

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# O Problema de Riemann para um Modelo de Injeção de Polímero em Meio Poroso com Efeito de Adsorção

por

Erivaldo Diniz de Lima<sup>†</sup>

sob orientação do

Prof. Dr. Aparecido Jesuíno de Souza

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

---

<sup>†</sup>Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

L732p Lima, Erivaldo Diniz de.  
O problema de Riemann para um modelo de injeção de polímero em um meio poroso com efeito de adsorção / Erivaldo Diniz de Lima. – Campina Grande, 2015.  
134 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2015.

"Orientação: Prof. Dr. Aparecido Jesuíno de Souza".  
Referências.

1. Leis de Conservação. 2. Problema de Riemann. 3. Injeção de Polímero. 4. Onda de Choque. 5. Onda de Rarefação. I. Souza, Aparecido Jesuíno de. II. Título.

CDU 517.518.12(043)

# O Problema de Riemann para um Modelo de Injeção de Polímero em um meio Poroso com efeito de Adsorção

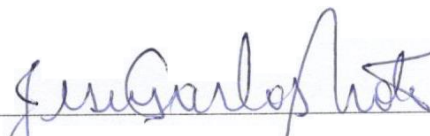
por


**Erivaldo Diniz de Lima**


Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Aprovada por:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota - UFG

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dra. Juliana Aragão Souza - UFPB

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Aparecido Jesuíno de Souza - UFCG  
Orientador

**Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática**

Agosto/2015

# Agradecimentos

Agradecer nem sempre é uma tarefa fácil já que muitos me ajudaram ao longo dos anos. Para não correr a injustiça de deixar alguém de fora, agradeço a todos que me ajudaram, de alguma forma, a conquistar o tão sonhado título de mestre.

Agradeço, em especial, a algumas pessoas que me incentivaram e me apoiaram nesta longa caminhada:

Primeiramente, a minha querida mãe, Dona Maria, que nos momentos mais difíceis ela estava lá para me apoiar e me ajudar.

Ao meu grande amigo, mentor e conselheiro, Luciano Martins, que sempre me deu forças e me incentivou, desde a graduação, a seguir os estudos.

Aos meus irmãos, Dário e Dailton, que me ajudaram e me apoiaram nos momentos difíceis.

Ao Professor Aparecido, que no momento mais difícil do mestrado ele me ajudou a seguir em frente. Agradeço também pela orientação, paciência e profissionalismo.

Aos meus amigos, Claudemir Fideles, José de Brito, Alex Ramos, Lara Gabrielle, Renilda Dias, Anaxsuel e Luciano Brito pelo convívio, amizade e as alegrias compartilhadas durante o período do curso. Em especial ao amigo Claudemir pelos conselhos e incentivos.

A minha “irmã” de orientação, Keytt Amaral, com quem compartilhei os estudos desde do início, das disciplinas à conclusão da dissertação. Obrigado por tudo.

Aos professores da pós-graduação, Brandão, Jefferson, Marco Aurélio, Horácio, Joseilson e Aparecido, pela paciência e pelo conhecimento proposto.

Aos professores Luis Gonzaga e Adriano Thiago pela amizade e pelos conselhos.

Aos Professores, Jesus e Juliana, por terem aceitado o convite de participar da banca e terem cedido parte do seu tempo para a avaliação desta dissertação.

Por último, a CAPES pelo apoio financeiro.

Meus sinceros agradecimentos a todos.

# Dedicatória

À minha mãe, Dona Maria Diniz,  
com muita satisfação.

# Resumo

Neste trabalho consideramos um sistema de leis de conservação proveniente da modelagem matemática de um escoamento bifásico unidimensional num meio poroso, preenchido de óleo e água com polímero dissolvido nela e levando em conta a adsorção de parte do polímero pela rocha. Usando a técnica das curvas de onda apresentamos a construção detalhada da solução do problema de Riemann para dados iniciais arbitrários no espaço de estados. Usamos a condição de entropia do perfil viscoso para as ondas de choque com salto na concentração do polímero e a condição de Oleinik-Liu para os choques com concentração constante do polímero e salto na saturação da água.

Palavras chave: Leis de Conservação. Problema de Riemann. Injeção de Polímero. Onda de Choque. Onda de Rarefação.

# Abstract

In this work we consider a system of conservation laws from the mathematical modeling of a one-dimensional two-phase flow in porous media, filled with oil and water with dissolved polymer in it and taking into account the adsorption of part of the polymer by the rock. Using the wave curves technique, we present a detailed construction of the Riemann problem solution for arbitrary initial data on the state space. We use the entropy condition of the viscous profile for the shock waves with jumps in the polymer concentration and Oleynik-Liu condition for the shocks with constant concentration of polymer and jumps on the water saturation.

Key words: Conservation laws. Riemann problem. Polymer injection. Shock wave. Rarefaction wave.

# Nomenclatura

$I$	– intervalo $[0, 1]$ .
$\Omega$	– espaço de estados.
$\rho_w$	– densidade da água.
$\rho_o$	– densidade do óleo.
$\rho_p$	– densidade do polímero.
$\rho$	– densidade da fase aquosa.
$\phi$	– porosidade da rocha.
$v$	– vazão da fase aquosa.
$v^T$	– vazão total.
$\mu$	– viscosidade da fase aquosa.
$\mu_o$	– viscosidade do óleo.
$p$	– pressão da fase aquosa.
$p_o$	– pressão da fase oleosa.
$p_c$	– pressão capilar.
$s_o$	– saturação do óleo.
$s$	– saturação da fase aquosa.
$c$	– concentração de polímero na fase aquosa.
$D$	– função profundidade.
$K$	– permeabilidade absoluta.
$k$	– permeabilidade relativa da fase aquosa.
$k_o$	– permeabilidade relativa da fase oleosa.
$g$	– aceleração da gravidade.
$f$	– função de fluxo.
$a$	– função de adsorção.
$h$	– derivada da função adsorção.
$r$	– razão de viscosidade da água pelo óleo.
$\lambda^s$	– velocidade característica da família $s$ .
$\lambda^c$	– velocidade característica da família $c$ .
$e^s$	– campo característico da família $s$ .
$e^c$	– campo característico da família $c$ .
$\mathcal{C}$	– curva de coincidência das velocidades características.
$\mathcal{I}$	– curva de inflexão em relação a família $s$ .
$\sigma$	– velocidade de choque.
$\sigma^s$	– velocidade de choque em relação a família $s$ .
$\sigma^c$	– velocidade de choque em relação a família $c$ .
$\mathcal{H}(u^L)$	– curva de Hugoniot por um estado $u^L$ .
$R_s$	– onda de rarefação da família $s$ .
$S_s$	– onda de choque da família $s$ .
$R_c$	– onda de rarefação da família $c$ .
$S_c$	– onda de choque da família $c$ .
$(RS)_s$	– onda composta da família $s$ .



# Conteúdo

<b>Introdução</b> . . . . .	6
<b>1 Obtenção do Modelo</b>	<b>9</b>
<b>2 Ondas Fundamentais e Condições de Entropia</b>	<b>14</b>
2.1 Propriedades das Funções de Fluxo e de Adsorção . . . . .	14
2.2 Velocidades e Campos Característicos . . . . .	16
2.3 Curva de Coincidência . . . . .	18
2.4 Soluções Contínuas . . . . .	20
2.4.1 Onda de Rarefação na Saturação da Fase Aquosa . . . . .	21
2.4.2 Onda de Rarefação na Concentração do Polímero . . . . .	21
2.5 Soluções Descontínuas . . . . .	24
2.5.1 Onda de Choque na Saturação da Fase Aquosa . . . . .	27
2.5.2 Onda de Choque na Concentração do Polímero . . . . .	27
<b>3 Solução do Problema de Riemann</b>	<b>36</b>
3.1 Compatibilidade de Velocidades de Ondas . . . . .	37
3.2 Construção da Solução . . . . .	43
3.2.1 Notações Convenientes e mais Algumas Definições . . . . .	44
3.2.2 Solução com Rarefação na Concentração do Polímero . . . . .	45
3.2.3 Solução com choque na Concentração do Polímero . . . . .	65
3.3 Exemplos . . . . .	71
<b>4 Conclusões e Continuações do Trabalho.</b>	<b>74</b>

<b>A Preliminares</b>	<b>76</b>
A.1 Sistema de Leis de Conservação no $\mathbb{R}^n$ . . . . .	76
A.2 Soluções Contínuas . . . . .	78
A.3 Soluções Descontínuas . . . . .	80
A.4 Onda Composta . . . . .	81
A.5 Condições de Entropia . . . . .	82
A.6 Figuras do Apêndice A . . . . .	85
<b>B A Equação de Buckley-Leverett</b>	<b>88</b>
B.1 Solução da Equação de Buckley-Leverett . . . . .	88
B.2 Figuras do Apêndice B . . . . .	94
<b>C Figuras</b>	<b>104</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>133</b>

# Introdução

Um reservatório petrolífero, utilizando suas condições naturais (diferença de pressão), tem seu fator de recuperação entre 5% e 15% do óleo existente [13], [18]. Devido à queda da pressão o poço perde capacidade de produção e com isso é necessário um método denominado secundário ou suplementar de recuperação que consiste em injeção de água. Através do poço injetor, a água é inserida fazendo com que a pressão do reservatório aumente e conseqüentemente o óleo contido lá seja deslocado para o poço produtor. No entanto, o óleo é bem mais viscoso que a água, com isso o percentual de óleo recuperado ainda é muito pequeno. Para a otimização da produção é necessário o uso de técnicas de extração mais elaboradas chamadas métodos avançados ou terciários. Estas técnicas avançadas devem ser desenvolvidas de forma que o custo para a extração seja o mais baixo possível e os riscos para o meio ambiente e para as pessoas envolvidas sejam também baixos. Um destes métodos avançados consiste em injetar polímero na água para que a diferença da viscosidade da água e do óleo diminua. Consideraremos uma situação em que o reservatório contenha água e óleo (situação conseqüente do método secundário), seguida de injeção de polímero diluído na água o qual parte dele pode ser absorvido pela rocha porosa [9].

O objetivo deste trabalho é abordar o problema de Riemann associado ao sistema de leis de conservação proveniente da modelagem do escoamento num meio poroso consistindo de duas fases móveis, óleo e água sendo que a fase água consiste de componente água e de polímero injetado refletindo o problema físico citado. Estaremos obtendo a solução global do problema de Riemann de um sistema de leis de conservação não-estritamente hiperbólico proveniente de um fenômeno físico prático.

A dedução deste modelo matemático provém da lei de Conservação de Massa para

cada componente e da lei de Darcy para cada fase, [14]. No modelo matemático, os fluidos e o material poroso são incompressíveis e a vazão total, que é a soma das vazões da fase aquosa e da fase oleosa, não muda quando o polímero é dissolvido na água, ou seja, a função de porosidade e as densidades de cada fase são constantes, e a vazão total permanece constante ao longo do tempo. Uma outra condição, como veremos no Capítulo 1, é que a pressão capilar entre as fases aquosa e oleosa é muito pequena e por isso será desprezada. A partir da lei de Conservação de Massa dos componentes e da lei de Darcy, seguida de uma mudança de variável adequada, obtemos o seguinte sistema de leis de conservação na forma adimensional

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial f(s, c)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial (sc + a(c))}{\partial t} + \frac{\partial (cf(s, c))}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

onde  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ ,  $s = s(x, t)$  e  $c = c(x, t)$  são, respectivamente, a saturação da fase aquosa e a concentração do polímero dissolvido na fase aquosa, por isto  $(s, c) \in I \times I$ , sendo  $I = [0, 1]$ . Em todo este trabalho,  $I$  sempre denotará o intervalo  $[0, 1]$ . O domínio  $I \times I$  é conhecido como *espaço de estados* e será denotado simplesmente por  $\Omega$ . Detalhes sobre as funções  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  serão descritos no Capítulo 2. Finalmente, o sistema (1) juntamente com a condição inicial

$$(s, c)(x, 0) = \begin{cases} (s^L, c^L), & \text{se } x < 0 \\ (s^R, c^R), & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (2)$$

onde os estados arbitrários  $(s^L, c^L)$  e  $(s^R, c^R)$  tem componentes constantes em  $I$ , constitui o problema de Riemann que iremos abordar nesta dissertação.

No Capítulo 1 iremos deduzir o Sistema (1) como discutido no parágrafo anterior.

No Capítulo 2 faremos uma análise qualitativa do Problema (1)-(2). Veremos que este é um sistema não-estritamente hiperbólico e que o subconjunto do espaço de estados  $\Omega$  onde seus autovalores coincidem é o gráfico de uma curva suave. Em seguida obteremos as curvas integrais, e conseqüentemente as ondas de rarefação associados ao Sistema (1). Por último, vamos discutir as ondas do tipo choque obtendo as chamadas *Curvas de Hugoniot* e analisando quais descontinuidades ao longo destas curvas de Hugoniot representam choques admissíveis segundo a condição de entropia

de viscosidade.

No Capítulo 3 será feita a construção da solução do Problema de Riemann (1)-(2). O capítulo será introduzido com a definição de compatibilidade de velocidades de onda. Na Seção 3.1 serão enunciados e demonstrados os lemas de compatibilidade. Na Seção 3.2 será feita a construção da solução do problema de Riemann proposto. Na subseção inicial serão feitas algumas definições importantes, uma delas é a de grupo de ondas. A construção da solução consiste de duas etapas, a primeira é obter a solução para o caso  $c^L < c^R$ . Para a solução deste caso o espaço de estados  $\Omega$  será dividido em regiões onde o estado  $u^L$  será fixado. Feito isto, fixado  $u^L$ , o espaço de estados sofrerá uma nova divisão onde o estado  $u^R$  também será fixado. Tendo os dois estados fixados começa o processo de construção da solução do problema. A segunda etapa consiste em obter a solução para o caso  $c^L > c^R$ . A metodologia usada será diferente. Fixaremos  $c^L$  e  $c^R$  e, feito isto, o intervalo  $I$ , para a saturação, será dividido em subintervalos onde o valor  $s^L$  será fixado. Fixado  $s^L$  o intervalo  $I$  sofrerá uma nova divisão onde o valor  $s^R$  também será fixado. Tendo os dois valores  $s^L$  e  $s^R$  fixados começa o processo de construção da solução do problema.

No Capítulo 4 faremos as conclusões finais e as perspectivas de trabalhos futuros.

No Apêndice A será descrita toda a teoria necessária para o desenvolvimento da solução global do problema de Riemann (1)-(2).

No Apêndice B será descrita a solução do problema de Riemann para a equação de Buckley-Leverett.

No Apêndice C encontram-se todas as figuras referidas ao longo do trabalho.

# Capítulo 1

## Obtenção do Modelo

Na dedução do modelo matemático que molda o escoamento vamos considerar algumas hipóteses simplificadoras.

- O meio poroso é homogêneo, os fluidos e o material poroso são incompressíveis. Isto significa que, a porosidade  $\phi$  e as densidades  $\rho_w$ ,  $\rho_o$  e  $\rho_p$  são constantes.
- As substâncias estão entre um poço injetor e um produtor, sendo considerado então um escoamento unidimensional de um para o outro, sem fontes ou sumidouros entre eles.
- A vazão total  $v^T$ , que é a soma das vazões da fase aquosa e fase oleosa, não muda quando o polímero é dissolvido na água, ou seja, o valor  $v^T$  permanece constante ao longo do tempo.
- A viscosidade da água é afetada pela concentração de polímero, por isto a viscosidade da água é dada como uma função da concentração  $c$  do polímero, isto é,  $\mu = \mu(c)$ .
- A pressão capilar  $p_c$  entre as fases é muito pequena, dessa forma ela será desprezada nas equações.

Sejam  $s = s(x, t)$  a saturação da fase aquosa,  $c = c(x, t)$  a concentração do polímero diluído na fase aquosa e  $v$  e  $v_o$  a vazão da fase aquosa e da fase oleosa. Com

as hipóteses citadas acima, a lei de conservação de massa de cada componente torna-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} \phi \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \phi \frac{\partial s_o}{\partial t} + \frac{\partial v_o}{\partial x} = 0, \\ \phi \frac{\partial (sc + a(c))}{\partial t} + \frac{\partial (vc)}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Vamos agora usar a lei de Darcy no Sistema (1.1). Esta lei para um fluxo bifásico unidimensional para cada fase (água e óleo) é expressa por

$$\begin{cases} v = -\lambda \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \frac{\partial D}{\partial x} \right), \\ v_o = -\lambda_o \left( \frac{\partial p_o}{\partial x} - \rho_o g \frac{\partial D}{\partial x} \right), \end{cases} \quad (1.2)$$

em que  $\lambda = \frac{Kk}{\mu}$ ,  $\lambda_o = \frac{Kk_o}{\mu_o}$ ,  $D$  é a função profundidade,  $\rho$  é a densidade da fase aquosa,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $p$  e  $p_o$  são as pressões das fases aquosa e oleosa, respectivamente,  $K$  é a permeabilidade absoluta da rocha,  $k = k(s)$  e  $k_o = k_o(s)$  são as permeabilidades relativas das fases aquosa e oleosa, e  $\mu = \mu(c)$  e  $\mu_o$  são as viscosidades da fase aquosa e da fase oleosa. Aqui  $\mu_o$  será constante.

Somando as duas primeiras equações de (1.1) e usando que  $s + s_o = 1$  obtemos que

$$\frac{\partial (v + v_o)}{\partial x} = 0.$$

Por isto temos que a vazão total

$$v^T = v + v_o \quad (1.3)$$

é constante em  $x$ . Como a vazão total também não muda em função do tempo, por hipótese, então  $v^T$  é constante.

Multiplicando a primeira equação de (1.2) por  $\lambda_o$  e a segunda por  $\lambda$  temos,

$$\lambda_o v = \lambda_o \lambda \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \frac{\partial D}{\partial x} \right), \quad (1.4)$$

$$\lambda v_o = \lambda \lambda_o \left( \frac{\partial p_o}{\partial x} - \rho_o g \frac{\partial D}{\partial x} \right). \quad (1.5)$$

Subtraindo (1.4) de (1.5) obtemos

$$\lambda_o v - \lambda v_o = \lambda \lambda_o \left( \left( \frac{\partial p_o}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \right) - (\rho_o - \rho) g \frac{\partial D}{\partial x} \right). \quad (1.6)$$

Utilizando (1.3) na equação (1.6) e como a pressão capilar é definida por  $p_c = p_o - p$  obtemos a equação

$$(\lambda_o + \lambda) v - \lambda v^T = \lambda \lambda_o \left( \frac{\partial p_c}{\partial x} - (\rho_o - \rho) g \frac{\partial D}{\partial x} \right). \quad (1.7)$$

Dividindo a equação (1.7) por  $\lambda_o + \lambda$  e em seguida reorganizando os termos, obtemos a equação

$$v^T f = \left( -\frac{\lambda \lambda_o}{\lambda + \lambda_o} \right) \left( \frac{\partial p_c}{\partial x} - (\rho_o - \rho) g \frac{\partial D}{\partial x} \right) + v, \quad (1.8)$$

onde,

$$f = f(s, c) = \frac{\lambda(s, c)}{\lambda(s, c) + \lambda_o(s)}.$$

Das expressões de  $\lambda$  e  $\lambda_o$  segue que

$$f(s, c) = \frac{k(s)}{k(s) + r(c) k_o(s)}, \quad r(c) = \frac{\mu(c)}{\mu_o} \quad (1.9)$$

e

$$\frac{\lambda \lambda_o}{\lambda + \lambda_o} = \frac{\lambda(s, c) \lambda_o(s)}{\lambda(s, c) + \lambda_o(s)} = K \frac{k(s) k_o(s)}{k(s) \mu_o + \mu(c) k_o(s)}.$$

A partir de agora vamos usar a hipótese de que a pressão capilar é muito pequena e por isto vamos omiti-la da Equação (1.8) e vamos também desconsiderar a gravidade. Com isto a Equação (1.8) fica reduzida à

$$v^T f = v. \quad (1.10)$$



Substituindo  $v$  dada em (1.10) na primeira e terceira equações de (1.1) e lembrando que  $v^T$  é constante obtemos

$$\begin{cases} \phi \frac{\partial s}{\partial t} + v^T \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \phi \frac{\partial (sc + a(c))}{\partial t} + v^T \frac{\partial (fc)}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Indicado por  $L$  o comprimento do meio poroso, então a mudança de coordenadas

$$\tilde{x} = \frac{x}{L} \quad \text{e} \quad \tilde{t} = \frac{v^T t}{\phi L},$$

onde  $\tilde{x}$  e  $\tilde{t}$  são, respectivamente, as variáveis adimensionais para o espaço e para o tempo, transforma o Sistema (1.11) no sistema de duas leis de conservação

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial f(s, c)}{\partial \tilde{x}} = 0 \\ \frac{\partial (sc + a(c))}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial (cf(s, c))}{\partial \tilde{x}} = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Para simplificar a notação vamos voltar a usar simplesmente  $x$  e  $t$ , respectivamente, no lugar de  $\tilde{x}$  e  $\tilde{t}$ . Logo, o Sistema (1.12) torna-se o Sistema (1) apresentado na introdução.

Vamos considerar o modelo de Corey quadrático para as funções de permeabilidade relativas das fases como citado em [17] em que

$$k(s) = s^2 \quad \text{e} \quad k_o(s) = (1 - s)^2. \quad (1.13)$$

Além disto vamos considerar a razão da viscosidade da água pelo óleo da forma

$$r(c) = \alpha_1 + \alpha_2 c, \quad (1.14)$$

onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são constantes positivas.

Substituindo as expressões de (1.13) em (1.9), a função de fluxo  $f$  é expressa por

$$f(s, c) = \frac{s^2}{s^2 + r(c)(1 - s)^2}. \quad (1.15)$$

Quanto a função  $a$  que representa a adsorção do polímero pela rocha a mesma será discutida no Capítulo 2.

Observe que, se  $c$  é uma constante, então o Sistema (1) é reduzido à equação de Buckley-Leverett

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial f(s, c)}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

com  $s = s(x, t)$  e a função de fluxo  $f(s, c)$ .

No Anexo B recapitulamos como obter a solução do problema de Riemann para a equação de Buckley-Leverett que será usada para a descrição da solução do Problema de Riemann (1)-(2).

## Capítulo 2

# Ondas Fundamentais e Condições de Entropia

Neste capítulo vamos analisar algumas propriedades do Problema (1)-(2), tais como: a sua hiperbolicidade, a existência de uma curva de coincidência dos autovalores, as ondas de rarefação, as soluções descontínuas (ou ondas de choque, quando admissíveis) e por último aquelas soluções descontínuas que satisfazem a condição de entropia de viscosidade.

### 2.1 Propriedades das Funções de Fluxo e de Adsorção

A função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dada em (1.15) satisfaz as seguintes propriedades as quais são verificadas diretamente:

- (i)  $f(0, c) \equiv 0$ ,  $f(1, c) \equiv 1$ ,  $\forall c \in I$ ;
- (ii)  $\frac{\partial f}{\partial s}(s, c) > 0$ ,  $\forall s \in (0, 1)$  e  $\forall c \in I$ , pois

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s, c) = \frac{2sr(c)(1-s)}{(s^2 + r(c)(1-s)^2)^2} > 0;$$

- (iii)  $\frac{\partial f}{\partial c}(s, c) < 0$ ,  $\forall s \in (0, 1)$  e  $\forall c \in (0, 1)$ , pois

$$\frac{\partial f}{\partial c}(s, c) = -\frac{r'(c)s^2(1-s)^2}{(s^2 + r(c)(1-s)^2)^2} < 0;$$

- (iv) Para cada  $c \in I$ , o gráfico da função  $f(\cdot, c)$  tem um único ponto de inflexão  $(s^I, f(s^I, c))$  com  $s^I = s^I(c) \in (0, 1)$  tal que  $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(s, c) > 0$  para  $s \in (0, s^I)$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(s, c) < 0$ , para  $s \in (s^I, 1)$ . De fato,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(s, c) = \frac{2r(c) [(r(c) + 1)(2s^3 - 3s^2) + r(c)]}{(s^2 + r(c)(1 - s^2))^3}.$$

Para obtermos os pontos de inflexão do gráfico  $f$  para cada  $c$  fixo, analisaremos a equação  $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(s, c) = 0$ . Com isso obtemos o polinômio em  $s$

$$(r(c) + 1)(2s^3 - 3s^2) + r(c) = 0.$$

Dividindo esta expressão por  $-(r(c) + 1)$  tem-se

$$-2s^3 + 3s^2 - \left( \frac{r(c)}{r(c) + 1} \right) = 0.$$

Definimos a função polinomial  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$P(s) = -2s^3 + 3s^2 - \left( \frac{r(c)}{r(c) + 1} \right).$$

Sendo  $P$  uma função polinomial do terceiro grau em  $s$  então pelo Teorema Fundamental da Álgebra,  $P$  possui três raízes com pelo menos uma delas real. Sabendo que

$$\frac{dP}{ds}(s) = -6s^2 + 6s,$$

então os pontos críticos de  $P$  são  $s = 0$  e  $s = 1$ . Como se trata de uma função polinomial do terceiro grau estes valores são pontos de máximo ou mínimo local de  $P$ . Como

$$P(0) = - \left( \frac{r(c)}{r(c) + 1} \right) < 0$$

e

$$P(1) = 1 - \left( \frac{r(c)}{r(c) + 1} \right) > 0$$

então  $(0, P(0))$  é ponto de mínimo local e  $(1, P(1))$  é ponto de máximo local.

Então, as três raízes de  $P$  são reais e distintas assim distribuídas, uma no intervalo  $(-\infty, 0)$ , outra no intervalo  $(0, 1)$  e a outra em  $(1, +\infty)$ . Portanto, para cada  $c \in [0, 1]$  o gráfico da função  $f(\cdot, c)$  possui um único ponto de inflexão  $(s^I, f(s^I, c))$  com  $s^I$  no intervalo  $(0, 1)$ .

Os poros do reservatório adsorvem as partículas do polímero desde o início do processo de injeção da substância. Quanto maior a concentração de polímero no reservatório, menor a capacidade da rocha porosa adsorver as partículas. Por isso, função  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ , que modela a adsorção do polímero pela rocha, é escolhida de tal forma a satisfazer as seguintes propriedades:

- (i)  $a(0) = 0$ ;
- (ii)  $h(c) = \frac{da}{dc}(c) > 0$ , para  $c \in (0, 1)$ ;
- (iii)  $\frac{dh}{dc}(c) = \frac{d^2a}{dc^2}(c) < 0$ , para  $c \in (0, 1)$ .

Para efeito das figuras e possíveis contas explícitas vamos escolher a função  $a$  generalizada, proposta em [9], como

$$a(c) = \frac{\beta_1 c}{\beta_2 + \beta_3 c} \quad (2.1)$$

onde  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$  são constantes positivas escolhidas convenientemente. Neste caso, a função  $a(c)$  satisfaz as condições (i), (ii) e (iii).

Escolhendo os valores  $\alpha_1 = 1,75$  e  $\alpha_2 = 0,425$ , a Figura C.1 mostra os gráficos da função  $f$  para dois valores de  $c$ ,  $c = 0,1$  e  $c = 0,9$ . Já a Figura C.2 mostra o gráfico da função  $a$ , para  $\beta_1 = 0,2$ ,  $\beta_2 = 1$  e  $\beta_3 = 100$ .

## 2.2 Velocidades e Campos Característicos

Vamos reescrever o Sistema (1) na forma matricial. Considere as seguintes funções  $G, F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  definidas por

$$G(s, c) = (s, sc + a(c)) \quad \text{e} \quad F(s, c) = (f(s, c), cf(s, c)). \quad (2.2)$$

Sendo  $u = (s, c)$ , então o sistema (1) é escrito na forma

$$\frac{\partial [G(u)]}{\partial t} + \frac{\partial [F(u)]}{\partial x} = 0. \quad (2.3)$$

Calculando as matrizes jacobianas temos

$$dG(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & s + h(c) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad dF(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial c} \\ c \frac{\partial f}{\partial s} & f + c \frac{\partial f}{\partial c} \end{pmatrix},$$

onde  $h(c) = \frac{da}{dc}(c)$ . Assim,  $dG(u)$  é inversível porque  $s + h(c) > 0$ .

Para soluções suaves o Problema de Riemann (1)-(2) pode ser escrito

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} u^L, & \text{se } x < 0 \\ u^R, & \text{se } x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (2.4)$$

onde  $u = (s, c)$ ,

$$A(u) = [dG(u)]^{-1} dF(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial c} \\ 0 & \frac{f}{s+h(c)} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

$u^L = (s^L, c^L)$  e  $u^R = (s^R, c^R)$ .

Os autovalores da matriz  $A(u)$  são

$$\lambda^s = \lambda^s(s, c) = \frac{\partial f}{\partial s}(s, c) \quad \text{e} \quad \lambda^c = \lambda^c(s, c) = \frac{f(s, c)}{s + h(c)}.$$

Estes autovalores são chamados de *velocidades características*. Omitimos as variáveis independentes  $(s, c)$  das velocidades características para simplificar a notação.

Como acabamos de ver, a matriz  $A(u)$  possui duas velocidades características. Cada uma delas determina a uma *família característica*  $i \in \{s, c\}$ .

Uma interpretação geométrica para  $\lambda^s$  e  $\lambda^c$  é que  $\lambda^s(s, c)$  representa a inclinação da reta tangente ao gráfico da função  $f(\cdot, c)$ , para  $c$  fixo, no ponto  $(s, f(s, c))$ , enquanto  $\lambda^c(s, c)$  representa a inclinação da reta secante pelos pontos  $(s, f(s, c))$  e  $(-h(c), 0)$ .

Sejam  $e^s$  e  $e^c$  os autovetores correspondentes a  $\lambda^s$  e  $\lambda^c$ , respectivamente.

Para  $\lambda^s$  temos que  $e^s = (1, 0)$ .

Para  $\lambda^c$  temos que  $e^c = \left(\frac{\partial f}{\partial c}, \lambda^c - \lambda^s\right)$ , para  $s \in (0, 1)$ . Para  $s = 1$  temos que  $e^c = (0, 1)$ . Para  $s = 0$  a matriz  $(A - \lambda^c I_d)$  é a matriz nula, ( $I_d$  é a matriz identidade de ordem 2). Daí, qualquer vetor de  $\mathbb{R}^2$  é autovetor de  $\lambda^c$ , em particular o vetor  $e^c = (0, 1)$ . Resumindo,  $e^c = (0, 1)$  para  $s = 0$  e  $s = 1$  e  $e^c = \left(\frac{\partial f}{\partial c}, \lambda^c - \lambda^s\right)$  para todo  $s \in (0, 1)$ . Estes autovetores são chamados de *campos característicos*.

## 2.3 Curva de Coincidência

Da interpretação geométrica de  $\lambda^s$  e de  $\lambda^c$ , analisando a Figura C.3, podemos concluir que existe uma curva onde os autovalores  $\lambda^s$  e  $\lambda^c$  coincidem. Com isso enunciaremos o seguinte lema.

**Lema 2.1** *Para cada  $c \in I$  fixo, existe, no máximo, um ponto  $s^C = s^C(c) \in I$  tal que  $\lambda^s(s^C, c) = \lambda^c(s^C, c)$ , isto é, tal que*

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s^C, c) = \frac{f(s^C, c)}{s^C + h(c)}.$$

*Demonstração.* A demonstração é obtida facilmente por interpretação geométrica. ■

O Lema (2.1) exprime uma condição para que a reta tangente ao gráfico de  $f$  de inclinação  $\frac{\partial f}{\partial s}(s^C, c)$ , pelo ponto  $(s^C, f(s^C, c))$ , seja coincidente com a reta cuja inclinação é  $f(s^C, c) / (s^C + h(c))$ , que passa pelos pontos  $(s^C, c)$  e  $(-h(c), 0)$ . Veja a Figura C.3.

Veja a seguir que existe a coincidência para o nível  $c = 0$ . Fixe  $c_0 = 0$ . Calculando explicitamente vemos que existe  $s_0^C = s^C(0)$  tal que o Lema 2.1 é satisfeito.

Sabendo que

$$f(s_0^C, 0) = \frac{(s_0^C)^2}{(s_0^C)^2 + \alpha_1(1 - s_0^C)^2}$$

e tomando a função de adsorção na forma (2.1), temos

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s_0^C, 0) = \frac{2s_0^C\alpha_1(1 - s_0^C)}{\left[(s_0^C)^2 + \alpha_1(1 - s_0^C)^2\right]^2}$$

e

$$h(0) = \beta_1,$$

com  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  constantes positivas. Para o ponto  $(s_0^C, 0)$  a expressão do Lema (2.1) é escrita na forma

$$\frac{2s_0^C \alpha_1 (1 - s_0^C)}{\left[ (s_0^C)^2 + \alpha_1 (1 - s_0^C)^2 \right]^2} = \frac{(s_0^C)^2}{(s_0^C + \beta_1) \left[ (s_0^C)^2 + \alpha_1 (1 - s_0^C)^2 \right]}. \quad (2.6)$$

Simplificando (2.6) obtemos

$$\frac{2\alpha_1 (1 - s_0^C)}{(s_0^C)^2 + \alpha_1 (1 - s_0^C)^2} = \frac{s_0^C}{(s_0^C + \beta_1)}. \quad (2.7)$$

Utilizando o Maple para resolver (2.7) na variável  $s_0^C$  obtemos os valores

$$\begin{aligned} s_0^C &= \frac{-\alpha_1 \beta_1 + \sqrt{\alpha_1^2 \beta_1^2 + 2\alpha_1^2 \beta_1 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1 \beta_1 - \alpha_1} + 2\alpha_1}{3\alpha_1 + 1}, \\ s_0^C &= 0, \\ s_0^C &= -\frac{\alpha_1 \beta_1 + \sqrt{\alpha_1^2 \beta_1^2 + 2\alpha_1^2 \beta_1 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1 \beta_1 - \alpha_1} - 2\alpha_1}{3\alpha_1 + 1}. \end{aligned}$$

O valor  $s_0^C$  existe, desde que  $\alpha_1^2 \beta_1^2 + 2\alpha_1^2 \beta_1 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1 \beta_1 - \alpha_1 > 0$ .

A seguir, mostraremos que o conjunto de pontos  $(s^C(c), c)$ , para cada  $c \in I$ , é uma curva suave contida no espaço de estados  $\Omega$ .

Definimos  $\mathcal{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\mathcal{F}(s, c) = \lambda^s(s, c) - \lambda^c(s, c).$$

Então,  $\mathcal{F}$  é uma função de classe  $C^1$  e

$$\mathcal{F}(s_0^C, 0) = 0.$$

Além disso,

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s} = \frac{\partial \lambda^s}{\partial s} - \frac{\partial \lambda^c}{\partial s} = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - \frac{(s+h) \frac{\partial f}{\partial s} - f}{(s+h)^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - \frac{\lambda^s - \lambda^c}{(s+h)}.$$

Dessa forma,

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}(s_0^C, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(s_0^C, 0) \neq 0.$$

Isto ocorre porque  $s_0^C$  não coincide com o ponto de inflexão  $s^I$ , veja a Figura C.4.



Então, do Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança  $V$  de  $(s_0^C, 0)$ ,  $\delta > 0$ , uma vizinhança

$$V_\delta = \{c \in [0, 1) : 0 \leq c < \delta\}$$

e uma única função  $\varphi : V_\delta \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tal que  $(\varphi(c), c) \in V$  e  $\mathcal{F}(\varphi(c), c) = 0$  para todo  $c \in V_\delta$ . Além disso,

$$\varphi'(c) = -\frac{\mathcal{F}_c}{\mathcal{F}_s}, \quad \forall c \in V_\delta.$$

Isto significa que para todo  $c \in V_\delta$  existe  $s^C \in I$  tal que  $s^C = s^C(c)$  com (2.1) satisfeito. Como  $\mathcal{F}_s(s^C(c), c) \neq 0, \forall (s^C(c), c)$ , segue que  $V_\delta$  pode ser prolongada até  $\delta = 1$ . Chamemos o conjunto  $\mathcal{C} = \text{Graf}(\varphi)$  de *Conjunto Coincidência*, isto é,

$$\mathcal{C} = \{(s, c) \in \Omega : c \in I \text{ e } s = s^C(c)\} = \{(s, c) \in \Omega : \lambda^s = \lambda^c\}.$$

A curva  $\mathcal{C}$  divide o espaço de estados  $\Omega$  em duas regiões. Denotaremos estas regiões por

$$\Omega_1 = \{(s, c) \in \Omega : 0 \leq s < s^C(c)\} \quad \text{e} \quad \Omega_2 = \{(s, c) \in \Omega : s^C(c) < s \leq 1\}$$

ou

$$\Omega_1 = \{(s, c) \in \Omega : \lambda^c < \lambda^s\} \quad \text{e} \quad \Omega_2 = \{(s, c) \in \Omega : \lambda^c > \lambda^s\}.$$

Veja a Figura C.5.

## 2.4 Soluções Contínuas

O objetivo desta seção é determinar as curvas integrais dos campos característicos  $e^s$  e  $e^c$  e as ondas de rarefação. Já que a matriz (2.5) possui duas velocidades características  $\lambda^s$  e  $\lambda^c$ , então existem duas possibilidades de ondas de rarefação; uma relacionada a família  $s$  chamada de  $s$ -rarefação, e a outra relacionada família  $c$  chamada  $c$ -rarefação.

A definição de uma onda  $i$ -rarefação e curva de  $i$ -rarefação encontram-se no Apêndice A.

### 2.4.1 Onda de Rarefação na Saturação da Fase Aquosa

Para  $\lambda^s(s, c) = \frac{\partial f}{\partial s}(s, c)$  e  $e^s = (1, 0)$ , as curvas integrais associadas são retas horizontais, isto é,  $c$  é constante. Neste caso, para que haja uma onda  $s$ -rarefação de  $(s^L, c^L)$  para  $(s^R, c^R)$  é obrigatório que  $c^L$  e  $c^R$  coincidam e que  $\lambda^s(s, c^L)$  seja crescente quando  $s$  varia de  $s^L$  para  $s^R$ . Das propriedades (i)-(iv) da função de fluxo  $f$  e do seu gráfico, para cada valor de  $c$  fixo, temos que  $\lambda^s(s, c^L)$  é crescente de  $\lambda^s(s^L, c^L)$  para  $\lambda^s(s^R, c^R)$  se  $0 \leq s^L < s^R \leq s^I(c^L)$  ou se  $s^I(c^L) \leq s^R < s^L \leq 1$ , pois para  $0 \leq s \leq s^I(c^L)$  o gráfico de  $f$  é côncavo para baixo e para  $s^C(c^L) \leq s \leq 1$  o gráfico é côncavo para cima, Ver Figura C.4 substituindo  $(s_0, c_0)$  por  $(s^L, c^L)$ .

A curva  $s$ -inflexão (ou simplesmente *curva de inflexão*), denotada por  $\mathcal{I}$ , (nos gráficos feitos no Maple a curva de inflexão é denotada por  $\mathfrak{J}$ ) é definida por  $\nabla \lambda^s \cdot e^s = 0$ . Após alguns cálculos, obtemos que

$$\mathcal{I} = \{(s, c) \in \Omega : -2s^3 + 3s^2 - \tilde{r}(c) = 0\}, \quad \text{onde} \quad \tilde{r}(c) = \frac{r(c)}{r(c) + 1}. \quad (2.8)$$

Lembramos que se  $(s^L, c^L)$  e  $(s^R, c^R)$  estiverem em lados opostos da curva de inflexão, então não é possível obter uma onda  $s$ -rarefação de  $(s^L, c^L)$  para  $(s^R, c^R)$  porque a família característica  $s$  não é genuinamente não-linear, isto é, o autovalor  $\lambda^s(s, c^L)$  não é monótono em  $s$ . Veja a Figura C.6.

### 2.4.2 Onda de Rarefação na Concentração do Polímero

Considere a velocidade característica  $\lambda^c(s, c) = \frac{f(s, c)}{s + h(c)}$  e seu campo característico correspondente  $e^c = (\frac{\partial f}{\partial c}, \lambda^c - \lambda^s)$  para  $0 < s < 1$  e  $e^c = (0, 1)$  para  $s = 0$  ou  $s = 1$ . Há três casos a serem considerados: quando  $0 < s < 1$ ,  $s = 0$  ou  $s = 1$ . Primeiramente, vamos analisar o caso  $0 < s < 1$ .

As curvas integrais do campo característico  $e^c$  satisfazem o sistema de EDO's:

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial c} \\ \frac{\partial c}{\partial \xi} = \lambda^c - \lambda^s. \end{cases}$$

Logo, para  $\lambda^c \neq \lambda^s$  segue que

$$\frac{ds}{\partial f / \partial c} = \frac{dc}{\lambda^c - \lambda^s}. \quad (2.9)$$

De (2.9) obtemos que

$$\frac{\partial f}{\partial c} \frac{dc}{ds} = \lambda^c - \lambda^s, \quad (2.10)$$

Precisamos determinar como as curvas integrais  $c = c(s)$  se comportam no espaço de estados  $\Omega$ . Primeiramente, observe que como  $\frac{\partial f}{\partial c} < 0$  temos  $\frac{dc}{ds} > 0$  na região  $\Omega_1$ , da Figura C.5, onde  $\lambda^c < \lambda^s$ , e que  $\frac{dc}{ds} < 0$  na região  $\Omega_2$  onde  $\lambda^c > \lambda^s$ . Além disto,  $\frac{dc}{ds} = 0$  na curva de coincidência  $\mathcal{C}$ . Isto significa que, ao longo das curvas integrais,  $c(s)$  é crescente na região  $\Omega_1$  e decrescente na região  $\Omega_2$  com valor máximo sobre a curva de coincidência. Daí, a concavidade da curva  $c = c(s)$  é voltada para baixo ao longo da curva de coincidência  $\mathcal{C}$ , isto é,  $\frac{d^2c}{ds^2} < 0$ . Um outro fato a ser observado é que, para todo  $s \in I$ , a derivada  $\frac{dc}{ds}$  existe para todo  $s \in I$ , isto é, não existe reta tangente a curva  $c = c(s)$  onde esta seja perpendicular ao eixo  $s$ . Isto significa que, para cada  $s$  existe uma única imagem  $c(s)$ . Em outras palavras, o gráfico da curva  $c$  não muda de sentido em nenhum  $s \in I$ . Veja a Figura C.7.

A equação (2.10) permite obter a posição relativa entre a curva de coincidência  $\mathcal{C}$  e a curva  $c$ -inflexão definida no Apêndice A. Para isto derivemos a equação (2.10) na variável  $s$ . Seja  $g(s) = \lambda^c(s, c(s))$ . Então,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial c} \frac{dc}{ds} + \frac{\partial f}{\partial c} \frac{d^2c}{ds^2} = \frac{dg}{ds} - \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, \quad (2.11)$$

onde,

$$\frac{dg}{ds} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial c} \frac{dc}{ds}\right)(s+h) - f\left(1 + \frac{dh}{dc} \frac{dc}{ds}\right)}{(s+h)^2}.$$

Daí, para  $(s, c(s))$  ao longo da curva de coincidência  $\mathcal{C}$  e como  $\frac{dc}{ds} = 0$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds}(s) &= \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial s}(s, c(s))\right][s+h(c(s))] - f(s, c(s))}{(s+h(c(s)))^2} \\ &= \frac{\lambda^s(s, c(s)) - \lambda^c(s, c(s))}{s+h(c(s))} = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Portanto, a curva  $c$ -inflexão, definida no Apêndice A, coincide com a curva de coincidência  $\mathcal{C}$  das velocidades características. Considerando (2.11) restrito a esta temos que

$$\frac{\partial f}{\partial c} \frac{d^2 c}{ds^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$$

e como  $\frac{d^2 c}{ds^2} < 0$  ao longo da curva de coincidência e como  $\frac{\partial f}{\partial c} < 0$ , segue que  $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} < 0$  ao longo da curva de coincidência  $\mathcal{C}$ . Analisando o gráfico de  $f(\cdot, c)$ , vemos que tal curva de inflexão  $\mathcal{I}$  está a esquerda da curva de coincidência  $\mathcal{C}$  como ilustrado na Figura C.8.

A conclusão até aqui é que se  $u^L$  e  $u^R$  estiverem em regiões distintas, um em  $\Omega_1$  e o outro em  $\Omega_2$ , não é possível obter uma onda  $c$ -rarefação de  $u^L$  para  $u^R$  porque a curva integral interceptará a curva de coincidência  $\mathcal{C}$  e com isto  $\lambda^c$  não será crescente de  $\lambda^c(u^L)$  para  $\lambda^c(u^R)$ . Com isso só irá existir uma onda  $c$ -rarefação de  $u^L$  para  $u^R$  se  $u^L$  e  $u^R$  estiverem na mesma região  $\Omega_1$  ou  $\Omega_2$ . Veja a Figura C.7.

Vejamos o caso em que  $s = 1$ . Para este valor de  $s$  o autovetor associado à  $\lambda^c(1, c)$  é  $e^c = (0, 1)$ . Portanto, se  $s^L = 1$  a curva integral por  $(s^L, c^L)$  é a reta vertical  $s = 1$ . Neste caso, para que haja uma onda de rarefação de  $u^L$  para  $u^R$  é necessário que

$$\lambda^c(1, c) = \frac{1}{1 + h(c)}$$

seja crescente de  $c^L$  para  $c^R$ . Como  $h(c)$  é uma função decrescente de  $c$ , então  $\lambda^c(1, c)$  é uma função crescente. Logo, para que exista tal onda  $c$ -rarefação, é necessário que  $c^R > c^L$ .

Por último, vejamos o caso em que  $s = 0$ . Temos  $\lambda^c \equiv 0$ . Logo, se  $s^L = 0$  e  $s^R = 0$  teremos uma velocidade característica  $\lambda^c$  identicamente nula para todo  $c$  entre  $c^L$  e  $c^R$ . Observe que, ao longo da reta  $s = 0$  a solução do Problema de Riemann não faz nenhum sentido físico já que o reservatório não possui fase aquosa, por isso não pode haver concentração do polímero em relação a esta fase dentro do reservatório. Porém, do ponto de vista matemático, esta situação é aceitável.

## 2.5 Soluções Descontínuas

Nesta seção iremos considerar soluções descontínuas do Sistema (1) e a condição de entropia adequada para a unicidade da solução. Quando a solução descontínua é admissível, segundo alguma condição de entropia, elas são chamadas de ondas de choque. Queremos obter soluções fracas descontínuas para os estados  $u^L = (s^L, c^L)$  e  $u^R = (s^R, c^R)$  da forma

$$u(x, t) = \begin{cases} u^L, & \text{se } \frac{x}{t} < \sigma \\ u^R, & \text{se } \frac{x}{t} > \sigma, \end{cases} \quad (2.13)$$

onde  $u = (s, c)$ , e  $\sigma$  é a velocidade de propagação do choque sob a relação de Rankine-Hugoniot

$$\sigma [G(u^R) - G(u^L)] = F(u^R) - F(u^L), \quad (2.14)$$

em que  $G, F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  são as funções definidas em (2.2). Uma solução do tipo choque é uma descontinuidade da forma (2.13) que satisfaz alguma condição de entropia.

**Definição 2.1** *Fixe um estado  $u^0 \in \Omega$ . A curva de Hugoniot por  $u^0$ , denotada por  $\mathcal{H}(u^0)$ , é o conjunto dos estados  $u \in \Omega$  tais que exista  $\sigma \in \mathbb{R}$  satisfazendo a equação (2.14) para  $u^L = u^0$  e  $u^R = u$ .*

Iremos considerar apenas as soluções fisicamente relevantes do Problema de Riemann (1)-(2). Para isto, iremos exigir que uma solução descontínua satisfaça alguma *Condição de Entropia*. Naturalmente, por ser a mais conhecida, a primeira condição de entropia a ser testada é a *condição de Lax*. Porém, esta condição não será útil porque o sistema não é estritamente hiperbólico. A onda de choque possui duas famílias, uma relacionada a família  $s$  e outra relacionada a família  $c$ . Temos a onda de  $s$ -choque, quando  $c^L = c^R$  e a onda  $c$ -choque, quando  $c^L \neq c^R$ . Para a onda  $s$ -choque, a condição de que iremos utilizar é a *Condição de Olenik-Liu* [11], [12], [15] e para a onda  $c$ -choque é a *Condição de Viscosidade* [15]. Mais adiante veremos cada caso com mais detalhes.

Vamos agora obter duas expressões específicas para  $\sigma$  em função dos estados  $(s^L, c^L)$  e  $(s^R, c^R)$  fixados. Escrevendo a relação de Rankine-Hugoniot (2.14) obtemos

o sistema

$$\begin{cases} \sigma (s^R - s^L) = f (s^R, c^R) - f (s^L, c^L), \\ \sigma (s^R c^R + a (c^R) - s^L c^L + a (c^L)) = c^R f (s^R, c^R) - c^L f (s^L, c^L). \end{cases} \quad (2.15)$$

Note que se  $c^L = c^R$  então a segunda equação de (2.15) é múltipla da primeira, com isso o Sistema (2.15) torna-se a relação de Rankine-Hugoniot para o caso da equação de Buckley-Leverett. Dessa forma, a velocidade de choque em relação a família  $s$  é definida por

$$\sigma^s (u^L, u^R) = \frac{f (s^L, c^L) - f (s^R, c^R)}{s^L - s^R}. \quad (2.16)$$

Antes de estudar estas ondas vamos obter algumas equações auxiliares. Vamos nos restringir ao caso  $c \neq c^L$ . Substituindo  $f (s^R, c^R)$  da primeira equação do Sistema (2.15) na segunda equação do mesmo sistema obtemos,

$$c^R [\sigma (s^R - s^L) + f (s^L, c^L)] - c^L f (s^L, c^L) = \sigma (s^R c^R + a (c^R) - s^L c^L - a (c^L)).$$

Daí, após algumas manipulações algébricas obtemos que

$$f (s^L, c^L) = \sigma s^L + \sigma \left( \frac{a (c^R) - a (c^L)}{c^R - c^L} \right). \quad (2.17)$$

Da expressão em (2.17) definimos convenientemente a seguinte função  $h_L : I \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$h_L (c) = \begin{cases} \frac{a (c) - a (c^L)}{c - c^L}, & \text{se } c \neq c^L \\ h (c^L), & \text{se } c = c^L. \end{cases} \quad (2.18)$$

Substituindo a função  $h_L$  em (2.17) aplicada no ponto  $c^R$ , obtemos

$$\sigma = \frac{f (s^L, c^L)}{s^L + h_L (c^R)}. \quad (2.19)$$

Podemos também obter a velocidade  $\sigma$  por uma outra fórmula. Para isto, note que

$$\sigma (s^R + h_L (c^R)) = \sigma (s^R - s^L + s^L + h_L (c^R)) = \sigma (s^R - s^L) + \sigma (s^L + h_L (c^R)).$$

Daí, da primeira equação de (2.15) temos que

$$\sigma (s^R + h_L (c^R)) = f (s^R, c^R) - f (s^L, c^L) + \sigma (s^L + h_L (c^R)). \quad (2.20)$$

Aplicando a fórmula (2.19) na equação (2.20) chegamos a equação

$$\sigma (s^R + h_L (c^R)) = f (s^R, c^R) - f (s^L, c^L) + f (s^L, c^L) = f (s^R, c^R),$$

donde obtemos que

$$\sigma = \frac{f (s^R, c^R)}{s^R + h_L (c^R)}. \quad (2.21)$$

As expressões (2.19) e (2.21) definem a velocidade de choque  $\sigma^c$  da família  $c$ , ou seja,

$$\frac{f (s^L, c^L)}{s^L + h_L (c^R)} = \sigma^c (u^L, u^R) = \frac{f (s^R, c^R)}{s^R + h_L (c^R)}. \quad (2.22)$$

Observe de (2.22) que, se  $\sigma^c (u^L, u^R) = 0$  então devido a definição da função  $f$  segue que  $s^L = s^R = 0$ . Portanto, a solução para este caso já foi visto na seção anterior quando consideramos  $s^L = s^R = 0$ . Por isto consideremos então a partir daqui que  $\sigma^c (u^L, u^R) > 0$ .

Como o espaço de estados  $\Omega$  está contido no  $\mathbb{R}^2$ , a curva de Hugoniot  $\mathcal{H} (u^L)$  é composta por duas curvas suaves  $\mathcal{H}^i (u^L)$  denominadas  $i$ -ramos de Hugoniot, com  $i \in \{s, c\}$ . O  $s$ -ramo  $\mathcal{H}^s (u^L)$  é definido pela reta  $c = c^L$  e o  $c$ -ramo  $\mathcal{H}^c (u^L)$  obtido por (2.22) com a eliminação do  $\sigma^c (u^L, u^R)$  variando o estado  $u^R$ , ou seja,

$$\mathcal{H}^c (u^L) = \left\{ (s, c) \in \Omega : \frac{f (s^L, c^L)}{s^L + h_L (c)} = \frac{f (s, c)}{s + h_L (c)} \right\}. \quad (2.23)$$

Agora temos as ferramentas necessárias para caracterizarmos as ondas de choque entre os estados  $u^L$  e  $u^R$ . Como já comentamos anteriormente, há duas possibilidades para ondas de choque, a onda  $s$ -choque com  $c = c^L$  e a onda  $c$ -choque com  $c \neq c^L$ .

### 2.5.1 Onda de Choque na Saturação da Fase Aquosa

Seja  $c^L = c^R$ . Nestas condições o Sistema (2.15) se reduz a equação

$$f(s^R, c^R) - f(s^L, c^L) = \sigma(s^R - s^L). \quad (2.24)$$

Observe que esta expressão (2.24) é a relação de Rankine-Hugoniot para a equação de Buckley-Leverett com a função de fluxo em  $s$  dada por  $f(s, c^L)$ . Desta forma as ondas de  $s$ -choque são as mesmas da equação de Buckley-Leverett apresentadas no Apêndice B.

### 2.5.2 Onda de Choque na Concentração do Polímero

Como vimos, fixados  $u^L = (s^L, c^L)$ ,  $u^R = (s^R, c^R)$  com  $c^L \neq c^R$  a onda de  $c$ -choque de  $(s^L, c^L)$  para  $(s^R, c^R)$  tem  $\sigma$  dado pela fórmula (2.22). Por questão de praticidade, para uma onda de  $c$ -choque, utilizaremos a *condição entropia de viscosidade* como discutido a seguir. Para isto, dado  $\varepsilon > 0$ , considere a seguinte perturbação do Sistema (1):

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial f(s, c)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial (sc + a(c))}{\partial t} + \frac{\partial (cf(s, c))}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 (sc + a(c))}{\partial x^2}. \end{cases} \quad (2.25)$$

Suponha que o Sistema (2.25) possua uma solução do tipo onda viajante da forma  $u^\varepsilon(\xi) = (s^\varepsilon(\xi), c^\varepsilon(\xi))$ , com  $\xi = (x - \sigma t)/\varepsilon$ . Substituindo  $s^\varepsilon(\xi)$  e  $c^\varepsilon(\xi)$  no Sistema (2.25) obtemos

$$\begin{cases} -\frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{ds^\varepsilon}{d\xi} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{df(u^\varepsilon(\xi))}{d\xi} = \varepsilon \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d^2 s^\varepsilon}{d\xi^2} \right), \\ -\frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{d(s^\varepsilon c^\varepsilon + a(c^\varepsilon))}{d\xi} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{d(c^\varepsilon f(u^\varepsilon(\xi)))}{d\xi} = \varepsilon \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d^2 (s^\varepsilon c^\varepsilon + a(c^\varepsilon))}{d\xi^2} \right). \end{cases}$$

Como  $\varepsilon > 0$ , eliminamos-o do sistema acima obtemos o sistema de EDO's de segunda ordem

$$\begin{cases} -\sigma \frac{ds^\varepsilon}{d\xi} + \frac{df(u^\varepsilon(\xi))}{d\xi} = \frac{d^2 s^\varepsilon}{d\xi^2}, \\ -\sigma \frac{d(s^\varepsilon c^\varepsilon + a(c^\varepsilon))}{d\xi} + \frac{d(c^\varepsilon f(u^\varepsilon(\xi)))}{d\xi} = \frac{d^2 (s^\varepsilon c^\varepsilon + a(c^\varepsilon))}{d\xi^2}. \end{cases} \quad (2.26)$$



A condição de viscosidade para o choque entre  $(s^L, c^L)$  e  $(s^R, c^R)$  com velocidade  $\sigma$  exige que o Sistema (2.26) tenha uma solução  $(s^\varepsilon(\xi), c^\varepsilon(\xi))$  satisfazendo a condição de contorno

$$\begin{cases} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} (s^\varepsilon(\xi), c^\varepsilon(\xi)) = (s^L, c^L), \\ \lim_{\xi \rightarrow +\infty} (s^\varepsilon(\xi), c^\varepsilon(\xi)) = (s^R, c^R). \end{cases} \quad (2.27)$$

Integrando o Sistema (2.26) de  $-\infty$  até  $\xi$  obtemos

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{d^2 s^\varepsilon}{d\eta^2} d\eta = \int_{-\infty}^{\xi} \left( -\sigma \frac{ds^\varepsilon}{d\eta} + \frac{df(u^\varepsilon(\eta))}{d\eta} \right) d\eta, \\ \int_{-\infty}^{\xi} \frac{d^2 (s^\varepsilon c^\varepsilon + a(c^\varepsilon))}{d\eta^2} d\eta = \int_{-\infty}^{\xi} \left( -\sigma \frac{d(s^\varepsilon c^\varepsilon + a(c^\varepsilon))}{d\eta} + \frac{d(c^\varepsilon f(u^\varepsilon(\eta)))}{d\eta} \right) d\eta. \end{cases}$$

Levando em conta a primeira condição de contorno para  $\xi \rightarrow -\infty$  em (2.27), após a realização da integração obtemos o sistema de EDO's de primeira ordem

$$\begin{cases} \frac{ds^\varepsilon}{d\xi} = f^\varepsilon - \sigma s^\varepsilon - (f^L - \sigma s^L), \\ \frac{d(s^\varepsilon c^\varepsilon + a(c^\varepsilon))}{d\xi} = c^\varepsilon f^\varepsilon - \sigma (s^\varepsilon c^\varepsilon + a(c^\varepsilon)) - (c^L f^L - \sigma (s^L c^L + a(c^L))), \end{cases} \quad (2.28)$$

onde  $f^L = f(s^L, c^L)$  e  $f^\varepsilon = f(s^\varepsilon, c^\varepsilon)$ .

Para facilitar a análise vamos reescrever o Sistema (2.28) em termos da função de  $h_L(c)$  definida em (2.18). Logo, o Sistema (2.28) é reescrito como

$$\begin{cases} \frac{ds^\varepsilon}{d\xi} = f(s^\varepsilon, c^\varepsilon) - \sigma (s^\varepsilon + h_L(c^R)), \\ (s^\varepsilon + h(c^\varepsilon)) \frac{dc^\varepsilon}{d\xi} = \sigma (c^\varepsilon - c^L) (h_L(c^R) - h_L(c^\varepsilon)). \end{cases} \quad (2.29)$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  espera-se que a solução  $(s^\varepsilon, c^\varepsilon)$  de (2.29) satisfazendo a segunda condição de contorno em (2.27) convirja para a solução do problema de Riemann do Sistema (1) dada pela onda de choque de  $u^L$  para  $u^R$  com velocidade  $\sigma$ .

A partir daqui vamos omitir os expoentes  $\varepsilon$  de  $s^\varepsilon$  e  $c^\varepsilon$ , reescrevendo o Sistema (2.29) como

$$\begin{cases} \frac{ds}{d\xi} = f(s, c) - \sigma (s + h_L(c^R)) \\ (s + h(c)) \frac{dc}{d\xi} = \sigma (c - c^L) (h_L(c^R) - h_L(c)). \end{cases} \quad (2.30)$$

Usando a condição de contorno (2.27) vamos resolver o Sistema (2.30) a fim de achar uma órbita saindo do estado  $(s^L, c^L)$  e chegando no estado  $(s^R, c^R)$ .

**Caso**  $c^L < c^R$ .

Vamos fazer uma análise para o caso  $c^R > c^L$ . Para isso, vejamos o lema a seguir:

**Lema 2.2** *Considere o sistema (2.30). Se  $c^R > c^L$ , então não é possível obter uma órbita do sistema (2.30) partindo de  $(s^L, c^L)$  e chegando em  $(s^R, c^R)$ .*

*Demonstração.* As expressões  $(s + h(c))$  e  $\sigma$  possuem sinais estritamente positivos. Como a função  $h_L$  é decrescente, então, para  $c$  estritamente entre  $c^L$  e  $c^R$ , as expressões  $(c - c^L)$  e  $(h_L(c^R) - h_L(c))$  possuem sinais opostos. Logo, da segunda equação de (2.30), temos que

$$\frac{dc}{d\xi} < 0, \quad \text{para } c \text{ entre } c^L \text{ e } c^R. \quad (2.31)$$

Já, para  $c$  fora do intervalo  $[c^L, c^R]$  temos

$$\frac{dc}{d\xi} > 0. \quad (2.32)$$

Além disto, obviamente temos que

$$\frac{dc}{d\xi} = 0, \quad \text{se } c = c^L \quad \text{ou} \quad c = c^R.$$

Portanto, se tivermos  $c^R > c^L$ , não é possível obter uma órbita partindo de  $u^L$  e chegando em  $u^R$  pois o fluxo em relação ao eixo  $c$  é decrescente entre os valores  $c^L$  e  $c^R$  como afirma (2.31). Isto significa que o campo de vetores da órbita possui derivada em relação a  $c$  negativa. ■

Pelo Lema 2.2 não é possível obter uma solução descontínua admissível segundo a condição de entropia de viscosidade, quando  $c^L < c^R$ .

**Caso**  $c^L > c^R$ .

Fixe  $c^L > c^R$  e considere a secante definida por (2.19). Esta secante intersecta a função de fluxo  $f(s, c^R)$  em dois pontos. Um destes pontos é denotado por  $u_-^R = (s_-^R, c^R)$  onde  $\lambda^s(s_-^R, c^R) > \sigma$  e o outro por  $u_+^R = (s_+^R, c^R)$  onde  $\lambda^s(s_+^R, c^R) < \sigma$ .

Os pontos  $u_+^R$  e  $u_-^R$  são pontos de equilíbrio do sistema de EDO's (2.30). Veja a Figura C.10.

**Lema 2.3** *Considere o ponto  $u_+^R$ . Então, de (2.19), existem dois valores para  $s^L$ , denotados por  $s_-^L$  e  $s_+^L$ , com  $s_-^L \leq s_+^L$  tais que,*

$$\lambda^s(s_-^L, c^L) \geq \sigma \quad e \quad \lambda^s(s_+^L, c^L) \leq \sigma. \quad (2.33)$$

Além disso, se as desigualdades de (2.33) são estritas é possível obter uma órbita do sistema (2.30) partindo do ponto de equilíbrio  $u_-^L = (s_-^L, c^L)$  e chegando em  $u_+^R$  e uma órbita partindo de  $u_+^L = (s_+^L, c^L)$  e chegando em  $u_+^R$ .

*Demonstração.* Vamos agora fazer a análise do sinal de  $\frac{ds}{d\xi}$  em (2.30). Para qualquer  $c^R \leq c < c^L$  sejam  $s_-(c)$  e  $s_+(c)$  os dois valores determinados pela relação

$$\frac{f(s_-(c), c)}{s_-(c) + h_L(c^R)} = \sigma = \frac{f(s_+(c), c)}{s_+(c) + h_L(c^R)}, \quad (2.34)$$

com  $s_-(c) \leq s_+(c)$ . Sendo  $u_+ = (s_+(c), c)$  temos  $u_+^R = (s_+(c^R), c^R)$ . Veja a Figura C.12. Da primeira equação de (2.30) e de (2.34) concluímos que

$$\frac{ds}{d\xi}(s_-(c), c) = \frac{ds}{d\xi}(s_+(c), c) = 0.$$

Para cada  $c$  fixo, em relação ao eixo  $s$ , nos intervalos  $0 \leq s < s_-(c)$  e  $s_+(c) < s \leq 1$ , as órbitas possuem o mesmo sentido e no intervalo  $s_-(c) < s < s_+(c)$  elas possuem sentido oposto aos outros dois casos.

Faremos agora uma análise do sinal de  $\frac{ds}{d\xi}$ . Para isso, vamos reescrever a primeira equação de (2.30) como mostra a seguir:

$$\frac{ds}{d\xi} = (s + h_L(c^R)) \left( \frac{f(s, c)}{(s + h_L(c^R))} - \sigma \right). \quad (2.35)$$

Observe que, para  $0 \leq s < s_-(c)$  e  $s_+(c) < s \leq 1$  a inclinação  $f(s, c) / (s + h_L(c^R))$  é menor do que a inclinação  $\sigma$ . Logo,

$$\frac{ds}{d\xi} < 0, \quad \text{para } 0 \leq s < s_-(c) \quad e \quad s_+(c) < s \leq 1. \quad (2.36)$$

Já para  $s_-(c) < s < s_+(c)$  a inclinação  $f(s, c) / (s + h_L(c^R))$  é maior do que a

inclinação  $\sigma$ . Com isso,

$$\frac{ds}{d\xi} > 0, \quad \text{para } s_-(c) < s < s_+(c). \quad (2.37)$$

Note que qualquer órbita que passa por um ponto  $(s_-(c), c)$ , para algum  $c \in (c^R, c^L)$ , satisfaz a seguinte condição

$$\begin{cases} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} (s(\xi), c(\xi)) = (s_-^L(c^L), c^L) \\ \lim_{\xi \rightarrow +\infty} (s(\xi), c(\xi)) = (s^R, c^R). \end{cases}$$

Ademais, qualquer órbita que passa por um ponto  $(s_+(c), c)$ , para algum  $c \in (c^R, c^L)$  tem a seguinte propriedade

$$\begin{cases} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} (s(\xi), c(\xi)) = (+\infty, c^L) \\ \lim_{\xi \rightarrow +\infty} (s(\xi), c(\xi)) = (s^R, c^R). \end{cases}$$

Portanto, concluímos que existe uma órbita do sistema (2.30) partindo de  $u_-^L$  e chegando em  $u_-^R$  e uma órbita partindo de  $u_-^L$  e chegando em  $u_+^R$ . Veja a Figura C.13. ■

**Lema 2.4** *Considere o ponto  $u_-^R = (s_-^R, c^R)$ . Então, de (2.19), existem dois valores para  $s^L$ , denotados por  $s_-^L$  e  $s_+^L$ , com  $s_-^L \leq s_+^L$  tais que, (2.33) é satisfeita. Além disso, se as desigualdades de (2.33) são estritas é possível obter uma órbita do sistema (2.30) partindo do ponto de equilíbrio  $u_-^L = (s_-^L, c^L)$  e chegando em  $u_+^R$ , no entanto, não é possível obter uma órbita partindo do ponto  $u_+^L = (s_+^L, c^L)$  e chegando em  $u_-^R$ .*

*Demonstração.* Considerando  $u_-^R$ , então  $s_-^R = s_-(c^R)$ . Como no caso anterior, existem dois possíveis valores para  $s^L$ , tais que (2.33) é satisfeita ( $u_+^L$  e  $u_-^L$  são os mesmos pontos do Lema 2.3). Veja a Figura C.11. Com os mesmos argumentos do caso anterior os sinais de  $\frac{ds}{d\xi}$  e  $\frac{dc}{d\xi}$  permanecem inalterados. Veja a Figura C.13. ■

Portanto, dos Lemas 2.2 e 2.4 concluímos que existe uma órbita do sistema (2.30) partindo de  $u_-^L$  e chegando em  $u_-^R$ . Porém, não existe uma órbita partindo de  $u_+^L$  e chegando em  $u_-^R$ . Veja a Figura C.13.

**Proposição 2.2** *Considere o problema de Riemann (2.4) onde  $u^L = u_-^L$  e  $u^R = u_+^R$ . Então a onda de  $c$ -choque, segundo a condição de entropia de viscosidade, é admissível.*

Além disso, se  $u^R = u_-^R$ , então a onda de  $c$ -choque também é admissível segundo a mesma condição de entropia.

**Proposição 2.3** *Condidere o problema de Riemann (2.4) onde  $u^L = u_+^L$  e  $u^R = u_+^R$ . Então a onda de  $c$ -choque, segundo a condição de entropia de viscosidade, é admissível. Porém, se  $u^R = u_-^R$  não é possível obter uma órbita partindo de  $u^L$  para  $u^R$ .*

As demonstrações das Proposições 2.2 e 2.3 seguem diretamente dos Lemas 2.3 e 2.4 respectivamente.

Um fato a ser observado é a verificação da condição de entropia de Lax para os estados  $u^L$  e  $u^R$ . Para o sistema  $2 \times 2$ , a nomenclatura para possíveis ondas de choque entre os estados  $u^L$  e  $u^R$  são listadas na Tabela a seguir.

Tipo de choque	Desigualdades	Pontos de Equilíbrio do Sistema (1)
1 – choque de Lax	$\lambda^1(u^R) < \sigma < \lambda^1(u^L)$ $\sigma < \lambda^2(u^R)$	$u^L$ : Repulsor $u^R$ : Sela
2 – choque de Lax	$\lambda^2(u^R) < \sigma < \lambda^2(u^L)$ $\sigma > \lambda^1(u^R)$	$u^L$ : Sela $u^R$ : Atrator
Choque transicional	$\lambda^1(u^L) < \sigma < \lambda^2(u^L)$ $\lambda^1(u^R) < \sigma < \lambda^2(u^R)$	$u^L$ : Sela $u^R$ : Sela
Choque compressivo	$\lambda^2(u^R) < \sigma < \lambda^1(u^L)$	$u^L$ : Repulsor $u^R$ : Atrator

Para verificar a condição de entropia de Lax faremos uma linearização do Sistema (2.30). Para isso, considere

$$\lambda^1(u) = \min \{ \lambda^s(u), \lambda^c(u) \},$$

$$\lambda^2(u) = \max \{ \lambda^s(u), \lambda^c(u) \}.$$

Se  $u \in \Omega_1$  então  $\lambda^1 \equiv \lambda^s$  e  $\lambda^2 \equiv \lambda^c$ . Se  $u \in \Omega_2$  então  $\lambda^1 \equiv \lambda^c$  e  $\lambda^2 \equiv \lambda^s$ . Considere

$$P(s, c) = f(s, c) - \sigma (s + h_L(c^R)),$$

$$Q(s, c) = \sigma (c - c^L) (h_L(c^R) - h_L(c)) (s + h(c))^{-1}.$$

Então o sistema (2.30) pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \frac{ds}{d\xi} = P(s, c) \\ \frac{dc}{d\xi} = Q(s, c). \end{cases} \quad (2.38)$$

As derivadas parciais das funções  $P$  e  $Q$  são

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial s}(s, c) &= \frac{\partial f}{\partial s}(s, c) - \sigma, \\ \frac{\partial P}{\partial c}(s, c) &= \frac{\partial f}{\partial c}(s, c), \\ \frac{\partial Q}{\partial s}(s, c) &= -\sigma (c - c^L) (h_L(c^R) - h_L(c)) (s + h(c))^{-2}, \\ \frac{\partial Q}{\partial c}(s, c) &= \sigma \left[ (h_L(c^R) - h_L(c)) - (c - c^L) \frac{dh_L}{dc}(c) \right] (s + h(c))^{-1} \\ &\quad - \sigma (c - c^L) (h_L(c^R) - h_L(c)) (s + h(c))^{-2} \frac{dh}{dc}(c). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Com isso, a linearização do sistema (2.38) em torno de  $u^L = u_-^L$  ou  $u^L = u_+^L$  é

$$\begin{cases} \frac{ds}{d\xi} = \frac{\partial P}{\partial s}(s^L, c^L) (s - s^L) + \frac{\partial P}{\partial c}(s^L, c^L) (c - c^L) \\ \frac{dc}{d\xi} = Q(s^L, c^L) + \frac{\partial Q}{\partial s}(s^L, c^L) (s - s^L) + \frac{\partial Q}{\partial c}(s^L, c^L) (c - c^L). \end{cases} \quad (2.40)$$

Aplicando o estado  $u^L$  nas expressões em (2.39) e em seguida substituindo em (2.40) obtemos o sistema

$$\begin{cases} \frac{ds}{d\xi} = \left( \frac{\partial f}{\partial s}(s^L, c^L) - \sigma \right) (s - s^L) + \frac{\partial f}{\partial c}(s^L, c^L) (c - c^L) \\ \frac{dc}{d\xi} = \sigma \left( \frac{h_L(c^R) - h_L(c^L)}{s^L + h(c^L)} \right) (c - c^L). \end{cases} \quad (2.41)$$

Reescrevendo o sistema (2.41) em forma matricial obtemos

$$\frac{du}{d\xi} = M (u - u^L),$$

onde

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial s}(s^L, c^L) - \sigma & \frac{\partial f}{\partial c}(s^L, c^L) \\ 0 & \sigma \left( \frac{h_L(c^R) - h_L(c^L)}{s^L + h(c^L)} \right) \end{pmatrix}.$$

Sejam  $\eta_1$  e  $\eta_2$  os autovalores da matriz  $M$ . Então,

$$\eta_1 = \frac{\partial f}{\partial s}(s^L, c^L) - \sigma \quad \text{e} \quad \eta_2 = \sigma \left( \frac{h_L(c^R) - h_L(c^L)}{s^L + h(c^L)} \right).$$

Sendo  $h_L$  uma função decrescente e  $c^L > c^R$  então  $h_L(c^R) - h_L(c^L) > 0$ , ou seja,  $\eta_2 > 0$ .

- Seja  $u^L = u_-^L$ . Como  $\lambda^s(u_-^L) = \frac{\partial f}{\partial s}(s_-^L, c_-^L) > \sigma$ , então  $\eta_1 > 0$  e com isso temos que,  $u_-^L$  é um nó impróprio instável (repulsor).
- Seja  $u^L = u_+^L$ . Como  $\lambda^s(u_+^L) = \frac{\partial f}{\partial s}(s_+^L, c_+^L) < \sigma$ , então  $\eta_1 < 0$ , conseqüentemente  $u_+^L$  é um ponto de sela. Sejam  $v_1$  e  $v_2$  os respectivos autovetores de  $\eta_1$  e  $\eta_2$ . Com isso,  $v_1 = (1, 0)$  é a direção assintótica atratora e  $v_2 = \left( \frac{\partial f}{\partial c}(u_+^L), \sigma - \lambda^s(u_+^L) \right)$  é a direção repulsora.

Faremos agora a expansão em série de Taylor em torno dos pontos  $u_-^R$  e  $u_+^R$ . Seja  $u^R = u_-^R$  ou  $u^R = u_+^R$ . Com os mesmos argumentos do caso anterior obtemos o sistema de EDO's lineares associados na forma matricial

$$\frac{du}{d\xi} = N(u - u^R),$$

onde

$$N = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial s}(s^R, c^R) - \sigma & \frac{\partial f}{\partial c}(s^R, c^R) \\ 0 & -\sigma(c^R - c^L) \frac{dh_L}{dc}(c^R) (s + h(c))^{-1} \end{pmatrix}.$$

Sejam agora  $\eta_1$  e  $\eta_2$  os autovalores da matriz  $N$ . Então,

$$\eta_1 = \frac{\partial f}{\partial s}(s^R, c^R) - \sigma \quad \text{e} \quad \eta_2 = -\sigma(c^R - c^L) \frac{dh_L}{dc}(c^R) (s + h(c))^{-1}.$$

Sendo  $\frac{dh_L}{dc}(c^R) < 0$  e  $c^L > c^R$  então  $\eta_2 < 0$ .

- Seja  $u^R = u_+^R$ . Como  $\lambda^s(u_+^R) = \lambda^s(s_+^R, c_+^R) < \sigma$  então  $\eta_1 < 0$ . Isto significa que  $u_+^R$  é um nó impróprio estável (atrator).
- Seja  $u^R = u_-^R$ . Como  $\lambda^s(u_-^R) = \lambda^s(s_-^R, c_-^R) > \sigma$ , então  $\eta_1 > 0$ , logo, temos que  $u_-^R$  é um ponto de sela. Sejam agora  $v_1$  e  $v_2$  os autovetores correspondentes a  $\eta_1$

e  $\eta_2$  respectivamente. Então,  $v_1 = (1, 0)$  é uma direção assintótica repulsora e  $v_2 = \left( \frac{\partial f}{\partial c}(u_-^R), \sigma - \lambda^s(u_-^R) \right)$  atratora.

Portanto,

- se  $u^L = u_-^L$  e  $u^R = u_-^R$  então, entre estes estados, 1-choque de Lax é admissível;
- se  $u^L = u_+^L$  e  $u^R = u_+^R$  então, entre estes estados, é 2-choque de Lax é admissível;
- se  $u^L = u_-^L$  e  $u^R = u_+^R$  então, entre estes estados, é admissível um choque compressível.



# Capítulo 3

## Solução do Problema de Riemann

O objetivo deste capítulo é a construção da solução do Problema de Riemann (1)-(2). Primeiramente, vamos denotar algebricamente o que é uma onda que compõe a solução do problema, o que são ondas compatíveis, enunciar e demonstrar os lemas de compatibilidade e em seguida construir a solução que depende dos estados  $u^L$  e  $u^R$  fixados em regiões específicas do espaço de estados  $\Omega$ .

Genericamente, considere o estado à esquerda  $u^A = (s^A, c^A)$  e o estado à direita  $u^B = (s^B, c^B)$ . Seja  $\lambda^i(u)$  com  $i \in \{s, c\}$  os valores característicos da matriz (2.5). Se  $u = (s, c)$  é um estado sobre a curva integral do campo  $e^i$  variando entre  $u^A$  e  $u^B$  onde  $\lambda^i(u)$  é crescente de  $\lambda^i(u^A)$  para  $\lambda^i(u^B)$ , então há uma onda de  $i$ -rarefação conectando  $u^A$  à  $u^B$ . O autovalor  $\lambda^i(u^A)$  é a velocidade inicial da onda  $i$ -rarefação e o autovalor  $\lambda^i(u^B)$  a velocidade final. Ver Figura A.1 no Apêndice A para os estados  $u^L$  e  $u^R$ .

Seja  $\sigma$  a velocidade de propagação de uma descontinuidade relacionada aos estados  $u^A$  e  $u^B$  satisfazendo a relação de Rankine-Rugoniot. Se a solução descontínua

$$u(x, t) = \begin{cases} u^A, & \text{se } \frac{x}{t} < \sigma \\ u^B, & \text{se } \frac{x}{t} > \sigma, \end{cases}$$

satisfaz alguma condição de entropia, então dizemos que há uma onda de choque conectando os estados  $u^A$  e  $u^B$ .

A partir de agora, quando nos referimos a uma  $c$ -onda estamos nos referindo

a uma onda  $c$ -rarefação ou uma onda  $c$ -choque. Quando nos referimos a  $s$ -onda, estamos nos referindo a onda  $s$ -rarefação,  $s$ -choque ou  $s$ -composta ( $s$ -rarefação seguida de uma  $s$ -choque). A onda  $s$ -composta é a mesma onda composta da solução do problema de Riemann para a equação de Buckley-Leverett estudada no Apêndice B. Quando  $c^A = c^B$  a  $s$ -onda se resume a solução do problema de Riemann para a equação de Buckley-Leverett.

Da mesma forma que em [8] usamos

$$u^A \xrightarrow{i} u^B$$

para denotar que o estado  $u^A$  pode ser conectado a  $u^B$  por uma  $i$ -onda, com  $i \in \{s, c\}$ .

**Definição 3.1** *Considere uma  $a$ -onda  $u^A \xrightarrow{a} u^B$  e uma  $b$ -onda  $u^B \xrightarrow{b} u^D$ . Sendo  $v_f^a$  a velocidade final da  $a$ -onda e  $v_i^b$  a velocidade inicial da  $b$ -onda, então, dizemos que estas ondas são compatíveis na solução do problema de Riemann com estado à esquerda  $u^A$  e estado à direita  $u^D$  se*

$$v_f^a \leq v_i^b. \quad (3.1)$$

Observamos que se a onda  $a$  for um choque, então  $v_i^a = v_f^a = \sigma(u^A, u^B)$ .

Uma solução do problema de Riemann (1)-(2) consiste de uma sequência de  $s$ -ondas e  $c$ -ondas compatíveis que conectam o estado à esquerda  $u^L$  ao estado à direita  $u^R$ .

### 3.1 Compatibilidade de Velocidades de Ondas

Nesta seção será demonstrada um lema auxiliar e os lemas que garantem à compatibilidade das ondas da solução do problema de Riemann (1)-(2).

**Lema 3.1** *Suponha que as três ondas a seguir*

$$u^L \xrightarrow{c_1} u^A \xrightarrow{s} u^B \xrightarrow{c_2} u^R \quad (3.2)$$

*sejam compatíveis. Então a  $c_1$ -onda e  $c_2$ -onda são  $c$ -ondas de rarefação.*

*Demonstração.* Como as três ondas são compatíveis, então, de (3.1) temos

$$v_f^{c_1} \leq v_i^s \leq v_f^s \leq v_i^{c_2}. \quad (3.3)$$

Sejam  $u^A = (s^A, c)$  e  $u^B = (s^B, c)$  para algum  $c \in I$  e

$$\sigma^s(u^A, u^B) = \frac{f(s^A, c) - f(s^B, c)}{s^A - s^B}.$$

Se os estados  $u^A$  e  $u^B$  são conectados por uma onda  $s$ -rarefação, então ocorre uma das duas situações,

$$0 \leq s^A < s^B \leq s^I \quad \text{ou} \quad s^I \leq s^B < s^A \leq 1.$$

Logo, para cada  $c$  fixo,

$$v_i^s < \sigma^s(u^A, u^B) < v_f^s. \quad (3.4)$$

Se os estados  $u^A$  e  $u^B$  são conectados por uma onda  $s$ -choque, então, para cada  $c$  fixo,

$$v_i^s = \sigma^s(u^A, u^B) = v_f^s. \quad (3.5)$$

Se os estados  $u^A$  e  $u^B$  são conectados por uma onda  $s$ -composta, então, para cada  $c$  fixo,

$$v_i^s < \sigma^s(u^A, u^B) < \lambda^s(\varepsilon(u^B)) = \sigma^s(\varepsilon(u^B), u^B) = v_f^s, \quad (3.6)$$

onde a função  $\varepsilon$  está definida no Apêndice B. Veja a Figura C.14. Da desigualdade (3.4), (3.5) e da igualdade (3.6) temos

$$v_i^s \leq \sigma^s(u^A, u^B) \leq v_f^s. \quad (3.7)$$

A desigualdade (3.7), juntamente com a desigualdade (3.3) conclui-se que

$$v_f^{c_1} \leq \sigma^s(u^A, u^B) \leq v_i^{c_2}. \quad (3.8)$$

Como  $c_1$  e  $c_2$  são conexões relacionadas a família  $c$  e a velocidade de choque é dada por (2.21), então

$$v_f^{c_1} = \frac{f(s^A, c)}{s^A + h_1(c)} \quad \text{e} \quad v_i^{c_2} = \frac{f(s^B, c)}{s^B + h_2(c)}, \quad (3.9)$$

onde  $h_1$  e  $h_2$  são variáveis que podem ser a função  $h$  ou a função  $h_L$  definidas no capítulo anterior. Aplicando as expressões de (3.9) em (3.8) obtemos,

$$\frac{f(s^A, c)}{s^A + h_1(c)} \leq \sigma^s(u^A, u^B) \leq \frac{f(s^B, c)}{s^B + h_2(c)}.$$

Logo,

$$\frac{s^B + h_2(c)}{f(s^B, c)} \leq \frac{1}{\sigma^s(u^A, u^B)} \leq \frac{s^A + h_1(c)}{f(s^A, c)}$$

Multiplicando as desigualdades acima por  $f(s^A, c)$  obtemos,

$$\frac{f(s^A, c)(s^B + h_2(c))}{f(s^B, c)} \leq \frac{f(s^A, c)}{\sigma^s(u^A, u^B)} \leq s^A + h_1(c).$$

Subtraindo as desigualdades por  $s^A$  temos,

$$\frac{f(s^A, c)(s^B + h_2(c))}{f(s^B, c)} - s^A \leq \frac{f(s^A, c)}{\sigma^s(u^A, u^B)} - s^A \leq h_1(c).$$

Logo, chegamos a desigualdade

$$h_2(c) \leq \frac{f(s^A, c)}{\sigma^s(u^A, u^B)} - s^A \leq h_1(c). \quad (3.10)$$

Observe que, se  $s^A = 0$ , então, da desigualdade (3.10), temos  $h_2 \leq 0 \leq h_1$ . Isto não é verdade, pois as funções  $h_1$  e  $h_2$  são positivas. Por isso tomamos  $s^A > 0$ .

Vamos analisar todos os possíveis casos para a  $c_1$ -onda e para  $c_2$ -onda.

(i) Suponha que a  $c_1$ -onda e a  $c_2$ -onda sejam ambas ondas de  $c$ -choque. Então,

$$h_1(c) = h_2(c) = h_L(c).$$

No entanto, das desigualdades de (3.10) temos,

$$h_2(c) < h_1(c),$$

o que contradiz o fato de  $h_1$  ser igual a  $h_2$ . Logo, a  $c_1$ -onda e a  $c_2$ -onda não podem ser ambas ondas de  $c$ -choque.

(ii) Suponha que a  $c_1$ -onda seja choque e a  $c_2$ -onda seja rarefação. Então,

$$h_1(c) = h_L(c), \quad c \neq c^L \quad \text{e} \quad h_2(c) = h(c).$$

Neste caso, quando  $c < c^L$  então  $h_L < h$ , isto é,  $h_1 < h_2$ , o que contradiz (3.10) (Ver Figura C.15). Logo, a  $c_1$ -onda não pode ser choque e a  $c_2$ -onda não pode ser onda de rarefação, simultaneamente.

(iii) Suponha que a  $c_1$ -onda seja rarefação e a  $c_2$ -onda seja choque. Então,

$$h_1(c) = h(c) \quad \text{e} \quad h_2(c) = h_L(c), \quad c \neq c^L.$$

Logo, para  $c > c^L$  temos  $h < h_L$ , ou seja,  $h_1 < h_2$ , o que contradiz (3.10) (Ver Figura C.15). Dessa forma, não é possível a  $c_1$ -onda ser rarefação e a  $c_2$ -onda ser choque simultaneamente.

(iv) Suponha que a  $c_1$ -onda e a  $c_2$ -onda sejam ambas ondas de  $c$ -rarefação. Então,

$$h_1(c) = h_2(c) = h(c).$$

Veja que, neste caso, a desigualdade (3.10) é satisfeita.

Como os demais casos foram descartados então a única possibilidade para a  $c_1$ -onda e a  $c_2$ -onda é serem ambas ondas de  $c$ -rarefação. Isto conclui a demonstração do Lema.

■

Do Lema 3.1 conclui-se que: se  $c^L < c^R$ , então, qualquer solução do Problema de Riemann (1)-(2) será composta por  $s$ -ondas e por ondas  $c$ -rarefação e se  $c^L > c^R$ , então, a solução será composta de  $s$ -ondas e por uma única onda  $c$ -choque. Isto porque o Lema 3.1 garante a possibilidade de duas ondas  $c$ -rarefação na solução e descarta a possibilidade de duas ondas  $c$ -choque.

A seguir veremos os lemas de compatibilidade de ondas para cada um dos casos separadamente. Estes lemas são fundamentais na construção da solução do problema de Riemann.

**Caso**  $c^L < c^R$ .

Considere um estado arbitrário  $u^2 = (s^2, c) \in \Omega_2 \cup \mathcal{C}$ . Seja  $u^1 = (s^1(u^1), c) \in \Omega_1 \cup \mathcal{C}$  definido pela propriedade

$$u^1 \in \mathcal{H}^s(u^2) \quad \text{e} \quad \sigma^s(u^1, u^2) = \lambda^c(u^2). \quad (3.11)$$

Analogamente, se  $u^1 = (s^1, c) \in \Omega_1$ , então considere  $u^2 = (s^2(u^1), c) \in \Omega_2$  com a mesma propriedade (3.11) trocando 2 por 1. Dizemos, neste caso, que  $u^2$  é um estado  $c$ -extensão de  $u^1$  e vice-versa. Veja a Figura C.16. Neste caso, os estados  $u^1$  e  $u^2$  possuem a mesma velocidade característica em relação a família  $c$ .

Observe que, para todo estado  $u^2 \in \Omega_2 \cup \mathcal{C}$  existe um único estado extensão  $u^1$  correspondente. Porém, nem todo estado  $u^1 \in \Omega_1$  existe um estado extensão  $u^2$  que satisfaz (3.11).

Para o caso  $c^L < c^R$ , a partir do Lema 3.1 foi observado que qualquer solução do problema de Riemann é composta de  $s$ -ondas e ondas  $c$ -rarefação.

O lema a seguir determina em que condições os pares de ondas são compatíveis.

**Lema 3.2** *Suponha que  $c^L < c^R$ .*

(i) *As duas ondas*

$$u^L \xrightarrow{c} u^M \xrightarrow{s} u^R$$

*são compatíveis se, e somente se,  $u^M \in \Omega_1 \cup \mathcal{C}$  e  $0 \leq s^R \leq s^2(u^M)$ , onde  $s^2(u^M)$  é a  $c$ -extensão do estado  $u^M$ .*

(ii) *As duas ondas*

$$u^L \xrightarrow{s} u^M \xrightarrow{c} u^R$$

*são compatíveis se, e somente se,  $u^M \in \Omega_2 \cup \mathcal{C}$  e  $s^1(u^M) \leq s^L \leq 1$ , onde  $s^1(u^M)$  é a  $c$ -extensão do estado  $u^M$ .*

*Demonstração.* (i) Como estas duas ondas são compatíveis, então  $v_f^c \leq v_i^s$ . Daí, sendo  $\lambda^c(u^M) \leq v_f^c$  e  $v_i^s \leq \lambda^s(u^M)$  temos que,

$$\lambda^c(u^M) \leq \lambda^s(u^M),$$

isto é,  $u^M \in \Omega_1 \cup \mathcal{C}$ . Logo, as ondas são compatíveis se, e somente se  $0 \leq s^R \leq s^2(u^M)$ .

(ii) Análogo ao caso (i). ■

O Lema 3.2 implica que: a sequência de ondas (3.2) é compatível se, e somente se,  $u^A \in \Omega_1$  e  $u^B \in \Omega_2$  com  $s^2(u^A) = s^B$  e  $s^1(u^B) = s^A$ , isto é, quando  $u^A$  é  $c$ -extensão de  $u^B$  e  $u^B$  é  $c$ -extensão de  $u^A$ .

**Caso**  $c^L > c^R$ .

Fixe os valores  $c^L$  e  $c^R$  com  $c^L > c^R$ . Defina a função  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\varphi(s, c) = \frac{f(s, c)}{s + h_L(c^R)}. \quad (3.12)$$

Note que a expressão da função  $\varphi$  se assemelha a do valor característico  $\lambda^c$ . A diferença entre elas é que, no valor característico  $\lambda^c$  temos a função  $h$  e na função  $\varphi$  temos a função  $h_L$  aplicada no valor  $c^R$ .

Introduziremos uma outra curva de coincidência (dependente de  $c^L$  e  $c^R$ ) análoga a curva de coincidência  $\mathcal{C}$ . Vamos definir esta curva por

$$\mathcal{S} = \{u \in \Omega : \varphi(u) = \lambda^s(u)\}. \quad (3.13)$$

Para  $c^L$  e  $c^R$  fixos, a Figura C.17 ilustra a curva  $\mathcal{S}$  no espaço de estados  $\Omega$  para  $c^L = 0,7$  e  $c^R = 0,4$ . Veja que, por causa da semelhança entre as expressões  $\lambda^c$  e  $\varphi$  a curva  $\mathcal{S}$  se assemelha geometricamente a curva de coincidência  $\mathcal{C}$ .

A demonstração da existência da curva  $\mathcal{S}$  é análoga a da curva de coincidência, basta substituir a função  $h$  pelo valor  $h_L(c^R)$  na demonstração da existência da curva  $\mathcal{C}$  abordada no Capítulo 2. A curva  $\mathcal{S}$  também divide o espaço de estados  $\Omega$  em duas regiões,

$$\Pi_1 = \{u \in \Omega : \varphi(u) < \lambda^s(u)\} \quad \text{e} \quad \Pi_2 = \{u \in \Omega : \varphi(u) > \lambda^s(u)\}. \quad (3.14)$$

Considere um estado arbitrário  $u^2 = (s^2, c) \in \Pi_2 \cup \mathcal{S}$ . Seja  $u^1 = (s^1(u^2), c) \in \Pi_1 \cup \mathcal{S}$  definido pela propriedade

$$u^1 \in \mathcal{H}^s(u^2) \quad \text{e} \quad \sigma^s(u^1, u^2) = \varphi(u^2). \quad (3.15)$$

Analogamente, se  $u^1 = (s^1, c) \in \Pi_1$ , então considere  $u^2 = (s^2(u^1), c) \in \Pi_2$  com a mesma propriedade (3.15) trocando 2 por 1. Dizemos neste caso que  $u^2$  é um estado

$\varphi$ -extensão de  $u^1$  e vice-versa. Veja a Figura C.18.

Observe que, para todo estado  $u^2 \in \Pi_2 \cup \mathcal{S}$  existe um único estado  $\varphi$ -extensão  $u^1$  correspondente. Porém, nem todo estado  $u^1 \in \Pi_1$  existe um estado  $\varphi$ -extensão  $u^2$  que satisfaz (3.15).

O Lema a seguir nos mostrará em que condições os pares de ondas são compatíveis.

**Lema 3.3** *Suponha  $c^L > c^R$ .*

(i) *As duas ondas*

$$u^L \xrightarrow{c} u^M \xrightarrow{s} u^R$$

*são compatíveis se, e somente se,  $u^M \in \Pi_1 \cup \mathcal{S}$  e  $0 \leq s^R < s^2(u^M)$ , onde  $s^2(u^M)$  é a  $\varphi$ -extensão do estado  $u^M$ .*

(ii) *As duas ondas*

$$u^L \xrightarrow{s} u^M \xrightarrow{c} u^R$$

*são compatíveis se, e somente se,  $u^M \in \Pi_2 \cup \mathcal{S}$  e  $s^1(u^M) < s^L \leq 1$ , onde  $s^1(u^M)$  é a  $\varphi$ -extensão do estado  $u^M$ .*

*Demonstração.* (i) Como as duas ondas são compatíveis, então  $v_f^c \leq v_i^s$ . Como  $\varphi(u^M) \leq v_f^c$  e  $v_i^s \leq \lambda^s(u^M)$ , então

$$\varphi(u^M) \leq \lambda^s(u^M). \quad (3.16)$$

Logo,  $u^M \in \Pi_1 \cup \mathcal{S}$ . Portanto, as ondas são compatíveis se, e somente se,  $0 \leq s^R < s^\delta(u^M)$ .

(ii) Análogo ao item (i). ■

Na próxima seção faremos a construção da solução do problema de Riemann de forma detalhada, também levando em consideração os dois casos acima:  $c^L < c^R$  e  $c^L > c^R$ .

## 3.2 Construção da Solução

Nesta seção iremos construir a solução do Problema de Riemann (1)-(2) fixando  $u^L$  e  $u^R$  em regiões específicas do espaço de estados  $\Omega$ . Baseados no Lema 3.2 e no Lema 3.3 sobre a compatibilidade de ondas e na solução da equação de Buckley-Leverett



estudada no Apêndice B. Levaremos em conta a condição de entropia de viscosidade para as ondas  $c$ -choque estudada na Seção 2.5 e a condição de Oleinik-Liu para os  $s$ -choques. Primeiramente, estudaremos o caso  $c^L < c^R$ . Para este caso, será feita uma divisão do espaço de estados  $\Omega$  em regiões para o estado  $u^L$ . Com o estado  $u^L$  fixo numa destas regiões, em seguida será feita uma outra divisão de  $\Omega$  em regiões para o estado  $u^R$ . Uma vez descrita todas as possibilidades de soluções para o caso  $c^L < c^R$  passaremos ao caso seguinte com  $c^L > c^R$ .

Para o caso  $c^R = c^L$  a solução fica reduzida à solução do problema de Riemann para a equação de Buckley-Leverett.

### 3.2.1 Notações Convenientes e mais Algumas Definições

Sejam  $u^A$  e  $u^B$  dois estados quaisquer e considere a notação como na Tabela 3.1

Família \ Onda	Rarefação	Choque	Composta
$s$ -família	$R_s$	$S_s$	$(RS)_s$
$c$ -família	$R_c$	$S_c$	$(RS)_c$

Tabela 3.1: Notações

Quando uma onda conecta os estados  $u^A$  e  $u^B$  por uma onda  $c$ -rarefação usaremos a notação

$$u^A \xrightarrow{R_c} u^B.$$

Quando conectado por uma onda  $s$ -rarefação,  $c$ -choque ou  $s$ -choque usaremos a notação  $u^A \xrightarrow{R_s} u^B$ ,  $u^A \xrightarrow{S_c} u^B$  ou  $u^A \xrightarrow{S_s} u^B$ , respectivamente.

Um **grupo de ondas** conectando um estado  $u^A$  (à esquerda) a um estado  $u^B$  (à direita) é uma sequência de ondas de choque e/ou de rarefação (de uma mesma família ou não) sem estados intermediários constantes.

Quando dois estados  $u^A$  e  $u^B$  forem conectados por um grupo consistindo de mais de uma onda, representaremos tal grupo de ondas entre parênteses. Por exemplo, se tivermos uma composta do tipo onda  $s$ -choque seguida de uma onda  $c$ -rarefação, denotaremos o grupo por

$$u^A \xrightarrow{(S_s R_c)} u^B.$$

Quando tivermos um grupo de mais de uma onda associadas à mesma família característica, “ $s$ ” ou “ $c$ ”, usaremos o índice  $s$  ou  $c$  fora do parênteses, indicando

apenas a família. Por exemplo, a composta rarefação-choque da família  $s$  denotaremos por

$$u^A \xrightarrow{(RS)_s} u^B.$$

Por último, quando tivermos um grupo formado de uma onda seguida de duas ondas da mesma família distinta da primeira onda, por exemplo, uma onda  $c$ -rarefação seguida de uma  $s$ -composta (rarefação-choque), denotaremos este grupo de ondas por

$$u^A \xrightarrow{(R_c(RS)_s)} u^B.$$

Para representações geométricas da solução, usaremos as notações de acordo com a Tabela 3.2.

ONDA	GEOMETRIA
$s$ -rarefação	$u^A \longrightarrow u^B$
$c$ -rarefação	$u^A \text{ ——— } u^B$
$s$ -choque	$u^A \text{ — — — } u^B$
$c$ -choque	$u^A \text{ — — — } u^B$
$s$ -composta	$u^A \text{ + + + } u^B$

Tabela 3.2: Notações geométricas

### 3.2.2 Solução com Rarefação na Concentração do Polímero

Lembramos que, de acordo com o Lema 3.1 apenas ondas  $c$ -rarefação aparecem na solução do problema de Riemann quando  $c^L < c^R$ . É este caso que vamos tratar nesta subsecção.

Introduziremos aqui as seguintes notações convenientes para a descrição da solução do problema de Riemann para dados iniciais  $u^L$  e  $u^R$  arbitrários, com  $c^L < c^R$ .

Para fazer a divisão do espaço de estados  $\Omega$  em regiões para o estado  $u^L$  e para o estado  $u^R$ , consideremos algumas curvas que definirão fronteiras ou partes de fronteiras dessas regiões.

Considere a curva integral  $\Gamma$  associado ao campo  $e^c$  por um estado  $u^0$ . A parte de  $\Gamma$  na região  $\Omega_1 \cup \mathcal{C}$ , em que  $\lambda^c \leq \lambda^s$ , será denominada de  $\Gamma_1$  e a parte de  $\Gamma$  na região  $\Omega_2 \cup \mathcal{C}$ , em que  $\lambda^c \geq \lambda^s$ , será denominada de  $\Gamma_2$ .

Além de partes de curvas integrais, vamos considerar a  $s$ -curva de inflexão  $\mathcal{I}$ , a curva de coincidência  $\mathcal{C}$  (que coincide com a curva  $c$ -inflexão), as curvas de extensão

das curvas integrais do campo  $e^c$  e as imagens inversas das curvas de extensão. Veja a definição das curvas de extensão [1], [3], [7] e das imagens inversas a seguir que estão baseadas na função extensão  $\varepsilon$  introduzida no Apêndice B e sua inversa.

Seja  $\gamma$  uma curva qualquer no espaço de estados  $\Omega$ . Então, a curva  $s$ -extensão de  $\gamma$  é definida por

$$\begin{aligned} \varepsilon_s(\gamma) = \{u = (s, c) \in \Omega : \exists \tilde{u} = (\tilde{s}, c) \in \gamma \text{ com } s \neq \tilde{s} \text{ e } u \in \mathcal{H}(\tilde{u}) \\ \text{tal que } \sigma^s(u, \tilde{u}) = \lambda^s(u)\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

e a curva  $c$ -extensão de  $\gamma$  por

$$\begin{aligned} \varepsilon_c(\gamma) = \{u = (s, c) \in \Omega : \exists \tilde{u} = (\tilde{s}, c) \in \gamma \text{ com } s \neq \tilde{s} \text{ e } u \in \mathcal{H}(\tilde{u}) \\ \text{tal que } \sigma^s(u, \tilde{u}) = \lambda^c(u)\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Considere novamente uma curva  $\gamma$  como no caso anterior. Então, a curva  $s$ -extensão inversa da curva  $\gamma$  é definida por

$$\begin{aligned} \varepsilon_s^{-1}(\gamma) = \{u = (s, c) \in \Omega : \exists \tilde{u} = (\tilde{s}, c) \in \gamma \text{ com } s \neq \tilde{s} \text{ e } u \in \mathcal{H}(\tilde{u}) \\ \text{tal que } \sigma^s(u, \tilde{u}) = \lambda^s(\tilde{u})\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

e a curva  $c$ -extensão inversa da curva  $\gamma$  é definida por

$$\begin{aligned} \varepsilon_c^{-1}(\gamma) = \{u = (s, c) \in \Omega : \exists \tilde{u} = (\tilde{s}, c) \in \gamma \text{ com } s \neq \tilde{s} \text{ e } u \in \mathcal{H}(\tilde{u}) \\ \text{tal que } \sigma^s(u, \tilde{u}) = \lambda^c(\tilde{u})\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Como exemplos, considere as curvas de extensão das fronteiras  $s = 0$ ,  $s = 1$ , como a seguir:  $\varepsilon_s^0 = \varepsilon_s(\{s = 0\})$  e  $\varepsilon_s^1 = \varepsilon_s(\{s = 1\})$ , que de acordo com [2] e algumas manipulações algébricas feita na própria definição da curva de extensão, obtemos as fórmulas explícitas

$$\varepsilon_s^0 = \left\{ u = (s, c) \in \Omega : s(c) = 1/\sqrt{1 + 1/r(c)} \right\} \quad (3.21)$$

e

$$\varepsilon_s^1 = \left\{ u = (s, c) \in \Omega : s(c) = 1 - 1/\sqrt{1 + r(c)} \right\}. \quad (3.22)$$

Na representação geométrica, a curva de extensão  $\varepsilon_c(\Gamma_1^L)$  será representada por

uma curva pontilhada.

Usando as várias curvas que acabamos de definir, o espaço de estados  $\Omega$  é dividido em 6 regiões para os estados  $u^L$ . Poderiam ser mais regiões, mas para a redação não ficar cansativa demais vamos considerar apenas 6 regiões e fazer alguns comentários sobre perturbações de  $u^L$ . Por sua vez, fixado  $u^L$  em cada uma destas  $L$ -regiões devemos fazer uma nova divisão do espaço  $\Omega$  para os estados  $u^R$  de tal forma que ao final tenhamos coberto todas as possibilidades para  $u^L$  e  $u^R$  no espaço de estados  $\Omega$ , com  $c^L < c^R$ . Acompanhe a divisão do espaço de estados  $\Omega$  para o estado  $u^L$  na Figura C.19.

Sejam  $\mathcal{I}(1)$  e  $\mathcal{C}(1)$  estados definidos pelas intersecções da reta  $c = 1$  com as curvas  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{C}$  respectivamente. Agora, sejam  $\Gamma_1^{\mathcal{I}}$  e  $\Gamma_2^{\mathcal{C}}$  as partes das curvas integrais do campo  $e^c$  que contém os estados  $\mathcal{I}(1)$  e  $\mathcal{C}(1)$ , respectivamente.

Para a construção das  $L$ -regiões, considere as curvas  $\Gamma_1^{\mathcal{I}}$ ,  $\mathcal{I}$ ,  $\varepsilon_s^0$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\Gamma_2^{\mathcal{C}}$ . Então, para os estados  $u^L$ , o espaço de estados  $\Omega$  é dividido como ilustrado na Figura C.19.

- $L_1$  - Região delimitada pelas retas  $c = 0$ ,  $c = 1$ ,  $s = 1$  e pela curva  $\Gamma_2^{\mathcal{C}}$ ;
- $L_2$  - Região delimitada pela reta  $c = 0$  e pelas curvas  $\mathcal{C}$  e  $\Gamma_2^{\mathcal{C}}$ ;
- $L_3$  - Região delimitada pelas retas  $c = 0$ ,  $c = 1$  e pelas curvas  $\mathcal{C}$  e  $\varepsilon_s^0$ ;
- $L_4$  - Região delimitada pelas retas  $c = 0$ ,  $c = 1$  e pelas curvas  $\varepsilon_s^0$  e  $\mathcal{I}$ ;
- $L_5$  - Região delimitada pela reta  $c = 0$  e pelas curvas  $\mathcal{I}$  e  $\Gamma_1^{\mathcal{I}}$ ;
- $L_6$  - Região delimitada pelas retas  $c = 0$ ,  $c = 1$ ,  $s = 0$  e pela curva  $\Gamma_1^{\mathcal{I}}$ .

Passemos então a considerar o estado à esquerda do problema de Riemann em cada uma das regiões  $L_1, \dots, L_6$ .

Frisamos que quando  $u^L$  está na região  $\Omega_2$  então para  $u^R$  próximo de  $u^L$  a primeira onda da solução do problema de Riemann é uma  $s$ -onda (solução da equação de Buckley-Leverett), pois  $\lambda^s < \lambda^c$  na região  $\Omega_2$ .

**Caso**  $u^L \in L_1$

Fixe o estado  $u^L \in L_1$ . Acompanhe a divisão das  $R$ -regiões na Figura C.20. Considere a parte da curva integral por  $u^L$  denotada por  $\Gamma_2^L$ . Com isso vamos dividir o espaço de

estados  $\Omega$  nas seguintes  $R$ -regiões para os estados à direita  $u^R$ , com  $c^L < c^R$ .

- $R_{11}$  - Região delimitada pelas retas  $c = c^L$ ,  $c = 1$ ,  $s = 1$  e pela curva  $\Gamma_2^L$ ;
- $R_{12}$  - Região delimitada pelas retas  $c = c^L$ ,  $c = 1$  e pelas curvas  $\Gamma_2^L$  e  $\mathcal{C}$ ;
- $R_{13}$  - Região delimitada pelas retas  $c = c^L$ ,  $c = 1$  e pelas curvas  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{I}$ ;
- $R_{14}$  - Região delimitada pelas retas  $c = c^L$ ,  $c = 1$ ,  $s = 0$  e pela curva  $\mathcal{I}$ .

Fixando agora o estado  $u^R$  em cada região definida acima, baseados nas ferramentas citadas no início da Seção 3.2, apresentaremos a respectiva solução do problema de Riemann para o estado  $u^L$  fixado. A Figura C.21 ilustra a solução para  $u^R$  fixo em cada uma das  $R$ -regiões.

- Seja  $u^R \in R_{11}$ .

Seja  $u^M$  o estado dado pela intersecção da reta  $c = c^L$  com a curva  $\Gamma_2^R$ . Logo,  $u^M = (s^M, c^L)$ , com  $s^L < s^M \leq 1$ . De acordo com o Lema B.4(iii), a  $s$ -onda conectando  $u^L$  à  $u^M$  é uma onda de choque. Como  $\sigma^s(u^L, u^M) < \lambda^c(u^M)$ , do Lema 3.2, esta onda  $s$ -choque é compatível com a onda  $c$ -rarefação de  $u^M$  para  $u^R$ .

Assim, a solução do problema de Riemann com  $u^L \in L_1$  e  $u^R \in R_{11}$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{R_c} u^R. \quad (3.23)$$

- Seja  $u^R \in R_{12}$ .

Sejam  $u^M$  o estado dado pela intersecção da reta  $c = c^L$  com a curva  $\Gamma_2^R$  e  $\mathcal{C}(c^L) = (s^C, c^L)$  o estado de intersecção da reta  $c = c^L$  com a curva de coincidência  $\mathcal{C}$ . Logo,  $u^M = (s^M, c^L)$ , com  $s^C < s^M < s^L$ . Como  $u^M$  está à direita da curva  $s$ -inflexão, de acordo com o Lema B.4(ii), a  $s$ -onda que conecta  $u^L$  à  $u^M$  passa a ser uma onda de rarefação no lugar do choque do caso anterior. Como  $\lambda^s(u^M) < \lambda^c(u^M)$ , do Lema 3.2, esta onda  $s$ -choque é compatível com a onda  $c$ -rarefação de  $u^M$  para  $u^R$ .

Assim, a solução do problema de Riemann com  $u^L \in L_1$  e  $u^R \in R_{12}$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{R_s} u^M \xrightarrow{R_c} u^R. \quad (3.24)$$

- Seja  $u^R \in R_{13}$ .

Seja  $\mathcal{C}(c^R)$  o ponto de intersecção da reta  $c = c^R$  com a curva de coincidência  $\mathcal{C}$ . Seja  $\Gamma_2^C$  parte da curva integral do campo  $e^c$  que contém o ponto  $\mathcal{C}(c^R)$ . Defina  $u^M$  pela intersecção desta curva  $\Gamma_2^C$  com a reta  $c = c^L$ . Seja  $\mathcal{C}(c^L) = (s^C, c^L)$  o ponto de intersecção da reta  $c = c^L$  com a curva de coincidência  $\mathcal{C}$ . Logo,  $u^M = (s^M, c^L)$  está na região  $R_{12}$  e  $s^C < s^M < s^L$ . Como  $\lambda^c$  e  $\lambda^s$  coincidem em  $\mathcal{C}(c^R)$  e  $u^R$  está a direita da curva  $s$ -inflexão temos um grupo de duas ondas de rarefação conectando o estado  $u^M$  ao estado  $u^R$  (uma onda  $c$ -rarefação de  $u^M$  à  $\mathcal{C}(c^R)$  seguida de uma onda  $s$ -rarefação de  $\mathcal{C}(c^R)$  à  $u^R$ ).

Assim, a solução do problema de Riemann com  $u^L \in L_1$  e  $u^R \in R_{13}$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{R_s} u^M \xrightarrow{(R_c R_s)} u^R. \quad (3.25)$$

- Seja  $u^R \in R_{14}$ .

Considere o estado  $\mathcal{C}(c^R)$ , a parte da curva integral  $\Gamma_2^C$  e  $u^M = (s^M, c^L)$  com  $s^C < s^M < s^L$ , como no caso anterior. Como  $u^R$  agora está além da curva  $s$ -inflexão  $\mathcal{I}$ , a conexão do estado  $\mathcal{C}(c^R)$  para  $u^R$  passa a ser uma onda  $s$ -composta rarefação-choque. Conseqüentemente, o grupo de ondas que conecta  $u^M$  à  $u^R$  ganha uma onda a mais.

Assim, a solução do problema de Riemann com  $u^L \in L_1$  e  $u^R \in R_{14}$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{R_s} u^M \xrightarrow{(R_c(RS)_s)} u^R. \quad (3.26)$$

Para  $u^L \in L_1$  da Figura C.19, veja o resumo da solução do problema de Riemann na Tabela 3.3.

Solução do Problema de Riemann para $u^L \in L_1$		
Estado $u^R$	Solução	Referência
$u^R \in R_{11}$	$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{R_c} u^R$	(3.23)
$u^R \in R_{12}$	$u^L \xrightarrow{R_s} u^M \xrightarrow{R_c} u^R$	(3.24)
$u^R \in R_{13}$	$u^L \xrightarrow{R_s} u^M \xrightarrow{(R_c R_s)} u^R$	(3.25)
$u^R \in R_{14}$	$u^L \xrightarrow{R_s} u^M \xrightarrow{(R_c (RS)_s)} u^R$	(3.26)

Tabela 3.3: Solução para  $u^L \in L_1$ .**Caso  $u^L \in L_2$** 

Fixe o estado  $u^L \in L_2$ . Acompanhe a divisão das  $R$ -regiões na Figura C.22. Considere a parte da curva integral  $\Gamma_2^L$ . Seja  $u^* = (s^*, c^*)$  o estado definido pela intersecção de  $\Gamma_2^L$  com a curva de coincidência  $\mathcal{C}$ . Com isso vamos dividir o espaço de estados  $\Omega$  nas seguintes  $R$ -regiões, com  $c^L < c^R$ .

- $R_{21}$  - Região delimitada pelas retas  $c = c^L$ ,  $c = 1$ ,  $s = 1$ , pela curva  $\Gamma_2^L$  e pela curva  $\mathcal{C}$ ;
- $R_{22}$  - Região delimitada pela reta  $c = c^L$ , e pelas curvas  $\Gamma_2^L$  e  $\mathcal{C}$ ;
- $R_{23}$  - Região delimitada pelas retas  $c = c^L$ ,  $c = c^*$  e pelas curvas  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{I}$ ;
- $R_{24}$  - Região delimitada pelas retas  $c = c^L$ ,  $c = c^*$ ,  $s = 0$  e pela curva  $\mathcal{I}$ ;
- $R_{25}$  - Região delimitada pelas retas  $c = c^*$ ,  $c = 1$ , e pelas curvas  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{I}$ ;
- $R_{26}$  - Região delimitada pelas retas  $c = c^*$ ,  $c = 1$ ,  $s = 0$  e pela curva  $\mathcal{I}$ .

Como a solução para  $u^R$  nas regiões  $R_{21}, \dots, R_{24}$  são análogas as soluções para  $u^R$  nas regiões  $R_{11}, \dots, R_{14}$  do caso anterior, apresentaremos detalhes apenas para  $u^R$  nas regiões  $R_{25}$  e  $R_{26}$ , embora, na Figura C.23 ilustramos a solução para  $u^R$  fixo em cada uma das seis regiões.

- Seja  $u^R \in R_{25}$ .

Considere o estado  $\mathcal{C}(c^R)$  intersecção da reta  $c = c^R$  com a curva de coincidência  $\mathcal{C}$ . Seja  $\Gamma_2^C$  a parte da curva integral do campo  $e^c$  na região  $\Omega_2$  que contém o estado  $\mathcal{C}(c^R)$ . Defina  $u^M$  pela intersecção da reta  $c = c^L$  com a curva  $\Gamma_2^C$ .

Logo,  $u^M = (s^M, c^L)$  está na região  $R_{21}$  e  $s^L < s^M \leq 1$ . Como os pontos  $\mathcal{C}(c^R)$  e  $u^M$  situam-se à direita da curva  $s$ -inflexão  $\mathcal{I}$  segue que, do Lema B.4(ii), a  $s$ -onda que conecta  $\mathcal{C}(c^R)$  à  $u^R$  é uma  $s$ -rarefação. Como  $\mathcal{C}(c^R)$  está na curva de coincidência temos novamente um grupo de duas rarefações (como nos casos  $R_{13}$  e  $R_{23}$ ) conectando  $u^M$  à  $u^R$ .

Assim, a solução do problema de Riemann com  $u^L \in L_2$  e  $u^R \in R_{25}$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{(R_c R_s)} u^R. \quad (3.27)$$

- Seja  $u^R \in R_{26}$ .

Considere o estado  $\mathcal{C}(c^R)$ . Seja  $\Gamma_1^C$  parte de curva integral do campo  $e^c$  que contém o estado  $\mathcal{C}(c^R)$ . Defina  $u^M$  pela intersecção da reta  $c = c^L$  com a curva  $\Gamma_2^C$ . Logo,  $u^M = (s^M, c^L)$  com  $s^L < s^M \leq 1$ . A diferença para o caso anterior é que agora o estado  $u^R$  está à esquerda da curva  $s$ -inflexão  $\mathcal{I}$  e assim, o grupo de ondas que conecta  $\mathcal{C}(c^R)$  à  $u^R$  é uma onda  $s$ -composta rarefação-choque (como nos casos  $R_{14}$  e  $R_{24}$ ).

Assim, a solução do problema de Riemann com  $u^L \in L_2$  e  $u^R \in R_{26}$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{(R_c(RS)_s)} u^R. \quad (3.28)$$

Para  $u^L \in L_2$ , veja o resumo da solução do problema de Riemann na Tabela 3.4.

Solução do Problema de Riemann para $u^L \in L_2$		
Estado $u^R$	Solução	Referência
$u^R \in R_{21}$	$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{R_c} u^R$	(3.23)
$u^R \in R_{22}$	$u^L \xrightarrow{R_s} u^M \xrightarrow{R_c} u^R$	(3.24)
$u^R \in R_{23}$	$u^L \xrightarrow{R_s} u^M \xrightarrow{(R_c R_s)} u^R$	(3.25)
$u^R \in R_{24}$	$u^L \xrightarrow{R_s} u^M \xrightarrow{(R_c(RS)_s)} u^R$	(3.26)
$u^R \in R_{25}$	$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{(R_c R_s)} u^R$	(3.27)
$u^R \in R_{26}$	$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{(R_c(RS)_s)} u^R$	(3.28)

Tabela 3.4: Solução para  $u^L \in L_2$ .



Como dissemos antes, nestas duas primeiras  $L$ -regiões temos que  $\lambda^s(u^L) < \lambda^c(u^L)$ , com isso, para  $u^R$  próximo de  $u^L$ , a primeira onda da solução do problema de Riemann é constituída de uma  $s$ -onda.

Quando o estado  $u^L$  “cruza” a curva de coincidência ao ser deslocado da região  $L_2$  para a região  $L_3$  temos  $\lambda^c(u^L) < \lambda^s(u^L)$ , isto significa que, para  $u^R$  próximo à  $u^L$ , a primeira onda na solução do problema de Riemann deve ser a onda  $c$ -rarefação, como afirma o Lema 3.1.

**Caso**  $u^L \in L_3$

Considere a curva  $\Gamma_1^c$  e a curva  $c$ -extensão  $\varepsilon_c(\Gamma_2^c)$ . Estas duas curvas cruzam a região  $L_3$  como mostra uma ampliação da parte superior da região  $L_3$  na Figura C.24. Note que a curva  $\Gamma_1^c$  está acima da curva  $\varepsilon_c(\Gamma_2^c)$ .

Fixe  $u^L \in L_3$  abaixo da curva  $\varepsilon_c(\Gamma_2^c)$  por ser mais genérico. Acompanhe a divisão das  $R$ -regiões na Figura C.25. Considere a parte da curva integral  $\Gamma_1^L$ . Seja  $u_1^* = (s_1^*, c_1^*)$  o estado definido pela intersecção da parte da curva integral  $\Gamma_1^L$  com a curva de coincidência  $\mathcal{C}$ . Considere a curva de extensão  $\varepsilon_c(\Gamma_1^L)$ .

Sejam  $u_2^* = (s_2^*, c^L)$  o estado definido pela intersecção de  $\varepsilon_c(\Gamma_1^L)$  com a reta  $c = c^L$  e  $\Gamma_2^*$  a parte da curva integral do campo  $e^c$  que contém o estado  $u_2^*$ , contida na região  $\Omega_2$ , com  $c \geq c^L$ . Considere agora o estado  $u_3^* = (s_3^*, c_3^*)$  definido pela intersecção entre  $\Gamma_2^*$  e a curva  $\mathcal{C}$  e por último, as retas  $c = c^L$ ,  $c = c_1^*$  e  $c = c_3^*$ . Com isso vamos dividir o espaço de estados  $\Omega$  nas seguintes  $R$ -regiões (com  $c^L < c^R$ ) como ilustrado na Figura C.25.

- $R_{31}$  - Região delimitada pelas curvas  $\Gamma_1^L$  e  $\varepsilon_c(\Gamma_1^L)$ , e pela reta  $c = c^L$ ;
- $R_{32}$  - Região delimitada pelas curvas  $\Gamma_1^L$  e  $\mathcal{I}$ , e pelas retas  $c = c^L$  e  $c = c_1^*$ ;
- $R_{33}$  - Região delimitada pela curva  $\mathcal{I}$  e pelas retas  $c = c^L$ ,  $c = c_1^*$  e  $s = 0$ ;
- $R_{34}$  - Região delimitada pela curva  $\mathcal{C}$  com  $c_1^* < c < c_3^*$  e pelas curvas  $\varepsilon_c(\Gamma_1^L)$  e  $\Gamma_2^*$ ;
- $R_{35}$  - Região delimitada pela curva  $\Gamma_2^*$ , pela parte da curva de coincidência  $\mathcal{C}$  com  $c_3^* < c < 1$  e pelas retas  $c = c^L$ ,  $c = 1$  e  $s = 1$ ;

- $R_{36}$  - Região delimitada pelas curvas  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{I}$ , e pelas retas  $c = c_1^*$  e  $c = c_3^*$ ;
- $R_{37}$  - Região delimitada pela curva  $\mathcal{I}$  e pelas retas  $c = c_3^*$ ,  $c = c_1^*$  e  $s = 0$ ;
- $R_{38}$  - Região delimitada pelas curvas  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{I}$ , e pelas retas  $c = c_3^*$  e  $c = 1$ ;
- $R_{39}$  - Região delimitada pela curva  $\mathcal{I}$  e pelas retas  $c = c_3^*$ ,  $c = 1$  e  $s = 0$ .

Fixando agora o estado  $u^R$  em cada  $R$ -região que acabamos de definir, apresentaremos a respectiva solução do problema de Riemann para  $u^L$  fixado em  $L_3$ . A Figura C.26 ilustra a solução para  $u^R$  fixo em cada região.

- Seja  $u^R \in R_{31}$ .

Seja  $u^N$  o estado dado pela intersecção da reta  $c = c^R$  com a curva  $\Gamma_1^L$ . Logo,  $u^N = (s^N, c^R)$  com  $s^N < s^R$ . Como  $u^N$  e  $u^R$  estão à direita da curva  $s$ -inflexão  $\mathcal{I}$  e  $s^N < s^R$ , então, pelo Lema B.4(iii), a  $s$ -onda no nível  $c = c^R$  que conecta  $u^N$  à  $u^R$  é uma onda  $s$ -choque.

Assim, pelo Lema 3.2, a solução do problema de Riemann com  $u^L \in L_3$  e  $u^R \in R_{31}$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{R_c} u^N \xrightarrow{S_s} u^R. \quad (3.29)$$

- Seja  $u^R \in R_{32}$ .

Seja  $u^N$  o estado dado pela intersecção da reta  $c = c^R$  com a curva  $\Gamma_1^L$ . Logo,  $u^N = (s^N, c^R)$  com  $s^N > s^R$ . Como  $u^N$  e  $u^R$  estão à direita da curva  $s$ -inflexão  $\mathcal{I}$  e  $s^N > s^R$ , então, pelo Lema B.4(ii), a  $s$ -onda de nível  $c = c^R$  que conecta  $u^N$  a  $u^R$  é uma onda  $s$ -rarefação.

Assim, pelo Lema 3.2, a solução do problema de Riemann com  $u^L \in L_3$  e  $u^R \in R_{32}$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{R_c} u^N \xrightarrow{R_s} u^R. \quad (3.30)$$

- Seja  $u^R \in R_{33}$ .

Seja  $u^N$  o estado dado pela intersecção da reta  $c = c^R$  com a curva  $\Gamma_1^L$ . Logo,  $u^N = (s^N, c^R)$  com  $s^N < s^R$ . A diferença para o caso anterior é que agora o

estado  $u^R$  está a esquerda da curva  $s$ -inflexão  $\mathcal{I}$  e o estado  $u^N$  à direita. Logo, pelo Lema B.4(i), o grupo de  $s$ -ondas no nível  $c = c^R$  que conecta  $u^N$  à  $u^R$  passa a ser uma onda  $s$ -composta do tipo rarefação-choque em lugar da onda  $s$ -rarefação como na situação anterior.

Assim, a solução do problema de Riemann com  $u^L \in L_3$  e  $u^R \in R_{33}$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{R_c} u^N \xrightarrow{(RS)_s} u^R. \quad (3.31)$$

- Seja  $u^R \in R_{34}$ .

Seja  $u^M = (s^M, c^M)$  o estado dado pela intersecção da curva  $\Gamma_2^R$  com a curva  $\varepsilon_c(\Gamma_1^L)$ . Defina agora o estado  $u^N$  pela intersecção da curva  $\Gamma_1^L$  com a reta  $c = c^M$ . Logo,  $u^N = (s^N, c^M)$  com  $s^N < s^M$  e por definição da curva de extensão  $\varepsilon_c(\Gamma_1^L)$  temos que  $u^M \in \mathcal{H}^s(u^N)$  e  $\sigma^s(u^N, u^M) = \lambda^c(u^N)$ . Com isto, agora temos um grupo de duas ondas conectando o estado  $u^L$  ao estado  $u^M$ , formando uma onda  $c$ -rarefação de  $u^L$  para  $u^N$  e uma onda  $s$ -choque de  $u^N$  para  $u^M$ .

Assim, a solução do problema de Riemann com  $u^L \in L_3$  e  $u^R \in R_{34}$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{(R_c S_s)} u^M \xrightarrow{R_c} u^R. \quad (3.32)$$

- Seja  $u^R \in R_{35}$ .

Seja  $u^M$  o estado dado pela intersecção da reta  $c = c^L$  com a curva integral  $\Gamma_2^R$ . Logo,  $u^M = (s^M, c^L)$  com  $s^L < s^M \leq 1$ . O detalhe aqui é que, com relação ao caso de  $u^R$  estar na região  $R_{34}$  é que agora o estado  $u^M$  está à direita da fronteira  $\varepsilon_c(\Gamma_1^L)$  e assim é tal que a onda  $s$ -choque conectando  $u^L$  à  $u^M$  tem velocidade inferior à  $\lambda^c(u^M)$ .

Assim, de acordo com o Lema 3.2, a solução do problema de Riemann com  $u^L \in L_3$  e  $u^R \in R_{35}$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{R_c} u^R. \quad (3.33)$$

- Seja  $u^R \in R_{36}$ .

Considere o estado  $\mathcal{C}(c^R)$  definido pela intersecção da reta  $c = c^R$  com a curva de coincidência  $\mathcal{C}$ . Seja  $\Gamma_2^C$  a parte da curva integral do campo  $e^c$  em  $\Omega_2$  que contém o estado  $\mathcal{C}(c^R)$ . Seja  $u^M = (s^M, c^M)$  o estado dado pela intersecção da curva  $\Gamma_2^C$  com a curva  $\varepsilon_c(\Gamma_1^L)$ . Seja  $u^N$  o estado dado pela intersecção da curva  $\Gamma_1^L$  com a reta  $c = c^M$ . Logo,  $u^N = (s^N, c^M)$  com  $s^N < s^M$ , com  $u^M \in \mathcal{H}(u^N)$  e da definição da curva  $c$ -extensão  $\varepsilon_c(\Gamma_1^L)$  segue que  $\sigma^s(u^N, u^M) = \lambda^c(u^N)$ . Como, em relação ao caso anterior, o estado  $u^R$  cruzou a curva de coincidência  $\mathcal{C}$  e está à direita da curva  $s$ -inflexão  $\mathcal{I}$  segue que o estado  $u^M$  é conectado ao estado  $u^R$  por uma onda composta formada por uma onda  $c$ -rarefação de  $u^M$  à  $\mathcal{C}(c^R)$  seguida por uma onda  $s$ -rarefação de  $\mathcal{C}(c^R)$  para  $u^R$ . Portanto, neste caso, temos dois grupos de ondas, com mais de uma onda cada um, conectando o estado  $u^L$  ao estado  $u^R$ .

Assim, a solução do problema de Riemann com  $u^L \in L_3$  e  $u^R \in R_{36}$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{(R_c S_s)} u^M \xrightarrow{(R_c R_s)} u^R. \quad (3.34)$$

- Seja  $u^R \in R_{37}$ .

Em relação ao caso anterior temos apenas que o estado  $u^R$  cruzou para o lado esquerdo da curva  $s$ -inflexão  $\mathcal{I}$ . Daí, o estado  $u^M$  passa a ser conectado ao estado  $u^R$  por grupo de ondas formado por três ondas: uma onda  $c$ -rarefação de  $u^M$  à  $\mathcal{C}(c^R)$ , seguida por uma onda  $s$ -composta do tipo rarefação-choque de  $\mathcal{C}(c^R)$  para  $u^R$ .

Assim, a solução do problema de Riemann com  $u^L \in L_3$  e  $u^R \in R_{37}$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{(R_c S_s)} u^M \xrightarrow{(R_c (RS)_s)} u^R. \quad (3.35)$$

- Seja  $u^R \in R_{38}$ .

Considere o estado  $\mathcal{C}(c^R)$  como nos dois casos anteriores. Seja  $\Gamma_2^C$  a parte da curva integral do campo  $e^c$  que contém o estado  $\mathcal{C}(c^R)$ . Defina  $u^M$  pela inter-

secção da reta  $c = c^L$  com a curva  $\Gamma_2^C$ . Logo,  $u^M = (s^M, c^L)$  com  $s^L < s^M \leq 1$ . Como  $\lambda^c(\mathcal{C}(c^R)) = \lambda^s(\mathcal{C}(c^R))$  e  $u^R$  está entre a curva de coincidência  $\mathcal{C}$  e a curva  $s$ -inflexão  $\mathcal{I}$  temos novamente um grupo de duas rarefações conectando  $u^M$  à  $u^R$ .

Assim, a solução do problema de Riemann com  $u^L \in L_3$  e  $u^R \in R_{38}$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{(R_c R_s)} u^R. \quad (3.36)$$

- Seja  $u^R \in R_{39}$ .

Com relação ao caso anterior, o estado  $u^R$  cruzou para a esquerda da curva  $s$ -inflexão  $\mathcal{I}$  e portanto o segundo grupo de ondas na solução do Problema de Riemann passa a ter três ondas; uma onda  $c$ -rarefação de  $u^M$  à  $\mathcal{C}(c^R)$ , seguida de uma onda  $s$ -composta rarefação-choque de  $\mathcal{C}(c^R)$  para  $u^R$ .

Assim, a solução do problema de Riemann com  $u^L \in L_3$  com  $u^L$  abaixo da curva  $\varepsilon_c(\Gamma_2^C)$  e  $u^R \in R_{39}$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{(R_c(RS)_s)} u^R. \quad (3.37)$$

Veja a Tabela 3.5 para ver o resumo da solução.

<b>Solução do Problema de Riemann para <math>u^L \in L_3</math></b>		
Estado $u^R$	Solução	Referência
$u^R \in R_{31}$	$u^L \xrightarrow{R_c} u^N \xrightarrow{S_s} u^R$	(3.29)
$u^R \in R_{32}$	$u^L \xrightarrow{R_c} u^N \xrightarrow{R_s} u^R$	(3.30)
$u^R \in R_{33}$	$u^L \xrightarrow{R_c} u^N \xrightarrow{(RS)_s} u^R$	(3.31)
$u^R \in R_{34}$	$u^L \xrightarrow{(R_c S_s)} u^M \xrightarrow{R_c} u^R$	(3.32)
$u^R \in R_{35}$	$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{R_c} u^R$	(3.33)
$u^R \in R_{36}$	$u^L \xrightarrow{(R_c S_s)} u^M \xrightarrow{(R_c R_s)} u^R$	(3.34)
$u^R \in R_{37}$	$u^L \xrightarrow{(R_c S_s)} u^M \xrightarrow{(R_c(RS)_s)} u^R$	(3.35)
$u^R \in R_{38}$	$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{(R_c R_s)} u^R$	(3.36)
$u^R \in R_{39}$	$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{(R_c(RS)_s)} u^R$	(3.37)

Tabela 3.5: Solução para  $u^L \in L_3$ .

Transladando o estado  $u^L$  na região  $L_3$  no sentido crescente do eixo  $c$ , as regiões  $R_{31}, \dots, R_{39}$  também transladam no mesmo sentido. Quando  $u^L$  ficar entre a curva  $c$ -extensão  $\varepsilon_c(\Gamma_2^C)$  e a curva  $\Gamma_1^C$  mostradas na Figura C.24 as  $R$ -regiões  $R_{38}, R_{39}$  e parte das regiões  $R_{34}, R_{35}, R_{36}$  e  $R_{37}$  desaparecem junto com o estado  $u_3^*$  do espaço  $\Omega$  (ver Figura C.27). Quando o estado  $u^L$  ficar entre a curva  $\Gamma_1^C$  e a reta  $c = 1$  as  $R$ -regiões  $R_{35}, R_{36}$  e parte das regiões  $R_{31}, \dots, R_{35}$  também desaparecem do espaço  $\Omega$  juntamente com o estado  $u_1^*$  (ver Figura C.28).

Quando movemos o estado  $u^L$  no sentido em que ele cruza a curva de extensão  $\varepsilon_s^0$ , uma nova curva surgirá para influenciar na divisão das  $R$ -regiões. A curva de extensão inversa  $\varepsilon_s^{-1}(\Gamma_1^L)$  fará com que a  $R$ -região  $R_{33}$  do caso  $u^L \in L_3$  seja dividida em duas novas regiões, uma delas com as mesmas propriedades da antiga  $R_{33}$  e a outra com novas propriedades. Veremos os detalhes no caso a seguir.

#### Caso $u^L \in L_4$

Lembramos que a região  $L_4$  está delimitada pelas retas  $c = 0$  e  $c = 1$ , pela curva  $s$ -inflexão  $\mathcal{I}$  e pela curva  $s$ -extensão da fronteira  $s = 0$ , denotada por  $\varepsilon_s^0$ . Reveja a Figura C.19.

Acompanhe agora na Figura C.29. Considere a curva  $c$ -extensão inversa da fronteira  $s = 1$  denotada por  $\varepsilon_c^{-1}(\{s = 1\})$  (esta curva não intersecta a curva  $\varepsilon_s^0$ ). Tome o estado  $\varepsilon_c^{-1}(1)$  obtido pela intersecção da reta  $c = 1$  com a curva  $\varepsilon_c^{-1}(\{s = 1\})$ . Seja  $\Gamma_1^G$  parte da curva integral do campo  $e^c$  que contém o estado  $\varepsilon_c^{-1}(1)$ , que está acima e à esquerda da curva  $\varepsilon_c^{-1}(\{s = 1\})$ .

Ainda com relação a Figura C.29, considere o estado  $\varepsilon_s^0(1)$  estado intersecção da reta  $c = 1$  com a curva  $\varepsilon_s^0$ . Seja  $\Gamma_1^\varepsilon$  a parte da curva integral do campo  $e^c$  que contém o estado  $\varepsilon_s^0(1)$ , que está abaixo da curva  $\varepsilon_c^{-1}(\{s = 1\})$ . Considere também, como no caso anterior, as curvas  $\Gamma_1^C$  e a  $c$ -extensão  $\varepsilon_c(\Gamma_2^C)$ , que estão abaixo a curva  $\Gamma_1^\varepsilon$ .

Por fim, mais uma vez referindo-se a Figura C.29, fixe o estado  $u^L \in L_4$  abaixo da curva  $c$ -extensão  $\varepsilon_c(\Gamma_2^C)$ . Acompanhe a divisão das  $R$ -regiões na Figura C.30. Defina os estados  $u_1^*, u_2^*$  e  $u_3^*$  como no caso  $u^L \in L_3$ . Considere a curva  $s$ -inflexão  $\mathcal{I}$ , parte da curva integral  $\Gamma_1^L$ , a curva de extensão inversa  $\varepsilon_s^{-1}(\Gamma_1^L)$ , a curva de extensão  $\varepsilon_c(\Gamma_1^L)$  e a parte da curva integral  $\Gamma_2^*$  (ligando  $u_2^*$  à  $u_3^*$ ).

Note que na Figura C.30 a extremidade superior da curva  $\varepsilon_s^{-1}(\Gamma_1^L)$  está abaixo

de  $c_1^*$  a qual corresponde à extensão do estado intersecção de  $\Gamma_1^L$  com  $\varepsilon_s^0$ .

Vamos agora dividir o espaço de estados  $\Omega$  nas seguintes  $R$ -regiões como mostrado na Figura C.30:

- $R_{41}$  - Região delimitada pela reta  $c = c^L$  e pelas curvas  $\Gamma_1^L$  e  $\varepsilon_c(\Gamma_1^L)$ ;
- $R_{42}$  - Região delimitada pelas retas  $c = c^L$ ,  $c = c_1^*$  e pelas curvas  $\Gamma_1^L$  e  $\mathcal{I}$ ;
- $R_{43}$  - Região delimitada pelas retas  $c = c^L$ ,  $c = c_1^*$ ,  $s = 0$  e pelas curvas  $\mathcal{I}$  e  $\varepsilon_s^{-1}(\Gamma_1^L)$ ;
- $R_{44}$  - Região delimitada pela curva  $\mathcal{C}$  com  $c_1^* < c < c_3^*$ , e pelas curvas  $\varepsilon_c(\Gamma_1^L)$  e  $\Gamma_2^*$ ;
- $R_{45}$  - Região delimitada pelas retas  $c = c^L$ ,  $c = 1$ ,  $s = 1$  e pelas curvas  $\mathcal{C}$  (com  $c > c_3^*$ ) e  $\Gamma_2^*$ ;
- $R_{46}$  - Região delimitada pelas retas  $c = c_1^*$ ,  $c = c_3^*$  e pelas curvas  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{I}$ ;
- $R_{47}$  - Região delimitada pelas retas  $c = c_1^*$ ,  $c = c_3^*$ ,  $s = 0$  e pela curva  $\mathcal{I}$ ;
- $R_{48}$  - Região delimitada pelas retas  $c = c_3^*$ ,  $c = 1$  e pelas curvas  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{I}$ ;
- $R_{49}$  - Região delimitada pelas retas  $c = c_3^*$ ,  $c = 1$ ,  $s = 0$  e pela curva  $\mathcal{I}$ ;
- $R_{410}$  - Região delimitada pelas retas  $c = c^L$ ,  $s = 0$  e pela curva  $\varepsilon_s^{-1}(\Gamma_1^L)$ .

Comparado com o caso  $u^L \in L_3$  as regiões  $R_{41}, \dots, R_{49}$  possuem as mesmas propriedades do caso  $R_{31}, \dots, R_{39}$ , respectivamente. Logo, nas  $R$ -regiões  $R_{41}, \dots, R_{49}$  a construção da solução do problema de Riemann é similar aos das  $R$ -regiões  $R_{31}, \dots, R_{39}$ . A única diferença é que para  $u^L \in L_4$  apareceu a região  $R_{410}$  adjacente a região  $R_{43}$  como consequência do estado  $u^L$  estar à esquerda da curva  $\varepsilon_s^0$ ,  $s$ -extensão da fronteira  $s = 0$ .

Assim, como ilustrado na Figura C.31, fixando  $u^R$  na  $R$ -região  $R_{410}$ , pelo Lema B.3(i) segue que a solução do problema de Riemann para  $u^L \in L_4$ , com  $u^L$  abaixo da curva  $\varepsilon_c(\Gamma_2^C)$  e  $u^R \in R_{410}$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{R_c} u^M \xrightarrow{S_s} u^R. \quad (3.38)$$

Solução do Problema de Riemann para $u^L \in L_4$		
Estado $u^R$	Solução	Referência
$u^R \in R_{41}$	$u^L \xrightarrow{R_c} u^N \xrightarrow{S_s} u^R$	(3.29)
$u^R \in R_{42}$	$u^L \xrightarrow{R_c} u^N \xrightarrow{R_s} u^R$	(3.30)
$u^R \in R_{43}$	$u^L \xrightarrow{R_c} u^N \xrightarrow{(RS)_s} u^R$	(3.31)
$u^R \in R_{44}$	$u^L \xrightarrow{(R_c S_s)} u^M \xrightarrow{R_c} u^R$	(3.32)
$u^R \in R_{45}$	$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{R_c} u^R$	(3.33)
$u^R \in R_{46}$	$u^L \xrightarrow{(R_c S_s)} u^M \xrightarrow{(R_c R_s)} u^R$	(3.34)
$u^R \in R_{47}$	$u^L \xrightarrow{(R_c S_s)} u^M \xrightarrow{(R_c (RS)_s)} u^R$	(3.35)
$u^R \in R_{48}$	$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{(R_c R_s)} u^R$	(3.36)
$u^R \in R_{49}$	$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{(R_c (RS)_s)} u^R$	(3.37)
$u^R \in R_{410}$	$u^L \xrightarrow{R_c} u^M \xrightarrow{S_s} u^R$	(3.38)

Tabela 3.6: Solução para  $u^L \in L_4$ .

Veja a Tabela 3.6 para ver o resumo da solução.

Assim como no caso  $u^L \in L_3$ , transladando o estado  $u^L$  na região  $L_4$  no sentido crescente do eixo  $c$ , as regiões  $R_{41}, \dots, R_{410}$  também transladam no mesmo sentido.

Quando  $u^L$  ficar entre a curva  $\Gamma_1^C$  e a curva  $c$ - extensão  $\varepsilon_c(\Gamma_2^C)$  da Figura C.29 as  $R$ -regiões  $R_{48}, R_{49}$  e parte das regiões  $R_{44}, R_{45}, R_{46}$  e  $R_{47}$  desaparecem junto com o estado  $u_3^*$  do espaço  $\Omega$  (ver Figura C.32).

Quando o estado  $u^L$  ficar entre as curvas  $\Gamma_1^C$  e  $\Gamma_1^\varepsilon$  (Figura C.29) as  $R$ -regiões  $R_{46}, R_{47}$  e parte das regiões  $R_{41}, \dots, R_{45}$  também desaparecem do espaço  $\Omega$  juntamente com o estado  $u_1^*$  (ver Figura C.33).

Quando o estado  $u^L$  ficar entre as curvas  $\Gamma_1^\varepsilon$  e  $\varepsilon_c^{-1}(\{s=1\})$  (Figura C.29) a fronteira direita da região  $R_{410}$  da Figura C.33 deixa de intersectar a fronteira  $s=0$ , pois a parte da curva integral  $\Gamma_1^L$  não intersecta mais a curva  $\varepsilon_s^0$ . Neste caso, esta fronteira se estende do nível  $c=c^L$  até o nível  $c=1$ .

Translade o estado  $u^L$  novamente e fixe-o exatamente sobre a curva  $\varepsilon_c^{-1}(\{s=1\})$  da Figura C.29. Considere a parte da curva integral  $\Gamma_1^L$ . Então, da definição desta curva temos que o estado  $u_2^*$  pertence a fronteira  $s=1$ , com isso a parte da curva  $\Gamma_2^*$  é a própria fronteira  $s=1$ . Logo, a  $R$ -região  $R_{45}$  deixará de existir. Da mesma forma isto acontecerá quando  $u^L$  for transladado para cima da curva  $\varepsilon_c^{-1}(\{s=1\})$ .

Por último, quando o estado  $u^L$  estiver acima da curva  $\Gamma_1^G$  a região  $R_{44}$  também



desaparece. Isto ocorre porque a curva  $c$ -extensão da parte da curva integral  $\Gamma_1^L$ , a curva  $\varepsilon_c(\Gamma_1^L)$ , não estará mais contida no espaço de estados  $\Omega$ . Isto conclui a construção da solução para  $u^L$  na região  $L_4$ .

Quando o estado  $u^L$  cruza a curva  $s$ -inflexão  $\mathcal{I}$ , da região  $L_4$  para a região  $L_5$ , surgem duas novas  $R$ -regiões para o estado  $u^R$  para influenciar na construção da solução do problema de Riemann. A curva de extensão inversa  $\varepsilon_s^{-1}(\Gamma_1^L)$  influenciará novamente no surgimento destas novas  $R$ -regiões. Veremos os detalhes no caso a seguir.

### Caso $u^L \in L_5$

Considere as mesmas curvas iniciais do caso anterior. A curva  $\Gamma_1^G$  está abaixo e a direita da curva  $\Gamma_1^{\mathcal{I}}$ . Veja a Figura C.34.

Fixe  $u^L \in L_5$  à esquerda da curva  $s$ -inflexão  $\mathcal{I}$  e abaixo da curva  $\varepsilon_c(\Gamma_2^{\mathcal{C}})$  da Figura C.34. Acompanhe a divisão das  $R$ -regiões na Figura C.35 e C.36. Defina os estados  $u_1^*$ ,  $u_2^*$  e  $u_3^*$  como no caso  $u^L \in L_3$ . Agora a parte da curva integral  $\Gamma_1^L$  intersecta a curva  $s$ -inflexão  $\mathcal{I}$  fazendo com que novas  $R$ -regiões apareçam. Seja  $u_4^* = (s_4^*, c_4^*)$  o estado definido pela intersecção entre a parte da curva integral  $\Gamma_1^L$  com a curva  $s$ -inflexão  $\mathcal{I}$ . Com isso vamos dividir o espaço de estados  $\Omega$  nas seguintes  $R$ -regiões:

- $R_{51}$  - Região delimitada pela reta  $c = c^L$  e pelas curvas  $\Gamma_1^L$ ,  $\varepsilon_c(\Gamma_1^L)$  e  $\varepsilon_s^{-1}(\Gamma_1^L)$ ;
- $R_{52}$  - Região delimitada pelas curvas  $\Gamma_1^L$  e  $\mathcal{I}$ , e pela reta  $c = c_1^*$ ;
- $R_{53}$  - Região delimitada e pelas curvas  $\mathcal{I}$  e  $\varepsilon_s^{-1}(\Gamma_1^L)$ , e pelas retas  $c = c_1^*$  e  $s = 0$ ;
- $R_{54}$  - Região delimitada pelas curvas  $\varepsilon_c(\Gamma_1^L)$ ,  $\Gamma_2^*$  e  $\mathcal{C}$ , com  $c_1^* \leq c \leq c_3^*$ ;
- $R_{55}$  - Região delimitada pelas retas  $c = c^L$ ,  $c = 1$ ,  $s = 1$  e pelas curvas  $\Gamma_2^*$  e  $\mathcal{C}$ , com  $c_1^* \leq c \leq c_3^*$ ;
- $R_{56}$  - Região delimitada pelas retas  $c = c_1^*$ ,  $c = c_3^*$  e pelas curvas  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{I}$ ;
- $R_{57}$  - Região delimitada pelas retas  $c = c_1^*$ ,  $c = c_3^*$ ,  $s = 0$  e pela curva  $\mathcal{I}$ ;
- $R_{58}$  - Região delimitada pelas retas  $c = c_3^*$ ,  $c = 1$  e pelas curvas  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{I}$ ;

- $R_{59}$  - Região delimitada pelas retas  $c = c_3^*$ ,  $c = 1$ ,  $s = 0$  e pela curva  $\mathcal{I}$ ;
- $R_{510}$  - Região delimitada pelas retas  $c = c^L$  e  $s = 0$ , pela curva  $\varepsilon_s^{-1}(\Gamma_1^L)$ , com  $c \geq c_4^*$  e  $\Gamma_1^L$ , com  $c^L \leq c \leq c_4^*$ ;
- $R_{511}$  - Região delimitada pela reta  $c = c^L$  e pelas curvas  $\Gamma_1^L$  e  $\mathcal{I}$ , ambas com  $c^L \leq c \leq c_4^*$  (ver Figura C.36);
- $R_{512}$  - Região delimitada pela reta  $c = c^L$  e pelas curvas  $\mathcal{I}$  e  $\varepsilon_s^{-1}(\Gamma_1^L)$ , ambas com  $c^L \leq c \leq c_4^*$  (ver Figura C.36).

As  $R$ -regiões  $R_{51}, \dots, R_{510}$  herdam as propriedades das  $R$ -regiões  $R_{41}, \dots, R_{410}$ , respectivamente. Logo, as soluções do problema de Riemann para  $u^R$  nas  $R$ -regiões  $R_{51}, \dots, R_{510}$  são análogas as soluções para  $u^R$  nas  $R$ -regiões  $R_{41}, \dots, R_{410}$ , respectivamente.

Faremos agora a construção da solução do problema de Riemann para  $u^R$  nas  $R$ -regiões  $R_{511}$  e  $R_{512}$ . Acompanhe a Figura C.36.

- Seja  $u^R \in R_{511}$ .

Sejam  $u^M = (s^M, c^R)$  o estado dado pela intersecção da reta  $c = c^R$  com a parte da curva integral  $\Gamma_1^L$  e  $\mathcal{I}(c^R) = (s_M^{\mathcal{I}}, c^R)$  o estado dado pela intersecção da reta  $c = c^R$  com a curva  $s$ -inflexão  $\mathcal{I}$ . Então,  $s^M < s^R \leq s_M^{\mathcal{I}}$ . Logo, pelo Lema B.2(ii), a  $s$ -onda que conecta  $u^M$  à  $u^R$  é uma rarefação da família  $s$ . Sabendo que  $\lambda^c(u^M) < \lambda^s(u^M)$  então, pelo Lema 3.2, a onda  $c$ -rarefação de  $u^L$  para  $u^M$  é compatível com a onda  $s$ -rarefação de  $u^M$  para  $u^R$ , e assim, a solução do problema de Riemann para  $u^L \in L_5$  e  $u^R \in R_{511}$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{R_c} u^M \xrightarrow{R_s} u^R. \quad (3.39)$$

- Seja  $u^R \in R_{512}$ .

Sejam  $u^M$  e  $\mathcal{I}(c^R) = (s_M^{\mathcal{I}}, c^R)$  como no caso anterior. Seja  $\varepsilon_s^M = (s_M^\varepsilon, c^R)$  o estado dado pela intersecção da reta  $c = c^R$  com a curva de extensão inversa  $\varepsilon_s^{-1}(\Gamma_1^L)$ . Então,  $s_M^{\mathcal{I}} < s^R < s_M^\varepsilon$ . Logo, pelo Lema B.2(iii), a  $s$ -onda é uma composta da família  $s$  (rarefação-choque). Como no caso anterior, pelo Lema

3.2, temos novamente a compatibilidade entre a onda  $c$ -rarefação de  $u^L$  para  $u^M$  e a  $s$ -composta de  $u^M$  para  $u^R$ . Assim, a solução do problema de Riemann para  $u^L \in L_5$  e  $u^R \in R_{512}$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{R_c} u^M \xrightarrow{(RS)_s} u^R. \quad (3.40)$$

Veja a Tabela 3.7 para ver o resumo da solução para  $u^L \in L_5$  e  $u^R$  qualquer.

Solução do Problema de Riemann para $u^L \in L_5$		
Estado $u^R$	Solução	Referência
$u^R \in R_{51}$	$u^L \xrightarrow{R_c} u^N \xrightarrow{S_s} u^R$	(3.29)
$u^R \in R_{52}$	$u^L \xrightarrow{R_c} u^N \xrightarrow{R_s} u^R$	(3.30)
$u^R \in R_{53}$	$u^L \xrightarrow{R_c} u^N \xrightarrow{(RS)_s} u^R$	(3.31)
$u^R \in R_{54}$	$u^L \xrightarrow{(R_c S_s)} u^M \xrightarrow{R_c} u^R$	(3.32)
$u^R \in R_{55}$	$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{R_c} u^R$	(3.33)
$u^R \in R_{56}$	$u^L \xrightarrow{(R_c S_s)} u^M \xrightarrow{(R_c R_s)} u^R$	(3.34)
$u^R \in R_{57}$	$u^L \xrightarrow{(R_c S_s)} u^M \xrightarrow{(R_c (RS)_s)} u^R$	(3.35)
$u^R \in R_{58}$	$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{(R_c R_s)} u^R$	(3.36)
$u^R \in R_{59}$	$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{(R_c (RS)_s)} u^R$	(3.37)
$u^R \in R_{510}$	$u^L \xrightarrow{R_c} u^M \xrightarrow{S_s} u^R$	(3.38)
$u^R \in R_{511}$	$u^L \xrightarrow{R_c} u^M \xrightarrow{R_s}$	(3.39)
$u^R \in R_{512}$	$u^L \xrightarrow{R_c} u^M \xrightarrow{(RS)_s} u^R$	(3.40)

Tabela 3.7: Solução para  $u^L \in L_5$ .

Assim como no caso em que o estado  $u^L$  estava na região  $L_4$ , transladando-o na região  $L_5$  no sentido crescente do eixo  $c$ , as  $R$ -regiões também transladam no mesmo sentido. Quando  $u^L$  ficar entre a curva  $c$ -extensão  $\varepsilon_c(\Gamma_2^c)$  e a curva  $\Gamma_1^c$  da Figura C.34 as  $R$ -regiões  $R_{58}$ ,  $R_{59}$  e parte das regiões  $R_{54}$ ,  $R_{55}$ ,  $R_{56}$  e  $R_{57}$  desaparecem junto com o estado  $u_3^*$  do espaço  $\Omega$  (ver Figura C.37).

Quando o estado  $u^L$  ficar entre as curvas  $\Gamma_1^c$  e  $\Gamma_1^\varepsilon$  da Figura C.34 as  $R$ -regiões  $R_{55}$ ,  $R_{56}$  e parte das regiões  $R_{51}, \dots, R_{55}$  também desaparecem do espaço  $\Omega$  juntamente com o estado  $u_1^*$ . E quando o estado  $u^L$  ficar entre as curvas  $\varepsilon_c^{-1}(\{s=1\})$  e  $\Gamma_1^\varepsilon$  a fronteira esquerda da região  $R_{510}$  atinge o nível  $c=1$  (ver Figura C.38).

De maneira análoga à região  $R_{45}$ , quando o estado  $u^L$  estiver entre as curvas  $\varepsilon_c^{-1}(\{s=1\})$  e  $\Gamma_1^G$  da Figura C.37 a região  $R_{55}$  desaparece do espaço de estados  $\Omega$ .

Por último, de maneira análoga à região  $R_{44}$  quando o estado  $u^L$  estiver entre as curvas  $\Gamma_1^G$  e  $\Gamma_1^I$  da Figura C.37 a região  $R_{54}$  também desaparece do espaço de estados  $\Omega$ .

**Caso  $u^L \in L_6$**

Lembremos que a fronteira entre as regiões  $L_5$  e  $L_6$  é a parte da curva integral  $\Gamma_1^I$  pelo ponto  $\mathcal{I}(1)$  e a curva  $\varepsilon_s^1$  fica à esquerda da curva  $\Gamma_1^I$ , como ilustra a Figura C.19.

Fixe então inicialmente  $u^L \in L_6$  com  $u^L$  entre as curvas  $\varepsilon_s^1$  e  $\Gamma_1^I$ . Considere a parte da curva integral  $\Gamma_1^L$  com  $c \geq c^I$ . Logo, esta curva se estende do nível  $c = c^L$  ao nível  $c = 1$  interior à região  $L_6$ . Com isso temos as seguintes  $R$ -regiões. Acompanhe a divisão das  $R$ -regiões na Figura C.39. Embora várias regiões desapareçam, vamos manter a notação consistente com os casos anteriores para ficar mais fácil de acompanhar e comparar a construção da solução em cada caso.

- $R_{610}$  - Região delimitada pelas retas  $c = c^L$ ,  $s = 0$ ,  $c = 1$  e pela curva  $\Gamma_1^L$ ;
- $R_{611}$  - Região delimitada pela reta  $c = c^L$ ,  $c = 1$  e pelas curvas  $\Gamma_1^L$  e  $\mathcal{I}$ ;
- $R_{612}$  - Região delimitada pela reta  $c = c^L$ ,  $c = 1$  e pelas curvas  $\mathcal{I}$  e  $\varepsilon_s^{-1}(\Gamma_1^L)$ ;
- $R_{61}$  - Região delimitada pelas retas  $c = c^L$ ,  $c = 1$ ,  $s = 1$  e pela curva  $\varepsilon_s^{-1}(\Gamma_1^L)$ .

Com relação ao caso  $u^L \in L_5$ , as regiões análogas às regiões  $R_{54}$  e  $R_{55}$  desaparecem porque todos os estados da  $L$ -região  $L_6$  estão à esquerda da curva  $\Gamma_1^G$  (definida no caso  $u^L \in L_4$ ).

Fixando agora o estado  $u^R$  em cada região definida acima, apresentaremos a respectiva solução do problema de Riemann para o estado  $u^L$  fixado. A Figura C.39 ilustra a solução para  $u^R$  fixo em cada uma das  $R$ -regiões.

- Seja  $u^R \in R_{610}$ .

Seja  $u^M$  o estado dado pela intersecção da reta  $c = c^R$  com a curva  $\Gamma_1^L$ . Logo,  $u^M = (s^M, c^R)$  com  $s^R < s^M$ . Como  $u^M$  e  $u^R$  estão à esquerda da curva  $s$ -inflexão  $\mathcal{I}$  e  $s^R < s^M$ , então, pelo Lema B.2(i), a  $s$ -onda no nível  $c = c^R$  que conecta  $u^M$  à  $u^R$  é uma onda  $s$ -choque.

Assim, pelo Lema 3.2, a solução do problema de Riemann com  $u^L \in L_6$  e  $u^R \in R_{610}$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{R_c} u^M \xrightarrow{S_s} u^R. \quad (3.41)$$

- Seja  $u^R \in R_{611}$ .

Seja  $u^M$  o estado dado pela intersecção da reta  $c = c^R$  com a curva  $\Gamma_1^L$ . Logo,  $u^M = (s^M, c^R)$  com  $s^M < s^R$ . Como  $u^M$  e  $u^R$  estão à esquerda da curva  $s$ -inflexão  $\mathcal{I}$ , então, pelo Lema B.2(ii), a  $s$ -onda no nível  $c = c^R$  que conecta  $u^M$  à  $u^R$  é uma onda  $s$ -rarefação.

Assim, pelo Lema 3.2, a solução do problema de Riemann com  $u^L \in L_6$  e  $u^R \in R_{611}$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{R_c} u^M \xrightarrow{R_s} u^R. \quad (3.42)$$

- Seja  $u^R \in R_{612}$ .

Seja  $u^M$  o estado dado pela intersecção da reta  $c = c^R$  com a curva  $\Gamma_1^L$ . Logo,  $u^M = (s^M, c^R)$  com  $s^M < s^R$ . Como  $u^M$  está à esquerda da curva  $s$ -inflexão  $\mathcal{I}$  e  $u^R$  está entre as curvas  $\mathcal{I}$  e  $\varepsilon_s^{-1}(\Gamma_1^L)$ , então, pelo Lema B.2(iii), a  $s$ -onda no nível  $c = c^R$  que conecta  $u^M$  à  $u^R$  é uma onda  $s$ -composta.

Assim, pelo Lema 3.2, a solução do problema de Riemann com  $u^L \in L_6$  e  $u^R \in R_{612}$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{R_c} u^M \xrightarrow{(RS)_s} u^R. \quad (3.43)$$

- Seja  $u^R \in R_{61}$ .

Seja  $u^M$  o estado dado pela intersecção da reta  $c = c^R$  com a curva  $\Gamma_1^L$ . Logo,  $u^M = (s^M, c^R)$  com  $s^M < s^R$ . Como  $u^M$  está à esquerda da curva  $s$ -inflexão  $\mathcal{I}$  e  $u^R$  à direita da curva  $\varepsilon_s^{-1}(\Gamma_1^L)$ , então, pelo Lema B.2(iv), a  $s$ -onda no nível  $c = c^R$  que conecta  $u^M$  à  $u^R$  é uma onda  $s$ -choque.

Assim, pelo Lema 3.2, a solução do problema de Riemann com  $u^L \in L_6$  e  $u^R \in R_{61}$

é dada pela seqüência

$$u^L \xrightarrow{R_c} u^M \xrightarrow{S_s} u^R. \quad (3.44)$$

Veja a Tabela 3.7 para ver o resumo da solução.

<b>Solução do Problema de Riemann para <math>u^L \in L_6</math></b>		
Estado $u^R$	Solução	Referência
$u^R \in R_{610}$	$u^L \xrightarrow{R_c} u^M \xrightarrow{S_s} u^R$	(3.41)
$u^R \in R_{611}$	$u^L \xrightarrow{R_c} u^M \xrightarrow{R_s} u^R$	(3.42)
$u^R \in R_{612}$	$u^L \xrightarrow{R_c} u^M \xrightarrow{(RS)_s} u^R$	(3.43)
$u^R \in R_{61}$	$u^L \xrightarrow{R_c} u^M \xrightarrow{S_s} u^R$	(3.44)

Tabela 3.8: Solução para  $u^L \in L_6$ .

Movendo o estado  $u^L$  para a esquerda de tal forma a cruzar a curva  $\varepsilon_s^1$ , a  $R$ -região  $R_{61}$  desaparece do espaço de estados  $\Omega$ . A Figura C.40 ilustra as regiões e a solução desta situação.

Concluimos aqui a construção da solução do problema de Riemann para dados iniciais com  $c^L < c^R$ .

### 3.2.3 Solução com choque na Concentração do Polímero

Consideremos o caso  $c^L > c^R$ . Aqui veremos uma outra metodologia. Devida a expressão da velocidade de choque  $\sigma^c(u^L, u^R)$  dada em (2.19) (ou em (2.21)) depender explicitamente de  $c^L$  e  $c^R$ , ao invés de considerar  $L_k$ -regiões e para cada  $u^L \in L_k$  dividindo o espaço de estados  $\Omega$  em  $R$ -regiões, vamos fixar  $c^L$  e  $c^R$  arbitrariamente com  $c^L > c^R$ . Fixado  $c^L$  dividiremos o intervalo  $I = [0, 1]$  em  $L$ -intervalos para a coordenada  $s^L$  de  $u^L$ ; em seguida, fixado  $s^L$  em cada um dos  $L$ -intervalos, dividiremos novamente o intervalo  $I$  em  $R$ -intervalos para a coordenada  $s^R$  do estado  $u^R$ . Desta forma, cobriremos todo o espaço de estados  $\Omega$  para os dados  $u^L$  à esquerda e  $u^R$  à direita com  $c^L < c^R$ , completando assim a solução do problema de Riemann para quaisquer dados iniciais em  $\Omega$ .

Considere o  $c$ -ramo da curva de Hugoniot  $\mathcal{H}^c(u^0)$  associado ao campo  $e^c$  por um estado  $u^0$ . A parte da curva  $\mathcal{H}^c(u^0)$  na região  $\Pi_1 \cup \mathcal{S}$ , em que  $\varphi \leq \lambda^s$ , será denotada

dor  $\mathcal{H}_1^c(u^0)$  e a parte da curva  $\mathcal{H}^c(u^0)$  na região  $\Pi_2 \cup \mathcal{S}$ , em que  $\varphi \geq \lambda^s$ , será denotada por  $\mathcal{H}_2^c(u^0)$ .

Defina a onda de Buckley-Leverett, denotada por  $(BL)$ , como sendo a  $s$ -onda  $R_s$ ,  $S_s$  ou  $(RS)_s$ . Geometricamente, denotaremos a onda de Buckley-Leverett por um segmento de reta.

Para a construção dos  $L$ -intervalos, considere a função  $\varphi$  definida em (3.12) e a curva de coincidência  $\mathcal{S}$  definida em (3.13). Seja  $u^* = (s^*, c^L)$  o estado definido pela intersecção entre a reta  $c = c^L$  e a curva de coincidência  $\mathcal{S}$ . Com isso temos dois intervalos para a coordenada  $s^L$ ,  $[0, s^*]$  e  $[s^*, 1]$ .

O intervalo  $[0, s^*]$  está contido na região  $\Pi_1 \cup \mathcal{S}$  definida em (3.14), isto é, dado o estado  $u^L = (s^L, c^L)$ , com  $0 \leq s^L \leq s^*$ , vale a relação  $\varphi(u^L) \leq \lambda^s(u^L)$ . Isto significa que, para  $s^R$  próximo a  $s^L$  a primeira onda na solução do problema de Riemann é uma onda  $c$ -choque. Já o intervalo  $[s^*, 1]$ , que está contido na região  $\Pi_2 \cup \mathcal{S}$ , a primeira onda é uma  $s$ -onda desde que  $s^L$  e  $s^R$  estejam próximos.

Considere o estado  $u_1 = (1, c^L)$ . Seja  $u_1^1(u_1) = (s_1^1, c^L) \in \Pi_1$  o estado  $\varphi$ -extensão de  $u_1$  tal que  $\sigma^s(u_1, u_1^1) = \varphi(u_1)$  como definido em (3.15). Veja que o estado  $u_1$  também é  $\varphi$ -extensão do estado  $u_1^1(u^1)$ . Isto significa que, se  $s_1^1 \geq s^L$ , então existe o estado  $\varphi$ -extensão  $u_2^L = (s_2^L, c^L)$  para  $u^L$  no espaço de estados  $\Omega$  tal que  $\sigma^s(u_2^L, u^L) = \varphi(u^L)$ . Se  $s^L < s_1^1$ , então não existe o estado  $u_2^L$  no espaço de estados  $\Omega$ . Com isso, podemos dividir o intervalo  $[0, s^*]$  em mais dois menores,  $[0, s_1^1]$  e  $[s_1^1, s^*]$ . A Figura C.41 ilustra as duas situações.

Neste processo de construção obtemos três  $L$ -intervalos

$$I_1^L = [0, s_1^1], \quad I_2^L = [s_1^1, s^*] \quad \text{e} \quad I_3^L = (s^*, 1].$$

Passaremos então a considerar o estado à esquerda  $u^L$  do problema de Riemann em cada um dos intervalos  $I_1^L$ ,  $I_2^L$  e  $I_3^L$ .

**Caso  $s^L \in I_1^L$ , isto é,  $0 \leq s < s_1^1$ .**

Acompanhe a construção da solução para  $s^L \in I_1^L$  pela Figura C.42. Fixe  $s^L$  no intervalo  $I_1^L$ , isto é,  $0 \leq s^L < s_1^1$ . Seja  $u^M = (s^M, c^R)$  o estado definido pela intersecção da reta  $c = c^R$  com a parte do  $c$ -ramo da curva de Hugoniot  $\mathcal{H}_1^c(u^L)$ .

Neste caso, o  $R$ -intervalo é o próprio intervalo  $I$ .

Do estado  $u^L$  para o estado  $u^M$  temos uma onda  $c$ -choque e do estado  $u^M$  para o estado  $u^R$  temos uma onda de Buckley-Leverett. Então, pelo Lema 3.3(i), esta sequência de ondas é compatível.

Assim, a solução do problema de Riemann é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_c} u^M \xrightarrow{(BL)} u^R. \quad (3.45)$$

Fixando o estado coordenada  $s^R$  com  $s^R < s^M$  a onda de Buckley-Leverett é uma onda  $s$ -choque. Seja  $u^I = (s^I, c^R)$  o estado definido pela intersecção entre a reta  $c = c^R$  com a curva  $s$ -inflexão  $\mathcal{I}$ . Fixando  $s^R$  com  $s^M < s^R < s^I$  a onda de Buckley-Leverett é uma onda  $s$ -rarefação. Suponha que a extensão inversa da função definida em (B.9) exista no espaço de estados  $\Omega$ . Se a coordenada  $s^R$  satisfizer  $s^I < s^R \leq \varepsilon^{-1}(s^M)$ , então a onda de Buckley-Leverett é uma onda  $s$ -composta do tipo rarefação-choque. Se tivermos  $\varepsilon^{-1}(s^M) < s^R \leq 1$ , então a onda de Buckley-Leverett é uma onda  $s$ -choque.

**Caso**  $s^L \in I_2^L$ , isto é,  $s_1^1 \leq s \leq s^*$ .

Acompanhe a construção da solução para  $s^L \in I_2^L$  pela Figura C.43. Fixe  $s^L$  no intervalo  $I_2^L$ , isto é,  $s_1^1 \leq s^L \leq s^*$ . Seja  $u_2^L(u^L) = (s_2^L, c^L)$  a  $\varphi$ -extensão de  $u^L$  tal que  $\sigma^s(u_2^L, u^L) = \varphi(u^L)$  (veja novamente a Figura C.41) como definido em (3.15). Agora seja  $u_1^R = (s_1^R, c^R)$  o estado intersecção entre a parte do  $c$ -ramo  $\mathcal{H}_1^c(u^L)$  com a reta  $c = c^R$  e  $u_2^R = (s_2^R, c^R)$  o estado intersecção entre a parte do  $c$ -ramo  $\mathcal{H}_1^c(u_2^L)$  com a reta  $c = c^R$ . Neste caso temos dois  $R$ -intervalos

$$I_{21}^R = [0, s_2^R) \quad \text{e} \quad I_{22}^R = [s_2^R, 1].$$

- Seja  $s^R \in I_{21}^R$ , isto é,  $0 \leq s^R < s_2^R$ .

Seja  $u_1^R = (s_1^R, c^R)$ . Do estado  $u^L$  para o estado  $u_1^R$  temos uma onda  $c$ -choque e do estado  $u_1^R$  para o estado  $u^R$  temos uma onda de Buckley-Leverett. Então, pelo Lema 3.3(i), esta sequência de ondas é compatível.

Assim, como ilustrado na Figura C.43, a solução do problema de Riemann para



$s^L \in I_2^L$  e  $s^R \in I_{21}^R$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_c} u_1^R \xrightarrow{(BL)} u^R. \quad (3.46)$$

- Seja  $s^R \in I_{22}^R$ , isto é,  $s_2^R \leq s^R \leq 1$ .

Neste caso, seja  $u^M$  o estado intersecção da parte do  $c$ -ramo da curva de Hugoniot  $\mathcal{H}^c(u^R)$  com a reta  $c = c^L$ . Do estado  $u^L$  para o estado  $u^M$  temos uma onda de Buckley-Leverett, e do estado  $u^M$  para o estado  $u^R$  temos uma onda  $c$ -choque. Então, pelo Lema 3.3, esta sequência de ondas é compatível. Assim, como ilustrado na Figura C.43, a solução do problema de Riemann para  $s^L \in I_2^L$  e  $s^R \in I_{22}^R$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{(BL)} u^M \xrightarrow{S_c} u^R. \quad (3.47)$$

**Analisando especificamente agora o caso  $s^R = s_2^R$ .** Da definição da função  $\varphi$  em (3.12) e do estado  $\varphi$ -extensão em (3.15) temos que  $u^L$ ,  $u_1^R$  e  $u_2^R$  satisfazem a regra do choque triplo [16], com

$$\sigma^c(u^L, u_1^R) = \sigma^c(u_1^R, u_2^R) = \sigma^s(u_1^R, u_2^R) = \sigma^s(u^L, u_2^R).$$

Além disto, temos que estes choques satisfazem a condição de entropia de viscosidade, sendo que o choque de  $u^L$  para  $u_2^R$  é supercompressivo. Assim, a solução do problema de Riemann para  $u^L$ , com  $s^L$  no intervalo  $I_2^L$  e  $u^R = (s_2^R, c^R)$  pode ser escrita no espaço de estados de três maneiras distintas, porém representando apenas uma solução no espaço físico  $xt$ , pois todas as três velocidades dos choques são iguais. As três possibilidades no espaço de estados são:

- (i) onda  $c$ -choque de  $u^L$  para  $u_1^R$  seguida de uma onda  $s$ -choque de  $u_1^R$  para  $u_2^R$ ;
- (ii) onda  $s$ -choque de  $u^L$  para  $u_2^L$  seguida de uma onda  $c$ -choque de  $u_2^L$  para  $u_2^R$ ;
- (iii) onda  $c$ -choque supercompressivo de  $u^L$  para  $u_2^R$ .

**Caso**  $s^L \in I_3^L$ , isto é,  $s^* < s \leq 1$ .

Acompanhe a construção da solução para  $s^L \in I_3^L$  pelas Figuras C.44 e C.45. Fixe  $s^L$  no intervalo  $I_3^L$ , isto é,  $s^* < s^L \leq 1$ . Sejam  $u^M = (s^M, c^R)$  e  $u^N = (s^N, c^R)$  estados intersecção do  $c$ -ramo  $\mathcal{H}^c(u^*)$  com a reta  $c = c^R$  tais que  $u^M \in \Pi_1$  e  $u^N \in \Pi_2$ . Da definição da curva de coincidência  $\mathcal{S}$  e da expressão da função  $\varphi$  temos a regra do choque triplo com

$$\lambda^s(u^*) = \sigma^c(u^*, u^M) = \sigma^c(u^*, u^N) = \sigma^s(u^M, u^N)$$

. Considere também o estado  $u_2^* = (s_2^*, c^R)$  definido pela intersecção entre a curva  $\mathcal{H}_1^c(u^L)$  com a reta  $c = c^R$ . Com isso, temos 3  $R$ -intervalos

$$I_{31}^R = [0, s^N), \quad I_{32}^R = (s^N, s_2^*) \quad \text{e} \quad I_{33}^R = (s_2^*, 1]. \quad (3.48)$$

- Seja  $s^R \in I_{31}^R$ , isto é,  $0 \leq s^R < s^N$ .

Os estados  $u^*$  e  $u^L$  estão à direita da curva  $s$ -inflexão e além disso,  $s^* < s^L$ . Logo, a  $s$ -onda que conecta o estado  $u^L$  a  $u^*$  é uma onda  $s$ -rarefação. Temos também uma onda  $c$ -choque de  $u^*$  à  $u^M$ , com  $\lambda^s(u^*) = \sigma^c(u^*, u^M)$ . Logo, do item (i) do Lema 3.3 temos que a sequência de  $u^L$  até  $u^M$  é compatível. No entanto, como  $\lambda^s(u^*) = \sigma^c(u^*, u^M)$  estas duas ondas formam apenas um grupo de ondas do tipo  $s$ -rarefação/ $c$ -choque. Do item (ii) do Lema 3.3 temos que o  $c$ -choque de  $u^*$  para  $u^M$  é compatível com a onda de Buckley-Leverett de  $u^M$  para qualquer  $u^R$  com  $0 \leq s^R < s^M$ .

Assim, como ilustrado na Figura C.44, a solução do problema de Riemann para  $s^L \in I_3^L$  e  $s^R \in I_{31}^R$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{(R_s S_c)} u^M \xrightarrow{(BL)} u^R. \quad (3.49)$$

A onda de Buckley-Leverett é determinada de acordo com a posição entre  $s^M$  e  $s^R$  como no Apêndice B.

- Seja  $s^R \in I_{32}^R$ , isto é,  $s^N < s^R \leq s_2^*$ .

Acompanhe a construção na Figura C.45. Seja agora  $u^M = (s^M, s^L)$  definido

pela intersecção da curva  $\mathcal{H}_2^c(u^R)$  com a reta  $c = c^L$ . Como  $s^M$  e  $s^L$  estão à direita da curva de inflexão e  $s^M < s^L$ , então, a onda que conecta  $u^L$  à  $u^M$  é uma onda  $s$ -rarefação. Pelo Lema 3.3(i) a sequência  $s$ -rarefação de  $u^L$  para  $u^M$  seguida de um  $c$ -choque de  $u^M$  para  $u^R$  é compatível.

Assim, a solução do problema de Riemann para  $s^L \in I_3^L$  e  $s^R \in I_{32}^R$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{R_s} u^M \xrightarrow{S_c} u^R. \quad (3.50)$$

- Seja  $s^R \in I_{33}^R$ , isto é,  $s_2^* < s^R \leq 1$ .

Acompanhe a construção na Figura C.45. Seja  $u^M$  como no caso anterior. Como  $s^M$  e  $s^L$  estão à direita da curva de inflexão e  $s^L < s^M$ , então, a onda que conecta  $u^L$  à  $u^M$  é uma onda  $s$ -choque. Pelo Lema 3.3(i) a sequência de ondas que conecta  $u^L$  à  $u^R$  é compatível.

Assim, a solução do problema de Riemann para  $s^L \in I_3^L$  e  $s^R \in I_{33}^R$  é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{S_c} u^R. \quad (3.51)$$

**Observação 3.1** *Note que, para  $s_2^*$  a solução do problema de Riemann consiste de apenas de uma onda  $c$ -choque.*

Por último vamos considerar  $s^R = s^N$ . Como dito acima, da regra do choque triplo temos que  $\sigma^c(u^*, u^M) = \sigma^c(u^*, u^N) = \sigma^s(u^M, u^N)$ . Assim, no espaço de estados  $\Omega$  há duas maneiras de conectar  $u^L$  à  $u^N$ ; ambas iniciam-se por uma onda  $s$ -rarefação conectando  $u^L$  à  $u^*$ , sendo que uma segue por uma onda  $c$ -choque de  $u^*$  para  $u^M$ , seguido de uma onda  $s$ -choque de  $u^M$  para  $u^N$  e a outra segue diretamente de  $u^*$  para  $u^N$  pela onda  $c$ -choque. Porém, como todas as velocidades destes choques são iguais ambas as maneiras levam a mesma solução no espaço físico  $xt$  que é grupo de ondas formado por uma onda  $s$ -rarefação de  $u^L$  para  $u^*$  seguida de um choque de  $u^*$  para  $u^N$ , sendo que o choque de  $u^*$  para  $u^N$  é um choque supercompressivo caracterizado pela conexão de um repulsor à um atrator no plano de fases do sistema de EDOs imposto pela condição de entropia de viscosidade.

Concluimos aqui a construção da solução do problema de Riemann para dados iniciais com  $c^L > c^R$  e conseqüentemente para todos os estados  $u^L$  e  $u^R$  no espaço de estados  $\Omega$ .

### 3.3 Exemplos

Através dos exemplos a seguir vamos ilustrar soluções do Problema de Riemann (1)-(2). Faremos um exemplo ilustrando o caso em que  $c^L < c^R$  e em seguida dois exemplos envolvendo o caso  $c^L > c^R$ .

**Exemplo 1** *Considere o Problema de Riemann (1)-(2) onde a razão da viscosidade da água pelo óleo é dada por*

$$r(c) = 0,18 + 0,65c.$$

*Com isso temos a função de fluxo*

$$f(s, c) = \frac{s^2}{s^2 + (0,18 + 0,65c)(1-s)^2}. \quad (3.52)$$

*Considere também a função de adsorção*

$$a(c) = \frac{0,2c}{1 + 0,5c}. \quad (3.53)$$

*Por último, considere o estado à esquerda  $u^L = (s^L, c^L) = (0,7; 0,3)$  e o estado à direita  $u^R = (s^R, c^R) = (0,5; 0,8)$ .*

Observe que  $c^L < c^R$ . Com isso, a solução do Exemplo 1 é obtida de acordo com as  $L$  e  $R$  regiões.

Fazendo as contas no Maple concluimos que:

- O estado  $u^L$  encontra-se na região  $L_2$  e  $u^R$  na região  $R_{25}$  (veja a Figura C.23).
- O estado  $\mathcal{C}(c^R) = (s^C, c^C)$ , obtido pela intersecção da curva de coincidência  $\mathcal{C}$  com a reta  $c = c^R$ , é dado por  $(0,672; 0,8)$ .
- O estado intermediário  $u^M = (s^M, s^L)$ , obtido pela intersecção da parte da curva integral em  $\Omega_2$  pelo estado  $\mathcal{C}(c^R)$ , é dado por  $(0,774; 0,3)$ .

Com isso temos que a solução do problema de Riemann do Exemplo 1 é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{(R_c R_s)} u^R.$$

Veja a representação desta solução no plano  $xt$  na Figura C.46. Veja também os perfis da saturação da água e da concentração do polímero, para  $t = 0, 3$ , nas Figuras C.47 e C.48, respectivamente.

**Exemplo 2** *Considere o Problema de Riemann (1)-(2) com a mesma razão de viscosidades  $r(c)$  do Exemplo 1. Consequentemente, a função de fluxo também é dada por (3.52). Considere também a função de adsorção (3.53), o estado à esquerda  $u^L = (s^L, c^L) = (0, 6; 0, 18)$  e o estado à direita  $u^R = (s^R, c^R) = (0, 33; 0, 08)$ .*

Note que  $c^L > c^R$ . Logo, a solução do problema de Riemann para o Exemplo 2 possui um choque na concentração e é obtida de acordo com os  $L$  e  $R$  intervalos.

Fazendo as contas no Maple concluímos que:

- O estado  $u^*$ , obtido pela intersecção da reta  $c = c^L$  com a curva  $\mathcal{S}$ , é dado por  $(0, 5445; 0, 18)$ .
- Para  $c^L = 0, 18$  o valor  $s^L$  encontra-se no intervalo  $I_3^L$ .
- Os estados  $u^M$  e  $u^N$ , obtidos pela intersecção do  $c$ -ramo  $\mathcal{H}^c(u^*)$  com a reta  $c = c^R$ , são  $(0, 39; 0, 08)$  e  $(0, 65; 0, 08)$ , respectivamente.
- Para  $c^R = 0, 08$  o valor  $s^R$  encontra-se no intervalo  $I_1^R$ .

O estado  $u^R$  encontra-se à direita da curva de inflexão  $\mathcal{I}$ , com isso a onda de Buckley-Leverett é um onda  $s$ -rarefação. Logo, a solução do problema de Riemann do Exemplo 2 é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{(R_s S_c)} u^M \xrightarrow{R_s} u^R.$$

A Figura C.49 ilustra a solução do Exemplo 2 no plano  $xt$ . Veja também os perfis da saturação da água e da concentração do polímero, para  $t = 0, 3$ , nas Figuras C.50 e C.51, respectivamente.

No Exemplo 2, considere agora  $u^R = u^N = (0, 65; 0, 08)$ . Com isso temos um choque supercompressivo do entre os estados  $u^*$  e  $u^R$ . Neste caso, a solução é dada

pela sequência

$$u^L \xrightarrow{(R_s S_X)} u^R,$$

onde  $S_X$  denota o choque supercompressivo com velocidade  $\sigma^X$ . Podemos também representar a solução pela sequência

$$u^L \xrightarrow{(R_s S_c S_s)} u^R.$$

Pela regra do choque triplo os choques  $\sigma^c(u^*, u^M)$ ,  $\sigma^s(u^M, u^R)$  e  $\sigma^X(u^*, u^R)$  coincidem. Logo, as duas sequências representam a mesma solução no plano  $xt$  ilustrada na Figura C.52. Veja também os perfis da saturação da água e da concentração do polímero, para  $t = 0, 3$ , nas Figuras C.53 e C.54, respectivamente.

## Capítulo 4

# Conclusões e Continuações do Trabalho.

Vimos que solução do problema de Riemann constitui-se genericamente em dois tipos. Um deles em que a concentração do polímero é alterada por uma onda de rarefação, quando o estado à esquerda possui concentração de polímero inferior ao estado à direita. O outro tipo, quando a concentração à esquerda é maior do que a concentração à direita em que a concentração do polímero muda apenas por um salto.

No primeiro caso construímos a solução detalhadamente levando em consideração inclusive as possibilidades das ondas na saturação da fase aquosa de acordo com a solução da Equação de Buckley-Leverett.

No segundo caso, nos detalhamos apenas na análise da sequência de onda de choque na concentração do polímero. Matematicamente vimos a importância da regra do choque triplo e sua relação com a condição de entropia de viscosidade e com a compatibilidade de velocidades de ondas.

Um próximo passo a ser dado é fazer comparações de soluções para dados iniciais com mesmos valores de saturação, porém considerando valores da concentração de polímero diferentes, principalmente no estado à esquerda que representa o dado de injeção.

Outro aspecto importante é também comparar soluções com mesmos dados iniciais, porém levando em conta a adsorção ou não do polímero pela rocha e também para

o modelo de injeção de água sem polímero.

Ainda como continuação do trabalho, paralelamente às questões acima, pode-se também considerar o papel da injeção de polímero em escoamentos trifásicos, a princípio com as mesmas hipóteses simplificadoras deste trabalho e depois acrescentar também os efeitos da gravidade e das pressões capilares.



# Apêndice A

## Preliminares

Neste apêndice veremos alguns conceitos necessários para a obtenção da solução global do Problema (1)-(2). Para um estudo mais aprofundado veja [15] e os anexos de [1], [3], [7] e [8] entre outros. Aqui, faremos um estudo sobre as ondas de rarefação e as ondas choque em  $\mathbb{R}^n$ .

### A.1 Sistema de Leis de Conservação no $\mathbb{R}^n$

Nesta seção vamos expor a teoria necessária para o desenvolvimento e obtenção da solução global do Problema (1)-(2).

Seja  $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$  um subconjunto do  $\mathbb{R}^n$ . Sejam  $F, G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ ,  $u(x, t) = (u_1(x, t), \cdots, u_n(x, t))$ , sendo

$$F(u) = (f_1(u), \cdots, f_n(u)) \quad \text{e} \quad G(u) = (g_1(u), \cdots, g_n(u)), \quad (\text{A.1})$$

onde os  $f_i$ 's e  $g_i$ 's são funções de classe  $C^2(\Omega_i)$  para  $i \in \{1, \cdots, n\}$  com matriz jacobiana  $dG$  inversível para todo  $u \in \Omega$ .

Considere agora o seguinte sistema de  $n$  equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g_1(u) + \frac{\partial}{\partial x} f_1(u) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t} g_n(u) + \frac{\partial}{\partial x} f_n(u) = 0, \end{cases}$$

ou na forma vetorial

$$\frac{\partial G}{\partial t}(u) + \frac{\partial F}{\partial x}(u) = 0. \quad (\text{A.2})$$

Sejam  $dF(u)$  e  $dG(u)$  as respectivas matrizes jacobianas de  $F$  e  $G$ . Dessa forma podemos definir a seguinte matriz

$$A(u) = [dG(u)]^{-1} dF(u). \quad (\text{A.3})$$

Para soluções suaves, o Sistema (A.2) pode ser escrito como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (\text{A.4})$$

A matriz  $A(u)$  possui  $n$  autovetores nos quais são chamados de *velocidades características*. Cada velocidade característica determina uma família característica  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Definição A.1** *Sejam  $\lambda^1(u), \dots, \lambda^n(u)$  valores característicos reais e distintos da matriz (A.3). Quando  $\lambda^1(u) \leq \dots \leq \lambda^n(u)$  para todo  $u \in \Omega$ , dizemos que o Sistema (A.2) é não estritamente hiperbólico. Quando os valores característicos são reais e possuem desigualdades estritas, então o sistema é dito estritamente hiperbólico.*

Para cada velocidade característica temos um autovetor direito (coluna) correspondente. Denotaremos os autovetores à direita por  $e^1, \dots, e^n$  correspondendo respectivamente às velocidades características  $\lambda^1, \dots, \lambda^n$ . Estes autovetores são chamados de *campos característicos*.

O Sistema (A.2) com a condição valor inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} u^L, & \text{se } x < 0 \\ u^R, & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

é chamado de problema de Riemann. Esta condição possui um salto na origem onde  $u^L$  e  $u^R$  são estados distintos fixados a esquerda e a direita respectivamente. Geralmente, as soluções deste problema são descontínuas e com isto teremos soluções fracas  $u \in L^1_{Loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  que satisfazem

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty G(u(x, t)) \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, t) + F(u) \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) dx dt + \int_{-\infty}^\infty G(u(x, 0)) \Phi(x, 0) dx = 0,$$

onde  $\Phi$  é uma função suave de suporte compacto no semiplano fechado  $\overline{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+}$ .

Seja  $u(x, t)$  uma solução do Problema de Riemann (A.2)-(A.5). Então, para  $a > 0$ ,  $u(ax, at)$  também é solução. Isto significa que o Problema (A.2)-(A.5) independe de escala, ou seja, a mudança de coordenadas  $(x, t) \rightarrow (ax, at)$ ,  $a > 0$  não altera o sistema de equações e nem as condições iniciais. Com isso, a solução do problema de Riemann depende apenas da razão  $x/t$ .

## A.2 Soluções Contínuas

Seja  $\xi = x/t$  e suponha que  $u(x, t) = v(\xi)$  seja solução clássica do sistema (A.2). Em função de  $v(\xi)$ , este sistema é escrito na forma

$$[dF(\xi) - \xi dG(\xi)] v'(\xi) = 0, \quad (\text{A.6})$$

onde  $v'(\xi)$  denota a derivada de  $v(\xi)$ . Como  $dG(u)$  é invertível multiplique (A.6) por  $[dG(u)]^{-1}$ . Usando a expressão (A.3) temos

$$[A(v(\xi)) - \xi I_d] v'(\xi) = 0, \quad (\text{A.7})$$

onde  $I_d$  é a matriz identidade do  $\mathbb{R}^n$ . Da Equação (A.7), se  $v'(\xi) \neq 0$ , concluímos que  $v'$  é um campo característico (à direita) da matriz  $A(u)$  associado à velocidade característica  $\lambda(u) = \xi$ . Logo, as soluções suaves do Sistema (A.2) estão nas curvas integrais dos campos característicos de  $A(u)$  e com isso satisfazem o sistema de EDO's,

$$v'(\xi) = e^i(v(\xi)), \quad (\text{A.8})$$

com a condição

$$\xi = \lambda^i(v(\xi)). \quad (\text{A.9})$$

**Definição A.2** *Sejam  $u^L$  e  $u^R$  os estados definidos na condição inicial (A.5). Dizemos que o estado  $u^L$  é conectado ao estado  $u^R$  por uma onda  $i$ -rarefação se  $u^L$  e  $u^R$  estão conectados pela mesma curva integral do  $i$ -ésimo campo característico definido por (A.8) onde (A.9) cresce com o parâmetro  $\xi$  ao longo da curva integral de  $u^L$  para  $u^R$ .*

A exigência de (A.9) ser crescente de  $u^L$  para  $u^R$  significa que no espaço  $xt$ , a inclinação  $\xi = x/t$  deve ser estritamente crescente, em relação ao eixo  $t$ , de  $\xi^L = \lambda^i(u^L)$  para  $\xi^R = \lambda^i(u^R)$  de modo que as retas características  $\lambda^i(u(\xi))$  cubram toda região do plano  $xt$ , com  $t > 0$  entre as retas de inclinações  $\lambda^i(u^L)$  e  $\lambda^i(u^R)$ . Veja a Figura A.1.

**Definição A.3** *Uma curva de rarefação da família  $i$  (ou  $i$ -rarefação) por um estado inicial  $u^L$  é o conjunto de estados  $u \in \Omega$  que podem ser conectados ao estado  $u^R$  por uma onda  $i$ -rarefação.*

Sejam  $\lambda$  uma velocidade característica da matriz (A.3) e  $e$  seu campo característico correspondente. Uma onda de rarefação de  $u^L$  para  $u^R$  (ou conectando  $u^L$  à  $u^R$ ) é uma solução contínua de (A.2) da forma

$$u(x, t) = \begin{cases} u^L, & \text{se } \frac{x}{t} < \lambda^i(u^L) \\ v, & \text{se } \lambda^i(u^L) \leq \frac{x}{t} \leq \lambda^i(u^R) \\ u^R, & \text{se } \frac{x}{t} > \lambda^i(u^R), \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

onde  $v$  é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = e^i(v) \\ v(0) = u^L \end{cases}$$

tal que a velocidade característica  $\lambda^i(v)$  cresça de  $\lambda^i(u^L)$  para  $\lambda^i(u^R)$  quando  $v$  variar de  $u^L$  até  $u^R$ . Veja a Figura A.1.

**Definição A.4** *A família característica é dita genuinamente não-linear na região  $D \subset \Omega$  se*

$$\nabla \lambda^i(u) e^i(u) \neq 0$$

em  $D$ . Neste caso podemos normalizar  $e^i$  de tal forma que  $\nabla \lambda^i(u) e^i(u) = 1$ . Em outras palavras, a  $i$ -ésima velocidade característica é uma função estritamente monótona sobre a curva integral relacionada ao campo de vetores  $e^i$ 's associado, no subconjunto  $D$ . Por outro lado, se  $\nabla \lambda^i(u) e^i(u) \equiv 0$ , diz-se que o campo é linearmente degenerado.

O Sistema (A.2) é genuinamente não linear em  $D$ , se todos os seus campos característicos são genuinamente não lineares em  $D$ .

**Definição A.5** O conjunto de inflexão associado à  $i$ -ésima família característica é formado pelos estados  $u \in \Omega$  tais que

$$\nabla \lambda^i(u) e^i(u) = 0.$$

Ou seja, o conjunto de inflexão é formado pelos pontos críticos dos valores característicos, restritos as curvas integrais dos respectivos campos característicos dados pela equação (A.8).

Das definições (A.5)-(A.2) temos que os pontos num conjunto de inflexão em geral estão associados a pontos iniciais ou pontos finais de curvas de rarefação.

### A.3 Soluções Descontínuas

Nesta seção do Apêndice vamos caracterizar as soluções descontínuas do Problema de Riemann (A.2)-(A.5). Seja  $\sigma \in \mathbb{R}$  tal que exista uma descontinuidade de  $u$  ao longo da reta  $x = t\sigma$ .

**Definição A.6** Sejam  $u^L$  e  $u^R$  os estados definidos em (A.5). Chama-se relação de Rankine-Hugoniot, de velocidade  $\sigma \in \mathbb{R}$ , à expressão

$$\mathcal{H}(u^L, \sigma, u^R) \equiv F(u^R) - F(u^L) - \sigma [G(u^R) - G(u^L)] = 0. \quad (\text{A.11})$$

Quando precisamos citar os estados relacionados, digamos  $u^L$  e  $u^R$ , a velocidade  $\sigma$  de choque é denotada por  $\sigma(u^L, u^R)$ .

Considere  $u^L$  fixo na equação (A.11) com  $\sigma$  e  $u^R$  variáveis. Agora substitua  $\sigma$  por  $\sigma^*$  e  $u^R$  por um estado arbitrário  $u \in \Omega$ . Então teremos um sistema de  $n$  equações algébricas e  $n + 1$  incógnitas  $\sigma^*$  e  $u$  dado por

$$\mathcal{H}(u^L, \sigma^*, u) \equiv F(u) - F(u^L) - \sigma^* [G(u) - G(u^L)] = 0. \quad (\text{A.12})$$

Da mesma forma podemos fixar  $u^R$  em (A.11) e variar os valores  $\sigma^*$  e  $u^L$ . Com isso obtemos o sistema

$$\mathcal{H}(u, \sigma^*, u^R) \equiv F(u^R) - F(u) - \sigma^* [G(u^R) - G(u)] = 0. \quad (\text{A.13})$$

**Definição A.7** Fixe um estado  $u^0 \in \Omega$ . A curva de Hugoniot por  $u^0$ , denotada por  $\mathcal{H}(u^0)$ , é o conjunto dos estados  $u \in \Omega$  tais que exista  $\sigma \in \mathbb{R}$  satisfazendo a equação (A.12) para  $u^L = u^0$  ou a equação (A.13) para  $u^R = u^0$ .

Em [10], Lax provou que, para  $u$  numa vizinhança de  $u^0$ , a curva de Hugoniot  $\mathcal{H}(u^0)$  é composta por  $n$  curvas suaves  $\mathcal{H}^i(u^0)$  denominadas  $i$ -ramos de Hugoniot, com  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

A solução descontínua do problema de Riemann (A.2)-(A.5) com velocidade de propagação  $\sigma$  é dada pela seguinte função

$$u(x, t) = \begin{cases} u^L, & \text{se } \frac{x}{t} < \sigma \\ u^R, & \text{se } \frac{x}{t} > \sigma, \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

onde  $u^L$  e  $u^R$  são os estados definidos em (A.5). Veja a Figura A.2.

Mais adiante veremos critérios que determinam a unicidade (baseado em fenômenos físicos) deste tipo de solução. Estes critérios são conhecidos como Condições de Entropia. Quando estas soluções satisfazem alguma condição de entropia, isto é, elas são soluções descontínuas admissíveis, estas soluções passam a ser denominadas ondas de choque.

**Definição A.8** *Uma curva choque por um estado inicial  $u^L$  é o conjunto de estados  $u \in \Omega$  que podem ser conectados ao estado  $u^R$  por uma onda choque.*

A onda de choque possui  $n$  famílias, cada uma relacionada a um  $i$ -ramo da curva de Hugoniot. Chamemos a onda de choque relacionada a família  $i$  por onda  $i$ -choque.

## A.4 Onda Composta

Quando o campo característico é linearmente degenerado um outro tipo de onda surge da combinação de uma onda de rarefação seguida de uma onda de choque. Chamaremos esta composição de onda composta. Na realidade, só existem dois tipos de onda, rarefação e choque, porém, denominaremos a onda composta como uma terceira onda.

**Definição A.9** *Uma curva composta por um estado inicial  $u^L$ , associado ao  $i$ -ésimo campo característico, ou  $i$ -composta, é o conjunto de estados  $u$  de  $\Omega$  tais que exista um estado  $u^* \in \Omega$  de maneira que  $u^*$  seja conectável a  $u^R$  por uma onda  $i$ -rarefação, e que  $u$  seja conectável a  $u^*$  por uma onda  $i$ -choque de velocidade  $\sigma = \lambda^i(u^*)$ .*

A solução do problema de Riemann por uma onda composta rarefação-choque é dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} u^L, & \text{se } \frac{x}{t} < \lambda^i(u^L) \\ v, & \text{se } \lambda^i(u^L) \leq \frac{x}{t} \leq \lambda^i(u^*) \\ u^R, & \text{se } \frac{x}{t} > \lambda^i(u^*), \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

onde  $v$  é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = e^i(v) \\ v(0) = u^L \end{cases}$$

tal que o valor característico (ou autovalor)  $\lambda^i(v)$  cresça de  $\lambda^i(u^L)$  para  $\lambda^i(u^*)$  quando  $v$  variar de  $u^L$  até  $u^*$  e  $\lambda^i(u^*)$  é a velocidade de propagação do choque que conecta  $u^*$  a  $u^R$ . Veja a representação  $xt$  na Figura A.3.

As ondas do tipo choque e composta não possuem unicidade. Por isso, devemos impor condições de unicidade que serão vistas na Seção a seguir.

## A.5 Condições de Entropia

Para que a onda do tipo choque de velocidade  $\sigma$ , entre dois estados  $s^L$  e  $s^R$  fixados, seja admissível na solução ela deve satisfazer alguma condição extra, chamada de condição de entropia. Esta condição estabelece uma única solução descontínua na qual esta solução possua significado físico. Iremos citar apenas algumas.

### Condição de Entropia de Lax

A fim de obter admissibilidade de soluções descontínuas para sistemas de leis de conservação estritamente hiperbólicos com campos característicos genuinamente não lineares, [10] Lax estabeleceu critérios utilizando comparações (desigualdades) envolvendo os campos característicos e a velocidade de propagação.

Uma onda de choque entre os estados  $u^L$  e  $u^R$ , com velocidade de propagação  $\sigma$ , é uma solução admissível segundo a condição de entropia de Lax se estes estados

satisfazem as desigualdades

$$\lambda^{i-1}(u^L) < \sigma < \lambda^i(u^R), \quad \lambda^i(u^R) < \sigma < \lambda^{i+1}(u^R). \quad (\text{A.16})$$

A condição de entropia de Lax [10] para a onda  $i$ -choque está associada à  $i$ -ésima família característica, no sentido que as retas características associadas a esta família se encontram ao longo da reta de descontinuidade  $x = \sigma t$  provenientes de lados distintos desta.

Veja a seguir o caso particular para um sistema de leis de conservação  $2 \times 2$ .

1-Choque de Lax

$$\lambda^1(u^R) < \sigma < \lambda^1(u^L), \quad \sigma < \lambda^2(u^R). \quad (\text{A.17})$$

2-Choque de Lax

$$\lambda^1(u^R) < \sigma < \lambda^1(u^L), \quad \lambda^1(u^R) < \sigma. \quad (\text{A.18})$$

Para campos linearmente degenerados, a condição de entropia de Lax não é suficiente para obtermos uma solução adequada do problema de Riemann. Veja um exemplo em [6]. Por isso precisamos utilizar outras condições de entropia. A seguir, veremos a condição de Oleinik-Liu [11], [12] e [15].

### Condição de Entropia de Oleinik-Liu

Com o mesmo objetivo de Lax, O. A. Oleinik e Tai-Ping Liu, desenvolveram uma outra condição de entropia para obter soluções descontínuas admissíveis. Ao contrário de Lax, a condição de Entropia de Oleinik-Liu visa em obter admissibilidade de soluções descontínuas para sistemas de leis de conservação não estritamente hiperbólicos com campos característicos linearmente degenerados,

A condição de Entropia de Oleinik-Liu foi desenvolvido primeiramente por Oleinik para o caso da reta real [15] e posteriormente, para o  $\mathbb{R}^2$ , por Tai-Ping Liu [11] em 1974. No ano seguinte Tai-Ping Liu desenvolveu a condição para todo o  $\mathbb{R}^n$  [12].

Defina a função velocidade  $\sigma : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\sigma(u_1, u_2) [G(u_1) - G(u_2)] = F(u_1) - F(u_2), \quad (\text{A.19})$$



em que  $F$  e  $G$  são as aplicações definidas em (A.1). Uma onda de choque satisfaz a condição de entropia de Oleinik-Liu se as desigualdades

$$\sigma(u, u^L) \leq \sigma(u^R, u^L) \leq \sigma(u, u^R), \quad (\text{A.20})$$

para  $u \in \mathcal{H}(u^L)$  são satisfeitas.

No caso da reta real, ao contrário da condição de entropia de Lax, a condição de entropia de Oleinik-Liu nos dá a possibilidade de analisar o caso em que a função de fluxo não seja convexa ( $f''$  pode trocar de sinal).

### Condição de Entropia de Viscosidade

Dado  $\varepsilon > 0$ , considere a perturbação (equação parabólica) do sistema (A.2)

$$\frac{\partial G}{\partial t}(u) + \frac{\partial F}{\partial x}(u) = \varepsilon \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(u). \quad (\text{A.21})$$

Suponha que o sistema (A.21) possua solução do tipo onda viajante da forma  $v(\xi) = (u_1(\xi), \dots, u_n(\xi))$ , com  $\xi = (x - \sigma t)/\varepsilon$ . Substituindo  $v(\xi)$  na equação (A.21) obtemos

$$-\frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{dG}{d\xi}(v(\xi)) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{dF}{d\xi}(v(\xi)) = \varepsilon \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d^2 G}{d\xi^2}(v(\xi)) \right). \quad (\text{A.22})$$

Considere o sistema (A.22) satisfazendo as condições de contorno

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} v(\xi) = u^L, \quad (\text{A.23})$$

e

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} v(\xi) = u^R. \quad (\text{A.24})$$

Simplificando o Sistema (A.22) temos

$$-\sigma \frac{dG}{d\xi}(v(\xi)) + \frac{dF}{d\xi}(v(\xi)) = \frac{d^2 G}{d\xi^2}(v(\xi)). \quad (\text{A.25})$$

Integrando o Sistema (A.25) em  $\xi$  e levando em consideração a condição de contorno

(A.23) obtemos

$$\int_{-\infty}^{\xi} \frac{d^2 G}{d\eta^2}(v(\eta)) d\eta = \int_{-\infty}^{\xi} \frac{dF}{d\eta}(v(\eta)) d\eta - \sigma \int_{-\infty}^{\xi} \frac{dG}{d\eta}(v(\eta)) d\eta.$$

Resolvendo as integrais obtemos o seguinte sistema de EDO's

$$\frac{dG}{d\xi}(v) = F(v) - F(u^L) - \sigma(G(v) - G(u^L)) \equiv \mathcal{H}(u^L, \sigma, v). \quad (\text{A.26})$$

Observe que o estado  $u^L$  é ponto singular do sistema (A.26). Da relação de Rankine-Hugoniot  $\mathcal{H}(u^L, \sigma, u^R) = 0$  temos que o estado  $u^R$  também é ponto singular deste sistema. Além disso, todos os pontos singulares do sistema (A.26) estão sobre a curva de Hugoniot tanto pelo estado  $u^L$  quanto pelo estado  $u^R$ .

**Definição A.10** *Uma onda de choque do problema (A.2)-(A.5) com velocidade de propagação  $\sigma$  conectando os estados  $u^L$  e  $u^R$  é admissível, segundo a condição de entropia de viscosidade, se existir uma órbita do sistema de equações diferenciais ordinárias (A.26) de tal forma que as condições (A.23) e (A.24) sejam satisfeitas.*

Para obter mais detalhes sobre a Condição de Entropia de viscosidade consulte [5].

Observe que as condições de entropia de Oleinik-Liu e a de viscosidade não estão relacionados com as famílias características, portanto, estas condições são apropriadas para serem utilizadas em sistemas de leis de conservação não estritamente hiperbólicos.

## A.6 Figuras do Apêndice A

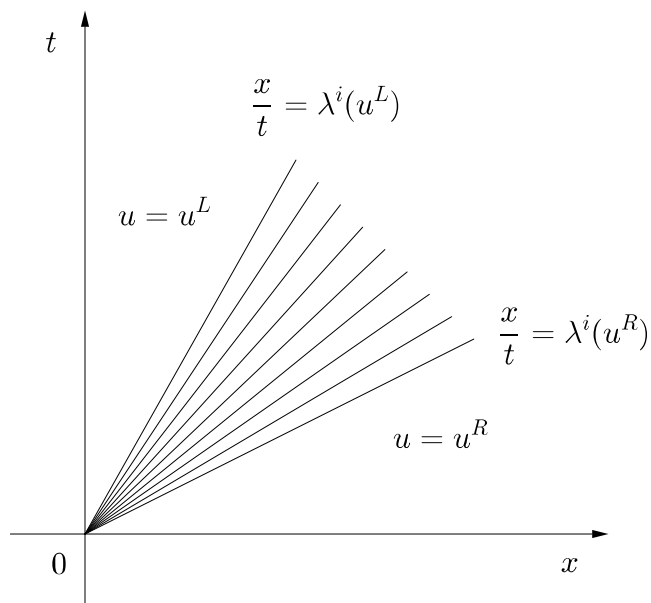


Figura A.1: Onda de Rarefação no plano  $xt$  para os estados  $s^L$  e  $s^R$

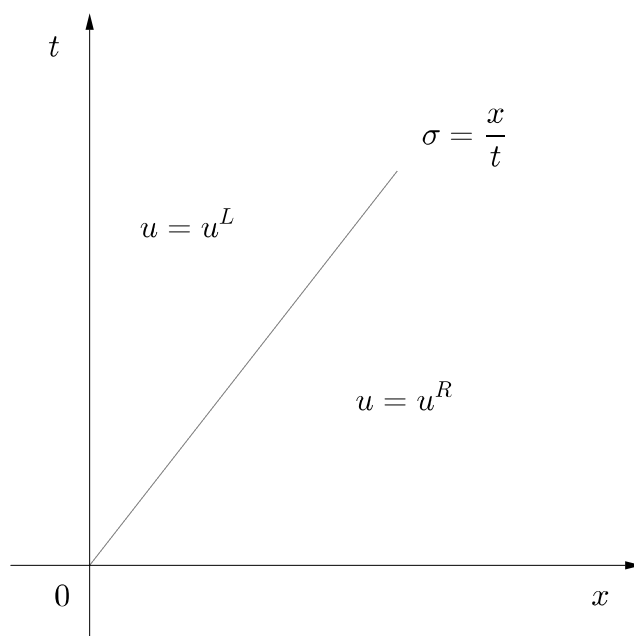


Figura A.2: Onda de Choque no plano  $xt$  para os estados  $s^L$  e  $s^R$ . Descontinuidade em  $\frac{x}{t} = \sigma$ .

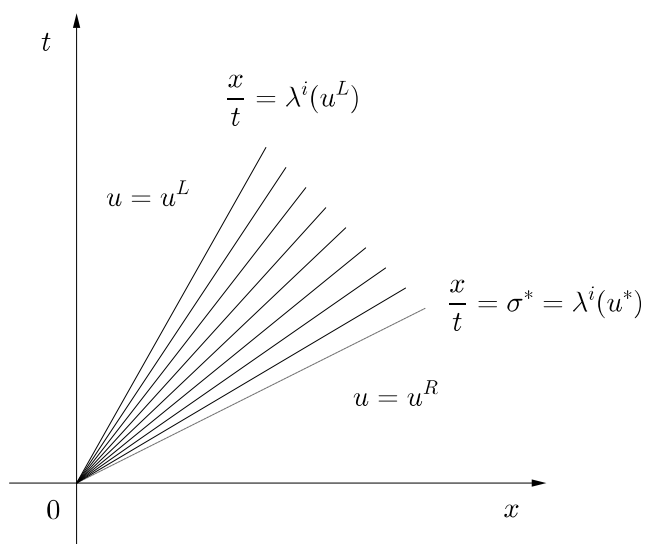


Figura A.3: Onda composta rarefação-choque para os estados  $s^L$  e  $s^R$ . Descontinuidade em  $\sigma^*$ .

# Apêndice B

## A Equação de Buckley-Leverett

### B.1 Solução da Equação de Buckley-Leverett

Neste apêndice, focaremos na equação de Buckley-Leverett. Um passo fundamental para a obtenção da solução global do Problema de Riemann (1)-(2) é conhecer a solução do problema de Riemann para o caso da equação de Buckley-Leverett. Utilizaremos ondas de rarefação, ondas de choque ou a composta (rarefação-choque) para a obtenção desta solução.

Considere a equação

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial f(s)}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{B.1})$$

onde  $s = s(x, t)$ , com função de fluxo  $f$  é definida por

$$f(s) = \frac{s^2}{s^2 + r(1-s)^2},$$

na qual  $r = \mu/\mu_o$  onde  $\mu$  e  $\mu_o$  são as viscosidades da fase aquosa e do óleo, respectivamente. O problema de Riemann consiste da Equação (B.1) juntamente com a condição inicial

$$s(x, 0) = \begin{cases} s^L, & \text{se } x < 0 \\ s^R, & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

em que  $s^L$  e  $s^R$  são valores distintos.

A solução do Problema de Riemann (B.1)-(B.2) é composta por dois tipos de ondas elementares: rarefação, choque e também por uma onda composta rarefação-choque. Estas ondas são obtidas de acordo com os valores dos estados  $s^L$  e  $s^R$  fixados.

*Onda de rarefação* - É uma solução contínua de classe  $C^1$  em setores do plano  $xt$ . Para que exista solução tipo onda de rarefação é necessário que  $f'(s)$  seja crescente de  $f'(s^L)$  para  $f'(s^R)$  quando  $s$  varia continuamente de  $s^L$  para  $s^R$ . Portanto para  $s^L < s^R$  é necessário que  $f''(s) > 0$  e se  $s^L > s^R$  o contrário. A solução do problema de Riemann (B.1)-(B.2) tipo onda de rarefação é dada por

$$s(x, t) = \begin{cases} s^L, & \text{se } \frac{x}{t} < f'(s^L) \\ [f']^{-1}\left(\frac{x}{t}\right), & \text{se } f'(s^L) \leq \frac{x}{t} \leq f'(s^R) \\ s^R, & \text{se } \frac{x}{t} > f'(s^R). \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

onde  $[f']^{-1}$  é a função inversa da derivada da função  $f$ . Veja a ilustração de uma solução por rarefação no plano  $xt$  na Figura B.1.

*Onda de Choque* - É uma solução do Problema de Riemann (B.1)-(B.2) descontínua ao longo da reta  $\frac{x}{t} = \sigma$ , onde  $\sigma$  é obtida pela relação de Rankine-Hugoniot

$$\sigma(s^L - s^R) = f(s^L) - f(s^R).$$

A solução tipo choque deste problema é dada por

$$s(x, t) = \begin{cases} s^L, & \text{se } \frac{x}{t} < \sigma \\ s^R, & \text{se } \frac{x}{t} > \sigma. \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

A Figura B.2 ilustra uma solução do tipo choque no plano  $xt$ .

Para que a onda do tipo choque de velocidade  $\sigma$ , entre dois estados  $s^L$  e  $s^R$  fixados, seja admissível na solução ela deve satisfazer alguma condição extra, chamada de condição de entropia. Vamos citar duas delas, pois as usaremos com muita frequência. Outras condições de entropia podem ser encontradas em [15]. Uma delas é a *Condição Oleinik-Liu*. Esta condição é dada pelas desigualdades

$$\frac{f(s) - f(s^R)}{s - s^R} \leq \sigma \leq \frac{f(s) - f(s^L)}{s - s^L}, \quad \forall s \text{ entre } s^L \text{ e } s^R. \quad (\text{B.5})$$

Esta condição constitui em comparar a inclinação  $\sigma$  da secante ao gráfico de  $f$  pelos

pontos  $(s^L, f(s^L))$  e  $(s^R, f(s^R))$  com as inclinações das retas secantes que contém os pontos  $(s^R, f(s^R))$  e  $(s, f(s))$  com a inclinação (devem ser menores ou igual a inclinação  $\sigma$ ) e com as inclinações das secantes que contém os pontos  $(s^L, f(s^L))$  e  $(s, f(s))$  (devem ser maiores ou igual a inclinação  $\sigma$ ). Uma outra condição de entropia clássica para equações escalares é a *Condição de Lax*, dada por

$$f'(s^R) < \sigma < f'(s^L). \quad (\text{B.6})$$

Esta condição compara as inclinações das retas tangentes ao gráfico de  $f$  nos pontos  $(s^R, f(s^R))$  e  $(s^L, f(s^L))$  com a inclinação  $\sigma$  da reta secante por estes mesmos pontos. No caso em que o gráfico  $f$  é convexo ( $f'' > 0$ ) as duas condições são equivalentes. No entanto se o gráfico de  $f$  não for convexo, que é o caso de Buckley-Leverett, isto não é verdade.

Para as ondas de choque, vamos usar a condição de entropia de Oleinik-Liu, sendo que para choques envolvendo dados iniciais  $(s^L, c^L)$  e  $(s^R, c^R)$  ambos em setores onde o gráfico de  $f$  seja côncavo para cima ou para baixo ela se reduz à condição de entropia Lax.

A condição de entropia de Oleinik-Liu também coincide com a condição de viscosidade, pois ela, a condição de Oleinik-Liu, afirma que a reta secante de inclinação  $\sigma$ , não pode cruzar o gráfico de  $f$  para  $s$  entre  $s^L$  e  $s^R$  significando assim que não existe ponto singular da EDO, que define a condição de viscosidade, entre  $s^L$  e  $s^R$ . Assim, obrigatoriamente, deve haver uma órbita ligando  $s^L$  à  $s^R$ .

*Onda composta* (rarefação-choque) - É uma solução por uma onda de rarefação seguida por choque cobrindo todo um setor do plano  $xt$  sem estados constantes entre as duas ondas. Para isto teremos que ter um estado  $s^*$  entre  $s^L$  e  $s^R$  tal que o Problema de Riemann com dados  $s^L$  para  $x < 0$  e  $s^*$  para  $x > 0$  tenha solução por uma rarefação e o Problema de Riemann com dados  $s^*$  para  $x < 0$  e  $s^R$  para  $x > 0$  tenha uma solução por choque com velocidade  $\sigma^*$  sendo que obrigatoriamente  $\sigma^* = f'(s^*)$ . O ponto  $(s^*, f(s^*))$  é conhecido como ponto de Welge [4]. No ponto de Welge a reta tangente ao gráfico de  $f$  coincide com a reta pelos pontos  $(s^*, f(s^*))$  e  $(s^R, f(s^R))$ .

Sendo assim, a solução do problema de Riemann por uma onda composta rarefação-

choque é dada por

$$s(x, t) = \begin{cases} s^L, & \text{se } \frac{x}{t} < f'(s^L) \\ [f']^{-1}\left(\frac{x}{t}\right), & \text{se } f'(s^L) \leq \frac{x}{t} \leq f'(s^*) \\ s^R, & \text{se } \frac{x}{t} > f'(s^*). \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Veja uma representação no plano  $xt$  na Figura B.3.

Passemos a descrever a solução do problema de Riemann. Seja  $s^I$  o ponto de inflexão do gráfico da função  $f$ . Como dito anteriormente, a solução depende dos estados  $s^L$  e  $s^R$  fixados. Portanto vamos considerar todos os casos possíveis para  $s^L$  e  $s^R$ . Para tal introduziremos a função extensão a seguir.

Seja  $\Phi^1 : [0, s^I] \times (s^I, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\Phi^1(s_1, s_2) = (s_1 - s_2) f'(s_2) + f(s_2) - f(s_1).$$

Considere o par de pontos  $(0, s_0^*)$  tal que  $s_0^* = 1/\sqrt{1+r^{-1}}$  é ponto de Welge relacionado a  $s = 0$ . Por definição de ponto de Welge concluímos que

$$\Phi^1(0, s_0^*) = 0.$$

Como a função  $f$  é de classe  $C^2$  então  $\Phi^1$  é de classe  $C^1$ . Além disso, como  $s_1 < s_2$  temos

$$\frac{\partial \Phi^1}{\partial s_2}(s_1, s_2) = (s_1 - s_2) f''(s_2) > 0$$

e

$$\frac{\partial \Phi^1}{\partial s_1}(s_1, s_2) = f'(s_2) - f'(s_1).$$

Do Teorema da Função Implícita, existem  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , uma vizinhança

$$V_{(0, s_0^*)} = V_{\delta_1} \times V_{\delta_2} \subset I \times I \quad (\text{B.8})$$

de  $(0, s_0^*)$ , e uma única função  $\varepsilon_1 : V_{\delta_1} \rightarrow V_{\delta_2}$  onde

$$V_{\delta_1} = \{s_1 : 0 \leq s_1 < \delta_1\} \quad \text{e} \quad V_{\delta_2} = \{s_2 : 0 \leq s_2 < \delta_2\}$$

tal que  $(s_1, \varepsilon_1(s_1)) \in V_{(0, s_0^*)}$  e  $\Phi^1(s_1, \varepsilon_1(s_1)) = 0$  para todo  $s_1 \in V_{\delta_1}$ . Além disso,  $\varepsilon_1$  é



de classe  $C^1$  e

$$\frac{d\varepsilon_1}{ds_1} = -\frac{\Phi_{s_1}^1}{\Phi_{s_2}^1}.$$

Para o ponto  $(s_1, \varepsilon(s_1))$  temos  $f'(s_1) < f'(\varepsilon(s_1))$ . Veja a Figura B.4. Com isso,

$$\frac{d\varepsilon_1}{ds_1}(s_1) = -\frac{\Phi_{s_1}^1(s_1, \varepsilon(s_1))}{\Phi_{s_2}^1(s_1, \varepsilon(s_1))} < 0,$$

isto é, a função  $\varepsilon_1$  é decrescente. Além disso, o domínio da função  $\varepsilon_1$  pode ser estendido para  $[0, s^I)$  e a imagem para  $(s^I, 1]$ .

Seja  $\Phi^2 : (s^I, 1] \times [0, s^I) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\Phi^2(s_1, s_2) = (s_1 - s_2)f'(s_2) + f(s_2) - f(s_1).$$

Considere o par de pontos  $(1, s_1^*)$  tal que  $s_1^* = 1 - 1/\sqrt{1+r}$  é ponto de Welge relacionado a  $s = 1$ . Da definição de ponto de Welge concluímos que

$$\Phi^2(1, s_1^*) = 0.$$

De forma análoga ao caso da função  $\Phi^1$ , existe uma única função  $\varepsilon_2 : (s^I, 1] \rightarrow [0, s^I)$  de classe  $C^1$  decrescente tal que  $\Phi^2(s_1, \varepsilon_2(s_1)) = 0$  para todo  $s_1 \in (s^I, 1]$ .

Defina a função *extensão*  $\varepsilon : I \rightarrow I$  da seguinte forma

$$\varepsilon(s) = \begin{cases} \varepsilon_1(s), & \text{se } s < s^I \\ s^I, & \text{se } s = s^I \\ \varepsilon_2(s), & \text{se } s > s^I. \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Das propriedades das funções  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  a função  $\varepsilon$  é contínua. Além disso  $\varepsilon$  é injetiva, estritamente decrescente e tem imagem  $[\varepsilon(1), \varepsilon(0)] \subsetneq I$ .

Da forma que a função extensão foi definida os valores do conjunto imagem, a menos de  $\varepsilon(s^I)$ , determinam pontos de Welge onde a reta tangente ao gráfico de  $f$  pelo ponto  $(\varepsilon(s), f(\varepsilon(s)))$  coincide com a reta secante que passa pelo ponto  $(\varepsilon(s), f(\varepsilon(s)))$  e pelo ponto  $(s, f(s))$ .

A partir de agora vamos obter a solução do problema de Riemann para a equação de Buckley-Leverett. Como dito anteriormente, as ondas de choque devem satisfazer

a condição de entropia de Oleinik-Liu. No total, serão 14 casos a serem considerados. A metodologia é dividir o intervalo  $I$  em subintervalos disjuntos para os estados  $s^L$  e para cada  $s^L$  fixado, dividir (novamente) o intervalo  $I$  em subintervalos disjuntos para os estados  $s^R$ , de tal forma a considerar todos os possíveis pares  $(s^L, s^R)$ .

Para  $s^L$ , considere os subintervalos  $[0, \varepsilon(1))$ ,  $[\varepsilon(1), s^I]$ ,  $[s^I, \varepsilon(0)]$  e  $(\varepsilon(0), 1]$ . As divisões de  $I$  para  $s^R$  dependem de  $s^L$  fixado.

A seguir, enunciaremos as soluções do problema de Riemann para a equação de Buckley-Leverett em forma de lemas.

**Lema B.1** *Seja  $s^L$  fixo em  $[0, \varepsilon(1))$ .*

- (i) *Se  $s^L > 0$  e  $s^R \in [0, s^L)$ , então a solução do Problema de Riemann para a equação de Buckley-Leverett é uma onda de choque (Veja a Figura B.5);*
- (ii) *Para  $s^R \in (s^L, s^I]$  a solução é uma onda de rarefação (Veja a Figura B.6);*
- (iii) *Para  $s^R \in (s^I, 1]$  a solução é uma onda composta formada de uma rarefação ligando  $s^L$  à  $\varepsilon(s^R)$  e um choque de  $\varepsilon(s^R)$  para  $s^R$ . Veja a Figura B.7.*

**Lema B.2** *Seja  $s^L$  fixo no intervalo  $[\varepsilon(1), s^I]$ .*

- (i) *Para  $s^R \in [0, s^L)$  a solução do Problema de Riemann para a equação de Buckley-Leverett é uma onda de choque (Veja a Figura B.8);*
- (ii) *Se  $s^L < s^I$  e  $s^R \in (s^L, s^I]$ , então a solução é uma onda de rarefação (Veja a Figura B.9);*
- (iii) *Se  $s^L < s^I$  e  $s^R \in (s^I, \varepsilon^{-1}(s^L))$ , então a solução é uma onda composta formada de uma rarefação ligando  $s^L$  à  $\varepsilon(s^R)$  e um choque de  $\varepsilon(s^R)$  para  $s^R$  (Veja a Figura B.10);*
- (iv) *Para  $s^R \in [\varepsilon^{-1}(s^L), 1]$  a solução é uma onda de choque (Veja a Figura B.11).*

**Lema B.3** *Seja  $s^L$  fixo no intervalo  $[s^I, \varepsilon(0)]$ .*

- (i) *Para  $s^R \in [0, \varepsilon^{-1}(s^L)]$  a solução do Problema de Riemann para a equação de Buckley-Leverett é uma onda de choque (Veja a Figura B.12);*
- (ii) *Se  $s^L > s^I$  e  $s^R \in (\varepsilon^{-1}(s^L), s^I)$ , então a solução é uma onda composta formada de uma rarefação ligando  $s^L$  à  $\varepsilon(s^R)$  e um choque de  $\varepsilon(s^R)$  para  $s^R$  (Veja a Figura B.13);*

(iii) Se  $s^L > s^I$  e  $s^R \in [s^I, s^L)$ , então a solução é uma onda de rarefação. (Veja a Figura B.14);

(iv) Para  $s^R \in (s^L, 1]$  a solução é do tipo choque (Veja a Figura B.15).

**Lema B.4** Seja  $s^L$  fixo no intervalo  $(\varepsilon(0), 1]$ .

(i) Para  $s^R \in [0, s^I)$  a solução do Problema de Riemann para a equação de Buckley-Leverett é uma onda composta formada de uma rarefação ligando  $s^L$  à  $\varepsilon(s^R)$  e um choque de  $\varepsilon(s^R)$  para  $s^R$  (Veja a Figura B.16);

(ii) Para  $s^R \in [s^I, s^L)$  a solução é uma onda de rarefação (Veja a Figura B.17);

(iii) Se  $s^L < 1$  e  $s^R \in (s^L, 1]$ , então a solução é uma onda de choque (Veja a Figura B.18).

A demonstração dos lemas seguem do processo de construção da solução.

## B.2 Figuras do Apêndice B

Os gráficos a seguir foram construídos com ajuda do software Geogebra. Para a construção das figuras a seguir utilizamos a função de fluxo  $f(s) = s^2 / [s^2 + 0,6(1-s)^2]$ .

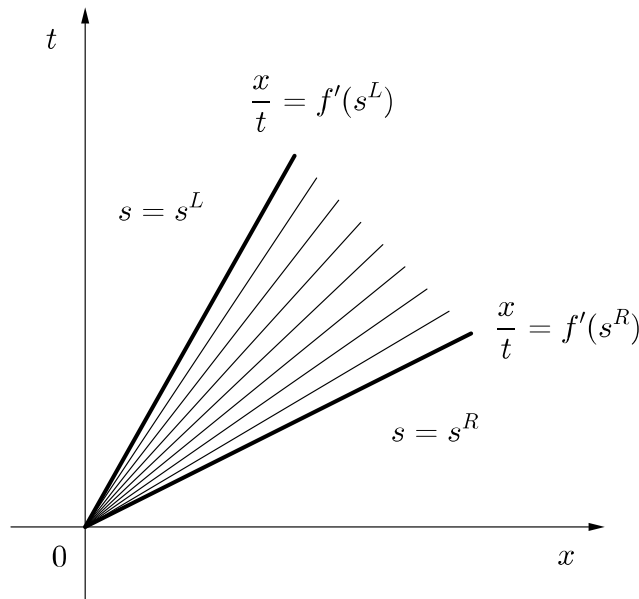


Figura B.1: Onda de Rarefação no plano  $xt$  para os estados  $s^L$  e  $s^R$

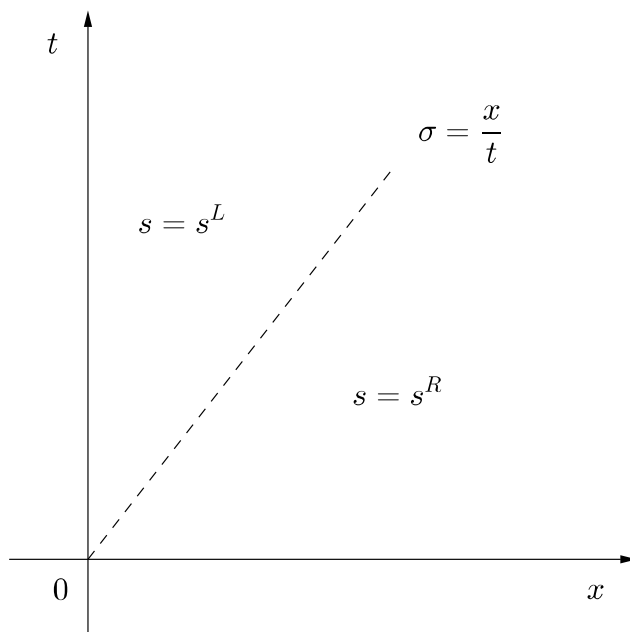


Figura B.2: Onda de Choque no plano  $xt$  para os estados  $s^L$  e  $s^R$ . Descontinuidade em  $\frac{x}{t} = \sigma$ .

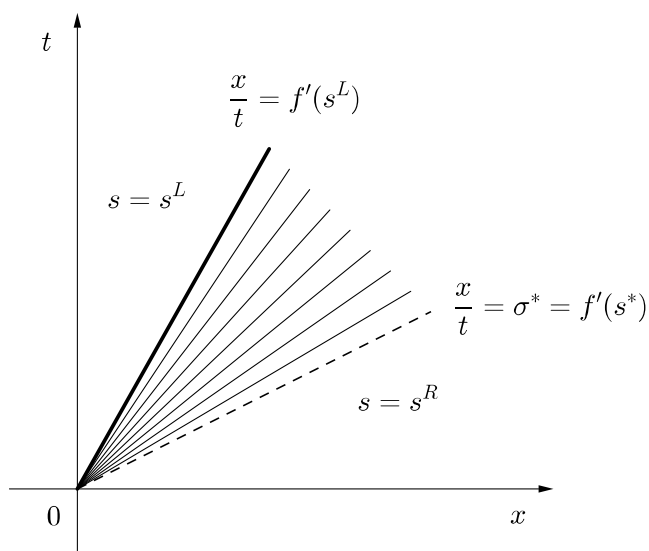


Figura B.3: Onda composta rarefação-choque para os estados  $s^L$  e  $s^R$ . Descontinuidade em  $\sigma^*$ .

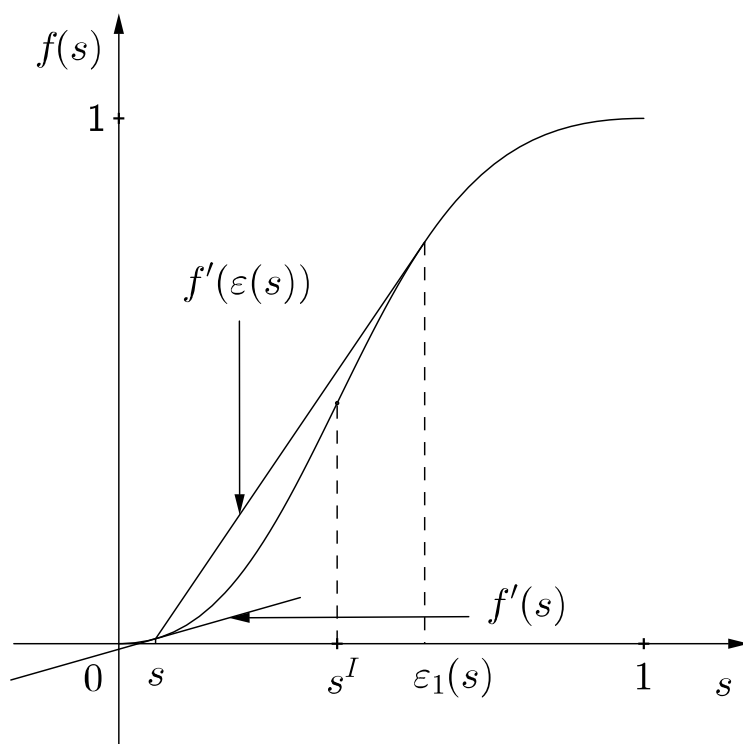


Figura B.4:  $f(s) < f(\varepsilon(s))$ .

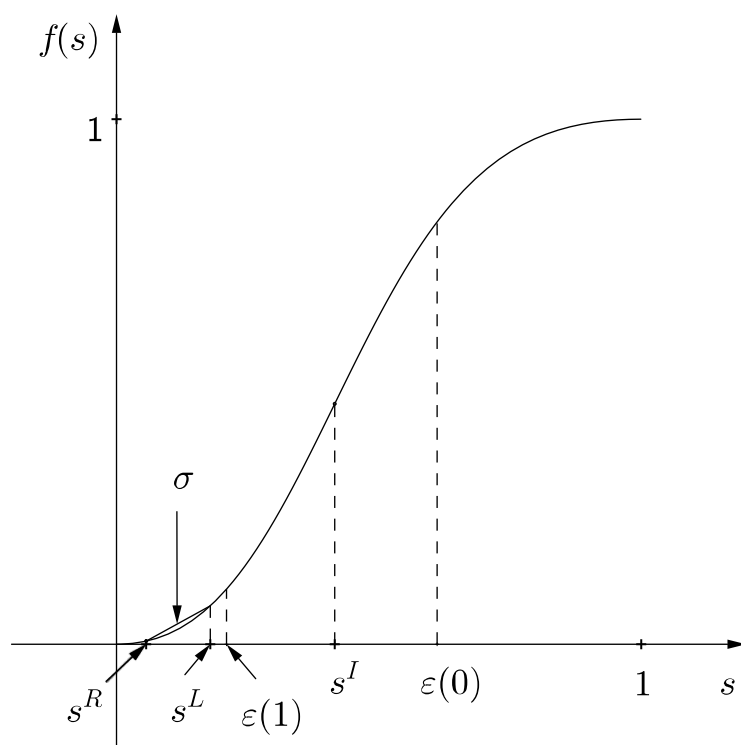


Figura B.5:  $s^L \in (0, \varepsilon(1))$  e  $s^R \in [0, s^L)$ .

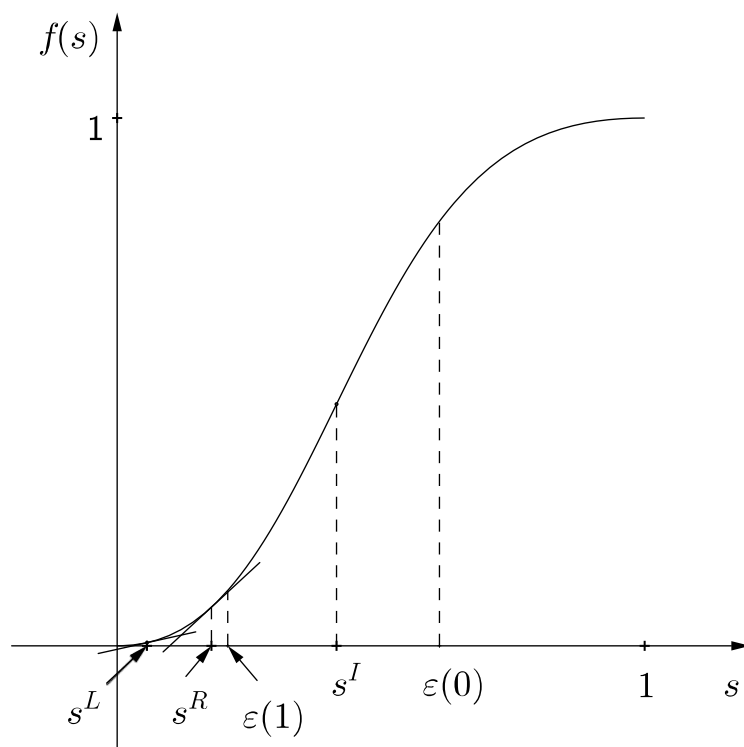


Figura B.6:  $s^L \in [0, \varepsilon(1))$  e  $s^R \in (s^L, s^I]$ .

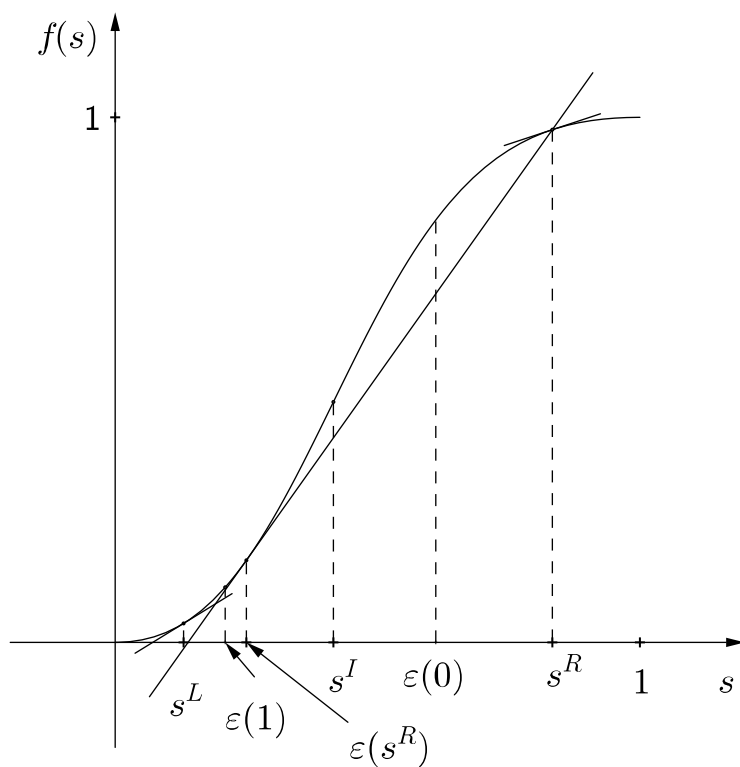


Figura B.7:  $s^L \in [0, \varepsilon(1))$  e  $s^R \in (s^I, 1]$ .

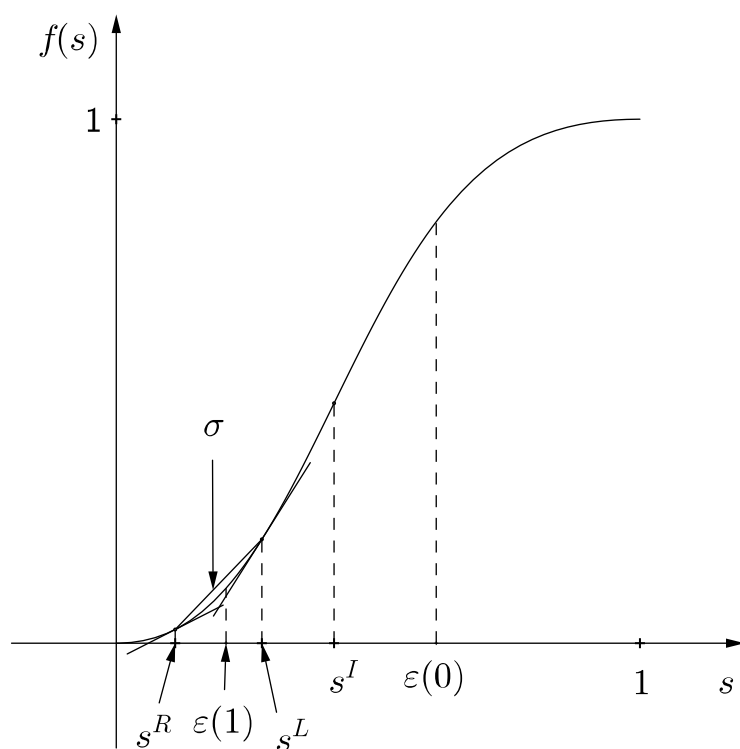


Figura B.8:  $s^L \in [\varepsilon(1), s^I]$  e  $s^R \in [0, s^L)$ .

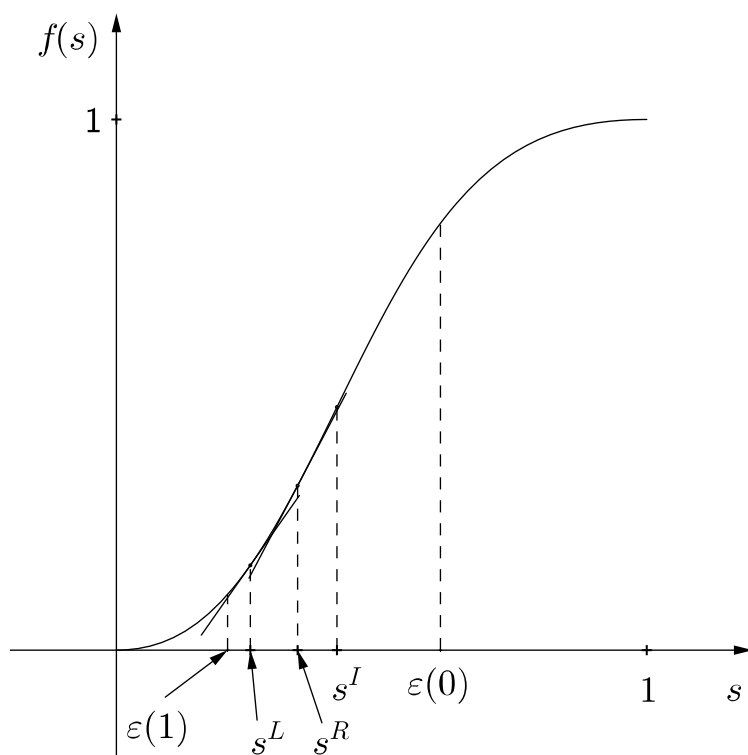


Figura B.9:  $s^L \in [\varepsilon(1), s^I]$  e  $s^R \in (s^L, s^I)$ .

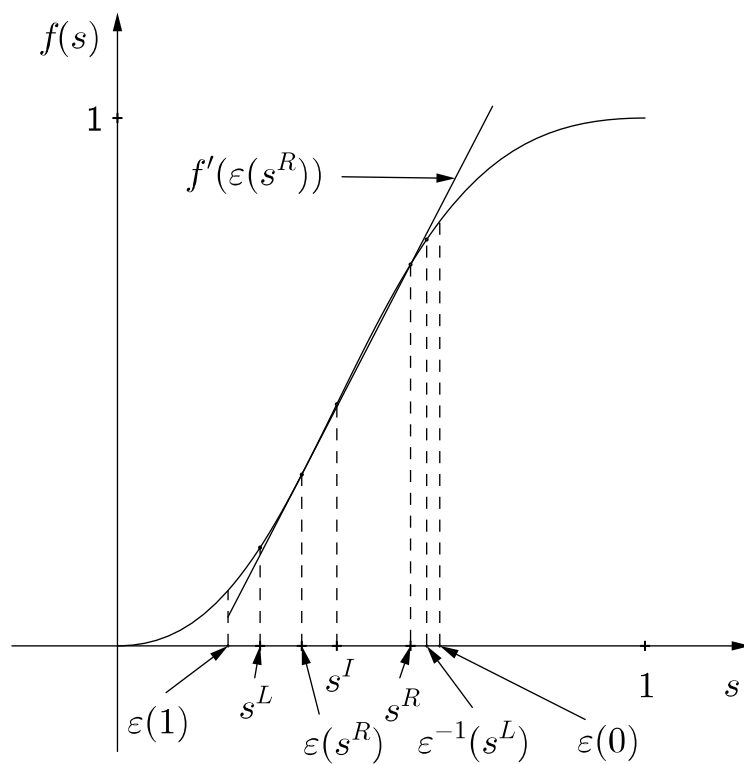


Figura B.10:  $s^L \in [\varepsilon(1), s^I]$  e  $s^R \in (s^I, \varepsilon^{-1}(s^L)]$ .

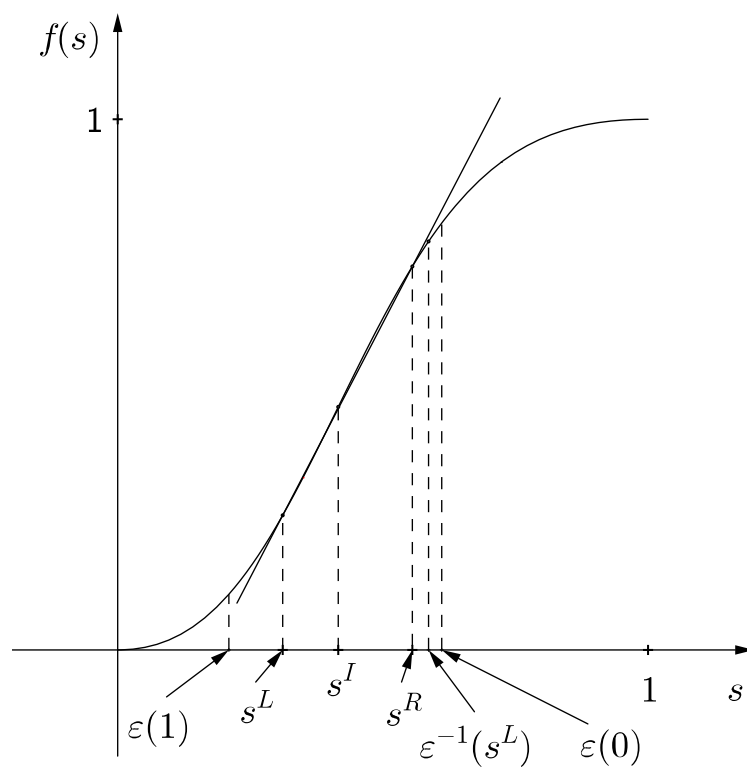


Figura B.11:  $s^L \in [\varepsilon(1), s^I]$  e  $s^R \in (\varepsilon^{-1}(s^L), 1]$ .





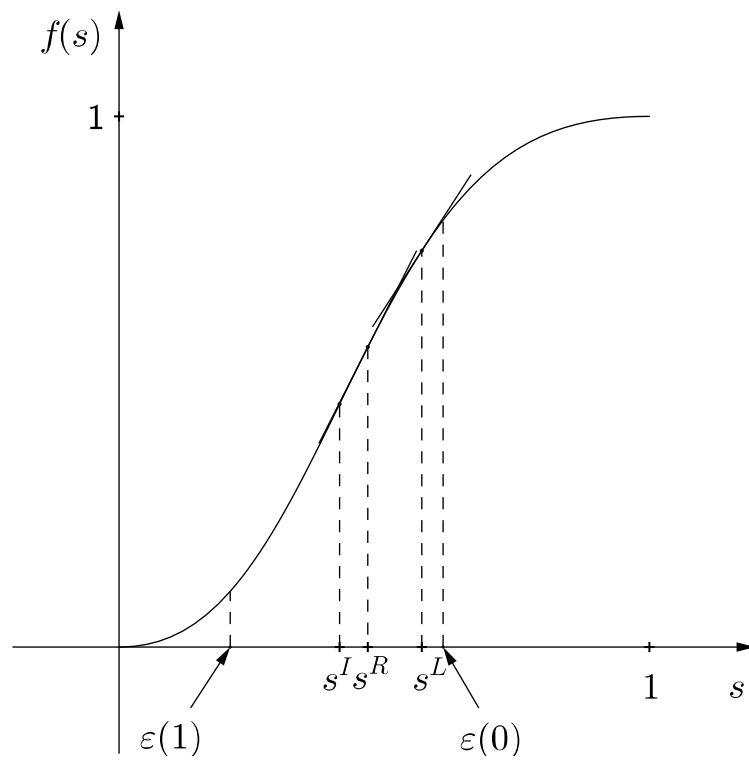


Figura B.14:  $s^L \in [s^I, \varepsilon(0)]$  e  $s^R \in [s^I, s^L]$ .

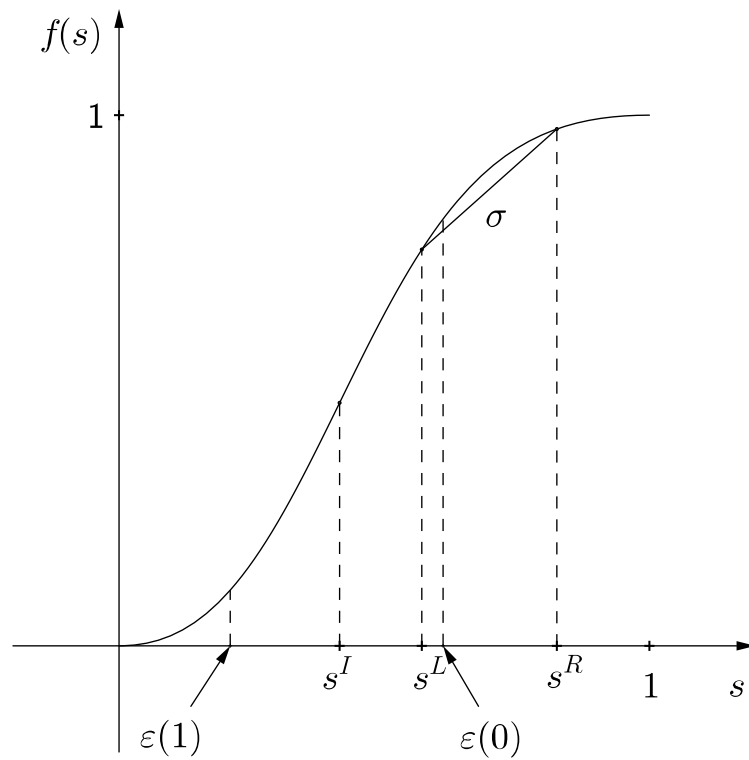


Figura B.15:  $s^L \in [s^I, \varepsilon(0)]$  e  $s^R \in (s^L, 1]$ .

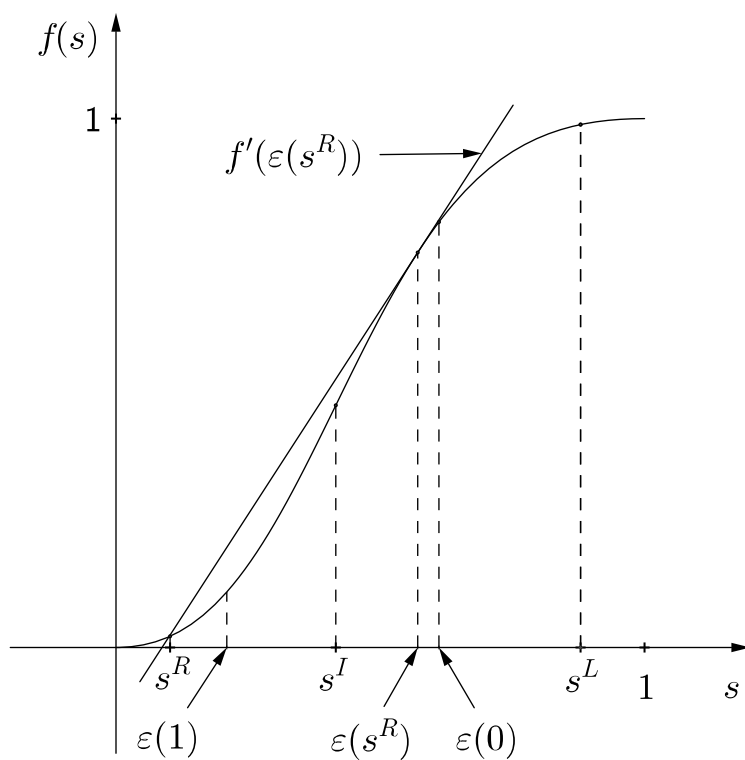


Figura B.16:  $s^L \in [\varepsilon(0), 1]$  e  $s^R \in [0, s^I]$ .

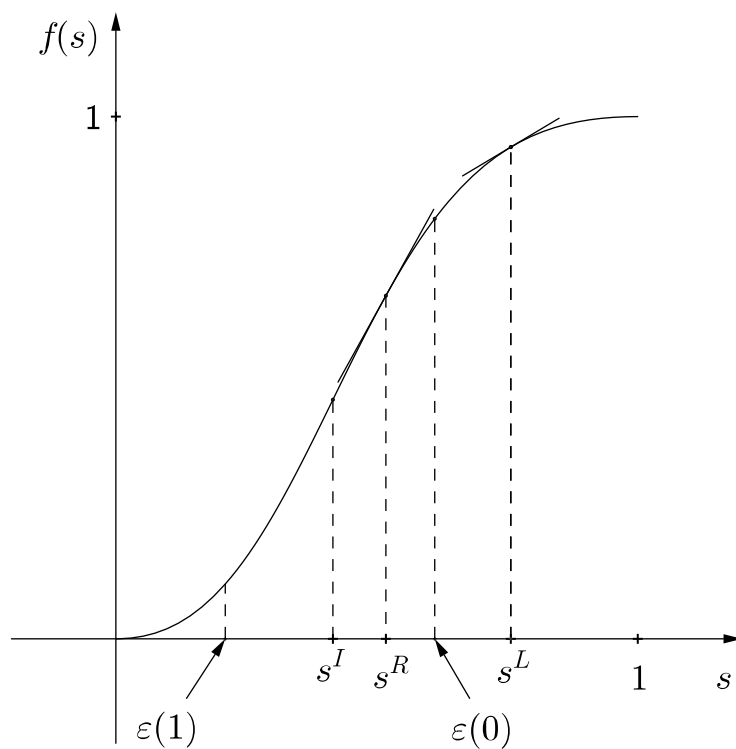


Figura B.17:  $s^L \in [\varepsilon(0), 1]$  e  $s^R \in [s^I, s^L]$ .

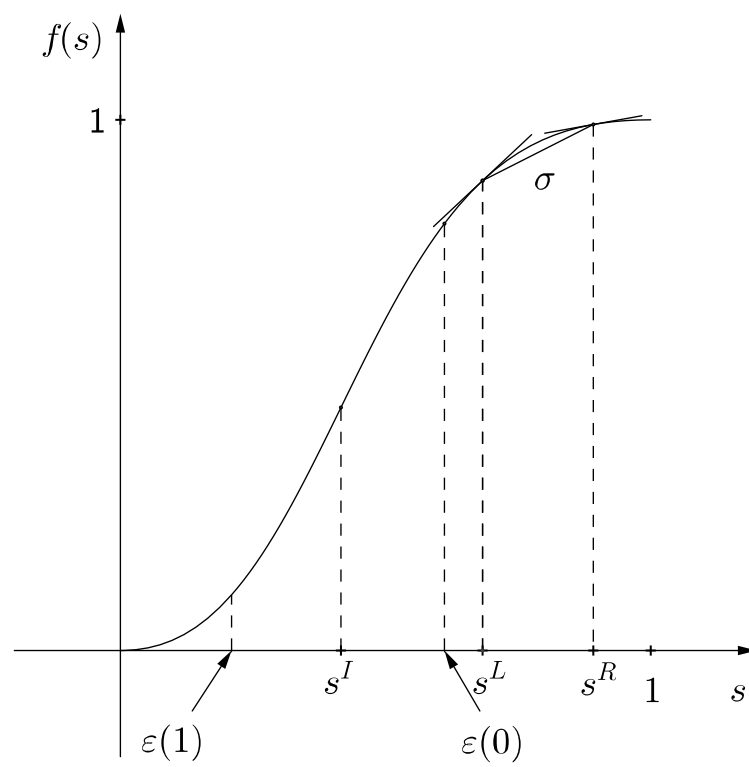


Figura B.18:  $s^L \in [\varepsilon(0), 1]$  e  $s^R \in (s^L, 1]$ .

# Apêndice C

## Figuras

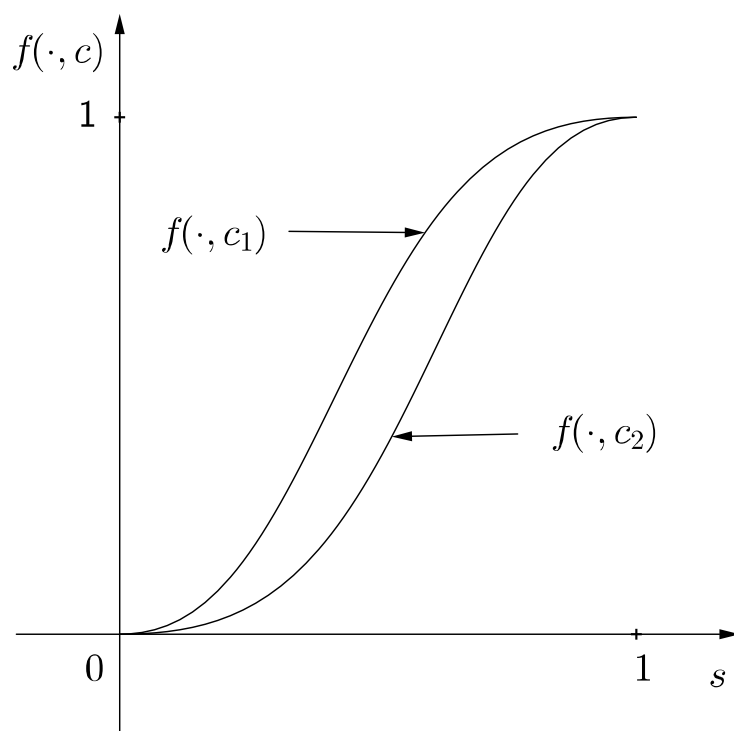


Figura C.1: Esta Figura foi desenhada no Geogebra para os valores  $\alpha_1 = 1,75$  e  $\alpha_2 = 0,425$  na função de fluxo (1.15). A figura ilustra que a função de fluxo  $f$  cresce em relação a  $s$  e decresce em relação a  $c$ . Neste caso  $c_1 = 0,1 < c_2 = 0,9$ .

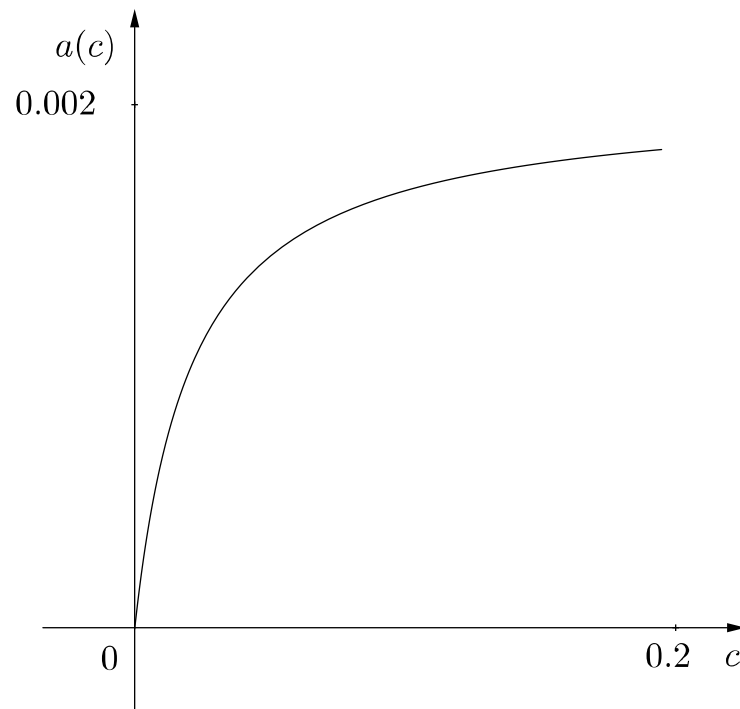


Figura C.2: Gráfico da função adsorção (2.1) para as constantes  $\beta_1 = 0,2$ ,  $\beta_2 = 1$  e  $\beta_3 = 100$ . Os eixos não estão na mesma escala para que o gráfico seja bem visualizado. Como esperado, o gráfico da função de adsorção  $a$  possui a concavidade voltada para baixo.

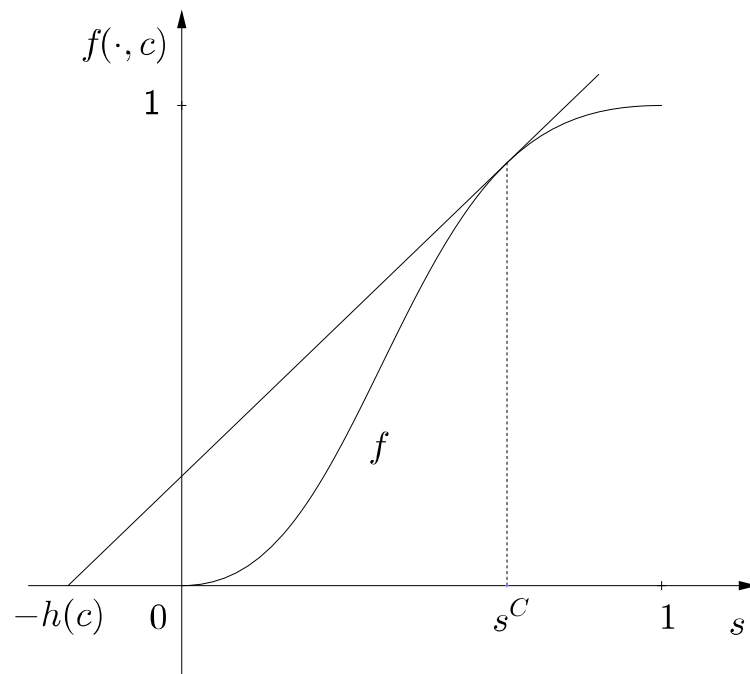


Figura C.3: A função de fluxo (1.15) foi esboçada para  $c$  fixo valendo  $0,9$  e para as constantes  $\alpha_1 = 1,75$  e  $\alpha_2 = 0,425$ . Na prática a distância entre os pontos  $(-h(c), 0)$  e  $(0, 0)$  é muito pequena, por isso este valor foi aumentado para ilustrar melhor a ideia desejada. Veja que  $s^C(c)$  existe.

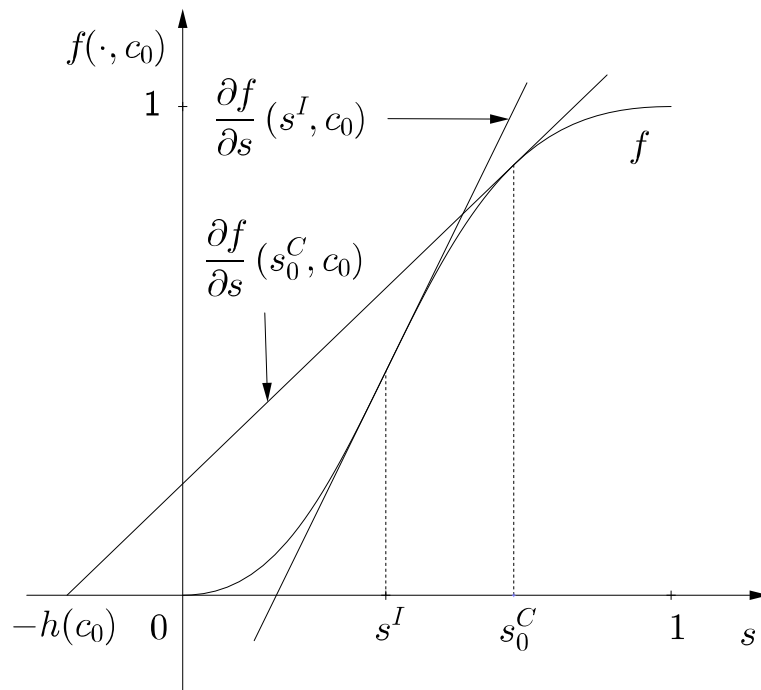


Figura C.4: Esta figura ilustra uma situação em que  $s^I \neq s_0^C$ .

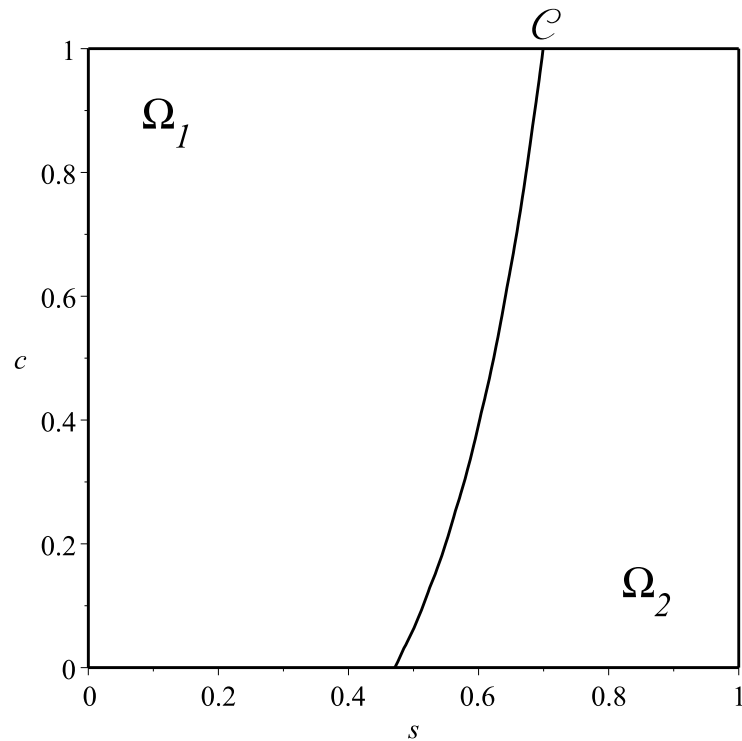


Figura C.5: Curva de Coincidência  $\mathcal{C}$ . Figura feita no software Maple. Para a construção da Figura foram utilizadas as constantes  $\alpha_1 = 0,18$  e  $\alpha_2 = 0,65$  na função de fluxo (1.15) e  $\beta_1 = 0,2$ ,  $\beta_2 = 1$  e  $\beta_3 = 0,5$  na função de adsorção (2.1).

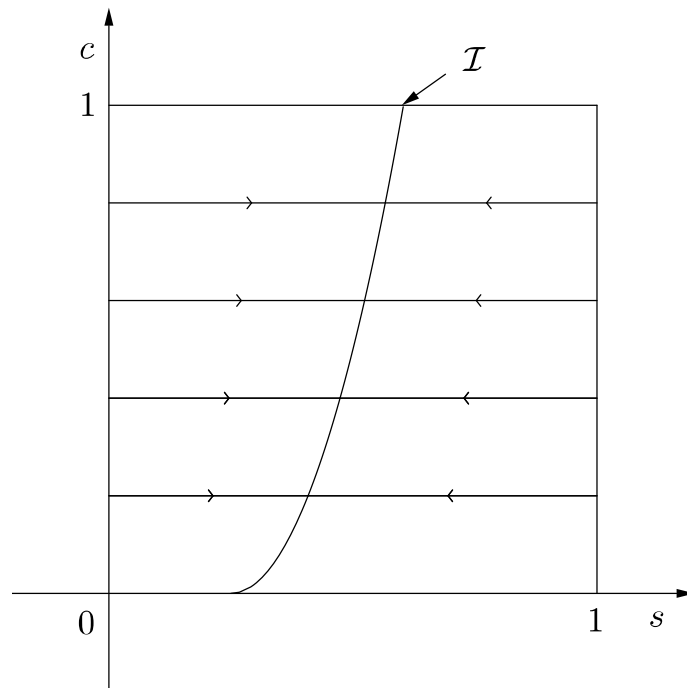


Figura C.6: Curvas de  $s$ -rarefação

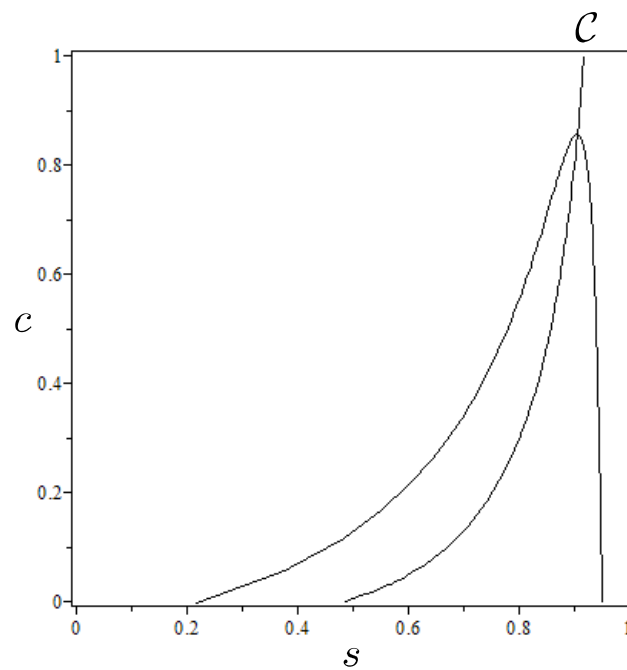


Figura C.7: Curva integral do campo característico  $e^c$  e curva de coincidência  $\mathcal{C}$ . Função de fluxo (1.15) com as constantes  $\alpha_1 = 0,2$  e  $\alpha_2 = 5$ . Função de adsorção (2.1) com as constantes  $\beta_1 = 0,2$ ,  $\beta_2 = 1$  e  $\beta_3 = 5$ .



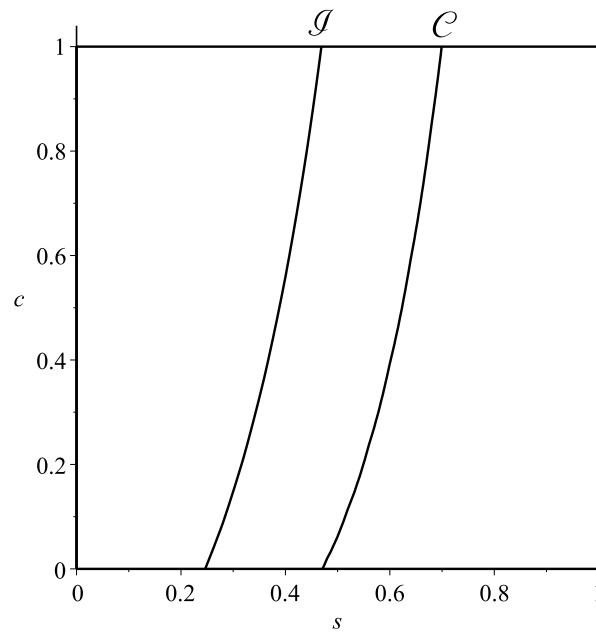


Figura C.8: Posição realística entre a curva  $s$ -inflexão  $\mathcal{I}$  e a curva de coincidência  $\mathcal{C}$ . Função de fluxo (1.15) com as constantes  $\alpha_1 = 0,18$  e  $\alpha_2 = 0,65$ . Função de adsorção (2.1) com as constantes  $\beta_1 = 0,2$ ,  $\beta_2 = 1$  e  $\beta_3 = 0,5$ .

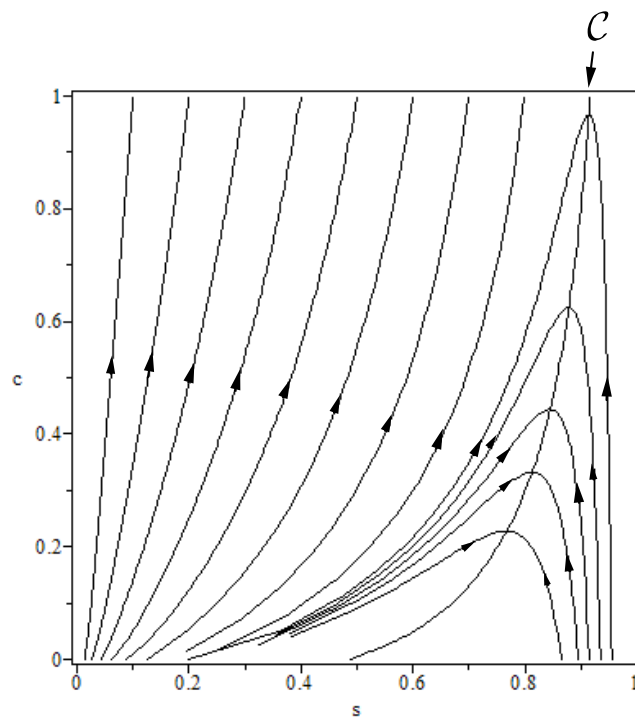


Figura C.9: Curvas de  $c$ -rarefação para  $0 < s < 1$ . Função de fluxo (1.15) com as constantes  $\alpha_1 = 0,2$  e  $\alpha_2 = 5$ . Função de adsorção (2.1) com as constantes  $\beta_1 = 0,2$ ,  $\beta_2 = 1$  e  $\beta_3 = 5$ .

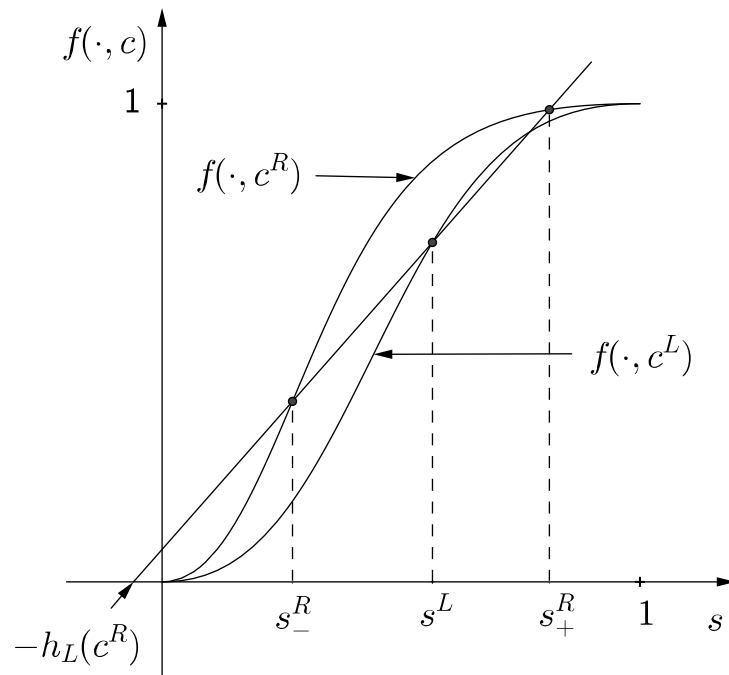


Figura C.10:  $c^L > c^R$ .

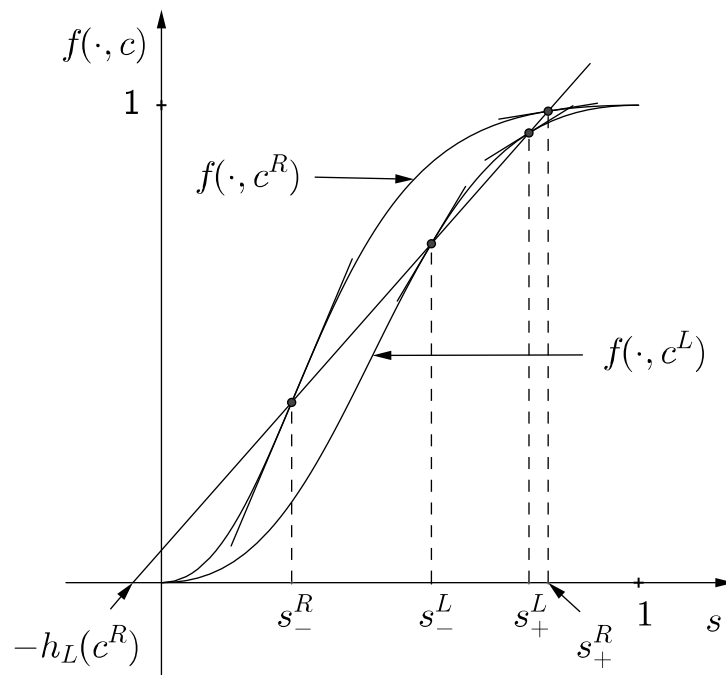


Figura C.11: Reta de inclinação  $\sigma = f(s^R, c^R) / (s^R + h_L(c^R))$  tal que  $\lambda^s(u^R) < \sigma$  mostrando a equivalência de  $s_-^L$  e  $s_+^L$ .  $s_-^L \leq s_+^L < s^R$ .



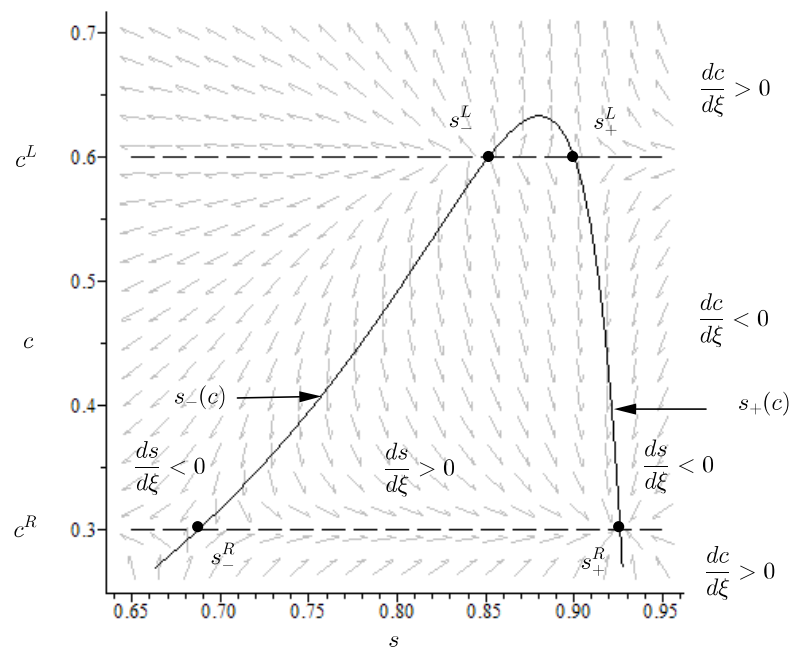


Figura C.13: Ampliação do campo de vetores ilustrando a condição de entropia de viscosidade para uma onda de  $c$ -choque. Choque  $(u_-^L; u_-^R)$  com conexão repulsor/sela (choque de Lax). Choque  $(u_-^L; u_+^R)$  com conexão repulsor/atratador (choque supercompressivo, não de Lax). Choque  $(u_+^L; u_+^R)$  com conexão sela/atratador (choque de Lax). Vale a regra do choque triplo [16]  $\sigma^c(u_-^L, u_-^R) = \sigma^c(u_-^L, u_+^R) = \sigma^s(u_-^L, u_+^L) = \sigma^s(u_-^R, u_+^R)$ .

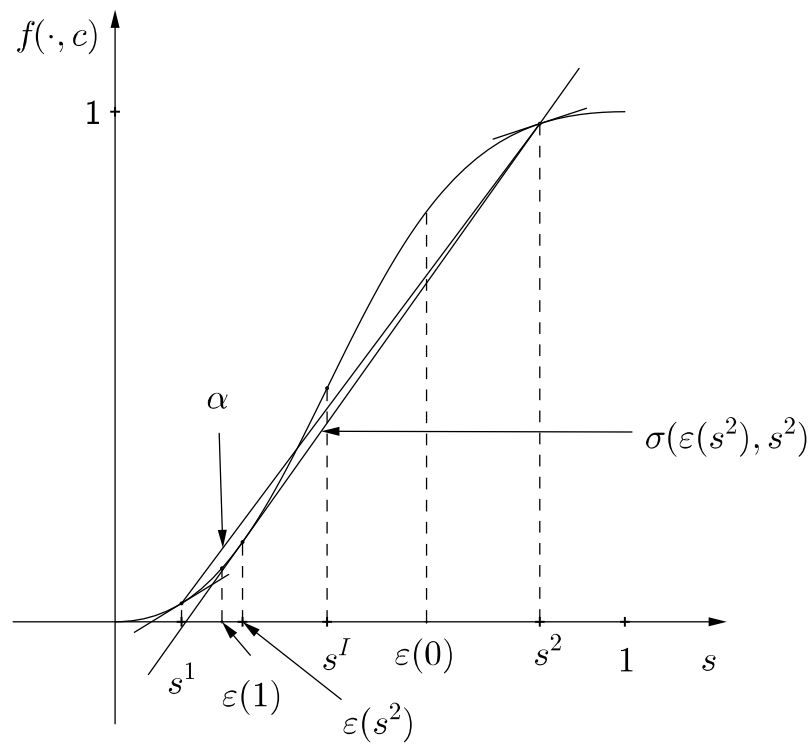


Figura C.14: Comparando  $\alpha$  com  $\sigma(\epsilon(s^2), s^2)$  quando  $s^1 < s^2$ .

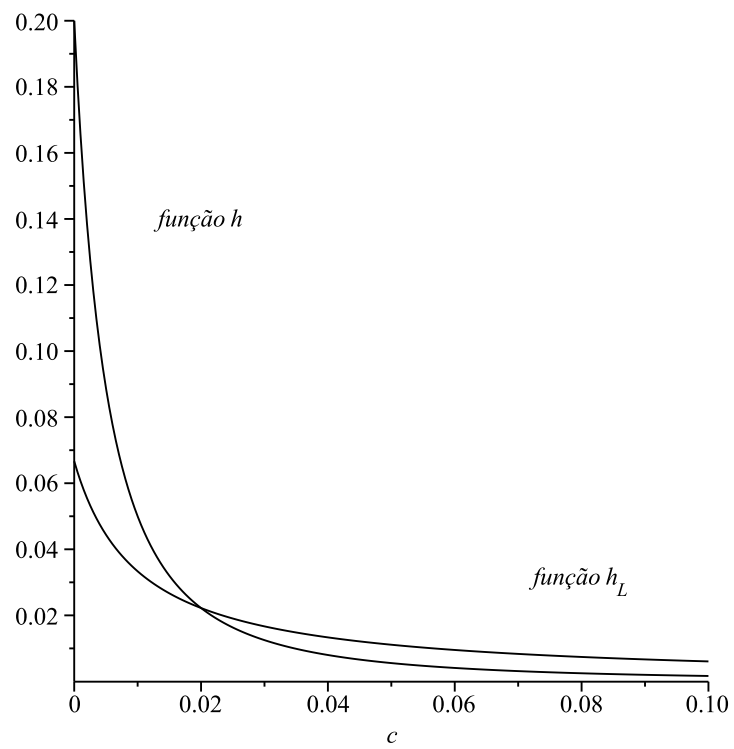


Figura C.15: Comparando as funções  $h$  e  $h_L$  quando  $c^L = 0,02$ .

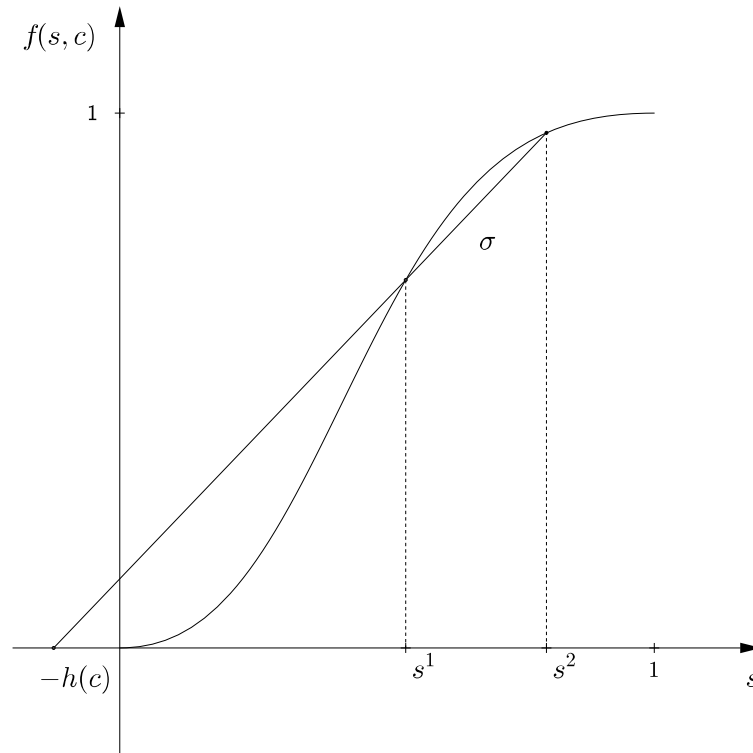


Figura C.16:  $c$ -extensão dos estados  $u^1 = (s^1, c)$  e  $u^2 = (s^2, c)$  por  $\lambda^c$ .

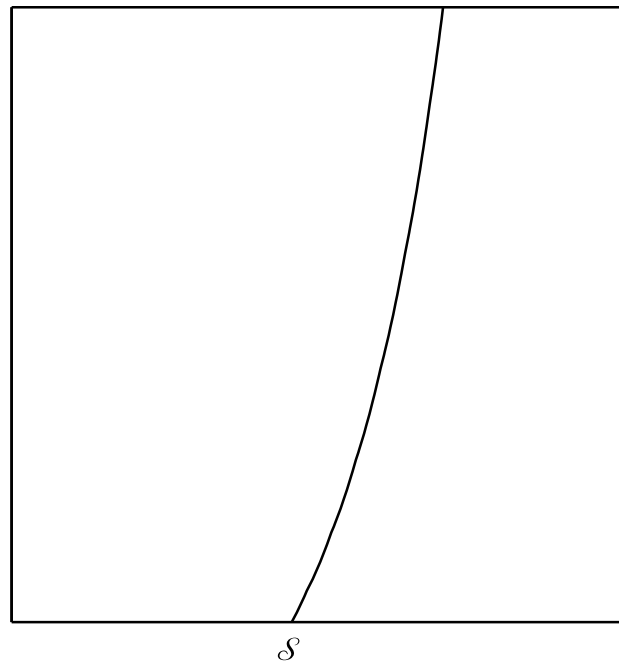


Figura C.17: Curva  $\mathcal{S}$  para  $c^L = 0.7$  e  $c^R = 0.4$ .

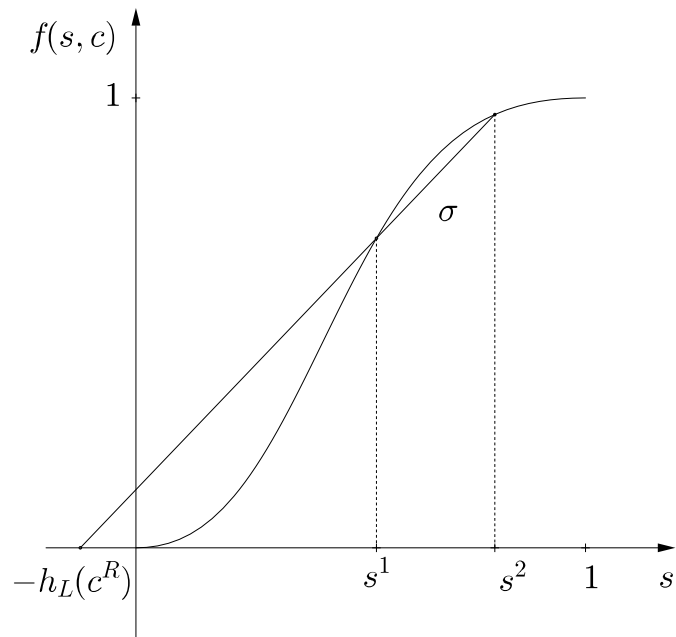


Figura C.18:  $\varphi$ -extensão do estado  $u^1 = (s^1, c)$  e  $u^2 = (s^2, c)$  por  $\sigma$  com  $c^L$  e  $c^R$  fixos.

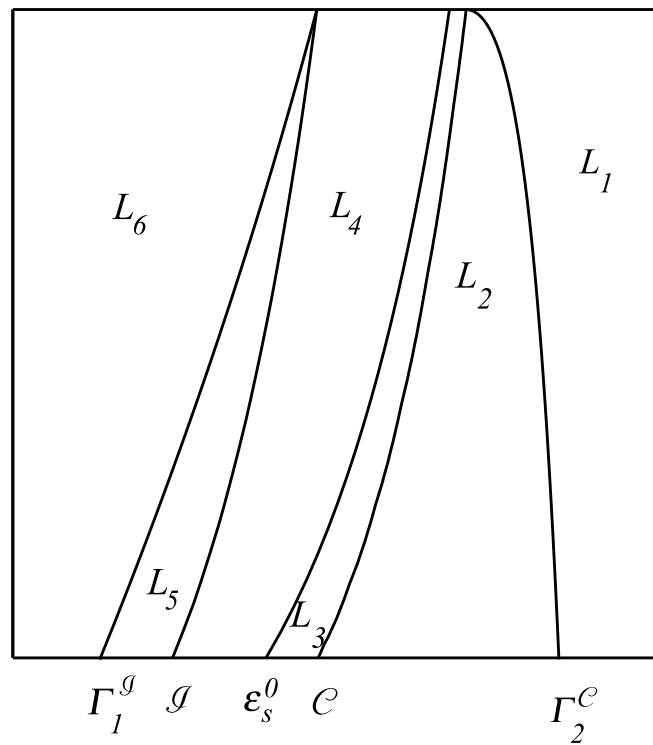


Figura C.19: Regiões para o estado  $u^L$ , com  $c^L < c^R$ .

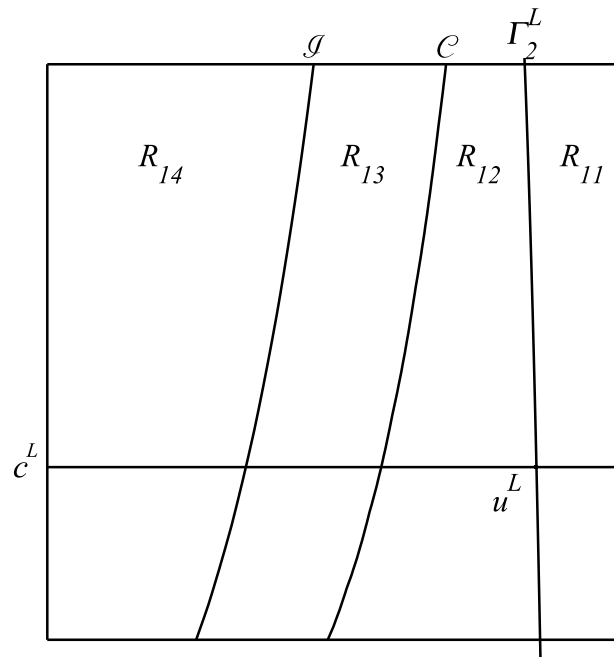


Figura C.20: Regiões do estado  $u^R$ , para  $u^L$  fixado na região  $L_1$ .

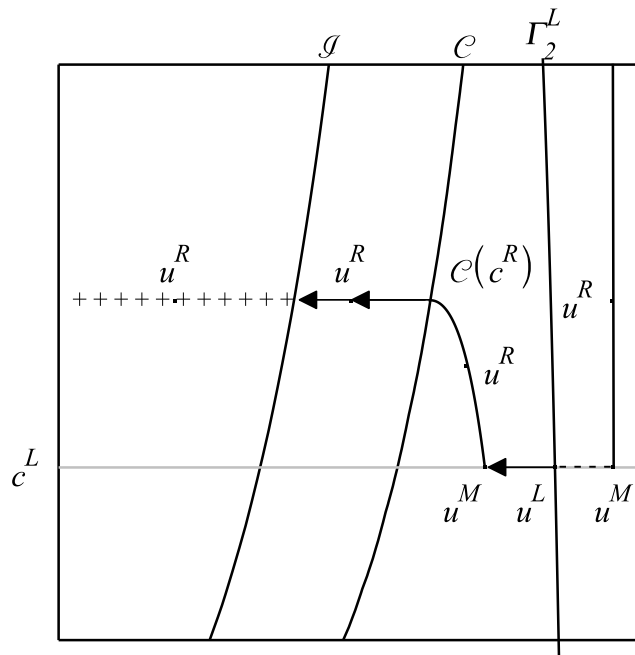


Figura C.21: Solução do problema de Riemann para  $u^L \in L_1$ .



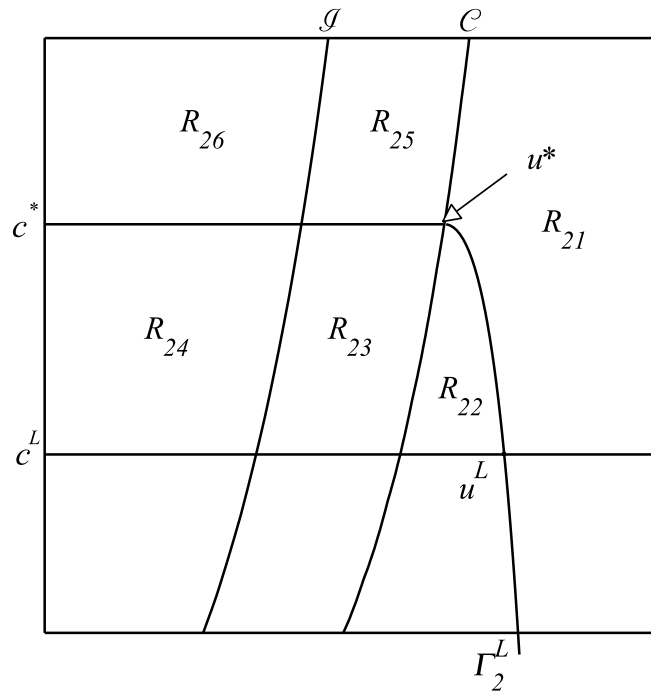


Figura C.22: Regiões para o estado  $u^R$  quando  $u^L \in L_2$ .

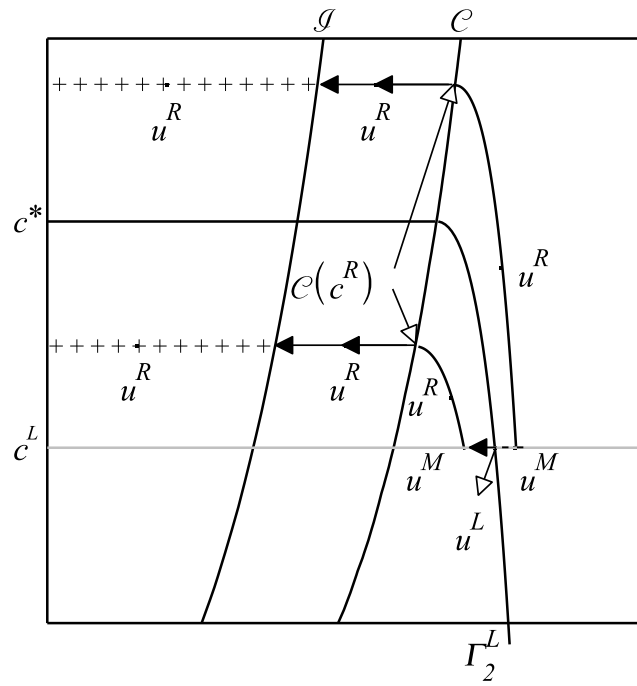


Figura C.23: Solução do problema de Riemann para  $u^L \in L_2$ .

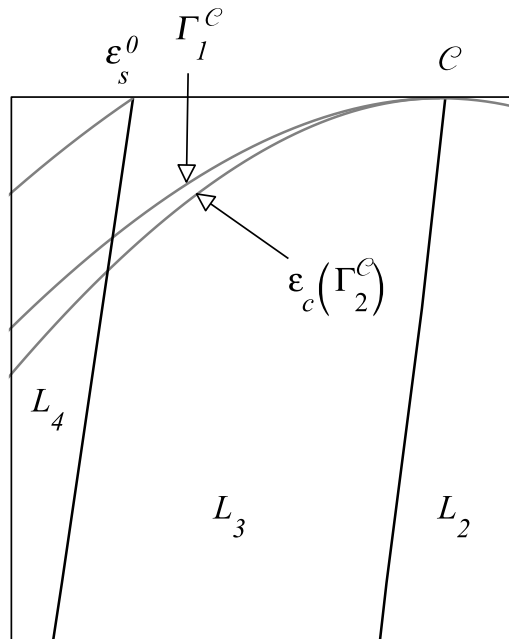


Figura C.24: Ampliação da parte superior da região  $L_3$  mostrando as posições relativas das curvas  $\Gamma_1^c$  e  $\varepsilon_c(\Gamma_2^c)$ .

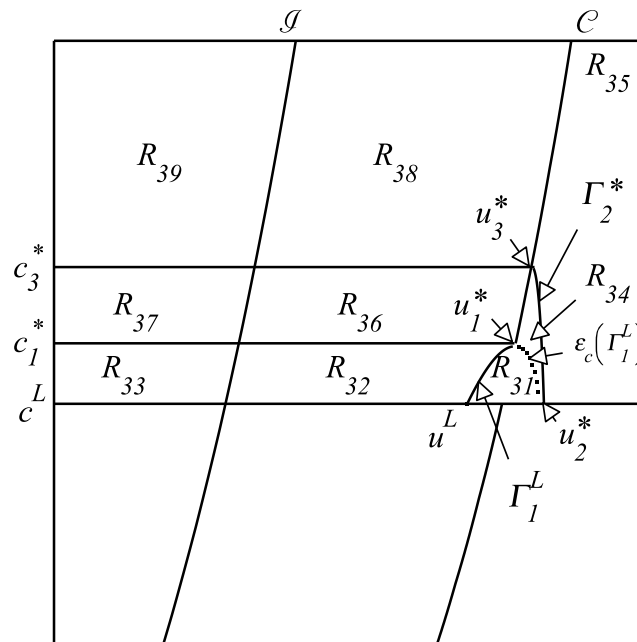


Figura C.25: Regiões para o estado  $u^R$  quando o estado  $u^L \in L_3$ .

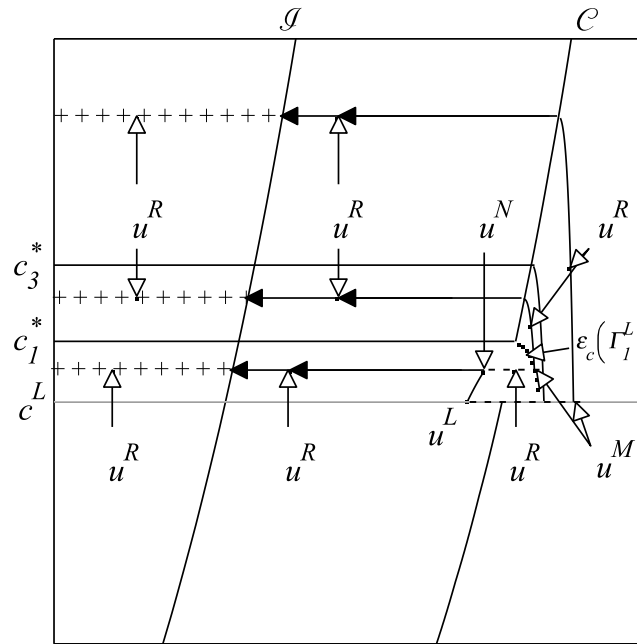


Figura C.26: Solução do problema de Riemann para  $u^L \in L_3$  estiver abaixo da curva  $\varepsilon_c(\Gamma_1^L)$ .

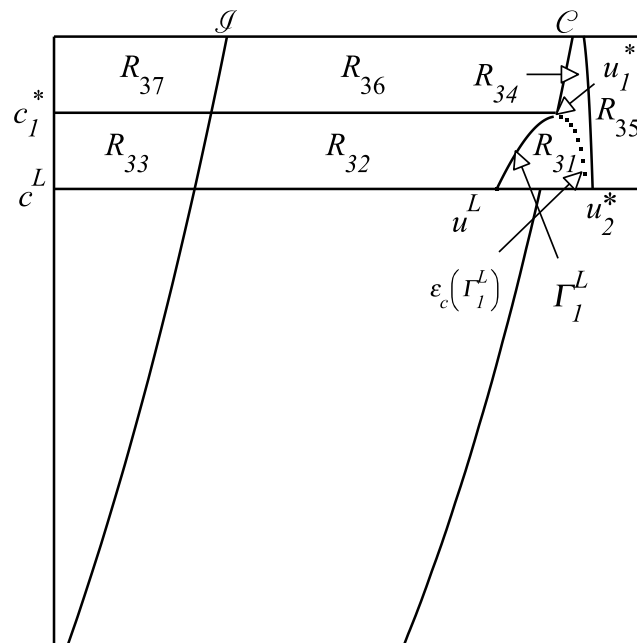


Figura C.27: Regiões para o estado  $u^R$  quando o estado  $u^L \in L_3$  estiver entre as curvas  $\varepsilon_c(\Gamma_1^C)$  e  $\Gamma_1^C$ .

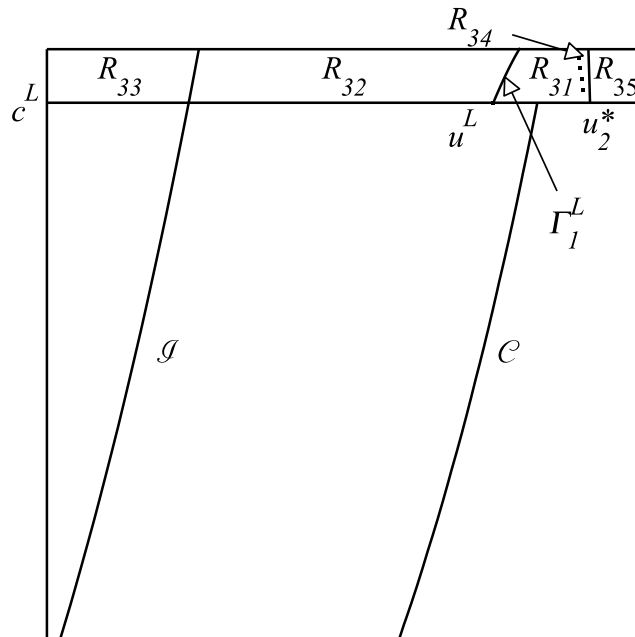


Figura C.28: Regiões para o estado  $u^R$  quando o estado  $u^L \in L_3$  estiver acima da curva  $\Gamma_1^c$ .

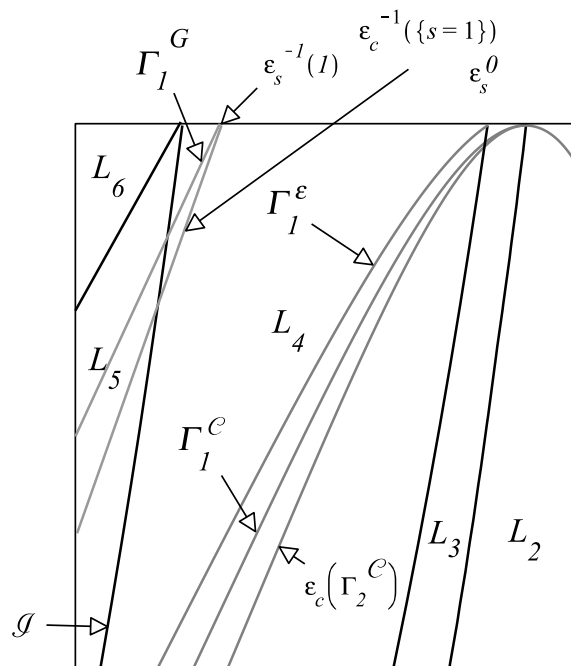


Figura C.29: Ampliação da parte superior da região  $L_4$  mostrando as posições relativas das curvas  $\varepsilon_c(\Gamma_2^c)$ ,  $\Gamma_1^c$ ,  $\Gamma_1^\varepsilon$ ,  $\varepsilon_c^{-1}(\{s=1\})$  e  $\Gamma_1^G$ .

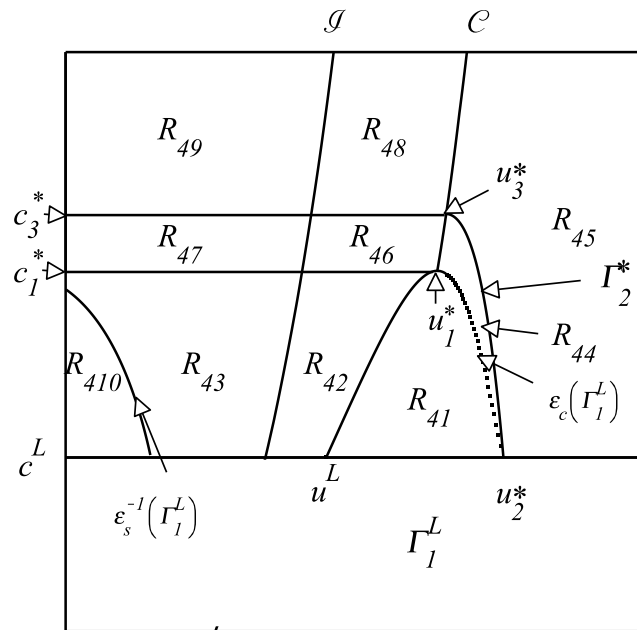


Figura C.30: Regiões para o estado  $u^R$  quando o estado  $u^L \in L_4$  estiver abaixo da curva  $\varepsilon_c(\Gamma_2^C)$ .

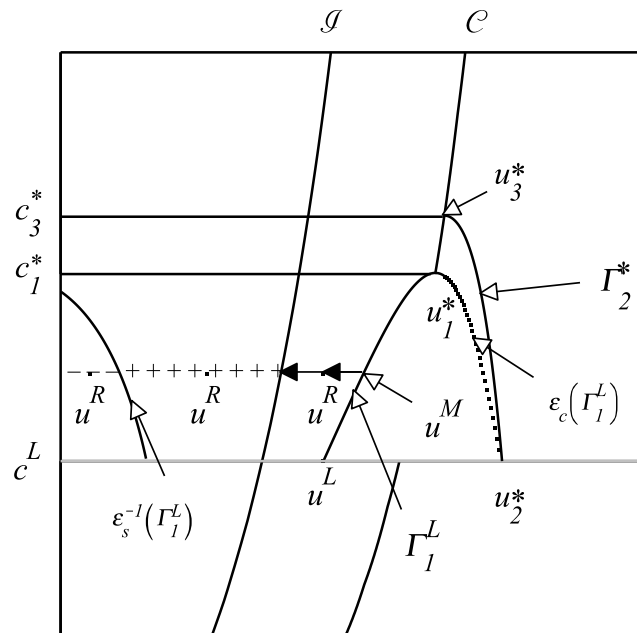


Figura C.31: Solução do problema de Riemann para  $u^R \in R_{410}$ .

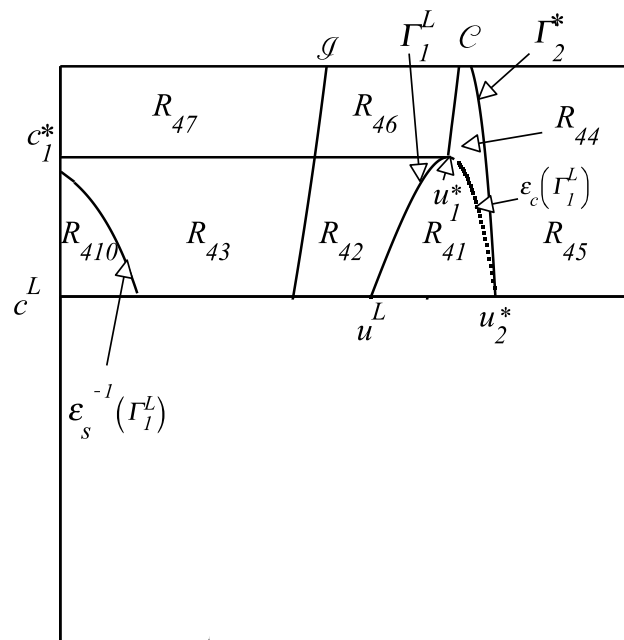


Figura C.32: Regiões para o estado  $u^R$  quando o estado  $u^L \in L_4$  estiver entre as curvas  $\epsilon_c(\Gamma_2^C)$  e  $\Gamma_1^C$ .

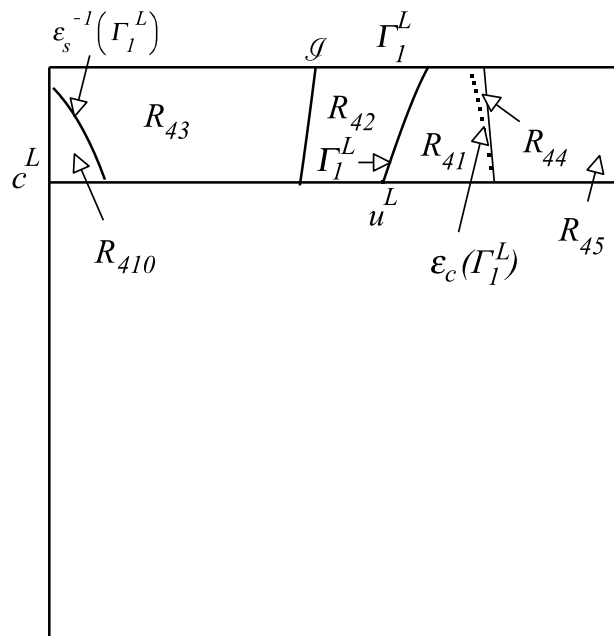


Figura C.33: Regiões para o estado  $u^R$  quando o estado  $u^L \in L_4$  estiver entre as curvas  $\Gamma_1^\epsilon$  e  $\Gamma_1^C$ .

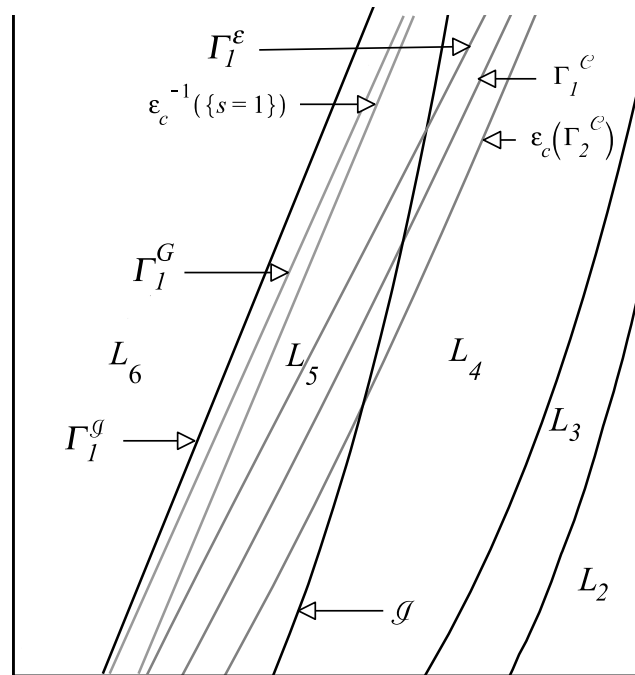


Figura C.34: Ampliação da parte inferior da região  $L_5$  mostrando as posições relativas das curvas  $\varepsilon_c(\Gamma_2^c)$ ,  $\Gamma_1^c$ ,  $\Gamma_1^\varepsilon$ ,  $\varepsilon_c^{-1}(\{s=1\})$  e  $\Gamma_1^G$ .

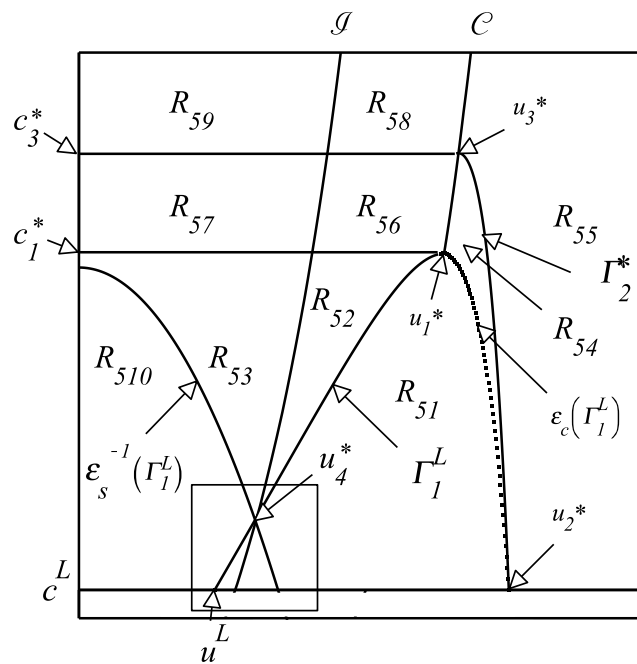


Figura C.35: Regiões para o estado  $u^R$  quando o estado  $u^L \in L_5$  estiver abaixo da curva  $\varepsilon_c(\Gamma_2^c)$ .

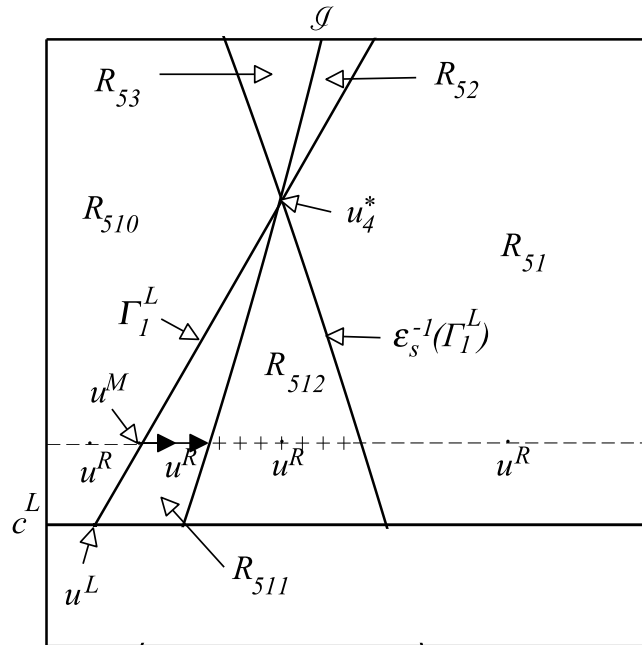


Figura C.36: Ampliação da parte inferior da Figura C.35 junto com a solução do problema de Riemann para  $u^L \in L_5$  e  $u^R$  nas regiões  $R_{511}$  e  $R_{512}$ .

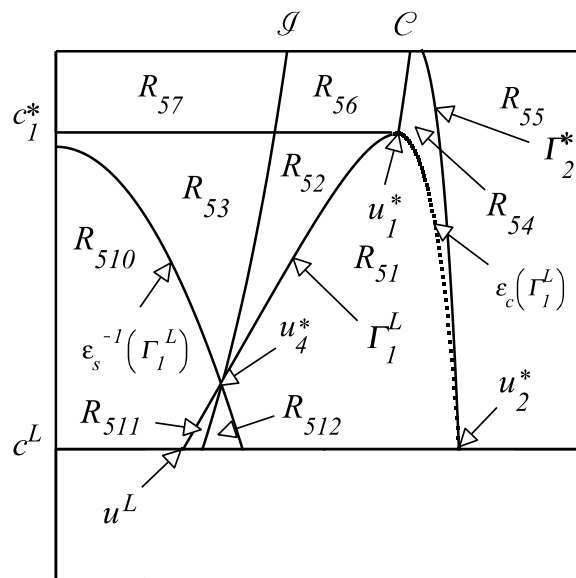


Figura C.37: Regiões para o estado  $u^R$  quando o estado  $u^L \in L_5$  estiver entre as curvas  $\epsilon_c(\Gamma_2^C)$  e  $\Gamma_1^C$ .



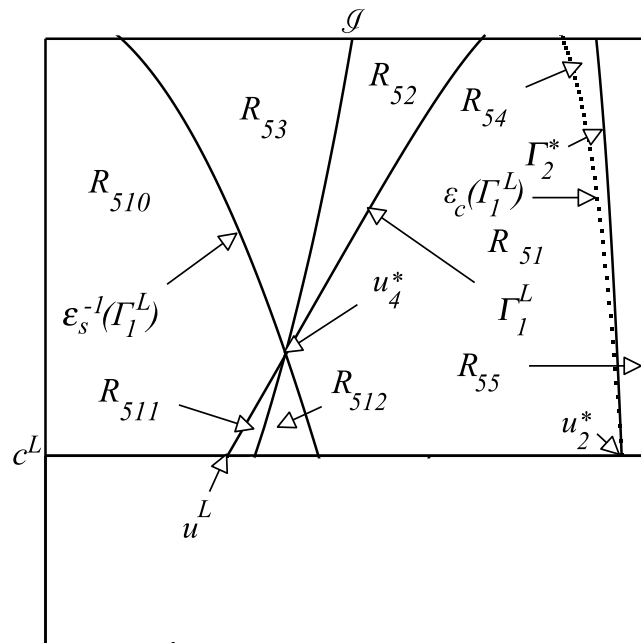


Figura C.38: Regiões para o estado  $u^R$  quando o estado  $u^L \in L_5$  estiver entre as curvas  $\Gamma_1^\varepsilon$  e  $\varepsilon_c^{-1}(\{s = 1\})$ .

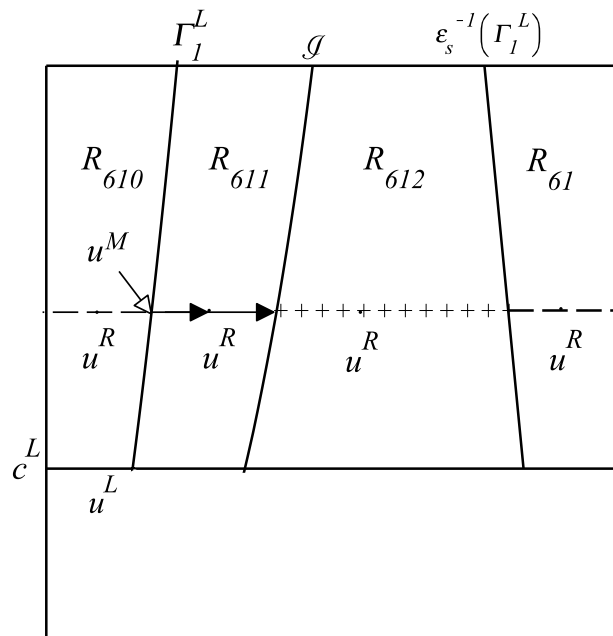


Figura C.39: Regiões para o estado  $u^R$  quando o estado  $u^L \in L_6$  à direita da curva  $\varepsilon_s^1$  junto com a solução do problema de Riemann.

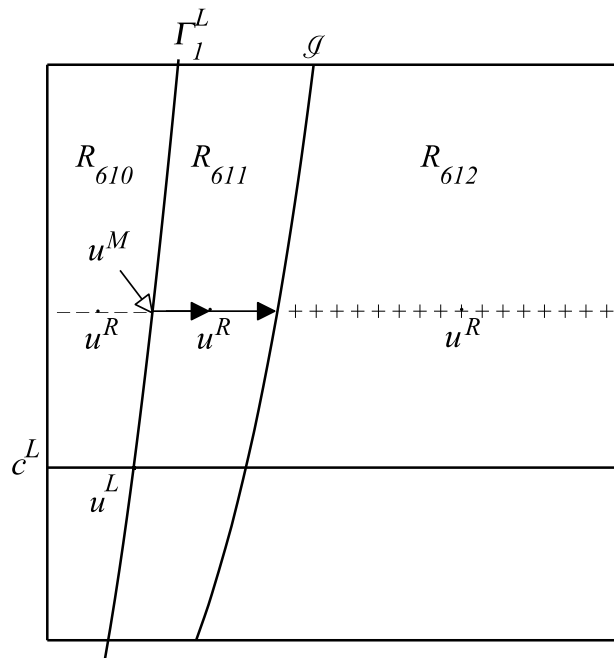


Figura C.40: Regiões para o estado  $u^R$  quando o estado  $u^L \in L_6$  à esquerda da curva  $\varepsilon_s^1$  junto com a solução do problema de Riemann.

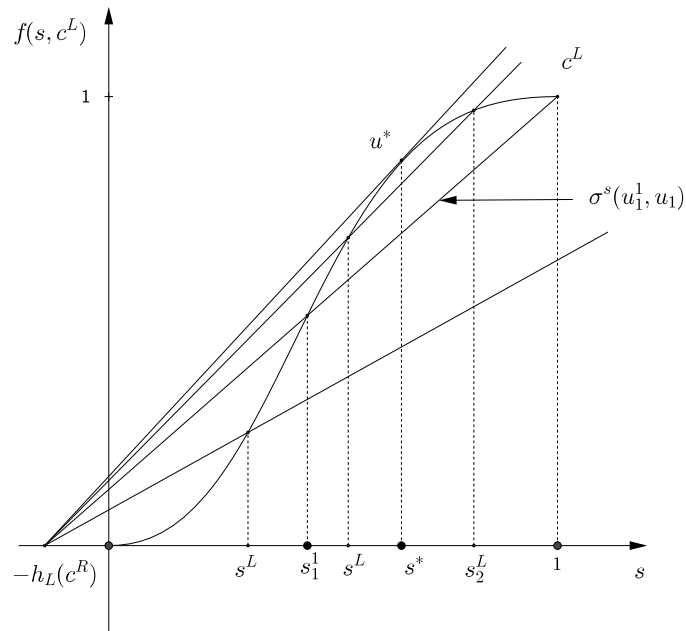


Figura C.41: Divisão dos subintervalos  $[0, s_1^1)$ ,  $[s_1^1, s^*]$ ,  $(s^*, 1]$  e a existência da  $\varphi$ -extensão  $u_2^L$  de  $u^L$ .

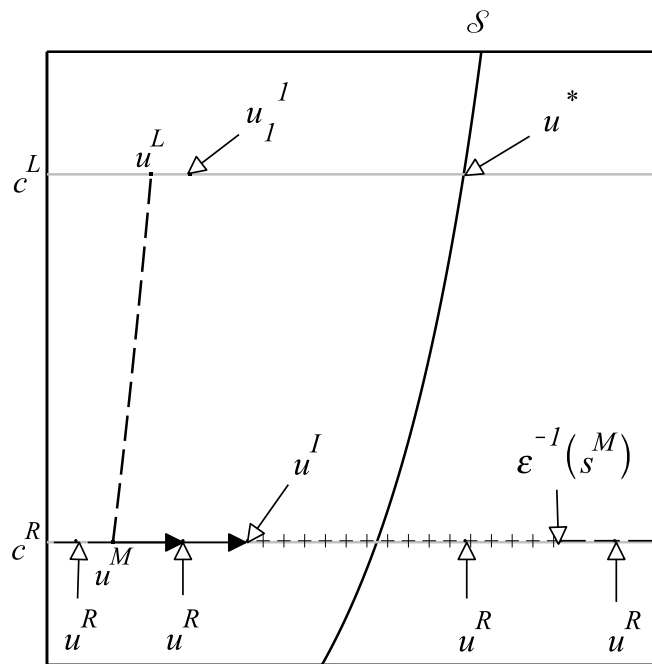


Figura C.42: Solução do problema de Riemann para  $s^L \in I_1^L$  e  $s^R \in I$ .

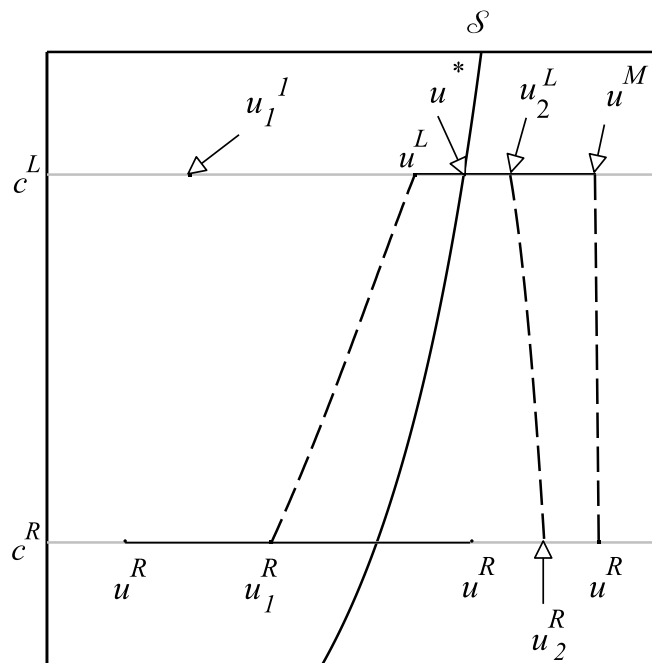


Figura C.43: Solução do problema de Riemann para  $s^L \in I_2^L$ .

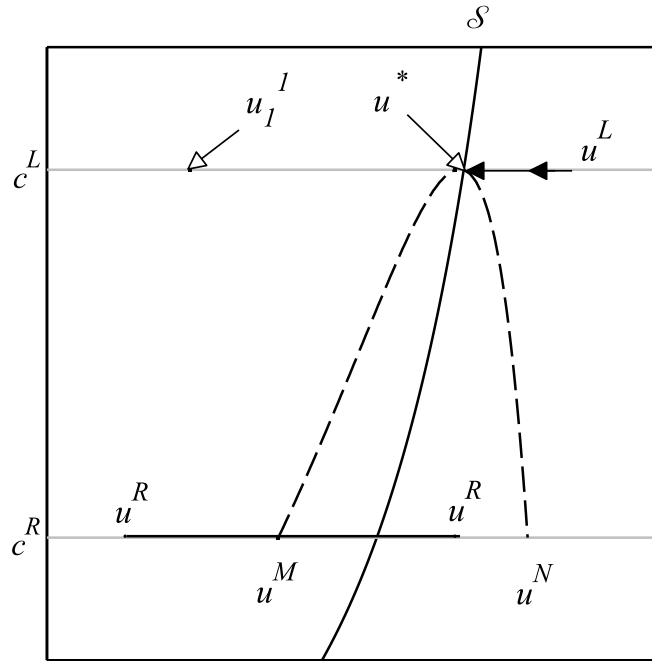


Figura C.44: Solução do problema de Riemann para  $s^L \in I_3^L$  e  $s^R \in I_{31}^R$ .

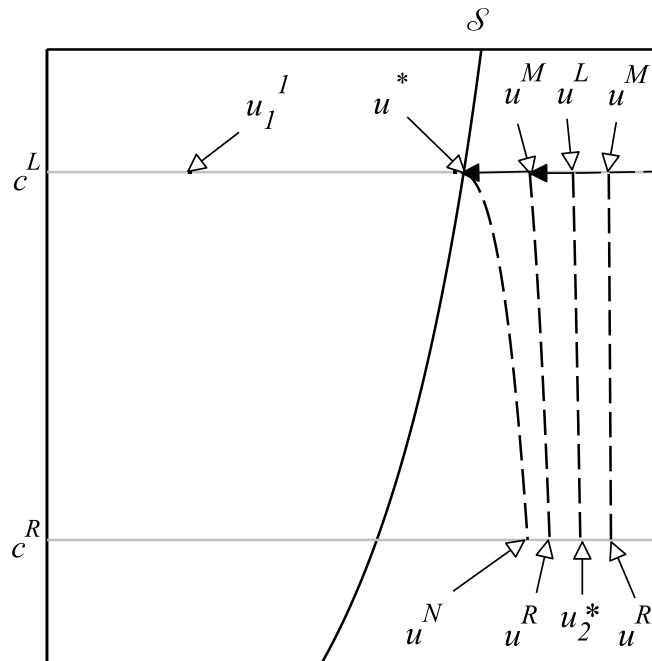


Figura C.45: Solução do problema de Riemann para  $s^L \in I_3^L$  e  $s^R \in I_{32}^R$  ou  $s^R \in I_{33}^R$ .

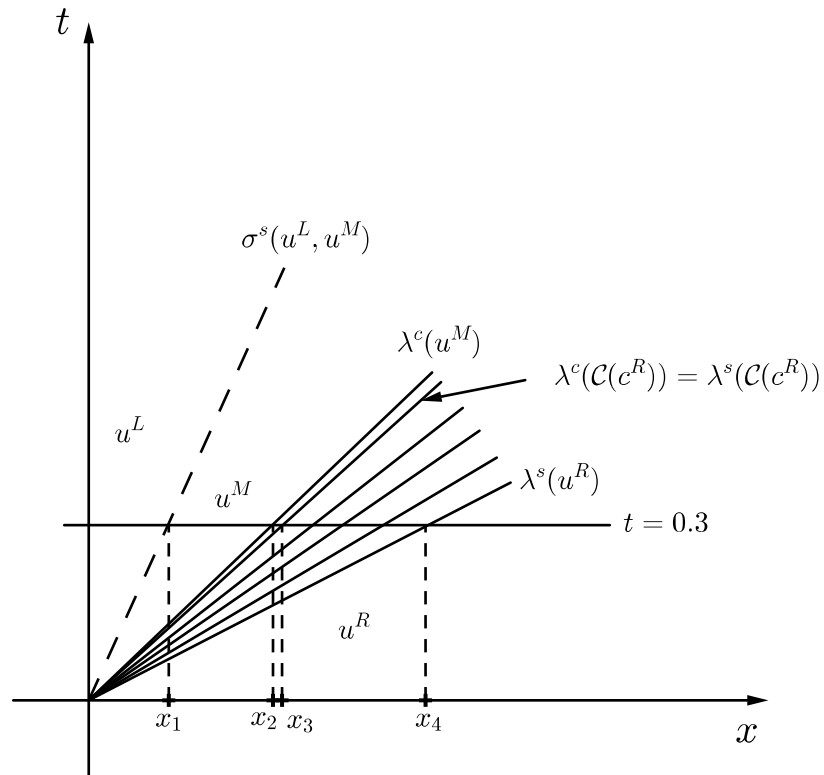


Figura C.46: Solução do problema de Riemann do Exemplo 1 no plano  $xt$ .

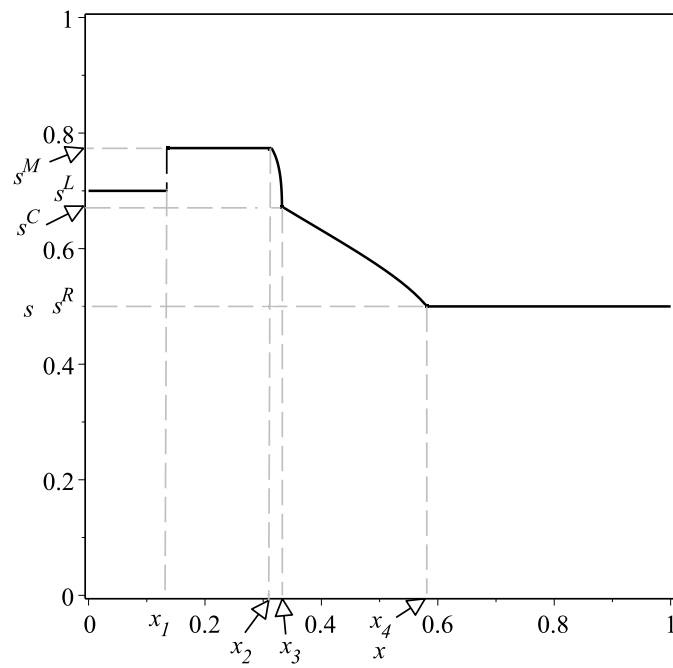


Figura C.47: Perfil de saturação da água o caso do Exemplo 1, com  $t = 0,3$ .

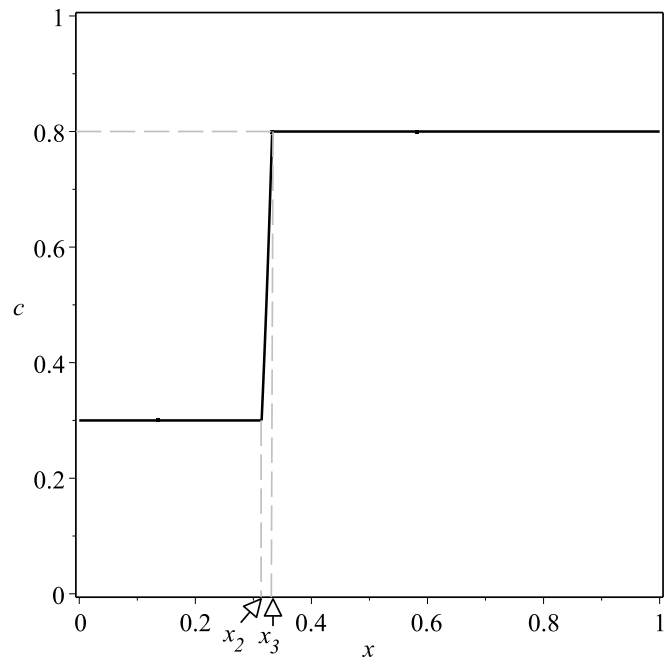


Figura C.48: Perfil de concentração do polímero do Exemplo 1, com  $t = 0,3$ .

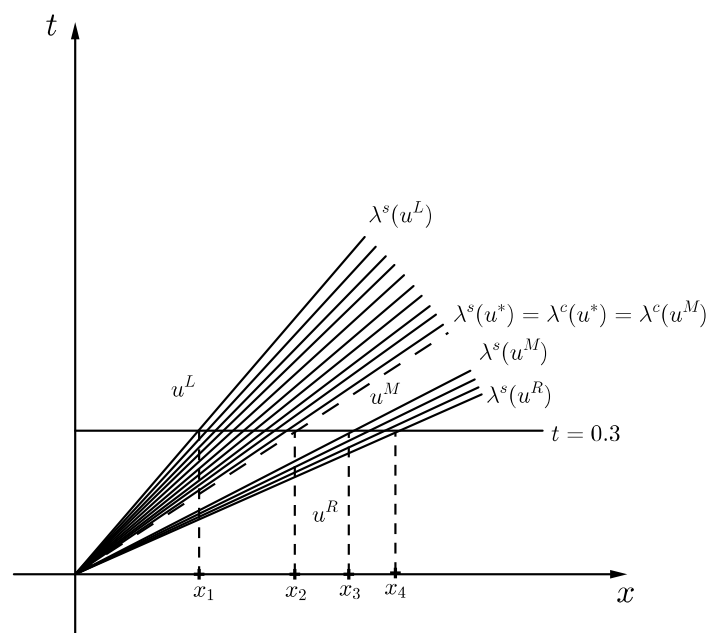


Figura C.49: Solução do problema de Riemann do Exemplo 2 no plano  $xt$ .

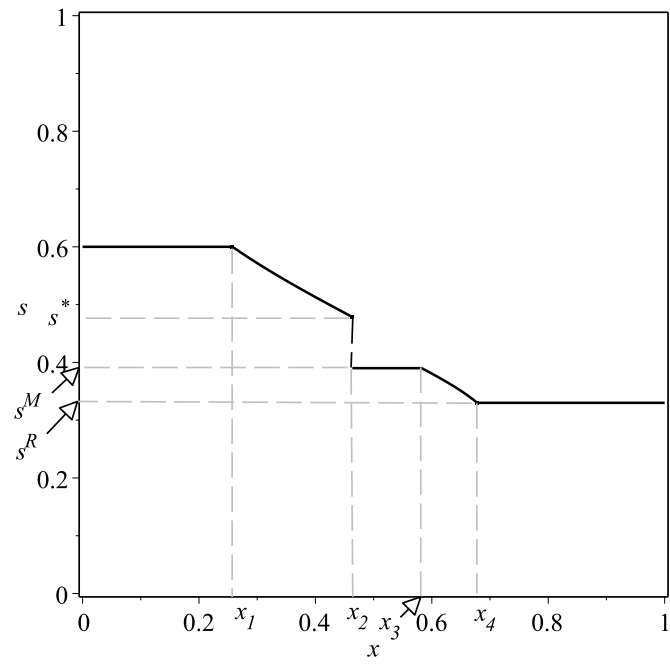


Figura C.50: Perfil de saturação da água o caso do Exemplo 2, com  $t = 0, 3$ .

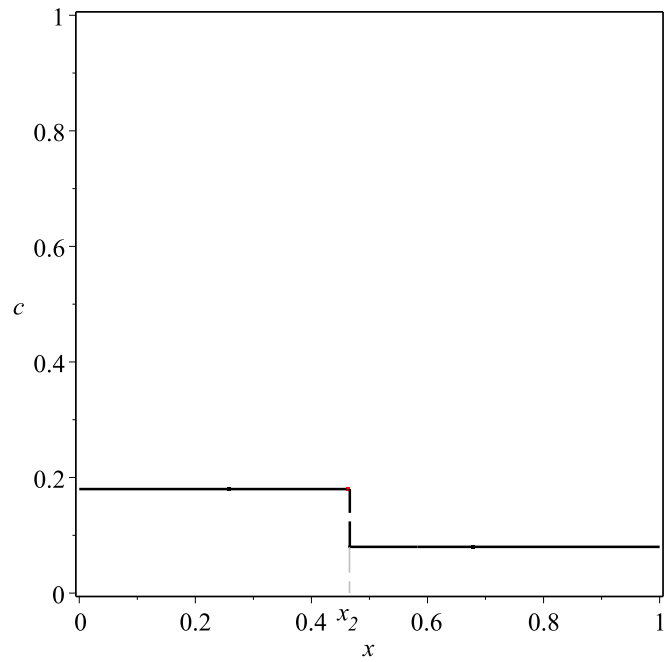


Figura C.51: Perfil de concentração do polímero do Exemplo 2, com  $t = 0, 3$ .

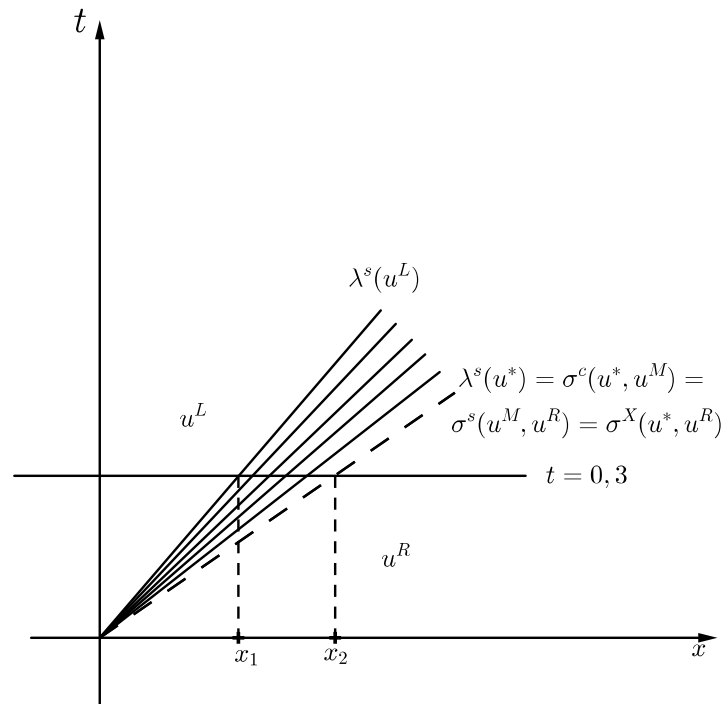


Figura C.52: Solução do problema de Riemann do Exemplo 2 no plano  $xt$  para  $u^L = (0, 6; 0, 18)$  e  $u^R = (0, 65; 0, 08)$  ilustrando um grupo de ondas formado por uma  $s$ -rarefação e de um  $c$ -choque supercompressivo.

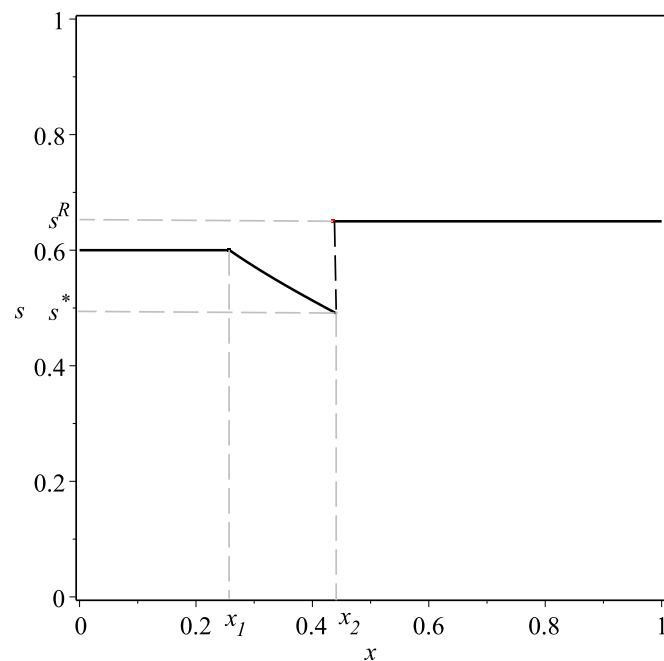


Figura C.53: Perfil de saturação da água o caso do Exemplo 2, com  $t = 0,3$ , para  $u^L = (0, 6; 0, 18)$  e  $u^R = (0, 65; 0, 08)$ .



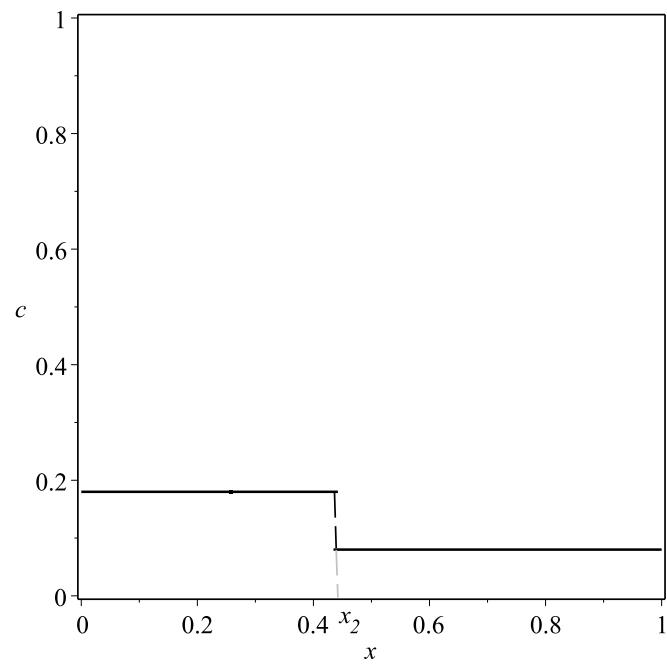


Figura C.54: Perfil de concentração do polímero do Exemplo 2, com  $t = 0,3$ , para  $u^L = (0,6;0,18)$  e  $u^R = (0,65;0,08)$ .

# Bibliografia

- [1] ANDRADE, P. L.; *O Problema de Riemann para um Modelo Matemático de um Escoamento Trifásico em Meio Poroso*, Dissertação de Mestrado, UFCG, 2013.
- [2] AZEVEDO, A. V.; SOUZA, A. J.; FURTADO, F.; MARCHESIN D.; *Uniqueness of the Riemann Solution for Three-Phase Flow in a Porous Medium*, SIAM J. Appl. Math. No. 6. pp. 1967-1997.
- [3] BARROS, L. M.; *O Problema de Riemann para um Modelo Matemático de Escoamento Trifásico com Dados de Injeção do Tipo Água-gás e Dados de Produção do Tipo Gás-óleo*, Dissertação de Mestrado, UFCG, 2010.
- [4] DAKE, L. P.; *Engenharia de Reservatórios: Fundamentos*, Elsevier, 1<sup>a</sup> Ed. 2014.
- [5] GELFAND, I. L.; *Some Problems in Theory of Quasilinear Equations*, Amer. Math. Soc. Trans, Ser.2, n<sup>o</sup> 29, pp 295-381, 1963.
- [6] GOMES, M. E. S.; *Problema de Riemann Singular para um Modelo de Quarta Ordem em escoamento Multifásico*, Tese de Doutorado, PUC-RIO, 1987.
- [7] GUEDES, M. J. F.; *Estrutura de Ondas para um Modelo de Escoamento Trifásico com Viscosidades das Fases Assimétricas*, Dissertação de Mestrado, UFCG, 2009.
- [8] ISAACSON, E.; *Global Solution of a Riemann Problem for a Non Strictly Hyperbolic System of Conservation Laws Arising in Enhanced Oil Recovery*, Rockefeller University, preprint, 1987.

- [9] JOHANSEN, T.; WINTHER, R.; *The Solution of the Riemann Problem for a Hyperbolic System of Conservation Laws Modeling Polymer Flooding*, SIAM J. Math. Anal. 19, 541-566, 1988.
- [10] LAX, P. D.; *Hyperbolic Systems of Conservation Laws II*, Comm. Pure Appl. Math., 10, pp. 537-556, 1957.
- [11] LIU, T.-P.; *The Riemann problem for general  $2 \times 2$  Conservation Laws*, Trans. Amer. Math. Soc., 199 (1974), pp. 89-112.
- [12] LIU, T.-P.; *The Riemann problem for general Systems of Conservation Laws*, J. Differential Equations, 18 (1975), pp. 218-234.
- [13] MENEZELLO, M. D. C., *Comentários à Lei de Petróleo*, Atlas, 2ª Ed., 2009.
- [14] PEACEMAN, D. W.; *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*, Elsevier, 1977.
- [15] SMOLLER, J.; *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, 1994.
- [16] SOUZA, A. J.; *Sistemas Singulares de três Leis de Conservação em escoamento Multifásico*, Tese de Doutorado, PUC-RIO, 1989.
- [17] SOUZA, A. J.; *Stability of Singular Fundamental Solutions under Perturbations for Flow in Porous Media*, Comput. Appl. Math., v.11, n°2, pp. 73-115, 1992.
- [18] THOMAS, J. E.; *Fundamentos de Engenharia de Petróleo*, Interciência, 2001.