o T_*-espaço de $K\langle X \cup Y\rangle$ gerado pelos polinômios (4.1),(4.2), (4.3), (4.4) e (4.5). O objetivo nesta seção é mostrar que $C(A, *) = V$.

Lema 4.1.1 *$I \subseteq V \subseteq C(A, *)$.*

Demonstração: A primeira inclusão é imediata. É suficiente demonstrar a segunda inclusão. Observe que $V = I + V_1$, onde V_1 é o T_*-espaço de $K\langle X \cup Y\rangle$ gerado por y_1y_2. Observe que

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ab & 0 \\ 0 & -ab \end{pmatrix} \in Z(A).$$

para quaisquer $a, b \in K$, e daí segue que $V_1 \subseteq C(A, *)$. Além disso, $I \subseteq C(A, *)$. Logo, a segunda inclusão está provada. ∎

Lema 4.1.2 *Para todo $n \geq 1$, temos $y_1y_2 \dots y_{2n-1}y_{2n} \in V$.*

Demonstração: Iremos provar por indução sobre n. Para $n = 1$ temos um elemento da base de V, logo é imediato. Suponhamos então que o resultado seja válido para $n \geq 1$. É de fácil verificação que $y_{2n+1}y_{2n}y_{2n+1}$ é antissimétrico. Assim, substituindo y_{2n} por $y_{2n+1}y_{2n}y_{2n+1}$ em $y_1y_2 \dots y_{2n-1}y_{2n} \in V$, por hipótese de indução, obteremos $y_1y_2 \dots y_{2n-1}(y_{2n+1}y_{2n}y_{2n+1}) \in V$. Segue da identidade $[y_1, y_2]$ que

$$y_1y_2 \dots y_{2n-1}(y_{2n+1}y_{2n}y_{2n+1}) \equiv y_1y_2 \dots y_{2n-1}y_{2n}{y_{2n+1}}^2 \pmod{I}.$$

Substituindo y_{2n+1} por $y_{2n+1} + y_{2n+2}$, que é antissimétrico, podemos afirmar que

$$y_1y_2 \dots y_{2n-1}y_{2n}(y_{2n+1} + y_{2n+2})^2 \in V.$$

Mas, este último polinômio é congruente módulo I a

$$y_1y_2\dots y_{2n-1}y_{2n}{y_{2n+1}}^2 + 2y_1y_2\dots y_{2n-1}y_{2n}y_{2n+1}y_{2n+2} + y_1y_2\dots y_{2n-1}y_{2n}{y_{2n+2}}^2.$$

Como o primeiro e o terceiro polinômios pertencem a V, então

$$2y_1y_2\dots y_{2n-1}y_{2n}y_{2n+1}y_{2n+2} \in V.$$

■

É importante relembrar que a relação

$$[a_1a_2\dots a_n, c] = \sum_{i=1}^{n} a_1\dots a_{i-1}[a_i, c]a_{i+1}\dots a_n,$$

é válida para qualquer álgebra associativa (ver comentário na igualdade (1.2), Seção 1.1, Capítulo 1).

Lema 4.1.3 *Todo comutador v de grau $n \geq 2$ em $K\langle X \cup Y\rangle$ pode ser representado módulo I como uma combinação linear de produtos de comutadores das formas:*

$$y_i \quad , \quad [y_i, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}], k \geq 1 \quad , \quad [x_{i_1}, \dots, x_{i_l}], l \geq 2. \tag{4.6}$$

Demonstração: Vamos usar indução no grau do comutador. Se v é um comutador de grau 2, então $v = [x_i, x_j], v = [x_i, y_j] = -[y_j, x_i]$ ou $v = [y_i, y_j]$. Como $[y_i, y_j] \in I$ e os demais têm uma das formas em (4.6), temos o resultado para o caso dos comutadores com grau 2. Suponha que o resultado seja válido para comutadores de grau $n \geq 2$ e tomemos v um comutador de grau $n+1$. Temos que $v = [w, x]$ ou $v = [w, y]$, onde w é um comutador de grau n. Por hipótese de indução, w é uma combinação linear de produtos $w_1 \cdots w_m$, onde cada w_i tem uma das formas em (4.6). No caso $v = [w, x]$, observemos que

$$[w, x] = [w_1w_2\dots w_l, x] = \sum_{i=1}^{n} w_1\dots w_{i-1}[w_i, x]w_{i+1}\dots w_l.$$

Como $[w_i, x]$ tem necessariamente uma das formas em (4.6), este caso está concluído. Já no caso $v = [w, y]$, basta observar que

$$[w, y] = [w_1w_2\dots w_l, y] = w_1w_2\dots w_l y - y w_1w_2\dots w_l,$$

e ambos os termos do segundo membro da igualdade têm a forma desejada. ■

Pelo Lema 3.1.6, demonstrado no Capítulo 3, segue que para $f \in B_*$ e multihomogêneo temos, módulo I, que f pode ser escrito como $f = f_1 + f_2 + f_3$, onde f_1, f_2 e f_3 são combinações lineares de polinômios das seguintes forma:

$$u_1 u_2 \dots u_{2k}; \quad u_1 u_2 \dots u_{2k+1}; \quad u_1 u_2 \dots u_k w,$$

respectivamente, onde u_i são comutadores antissimétricos de grau ≥ 1, e w é um comutador simétrico de grau ≥ 2. Daí podemos demonstrar o próximo resultado.

Proposição 4.1.4 *Seja $f \in C(A, *)$ e $*$-próprio. Então, $f \equiv f_1 \pmod I$, onde f_1 é uma combinação linear de produtos de um número par de comutadores antissimétricos. Além disso, $f \in V$.*

Demonstração: Sejam f_1, f_2 e f_3 como no Lema 3.1.6, demonstrado no capítulo anterior. Pelo Lema 4.1.2, $f_1 \in V$ e assim $f - f_1 \in C(A, *)$. Logo $f_2 + f_3 \in C(A, *)$. Como toda matriz antissimétrica em $(M_2(K), *)$ tem traço zero e $u_1 \cdots u_{2n}$ é central, temos que f_2 sempre resultará em uma matriz de traço zero em $(M_2(K), t)$, uma vez que

$$(u_1 \cdots u_{2n})u_{2n+1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -ab \\ ab & 0 \end{pmatrix}.$$

Para ver que f_3 resulta em uma matriz de traço zero, basta observar que w (comutador simétrico de grau maior ou igual a 2) possui traço zero e que o produto de uma matriz antissimétrica por uma simétrica de traço zero é também uma matriz simétrica de traço zero. Segue então que $f_2 + f_3$ resulta em uma matriz de traço zero, além de ser central. Logo, $f_2 + f_3 \in I$, o que nós dá $f \equiv f_1 \pmod I$. Como $f_1 \in V$ e $I \subseteq V$, concluímos que $f = f_1 + f_2 + f_3 \in V$. ■

Vamos, agora, estudar o caso geral. Para esse estudo vamos precisar dos polinômios h_n que definiremos a seguir. O conceito de posto, introduzido na Definição 2.4.2, no Capítulo 2, terá uma grande importância na demonstração do resultado principal desta seção, pois através desta definição obteremos uma redução para polinômios $*$-próprio e assim utilizaremos a proposição anterior.

Definição 4.1.5 *Sejam z_i variáveis em $X \cup Y$. Definiremos $h_i \in K\langle X \cup Y \rangle$ da seguinte forma: $h_1(z_1, z_0) = z_1 \circ z_0$, $h_2(z_2, z_1, z_0) = z_2 \circ (z_1 \circ z_0)$, e, indutivamente, $h_{n+1}(z_{n+1}, z_n, \dots, z_1, z_0) = z_{n+1} \circ h_n(z_n, \dots, z_1, z_0)$.*

Como $(x_1 \circ y_1)$ é um polinômio antissimétrico, podemos facilmente concluir que se u_0 é antissimétrico e $v_1, \ldots, v_n$ são simétricos, então $h_n(v_n, \ldots, v_1, u_0)$ é antissimétrico, para todo $n \geq 1$.

Lema 4.1.6 *Sejam $x_1, \ldots, x_n$ variáveis simétricas e $u_1, \ldots, u_m$ variáveis ou comutadores antissimétricos, com m par. Então,*

$$x_n x_{n-1} \ldots x_2 x_1 u_1 u_2 \ldots u_m = h_n(x_n, x_{n-1} \ldots, x_1, u_1) u_2 \ldots u_m + s,$$

onde s é uma soma de polinômios da forma $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} g$, onde $0 \leq k < n$ e g é um polinômio $*$-próprio. Além disso, $x_n x_{n-1} \ldots x_2 x_1 u_1 u_2 \cdots u_m \equiv s \pmod V$.

Demonstração: Vamos usar indução sobre n. Note que

$$x_1 u_1 = (1/2)[x_1, u_1] + (x_1 \circ u_1) \tag{4.7}$$

Daí $x_1 u_1 \ldots u_m = (1/2)[x_1, u_1] u_2 \ldots u_m + h_1(x_1, u_1) u_2 \ldots u_m$, e como $[x_1, u_1] u_2 \ldots u_m$ é $*$-próprio (podemos reordenar os termos usando a relação $y_1 \circ [x, y_2] = 0$ válida em $I \subseteq V$) o resultado é válido para $n = 1$.

Suponha, agora, que o resultado seja válido para $n \geq 1$, ou seja,

$$x_n x_{n-1} \ldots x_2 x_1 u_1 u_2 \ldots u_m = h_n(x_n, x_{n-1} \ldots, x_1, u_1) u_2 \ldots u_m + s.$$

Multiplicando por x_{n+1} em ambos os membros da igualdade, obtemos

$$x_{n+1} x_n x_{n-1} \ldots x_2 x_1 u_1 u_2 \ldots u_m = x_{n+1} h_n(x_n, x_{n-1} \ldots, x_1, u_1) u_2 \ldots u_m + x_{n+1} s.$$

Observemos que, pela equação (4.7), temos

$$x_{n+1} h_n(x_n, \ldots, x_1, u_1) = (1/2)[x_{n+1}, h_n(x_n, \ldots, x_1, u_1)] + h_{n+1}(x_{n+1}, \ldots, x_1, u_1).$$

Pela Definição 4.1.5, $h_n(x_n, \ldots, x_1, u_1)$ é combinação linear de produtos de $u_1, x_1, \ldots, x_n$. Pela igualdade

$$[a_1 a_2 \ldots a_n, c] = \sum_{i=1}^{n} a_1 \ldots a_{i-1} [a_i, c] a_{i+1} \ldots a_n,$$

podemos ver que $[x_{n+1}, h_n(x_n, \ldots, x_1, u_1)]$ é uma combinação linear de produtos nos quais aparecem no máximo n variáveis simétricas (que estão em $\{x_1, \ldots, x_n\}$) fora do comutador. Assim, podemos reordenar os termos usando a relação $ab = ba + [a, b]$

(se necessário) e mostramos que $[x_{n+1}, h_n(x_n, \ldots, x_1, u_1)]u_2 \ldots u_m$ é um somatório de produtos da forma $x_{i_1}x_{i_2} \ldots x_{i_k}g$, onde $0 \leq k < n+1$ e g é um polinômio $*$-próprio. Observando agora que $x_{n+1}s$ também é um somatório de produtos da forma apresentada, temos a primeira parte do resultado. Para obter a última parte do resultado, basta observar que $h_n(x_n, \ldots, x_1, u_1)u_2 \ldots u_m \in V$, uma vez que m é par e h_n é antissimétrico (pelo Lema 4.1.2). ■

Observação 4.1.7 *Relembremos a definição de posto de $f \in K\langle X \cup U\rangle$. Seja f um polinômio multihomogêneo em $K\langle X \cup Y\rangle$. Escrevendo*

$$f = \sum_a \alpha_a {x_1}^{a_1} {x_2}^{a_2} \ldots {x_n}^{a_n} g_a$$

onde g_a é um polinômio $*$-próprio, definimos o posto de f, denotado por $r(f)$, como sendo a maior n-upla $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ na ordem lexicográfica usual. Além disso, dizer que f é $*$-próprio equivale a dizer que $r(f) = (0, 0, \ldots, 0)$. Para maiores detalhes ver Seção 2.4.

Teorema 4.1.8 *O T_*-espaço $C(A, *)$ é gerado pelos polinômios 4.1-4.5, ou seja, $C(A, *) = V$.*

Demonstração: A inclusão $V \subseteq C(A, *)$ segue do Lema 4.1.1, bastando verificar a inclusão contrária. Seja $f(x_1, \ldots, x_l, y_1 \ldots, y_m) \in C(A, *)$ multihomogêneo. Vamos usar indução sobre o posto de f.

Se $r(f) = (0, \ldots, 0)$, então f é $*$-próprio e assim, pela Proposição 4.1.4, $f \in V$. Suponha, então, que $r(f) = (b_1, b_2, \ldots, b_l) > (0, 0, \ldots, 0)$ e que o resultado seja válido para todos os polinômios de posto menor que $r(f)$. Segue que

$$f = \alpha {x_1}^{b_1} {x_2}^{b_2} \cdots {x_l}^{b_l} g + \sum_a \alpha_a {x_1}^{a_1} {x_2}^{a_2} \ldots {x_l}^{a_l} g_a,$$

onde g e g_a são polinômios $*$-próprios e $a = (a_1, a_2, \ldots, a_l) < r(f)$.

Como 1 é simétrico, temos que $x_1 + 1$ é simétrico e daí o polinômio $f(x_1+1, x_2, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m)$ pertence a $C(A, *)$. Como K é infinito, podemos considerar apenas suas componentes homogêneas, que também pertencem a $C(A, *)$. Tomando a componente $f^{(1)}$ de grau mínimo em x_1, então

$$f^{(1)} = \alpha {x_2}^{b_2} \ldots {x_l}^{b_l} g + \sum_a \alpha_a {x_2}^{a_2} \ldots {x_l}^{a_l} g_a.$$

Aqui, a soma é dada sobre todo a tal que $a_1 = b_1$ (observe que se substituirmos algumas entradas x_i por 1 em g_a, então g_a se anulam, pois é $*$-própria).

Claramente, $b > a$, implica que $(0, b_2, \ldots, b_l) > (0, a_2, \ldots, a_l)$ onde $a_1 = b_1$. Considerando agora $f^{(1)}$ e repetindo o procedimento anterior, podemos tomar a componente homogênea $f^{(2)}$ de grau mínimo em x_2:

$$f^{(2)} = \alpha {x_3}^{b_3} \ldots {x_l}^{b_l} g + \sum_a \alpha_a {x_3}^{a_3} \ldots {x_l}^{a_l} g_a,$$

onde a soma é dada sobre todo a tal que $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$. Continuando este processo concluiremos que $g \in C(A, *)$, uma vez que $f^{(l)} = \alpha g$. Assim, pela Proposição 4.1.4, g deve ser congruente, módulo I, a uma combinação linear de produtos da forma $u_1 u_2 \ldots u_k$, onde k é par e u_i é um comutador antissimétrico de grau maior ou igual à 1. Portanto,

$$f \equiv v + \sum_a \alpha_a {x_1}^{a_1} \ldots {x_l}^{a_l} g_a \pmod I,$$

onde v é uma combinação linear de termos ${x_1}^{b_1} {x_2}^{b_2} \ldots {x_l}^{b_l} u_1 u_2 \ldots u_k$ para k par e u_i definido como anteriormente. Aplicando, agora o Lema 4.1.6 e a relação $ab = ba + [a, b]$ (se necessário), podemos afirmar que

$${x_1}^{b_1} {x_2}^{b_2} \ldots {x_l}^{b_l} u_1 u_2 \ldots u_k \equiv s \pmod V,$$

com s sendo uma combinação linear de ${x_1}^{c_1} {x_2}^{c_2} \ldots {x_l}^{c_l} q$ para algum polinômio $*$-próprio $q, c_i \leq b_i$ para todo i e $c_1 + \ldots + c_l < b_1 + \ldots + b_l$. Portanto, f é congruente, módulo V, a um polinômio $\bar{f}$, com $r(\bar{f}) < r(f)$. Mas como f é central, devemos ter $\bar{f}$ também central, já que

$$f \equiv \bar{f} \pmod V \Rightarrow f - \bar{f} \in V \subseteq C(A, *).$$

Por hipótese de indução, $\bar{f} \in V$, donde segue que $f \in V$. ■

4.2 A Involução Simplética

Nesta seção iremos estudar os polinômios centrais para a álgebra A com a involução simplética. A involução simplética é a aplicação $s : A \to A$, definida por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Recordemos que, com respeito a "s", os elementos simétricos de A são as matrizes escalares e que os antissimétricos são as matrizes de traço zero. O objetivo principal na Seção 3.2 do Capítulo 3, foi provar que $T(A, s)$ é gerado pelos polinômios $[x_1, x_2]$ e $[x_1, y_1]$.

Denotaremos por W o T_s-espaço em $K\langle X \cup Y\rangle$ gerado pelos polinômios:

$$x_1 \quad , \quad z_1[x_1, x_2]z_2 \quad , \quad z_1[x_1, y_1]z_2. \tag{4.8}$$

Imediatamente, $T(A, s) \subseteq W \subseteq C(A, s)$, uma vez que todo elemento simétrico de (A, s) é s-central e os outros dois geradores de W são s-identidades para A.

Teorema 4.2.1 *O T_s-espaço $C(A, s)$ é gerado pelos polinômios (4.8). Em outras palavras, $C(A, s) = W$.*

Demonstração: Basta mostrar que $C(A, s) \subseteq W$. Seja $f \in C(A, s)$, temos que

$$f = (1/2)(f + f^s) + (1/2)(f - f^s),$$

onde $(1/2)(f + f^s)$ é simétrico (central) e $(1/2)(f - f^s)$ é antissimétrico em $K\langle X \cup Y\rangle$. Como f e $(1/2)(f + f^s)$ são centrais, temos que $(1/2)(f - f^s)$ deve ser também central. Mas $(1/2)(f - f^s)$ resulta em uma matriz de traço zero, já que é antissimétrico. Logo $(1/2)(f - f^s) \in T(A, s)$.

Como $T(A, s) \subseteq W$ e $(1/2)(f + f^s) \in W$, concluímos que $f \in W$. ■

Capítulo 5

Identidades Polinomiais com Involução para a Álgebra $M_{1,1}(E)$

Neste capítulo, iremos considerar a álgebra $M_{1,1}(E)$, com involução $*$ induzida pela superinvolução transposta da superálgebra $M_{1,1}(K)$, das álgebras das matrizes de ordem 2 sobre um corpo K, que será definido mais adiante. Estudaremos aqui, as $*$-identidades polinomiais, no caso em que a característica do corpo é zero e descreveremos um conjunto gerador para o ideal das $*$-identidades polinomiais desta álgebra.

Consideraremos ainda a álgebra das matrizes de ordem n sobre a álgebra de Grassmann E, denotada por $M_n(E)$, provando que para uma certa classe de involuções definidas sobre ela, qualquer $*$-identidade polinomial é uma identidade polinomial ordinária, e um resultado semelhante vale para a álgebra $M_{k,l}(E)$. Tal resultado foi obtido por Di Vincenzo e Koshlukov em [16].

Em todo o capítulo, $K\langle X \cup Y\rangle$ denotará a álgebra livre com involução sobre K gerado pelos conjuntos das variáveis simétricas X e das variáveis antissimétricas Y. Além disso, $(a \circ b) = ab + ba$ denotará o produto de Jordan.

5.1 Introdução

Nesta seção veremos alguns resultados que serão úteis no decorrer do capítulo. Este estudo foi baseado no artigo [24].

Definição 5.1.1 *Dizemos que A é uma* **superálgebra** *se A for uma álgebra*

$\mathbb{Z}_2$-graduada, ou seja, $A = A_0 \oplus A_1$ e $A_iA_j \subseteq A_{i+j}$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{Z}_2$.

Observação 5.1.2 *Segue da definição que se $A = A_0 \oplus A_1$ é uma superálgebra, então A_0 é uma subálgebra(não graduada) de A.*

Se $a \in A_i$, então a é homogêneo de grau i, e escrevemos $|a| = i$. Os elementos de A_0 são chamados **pares** e os elementos de A_1 são chamados **ímpares**. Além disso, uma superálgebra é dita ser **simples**, se $A^2 \neq 0$ e não possui ideal (graduado) próprio. Seguem alguns exemplos de superálgebra.

Observação 5.1.3 *Dizemos que I é um ideal graduado de uma álgebra graduada A, se I é uma álgebra graduada e $I \cap A_i = I_i$, para $i = 0, 1$.*

Exemplo 5.1.4 *Qualquer álgebra A tem uma estrutura natural de superálgebra com $A_0 = A$ e $A_1 = 0$. Essa superálgebra é chamada* **trivial**.

Exemplo 5.1.5 *A $\mathbb{R}$-álgebra dos números complexos $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$ é uma superálgebra com $\mathbb{C}_0 = \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}_1 = \mathbb{R}i$.*

Exemplo 5.1.6 *Seja $V = V_0 \oplus V_1$ uma espaço vetorial. Então, é fácil verificar que a álgebra associativa $End(V)$ possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação $End(V) = End(V)_0 \oplus End(V)_1$, em que*

$$End(V)_i = \{\varphi \in End(V)\ ;\ \varphi(V_j) \subseteq V_{j+i}\},\ \text{para todo } i, j \in \mathbb{Z}_2$$

Assim,

$$End(V_0)_0 \subseteq V_0, \quad End(V_1)_0 \subseteq V_1, \quad End(V_0)_1 \subseteq V_1, \quad End(V_1)_1 \subseteq V_0$$

Supondo que $dimV_0 = n \geq 1$ e $dimV_1 = m \geq 1$, onde $n + m = dimV$, podemos traduzir em linguagem de matrizes. Considerando $\beta_0 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $\beta_1 = \{v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_{n+m}\}$ bases para os subespaços vetoriais V_0 e V_1, respectivamente, teremos $\beta = \beta_0 \cup \beta_1$ uma base para o espaço V. Assim, tomando $\varphi \in End(V)$, pelo que foi argumentando acima, teremos $\varphi_0 \in (End(V))_0$ e $\varphi_1 \in (End(V))_1$ tais que $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, e consequentemente podemos observar que para cada elemento da base β teremos

$$\begin{aligned} \varphi(v_i) &= \varphi_0(v_i) + \varphi_1(v_i) \\ &= (a_{1,i}v_1 + \ldots + a_{n,i}v_n) + (a_{n+1,i}v_{n+1} + \ldots + a_{n+m,i}v_{n+m}). \end{aligned}$$

Caso $v_i \in \beta_0$, *teremos que* $\varphi_0(v_i) \in V_0$ *e* $\varphi_1(v_i) \in V_1$*; caso contrário* $\varphi_0(v_i) \in V_1$ *e* $\varphi_1(v_i) \in V_0$, *para todo* $i \in \{1, 2, \ldots, n+m\}$. *Obtemos assim a superálgebra* $M_{n,m}(K)$, *cujos elementos são matrizes quadradas de ordem* $n+m$ *e a sua* $\mathbb{Z}_2$*-graduação é determinada do seguinte modo:*

$$M_{n,m}(K)_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \ ; \ A \in M_n(K), D \in M_m(K) \right\} \ e$$
$$M_{n,m}(K)_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \ ; \ B \in M_{n\times m}(K), C \in M_{m\times n}(K) \right\}$$

Definição 5.1.7 *Seja* A *uma superálgebra associativa. Uma* **superinvolução** *sobre* A *é uma aplicação linear* $\mathbb{Z}_2$*-graduada* $* : A \to A$ *que satisfaz:*

(i) $(a^*)^* = a$, *para todo* $a \in A$;

(ii) $(ab)^* = (-1)^{|a||b|}b^*a^*$, *para todo elementos* $\mathbb{Z}_2$*-homogêneos* a, b *de* $\mathbb{Z}_2$*-grau* $|a|$ *e* $|b|$, *respectivamente.*

Observação 5.1.8 *Se* $*$ *é uma superinvolução sobre* A, *então a restrição de* $*$ *para* A_0 *é uma involução sobre* A_0. *Além disso, é fácil verificar que* $1^* = 1$.

Segue alguns exemplos de superinvolução.

Exemplo 5.1.9 *Seja* $V = V_0 \oplus V_1$ *um espaço vetorial, onde* $dimV_0 = n \geq 1$ *e* $dimV_1 = m \geq 1$. *Seja* $(,)$ *uma forma bilinear superssimétrica não degenerada sobre* V, *isto é, a restrição de* $(,)$ *a* V_0 *é simétrica, e a restrição de* $(,)$ *a* V_1 *é antissimétrica (em particular, m par, para maiores detalhes ver [25], Capítulo 10), e* V_0 *e* V_1 *são ortogonais. O endomorfismo adjunto* φ^* *de* $\varphi \in End(V)$ *é definido por:*

$$(\varphi(v), w) = (-1)^{|\varphi||w|}(v, \varphi^*(w)).$$

Podemos verificar que a aplicação $\varphi \to \varphi^*$ *define uma superinvolução sobre* $End(V)$, *o qual é chamado de* **superinvolução ortosimplética** *e denotaremos por "osp".*

Podemos traduzir em linguagem de matrizes. Seja $H \in M_n(K)$ *(respectivamente,* $Q \in M_m(K)$*) a matriz associada com a restrição de* $(,)$ *para* V_0 *(respectivamente, para* V_1*). Note que* H *é uma matriz simétrica,* Q *é antissimétrica, e claramente* H *e* Q *são* *invertíveis. Assim, para uma base apropriada, é fácil verificar que a superinvolução ortosimplética sobre $M_{n,m}(K)$ é dada por*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{osp} = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & -B \\ C & D \end{pmatrix}^{t} \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

onde "t" denota a aplicação transposta usual de matriz , H é uma matriz diagonal e

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix}, \text{ com } J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\frac{m}{2}\times\frac{m}{2}}.$$

Exemplo 5.1.10 *Podemos considerar a superálgebra $M_{n,n}(K)$. Defina a aplicação $trp : M_{n,n}(K) \to M_{n,n}(K)$ da seguinte forma:*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{trp} = \begin{pmatrix} D^t & -B^t \\ C^t & A^t \end{pmatrix}.$$

É fácil verificar que a aplicação definida acima é uma superinvolução que chamaremos de **superinvolução transposta***, onde "t" denota a matriz transposta usual.*

Nesta seção iremos considerar $\circ$ e $\diamond$ um par de superinvoluções definidos sobre as superálgebras A e B, respectivamente. Então a aplicação $*$ definida sobre

$$R = A\widehat{\otimes}B = (A_0 \otimes B_0) \oplus (A_1 \otimes B_1),$$

tal que $(a \otimes b)^* = a^\circ \otimes b^\diamond$ é uma involução sobre R.

Exemplo 5.1.11 *Dada uma superálgebra $A = A_0 \oplus A_1$, consideramos o produto tensorial $E \otimes A$. A subálgebra*

$$E(A) = E_0 \otimes A_0 + E_1 \otimes A_1 \tag{5.1}$$

de $E \otimes A$ é chamado **envelope de Grassmann** *da superálgebra A.*

Exemplo 5.1.12 *Dada uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $A = A_0 \oplus A_1$, definimos*

$$M_{1,1}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \; ; \; a, d \in A_0, b, c \in A_1 \right\}$$

É imediato que $M_{1,1}(A)$ é uma subálgebra de $M_2(A)$. Tomando agora os subespaços

$$M_{1,1}(A)_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \ ; \ a, d \in A_0 \right\} \text{ e } M_{1,1}(A)_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \ ; \ b, c \in A_1 \right\}$$

de $M_{1,1}(A)$, *temos* $M_{1,1}(A) = M_{1,1}(A)_0 \oplus M_{1,1}(A)_1$ *e* $M_{1,1}(A)_i M_{1,1}(A)_j \subseteq M_{1,1}(A)_{i+j}$, *para quaisquer* $i, j \in \mathbb{Z}_2$. *Assim, esta decomposição define uma* $\mathbb{Z}_2$*-graduação em* $M_{1,1}(A)$. *É fácil verificar que*

$$M_{1,1}(A) \simeq (M_{1,1}(K)_0 \otimes A_0) \oplus (M_{1,1}(K)_1 \otimes A_1).$$

Teorema 5.1.13 *([24]) As únicas duas superinvoluções sobre* $M_{1,1}(K)$ *são trp e* $(trp)p$, *onde* p *é o automorfismo de* $M_{1,1}(K)$ *dado por* $p(a_0 + a_1) = a_0 - a_1$ *(o automorfismo paridade).*

Demonstração: Seja $*$ uma superinvolução em $M_{1,1}(K)$, e seja $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ a base canônica de $M_{1,1}(K)$. Observe que dado um $X \in M_{1,1}(K)_0$ idempotente, teremos que

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix},$$

logo $a^2 = a$ e $d^2 = d$. Segue daí que $0 = 0_{2\times 2}$ e $1 = 1_{2\times 2}$, para E_{11} e E_{22} são os únicos elementos pares idempotentes de $M_{1,1}(K)$. Além disso, se E é idempotente, então E^* é também idempotente, uma vez que $0^* = 0$, $1^* = 1$. Para E_{11} e E_{22}, existem exatamente duas possibilidades:

(I) $E_{11}^* = E_{11}, E_{22}^* = E_{22}$;

(II) $E_{11}^* = E_{22}, E_{22}^* = E_{11}$.

Podemos escrever em ambos os casos,

$$E_{12}^* = xE_{12} + yE_{21} \quad \text{e} \quad E_{21}^* = zE_{12} + tE_{21},$$

para $x, y, z, t \in K$.

Impondo as condições necessárias para ser uma superinvolução, obtemos:

$$\begin{aligned} E_{12} = E_{12}^{**} &= (xE_{12} + yE_{21})^* \\ &= xE_{12}^* + yE_{21}^* \\ &= x(xE_{12} + yE_{21}) + y(zE_{12} + tE_{21}) \\ &= x^2E_{12} + xyE_{21} + yzE_{12} + ytE_{21} \\ &= (x^2 + yz)E_{12} + (x + t)yE_{21}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

e

$$\begin{aligned} E_{21} = E_{21}^{**} &= (zE_{12} + tE_{21})^* \\ &= zE_{12}^* + tE_{21}^* \\ &= z(xE_{12} + yE_{21}) + t(zE_{12} + tE_{21}) \\ &= zxE_{12} + zyE_{21} + tzE_{12} + t^2E_{21} \\ &= (x + t)zE_{12} + (zy + t^2)E_{21}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Além disso, no caso (I) temos:

$$\begin{aligned} E_{11} = E_{11}^* &= (E_{12}E_{21})^* \\ &= (-1)E_{21}^*E_{12}^* \\ &= (-1)(zE_{12} + tE_{21})(xE_{12} + yE_{21}) \\ &= (-1)(zyE_{11} + txE_{22}) \qquad (5.4) \\ E_{22} = E_{22}^* &= (E_{21}E_{12})^* \\ &= (-1)E_{12}^*E_{21}^* \\ &= (-1)(xE_{12} + yE_{21})(zE_{12} + tE_{21}) \\ &= (-1)(xtE_{11} + yzE_{22}). \qquad (5.5) \end{aligned}$$

Utilizando as equações (5.2) e (5.3), obtemos o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x^2 & + & yz & = & 1 \\ xy & + & ty & = & 0 \\ xz & + & tz & = & 0 \\ zy & + & t^2 & = & 1 \end{array} \right. . \tag{5.6}$$

Segue das equações (5.4) e (5.5) que $zy = -1$ e $tx = 0$. Substituindo zy por -1 na primeira e na última equação do sistema (5.6) obtemos $x^2 = t^2 = 2$. Por fim podemos multiplicar a segunda e a terceira equações do sistema (5.6) e chegaremos que $-4 = 0$, o que é um absurdo, uma vez que a característica do corpo é zero.

No caso (II) temos:

$$E_{11} = E_{22}^* = (-1)(xtE_{11} + yzE_{22}), \tag{5.7}$$

e

$$E_{22} = E_{11}^* = (-1)(zyE_{11} + txE_{22}). \tag{5.8}$$

Segue das equações (5.7) e (5.8) que $xt = -1$ e $zy = 0$. Substituindo zy por 0 na primeira e na última equações do sistema (5.6), obtemos $x = \pm 1$, $t = \mp 1$ e como $y = 0$ ou $z = 0$, observe que

$$\begin{aligned} 0 = 0^* &= (E_{21}E_{21})^* \\ &= -E_{21}^*E_{21}^* \\ &= -(zE_{12} \mp E_{21})(zE_{12} \mp E_{21}) \\ &= \pm z(E_{11} + E_{22}) \end{aligned}$$

Assim, $z = 0$, e analogamente obtemos $y = 0$. Logo, existem duas possibilidades para a superinvolução $*$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ c & a \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Claramente, no primeiro caso $* = trp$ é a superinvolução transposta e no segundo caso $* = (trp)p$ é a composição de trp com o automorfismo paridade. ∎

Nesta seção iremos ainda fazer um breve estudo das álgebras supercomutativas, observando que elas estão fortemente relacionadas com a álgebra de Grassmann. Comecemos com a definição de álgebra supercomutativa e alguns exemplos.

Definição 5.1.14 *Dizemos que uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $S = S_0 \oplus S_1$ é supercomutativa se $ab = (-1)^{ij}ba$ para quaisquer $a \in S_i$e $b \in S_j$.*

De acordo com esta definição, dizer que S é uma álgebra supercomutativa equivale a dizer que $S_0 \subseteq Z(S)$ e $ab = -ba$ para quaisquer $a, b \in S_1$.

Exemplo 5.1.15 *A álgebra de Grassmann (ou álgebra exterior), com sua $\mathbb{Z}_2$-graduação natural $E = E_0 \oplus E_1$ é um exemplo de álgebra supercomutativa.*

Exemplo 5.1.16 *Se $S = S_0 \oplus S_1$ é uma álgebra supercomutativa e A é uma álgebra comutativa qualquer, então $A \otimes S$ é uma álgebra supercomutativa. Para ver isto basta observar que a decomposição $A \otimes S = (A \otimes S_0) \oplus (A \otimes S_1)$, define uma $\mathbb{Z}_2$-graduação em $A \otimes S$ e que $A \otimes S_0 \subseteq Z(A \otimes S)$ e $xy = -yx$ para quaisquer $x, y \in A \otimes S_1$.*

Considerando a álgebra

$$M_{1,1}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ ; \ a, d \in E_0 \text{ e } b, c \in E_1 \right\},$$

claramente $M_{1,1}(E)$ é uma subálgebra de $M_2(E)$. A partir disso, definimos

$$M_{k,l}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \ ; \ A \in M_k(E_0), D \in M_l(E_0), B \in M_{k\times l}(E_1), C \in M_{l\times k}(E_1) \right\}$$

e utilizando mesmo argumento feito no Exemplo 5.1.12, é fácil verificar que $M_{k,l}(E)$ é uma subálgebra de $M_{k+l}(E)$ e que

$$M_{k,l}(E) \simeq E(M_{k,l}(K)) = (M_{k,l}(K)_0 \otimes E_0) \oplus (M_{k,l}(K)_1 \otimes E_1). \tag{5.9}$$

Pela equação (5.1), $M_{k,l}(E)$ é um envelope de Grassmann de $M_{k,l}(K) = M_{k+l}(K)$. Assim, se definirmos superinvolução α e β sobre $M_{k+l}(K)$ e E, respectivamente, teremos que a involução $\gamma_{\alpha,\beta}$ definida sobre $M_{k+l}(E)$ induz uma involução em $M_{k,l}(E)$.

Para terminar essa seção introdutória, podemos considerar a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \phi : (M_{1,1}(E), *) & \to & (M_{1,1}(E), \diamond) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \to & \phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \end{array}$$

onde $* = *_{(trp)p, id_E}$ e $\diamond = \diamond_{trp, id_E}$ são involuções induzidas sobre $M_{1,1}(E)$ pelo pares $((trp)p, id_E)$ e (trp, id_E) de superinvoluções definida sobre $M_2(K)$ e E, respectivamente. Pode-se observar facilmente que é uma transformação linear bijetiva e bem definida, bastando observar que $\phi(E_{11}) = E_{22}, \phi(E_{12}) = E_{21}, \phi(E_{21}) = E_{12}$ e $\phi(E_{22}) = E_{11}$. Assim segue que ϕ é a única transformação linear bijetiva com está propriedade. Além disso, temos

$$\begin{aligned} \phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^*\right) &= \phi\left(\begin{pmatrix} d & -b \\ c & a \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} a & c \\ -b & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}^\diamond \\ &= \phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)^\diamond \end{aligned}$$

Segue por este argumento que ϕ é um isomorfismo de álgebras com involução, ou seja, $(M_{1,1}(E), *) \simeq (M_{1,1}(E), \diamond)$. Portanto, estas duas álgebras com involução satisfazem o mesmo T_*-ideal.

5.2 Identidades com Involução sobre $M_n(E)$ e $M_{k,l}(E)$

Seja $(A, *)$ uma K-álgebra associativa com involução $*$. Diremos que um elemento a é um elemento $*$-homogêneo de A se $a \in A^+ \cup A^-$, então colocaremos $|a|_* = 0$, se $a \in A^-$ e $|a|_* = 1$, quando $a \in A^+$. Aqui $0, 1 \in \mathbb{Z}_2$.

Observação 5.2.1 *(i) Se a, b são elementos $*$-homogêneos de A, então o comutador $[a, b] = ab - ba$ é também $*$-homogêneo de A. Mais precisamente, $|[a, b]|_* = |a|_* + |b|_*$. Mais geralmente, podemos observar que*

$$[A^+, A^+] + [A^-, A^-] \subseteq A^- \quad e \quad [A^+, A^-] + [A^-, A^+] \subseteq A^+$$

(ii) De mesma maneira, se a, b são elementos $*$-homogêneos de A, então o produto de Jordan $a \circ b = (ab + ba)$ é também $*$-homogêneo de A. Mais precisamente, $|a \circ b|_* = |a|_* + |b|_* + 1$. Mais geralmente, podemos observar que

$$A^+ \circ A^+ + A^- \circ A^- \subseteq A^+ \quad e \quad A^+ \circ A^- + A^- \circ A^+ \subseteq A^-$$

Considere agora L um espaço vetorial de dimensão infinita sobre K e seja E a álgebra de Grassmann gerada por L. Consideremos primeiramente as involuções de $M_n(E) \cong M_n(K) \otimes E$ induzida pelo par (α, β) de superinvoluções definidas sobre $M_n(K)$ e E, respectivamente. Assim, se $m = \sum E_{ij} m_{ij} \in M_n(E)$, onde $E_{ij} \in M_n(K)$ é uma matriz canônica e $m_{ij} \in E$, definimos $\gamma(m) = \sum \alpha(E_{ij})\beta(m_{ij})$. Antes de relacionar as $*$-identidades das álgebras $M_n(E)$ e $M_{k,l}(E)$ em uma certa classe de álgebras, iremos demonstrar o seguinte resultado.

Proposição 5.2.2 *Seja $\gamma = \gamma_{\alpha,\beta}$ a involução induzida sobre $M_n(E)$ pelo par (α, β) de superinvoluções definidas sobre $M_n(K)$ e E, respectivamente. Se L é invariante sobre a ação de β, então qualquer $*$-PI de $(M_n(E), \gamma)$ é trivial, isto é, $f(x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m)$ pertence a $T_*(M_n(E), \gamma)$ se, e somente se, $f(x_1, \ldots, x_{l+m}) \in T(M_n(E))$.*

Demonstração: Sendo $char K = 0$, podemos mostrar o resultado apenas para o espaço dos polinômios multilineares. Tomando $L = L_{-1} \oplus L_1$, onde os subespaços L_1 e L_{-1} são autoespaços associados à aplicação linear β. Mais precisamente,

$$L_1 = \{v \in L \ ; \ v^\beta = v\} \text{ e } L_{-1} = \{v \in L \ ; \ v^\beta = -v\}.$$

Assuma, primeiramente, que L_1 possua dimensão infinita. Fixemos uma base $B = \{e_1, e_2, \ldots\}$ de L_1 dada por elementos simétricos em (E, β) e seja $\mathcal{E}' = \{e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_q} \ ; \ q \in \mathbb{N}, i_1 < i_2 < \cdots < i_q\}$ a base da álgebra de Grassmann E' gerada por L_1. Claramente, $M_n(E)$ e $M_n(E')$ satisfazem as mesmas identidades polinomiais. Assim, é suficiente provar que $f(x_1, \cdots, x_{l+m}) \in T(M_n(E'))$.

Portanto, se $\mathcal{B}$ é uma base de $R = M_n(E')$, precisaremos considerar o homomorfismo

$$S : K\langle X\rangle \to R$$

definido por $S(x_i) = r_i \in \mathcal{B}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Podemos assumir que $r_i = s_i w_i$, onde $w_i \in \mathcal{E}'$ e $s_i \in B_n$, onde B_n é alguma base de $M_n(K)$ dada por elementos α-homogêneos de $M_n(K)$. Observe que qualquer elemento $w = e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_q}$ de $\mathcal{E}'$ é β-homogêneo em E. Mais precisamente:

$$|e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q}|_\beta := \begin{cases} 1, & \text{se } q \equiv 0,1 \pmod 4 \\ 0, & \text{se } q \equiv 2,3 \pmod 4 \end{cases} \tag{5.10}$$

Segue que qualquer r_i é γ-homogêneo e $|r_i|_\gamma = 1 + |s_i|_\alpha + |w_i|_\beta$. Como L_1 tem dimensão infinita, da equação (5.10), podemos tomar $a_1, a_2, \cdots, a_{l+m} \in \mathcal{E}'$ de comprimento 4 e $a_{l+1}, a_{l+2}, \ldots, a_{l+m}$ de comprimento 2, tais que qualquer elemento $e_j \in B$ ocorrendo em $a_1a_2\ldots a_{l+m}$ não aparece na expressão w_i, para todo $i = 1, \ldots, l+m$, e além disso, $|a_i|_\beta = 1 + |r_i|_\gamma$ para $i = 1, \ldots, l$ e $|a_i|_\beta = |r_i|_\gamma$ para $i = l+1, \ldots, l+m$, ou seja, $r_1a_1, \ldots, r_la_l$ são elementos simétricos e $r_{l+1}a_{l+1}, \ldots, r_{l+m}a_{l+m}$ são antissimétricos em $(M_n(E), \gamma)$. Portanto,

$$f(r_1, \ldots, r_{l+m})a_1a_2\ldots a_{l+m} = f(r_1a_1, \ldots, r_{l+m}a_{l+m}) = 0.$$

Segue que $f(r_1, \ldots, r_{l+m}) = 0$, como desejado.

Analogamente, podemos supor que L_{-1} tem dimensão infinita, e usando método análogo obtemos o seguinte sistema de equação:

$$|e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_q}|_\beta := \begin{cases} 1, & \text{se } q \equiv 0,3 \pmod 4 \\ 0, & \text{se } q \equiv 1,2 \pmod 4 \end{cases} \tag{5.11}$$

e o resultado segue, como no caso de L_1. Como a reciproca é imediata, concluímos a demonstração. ■

Observação 5.2.3 *O resultado anterior não é válido se char$K = p > 0$, bastando considerar a involução β induzida sobre E pela aplicação identidade de L. Neste caso, $L_1 = L$ e $e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q}$ é antissimétrico se, e somente se, $q \equiv 2,3 \pmod 4$. Portanto, y^p é uma identidade polinomial de (E,β), mas $x^p \notin T(E)$.*

Com efeito, se char$K = p > 0$, podemos considerar uma involução $*$ induzida sobre E por uma aplicação identidade de um espaço vetorial L e, pelo que foi demonstrado anteriormente, $e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_q}$ é antissimétrico se, e somente se, $q \equiv 2,3 \pmod 4$. Além disso, observe que $1 \notin E^-$. Assim, se $w \in E^-$, então $w = \sum_{i=1}^r \alpha_i b_i$, com $\alpha_i \in K$ e b_i é um elemento da base de E^-. Daí $w^p = \sum_{1\leq i_1,\dots,i_p\leq r} \alpha_{i_1}\dots\alpha_{i_p} b_{i_1}\dots b_{i_p}$.

Se $r < p$, então para cada termo $b_{i_1}\dots b_{i_p}$ pelo menos dois dos b_i's são iguais. Portanto, $b_{i_1}\dots b_{i_p} = 0$, e teremos $w^p = 0$.

Se $r \geq p$, então

$$\begin{aligned} w^p &= \sum_{1\leq i_1,\dots,i_p\leq r} \alpha_{i_1}\dots\alpha_{i_p} b_{i_1}\dots b_{i_p} \\ &= \sum_{1\leq i_1\leq\dots\leq i_p\leq r} \alpha_{i_1}\dots\alpha_{i_p} \sum_{\sigma\in S_p} b_{i_{\sigma(1)}}\dots b_{i_{\sigma(p)}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Uma vez que,

$$\sum_{\sigma\in S_p} x_{i_{\sigma(1)}}\dots x_{i_{\sigma(p)}}$$

é uma identidade para E' quando char$K = p > 0$ (Para maiores detalhes ver [15], pág. 42). Logo, $y^p = 0$ é uma $*$-identidade para a álgebra $(E,*)$, quando $* = Id_E$. Porém, não é identidade para E, bastando observar que $1_E^p = 1_E$.

Pelo que foi mencionado na expressão (5.9), temos que $M_{k,l}(E) \cong M_{k,l}(K)\hat{\otimes}E$, onde $M_{k,l}(K)$ é a álgebra $M_{k+l}(K)$ com a estrutura de superálgebra definida no Exemplo 5.1.6. Sejam α uma involução de $M_{k,l}(K)$ e β uma involução definida sobre E. Assumimos que:

1. α preserva as componentes $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_{k,l}(K)$.

2. O espaço vetorial L é invariante sobre a ação de β.

Sob estas condições, a involução $\gamma_{\alpha,\beta}$ de $M_{k+l}(E)$, induz uma involução sobre $M_{k,l}(E) \subseteq M_{k+l}(E)$. Além disso, usando argumentos análogos aos da prova da Proposição 5.2.2, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 5.2.4 *Seja $\gamma = \gamma_{\alpha,\beta}$ a involução induzida sobre $M_{k,l}(E)$ pelo par (α,β) de involuções definidas sobre $M_{k+l}(K)$ e E, respectivamente. Se α e β satisfazem as condições (1) e (2) anteriormente definidas, então γ induz uma involução sobre $M_{k,l}(E)$ e qualquer identidade de $M_{k,l}(E)$ é trivial, ou seja,$f(x_1,\ldots,x_l,y_1,\ldots,y_m)$ pertence a $T_*(M_{k,l}(E),\gamma)$ se, e somente se, $f(x_1,\ldots,x_{l+m}) \in T(M_{k,l}(E))$.*

Demonstração: Basta tomar B_{k+l} alguma base de $M_{k,l}(K)$, dada por elementos α-homogêneos de $M_{k,l}(K)$, e repetir todo argumento. ■

5.3 Um Ideal de $*$-Identidades para $(M_{1,1}(E),*)$

Nesta seção determinaremos algumas $*$-identidades naturais que a álgebra $(M_{1,1}(E),*)$ munida da involução $*$ satisfaz e consideraremos o T_*-ideal I gerado por essas identidades. Consideraremos a involução $* = *_{(trp)p,id_E}$, onde $(trp)p$ é a superinvolução transposta composta com o automorfismo paridade sobre a superálgebra $M_{1,1}(K)$ e Id_E a superinvolução identidade sobre E.

No decorrer do capítulo, consideraremos a álgebra $R = M_{1,1}(E)$ e a involução $*$ definida sobre ela por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

É fácil verificar que os subespaços dos elementos simétricos e antissimétricos de R serão dados por

$$R^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \; ; \; a \in E_0, b \in E_1 \right\} \text{ e } R^- = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{pmatrix} \; ; \; a \in E_0, b \in E_1 \right\},$$

respectivamente. Portanto, os seguintes polinômios são $*$-identidades polinomiais de R:

$$[x_1, x_2]; \tag{5.12}$$

$$y_1 y_2 y_3 - y_3 y_2 y_1; \tag{5.13}$$

$$[y_1, y_2][y_3, y_4]. \tag{5.14}$$

A proposição seguinte tem uma lista de identidades polinomiais que são satisfeitas por $(R, *)$. Sua verificação não é tão simples quanto as $*$-identidades (5.12), (5.13) e (5.14), por isso foram listado separadamente. Mais precisamente temos o seguinte resultado:

Proposição 5.3.1 *Os seguintes polinômios pertencem ao ideal $T_*(R)$:*

(i) $[x_1, y_1, y_2, y_3] - 2(y_1 \circ y_2)[x_1, y_3]$;

(ii) $[y_1, y_2]x_1[y_3, y_4] + [y_3, y_4]x_1[y_1, y_2]$;

(iii) $2y_1[x_1, y_2, y_3] + [x_1, y_1, y_2, y_3] + [y_1, y_2][x_1, y_3] + [y_1, y_3][x_1, y_2] + [y_2, y_3][x_1, y_1]$;

(iv) $2[y_1, y_2]y_3[x_1, y_4] + [y_1, y_2][x_1, y_3, y_4]$;

(v) $[x_1, y_1][x_2, y_2] + [x_1, y_2][x_2, y_1]$;

(vi) $[x_1, y_1][x_2, y_2, y_3] - [x_1, y_2, y_1][x_2, y_3]$;

(vii) $[y_1, y_2][x_1, y_3][x_2, y_4] - [y_1, y_4][x_1, y_2][x_2, y_3] - [y_2, y_3][x_1, y_1][x_2, y_4] + [y_3, y_4][x_1, y_1][x_2, y_2]$.

Demonstração: É suficiente avaliar as indeterminadas x_i, y_i sobre os elementos:

$$X_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ 0 & \alpha_i \end{pmatrix} \text{ e } Y_i = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ c_i & -a_i \end{pmatrix}$$

que são elementos simétricos e antissimétricos de R, respectivamente.

Note que,

$$\begin{aligned}
[Y_i, Y_j] &= \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ c_i & -a_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_j & 0 \\ c_j & -a_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_j & 0 \\ c_j & -a_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_i & 0 \\ c_i & -a_i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_ia_j & 0 \\ c_ia_j - a_ic_j & a_ia_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_ja_i & 0 \\ c_ja_i - a_jc_i & a_ja_i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2(c_ia_j - a_ic_j) & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_i \circ Y_j &= \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ c_i & -a_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_j & 0 \\ c_j & -a_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_j & 0 \\ c_j & -a_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_i & 0 \\ c_i & -a_i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_ia_j & 0 \\ c_ia_j - a_ic_j & a_ia_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_ja_i & 0 \\ c_ja_i - a_jc_i & a_ja_i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2a_ia_j & 0 \\ 0 & 2a_ia_j \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[X_i, Y_j] &= \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ 0 & \alpha_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_j & 0 \\ c_j & -a_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_j & 0 \\ c_j & -a_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ 0 & \alpha_i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_ia_j + \beta_ic_j & -\beta_ia_j \\ \alpha_ic_j & -\alpha_ia_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_j\alpha_i & a_j\beta_i \\ c_j\alpha_i & c_j\beta_i - a_j\alpha_i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \beta_ic_j & -2\beta_ia_j \\ 0 & \beta_ic_j \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sendo E_{ij} as matrizes elementares de $M_2(K)$, temos que

$$\begin{aligned}
&[Y_i, Y_j] = 2(c_ia_j - a_ic_j)E_{21}, \\
&Y_i \circ Y_j = 2a_ia_j(E_{11} + E_{22}) = 2a_ia_jI_2 \\
e \qquad &[X_i, Y_j] = \beta_ic_j(E_{11} + E_{22}) - 2\beta_ia_jE_{12} = \beta_ic_jI_2 - 2\beta_ia_jE_{12}.
\end{aligned}$$

Segue por indução sobre $n \geq 1$, que

$$[X_1, Y_1, \ldots, Y_n] = (-2)^{n-1}\beta_1a_1 \ldots a_{n-1}c_n(E_{11} + E_{22}) + (-2)^n\beta_1a_1 \ldots a_nE_{12}$$

Agora, através de contas, basta verificar que todos os polinômios listados no enunciado da proposição são realmente $*$-identidades polinomiais para R. Iremos aqui verificar apenas a $*$-identidade (iii) e o restante segue de verificações análogas. Seja

$$A = 2Y_1[X_1, Y_2, Y_3] + [X_1, Y_1, Y_2, Y_3] + [Y_1, Y_2][X_1, Y_3] + [Y_1, Y_3][X_1, Y_2] + [Y_2, Y_3][X_1, Y_1]$$

Observe que

$$\begin{aligned} 2Y_1[X_1, Y_2, Y_3] &= 2\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)\beta_1 a_2 c_3 & 4\beta_1 a_2 a_3 \\ 0 & (-2)\beta_1 a_2 c_3 \end{pmatrix} \\ &= 2\begin{pmatrix} (-2)\beta_1 a_1 a_2 c_3 & 4\beta_1 a_1 a_2 a_3 \\ 2\beta_1 a_2 c_1 c_3 & -4\beta_1 a_2 a_3 c_3 + 2\beta_1 a_1 a_2 c_3 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [Y_i, Y_j][X_l, Y_k] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2(c_i a_j - a_i c_j) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_l c_k & -2\beta_l a_k \\ 0 & \beta_l c_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2(c_i a_j \beta_l c_k - a_i c_j \beta_l c_k) & -4(c_i a_j \beta_l a_k - a_i c_j \beta_l a_k) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} (-4)\beta_1 a_1 a_2 c_3 & 8\beta_1 a_1 a_2 a_3 \\ 4\beta_1 a_2 c_1 c_3 & -8\beta_1 a_2 a_3 c_1 + 4\beta_1 a_1 a_2 c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\beta_1 a_1 a_2 c_3 & -8\beta_1 a_1 a_2 a_3 \\ 2\beta_1 a_2 c_1 c_3 & 4\beta_1 a_1 a_2 c_3 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2(c_1 a_2 \beta_1 c_3 - a_1 c_2 \beta_1 c_3) & -4(c_1 a_2 \beta_1 a_3 - a_1 c_2 \beta_1 a_3) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2(c_1 a_3 \beta_1 c_2 - a_1 c_3 \beta_1 c_2) & -4(c_1 a_3 \beta_1 a_2 - a_1 c_3 \beta_1 a_2) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2(c_2 a_3 \beta_1 c_1 - a_2 c_3 \beta_1 c_1) & -4(c_2 a_3 \beta_1 a_1 - a_2 c_3 \beta_1 a_1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4\beta_1 a_2 c_1 c_3 & -8(\beta_1 a_2 a_3 c_1 - \beta_1 a_1 a_2 c_3) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2(c_1 a_2 \beta_1 c_3 - a_1 c_2 \beta_1 c_3) & -4(c_1 a_2 \beta_1 a_3 - a_1 c_2 \beta_1 a_3) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2(c_1 a_3 \beta_1 c_2 - a_1 c_3 \beta_1 c_2) & -4(c_1 a_3 \beta_1 a_2 - a_1 c_3 \beta_1 a_2) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2(c_2 a_3 \beta_1 c_1 - a_2 c_3 \beta_1 c_1) & -4(c_2 a_3 \beta_1 a_1 - a_2 c_3 \beta_1 a_1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4\beta_1 a_2 c_1 c_3 & -8(\beta_1 a_2 a_3 c_1 - \beta_1 a_1 a_2 c_3) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2(-\beta_1 a_2 c_1 c_3 + \beta_1 a_1 c_2 c_3) & -4(-\beta_1 a_2 a_3 c_1 + \beta_1 a_1 a_3 c_2) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2(-\beta_1 a_3 c_1 c_2 - \beta_1 a_1 c_2 c_3) & -4(-\beta_1 a_2 a_3 c_1 + \beta_1 a_1 a_2 c_3) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2(\beta_1 a_3 c_1 c_2 - \beta_1 a_2 c_1 c_3) & -4(-\beta_1 a_1 a_3 c_2 + \beta_1 a_1 a_2 c_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Concluí-se que o polinômio (iii) é uma $*$-identidade para a álgebra R. ■

Denotaremos por I o T_*-ideal gerado pelos polinômios (5.12), (5.13), (5.14) e pelos polinômios listados na Proposição 5.3.1. O nosso objetivo principal neste capítulo é provar o seguinte teorema.

Teorema 5.3.2 *O T_*-ideal das $*$-identidades polinomiais da álgebra com involução $(R, *)$ é gerado, como T_*-ideal, pelos polinômios (5.12), (5.13), (5.14) e pelos polinômios listados na Proposição 5.3.1. Em outras palavras, $I = T_*(R)$.*

Antes de provarmos tal teorema, deduziremos algumas consequências dos geradores de I. Para nos referirmos a essas consequências com facilidade, iremos dividi-las em vários lemas. Denotaremos por $(-1)^\rho$ o sinal da permutação $\rho \in S_n$.

Lema 5.3.3 *Para toda permutação $\sigma, \tau \in S_n$, o ideal I contém o polinômio*

$$[x_{\sigma(1)}, y_{\tau(1)}] \dots [x_{\sigma(n)}, y_{\tau(n)}] - (-1)^{\sigma\tau}[x_1, y_1] \dots [x_n, y_n].$$

Demonstração: Como $[x, y]$ é um elemento simétrico para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$, pela $*$-identidade (5.12) teremos que

$$[x_{\sigma(1)}, y_{\tau(1)}] \dots [x_{\sigma(n)}, y_{\tau(n)}] \equiv [x_1, y_{\sigma^{-1}(\tau(1))}] \dots [x_n, y_{\sigma^{-1}(\tau(n))}] \pmod{I}$$

Observando, agora, pelo item (v) da Proposição 5.3.1, temos

$$\begin{aligned}[x_{\sigma(1)}, y_{\tau(1)}] \dots [x_{\sigma(n)}, y_{\tau(n)}] &\equiv [x_1, y_{\sigma^{-1}(\tau(1))}] \dots [x_n, y_{\sigma^{-1}(\tau(n))}] \pmod{I} \\ &\equiv (-1)^{\sigma^{-1}\tau}[x_1, y_1] \dots [x_n, y_n] \pmod{I}\end{aligned}$$

Ou seja,

$$[x_{\sigma(1)}, y_{\tau(1)}] \dots [x_{\sigma(n)}, y_{\tau(n)}] \equiv (-1)^{\sigma\tau}[x_1, y_1] \dots [x_n, y_n] \pmod{I}$$

uma vez que $(-1)^{\sigma^{-1}\tau} = (-1)^{\sigma\tau}$. Disso, segue o resultado. ■

Lema 5.3.4 *O ideal I contém o polinômio*

$$[x_1, y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(n)}, y_{n+1}] - [x_1, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}],$$

para qualquer permutação $\sigma \in S_n$.

Demonstração: Sabemos que $[x, y]$ é um elemento simétrico, para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Assim é suficiente mostrar que I contém o polinômio

$$[x_1, y_1, y_2, y_3] - [x_1, y_2, y_1, y_3].$$

Pela identidade (i) da Proposição 5.3.1, módulo I, temos que

$$[x_1, y_1, y_2, y_3] \equiv 2(y_1 \circ y_2)[x_1, y_3] = 2(y_2 \circ y_1)[x_1, y_3] \equiv [x_1, y_2, y_1, y_3],$$

de onde segue o resultado desejado. ■

Observação 5.3.5 *Em toda álgebra associativa A vale a identidade*

$$[a_1, a_2 \circ a_3] = [a_1, a_2] \circ a_3 + a_2 \circ [a_1, a_3],$$

para quaisquer $a_1, a_2, a_3 \in A$. De fato, basta observar que

$$\begin{aligned} [a_1, a_2 \circ a_3] &= a_1(a_2 \circ a_3) - (a_2 \circ a_3)a_1 \\ &= a_1(a_2a_3 + a_3a_2) - (a_2a_3 + a_3a_2)a_1 \\ &= [a_1, a_2a_3] + [a_1, a_3a_2] \\ &= a_2[a_1, a_3] + [a_1, a_2]a_3 + a_3[a_1, a_2] + [a_1, a_3]a_2 \\ &= [a_1, a_2] \circ a_3 + a_2 \circ [a_1, a_3]. \end{aligned}$$

Lema 5.3.6 *O seguinte polinômio*

$$2y_2[x_1, y_1] + 2y_1[x_1, y_2] + [x_1, y_1, y_2] + [x_1, y_2, y_1]$$

é um elemento de I.

Demonstração: Sabemos que $y_1 \circ y_2$ é um elemento simétrico. Pela Observação 5.3.5 e a $*$-identidade (5.12), tem-se:

$$[x_1, y_1] \circ y_2 + y_1 \circ [x_1, y_2] = [x_1, y_1 \circ y_2] \in I$$

Observe ainda, pela igualdade $ab = ba + [a, b]$ válida para qualquer álgebra associativa, temos que:

$$\begin{aligned} & [x_1, y_1]y_2 = [x_1, y_1, y_2] + y_2[x_1, y_1] \\ \text{e} \qquad & [x_1, y_2]y_1 = [x_1, y_2, y_1] + y_1[x_1, y_2]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& 2y_2[x_1,y_1]+2y_1[x_1,y_2]+[x_1,y_1,y_2]+[x_1,y_2,y_1]= \\
= \ & y_2[x_1,y_1]+y_1[x_1,y_2]+[x_1,y_1]y_2+[x_1,y_2]y_1 \\
= \ & [x_1,y_1]y_2+y_2[x_1,y_1]+y_1[x_1,y_2]+[x_1,y_2]y_1 \\
= \ & [x_1,y_1]\circ y_2+y_1\circ[x_1,y_2]=[x_1,y_1\circ y_2]\in I,
\end{aligned}$$

donde segue o resultado. ■

Lema 5.3.7 *O ideal I contém o polinômio*

$$4y_1y_2[x_1,y_3]-2[y_1,y_2][x_1,y_3]-[x_1,y_1,y_2,y_3].$$

Demonstração: Seja $f=4y_1y_2[x_1,y_3]-2[y_1,y_2][x_1,y_3]-[x_1,y_1,y_2,y_3]$. Então,

$$\begin{aligned}
f &= 4y_1y_2[x_1,y_3]-2(y_1y_2-y_2y_1)[x_1,y_3]-[x_1,y_1,y_2,y_3] \\
&= 4y_1y_2[x_1,y_3]-2y_1y_2[x_1,y_3]+2y_2y_1[x_1,y_3]-[x_1,y_1,y_2,y_3] \\
&= 2y_1y_2[x_1,y_3]+2y_2y_1[x_1,y_3]-[x_1,y_1,y_2,y_3] \\
&= 2(y_1y_2[x_1,y_3]+y_2y_1[x_1,y_3])-[x_1,y_1,y_2,y_3] \\
&= 2(y_1\circ y_2)[x_1,y_3]-[x_1,y_1,y_2,y_3],
\end{aligned}$$

donde o resultado segue da $*$-identidade (i) da Proposição 5.3.1. ■

Lema 5.3.8 *O seguinte polinômio pertence a I:*

$$[y_2,y_3][x_1,y_1,y_4]-[y_1,y_3][x_1,y_2,y_4]+[y_1,y_2][x_1,y_3,y_4].$$

Demonstração: Segue da $*$-identidade (iv) da Proposição 5.3.1, módulo I, que

$$\begin{aligned}
[y_2,y_3][x_1,y_1,y_4] &= -2[y_2,y_3]y_1[x_1,y_4], \\
[y_1,y_3][x_1,y_2,y_4] &= -2[y_1,y_3]y_2[x_1,y_4], \\
[y_1,y_2][x_1,y_3,y_4] &= -2[y_1,y_2]y_3[x_1,y_4].
\end{aligned}$$

Colocando $f = [y_2, y_3][x_1, y_1, y_4] - [y_1, y_3][x_1, y_2, y_4] + [y_1, y_2][x_1, y_3, y_4]$ segue, módulo I, que

$$\begin{aligned}
f &= -2([y_2, y_3]y_1[x_1, y_4] - [y_1, y_3]y_2[x_1, y_4] + [y_1, y_2]y_3[x_1, y_4]) \\
&= -2([y_2, y_3]y_1 - [y_1, y_3]y_2 + [y_1, y_2]y_3)[x_1, y_4] \\
&= -2(y_2y_3y_1 - y_3y_2y_1 - y_1y_3y_2 + y_3y_1y_2 + y_1y_2y_3 - y_2y_1y_3)[x_1, y_4] \\
&= -2(y_2y_3y_1 - y_1y_3y_2 - y_3y_2y_1 + y_1y_2y_3 + y_3y_1y_2 - y_2y_1y_3)[x_1, y_4].
\end{aligned}$$

Pela $*$-identidade (5.13), temos que $f \in I$, e daí segue o resultado. ∎

Lema 5.3.9 *O ideal I contém o polinômio*

$$[y_1, y_4][x_1, y_3, y_2] - [y_1, y_4][x_1, y_2, y_3] + [y_2, y_3][x_1, y_4, y_1] - [y_1, y_3][x_1, y_2, y_4] + [y_1, y_2][x_1, y_3, y_4].$$

Demonstração: Seja f o polinômio descrito acima. Aplicando o Lema 5.3.8 nas duas últimas parcelas módulo I, obtemos

$$f = [y_1, y_4][x_1, y_3, y_2] - [y_1, y_4][x_1, y_2, y_3] + [y_2, y_3][x_1, y_4, y_1] - [y_2, y_3][x_1, y_1, y_4].$$

Segue da identidade de Jacobi, que:

$$\begin{aligned}
f &= [y_1, y_4]([x_1, y_3, y_2] - [x_1, y_2, y_3]) + [y_2, y_3]([x_1, y_4, y_1] - [x_1, y_1, y_4]) \\
&= [y_1, y_4][x_1, [y_3, y_2]] + [y_2, y_3][x_1, [y_4, y_1]] \\
&= [y_1, y_4]x_1[y_3, y_2] - [y_1, y_4][y_3, y_2]x_1 + [y_2, y_3]x_1[y_4, y_1] - [y_2, y_3][y_4, y_1]x_1 \\
&= ([y_1, y_4]x_1[y_3, y_2] + [y_2, y_3]x_1[y_4, y_1]) - [y_1, y_4][y_3, y_2]x_1 - [y_2, y_3][y_4, y_1]x_1.
\end{aligned}$$

O resultado segue aplicando a $*$-identidade (5.14) e o item (ii) da Proposição 5.3.1. ∎

5.4 Os Geradores de $\Gamma_{l,m}(I)$

Consideraremos nesta seção o espaço vetorial $\Gamma_{l,m}(I)$ de todos os polinômios $*$-próprios multilineares nas variáveis $x_1, \ldots, x_l$ e $y_1, \ldots, y_m$ na álgebra relativamente livre $K\langle X \cup Y\rangle/I$ (para maiores detalhes ver Seção 2.4, Capítulo 2) e fixaremos um conjunto de geradores de cada um desses espaços.

Inicialmente, estudaremos o espaço $\Gamma_{0,m}(I)$, ou seja, consideraremos os polinômios $f(y_1, \ldots, y_m)$ dependendo apenas de variáveis antissimétricas.

Observação 5.4.1 *Em todo o texto, o sinal de circunflexo sobre uma variável significará que a variável correspondente é omitida da expressão. Além disso, se $f \in \Gamma_{l,m}$, denotaremos o elemento correspondente de $\Gamma_{l,m}(I)$ da mesma forma.*

Lema 5.4.2 *O espaço $\Gamma_{0,m}(I)$ é gerado pelos polinômios*

$$y_1 \ldots y_m \qquad e \qquad y_1 \ldots \hat{y}_i \ldots y_{m-1}[y_i, y_m]$$

para todo $i = 1, \ldots, m$.

Demonstração: Observe, inicialmente, que

$$[y_i, y_j]y_k[y_a, y_b] = [y_i, y_j, y_k][y_a, y_b] + y_k[y_i, y_j][y_a, y_b].$$

Pela $*$-identidade $[y_1, y_2][y_3, y_4]$ e sabendo que $[y_i, y_j]$ é um elemento antissimétrico, temos que $[y_i, y_j]y_k[y_a, y_b] \in I$.

Como consequência, para qualquer permutação $\sigma \in S_n$, obtemos que

$$y_{i_{\sigma(1)}} \cdots y_{i_{\sigma(n)}}[y_a, y_b] = y_{i_1} \ldots y_{i_n}[y_a, y_b] \pmod{I}.$$

Observe ainda que os polinômios do tipo

$$\begin{aligned} [y_i, y_j] \circ y_k &= (y_i y_j - y_j y_i) \circ y_k \\ &= (y_i y_j y_k - y_j y_i y_k + y_k y_i y_j - y_k y_j y_i) \\ &= (y_i y_j y_k - y_k y_j y_i - y_j y_i y_k + y_k y_i y_j) \end{aligned}$$

são consequência da $*$-identidade $y_1 y_2 y_3 - y_3 y_2 y_1$.

Por outro lado, considerando o polinômio $f = y_m[y_a, y_b] + y_a[y_b, y_m] - y_b[y_a, y_m]$, temos que

$$\begin{aligned} f &= y_m y_a y_b - y_m y_b y_a + y_a y_b y_m - y_a y_m y_b - y_b y_a y_m + y_b y_m y_a \\ &= y_m y_a y_b - y_b y_a y_m - y_m y_b y_a + y_a y_b y_m - y_a y_m y_b + y_b y_m y_a \end{aligned}$$

e assim é uma consequência do gerador $y_1 y_2 y_3 - y_3 y_2 y_1$. Portanto, pela $*$-identidade $[y_1, y_2][y_3, y_4]$ e $y_1 y_2 y_3 - y_3 y_2 y_1$, o espaço $\Gamma_{0,m}(I)$ é gerado pelos monômios da forma $y_1 \ldots y_m$ e $y_1 \ldots \hat{y}_a \ldots \hat{y}_b \ldots y_m[y_a, y_b]$, onde $1 \leq a < b \leq m$.

$\blacksquare$

Podemos agora assumir que o número l de variáveis simétricas envolvidas em nossos polinômios $*$-próprios é não nulo e tais variáveis aparecem apenas nos comutadores de comprimento ≥ 2 (ver Definição 2.4.1, Capítulo 2). Além disso, módulo I, eles comutam, pelo gerador $[x_1, x_2]$.

Considerando o comutador $[y_1, \ldots, y_k, x]$ e aplicando a identidade de Jacobi, podemos escrever este comutador como uma combinação linear de comutadores começando com a variável x. De fato, observe inicialmente que pela identidade de Jacobi

$$[y_1, y_2, x] = -[x, y_1, y_2] + [x, y_2, y_1]. \tag{5.15}$$

Tomando agora o comutador $[y_1, \ldots, y_k, x]$, obtemos

$$\begin{aligned} [y_1, \ldots, y_k, x] &= [y_1, \ldots, y_{k-1}, y_k, x] = -[x, [y_1, \ldots, y_{k-1}], y_k] + [x, y_k, [y_1, \ldots, y_{k-1}]] \\ &= [y_1, \ldots, y_{k-1}, x, y_k] + [[x, y_k], [y_1, \ldots, y_{k-1}]]. \end{aligned}$$

Sabendo que $[x, y_k]$ é um elemento simétrico, temos que o resultado segue por indução sobre k.

Sabe-se que $[x, y]$ é simétrico e $[y_1, y_2]$ é antissimétrico. Assim, podemos assumir que qualquer comutador não nulo $[r_1, r_2, \ldots, r_h] \in K\langle X \cup Y\rangle/I$, onde os elementos $r_i \in X \cup Y$, possui no máximo uma variável simétrica x. Para isto basta usar o gerador $[x_1, x_2]$ e observar que o comutador $[x_1, y_1, \ldots, y_k, x_2] \in I$. Por isso, podemos assumir que $[r_1, r_2, \ldots, r_h] = [x, y_{i_1}, \ldots, y_{i_{h-1}}]$, para alguma variável simétrica x e variáveis antissimétricas $y_{i_1}, \ldots, y_{i_{h-1}}$. Caso o número de variáveis simétricas seja maior que o número de variáveis antissimétricas, teremos que em algum comutador terá duas ou mais variáveis simétricas. Portanto, obtemos que

$$\Gamma_{l,m}(I) = \{0\}, \text{ para todo } l > m \geq 0. \tag{5.16}$$

Similarmente temos:

Lema 5.4.3 *O espaço $\Gamma_{l,l}(I)$ é gerado pelo polinômio $[x_1, y_1] \ldots [x_l, y_l]$.*

Demonstração: Claramente, pelo que foi argumentado anteriormente, teremos que qualquer elemento de $\Gamma_{l,l}(I)$ é combinação linear de polinômios do tipo

$[x_{\sigma(1)}, y_{\tau(1)}] \ldots [x_{\sigma(l)}, y_{\tau(l)}]$, onde $\sigma, \tau \in S_l$. Pelo Lema 5.3.3, temos que

$$[x_{\sigma(1)}, y_{\tau(1)}] \cdots [x_{\sigma(n)}, y_{\tau(n)}] - (-1)^{\sigma\tau}[x_1, y_1] \cdots [x_n, y_n] \pmod{I},$$

para quaisquer $\sigma, \tau \in S_l$, donde segue o resultado. ■

Definimos, agora, alguns polinômios especiais para o espaço $\Gamma_{l,m}$. Sendo $m = k + l$ com $k \geq 0$, para alguma permutação $\sigma \in S_{k+l}$, definiremos os seguinte polinômios:

$$p_\sigma = [x_1, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(k+1)}][x_2, y_{\sigma(k+2)}] \ldots [x_l, y_{\sigma(k+l)}].$$

Se $m = l + 1$, para $\sigma \in S_{l+1}$, definimos também o polinômio:

$$f_\sigma = y_{\sigma(1)}[x_1, y_{\sigma(2)}][x_2, y_{\sigma(3)}] \ldots [x_l, y_{\sigma(l+1)}].$$

Se $m = l + k > l + 1$, para $\sigma \in S_{l+k}$, definimos o polinômio:

$$g_\sigma = [y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}][x_1, y_{\sigma(3)}, \ldots, y_{\sigma(k+1)}][x_2, y_{\sigma(k+2)}] \ldots [x_l, y_{\sigma(k+l)}].$$

Nos próximos resultados determinaremos um conjunto de geradores do espaço $\Gamma_{l,m}(I)$, para $m = k + l$ com $k \geq 0$.

Lema 5.4.4 *Sejam $l > 0$ e $k \geq 2$, então:*

(i) O espaço $\Gamma_{l,l+1}(I)$ é gerado pelos polinômios p_σ e f_τ, para $\sigma, \tau \in S_{l+1}$.

(ii) O espaço $\Gamma_{l,l+k}(I)$ é gerado pelos polinômios p_σ e g_τ, para $\sigma, \tau \in S_{l+k}$.

Demonstração: Considerando $m \geq l + 1$, todo elemento do espaço $\Gamma_{l,m}(I)$ é uma combinação linear de polinômios $c_1 c_2 \ldots c_n$ $(n \geq l)$, onde cada c_i é uma variável antissimétrica y ou um comutador do tipo $[x, y_{i_1}, \ldots, y_{i_h}]$, com $x \in X$ e $y_{i_1}, \ldots, y_{i_h} \in Y$. Pela igualdade

$$[x, y_{i_1}, \ldots, y_{i_h}]y = [x, y_{i_1}, \ldots, y_{i_h}, y] + y[x, y_{i_1}, \ldots, y_{i_h}],$$

obtemos que qualquer elemento de $\Gamma_{l,m}(I)$ é uma combinação linear de polinômios $wc'_1c'_2 \ldots c'_l$, onde $w = y_{\beta(1)}y_{\beta(2)} \ldots y_{\beta(t)}$ é um monômio de grau $t \geq 0$, nas variáveis antissimétricas e qualquer

$$c'_i = [x_{\rho(i)}, y_{\beta(t+h_1+\ldots+h_{i-1}+1)}, \ldots, y_{\beta(t+h_1+\ldots+h_i)}]$$

é um comutador de comprimento $h_i+1 \geq 2$, para algumas permutações $\rho \in S_l, \beta \in S_m$ e para algumas $(l+1)$-uplas de inteiros $(t, h_1, \ldots, h_l)$.

Como $[x_1, x_2] \in I$ e $c'_i = [x_{\rho(i)}, y_{\beta(t+h_1+\ldots+h_{i-1}+1)}, \ldots, y_{\beta(t+h_1+\ldots+h_i)}]$ é um elemento simétrico, podemos assumir que $\rho(i) = i$, para todo $i = 1, \ldots, l$. Além disso, pela identidade (vi) da Proposição 5.3.1, podemos assumir que $h_i = 1$, para $i \geq 2$. Em outras palavras, o espaço $\Gamma_{l,m}(I)$ é gerado pelos polinômios do tipo

$$P_{t,\beta} = y_{\beta(1)} \ldots y_{\beta(t)}[x_1, y_{\beta(t+1)}, \ldots, y_{\beta(m-l+1)}][x_2, y_{\beta(m-l+2)}] \ldots [x_l, y_{\beta(m)}],$$

onde $0 \leq t \leq m-l$ e $\beta \in S_m$.

Se $m = l+1$, então $t \in \{0, 1\}$. Segue que $P_{0,\beta} = p_\beta$ ou $P_{1,\beta} = f_\beta$, e assim está provado o item (i).

Vamos agora provar (ii), sendo neste caso $m \geq l+2$. Denotamos por W_m o subespaço de $\Gamma_{l,m}(I)$ gerado pelos polinômios p_σ e g_τ, para $\sigma, \tau \in S_m$. Provaremos por indução sobre m, a quantidade de variáveis simétricas, que $\Gamma_{l,m}(I) = W_m$. Observamos inicialmente que W_m é um S_m-submódulo de $\Gamma_{l,m}(I)$ com respeito a ação natural do grupo simétrico S_m pela permutação das variáveis antissimétricas $y_1, \ldots, y_m$. Por isso, é suficiente mostrar que W_m contém os polinômios $P_{t,id}$, para quaisquer $1 \leq t \leq m-l$.

Caso $m = l+2$, deveremos ter os polinômios

$$\begin{aligned} P_{0,id} &= [x_1, y_1, y_2, y_3][x_2, y_4] \ldots [x_l, y_m] \\ P_{1,id} &= y_1[x_1, y_2, y_3][x_2, y_4] \ldots [x_l, y_m] \\ P_{2,id} &= y_1 y_2[x_1, y_3][x_2, y_4] \ldots [x_l, y_m] \end{aligned}$$

Observe que $P_{0,id} = p_{id}$, $P_{1,id} \in W_m$ pela identidade (iii) da Proposição 5.3.1, e $P_{2,id} \in W_m$ resulta diretamente do Lema 5.3.7.

Por hipótese de indução, suponha que todo polinômios $P_{t,id}$, com $m-1 = l+(k-1) \geq l+2$, seja combinações lineares dos polinômios p_σ e g_τ, para $\sigma, \tau \in S_{l+k-1}$, deveremos provar que o mesmo ocorre quando $m = l+k > l+2$, tome $P_{t,id} = y_1 y_2 \ldots y_t[x_1, y_{t+1}, \ldots, y_{m-l+1}][x_2, y_{m-l+2}] \ldots [x_l, y_m]$, por hipótese de indução em m, temos que os polinômios $P_{t,id}$ são combinações lineares dos seguintes polinômios:

(1) $y_1[x_1, y_{\sigma(2)}, \ldots, y_{\sigma(k+1)}][x_2, y_{\sigma(k+2)}] \ldots [x_l, y_{\sigma(l+k)}]$;

(2) $y_1[y_{\tau(2)}, y_{\tau(3)}][x_1, y_{\tau(4)}, \ldots, y_{\tau(k+1)}][x_2, y_{\tau(k+2)}] \ldots [x_l, y_{\tau(l+k)}]$,

para permutações σ, τ agindo sore o conjunto $\{2, \ldots, n\}$.

Observe que os polinômios (1) e (2) estão em W_m. Para (1), basta aplicar a identidade (iii) da Proposição 5.3.1. Já para (2), como da prova do Lema 5.4.2, temos que $[y_1, y_2] \circ y_3 \in I$, para qualquer variáveis antissimétricas $y_1, y_2, y_3 \in Y$, segue assim que

$$y_1[y_{\tau(2)}, y_{\tau(3)}] = -[y_{\tau(2)}, y_{\tau(3)}]y_1 \pmod I,$$

e pela identidade (iv) da Proposição 5.3.1, temos o resultado. ■

No próximo resultado examinaremos mais precisamente o conjunto gerador do espaço $\Gamma_{l,l+1}(I)$.

Proposição 5.4.5 *O espaço $\Gamma_{l,l+1}(I)$ é gerado pelos polinômios*

- $f = y_1[x_1, y_2] \ldots [x_l, y_{l+1}]$;
- $p_1 = [x_1, y_1, y_2][x_2, y_3] \ldots [x_l, y_{l+1}]$;
- $p_i = [x_1, y_i, y_1][x_2, y_2] \ldots [x_i, y_{i+1}] \ldots [x_l, y_{l+1}]$ *para* $i = 2, \ldots, l+1$.

Demonstração: De acordo com o Lema 5.4.4, o espaço $\Gamma_{l,l+1}(I)$ é gerado pelo polinômios:

$$\begin{aligned} p_\sigma &= [x_1, y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}][x_2, y_{\sigma(3)}] \ldots [x_l, y_{\sigma(l+1)}] \\ f_\tau &= y_{\tau(1)}[x_1, y_{\tau(2)}][x_2, y_{\tau(3)}] \ldots [x_l, y_{\tau(l+1)}]. \end{aligned}$$

Pelo Lema 5.3.3, podemos assumir, módulo I, que $\sigma(2) < \cdots < \sigma(l+1)$ e $\tau(2) < \cdots < \tau(l+1)$ e assim os geradores do espaço $\Gamma_{l,l+1}(I)$ são f, p_i $(i \geq 1)$ e os polinômios

$$y_j[x_1, y_1] \ldots [x_j, y_{j+1}] \ldots [x_l, y_{l+1}], \text{ para } j > 1 \tag{5.17}$$

Além disso, pelo Lema 5.3.6, o polinômio $y_j[x_1, y_1]$ é uma combinação linear de $y_1[x_1, y_j]$, $[x_1, y_1, y_j]$ e $[x_1, y_j, y_1]$. Para finalizar a demonstração da proposição, basta observar que (5.17) é uma combinação linear de polinômios do tipo

- $y_1[x_1, y_j][x_2, y_2] \ldots [x_j, y_{j+1}] \ldots [x_l, y_{l+1}]$

- $[x_1, y_1, y_j][x_2, y_2] \ldots [x_j, y_{j+1}] \ldots [x_l, y_{l+1}] = [x_1, y_1, y_2][x_2, y_3] \ldots [x_j, y_{j+1}] \ldots [x_l, y_{l+1}]$

- $[x_1, y_j, y_1][x_2, y_2] \ldots [x_j, y_{j+1}] \ldots [x_l, y_{l+1}]$

Como queríamos demonstrar. ■

Agora, assumindo $m = l + k \geq l + 2$ e considerando os subespaços $U_{l,m}$ e $V_{l,m}$ de $\Gamma_{l,m}(I)$ gerado pelos polinômios p_σ e g_τ, respectivamente, para $\sigma, \tau \in S_m$, ou seja,

$$\begin{aligned} U_{l,m} &= \langle [x_1, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(k+1)}][x_2, y_{\sigma(k+2)}] \ldots [x_l, y_{\sigma(k+l)}] \ ; \ \sigma \in S_m \rangle, \\ V_{l,m} &= \langle [y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}][x_1, y_{\sigma(3)}, \ldots, y_{\sigma(k+1)}][x_2, y_{\sigma(k+2)}] \ldots [x_l, y_{\sigma(k+l)}] \ ; \ \sigma \in S_m \rangle. \end{aligned}$$

Pelo Lema 5.4.4, temos:

$$\Gamma_{l,m}(I) = U_{l,m} + V_{l,m}, \ (m \geq l + 2). \tag{5.18}$$

Segue diretamente dos Lemas 5.3.4 e da identidade (v) da Proposição 5.3.1 o seguinte resultado:

Proposição 5.4.6 *O espaço $U_{l,m}$ é gerado pelos polinômios*

$$P_{(j_1,\ldots,j_l)} = [x_1, y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}, y_{j_1}][x_2, y_{j_2}] \ldots [x_l, y_{j_l}],$$

onde $\{1, \ldots, m\} = \{i_1, \ldots, i_k\} \cup \{j_1, \ldots, j_l\}$*,* $m = k + l$*,* $i_1 < \ldots < i_k$ *e* $j_1 < \ldots < j_l$*.*

Agora consideramos o espaço $V_{l,m}$. Começaremos com o caso $l = 1$ e portanto $m \geq 3$, já que $m \geq l + 2$.

Lema 5.4.7 *O espaço $V_{1,m}$ é gerado pelos polinômios:*

(1) $G = [y_1, y_m][x_1, y_2, \ldots, y_{m-1}]$*;*

(2) $G_{2;(i,j)} = [y_1, y_i][x_1, y_2, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, \hat{y}_j, \ldots, y_m, y_j]$, $(2 \leq i < j \leq m)$*;*

(3) $G_{3;(i)} = [y_2, y_i][x_1, y_3, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_m, y_1]$, $(3 \leq i \leq m)$*.*

Demonstração: Seja V o subespaço de $V_{1,m}$ gerado pelos polinômios $(1), (2)$ e (3) e seja $g_\sigma = [y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}][x_1, y_{\sigma(3)}, \ldots, y_{\sigma(m-1)}, y_{\sigma(m)}]$ um gerador para $V_{1,m}$. Provaremos que $g_\sigma \in V$. Podemos assumir que $\sigma(1) < \sigma(2)$. Pelo Lema 5.3.4, podemos reordenar as variáveis $y_{\sigma(3)}, \ldots, y_{\sigma(m-1)}$, então podemos assumir que $\sigma(3) < \ldots < \sigma(m-1)$. Daí, $1 \in \{\sigma(1), \sigma(3), \sigma(m)\}$.

Suponha que $1 = \sigma(m)$. Então $g_\sigma = [y_2, y_i][x_1, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_1] = G_{3;(i)} \in V$, ou $g_\sigma = [y_i, y_j][x_1, y_2, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, \hat{y}_j, \ldots, y_1]$, com $3 \leq i < j \leq m$. Neste último caso, pelo Lema 5.3.4, podemos assumir que

$$g_\sigma = [y_i, y_j][x_1, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, \hat{y}_j, \ldots, y_2, y_1],$$

e usando o Lema 5.3.8, obtemos que g_σ é uma combinação linear dos polinômios $[y_2, y_i][x_1, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_1]$ e $[y_2, y_j][x_1, \ldots, \hat{y}_j, \ldots, y_1]$, ambos os polinômios são do tipo (3). Em resumo, se $\sigma(m) = 1$, então $g_\sigma \in V$.

De modo análogo, para o caso $1 = \sigma(3)$, o polinômio $[y_i, y_j][x_1, y_1, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, \hat{y}_j, \ldots, y_{\sigma(m)}]$ é igual a $[y_i, y_j][x_1, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, \hat{y}_j, \ldots, y_1, y_{\sigma(m)}]$, e é combinação linear dos polinômios $[y_1, y_i][x_1, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_{\sigma(m)}]$ e $[y_1, y_j][x_1, \ldots, \hat{y}_j, \ldots, y_{\sigma(m)}]$.

Resta considerar o caso $\sigma(1) = 1$. É suficiente provar que

$$[y_1, y_i][x_1, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_{\sigma(m)}] \in V.$$

Claramente o resultado é verdadeiro para $m = 3$. Então podemos assumir que $m \geq 4$ e usaremos um argumento de indução reversa sobre $\sigma(m)$. Se $\sigma(m) = m$, então o polinômio é da forma $G_{2,(i,m)}$ um elemento de V, pois a condição $i < \sigma(m)$ é satisfeita. Assumimos que o resultado seja válido para qualquer valor $\sigma(m) \geq j + 1$ e consideremos o polinômio

$$g = [y_1, y_i][x_1, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_j].$$

Obviamente se $i < j$ nada a fazer, pois $g = G_{2,(i,j)} \in V$. Daí, considere $i > j$ e seja $h = \sigma(m-1)$.

Se $j > h$, então, pela nossa suposição sobre σ, obtemos que $i = m, j = m-1$ e $h = m-2$, neste caso $g = [y_1, y_m][x_1, y_2, \ldots, y_{m-1}] = G$, o primeiro gerador de V.

Se $j < h$, então, pelo Lema 5.3.9,

$$\begin{aligned} [y_1, y_i][x_1, \ldots, y_h, y_j] &= [y_1, y_i][x_1, \ldots, y_j, y_h] - [y_j, y_h][x_1, \ldots, y_i, y_1] \\ &+ [y_1, y_h][x_1, \ldots, y_j, y_i] - [y_1, y_j][x_1, \ldots, y_h, y_i] \pmod{I}. \end{aligned}$$

Observe agora que a última parcela da soma anterior é um polinômio da forma $G_{2,(i,j)}$ de V, a segunda parcela é um elemento de V, basta observar o argumento para $\sigma(m) = 1$ e as demais parcelas da soma pertencem a V, por hipótese de indução. ■

Agora, consideraremos o espaço $V_{l,m}$, para $l \geq 2$. Portanto $m = l + k \geq l + 2 \geq 4$ e $V_{l,m}$ é gerado pelos polinômios

$$g_\sigma = [y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}][x_1, y_{\sigma(3)}, \ldots, y_{\sigma(k+1)}][x_2, y_{\sigma(k+2)}] \ldots [x_l, y_{\sigma(l+k)}],$$

onde $\sigma \in S_{l+k}$.

Neste próximo resultado, descreveremos um conjunto de geradores lineares reduzido para o espaço $V_{l,m}$.

Proposição 5.4.8 *O espaço $V_{l,m}(m = l + k$, com $l \geq 2$ e $k \geq 2)$ é gerado pelos seguintes polinômios:*

(1) $G = [y_1, y_{k+1}][x_1, y_2, \ldots, y_k][x_2, y_{k+2}] \ldots [x_l, y_{l+k}]$;

(2) $G_{2;(j_1,\ldots,j_{l+1})} = [y_1, y_{j_1}][x_1, y_{i_1}, \ldots, y_{i_{k-2}}, y_{j_2}][x_2, y_{j_3}] \ldots [x_l, y_{j_{l+1}}]$

onde $2 \leq j_1 < \ldots < j_{l+1} \leq m$ *e* $2 \leq i_1 < \ldots < i_{k-2} \leq m$;

(3) $G_{3;(j_1,\ldots,j_l)} = [y_2, y_{j_1}][x_1, y_{i_1}, \ldots, y_{i_{k-2}}, y_1][x_2, y_{j_2}] \ldots [x_l, y_{j_l}]$

onde $3 \leq j_1 < \ldots < j_l \leq m$ *e* $3 \leq i_1 < \ldots < i_{k-2} \leq m$;

(4) $G_{4;(j_1,\ldots,j_{l-1})} = [y_2, y_{i_{k-1}}][x_1, y_{i_1}, \ldots, y_{i_{k-2}}, y_1][x_2, y_{j_1}] \ldots [x_l, y_{j_{l-1}}]$

onde $3 \leq j_1 < \ldots < j_{l-1} \leq m$ *e* $3 \leq i_1 < \ldots < i_{k-1} \leq m$ *com* $j_1 < i_{k-1}$.

Demonstração: Seja W o subespaço de $V_{l,m}$ gerado pelos polinômios (1), (2), (3) e (4), definidos acima. Escrevendo $n = k + 1$ e, para algum conjunto $A \subseteq \{1, \ldots, m\}$ de cardinalidade n, seja V_A o subespaço de $V_{l,m}$ gerado pelos polinômios g_σ(definido antes do Lema 5.4.4) tal que $\sigma(i) \in A$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Provaremos que $V_A \subseteq W$ para qualquer conjunto A.

Seja $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ e $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ um par de subconjuntos onde $a_1 < \ldots < a_n$ e $b_1 < \ldots < b_n$. Diremos que $A \leq B$ se $(a_1, \ldots, a_n) \leq (b_1, \ldots, b_n)$, na ordem lexicográfica. Então, provaremos que $V_A \subseteq W$ por indução sobre o conjunto A. Consideremos, primeiramente, $A = \{1, \ldots, n\}$.

Se $g_\sigma \in V_A$ então, pelo Lema 5.3.3, podemos assumir que $\sigma(n+1) < \ldots < \sigma(m)$, isto é,

$$g_\sigma = [y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}][x_1, y_{\sigma(3)}, \ldots, y_{\sigma(n)}][x_2, y_{n+1}] \ldots [x_l, y_m]$$

Pelo Lema 5.4.7, o polinômio $[y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}][x_1, y_{\sigma(3)}, \ldots, y_{\sigma(n)}]$ é escrita, módulo I, como combinação linear dos polinômios:

- $G = [y_1, y_n][x_1, y_2, \ldots, y_{n-1}]$
- $G_{2;(i,j)} = [y_1, y_i][x_1, y_2, \ldots, \hat{y_i}, \ldots, \hat{y_j}, \ldots, y_n, y_j]$, $(2 \leq i < j \leq n)$
- $G_{3;(i)} = [y_2, y_i][x_1, y_3, \ldots, \hat{y_i}, \ldots, y_n, y_1]$, $(3 \leq i \leq n)$

Segue que g_σ é uma combinação linear de geradores de W e obtemos que $V_{\{a_1,\ldots,a_n\}} \subseteq W$.

Utilizando o princípio de indução sobre o conjunto A, comparando os n elementos de cada conjunto. Podemos supor agora que $A \neq \{1, \ldots, n\}$ e assumindo que $V_B \subseteq W$ para qualquer $B < A$. Se $g_\sigma \in V_A$ então, como argumentamos anteriormente, podemos assumir que $\sigma(n+1) < \ldots < \sigma(m)$. Portanto, se $1 \notin A$, então $1 = \sigma(n+1)$. Aplicando o Lema 5.3.3 ao polinômio

$$[[x_1, y_{\sigma(3)}, \ldots, y_{\sigma(n-1)}], y_{\sigma(n)}][x_2, y_1][x_3, y_{\sigma(n+2)}] \ldots [x_l, y_{\sigma(m)}],$$

e observando que o comutador $[x_1, y_{\sigma(3)}, \ldots, y_{\sigma(n-1)}]$ é simétrico, obteremos

$$g_\sigma = -[y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}][x_1, y_{\sigma(3)}, \ldots, y_{\sigma(n-1)}, y_1][x_2, y_{\sigma(n)}][x_3, y_{\sigma(n+2)}] \ldots [x_l, y_{\sigma(m)}]$$

Isto quer dizer que $g_\sigma \in V_B$, para algum subconjunto $B < A$, por hipótese de indução, $g_\sigma \in W$.

Agora consideremos o caso em que $1 \in A$. Seja $A = \{1, a_2, \ldots, a_n\}$, então pelos Lemas 5.4.7 e 5.3.3, qualquer elemento de V_A, módulo I, será combinação linear dos polinômios:

(α) $[y_1, y_{a_n}][x_1, y_{a_2}, \ldots, y_{a_{n-1}}][x_2, y_{b_1}] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}]$

(β) $[y_1, y_{a_i}][x_1, y_{a_2}, \ldots, y_{a_n}, y_{a_j}][x_2, y_{b_1}] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}]$, com $2 \leq i < j \leq n$

(γ) $[y_{a_2}, y_{a_i}][x_1, y_{a_3}, \ldots, y_{a_n}, y_1][x_2, y_{b_1}] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}]$, com $3 \leq i \leq n$, onde $b_1 < \ldots < b_{l-1}$ e $\{1, \ldots, m\} = \{1, a_2, \ldots, a_n\} \cup \{b_1, \ldots, b_{l-1}\}$. Consideraremos separadamente cada um destes polinômios.

caso α:

$$g = [y_1, y_{a_n}][x_1, y_{a_2}, \ldots, y_{a_{n-1}}][x_2, y_{b_1}] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}].$$

Se $a_{n-1} > b_1$, então pelo Lema 5.3.3,

$$g = -[y_1, y_{a_n}][x_1, y_{a_2}, \ldots, y_{b_1}][x_2, y_{a_{n-1}}] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}].$$

Isto implica que $g \in V_B$, para algum $B = \{1, a_2, \ldots, a_{n-2}, b_1\} < A$. Por hipótese de indução, $g \in W$.

Se $a_{n-1} < b_1$, então $a_{n-1} = n - 1$, uma vez que $a_{n-1} < a_n$ é menor que os b_i's, assim

$$g = [y_1, y_{a_n}][x_1, y_2, \ldots, y_{n-1}][x_2, y_{b_1}] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}].$$

Claramente, podemos assumir que $a_n > n$, caso contrário $g = G$ é o gerador (1) de W. Segue que $b_1 = n$ e pela identidade (vii) da Proposição 5.3.1, obtemos que $g - g_2 - g_3 + g_4 \in I$, onde:

- $g_2 = [y_1, y_n][x_1, y_2, \ldots, y_{a_n}][x_2, y_{n-1}] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}]$,
- $g_3 = [y_{a_n}, y_{n-1}][x_1, y_2, \ldots, y_1][x_2, y_n] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}]$,
- $g_4 = [y_{n-1}, y_n][x_1, y_2, \ldots, y_1][x_2, y_{a_n}] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}]$.

Logo, podemos escrever, módulo I, $g = g_2 + g_3 - g_4$. Mas

$$g_2 = -[y_1, y_n][x_1, y_2, \ldots, y_{n-1}][x_2, y_{a_n}] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}],$$

Logo, g_2 e g_4 são elementos de $V_{\{1,\ldots,n\}} \subseteq W$. Além disso, pelo Lema 5.3.4,

$$g_3 = [y_{a_n}, y_{n-1}][x_1, y_3, \ldots, y_2, y_1][x_2, y_n] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}].$$

Portanto, usando a identidade do Lema 5.3.8, obtemos que

$$g_3 = ([y_{a_n}, y_2][x_1, y_3, \ldots, y_{n-1}, y_1] + [y_2, y_{n-1}][x_1, y_3, \ldots, y_{a_n}, y_1])[x_2, y_n] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}].$$

Observemos que o primeiro termo da soma é um gerador de W do tipo (4) e o segundo é do tipo (3). Isto conclui o caso α.

caso $\boldsymbol{\beta}$:

$$g = [y_1, y_{a_i}][x_1, y_{a_2}, \ldots, y_{a_n}, y_{a_j}][x_2, y_{b_1}] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}], \text{ com } 2 \leq i < j \leq n.$$

Se $a_j < b_1$, então g é um gerador de W do tipo (2).

Se $a_j > b_1$, então pelo Lema 5.3.3,

$$g = -[y_1, y_{a_i}][x_1, y_{a_2}, \ldots, y_{a_n}, y_{b_1}][x_2, y_{a_j}] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}], \text{ com } 2 \leq i < j \leq n$$

isto implica que $g \in V_B$, para $B = \{1, a_2, \ldots, a_{j-1}, b_1, a_{j+1}, \ldots, a_n\} < A$ e, por hipótese de indução, $g \in W$.

caso $\boldsymbol{\gamma}$:

$$g = [y_{a_2}, y_{a_i}][x_1, y_{a_3}, \ldots, y_{a_n}, y_1][x_2, y_{b_1}] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}], \text{ com } 3 \leq i \leq n.$$

Se $a_i < b_1$, então $b_1 \geq 3$ e $2 \in A$, podemos considerar que $a_2 = 2$, uma vez que $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ e, assim, g é um gerador de W do tipo (3).

Agora, se $a_i > b_1$ e assumindo que $a_2 > b_1$, isto é, $b_1 = 2$. Pela identidade (vii) da Proposição 5.3.1, obteremos $h_1 - h_2 - h_3 + g \in I$, onde:

- $h_1 = [y_1, y_2][x_1, y_{a_3}, \ldots, y_{a_n}, y_{a_2}][x_2, y_{a_i}] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}]$;
- $h_2 = [y_1, y_{a_i}][x_1, y_{a_3}, \ldots, y_{a_n}, y_2][x_2, y_{a_2}] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}]$;
- $h_3 = [y_2, y_{a_2}][x_1, y_{a_3}, \ldots, y_{a_n}, y_1][x_2, y_{a_i}] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}]$.

Logo, podemos escrever $g = -h_1 + h_2 + h_3$. Claramente, $h_1, h_3 \in V_B$, para $B = \{1, 2, a_2, \ldots, \hat{a_i}, \ldots, a_n\} < A$ e similarmente $h_2 \in V_{B_1}$, para $B_1 = \{1, 2, a_3, \ldots, a_n\} < A$. Consequentemente, por hipótese de indução, $h_1, h_2, h_3 \in W$.

A última possibilidade a ser considerada é $a_2 < b_1$, além de termos $a_i > b_1$. Neste caso, $b_1 \geq 3$ e $a_2 = 2$, daí

$$g = [y_2, y_{a_i}][x_1, y_{a_3}, \ldots, y_{a_n}, y_1][x_2, y_{b_1}] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}].$$

Se $i = n$, então g é um polinômio gerador de W do tipo (4).

Se $i \neq n$, então usando mais uma vez a identidade (vii) da Proposição 5.3.1, obteremos $H_1 - H_2 - H_3 + g \in I$, consequentemente podemos escrever $g = -H_1 + H_2 + H_3$, onde:

- $H_1 = [y_1, y_{b_1}][x_1, y_{a_3}, \ldots, y_{a_n}, y_2][x_2, y_{a_i}] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}]$;
- $H_2 = [y_1, y_{a_i}][x_1, y_{a_3}, \ldots, y_{a_n}, y_{b_1}][x_2, y_2] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}]$;
- $H_3 = [y_{b_1}, y_2][x_1, y_{a_3}, \ldots, y_{a_n}, y_1][x_2, y_{a_i}] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}]$.

Observe que $H_1, H_3 \in V_B$, para $B = \{1, 2, a_3, \ldots, \hat{a}_i, b_1, \ldots, a_n\} < A$. Logo, por hipótese de indução, $H_1, H_3 \in W$. Além disso, pela identidade (v), Proposição 5.3.1, podemos escrever H_2 da seguinte maneira:

$$H_2 = -[y_1, y_{a_i}][x_1, y_{a_3}, \ldots, y_{a_n}, y_2][x_2, y_{b_1}] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}].$$

Pelo Lema 5.3.9, podemos escrever H_2, módulo I, como combinação linear dos polinômios:

- $q_1 = [y_1, y_{a_i}][x_1, y_{a_3}, \ldots, y_2, y_{a_n}][x_2, y_{b_1}] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}]$;
- $q_2 = [y_2, y_{a_n}][x_1, y_{a_3}, \ldots, y_{a_i}, y_1][x_2, y_{b_1}] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}]$;
- $q_3 = [y_1, y_{a_n}][x_1, y_{a_3}, \ldots, y_2, y_{a_i}][x_2, y_{b_1}] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}]$;
- $q_4 = [y_1, y_2][x_1, y_{a_3}, \ldots, y_{a_n}, y_{a_i}][x_2, y_{b_1}] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}]$.

Utilizando o Lema 5.3.3, teremos que

$$q_1 = -[y_1, y_{a_i}][x_1, y_{a_3}, \ldots, y_2, y_{b_1}][x_2, y_{a_n}] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}].$$

Assim, $q_1 \in V_C$, para $C = \{1, 2, a_3, \ldots, a_{n-1}\} \cup \{b_1\}$. De modo análogo, teremos que $q_3, q_4 \in V_{C_1}$, para $C_1 = \{1, 2, a_3, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_{n-1}\} \cup \{b_1\}$. Como $C, C_1 < A$, por hipótese de indução, $q_1, q_3, q_4 \in W$.

Por fim, pelo Lema 5.3.4, teremos que

$$q_2 = [y_2, y_{a_n}][x_1, y_{a_3}, \ldots, y_{a_{n-1}}, y_1][x_2, y_{b_1}] \ldots [x_l, y_{b_{l-1}}].$$

o qual é um gerador de W do tipo (4). Donde segue o resultado. ∎

5.5 A Independência Linear dos Geradores de $\Gamma_{l,m}(I)$

Nesta seção provaremos que os geradores do espaço $\Gamma_{l,m}(I)$, obtidos na seção anterior, são realmente um conjunto linearmente independente, módulo $T_*(R)$. A fim de demonstrar tal resultado, precisaremos de um modelo conveniente para a álgebra relativamente livre na variedade das álgebras com involução gerada por $(R, *)$.

Construiremos, de forma natural, uma álgebra livre na classe de todas as álgebras supercomutativas. Tome $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \ldots\}$ e $\Upsilon = \{t_1, t_2, \ldots\}$ conjuntos disjuntos enumeráveis de indeterminadas e defina $K\langle \Theta \cup \Upsilon \rangle$ a álgebra associativa livre com unidade, gerada por $\Theta \cup \Upsilon$ sobre o corpo K e induzimos nela uma $\mathbb{Z}_2$-graduação impondo $deg(\theta) = 0$ para $\theta \in \Theta$, e $deg(t) = 1$, para $t \in \Upsilon$ (para maiores detalhes ver [4]). Munida de tal $\mathbb{Z}_2$-graduação, $K\langle \Theta \cup \Upsilon \rangle$ é chamada de álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada livre. Se I é o ideal gerado pelos elementos $xy - (-1)^{deg(x) \cdot deg(y)} yx$, para $x, y \in \Theta \cup \Upsilon$, definimos a álgebra supercomutativa livre, denotada por $S = K[\Theta; \Upsilon]$, como sendo a álgebra quociente

$$S = K[\Theta; \Upsilon] = K\langle \Theta \cup \Upsilon \rangle / I,$$

e denotaremos pelas mesmas letras t, θ, as imagens das variáveis t, θ em S. Observe que podemos ver a álgebra supercomutativa livre como sendo a álgebra dos polinômios nas variáveis de Θ e de Υ, tais que as variáveis Θ são centrais e as de Υ anticomutam entre si.

Proposição 5.5.1 *Sejam* $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_l\}, \Upsilon = \{t_1, \ldots, t_m\}$ *e* $A = A_0 \oplus A_1$ *uma álgebra supercomutativa qualquer. Dados quaisquer* $a_1, \ldots, a_l \in A_0$ *e* $b_1, \ldots, b_m \in A_1$*, existe um único homomorfismo* $\varphi : S \to A$ *tal que* $\varphi(\theta_i) = a_i$ *e* $\varphi(t_j) = b_j$*, para todo* $i = 1, \ldots, l$ *e* $j = 1, \ldots, m$*. Além disso, se* $m = l$ *isto é equivalente a dados quaisquer* $c_1, c_2, \ldots, c_m \in A$ *(não necessariamente homogêneos) existe um único homomorfismo homogêneo* $\varphi : S \to A$ *de álgebras* $\mathbb{Z}_2$*-graduadas tal que* $\varphi(\theta_i + t_i) = c_i$*, para todo* $i = 1, 2, \ldots m$*.*

Demonstração: Ver [5]. ■

Definição 5.5.2 $S = K[\Theta; \Upsilon]$ *é chamada álgebra supercomutativa livre sobre* K *nos conjuntos enumeráveis de variáveis comutativas de* Θ *e anticomutativas de* Υ*.*

Então, podemos considerar a álgebra

$$M_{1,1}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \; ; \; a, d \in S_0, b, c \in S_1 \right\}.$$

É fácil verificar que a aplicação $*$ definida por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

é uma involução sobre $M_{1,1}(S)$. Finalmente, para $i \geq 1$, podemos considerar em $M_{1,1}(S)$ as matrizes

$$X_i = \begin{pmatrix} u_i & \zeta_i \\ 0 & u_i \end{pmatrix} \text{ e } Y_i = \begin{pmatrix} v_i & 0 \\ \eta_i & -v_i \end{pmatrix}$$

onde $u_i = t_{2i-1}, v_i = t_{2i}, \zeta_i = \theta_{2i-1}$ e $\eta_i = \theta_{2i}$.

Seja D a subálgebra de $M_{1,1}(S)$ gerada por estas matrizes genéricas. Uma vez que as matrizes X_i são elementos simétricos e Y_i são antissimétricos com respeito à involução $*$, temos que esta involução induz uma involução sobre D.

Observação 5.5.3 *Dados $w_1, \ldots, w_l \in R^+$ e $v_1, \ldots, v_m \in R^-$, então existe um homomorfismo de álgebras com involução $\psi : D \to R$ tal que $\psi(X_i) = w_i$ e $\psi(Y_j) = v_j$, para todo $i = 1, \ldots, l$ e $j = 1, \ldots, m$. Isto segue da Proposição 5.5.1.*

Lema 5.5.4 *Seja $f = f(\theta_1, \ldots, \theta_l, t_1, \ldots, t_m)$ um elemento não nulo em $S = K[\Theta; \Upsilon]$. Então, existe um homomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado $\varphi : S \to E$ tal que $\varphi(f) \neq 0$.*

Demonstração: Seja $f = f(\theta_1, \ldots, \theta_l, t_1, \ldots, t_m)$, ou seja,

$$f = \sum_{m \in \mathcal{I}} \alpha_m \theta_{i_1}^{r_1} \ldots \theta_{i_n}^{r_n} t_{j_1}^{k_1} \ldots t_{j_q}^{k_q},$$

onde $\alpha_m \in K$, para cada $m \in \mathcal{I}$, $r_i = deg_{\theta_{i_\alpha}} f$, $k_j = deg_{t_{j_\beta}} f$, onde $\alpha \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $\beta \in \{1, 2, \ldots, q\}$. Como $f \neq 0$ em S, devemos ter $k_1 = k_2 = \cdots = k_q = 1$, uma vez que $t_i t_j = -t_j t_i$ implica $t_i^2 = 0$, para todo i, j, e $\alpha_m \neq 0$, para algum $m \in \mathcal{I}$. Daí,

$$f = \sum_{m \in \mathcal{I}} \alpha_m \theta_{i_1}^{r_1} \ldots \theta_{i_n}^{r_n} t_{j_1} \ldots t_{j_q}.$$

tomando a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : S &\rightarrow E \\ \theta_i &\rightarrow 1 \\ t_i &\rightarrow e_i. \end{aligned}$$

Como E é a Álgebra de Grassmann com base infinita, temos que

$$\begin{aligned} \varphi(f) &= \varphi(\sum_{m\in\mathcal{I}} \alpha_m t_{j_1} \dots t_{j_q}) \\ &= \sum_{m\in\mathcal{I}} \alpha_m \varphi(t_{j_1}) \dots \varphi(t_{j_q}) \\ &= \sum_{m\in\mathcal{I}} \alpha_m e_{j_1} \dots e_{j_q}. \end{aligned}$$

Como $e_{j_1} \dots e_{j_q}$ são elementos da base canônica de E, devemos ter que $\varphi(f) \neq 0$. Como era desejado. ■

Teorema 5.5.5 *A álgebra com involução $(D, *)$ é isomorfa à álgebra relativamente livre $K\langle X \cup Y \rangle / T_*(R)$, na variedade das álgebras com involução determinada por $(R, *)$.*

Demonstração: Sejam $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ e $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ conjuntos enumeráveis disjuntos. Considere o homomorfismo sobrejetor de álgebras com involução

$$\begin{aligned} \varphi : K\langle X \cup Y \rangle &\rightarrow D \\ x_i &\rightarrow X_i \\ y_i &\rightarrow Y_i. \end{aligned}$$

É suficiente demonstrar que $Ker\varphi = T_*(R)$, isto é, $f \in K\langle X \cup Y \rangle$ é uma identidade em $(R, *)$ se, e somente se, $\varphi(f) = 0$.

Se $f \in Ker\varphi$, então $f(X_1, \dots, X_l, Y_1, \dots, Y_m) = 0$. Dados $r_1, \dots, r_l \in R^+$ e $s_1, \dots, s_m \in R^-$, onde R^+ e R^- são os subespaços dos elementos simétricos e antissimétricos, então existe um homomorfismo natural que aplica X_i para r_i e Y_j para s_j, para cada $i = 1, 2, \dots, l$ e $j = 1, 2, \dots, m$. Logo, $f(r_1, \dots, r_l, s_1, \dots, s_m) = 0$, para todo $r_1, \dots, r_l \in R^+$ e $s_1, \dots, s_m \in R^-$, ou seja, $f \in T_*(R)$.

Reciprocamente, seja $f \in T_*(R)$, ou seja, f é uma identidade para $(R,*)$. Suponha, por absurdo, que existam $X_1,\ldots,X_l$ elementos simétricos e $Y_1,\ldots,Y_m$ elementos antissimétricos tais que

$$f(X_1,\ldots,X_l,Y_1,\ldots,Y_m)=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{pmatrix}\neq 0.$$

Sem perda de generalidade podemos supor que a entrada $f_{11}=f_{11}(u_1,\ldots,u_l,v_1,\ldots,v_m)$ é um polinômio não nulo em S. Então, pelo Lema 5.5.4, existe um homomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado $\phi : S\to E$ tal que $\phi(f_{11})\neq 0$. Seja o homomorfismo de álgebras com involução

$$\begin{aligned}\hat{\phi}: D &\to R\\ (h_{ij}) &\to (\phi(h_{ij})),\end{aligned}$$

tal que $\hat{\phi}(f(X_1,\ldots,X_l,Y_1,\ldots,Y_m))\neq 0$. Logo $f\notin T_*(R)$, uma contradição. Portanto, $f\in ker\varphi$. Donde segue o resultado. ■

Agora, estudaremos a independência linear dos geradores dos espaços $\Gamma_{l,m}(I)$ sobre a correspondente álgebra das matrizes genéricas D.

Lema 5.5.6 *Os seguintes polinômios:*

- $y_1\ldots y_m$;
- $q_i=y_1\ldots\hat{y}_i\ldots y_{m-1}[y_i,y_m]\quad (i=1,\ldots,m-1)$,

são linearmente independentes módulo as $*$-identidades de R.

Demonstração: Na álgebra D, temos que

$$Y_1\ldots\hat{Y}_i\ldots Y_{m-1}[Y_i,Y_m]=(-1)^{m-2}[2v_1\ldots\hat{v}_i\ldots v_{m-1}(\eta_i v_m-v_i\eta_m)]E_{21}.$$

De fato, provaremos tal resultado por indução sobre m. Para $m=2$, temos

$$\begin{aligned} y_{m-1}[y_i,y_m] &= \begin{pmatrix} v_{m-1} & 0\\ \eta_{m-1} & -v_{m-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 2(\eta_i v_m-v_i\eta_m) & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0\\ -2v_{m-1}(\eta_i v_m-v_i\eta_m) & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Supondo o resultado válido para k, e sendo $A = Y_1 \ldots \hat{Y_i} \ldots Y_k[Y_i, Y_{k+1}]$ teremos que

$$\begin{aligned}
A &= Y_1(Y_2 \ldots \hat{Y_i} \ldots Y_k[Y_i, Y_{k+1}]) \\
&= \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ \eta_1 & -v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (-1)^{k-2}[2v_2 \ldots \hat{v_i} \ldots v_{k-1}(\eta_i v_k - v_i \eta_k)] & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (-1)^{k-1}[2v_1 \ldots \hat{v_i} \ldots v_k(\eta_i v_k - v_i \eta_k)] & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Segue que o polinômio $y_1 \ldots y_m$ não é combinação linear de polinômios q_i, uma vez que

$$Y_1 \ldots Y_m = \begin{pmatrix} \Pi_{i=1}^m v_i & 0 \\ \Sigma_{i=1}^m (-1)^{i-1} \eta_i v_1 \ldots \hat{v_i} \ldots v_m & \Pi_{i=1}^n (-1)^i v_i \end{pmatrix},$$

e assim, o monômio $v_1 v_2 \ldots v_m$ da entrada $(1,1)$ do elemento $Y_1 \ldots Y_m$ é não nulo em S. Por outro lado, o monômio $v_1 \ldots \hat{v_i} \ldots v_k \eta_i v_m$ aparece apenas na entrada $(2,1)$ dos elementos $Y_1 \ldots \hat{Y_i} \ldots Y_{m-1}[Y_i, Y_m]$.

Portanto esses monômios são todos distintos em S, e seus correspondentes polinômios são linearmente independentes módulo $T_*(R)$. ■

Como consequência do lema anterior e do Lema 5.4.2, temos o seguinte resultado:

$$\Gamma_{0,m}(I) = \Gamma_{0,m}(T_*(R)). \tag{5.19}$$

Lema 5.5.7 *O polinômio $[x_1, y_1] \ldots [x_l, y_l] \notin T_*(R)$.*

Demonstração: Na álgebra D, temos que

$$[X_i, Y_i] = \begin{pmatrix} \zeta_i \eta_i & -2\xi_i v_i \\ 0 & \zeta_i \eta_i \end{pmatrix}.$$

Segue que na entrada $(1,1)$ de $[X_1, Y_1] \ldots [X_l, Y_l]$ obteremos o monômio $\zeta_1 \eta_1 \ldots \zeta_l \eta_l$ que é não nulo em S. ■

Lema 5.5.8 *Os seguinte polinômios*

- $f = y_1[x_1, y_2] \ldots [x_l, y_{l+1}]$;

- $p_1 = [x_1, y_1, y_2][x_2, y_3] \dots [x_l, y_{l+1}]$;
- $p_i = [x_1, y_i, y_1][x_2, y_2] \dots [x_i, y_{i+1}] \dots [x_l, y_{l+1}]$, *para* $i = 2, \dots, l+1$,

são linearmente independentes módulo as $*$-identidades de R.

Demonstração: Avaliando os polinômios f, p_i, para $i \geq 1$, sobre as matrizes genéricas X_i e Y_i. Observamos que a entrada $(2,1)$ dos elementos $p_i(X_1, \dots, Y_{l+1})$ é zero para todo $i \geq 1$ e a mesma entrada do elemento $f(X_1, \dots, Y_{l+1})$ é $\eta_1\zeta_1\eta_2 \dots \zeta_l\eta_{l+1}$. Logo, este monômio é não nulo em S. Consequentemente, f não é combinação linear dos polinômios do tipo p_i, para $i \geq 1$. Por outro lado, observe que a entrada $(1,1)$ do polinômio $p_i(X_1, \dots, Y_{l+1})$ é $\pm 2v_i\zeta_1 \dots \zeta_l\eta_1 \dots \hat{\eta}_i \dots \eta_{l+1}$. Assim, obtemos monômios distintos em S para cada $i = 1, \dots, l$, donde segue que os polinômios p_i são linearmente independentes, também. ■

Do lema anterior e da Proposição 5.4.5, mostramos que

$$\Gamma_{l,l+1}(I) = \Gamma_{l,l+1}(T_*(R)). \tag{5.20}$$

De mesma forma, pelo Lemas 5.4.3 e 5.5.7, obtemos

$$\Gamma_{l,l}(I) = \Gamma_{l,l}(T_*(R)). \tag{5.21}$$

O último caso refere-se aos geradores de $\Gamma_{l,m}(I)$ com $m = l + k \geq 2 + k$. Estes geradores são os polinômios obtidos nas Proposições 5.4.6, 5.4.8 e no Lema 5.4.7. Como na seção anterior, consideraremos primeiramente o caso $l = 1$.

Proposição 5.5.9 *Os seguintes polinômios de $\Gamma_{1,m}$, $m \geq 3$:*

(1) $G = [y_1, y_m][x_1, y_2, \dots, y_{m-1}]$;

(2) $G_{2;(i,j)} = [y_1, y_i][x_1, y_2, \dots, \hat{y}_i, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_m, y_j]$, $(2 \leq i < j \leq m)$;

(3) $G_{3;(i)} = [y_2, y_i][x_1, y_3, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_m, y_1]$, $(3 \leq i \leq m)$;

(4) $P_{(j)} = [x_1, y_1, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_m, y_j]$, $(1 \leq j \leq m)$,

são os geradores de $\Gamma_{1,m}(I)$. Além disso, eles são linearmente independentes módulo as $*$-identidades de R.

Demonstração: A primeira parte do resultado segue da decomposição dada na expressão (5.18), junto com a Proposição 5.4.6 e o Lema 5.4.7. Resta mostrar que os polinômios dados são linearmente independentes módulo as $*$-identidades de R. Como foi feito anteriormente, avaliaremos os polinômios dados sobre as matrizes genéricas da álgebra D. Denotemos por $\overline{G}, \overline{G}_{2;(i,j)}, \overline{G}_{3;(i)}$ e $\overline{P}_{(j)}$ os elementos correspondentes em D.

Observe, primeiramente, que a entrada $(1,1)$ de $\overline{P}_{(j)}$ é $(-2)^{m-1}\zeta_1 v_1 \ldots \hat{v}_j \ldots v_m \eta_j$ e é não nula em S. Por outro lado, se considerarmos a avaliação de uma combinação linear de polinômios $G, G_{2;(i,j)}, G_{3;(i)}$ sobre as matrizes genéricas $X_1, Y_1, \ldots, Y_m$ então as entradas não nulas estão apenas nos coeficientes E_{21} e E_{22}. Daí, podemos estudar em dois casos separados.

No **primeiro caso**, como os monômios $\zeta_1 v_1 \ldots \hat{v}_j \ldots v_m \eta_j$ são todos distintos deduzimos que os polinômios $P_{(j)}$, para $j = 1, \ldots, m$, são linearmente independentes.

No **segundo caso**, consideraremos uma combinação linear dos polinômios $G, G_{2;(i,j)}, G_{3;(i)}$ com coeficientes $\alpha, \alpha_{2;(i,j)}$ e $\alpha_{3;(i)}$, respectivamente. Assumindo que esta combinação linear é uma $*$-identidade de R, temos

$$\alpha\overline{G} + \sum_{2\leq i<j\leq m} \alpha_{2;(i,j)}\overline{G}_{2;(i,j)} + \sum_{i=3}^{m} \alpha_{3;(i)}\overline{G}_{3;(i)} = 0.$$

Usando um raciocínio análogo ao feito para a demonstração da Proposição 5.3.1, as entradas $(2,1)$ das matrizes $\overline{G}, \overline{G}_{2;(i,j)}$ e $\overline{G}_{3;(i)}$ são, a menos de multiplicação pelo mesmo coeficiente $2(-2)^{m-3}$, os seguinte polinômios de S:

- $\tilde{G} = (\eta_1 v_m - v_1 \eta_m)\zeta_1 v_2 \ldots v_{m-2}\eta_{m-1}$;
- $\tilde{G}_{2;(i,j)} = (\eta_1 v_i - v_1 \eta_i)\zeta_1 v_2 \ldots \hat{v}_i \ldots \hat{v}_j \ldots v_m \eta_j$;
- $\tilde{G}_{3;(i)} = (\eta_2 v_i - v_2 \eta_i)\zeta_1 v_3 \ldots \hat{v}_i \ldots v_m \eta_1$,

respectivamente. Olhando os monômios em que η_1 não aparece obtemos a seguinte expressão:

$$-\alpha(v_1\eta_m\zeta_1 v_2 \ldots v_{m-2}\eta_{m-1}) - \sum_{2\leq i<j\leq m} \alpha_{2;(i,j)}(v_1\eta_i\zeta_1 v_2 \ldots \hat{v}_i \ldots \hat{v}_j \ldots v_m\eta_j) = 0.$$

Observe que para cada par (i,j) tal que $i < m-1$ tem-se $\alpha_{2;(i,j)} = 0$ e além disso,

$\alpha = \alpha_{2;(m-1,m)}$. De fato, separando o termo $i = m-1$ do somatório acima obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(v_1\eta_m\xi_1v_2\dots v_{m-2}\eta_{m-1}) + \alpha_{2;(m-1,m)}(v_1\eta_{m-1}\zeta_1v_2\dots v_{m-2}\eta_m) \\ &+ \sum_{2\leq i<j\leq m-1} \alpha_{2;(i,j)}(v_1\eta_i\zeta_1v_2\dots\hat{v}_i\dots\hat{v}_j\dots v_m\eta_j) \end{aligned}$$

Permutando os elementos η_{m-1} e η_m, da segunda parcela da expressão acima, teremos

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(v_1\eta_m\zeta_1v_2\dots v_{m-2}\eta_{m-1}) - \alpha_{2;(m-1,m)}(v_1\eta_m\zeta_1v_2\dots v_{m-2}\eta_{m-1}) \\ &+ \sum_{2\leq i<j\leq m-1} \alpha_{2;(i,j)}(v_1\eta_i\zeta_1v_2\dots\hat{v}_i\dots\hat{v}_j\dots v_m\eta_j) \end{aligned}$$

Observe que os monômios acima são todos distintos, portanto para cada par (i,j) tal que $i < m-1$ tem-se $\alpha_{2;(i,j)} = 0$. Segue que

$$\alpha(v_1\eta_m\zeta_1v_2\dots v_{m-2}\eta_{m-1}) - \alpha_{2;(m-1,m)}(v_1\eta_{m-1}\zeta_1v_2\dots v_{m-2}\eta_m) = 0.$$

Assim, $\alpha = \alpha_{2;(m-1,m)}$. Sendo $\beta = \alpha_{2;(m-1,m)}$, então $\alpha = \beta$ e teremos

$$\alpha\tilde{G} + \beta\tilde{G}_{2;(m-1,m)} + \sum_{i=3}^{m} \alpha_{3;(i)}\tilde{G}_3;(i) = 0. \tag{5.22}$$

Seja $m > 3$. Se $3 \leq i \leq m-1$, então observaremos que o monômio $v_2\eta_i\zeta_1v_3\dots\hat{v}_i\dots v_m\eta_1$ aparece apenas nos polinômios $\tilde{G}_{3;(i)}$. Portanto, $\alpha_{3;(i)} = 0$, para qualquer $i = 3,\dots,m-1$ e obtemos da Eq. (5.22) a seguinte expressão:

$$0 = \alpha\tilde{G} + \beta\tilde{G}_{2;(m-1,m)} + \alpha_{3;(m)}\tilde{G}_{3;(m)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(\eta_1v_m - v_1\eta_m)\zeta_1v_2\dots v_{m-2}\eta_{m-1} + \beta(\eta_1v_{m-1} - v_1\eta_{m-1})\zeta_1v_2\dots v_{m-2}\eta_j \\ &+ \alpha_{3;(m)}(\eta_2v_m - v_2\eta_m)\zeta_1v_3\dots v_{m-1}\eta_1, \end{aligned}$$

donde segue diretamente que $\alpha = \beta = \alpha_{3;(m)} = 0$.

Resta verificar para o caso em que $m = 3$. Neste caso, escrevemos a Eq. (5.22) da seguinte maneira:

$$\alpha\tilde{G} + \beta\tilde{G}_{2;(2,3)} + \alpha_{3;(3)}\tilde{G}_{3;(3)} = 0,$$

isto é,

$$0 = \alpha(\eta_1v_3 - v_1\eta_3)\zeta_1\eta_2 + \beta(\eta_1v_2 - v_1\eta_2)\zeta_1\eta_3 + \alpha_{3;(3)}(\eta_2v_3 - v_2\eta_3)\zeta_1\eta_1.$$

Agora verifica-se facilmente que $\alpha = \beta = \alpha_{3;(3)} = 0$, donde segue o resultado. ■

Como consequência desta última proposição temos:

$$\Gamma_{1,m}(I) = \Gamma_{1,m}(T_*(R)), \quad m \geq 3. \tag{5.23}$$

Proposição 5.5.10 *Seja $m = l + k$. Se $l \geq 2$ e $k \geq 2$, então os polinômios de $\Gamma_{l,m}$:*

(1) $G = [y_1, y_{k+1}][x_1, y_2, \ldots, y_k][x_2, y_{k+2}] \ldots [x_l, y_{l+k}]$;

(2) $G_{2;(j_1,\ldots,j_{l+1})} = [y_1, y_{j_1}][x_1, y_{i_1}, \ldots, y_{i_{k-2}}, y_{j_2}][x_2, y_{j_3}] \ldots [x_l, y_{j_{l+1}}]$,
onde $2 \leq j_1 < \ldots < j_{l+1} \leq m$ *e* $2 \leq i_1 < \ldots < i_{k-2} \leq m$;

(3) $G_{3;(j_1,\ldots,j_l)} = [y_2, y_{j_1}][x_1, y_{i_1}, \ldots, y_{i_{k-2}}, y_1][x_2, y_{j_2}] \ldots [x_l, y_{j_l}]$,
onde $3 \leq j_1 < \ldots < j_l \leq m$ *e* $3 \leq i_1 < \ldots < i_{k-2} \leq m$;

(4) $G_{4;(j_1,\ldots,j_{l-1})} = [y_2, y_{i_{k-1}}][x_1, y_{i_1}, \ldots, y_{i_{k-2}}, y_1][x_2, y_{j_1}] \ldots [x_l, y_{j_{l-1}}]$,
onde $3 \leq j_1 < \ldots < j_{l-1} \leq m$ *e* $3 \leq i_1 < \ldots < i_{k-1} \leq m$, *com* $j_1 < i_{k-1}$;

(5) $P_{(j_1,\ldots,j_l)} = [x_1, y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}, y_{j_1}][x_2, y_{j_2}] \ldots [x_l, y_{j_l}]$,
onde $j_1 < \ldots < j_l$ *e* $i_1 < \ldots < i_k$,

são geradores de $\Gamma_{l,m}(I)$. Além disso, estes polinômios são linearmente independentes módulo as $*$-identidades polinomiais de R.

Demonstração: Como na proposição anterior, a primeira parte da proposição é uma consequência imediata da decomposição em (5.18) junto com os resultados das Proposições 5.4.6 e 5.4.8.

Assim, resta mostrar a independência linear dos geradores de $\Gamma_{l,m}(I)$ módulo as $*$-identidades polinomiais de R. Avaliaremos todos os geradores dados sobre as matrizes genéricas $X_1, \ldots, X_l, Y_1, \ldots, Y_m$. Denotaremos por $\bar{\cdot}$ os correspondentes elementos em D. Como foi feito na proposição anterior, podemos dividir a prova em dois casos. Mais precisamente, observamos que a entrada $(1,1)$ de $\overline{P}_{(j_1,\ldots,j_l)}$ é o elemento não nulo $(-2)^k\zeta_1 v_{i_1} \ldots v_{i_1}\eta_{j_1}\zeta_2\eta_{j_2} \ldots \zeta_l\eta_{j_l}$ de S. Por outro lado, em uma combinação linear de elementos $\overline{G}, \overline{G}_{2;(j_1,\ldots,j_{l+1})}, \overline{G}_{3;(j_1,\ldots,j_l)}$ e $\overline{G}_{4;(j_1,\ldots,j_{l-1})}$ é não nula apenas nas entradas $(2,1)$ e $(2,2)$. Por isso, podemos dividir em dois casos separadamente.

No **primeiro caso** obtemos a independência linear dos polinômios $P_{(j_1,\ldots,j_l)}$ já que os monômios correspondentes $(-2)^k\zeta_1 v_{i_1}\ldots v_{i_k}\eta_{j_1}\zeta_2\eta_{j_2}\ldots\zeta_l\eta_{j_l}$ são dois a dois distintos em S.

No **segundo caso** analisaremos as entradas $(2,1)$ das matrizes de D. Vamos considerar os seguintes polinômios de S:

- $\tilde{G} = (\eta_1 v_{k+1} - v_1\eta_{k+1})\zeta_1 v_2\ldots v_{k-1}\eta_k\zeta_2\eta_{k+2}\ldots\zeta_l\eta_{k+l}$;
- $\tilde{G}_{2;(j_1,\ldots,j_{l+1})} = (\eta_1 v_{j_1} - v_1\eta_{j_1})\zeta_1 v_{i_1}\ldots v_{i_{k-2}}\eta_{j_2}\zeta_2\eta_{j_3}\ldots\zeta_l\eta_{j_{k+l}}$;
- $\tilde{G}_{3;(j_1,\ldots,j_l)} = (\eta_2 v_{j_1} - v_2\eta_{j_1})\zeta_1 v_{i_1}\ldots v_{i_{k-2}}\eta_1\zeta_2\eta_{j_2}\ldots\zeta_l\eta_{j_l}$;
- $\tilde{G}_{4;(j_1,\ldots,j_{l-1})} = (\eta_2 v_{i_{k-1}} - v_2\eta_{i_{k-1}})\zeta_1 v_{i_1}\ldots v_{i_{k-2}}\eta_1\zeta_2\eta_{j_1}\ldots\zeta_l\eta_{j_{l-1}}$,

onde os índices satisfazem as mesmas condições que $(1),(2),(3)$ e (4) do enunciado, respectivamente. Denote por $\mathfrak{C}_{(i)}$ o conjunto de todos os geradores do tipo (i), com $i = 2,3,4$, dado no enunciado da proposição. Claramente a entrada $(2,1)$ de $\overline{G}$ é $2(-2)^{k-2}\tilde{G}$, o mesmo valendo para qualquer outro gerador, que na entrada $(2,1)$ de H é $2(-2)^{k-2}\tilde{H}$, para todo $H \in \mathfrak{C}_{(i)}$, para todo $i = 2,3,4$. Assumimos que alguma combinação linear,

$$\alpha G + \sum_{H\in\mathfrak{C}_{(2)}} \alpha_H H + \sum_{H\in\mathfrak{C}_{(3)}} \alpha_H H + \sum_{H\in\mathfrak{C}_{(4)}} \alpha_H H,$$

é um $*$-identidade polinomial de R. Portanto, obtemos que na álgebra supercomutativa livre S

$$\alpha\tilde{G} + \sum_{H\in\mathfrak{C}_{(2)}} \alpha_H \tilde{H} + \sum_{H\in\mathfrak{C}_{(3)}} \alpha_H \tilde{H} + \sum_{H\in\mathfrak{C}_{(4)}} \alpha_H \tilde{H} = 0. \tag{5.24}$$

Se na Eq. (5.24) considerarmos apenas os monômios em que η_1 não aparecem, obteremos

$$\alpha w + \sum_{H\in\mathfrak{C}_{(2)}} \alpha_H w_H = 0,$$

onde

$$w = v_1\eta_{k+1}\zeta_1 v_2\ldots v_{k-1}\eta_k\zeta_2\eta_{k+2}\ldots\zeta_l\eta_{k+l}$$

e

$$w_H = v_1\eta_{j_1}\zeta_1 v_{i_1}\ldots v_{i_{k-2}}\eta_{j_2}\zeta_2\eta_{j_3}\ldots\zeta_l\eta_{j_{k+l}},\ \text{se } H = G_{2;(j_1,\ldots,j_{l+1})} \in \mathfrak{C}_{(2)}.$$

Portanto, para qualquer $H \in \mathfrak{C}_{(2)}$, temos que $\alpha_H = 0$, se $H \neq G_{2;(k,\ldots,k+l)} := G_2$. Seja $\beta = \alpha_{G_2}$, assim a Eq. (5.24) torna-se

$$\alpha\tilde{G} + \beta\tilde{G}_2 + \sum_{H\in\mathfrak{C}_{(3)}} \alpha_H\tilde{H} + \sum_{H\in\mathfrak{C}_{(4)}} \alpha_H\tilde{H} = 0. \tag{5.25}$$

Agora, fixemos a sequência $(j_1, \ldots j_l)$, onde $3 \leq j_1 < \ldots < j_l \leq m-1$. Consideremos os polinômios envolvidos na Eq. (5.25) e observemos que as variáveis $\eta_1, \eta_{j_1}, \ldots, \eta_{j_l}$ aparecem apenas no somatório $\tilde{H} = \tilde{G}_{3;(j_1,\ldots,j_l)}$. Isto implica que o coeficiente correspondente α_H é nulo e obteremos

$$\alpha\tilde{G} + \beta\tilde{G}_2 + \sum_{3\leq j_1<\ldots<j_{l-1}<m} \alpha_{(j_1,\ldots j_l)}\tilde{G}_{3;(j_1,\ldots,j_{l-1},m)} + \sum_{H\in\mathfrak{C}_{(4)}} \alpha_H\tilde{H} = 0. \tag{5.26}$$

Nesta parte da demonstração, fixemos a sequência de inteiros $(j_1, \ldots j_l)$, onde $3 \leq j_1 < \ldots < j_l \leq m-1$ e consideremos os polinômios envolvidos na Eq. (5.26). Notemos que as variáveis $\eta_1, \eta_2, \eta_{j_1}, \ldots, \eta_{j_{l-1}}$ aparecem apenas no polinômio $\tilde{H} = \tilde{G}_{4;(j_1,\ldots,j_{l-1})}$ e seu respectivo coeficiente deve ser zero. Em outras palavras, se $l > 2$ estamos prontos para provar a independência linear, módulo $T_*(R)$ dos seguintes polinômios de $\Gamma_{l,m}$ com $m = l + k$:

- $G = [y_1, y_{k+1}][x_1, y_2, \ldots, y_k][x_2, y_{k+2}] \ldots [x_{l-1}, y_{m-1}][x_l, y_m]$;
- $G_2 = [y_1, y_k][x_1, y_2, \ldots, y_{k+1}][x_2, y_{k+2}] \ldots [x_{l-1}, y_{m-1}][x_l, y_m]$;
- $G_{3;(j_1,\ldots,j_{l-1},m)} = [y_2, y_{j_1}][x_1, y_{i_1}, \ldots, y_{i_{k-2}}, y_1][x_2, y_{j_2}] \ldots [x_{l-1}, y_{j_{l-1}}][x_l, y_m]$, onde $3 \leq j_1 < \ldots < j_{l-1} \leq m-1$ e $3 \leq i_1 < \ldots < i_{k-2} \leq m-1$;
- $G_{4;(j_1,\ldots,j_{l-2},m)} = [y_2, y_{i_{k-1}}][x_1, y_{i_1}, \ldots, y_{i_{k-2}}, y_1][x_2, y_{j_1}] \ldots [x_{l-1}, y_{j_{l-2}}][x_l, y_m]$, onde $3 \leq j_1 < \ldots < j_{l-2} \leq m-1$ e $3 \leq i_1 < \ldots < i_{k-1} \leq m-1$, com $j_1 < i_{k-1}$;

Por outro lado, se $l = 2$ teremos que considerar os polinômios

- $G = [y_1, y_{k+1}][x_1, y_2, \ldots, y_k][x_2, y_m]$;
- $G_2 = [y_1, y_k][x_1, y_2, \ldots, y_{k+1}][x_2, y_m]$;
- $G_{3;(j,m)} = [y_2, y_{j_1}][x_1, y_{i_1}, \ldots, y_{i_{k-2}}, y_1][x_2, y_m]$, onde $3 \leq j_1 \leq m-1$ e $3 \leq i_1 < \ldots < i_{k-2} \leq m-1$.

Observamos que para cada um dos polinômios anteriores, o último comutador é $[x_l, y_m]$. Portanto, o resultado final segue usando indução sobre $l = m - k$ e pela proposição anterior. Assim, concluímos o resultado. ■

Como uma consequência, podemos escrever:

$$\Gamma_{l,m}(I) = \Gamma_{l,m}(T_*(R)), \text{ para } m = l + k, \ l \geq 2, \ k \geq 2. \tag{5.27}$$

Lembramos que no caso de característica zero qualquer T_*-ideal na álgebra livre com involução é completamente determinado pelas componentes $*$-próprias multilineares. Então pelas Eq. (5.19), (5.20), (5.21), (5.23) e (5.27) desta seção obtemos a prova do Teorema 5.3.2, que era o principal objetivo deste capítulo.

Bibliografia

[1] ATIYAH, M. F.; MACDONALD, L. G.; *Introduction al Algebra Commutative.* Reverte, Barcelona, (1973).

[2] AMITSUR, S. A. *Identities in rings with involutions.* Israel J. Math. 7, 63–68 (1969).

[3] AMITSUR, S. A.; LEVITZKI, J.; *Minimal Identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 4 449-463 (1950).

[4] Azevedo, S. S. ;*Identidades Graduadas para Álgebras de Matrizes*, Tese de doutorado em matemática, IMECC/UNICAMP, São Paulo, (2003).

[5] BERELE, A. *Generic verbally prime algebras and their GK-dimensions*, Commun. Algebra 21(5), 1487-1504 (1993).

[6] BOKUT, L.A.; CHEN, Y.; CHEN, Y.; *Gröbner-Shirshov bases for Lie algebras over a commutative algebra**, Journal of Algebra, Volume 337 1 July, Pages 82–102 (2011).

[7] BOKUT, L.A.; CHEN, Y.;LI, Y.; *Lyndon–Shirshov basis and anti-commutative algebras*, Journal of Algebra, Volume 378, 15 March , Pages 173–183 (2013).

[8] BOKUT, L.A.; CHEN, Y.Q.; *Gröbner–Shirshov bases for Lie algebras,* after A.I. Shirshov, Southeast Asian Bull. Math. 31. 1057–1076 (2007).

[9] BRANDÃO JR., A. P.; KOSHLUKOV, P.; *Central polynomials for Z2-graded algebras and for algebras with involution.* J. Pure Appl. Algebra 208, no. 3, 877–886 (2007).

[10] BRANDÃO JR., A. P.; *Polinômios Centrais para Álgebras Graduadas*, Tese de doutorado em matemática, IMECC/UNICAMP, São Paulo, (2006).

[11] COLOMBO, J.; KOSHLUKOV, P.; *Identities with involution for the matrix algebra of order two in characteristic p*, Israel J. Math. 146, 337–355 (2005).

[12] COLOMBO, J.; KOSHLUKOV, P.; *Central Polynomial in the matrix of order two, Lin. Algebra*, Appl. 377, 53–67 (2004).

[13] COLOMBO, J.; *Identidades polinomiais na álgebra das matrizes de ordem 2*, Tese de doutorado em matemática, IMECC/UNICAMP, São Paulo, (2004).

[14] DE CONCINI, C.; PROCESI, C.; *A characterisic free approach to invariant theory*, Advances in Mathematics 21, 330-354 (1976).

[15] COSTA, N.L.; *Identidades Polinomiais e Polinômios Centrais para Álgebra de Grassmann*, Dissertação de mestrado em matemática, UFCG, Campina Grande (2012).

[16] DI VINCENZO, O. M.; KOSHLUKOV, P.; *On the $*$-polynomial identities of* $M_{1,1}(E)$, J. of Pure e Applied Algebra 215, 262-275 (2011).

[17] DRENSKY, V.; FORMANEK, E.; *Polynomial identity rings.* Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Birkhauser Verlag, Basel, (2004).

[18] DRENSKY, V.; GIAMBRUNO, A.; *Cocharacters, codimensions and Hilbert series of the polynomial identities for 2×2 matrices with involution*, Canad. J. Math 46, 718–733 (1994).

[19] DRENSKY, V.; *Free algebras and PI algebras*, Graduate course in Algebra. Springe-Velag PTE, LTD (1999).

[20] GIAMBRUNO, A. ; ZAICEV, M.; *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*, Math. Surveys Monogr, vol. 122, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2005).

[21] GIAMBRUNO, A. *Polynomial identities with involution and the hyperoctahedral group.* Group theory (Bressanone, 1986), 18–25, Lecture Notes in Math., 1281, Springer, Berlin (1987).

[22] GIAMBRUNO, A. ;KOSHLUKOV, P.; *On the identities of the grassmann algebras in characteristic $p > 0$*, Israel Journal of Mathematics 122, 305-316 (2001).

[23] GOUVEIA, T. A.; *PI-álgebras e crescimento polinomial da codimensões*, Dissertação de mestrado em matemática, DMA/UFV, Minas Gerais, (2009).

[24] GÓMEZ-ANBROSI,C.; SHESTAKOV, I.P.; *On the Lie structure of the skew elements of a simple superalgebra with superinvolution*, J. Algebra 208, 43–71 (1998).

[25] HOFFMAN, K.; KUNZA, R., *Álgebra Linear*, 2. ed., Prentice Hall (1971).

[26] KAPLANSKY, I. *I. Rings with a Polynomial Identity*, Bull. Amer. Math. Soc. 54, 496-500 (1948).

[27] KEMER, A.; *Ideals of identities of associative algebras*, in Translations of Mathematics Monographs, Vol. 87, Amer. Math. Soc., Providence RI (1991).

[28] KOSHLUKOV, P.; *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic* $p \neq 2$, J. Algebra 241, 410–434 (2001).

[29] KOSHLUKOV, P.; *Weak polynomial identities for the matrix algebra of order two*, J. Algebra 188, No. 2, 610–625 (1997).

[30] LEVCHENKO, D.V.; *Finite basis property of identities with involution for second-order matrix algebra* (em russo), Serdica 8, No. 1, 42–56 (1982).

[31] RAZMYSLOV, JU. P.; *Identities with trace in full matrix algebras over a field of characteristic zero.* (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 38 , 723–756 (1974).

[32] ROWEN, L.H.; *Polynomial Identities in Ring Theory*, Academic Press, New York (1980).

[33] SVIRIDOVA, I.; *Finitely generated algebras with involution and their identities*, Journal of Algebra, Volume 383, 1 June, Pages 173–183 (2013).

[34] VASILOVSKY, S.; *The basis of identities of a three-dimensional simple Lie algebra over an infinite field*, Algebra and Logic 28, No. 5, 355–368 (1989).

[35] ZHEVLAKOV, K. A.; SLINK'KO, A. M.; SHESTAKOV, I.P.; SHIRSHOV, A. I.; *Rings that are Nearly Associative*, Academic Press, Inc., 1982. J. London Math. Soc. **(2) 11**, 263-266 (1975).