Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Hipersuperfícies Tipo-Espaço com Curvatura de Ordem Superior Constante no Espaço de Sitter

por

Fábio Reis dos Santos †

sob orientação do

Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

Hipersuperfícies Tipo-Espaço com Curvatura de Ordem Superior Constante no Espaço de Sitter

por

Fábio Reis dos Santos

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Aprovada por:

Prof. Dr. Cícero Pedro de Aquino - UFPI

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima - UFCG

Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Março/2013

Resumo

Neste trabalho, desenvolvemos as Fórmulas Integrais tipo-Minkowski para hipersuperfícies tipo-espaço, compactas com bordo imersas no espaço de Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$ e possuindo alguma curvatura de ordem superior constante. Aplicamos estas, para estabelecer uma relação entre a curvatura média e a geometria do bordo quando se trata de uma esfera geodésica contida em um hiperplano do *Steady State space* $\mathcal{H}^{n+1} \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$.

Palavras-chave: Variedades de Lorentz, Steady State space, hipersuperfícies tipo-espaço, curvatura de ordem superior.

Abstract

In this work we develop Minkowski-type formulae for compact spacelike immersed hypersurfaces with boundary and having some constant higher order mean curvature in de Sitter space $\mathbb{S}_1^{n+1}$. We apply them to establish a relation between the mean curvature and the geometry of the boundary, when it is a geodesic sphere contained into a horizontal hyperplane of the *Steady State space* $\mathcal{H}^{n+1} \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$.

Keywords: Lorentz Manifolds, Steady State space, spacelike hypersurfaces, curvature of higher order.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, pois sem ele eu não seria. Aos meus pais, Maria Renildes e Francisco, pela educação, incentivo, amor e dedicação. Às minhas irmãs, Katiane e Sheila. Em especial a última, a qual deixo registrado aqui os meus parabéns pela recém formação em administração.

A Aline, pelo apoio, carinho e tranquilidade transmitida e por não ficar chateada comigo todas as vezes que eu esquecia de ligar para ela. Sem esquecer de Bárbara, minha cunhada (mais próxima) preferida, que esta sempre comprando remédios para mim.

Aos amigos, Luciano e Luis, pelo excelente convívio e momentos de distração nestes dois anos. Aos colegas do mestrado, Romildo, Patrício, Ailton, Débora, Elizabeth, Fabrício, Arthur, Brito, Claudemir, Antonio Marcos, Emanuela e Jogli (espero não ter esquecido ninguém) pelas altas conversas na sala de estudo, pelo bom convívio e pelos bate-papos no horário do café.

Aos professores Evandro e Maurício, que além dos ensinamentos transmitidos, sempre me incentivaram e com certeza são os grandes responsáveis por eu estar aqui hoje.

A todos os professores da pós-graduação, em especial a Ângelo e Brandão, pelas lições de análise e álgebra.

Aos professores Marco Antonio e Henrique Fernandes pelos ensinamentos em geometria e pela grande participação no meu desenvolvimento como estudante. Em especial ao primeiro por me aceitar como orientando, por toda paciência e disposição dedicada a mim. Agradeço muito!

Aos departamento de matemática por ter acolhido mais um filho em teu seio. Aos funcionários que fazem parte deste corpo, a secretária Andrezza, por sempre estar disposta a ajudar na medida do possível.

A CAPES pelo incentivo financeiro.

Ao professor Cícero por ter aceitado participar da minha banca examinadora.

A todos que contribuíram de forma direta ou indireta nesta conquista, meus sinceros agradecimentos.

Dedicatória

Aos meus pais, Maria Renildes e Francisco.

Conteúdo

Introdução

Nas últimas décadas vem sendo crescente o interesse pelo estudo das hipersuperfícies tipo-espaço imersas em ambientes espaço-tempo. Em verdade, é bem conhecido que hipersuperfícies com curvatura média constante são soluções de primeira ordem para o problema isoperimétrico, tanto no caso em que o espaço ambiente é uma variedade Riemanniana ou quando o espaço ambiente é uma variedade Lorentziana. No caso Riemanniano, estas hipersuperfícies foram estudadas em profundidade desde o início da Geometria Diferencial. Já o caso Lorentziano, tem atraido a atenção de um grande número de pesquisadores tanto na área da física como na matemática.

Do ponto de vista da física (veja [7], [10], [11], [16], [17], [22], [28]), as hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média constante identicamente nula, são soluções para o problema de Cauchy associado as equações de Einstein, e no caso em que a curvatura média é diferente de zero, são normalmente usadas para compreender o comportamento das ondas gravitacionais.

Por outro lado, do ponto de vista da matemática, as hipersuperfícies tipo-espaço também desempenham um interessante papel devido as suas boas propriedades tipo-Bernstein. Este tipo de hipersuperfícies foram estudadas pela primeira vez no exemplo de espaço-tempo mais simples: o espaço de Lorentz-Minkowski. Neste cenário, Calabi [7], Cheng e Yau [9] descobriram um tipo de propriedade tipo-Bernstein no caso das hipersuperfícies com curvatura média nula que estabelece:

As únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$ com curvatura média identicamente nula são os hiperplanos tipo-espaço.

Calabi mostrou o caso $n \geq 4$ e o caso em que n é arbitrário foi mostrado por Cheng e Yau. Mas recentemente, Aiyama [1] e Xin [30], simultaneamente e independentemente, caracterizaram os hiperplanos tipo-espaço como sendo as únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas com curvatura média constante no espaço de Lorentz-Minkowski, $\mathbb{L}^{n+1}$ cuja a imagem pela aplicação normal de Gauss esta contida em uma bola geodésica do espaço hiperbólico n-dimensional $\mathbb{H}^n$. No caso compacto, Alías e Malacarne [5] mostraram que as únicas hipersuperfícies compactas tendo alguma curvatura de ordem superior constante e bordo esférico são as bolas hiperplanares com curvatura de ordem superior igual a zero, e as calotas hiperbólicas tendo curvatura de ordem superior não nula.

Falaremos agora de um espaço-tempo de curvatura positiva de grande importância para o nosso estudo: o espaço de Sitter. Denotemos por $\mathbb{S}_1^{n+1}$ a hiperquádrica $(n+1)$-dimensional de $\mathbb{L}^{n+2}$ composta de todos os seus vetores unitários e que pode ser definida como um hiperboloide de uma folha no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+2}$. É possível mostrar que o de Sitter é uma variedade de Lorentz, completa, com curvatura seccional constante e igual a 1. Constituindo desta maneira o análogo Lorentziano às esferas redondas no contexto Riemanniano. Além disso, o espaço de Sitter, é espacialmente fechado, é globalmente hiperbólico, mas não goza da propriedade de convergência tipo-tempo.

Dentro do espaço de Sitter residem muitas hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média constante e bom comportamento geométrico, a saber: as umbílicas. Que podem ser obtidas por cortes do hiperboloide $\mathbb{S}_1^{n+1}$ com hiperplanos afins do espaço ambiente $\mathbb{L}^{n+2}$. Montiel [23] (cf. também [26]), classificou todas de acordo com o caráter causal do hiperplano (isto é, tipo-espaço, tipo-tempo ou tipo-luz). Desta maneira, obtemos hipersuperfícies umbílicas diferentes. Quando o hiperplano é tipo-espaço, obtemos hipersuperfícies compactas (elipsóides na figura Euclidiana), que são isométricas as n-esferas Riemannianas e tem curvatura média $|H| < 1$. Se os hiperplanos que estamos cortando contém uma direção nula, isto é, tangente ao cone nulo, obtemos hiperplanos tipo-espaço com curvatura média $|H| = 1$ (parábolas na figura Euclidiana), que são isométricas ao espaço Euclidiano n-dimensional. E finalmente, quando os hiperplanos são tipo-tempo, obtemos hipersuperfícies isométricas aos n-espaços hiperbólicos (hiperbolóides na figura Euclidiana) e tem curvatura média $|H| > 1$.

Em suma, há três classes de hipersuperfícies tipo-espaço, totalmente umbílicas no espaço de Sitter. O mesmo acontece no espaço hiperbólico em geometria Riemanniana (onde temos as esferas, as horosferas e as hiperesferas).

Ainda no estudo do espaço de Sitter, em 1977 Goddard [17] estabeleceu a seguinte

Conjectura (Goddard – 1977). *As únicas hipersuperfícies tipo-espaço, completas e com curvatura média constante do espaço de Sitter são as totalmente umbílicas.*

Com esta intuição, Goddard motivou diversos pesquisadores em buscar a veracidade ou não desta afirmação. Bem, ai fica a pergunta:

A conjectura é verdadeira?

Não, ela não é verdadeira, e um exemplo para justificar isto, foi dado por Montiel [23], que é a existência alguns cilindros hiperbólicos que são o produto de um espaço hiperbólico com uma esfera. *Eles são hipersuperfícies tipo-espaço, completas e com curvatura média constante do espaço de Sitter que não são totalmente umbílicas.* Apesar da não veracidade da conjectura, houve um grande impulso em saber que condições poderiam ser colocadas para que ela se tornasse verdadeira.

Em 1987 Akutagawa [2] mostrou que a conjectura é verdadeira quando

$$\begin{cases} 0 \leq H^2 \leq 1 \quad \text{no caso} \quad n = 2; \\ 0 \leq H^2 < \dfrac{4(n-1)}{n^2} \quad \text{no caso} \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Quatro anos depois, em 1991, Cheng [8] estendeu o resultado de Akutagawa para subvariedades do espaço de Sitter no caso em que o vetor curvatura média é paralelo.

No entanto, a intuição de Goddard não estava errada. Dezesseis anos após a conjectura, usando uma fórmula integral semelhante a chamada fórmula de Minkowski em geometria Riemanniana, Montiel [23] mostrou que

Teorema (Montiel – 1998). *As únicas hipersuperfícies tipo-espaço compactas, com curvatura média constante do espaço de Sitter são as totalmente umbílicas.*

Este teorema foi mostrado por Akutagawa [2] para dimensão dois. Assim, fica claro que esta conjectura não é verdadeira para o caso não compacto, devido a existência de cilindros hiperbólicos.

A partir de agora, daremos a descrição dos outros capítulos que compõem este trabalho. Nos capítulos 1 e 2 daremos a notação que vamos utilizar em todo o trabalho bem como os conhecimentos necessários à abordagem dos problemas tratados nos próximos capítulos.

Já no capitulo 3, desenvolvemos as Fórmulas Integrais tipo-Minkowski relativa a hipersuperfície tipo-espaço compactas M^n com bordo ∂M e tendo alguma curvatura de ordem superior constante no espaço de Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$. O que fizemos na prática, foi essencialmente calcular a divergência em M^n do campo de vetores $T_r(Y^\top)$, onde T_r denota a r-ésima transformação de Newton e $Y^\top$ denota a componente tangente a M^n de um campo de vetores Killing Y globalmente definido em $\mathbb{S}_1^{n+1}$.

Isto é, mostramos (veja Proposição 3.2) a

Proposição 1 *(Fórmulas Integrais tipo-Minkowski). Seja $x : M^n \to \mathbb{S}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ uma hipersuperfície tipo-espaço, compacta com bordo ∂M e seja Y um campo de Killing em $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Se a r-ésima curvatura média H_r de M^n é constante para algum r, $1 \leq r \leq n$, então:*

(i) $$\oint_{\partial M} \langle T_{r-1}\nu, Y\rangle \, dS = r\binom{n}{r} H_r \int_M \langle Y, N\rangle \, dM;$$

(ii) $$\oint_{\partial M} \langle T_{r-1}\nu, Y_{a,b}\rangle \, dS = \binom{n-1}{r-1} H_r \frac{1}{\langle a, b\rangle} \oint_{\partial M} det(x, v_1, \dots, v_{n-1}, a, b) dS,$$

onde $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ é tipo-luz, $b \in \mathbb{L}^{n+2}$, $Y_{a,b} = \dfrac{1}{\langle a, b\rangle}(\langle x, b\rangle a - \langle a, x\rangle b)$ e $v_1, \dots, v_{n-1}$ é um referencial tangente ao longo de ∂M.

Alías e Malacarne [5] obtiveram o item (i) da Proposição 1 no espaço de Lorentz-Minkowski, enquanto Alías, Brasil e Colares [3] obtiveram a fórmula integral em um espaço-tempo conformemente estacionário e consideraram as hipersuperfícies tipo-espaço M^n compactas e sem bordo. O item (ii) reproduz no espaço de Sitter (e na forma mais geral) a fórmula do fluxo de Alías e Pastor [6], que foi utilizada por López [21] para obter uma estimativa para a altura de hipersuperfícies tipo-espaço compactas com curvatura média constante no espaço de Lorentz-Minkowski tridimensional $\mathbb{L}^3$.

Em seguida, abordamos a questão da existência de hipersuperfícies tipo-espaço com alguma curvatura média de ordem superior constante no *Steady State space* $\mathcal{H}^{n+1}$, o qual é definido por

$$\mathcal{H}^{n+1} = \{x \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle x, a\rangle > 0\},$$

onde $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ é um vetor tipo-luz.

Fazendo uso de fórmulas integrais tipo-Minkowski em $\mathbb{S}_1^{n+1}$ e explorando a geometria do espaço ambiente $\mathcal{H}^{n+1} \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$, estabelecemos o resultado principal do Capítulo 4: uma fórmula do fluxo correspondente ao campo de vetores de Killing $Y_{a,b}$, onde $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ é um vetor tipo-luz que determina uma folheação de $\mathcal{H}^{n+1}$ por hiperplanos horizontais $L^n(\tau) = \{x \in \mathbb{S}_1^{n+1};\ \langle x, a\rangle = \tau\}$, $\tau \in (0, +\infty)$ e $b \in \mathbb{L}^{n+2}$ é um vetor qualquer fixado tal que $\langle a, b\rangle \neq 0$. Mas precisamente, provamos (veja Teorema 4.1) o

Teorema 1. *Seja $x : M^n \to \mathcal{H}^{n+1} \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ uma imersão tipo-espaço de uma hipersuperfície compacta, cujo bordo é uma subvariedade mergulhada $(n-1)$-dimensional $\Sigma = x(\partial M)$ a qual esta contida num hiperplano horizontal, para algum $\tau > 0$. Se a r-ésima curvatura média H_r é constante, para algum r, $1 \le r \le n$, então*

$$\oint_{\partial M} \langle T_{r-1}\nu, Y_{a,b}\rangle\, dS = -r\binom{n}{r} H_r vol(\Omega),$$

onde $T_{r-1} : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é a $(r-1)$-ésima transformação de Newton associada a segunda forma fundamental de x e Ω é um domínio em $L^n(\tau)$ limitado por Σ.

No item (i) da Proposição 1, podemos destacar que para cada campo de Killing Y, o seu $(r-1)$-ésimo fluxo depende a priori da geometria da hipersuperfície. O Teorema 1 nos garante que, considerando o campo de Killing $Y_{a,b}$ o $(r-1)$-ésimo fluxo

$$\oint_{\partial M} \langle T_{r-1}\nu, Y_{a,b}\rangle\, dS,$$

não depende da hipersuperfície M^n, mas somente do valor de H_r e do bordo ∂M. É exatamente esse fato que constitui a relevância da fórmula acima: uma ferramenta analítica para o estudo de hipersuperfícies compactas com alguma curvatura de ordem superior constante em $\mathcal{H}^{n+1}$ e tendo restrições apenas na geometria do bordo.

Como aplicação desta fórmula integral, estabelecemos uma relação entre a curvatura média e o bordo de uma hipersuperfície tipo-espaço M^n imersa em $\mathcal{H}^{n+1}$. Para encontrarmos essa tal relação, escolhemos de maneira apropriada o vetor b na definição do campo de Killing $Y_{a,b}$ de modo a detectarmos a geometria de ∂M e usamos a Estimativa do Gradiente devido a Montiel e mostramos (veja Teorema 4.4) o

Teorema 2. *Seja $x : M^n \to \mathcal{H}^{n+1} \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ uma imersão tipo-espaço de uma hipersuperfícies compacta M^n com bordo não-vazio ∂M no steady state space. Suponha que M^n tem curvatura média constante $H > 1$ com respeito ao campo normal unitário N apontando para o futuro e que $\partial M = S^{n-1}(b, \rho)$ é uma esfera geodésica de dimensão $(n-1)$ com centro em b e raio ρ contida num hiperplano horizontal $L^n(\tau)$, para algum $\tau > 0$. Então*

$$\rho H - \left|1 - \frac{\rho^2}{2}\right| \sqrt{H^2 - 1} \leq 1.$$

Finalmente, no Apêndice, daremos uma demonstração alternativa para o Teorema 1 no caso em que o bordo é esférico, fazendo uso do item (ii) da Proposição 1. E também demonstramos o seguinte resultado (veja Teorema A.2), devido a Montiel [24].

Teorema *(Estimativa do Gradiente). Seja $\psi : M^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma imersão tipo-espaço de uma variedade compacta M^n com bordo ∂M^n não-vazio no steady state space. Suponha que ψ tenha curvatura média constante $H > 1$ com respeito ao campo unitário e normal N apontando para o passado e que a aplicação ψ leva ∂M^n no slice temporal $L^n(\tau)$, para algum $\tau > 0$. Então podemos escolher um campo unitário e normal n da imersão $\psi\big|_{\partial M^n} : \partial M^n \to L^n(\tau)$ tal que $\langle N, n\rangle > 0$. Assuma que, com respeito a esta orientação, a curvatura média de $\psi\big|_{\partial M^n} : \partial M^n \to L^n(\tau)$ é não negativa. Então*

$$H\langle \psi, a\rangle + \langle N, a\rangle \geq 0,$$

e também $\langle N, a\rangle \geq -H\tau$ em M^n.

Este trabalho de dissertação, teve como base o artigo intitulado por: *Spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in de Sitter space*, publicado em 2007 no Jornal of Geometry an Physics, devido a de Lima [14].

Capítulo 1

Arcabouço Teórico

Este capítulo tem como objetivo estabelecer as notações que serão utilizadas nos demais capítulos deste trabalho. Para maiores detalhes, indicamos ao leitor a referência [15] e [27].

1.1 Tensores em Variedades

No que segue, $V_1, \ldots, V_s$ denotam módulos sobre um anel $\mathbb{K}$ e o conjunto

$$V_1 \times \ldots \times V_s = \{(v_1, \ldots, v_s);\ v_i \in V_i,\ 1 \leq i \leq s\},$$

munido com as operações usuais de soma e multiplicação por elementos de $\mathbb{K}$ é um módulo sobre $\mathbb{K}$ chamado *produto direto*.

Se W é também um módulo sobre $\mathbb{K}$ então dizemos que a função

$$A : V_1 \times \ldots \times V_s \to W$$

é $\mathbb{K}$-*multilinear* quando A é $\mathbb{K}-$linear em cada entrada. Se V é um módulo sobre $\mathbb{K}$, consideremos o conjunto

$$V^* = \{f : V \to \mathbb{K};\ f \quad \text{é} \quad \mathbb{K} - linear\}.$$

Munido com as operações usuais de soma e multiplicação por elementos de $\mathbb{K}$, obtemos que V^* é um módulo sobre $\mathbb{K}$ chamado *módulo dual* de V ou simplesmente *dual* de V.

Quando $V_i = V$ para todo $1 \leq i \leq s$, escrevemos

$$V^s = \underbrace{V \times \ldots \times V}_{s\ vezes}.$$

Definição 1.1 *Para inteiros $r, s \geq 0$ (ambos não nulos) uma função $\mathbb{K}$-multilinear*

$$A : (V^*)^r \times V^s \to \mathbb{K}$$

é chamado um tensor do tipo (r,s) em V. Quando r = 0 escrevemos $A : V^s \to \mathbb{K}$ e de maneira análoga, quando s = 0 escrevemos $A : (V^*)^r \to \mathbb{K}$.

Denotemos por

$$\mathfrak{T}_s^r(V) = \{A : (V^*)^r \times V^s \to \mathbb{K};\ A \quad \text{é} \quad \mathbb{K} - multilinear\}, \tag{1.1}$$

o conjunto do todos os tensores do tipo (r, s) em V.

Com as operações usuais de soma de funções e a multiplicação por elementos $\mathbb{K}$, obtemos que $\mathfrak{T}_s^r(V)$ é um módulo sobre $\mathbb{K}$. Um tensor do tipo $(0, 0)$ sobre V é simplesmente um elemento de $\mathbb{K}$.

Consideremos agora uma variedade diferenciável M. Denotemos por $C^\infty(M)$ o anel das funções de valores reais em M e $\mathfrak{X}(M)$ o $C^\infty(M)$-módulo dos campos de vetores em M.

Definição 1.2 *Um campo tensorial A em M é um tensor sobre $C^\infty(M)$-módulo $\mathfrak{X}(M)$. Assim, se A é um campo tensorial do tipo (r,s) em M então*

$$A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to C^\infty(M)$$

é uma função $C^\infty(M)$-multilinear.

Observação 1.1 *Observemos que se $\theta^1, \ldots, \theta^r \in \mathfrak{X}^*(M)$ e $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$ então*

$$A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) : M \to \mathbb{R}$$

é uma função suave, onde θ^i ocupa a i-ésima entrada contravariante e X_j a j-ésima entrada covariante.

De maneira análoga ao definido em (1.1) denotemos por $\mathfrak{T}_s^r(M)$ o conjunto de todos os tensores do tipo (r, s) sobre M que é um módulo sobre $C^\infty(M)$. Quando $r = s = 0$ temos $\mathfrak{T}_0^0(M) = C^\infty(M)$.

A próxima definição, nos mostra uma maneira de fazer o produto tensorial entre dois tensores.

Definição 1.3 *Sejam $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ e $B \in \mathfrak{T}^{r'}_{s'}(M)$. Então $A \otimes B \in \mathfrak{T}^{r+r'}_{s+s'}(M)$, dado por*

$$\begin{aligned} &(A \otimes B)(\theta^1, \ldots, \theta^r, \theta^{r+1}, \ldots, \theta^{r+r'}, X_1, \ldots, X_s, X_{s+1}, \ldots, X_{s+s'}) \\ = \;& A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s,) \cdot B(\theta^{r+1}, \ldots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \ldots, X_{s+s'}) \end{aligned}$$

é um campo tensorial chamado produto tensorial de A e B.

Observação 1.2 *Quando $r' = s' = 0$ então B é uma função $f \in C^\infty(M)$ e definimos*

$$A \otimes f = f \otimes A = fA.$$

Assim, se A também é do tipo $(0,0)$, o produto tensorial se reduz a multiplicação usual em $C^\infty(M)$. Em geral o produto tensorial não é comutativo, mais a frente veremos uma definição na qual produto tensorial se torna comutativo.

O exemplo abaixo nos diz algumas interpretações as quais nos permite identificar 1-formas e campos de tensores.

Exemplo 1 (Identificações)

(i) Seja ω uma 1-forma suave sobre a variedade M. Então a função

$$A : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

dada por $A(X) = \omega(X)$ é $C^\infty(M)$-linear. Portanto, A é um campo tensorial do tipo $(0,1)$ em M. Assim todo campo tensorial do tipo (0,1) é dado de maneira única como uma 1-forma e escrevemos

$$\mathfrak{X}^*(M) = \mathfrak{T}^0_1(M).$$

(ii) Seja V um campo tensorial suave sobre M. Então a função

$$V : \mathfrak{X}^*(M) \to C^\infty(M)$$

dada por $V(\theta) = \theta(V)$ é $C^\infty(M)$-linear. Portanto, V é um campo tensorial do tipo (1,0) em M. Assim todo campo tensorial é dado de maneira única como um campo vetorial e escrevemos

$$\mathfrak{X}(M) = \mathfrak{T}^1_0(M).$$

(iii) Se $A : \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$ *é* $C^\infty(M)-$ *multilinear, defina*

$$\overline{A} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^s \to C^\infty(M)$$

como sendo

$$\overline{A}(\theta, X_1, \dots, X_s) = \theta(A(X_1, \dots, X_n)), \ \forall\ \theta \in \mathfrak{X}^*(M) \text{ e } X_i \in \mathfrak{X}(M), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Observe que $\overline{A}$ *é* $C^\infty(M)$*-multilinear e portanto* $\overline{A}$ *é um campo tensorial do tipo (1,s) em M.*

Definição 1.4 *Os tensores do tipo* $(0, s)$ *são chamados de covariantes enquanto os tensores do tipo* $(r, 0)$ *são chamados de contravariantes.*

Como haviamos dito na Observação (1.2), a condição a qual o produto tensorial é comutativo é quando A é contravariante e B covariante e vice-versa.

O próximo resultado nos mostra que um campo tensorial A em M pode ser definido pontualmente em M, dando um valor A_p a cada ponto $p \in M$. Isto exatamente para campos e 1-formas. O fato essencial é que quando A é avaliado em campos e 1-formas para resultar na função de valores reais $A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s,)$, o valor desta função não depende de cada 1-forma ou de cada campo de vetores, mas somente dos valores dela em uma vizinhança do ponto p, mais disso mostraremos o seguinte

Lema 1.1 *Se uma das 1-formas ou um dos campos de vetores for igual a zero em p, então*

$$A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p) = 0.$$

Demonstração. Suponha que $X_s|_p = 0$, e sejam $x^1, \dots, x^n$ um sistema de coordenadas em uma vizinhança U de p. Sendo assim podemos escrever

$$X_s = \sum_{i=1}^{n} X_s(x^i)\partial_i, \tag{1.2}$$

onde $\partial_1, \dots, \partial_n$ é uma base do T_pM.

Denote $X_s(x^i) = X^i \in C^\infty(M)$ e reescreva a equação (1.2) como

$$X_s = \sum_{i=1}^{n} X^i \partial_i.$$

Seja $f \in C^\infty(M)$ uma *função bump*[1] em p com $supp(f) \subset U$.

Note que fx^i é uma função suave em M e da mesma forma $f\partial_i \in \mathfrak{X}(M)$, assim

$$\begin{aligned}
f^2 A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) &= A(\theta^1, \ldots, f^2 X_s) \\
&= A\left(\theta^1, \ldots, f^2 \sum_{i=1}^n X^i \partial_i\right) \\
&= A\left(\theta^1, \ldots, \sum_{i=1}^n f^2 X^i \partial_i\right) \\
&= A\left(\theta^1, \ldots, \left(\sum_{i=1}^n f X^i\right) f\partial_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^n f X^i \cdot A(\theta^1, \ldots, f\partial_i),
\end{aligned}$$

avaliando no ponto p, temos

$$f^2(p) A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)(p) = \left(\sum_{i=1}^n f(p) X^i(p)\right) A(\theta^1, \ldots, f\partial_i)(p).$$

Como $X_s|_p = 0$, temos que $X^i(p) = X_s(x^i)|_p = 0$, e por uma das propriedades de *função bump*, temos que em uma vizinhança U de p, $f(p) = 1$, portanto

$$A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)(p) = 0.$$

■

Proposição 1.5 *Sejam $p \in M$ e $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$. Sejam também $\overline{\theta}^1, \ldots, \overline{\theta}^r$ e $\theta^1, \ldots, \theta^r$ as 1-formas tais que $\overline{\theta}^i|_p = \theta^i|_p$, para todos $1 \leq i \leq r$ e $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_s$ e $X_1, \ldots, X_s$ os campos de vetores tais que $\overline{X}_j|_p = X_j|_p$ para todo $1 \leq j \leq s$. Então*

$$A(\overline{\theta}^1, \ldots, \overline{\theta}^r, \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_s)(p) = A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)(p).$$

Demonstração. Faremos a prova para o caso $r = 1$ e $s = 2$, o caso geral segue deste. Denotemos por $\theta, \overline{\theta}$ as 1-formas e $X_i, \overline{X}_i$, $1 \leq i \leq 2$, os campos de vetores e consideremos a seguinte identidade

$$\begin{aligned}
A(\overline{\theta}, \overline{X}_1, \overline{X}_2) - A(\theta, X_1, X_2) &= A(\overline{\theta} - \theta, \overline{X}_1, \overline{X}_2) + A(\theta, \overline{X}_1 - X_1, \overline{X}_2) \\
&\quad + A(\theta, X_1, \overline{X_2} - X_2). \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

[1] Dada qualquer vizinhança U de um ponto $p \in M$ existe uma função $f \in C^\infty(M)$, satisfazendo:
(i) $0 \leq f \leq 1$ sobre M;
(ii) $f = 1$ em alguma vizinhança de p;
(iii) $supp(f) \subset U$.

Por hipótese, $\overline{\theta}|_p = \theta|_p$, $\overline{X}_1|_p = X_1|_p$ e $\overline{X}_2|_p = X_2|_p$, então

$$\overline{\theta}|_p - \theta|_p = 0,\ \overline{X}_1|_p - X_1|_p = 0 \ e\ \overline{X}_2|_p - X_2|_p = 0$$

logo, avaliando a equação (1.3) em p e usando o Lema (1.1) segue

$$A(\overline{\theta}, \overline{X}_1, \overline{X}_2)(p) - A(\theta, X_1, X_2)(p) = 0,$$

o que conclui a demonstração. ■

Encerraremos esta seção com a seguinte

Observação 1.3 *Segue da última proposição que um campo tensorial $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ possui um valor A_p em cada ponto $p \in M$, especificamente, a função*

$$A_p : ((T_pM)^*)^r \times (T_pM)^s \to \mathbb{R}$$

definida da seguinte forma: se $\alpha^1, \ldots, \alpha^r \in (T_pM)^*$ e $v_1, \ldots, v_s \in T_pM$ então

$$A_p(\alpha^1, \ldots, \alpha^r, v_1, \ldots, v_s) = A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)(p),$$

onde $\theta^1, \ldots, \theta^r \in \mathfrak{X}^*(M)$ e $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{X}^*(M)$ são tais que $\theta^i|_p = \alpha^i$ $(1 \leq i \leq r)$ e $X_j|_p = v_j$ $(1 \leq j \leq s)$.

Não é difícil verificar que A_p é $\mathbb{R}$-multilinear. Então A é um tensor do tipo (r, s) em T_pM. Assim, podemos considerar $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ como um campo suave que associa a cada ponto $p \in M$ o tensor A_p.

1.1.1 Componentes de um Tensor

Definiremos agora as componentes de um tensor. Denotaremos por simplicidade M^n por M, onde n indica a dimensão da variedade.

Definição 1.6 *Seja M^n uma variedade diferenciável. Considere um sistema de coordenadas $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ num conjunto aberto $U \subset M^n$. Se $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ então as componentes de A em ξ são as funções*

$$A^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = A(dx^{i_1}, \ldots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_s}) : U \subset M \to \mathbb{R},$$

onde $i_1 \ldots i_r, j_1 \ldots j_s \in \{1, \ldots, n\}$.

Faremos agora uma pequena aplicação da definição anterior.

Exemplo 2 *Se* $A \in \mathfrak{T}_2^1(M)$*, então escrevendo* $X = \sum_i X^i \partial_i$*,* $Y = \sum_j X^j \partial_j$ *e* $\theta = \sum_k \theta_k dx^k$ *obtemos*

$$\begin{aligned} A(\theta, X, Y) &= A\left(\sum_i X^i \partial_i, \sum_j X^j \partial_j, \sum_k \theta_k dx^k\right) \\ &= \sum_{i,j,k} \theta_k X^i Y^j \underbrace{A(dx^k, \partial_i, \partial_j)}_{A_{ij}^k} \\ &= \sum_{i,j,k} A_{ij}^k \theta_k X^i Y^j. \end{aligned}$$

Observação 1.4 *Se* $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ *e* $B \in \mathfrak{T}_{s'}^{r'}(M)$ *são campos definidos em* M*, então as componentes de* $A \otimes B \in \mathfrak{T}_{s+s'}^{r+r'}(M)$ *são*

$$(A \otimes B)_{j_1 \dots j_s j_{s+1} \dots j_{s+s'}}^{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_{r+r'}} = A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \cdot B_{j_{r+1} \dots j_{s+s'}}^{i_{s+1} \dots i_{r+r'}},$$

onde $i_1 \dots i_{r+r'}, j_1 \dots j_{s+s'} \in \{1, \dots, n\}$.

Lema 1.2 *Seja* $x^1, \dots, x^n$ *um sistema de coordenadas em* $U \subset M$*. Se* $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ *então em* U *temos*

$$A = A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_s},$$

onde $i_1 \dots i_{r+r'}, j_1 \dots j_{s+s'} \in \{1, \dots, n\}$.

1.1.2 Contração de Tensores

Existe uma operação chamada contração que transforma tensores do tipo (r, s) em tensores do tipo $(r-1, s-1)$. A definição geral deste tipo especial de tensores segue do

Lema 1.3 *Existe uma única função* $C^\infty(M)$*-linear*

$$\mathfrak{C} : \mathfrak{T}_s^r(M) \to C^\infty(M),$$

chamada (1,1)-contração, tal que $\mathfrak{C}(X \otimes \theta) = \theta(X)$*, para todo* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$.

Demonstração. Da $C^\infty(M)$-linearidade, observamos que $\mathfrak{C}$ será uma operação pontual. Considere $A \in \mathfrak{T}_1^1(M)$. Se $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ é um sistema local de coordenadas então, A pode ser escrito da forma

$$A = \sum_{ij} A_j^i \partial_i \otimes dx^j.$$

Queremos que

$$\mathfrak{C}(\partial_i \otimes dx^j) = dx^j(\partial_i) = \delta_i^j.$$

Assim, localmente podemos definir

$$\mathfrak{C} : \mathfrak{T}_1^1(M) \to C^\infty(M)$$

dada por $\mathfrak{C}(A) = \sum_i A_i^i$. E assim, $\mathfrak{C}$ possui a propriedade requerida.

Para estender o resultado em toda a variedade, basta mostrar que a definição independe do sistema de coordenadas escolhido.

De fato, se $\eta = (y^1, \ldots, y^n)$ é um outro sistema de coordenadas local em M, então

$$\begin{aligned}
\sum_m A_m^m &= \sum_m A\left(dy^m, \frac{\partial}{\partial y^m}\right) \\
&= \sum_m A\left(\sum_i \frac{\partial y^m}{\partial x^i} dx^i, \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial y^m}\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum_{i,j,k} \frac{\partial y^m}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial y^m} A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum_{i,j} \frac{\partial x^j}{\partial x^i} A_j^i \\
&= \sum_{i,j} \delta_i^j A_j^i \\
&= \sum_i A_i^i.
\end{aligned}$$

■

Agora para estender o Lema (1.3) para tensores de tipo mais elevado o procedimento é especificar uma entrada covariante e uma entrada contravariante, e aplicar o Lema (1.3) para estes.

Sendo assim, suponha que $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ e $1 \le i \le r$ e $1 \le j \le s$. Fixadas as 1-formas $\theta^1, \ldots, \theta^{r-1}$ e campos de vetores $X_1, \ldots, X_{s-1}$. Então a função

$$(\theta, X) \to A(\theta^1, \ldots, \theta, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, X, \ldots, X_{s-1}),$$

onde θ ocupa a i-ésima entrada contravariante e X ocupa a j-ésima entrada covariante, é um tensor do tipo $(1,1)$ que pode ser escrito como

$$A(\theta^1, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, X_{s-1}).$$

Aplicando o Lema (1.3) para este tensor, obtemos a função de valores reais dada por

$$(C^i_j A)(\theta^1, \dots \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{s-1}).$$

Não é difícil ver que $C^i_j A$ é $C^\infty(M)$-multilinear nestes argumentos. Portanto é um tensor do tipo $(r-1, s-1)$ chamado a *contração* de A sobre i, j.

Exemplo 3 *Se $A \in \mathfrak{T}^2_3(M)$ então $\mathfrak{C}^1_3(A) \in \mathfrak{T}^1_2(M)$ é dado por*

$$(\mathfrak{C}^1_3(A))(\theta, X, Y) = \mathfrak{C}(A(\cdot, \theta, X, Y, \cdot)).$$

Se $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ é um sistema de coordenadas, então

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{C}^1_3(A))^k_{ij} &= (\mathfrak{C}^1_3(A))(dx^k, \partial_i, \partial_j) = \mathfrak{C}(A(\cdot, dx^k, \partial_i, \partial_j, \cdot)) \\
&= \sum_m A(dx^m, dx^k, \partial_i, \partial_j, \partial_m) = \sum_m A^{mk}_{ijm}.
\end{aligned}$$

Uma consequência imediata é dada pelo.

Corolário 1.7 *Sejam $i \in \{1, \dots, r\}$ e $j \in \{1, \dots, s\}$. Se $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ então as componentes de $\mathfrak{C}^i_j(A) \in \mathfrak{T}^{r-1}_{s-1}(M)$ são*

$$(\mathfrak{C}^i_j(A))^{i_1 \dots i_{r-1}}_{j_1 \dots j_{s-1}} = \sum_m A^{i_1 \dots m \dots i_{r-1}}_{j_1 \dots m \dots j_{s-1}},$$

onde m ocupa simultaneamente a i-ésima entrada e a j-ésima entrada.

1.1.3 O Pullback

Definiremos agora uma importante operação que por meio de uma aplicação diferenciável entre M e N, qualquer tensor covariante em N fornece um novo tensor em M.

Definição 1.8 *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $\phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Se $A \in \mathfrak{T}^0_s(N)$, com $s \geq 1$ e considere*

$$(\phi^* A)_p : (T_p M)^s \to \mathbb{R},$$

dada por

$$(\phi^* A)_p(v_1, \dots, v_s) = A(\phi(p))(d\phi_p(v_1), \dots, d\phi_p(v_n)),$$

para quaisquer $v_1, \dots, v_s \in T_p M$ e qualquer $p \in M$. Então $\phi^* A$ é chamado "pullback" de A por ϕ.

Pela linearidade e multilinearidade das respectivas aplicações

$$d\phi_p : T_pM \to T_{\phi(p)}N \quad \text{e} \quad A_{\phi(p)} : (T_{\phi(p)}N)^s \to \mathbb{R},$$

obtemos que $(\phi^*A)_p : (T_pM)^s \to \mathbb{R}$ é $\mathbb{R}$-multilinear. Assim $(\phi^*A)_p$ é um tensor do tipo $(0, s)$ em T_pM. Portanto $\phi^*A \in \mathfrak{T}^0_s(M)$ e convém observar que no caso em que $s = 0$ temos $A \in \mathfrak{T}^0_0(M) = C^\infty(M)$, e neste caso definimos

$$\phi^*A = A \circ \phi \in C^\infty(M).$$

O próximo resultado, nos fornece algumas propriedades importantes do *pullback*.

Lema 1.4 *Sejam M, N e P variedades diferenciáveis, $f \in C^\infty(M)$ e considere as seguintes aplicações*

$$\phi : M \to N, \ \psi : N \to P.$$

Então

(i) $\phi^*(df) = d(\phi^*f)$;

(ii) $\phi^* : \mathfrak{T}^0_s(N) \to \mathfrak{T}^0_s(M)$ *é $\mathbb{R}-$ linear para cada $s \geq 0$, e* $\phi^*(A \otimes B) = (\phi^*A) \otimes (\phi^*B)$;

(iii) $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^* : \mathfrak{T}^0_s(P) \to \mathfrak{T}^0_s(M)$.

Demonstração.

(i) Se $p \in M$ então usando a Regra da Cadeia temos que

$$d(\phi^*f)_p = d(f \circ \phi)_p = df_{\phi(p)}(d\phi_p) = \phi^*(df_p).$$

Como p foi escolhido arbitrariamente, seque que $d(\phi^*f) = \phi^*(df)$.

(ii) A $\mathbb{R}$-linearidade de ϕ^* é consequência da última definição.

Sejam $A, B \in \mathfrak{T}^0_s(N)$ e se $v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_s \in T_pM$ então,

$$\begin{aligned}
&\phi^*(A \otimes B)(v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_s) \\
&\quad = (A \otimes B)(d\phi(v_1), \ldots, d\phi(v_s), d\phi(w_1), \ldots, d\phi(w_s)) \\
&\quad = A(d\phi(v_1), \ldots, d\phi(v_s)) \cdot B(d\phi(w_1), \ldots, d\phi(w_s)) \\
&\quad = (\phi^*A)(v_1, \ldots, v_s) \cdot (\phi^*B)(w_1, \ldots, w_s) \\
&\quad = (\phi^*A) \otimes (\phi^*B)(v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_s).
\end{aligned}$$

Segue que $\phi^*(A \otimes B) = (\phi^*A) \otimes (\phi^*B)$.

(iii) Primeiramente observe que $\psi \circ \phi : M \to P$ e se dado $A \in \mathfrak{T}^0_s(P)$, então $\psi^* A \in \mathfrak{T}^0_s(N)$ e $\phi^*(\psi^* A) \in \mathfrak{T}^0_s(M)$.

Consideremos $v_1, \ldots, v_s \in T_pM$, daí

$$\begin{aligned}
((\psi \circ \phi)^* A)(v_1, \ldots, v_s) &= A(d(\psi \circ \phi)(v_1), \ldots, d(\psi \circ \phi)(v_s)) \\
&= A(d\psi(d\phi(v_1)), \ldots, d(\psi(d\phi(v_s)))) \\
&= (\psi^* A)(d\phi(v_1), \ldots, d(\phi(v_s))) \\
&= (\phi^*(\psi^* A))(v_1, \ldots, v_s) \\
&= ((\phi^* \circ \psi^*)A)(v_1, \ldots, v_s).
\end{aligned}$$

Segue que $(\psi \circ \phi)^* A = (\phi^* \circ \psi^*)A$, para todo $A \in \mathfrak{T}^0_s(P)$, de onde concluímos que $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$.

■

1.1.4 Derivação de Tensores

Conheceremos agora um tipo de tensor chamado Tensor Derivação. Veremos algumas de suas propriedades e por fim, definiremos a derivada de Lie que será de muita importância no desenvolvimento do nosso trabalho.

Definição 1.9 *Uma derivação $\mathfrak{D}$ em uma variedade diferenciável M é um conjunto de funções $\mathbb{R}$-lineares*

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^r_s : \mathfrak{T}^r_s(M) \to \mathfrak{T}^r_s(M) \ (r, s \geq 0),$$

tal que para quaisquer $A, B \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ e toda contração $\mathfrak{C}$, tem-se

(i) $\mathfrak{D}(A \otimes B) = (\mathfrak{D}A) \otimes B + A \otimes (\mathfrak{D}B)$;

(ii) $\mathfrak{D}(\mathfrak{C}(A)) = \mathfrak{C}(\mathfrak{D}A)$.

Definida desta maneira, $\mathfrak{D}$ é $\mathbb{R}$-linear, preserva o tipo do tensor, obedece a regra do produto e comuta com contrações. Para uma função $f \in C^\infty(M)$ temos $f \otimes A = f \cdot A$, assim $\mathfrak{D}(fA) = (\mathfrak{D}f)A + f(\mathfrak{D}A)$, e quando $t = s = 0$, se $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^0_0 : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ é uma derivação em M, então existe um único $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\mathfrak{D}f = Xf$, para qualquer $f \in C^\infty(M)$.

Proposição 1.10 *Se $\mathfrak{D}$ é uma derivação em M e U é um aberto de M então existe uma única derivação $\mathfrak{D}_U$ tal que*

$$\mathfrak{D}_U(A|_U) = (\mathfrak{D}A)|_U,$$

para todo tensor A em M. ($\mathfrak{D}_U$ é chamado a restrição de $\mathfrak{D}$ em U, e daqui por diante omitiremos o subíndice U).

Demonstração. Seja $B \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ e considere $p \in U$ e f uma função bump em p. Então $fB \in \mathfrak{T}^r_s(M)$. Defina

$$\mathfrak{D}_U(A|_U) = (\mathfrak{D}A)|_U.$$

Afirma-se que a definição acima independe da escolha da função bump.

De fato, seja g uma outra função bump em p, então

$$\mathfrak{D}(gfB)_p = \mathfrak{D}(g(p))f(p)B_p + g(p)(\mathfrak{D}fB)_p = \mathfrak{D}(fB)_p.$$

De maneira análoga, $\mathfrak{D}(gfB)_p = \mathfrak{D}(gB)_p$. Assim, $\mathfrak{D}(fB)_p = \mathfrak{D}(gB)_p$ e a definição acima é uma boa definição.

Além disso é possível mostrar que:

(i) $\mathfrak{D}_U B$ é um campo tensorial em U;

(ii) $\mathfrak{D}_U$ é uma derivação em U;

(iii) $\mathfrak{D}_U(B|_U) = (\mathfrak{D}B)|_U)$ para todo tensor B em M;

(iv) $\mathfrak{D}_U$ é único,

o que conclui a demonstração. ■

A fórmula de Leibniz $\mathfrak{D}(A \otimes B) = (\mathfrak{D}A) \otimes (\mathfrak{D}B)$ pode ser reformulada da seguinte maneira.

Proposição 1.11 (Regra do Produto) *Seja $\mathfrak{D}$ uma derivação em M. Se $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ então*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}(A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)) &= (\mathfrak{D}A)(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) \\
&+ \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1, \ldots, \mathfrak{D}\theta^i, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) \\
&+ \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, \mathfrak{D}X_j, \ldots, X_s).
\end{aligned}$$

Demonstração. Por simplicidade, façamos $r = s = 1$ e afirmamos que

$$A(\theta, X) = \overline{\mathfrak{C}}(A \otimes \theta \otimes X),$$

onde $\overline{\mathfrak{C}}$ é a composta de duas contrações.

Com efeito, seja $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ um sistema de coordenadas local em M. Então pela Observação (1.4), $A \otimes \theta \otimes X$ tem componentes $A^i_j \theta_k X^l$.

Uma vez que $A(\theta, X) = \sum_{i,j} A^i_j \theta_i X^j$ temos,

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(A(\theta, X)) &= \mathfrak{D}\overline{\mathfrak{C}}(A \otimes \theta \otimes X) = \overline{\mathfrak{C}}\mathfrak{D}(A \otimes \theta \otimes X) \\ &= \overline{\mathfrak{C}}(\mathfrak{D}A \otimes \theta \otimes X) + \overline{\mathfrak{C}}(A \otimes \mathfrak{D}\theta \otimes X) + \overline{\mathfrak{C}}(A \otimes \theta \otimes \mathfrak{D}X) \\ &= (\mathfrak{D}A)(\theta, X) + A(\mathfrak{D}\theta, X) + A(\theta, \mathfrak{D}X). \end{aligned}$$

a demonstração do caso geral segue deste. ■

Corolário 1.12 *Se duas derivações $\mathfrak{D}_1$ e $\mathfrak{D}_2$ em M coincidem em funções reais definidas em M e em campos de vetores definidos em M, então $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$.*

Demonstração. Basta observar na Proposição anterior que

$$(\mathfrak{D}\theta)(X) = \mathfrak{D}(\theta(X)) - \theta(\mathfrak{D}X),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e todo $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$. ■

Se sabemos derivar sobre $C^\infty(M)$ e $\mathfrak{X}(M)$ então é possível construir uma derivação sobre M. Especificamente temos o seguinte resultado:

Teorema 1.13 *Dados um campo vetorial $V \in \mathfrak{X}(M)$ e uma função $\mathbb{R}$-linear $\delta : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ tal que*

$$\delta(fX) = V(f)X + f\delta(X), \ \forall\ f \in C^\infty(M), \ \forall\ X \in \mathfrak{X}(M), \tag{1.4}$$

então existe uma única derivação $\mathfrak{D}$ em M tal que $\mathfrak{D}^0_0 = V : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ e $\mathfrak{D}^1_0 = \delta$.

Demonstração. Observe que $\mathfrak{D}^0_0$ e $\mathfrak{D}^1_0$ já são dados. Segundo a demonstração do último corolário, defina

$$(\mathfrak{D}\theta)(X) = \mathfrak{D}(\theta(X)) - \theta(\mathfrak{D}X), \ \forall\ X \in \mathfrak{X}(M),$$

e note que

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{D}\theta)(X+Y) &= V(\theta(X+Y)) - \theta(\delta(X+Y)) \\
&= V(\theta(X)+\theta(Y)) - \theta(\delta(X)+\delta(Y)) \\
&= V(\theta(X)) + V(\theta(Y)) - \theta(\delta(X)) - \theta(\delta(Y)) \\
&= [V(\theta(X)) - \theta(\delta(X))] + [V(\theta(Y)) - -\theta(\delta(Y))] \\
&= (\mathfrak{D}\theta)(X) - (\mathfrak{D}X)(\theta),
\end{aligned}
$$

e usando a equação (1.4)

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{D})(fX) &= V(\theta(fX)) - \theta(\delta(fX)) \\
&= V(f\theta(X)) - \theta(V(f)X + f\delta(X)) \\
&= V(f)\theta(X) + fV(\theta(X)) - V(f)\theta(X) - f\theta(\delta(X)) \\
&= f[V(\theta(X)) - \theta(\delta(X))] \\
&= f(\mathfrak{D}\theta)(X),
\end{aligned}
$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e todo $f \in C^\infty(M)$.

Assim $\mathfrak{D}\theta$ é $C^\infty(M)$-linear, logo $\mathfrak{D}\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ e portanto obtemos a derivação

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1^0 : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}^*(M).$$

Agora usando a regra do produto (1.11), para um tensor A com $r+s \geq 2$ definimos

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{D}A)(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s) &= \mathfrak{D}(A(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1,\ldots,\mathfrak{D}\theta^i,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,\delta X_j,\ldots,X_s).
\end{aligned}
$$

Pode ser mostrado que $\mathfrak{D}A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ e $\mathfrak{D} : \mathfrak{T}_s^r(M) \to \mathfrak{T}_s^r(M)$ é uma derivação em M. (Veja mais detalhes em [27], pág. 45). ■

Para encerrar esta seção apresentaremos agora uma aplicação do teorema anterior que é de grande importância.

Definição 1.14 *Se $V \in \mathfrak{X}(M)$ então a derivação $\mathcal{L}_V$ tal que* *(i)* $\mathcal{L}_V(f) = V(f), \ \forall \ f \in C^\infty(M)$

(ii) $\mathcal{L}_V(X) = [V, X], \ \forall \ X \in \mathfrak{X}(M)$,

é chamada Derivada de Lie com relação a V.

Observação 1.5 *Note que*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_V(fX) &= [V, fX] = V(fX) - fX(V) \\
&= V(f)X + fV(X) - fX(V) \\
&= V(f)X + f[V, X] \\
&= V(f)X + f\mathcal{L}_V(X),
\end{aligned}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ *e qualquer* $f \in C^\infty(M)$.

Logo pelo Teorema (1.13) temos que $\mathcal{L}_V$ *esta bem definida, ou seja, é um tensor derivação.*

1.2 Variedades Semi-Riemannianas

Apresentaremos aqui algumas conhecimentos que estão intimamente relacionados com o nossos objetos de estudo.

1.2.1 Formas Bilineares Simétricas

No que segue, seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Uma forma bilinear $b : V \times V \to \mathbb{R}$ é uma aplicação que satisfaz:

(i) $b(au, v) = ab(u, v) = b(u, av), \quad \forall \ u, v \in V$;

(ii) $b(u + w, v) = b(u, v) + b(w, v)$ e $b(u, v + w) = b(u, v) + b(u, w), \quad \forall \ u, v, w \in V$.

A forma b é dita *simétrica* se $b(u, v) = b(v, u) \quad \forall \ u, v \in V$.

Definição 1.15 *Dizemos que a forma bilinear b é:*

(i) positiva definida se para todo $v \in V$ *com* $v \neq 0$ *implicar* $b(v, v) > 0$;

(ii) negativa definida se para todo $v \in V$ *com* $v \neq 0$ *implicar* $b(v, v) < 0$;

(iii) não degenerada se $b(v, w) = 0$ *para qualquer* $w \in V$ *implicar* $v = 0$.

O caso em que b é semi-definida se define de maneira análoga a definido acima, trocando apenas a desigualdade estrita. Se b é uma forma bilinear simétrica em V então para qualquer subespaço $W \subset V$, a restrição $b\big|_{W\times W}$, que vamos denotar por $b\big|_W$ é ainda simétrica e bilinear.

Definição 1.16 *O índice ν de uma forma bilinear simétrica b em V é o maior inteiro que denota a dimensão do subespaço W de V tal que $b\big|_W$ é negativa definida.*

Assim $0 \leq \nu \leq dimV$ e $\nu = 0$ se, e somente se, b é positivo definido. A função $q : V \to \mathbb{R}$ dada por $q(v) = b(v, v)$ é chamada a *forma quadrática associada* de b. Em alguns casos é mais conveniente trabalhar com ela do que com a própria b, e não há perda de generalidade pois b pode ser recuperada pela identidade de polarização

$$b(u, v) = \frac{1}{2}(q(u + v) - q(u) - q(v)).$$

Se $e_1, \ldots, e_n$ é uma base para V, a matriz $n \times n$ cujas coordenadas são $(b_{ij}) = b(e_i, e_j)$ é chamada matriz de b relativa a base $e_1, \ldots, e_n$. Uma vez que b é simétrica, esta matriz é simétrica.

Lema 1.5 *Uma forma bilinear simétrica é não degenerada se, e somente se, a matriz relativa a uma base (e portanto a todas) é invertível.*

Demonstração. Seja $e_1, \ldots, e_n$ uma base para V. Se $u \in V$, então $b(u, v) = 0$ para todo $v \in V$ se, e somente se, $b(u, e_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Uma vez que (b_{ij}) é simétrica,

$$b(u, e_i) = b\left(\sum_j u_j e_j, e_i\right) = \sum_j u_j b(e_j, e_i) = \sum_j b_{ij} u_j.$$

Assim b é degenerada se, e somente se, existem números não todos nulos $u_1, \ldots, u_n$ tais que $\sum_j b_{ij} u_j = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Mas isso é equivalente a dependência linear das colunas da matriz (b_{ij}), isto é, (b_{ij}) ser singular. ■

Falaremos um pouco sobre produtos escalares. Exibiremos algumas de suas propriedades importantes e deixamos, para maiores detalhes [27] capítulo 2.

Definição 1.17 *Um produto escalar g em um espaço vetorial V é uma forma bilinear simétrica e não degenerada sobre V.*

Um produto interno é um produto escalar positivo definido. Quando $V = \mathbb{R}^n$, temos o produto interno canônico definido por

$$u \cdot v = \sum_i u_i v_i.$$

Muitas propriedades do produto interno valem para produtos escalares, porém alguns fenômenos novos surgem quando g é indeterminado, isto é, $g(v, v) = 0$, mas $v \neq 0$.

O próximo exemplo nos mostra que mudando o sinal do produto escalar usual do $\mathbb{R}^2$ temos um exemplo de produto escalar indefinido.

Exemplo 4 *Defina $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por*

$$g(u, v) = u_1 v_1 - u_2 v_2.$$

Observe que g é simétrica e bilinear. Considerando a base $\{(1, 0), (0, 1)\}$ do $\mathbb{R}^2$, temos pelo Lema (1.5) que g é não degenerada. Assim, g é um produto escalar indefinido e a sua forma quadrática associada é dada por $q(v) = u_1^2 - u_2^2$.

Definição 1.18 *Seja V um espaço vetorial com produto escalar e seja W um subespaço de V. O complemento ortogonal de W é o subespaço $W^\perp$ de todos os vetores em V que são ortogonais a todo vetor em W, ou seja,*

$$W^\perp = \{v \in V;\ v \perp W\}.$$

Os próximos lemas descrevem algumas propriedades da operação $\perp$ que são usados em nossos estudos.

Lema 1.6 *Se W é um subespaço de um espaço com produto escalar V, então*

(i) $dim W + dim W^\perp = n = dim V$;

(ii) $(W^\perp)^\perp = W$;

(iii) Um subespaço W de V é não degenerado se, e somente se, $V = W \oplus W^\perp$. Ademais, $ind\ V = ind\ W + ind\ W^\perp$.

Lema 1.7 *Seja $e_1 \ldots, e_n$ uma base ortonormal de V. Então toda $v \in V$ é escrito de maneira única como*

$$v = \sum_i g(v, e_i) e_i.$$

Definiremos agora tensor métrico e o que vem a ser uma variedade de Lorentz.

Definição 1.19 *Um tensor métrico g em uma variedade diferenciável M é um tensor do tipo $(0,2)$ simétrico, não degenerado em M de índice constante. Em outras palavras, $g \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ leva suavemente cada ponto $p \in M$ em um produto escalar g_p em T_pM, e o índice de g_p é o mesmo para todo $p \in T_pM$. Ou seja,*

$$\begin{array}{rcl} g : M & \longrightarrow & \mathfrak{T}_2^0(M) \\ p & \longmapsto & g_p \quad : \quad \begin{array}{rcl} T_pM \times T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & g_p(u,v) \end{array} \end{array}$$

é uma aplicação suave tal que,

(i) $g_p(u,v) = g_p(v,u), \quad \forall\, u,v \in T_pM$

(ii) $g_p(u,v) = 0, \quad \forall\, v \in T_pM$, *implica* $u = 0$;

(iii) $ind(T_pM) = ind(T_qM), \quad \forall\, p,q \in M,$ *com* $p \neq q$.

Definição 1.20 *Uma variedade semi-Riemanniana é uma variedade diferenciável M munida com um tensor métrico g.*

O valor comum ν do índice de g_p em uma variedade semi-Riemanniana M é chamado *índice de M*. Note que $0 \leq \nu \leq n = dim(M)$. Se $\nu = 0$, então M é uma variedade Riemanniana. Neste caso, cada g_p é um produto interno em T_pM. Quando $\nu = 1$ e $n \geq 2$, então M é dita uma *variedade de Lorentz.*

Notação 1.21 *Denotemos por $g = \langle , \rangle$ o tensor métrico. Assim podemos escrever $g(u,v) = \langle u,v \rangle \in \mathbb{R}$, para todos $u,v \in T_pM$ e $g(U,V) = \langle U,V \rangle$ e para $U,V \in \mathfrak{X}(M)$.*

Para um sistema de coordenadas podemos escrever g sendo

$$g(U,V) = \langle U,V \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} U^i V^j,$$

de fato, se $\xi = x^1, \ldots, x^n$ é um sistema de coordenadas em $U \subset M$ então as componentes de g em U são

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Assim, se $V = \sum_i v^i \partial_i$ e $U = \sum_j u^j \partial_j$, temos que

$$g(U,V) = \langle U,V \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} V^i U^j.$$

Como g é não degenerada temos que em cada $p \in M$ a matriz $(g_{ij}(p))_{n\times n}$ é invertível e a sua inversa é denotada por $(g^{ij}(p))_{n\times n}$. A fórmula usual para a inversa de uma matriz nos garante que as funções g_{ij} são suaves em U. Além disso, como g é simétrica, então $g_{ij} = g_{ji}$ e consequentemente $g^{ij} = g^{ji}$, para quaisquer $i = 1, \ldots, n$. Finalmente em U o tensor métrico g pode ser escrito como

$$g = \sum_{ij} g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Assim, se $U, V \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$\begin{aligned} g(U,V) &= \sum_{ij} g_{ij}(dx^i \otimes dx^j)(U,V) \\ &= \sum_{ij} g_{ij} dx^i(U) \cdot dx^j(V) \\ &= \sum_{ij} g_{ij} U^i \cdot V^j. \end{aligned}$$

Exemplo 5 *Seja $M = \mathbb{R}^n$, e para cada $p \in M$ temos que T_pM é isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Assim se $(x^1, \ldots, x^n)$ é um sistema de coordenadas usuais do $\mathbb{R}^n$, então*

$$\langle u_p, v_p \rangle = \sum_i u^i v^i,$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^n$, onde $u_p = \sum_i u^i \partial_i$ e $v_p = \sum_j v^j \partial_j$. Desta maneira, $\mathbb{R}^n$ munido com esta métrica nos dá uma variedade Riemanniana chamada espaço Euclidiano $n-$dimensional.

Exemplo 6 *Seja ν um inteiro tal que $0 \leq \nu \leq n$. Então $\mathbb{R}^n$ munido com o tensor métrico*

$$\langle u_p, v_p \rangle = -\sum_{i=1}^{\nu} u^i v^i + \sum_{j+\nu=1}^{n} u^j v^j,$$

de índice ν nos dá uma variedade semi-Riemanniana $\mathbb{R}^n_\nu$, chamado espaço semi-Euclidiano. Observe que $\mathbb{R}^n_0 = \mathbb{R}^n$, e para $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n_1$ é o espaço de Lorentz-Minkowski n-dimensional.

Fixando a notação

$$\epsilon_i = \begin{cases} -1, \text{se} & 1 \leq i \leq \nu; \\ +1, \text{se} & \nu + 1 \leq j \leq n, \end{cases}$$

então o tensor métrico de $\mathbb{R}^n_\nu$ pode ser escrito como

$$g = \sum_i \epsilon_i dx^i \otimes dx^i.$$

Definição 1.22 *Seja M uma variedade semi-Riemanniana com tensor métrico $\langle , \rangle$. Dizemos que um vetor $v \in T_pM$ é*

(i) tipo-espaço se $\langle v, v\rangle > 0$ ou $v = 0$;

(ii) tipo-tempo se $\langle v, v\rangle < 0$;

(iii) nulo se $\langle v, v\rangle = 0$ e $v \neq 0$.

O conjunto $\{v \in T_pM;\ \langle v, v\rangle = 0 \quad v \neq 0\}$ de todos os vetores nulos de T_pM é chamado *cone nulo* em $p \in M$. Quando M é uma variedade de Lorentz, os vetores nulos são chamados de *tipo-luz*.

Para cada $p \in M$, seja

$$\begin{array}{rcccccc} q & : & T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\ & & v & \longmapsto & q(v) & = & \langle v, v\rangle, \end{array}$$

a forma quadrática associada ao produto escalar $\langle , \rangle$. Temos que q determina $\langle , \rangle$. Mas observe que

$$q(fV) = \langle fV, fV\rangle = f^2\langle V, V\rangle = f^2 q(V),$$

para qualquer $V \in \mathfrak{X}(M)$ e toda $f \in C^\infty(M)$. Assim, temos que q não é $C^\infty(M)$-linear e portanto não é um campo tensor.

Definição 1.23 *Seja N uma subvariedade de uma variedade semi-Riemanniana M munida de um tensor métrico g. Seja $i : M \to N$ a aplicação inclusão. Se o pullback $i*$ g é um tensor métrico em N então, N é chamada uma subvariedade semi-Riemanniana de M.*

1.2.2 A Conexão de Levi-Civita

Sejam M uma variedade semi-Riemanniana e V, W dois campos de vetores em M. Em cada ponto $p \in M$, queremos calcular a taxa de variação de W na direção de V_p. Fazemos isso naturalmente no espaço Euclidiano com a derivada de um campo em relação a outro. Para o nosso contexto vamos introduzir o conceito de conexão.

Definição 1.24 *Sejam $u^1, \ldots, u^n$ as coordenadas naturais de $\mathbb{R}^n_\nu$. Se V e W são campos de vetores em $\mathbb{R}^n_\nu$, com $W = \sum_i W^i\partial_i$, o vetor*

$$D_V W = \sum_i V(W^i)\partial_i,$$

é chamada a derivada covariante de W na direção de V.

Agora estabeleceremos o conceito de conexão em uma variedade diferenciável M.

Definição 1.25 *Uma conexão ∇ em uma variedade M é uma função*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

satisfazendo, para quaisquer $V, W \in \mathfrak{X}(M)$

(i) $\nabla_V W$ *é $C^\infty(M)$-linear em V;*

(ii) $\nabla_V W$ *é $\mathbb{R}$-linear em W;*

(iii) $\nabla_V(fW) = f\nabla_V W + V(f)W$ *para toda função $f \in C^\infty(M)$.*

Assim, $\nabla_V W$ é chamada a "derivada covariante" de W na direção de V com respeito a conexão ∇.

Observe que o axioma (i) nos diz que $\nabla_V W$ é um tensor em V, então podemos examinar o seu caráter pontual, isto é, dado $v \in T_pM$, o vetor $\nabla_v W \in T_pM$, esta bem definido e denotamos por $(\nabla_v W)_p$ onde V é um campo tensorial tal que $V_p = v$. O axioma (iii) nos diz que $\nabla_V W$ não é um tensor em W.

Vejamos agora um resultado de caráter algébrico, o qual nos diz que na presença da métrica podemos identificar campos com 1-formas.

Proposição 1.26 *Seja M uma variedade semi-Riemanniana. Se $V \in \mathfrak{X}(M)$ seja V^* uma 1-forma em M tal que*

$$V^*(X) = \langle V, X \rangle, \quad \forall\ X \in \mathfrak{X}(M).$$

Então a função

$$\begin{array}{rcccccc} f & : & \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}^*(M) & & \\ & & V & \longmapsto & f(V) & = & V^*(X) = \langle V, X \rangle \end{array}$$

é um isomorfismo $C^\infty(M)$-linear de $\mathfrak{X}(M)$ para $\mathfrak{X}^*(M)$.

Demonstração. Primeiramente observemos que f é $C^\infty(M)$-linear, pois é dada por uma 1-forma que é $C^\infty(M)$-linear. Para mostrar o isomorfismo, basta mostrar que a aplicação é uma bijeção, uma vez que já temos a linearidade.

(i) f é injetora.

De fato, seja $f(V) = f(W)$, então

$$\langle V, X\rangle = \langle W, X\rangle, \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Logo

$$\langle V, X\rangle = \langle W, X\rangle \Leftrightarrow \langle V - W, X\rangle = 0 \Leftrightarrow V = W,$$

uma vez que $X \in \mathfrak{X}(M)$ é qualquer e a métrica é não degenerada.

Portanto f é injetora.

(ii) f é sobrejetora.

É necessário exibirmos um $V \in \mathfrak{X}(M)$ tal que

$$\theta(X) = \langle V, X\rangle, \ \forall\ X \in \mathfrak{X}(M).$$

A unicidade é dada pelo item *(i)*. Mostraremos que podemos encontrar um tal campo V em uma vizinhança coordenada U arbitrária. Seja $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, então podemos escrever $\theta = \sum_i \theta_i dx^i$ em U e tomemos $V \in \mathfrak{X}(M)$ dado por $V = \sum_{ij} g^{ij}\theta_i\partial_j$. Então desde que (g^{ij}) e (g_{ij}) são matrizes inversíveis, temos

$$\begin{aligned}
\langle V, \partial_k\rangle &= \left\langle \sum_{ij} g^{ij}\theta_i\partial_j, \partial_k \right\rangle = \sum_{ij} g^{ij}\theta_i \langle \partial_j, \partial_k\rangle \\
&= \sum_{ij} g^{ij}\theta_i g_{jk} = \sum_{ij} \theta_i\delta_{ik} = \theta_k = \theta(\partial_k).
\end{aligned}$$

Portanto f é sobrejetora. ■

A conexão esta diretamente ligada a métrica, desde que acrescentemos a compatibilidade e a simetria que é uma propriedade relacionada aos colchetes de Lie. Em verdade, é o que nos mostra o teorema de existência e unicidade da conexão de *Levi-Civita*, ou mas precisamente

Teorema 1.27 (Levi-Civita) *Em uma variedade semi-Riemanniana M existe uma única conexão ∇ tal que*

(i) $[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V$*;*

(ii) $X\langle V,W\rangle = \langle \nabla_X V, W\rangle + \langle V, \nabla_X W\rangle, \quad \forall\ X,V,W \in \mathfrak{X}(M)$.

∇ é chamada a conexão de Levi-Civita de M, e é caracterizada pela "Fórmula de Koszul"

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_V W, X\rangle &= V\langle W,X\rangle + W\langle V,X\rangle - X\langle V,W\rangle \\ &\quad - \langle V,[W,X]\rangle + \langle W,[V,X]\rangle + \langle X,[V,W]\rangle. \end{aligned}$$

Demonstração. Suponha que ∇ é uma conexão em M satisfazendo os axiomas (i) e (ii) do teorema acima. Do lado direito da fórmula de Koszul, usemos o axioma (ii) nas três primeiras parcelas e o axioma (i) nas três ultimas. Com isso, alguns pares irão ser cancelados o que nos levará a $2\langle \nabla_V W, X\rangle$. Assim, ∇ satisfaz a fórmula de Koszul, portanto se tal conexão existe ela é única. Para a existência, $F(V,W,X)$ como o lado direito da fórmula de Koszul. Para campos V,W fixados um cálculo direto mostra que F é $C^\infty(M)$-linear e portanto é uma 1-forma. Pela Proposição (1.26), existe um único campo vetorial, que denotaremos por $\nabla_V W$, tal que $2\langle \nabla_V W, X\rangle = F(V,W,X)$ para todo $x \in \mathfrak{X}(M)$. Não é difícil verificar que F satisfaz os três axiomas da definição (1.25), a simetria e a compatibilidade com a métrica. Usando a unicidade, mostramos a existência da conexão. ∎

1.2.3 Curvaturas

Apresentaremos agora o tensor de curvatura que, intuitivamente, mede o quanto uma variedade deixa de ser Euclidiana.

Definição 1.28 *Seja M uma variedade semi-Riemanniana. O tensor curvatura R de M é a aplicação*

$$\begin{array}{rccl} R: & \mathfrak{X}(M)^3 & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ & (X,Y,Z) & \longmapsto & R(X,Y,Z) = -\nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]}Z. \end{array}$$

Uma vez que fixados os campos $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, podemos considerar o operador curvatura $R(X,Y)$ dado por

$$\begin{array}{rccl} R: & \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ & Z & \longmapsto & R(X,Y)Z = R(X,Y,Z). \end{array}$$

Observe que o tensor curvatura é linear em relação a aditividade e trilinear em relação ao produto com elementos do anel $C^\infty(M)$. Além disso, o tensor curvatura satisfaz as seguintes propriedades (veja, por exemplo, [27], Proposição 3.36).

Proposição 1.29 *Com as notações acima, para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$,*

(i) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$;

(ii) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle + \langle R(Y,Z)X, W\rangle + \langle R(Z,X)Y, W\rangle = 0$;

(iii) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\ \langle R(Y,X)Z, W\rangle$;

(iv) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\ \langle R(X,Y)W, Z\rangle$;

(v) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$.

Definição 1.30 *Dizemos que uma variedade é flat quando o tensor curvatura é identicamente nulo.*

Um exemplo de variedade flat é o espaço Euclidiano n-dimensional, uma vez que em $\mathbb{R}^n$ os *Símbolos de Christoffel* são identicamente pois são dados pelas derivadas da métrica que são nulas neste espaço.

Intimamente relacionado com o operador de curvatura esta a curvatura seccional que passaremos a definir.

Lema 1.8 *Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Demonstração. Para qualquer duas bases de σ podemos relaciona-las pelas equações

$$\begin{aligned} v &= ax + by, \\ w &= cx + dy, \end{aligned}$$

onde o determinante dos coeficientes $ad - bc$ é diferente de zero. Um cálculo mais aprofundado mostra que

$$\langle R(v,w)v, w\rangle = (ad-bc)^2 \langle R(x,y)x, y\rangle,$$

e

$$(|v|^2|w|^2 - \langle v,w\rangle^2) = (ad-bc)^2(|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2).$$

Portanto $K(v,w) = K(x,y)$. ■

Definição 1.31 *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_pM$, o número real $K(x,y) = K(\sigma)$, onde $\{x,y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamada a curvatura seccional de σ em p.*

Dizemos que uma aplicação multilinear $F : T_p(M)^4 \to \mathbb{R}$ é tipo-curvatura se ela satisfaz todos os itens da Proposição 1.29. Assim, se $F(x,y,x,y) = 0$ para quaisquer $x, y \in T_pM$ tais que $\sigma = span(x,y)$ é um plano não-degenerado, então $F \equiv 0$.

Lema 1.9 *Seja F uma função tipo-curvatura em T_pM tal que*

$$K(x,y) = \frac{F(x,y,x,y)}{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2}$$

sempre que $\sigma = span(x,y)$ é um plano não-degenerado. Então,

$$\langle R(x,y)z, w\rangle = F(x,y,z,w),$$

para todos $x, y, z, w \in T_pM$.

Demonstração. Como a diferença de funções tipo-curvatura também é tipo curvatura definimos $\Delta(x,y,z,w) = F(x,y,z,w) - \langle R(x,y)z,w\rangle$. Por hipótese, $\Delta(x,y,x,y) = 0$ se $\sigma = span(x,y)$ é um plano não degenerado de T_pM. Assim pela observação feita antes deste corolário, $\Delta = 0$. ■

Uma variedade semi-Riemanniana M tem *curvatura constante* se a função curvatura seccional é constante. O próximo resultado nos fornece uma fórmula para R quando K é constante.

Corolário 1.32 *Se M tem curvatura seccional constante C, então*

$$R(x,y)z = C(\langle z,x\rangle y - \langle z,y\rangle x).$$

Demonstração. Observe que definindo $F(x,y,z,w) = C(\langle z,x\rangle\langle y,w\rangle - \langle z,y\rangle\langle x,w\rangle)$, temos que F é uma função tipo-curvatura em cada ponto, e

$$F(x,y,x,y) = C(\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2.$$

Se $\sigma = span(x, y)$ é um plano não-degenerado, então

$$K(x,y) = C = \frac{F(x,y,x,y)}{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2},$$

e o resultado segue do lema anterior. ■

1.2.4 Alguns Operadores Diferenciáveis

Estenderemos agora os conceitos de vetor gradiente, divergente, Hessiano e Laplaciano para variedades semi-Riemannianas. O referencial $E_1, \ldots, E_n$ sempre denotará um referencial ortonormal em um ponto $p \in M$.

Definição 1.33 *O gradiente de uma função $f \in C^\infty(M)$, o qual denotaremos por ∇f, é um campo vetorial metricamente equivalente a diferencial $df \in \mathfrak{X}^*(M)$.*

Assim

$$\langle \nabla f, X\rangle = df(X) = X(f), \quad \forall\ X \in \mathfrak{X}(M).$$

Em termos de um referencial ortonormal

$$\langle \nabla f, E_j\rangle = df(E_j) = E_j(f),$$

e assim pelo Lema (1.7) podemos escrever $\nabla f = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla f, E_i\rangle E_i$ e portanto

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} E_i(f)E_i.$$

Definição 1.34 *Dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ definimos a divergência do campo X como a função $divX : M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$divX = tra\c{c}o(Y(p) \to \nabla_Y X(p)),\ p \in M.$$

Assim em um referencial ortonormal podemos escrever

$$divX = \sum_i \langle \nabla_{E_i} X, E_i\rangle.$$

Definição 1.35 *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O Hessiano de f, denotado por $Hessf$, é o campo tensorial $Hessf : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dado por*

$$(Hessf)(X,Y) = \langle \nabla_X(\nabla f), Y\rangle.$$

O próximo resultado, nos dá algumas propriedades do *Hessiano*.

Lema 1.10 *O Hessiano de f é um campo tensorial do tipo $(0,2)$ simétrico tal que*

$$(Hessf)(X,Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f, \quad \forall\ X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Demonstração. Não é difícil mostrar que $Hessf$ é $C^\infty(M)$-linear em cada entrada. Desta forma, $Hessf$ é um tensor do tipo $(0,2)$.

Como $\langle \nabla f, Y\rangle = Y(f)$, temos que

$$\begin{aligned} X(Y(f)) &= X\langle \nabla f, Y\rangle = \langle \nabla_X(\nabla f), Y\rangle + \langle (\nabla f), \nabla_X Y\rangle \\ &= (Hessf)(X,Y) + \langle (\nabla f), \nabla_X Y\rangle \\ &= (Hessf)(X,Y) + (\nabla_X Y)f,\ \forall\ X,Y \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Para a simetria, vamos usar a definição dos colchetes. Observe que por um lado

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

mas por outro lado usando a simetria da conexão de Levi-Civita, temos

$$[X,Y](f) = (\nabla_X Y)f - (\nabla_Y X)f,$$

daí

$$X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)f.$$

Assim pela equação (1.5) temos

$$(Hessf)(X,Y) = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)f = (Hessf)(Y,X), \quad \forall\ X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

O que conclui o Lema. ■

Definição 1.36 *Seja M uma variedade semi-Riemanniana. Definimos o operador Laplaciano de M, $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ por*

$$\Delta f = \mathit{traço}(Hessf),\ \forall\ f \in C^\infty(M).$$

Observe que o Laplaciano também pode ser visto da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sum_i \langle (Hessf)(E_i), E_i\rangle \\ &= \sum_i \langle \nabla_{E_i}(\nabla f), E_i\rangle \\ &= div(\nabla f). \end{aligned}$$

1.2.5 Elementos de Variedades Diferenciáveis

Nesta parte do trabalho, daremos algumas definições e demonstraremos alguns resultados de variedades diferenciáveis que serão úteis para o desenvolvimento do nosso trabalho. Para isto, assumiremos que o leitor possua um certo conhecimento de formas diferenciáveis e as operações envolvendo as mesmas.

Definição 1.37 *Dizemos que D é involutivo quando dados quaisquer pares de campos de vetores X, Y definidos em um subconjunto aberto de M tais que $X_p, Y_p \in D_p$ tem-se $[X_p, Y_p] \in D_p$.*

Definição 1.38 *Uma k-forma T em um espaço vetorial de dimensão finita V é dita alternada quando possui a seguinte propriedade:*

$$T(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_k) = -\, T(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots, X_k),$$

para todo $X_1, \ldots, X_k \in V$.

Os próximos Lemas serão utilizados para a demonstração do Corolário do Teorema (4.1) que será descrito no capítulo 4 deste trabalho.

Lema 1.11 *Seja M uma variedade diferenciável, $X \in \mathfrak{X}(M)$, e seja φ o fluxo de X. Para qualquer tensor covariante ω e qualquer (t_0, p) no domínio de ω*

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} \varphi_t^*(\omega_{\varphi_t(p)}) = \varphi_{t_0}^*\left((\mathcal{L}_X\omega)_{\varphi_{t_0}(p)}\right).$$

Demonstração. Fazendo uma mudança de variáveis, $s = t - t_0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} \varphi_t^*(\omega_{\varphi_t(p)}) &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} (\varphi_{t_0+s})^*\omega_{\varphi_{s+t_0}(p)} \\ &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} (\varphi_{t_0})^*(\varphi_s)^*\omega_{\varphi_s(\varphi_{t_0}(p))} \\ &= (\varphi_{t_0})^*\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} (\varphi_s)^*\omega_{\varphi_s(\varphi_{t_0}(p))} \\ &= (\varphi_{t_0})^*\left((\mathcal{L}_X\omega)_{\varphi_{t_0}(p)}\right), \end{aligned}$$

uma vez que $(\mathcal{L}_X\omega)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi_t^*\omega)_p$. ■

Lema 1.12 *Seja M semi-Riemanniana. Se ω é um elemento de volume local em M, então $\mathcal{L}_X(\omega) = (divX)\omega$.*

Demonstração. Seja $E_1, \ldots, E_n$ um referencial ortonormal local em M de modo que $\omega(E_1, \ldots, E_n) = 1$. Uma vez que $\mathcal{L}_X$ é um tensor derivação e que $\mathcal{L}_X(1) = 0$, temos

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X\omega)(E_1, \ldots, E_n) &= \mathcal{L}_X(\underbrace{\omega(E_1, \ldots, E_n)}_{=1}) - \sum_{i=1}^{n} \omega(E_1, \ldots, \mathcal{L}_X E_i, \ldots, E_n) \\ &= \mathcal{L}_X(1) - \sum_{i=1}^{n} \omega(E_1, \ldots, [X, E_i], \ldots, E_n) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \omega(E_1, \ldots, [X, E_i], \ldots, E_n).\end{aligned}$$

Escrevendo $[X, E_i] = \sum_j f_{ij} E_j$, temos

$$(\mathcal{L}_X\omega)(E_1, \ldots, E_n) = -\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}\omega(E_1, \ldots, E_j, \ldots, E_n).$$

Como ω é alternada, quando fizermos a soma em i, j os termos $i \neq j$ vão ser cancelados uma vez que $f_{ij} = -f_{ji}$, logo só restarão os termos em que $i = j$.

Logo,

$$(\mathcal{L}_X\omega)(E_1, \ldots, E_n) = -\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} \underbrace{\omega(E_1, \ldots, E_j, \ldots, E_n)}_{(=1)} = -\sum_{i=1}^{n} f_{ii}.$$

Por outro lado, sendo ∇ a conexão de Levi-Civita de M temos

$$\begin{aligned}divX &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \langle [X, E_i], E_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_X E_i, E_i \rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \left\langle \sum_j f_{ij} E_j, E_i \right\rangle,\end{aligned}$$

da bilinearidade da métrica, segue que

$$\begin{aligned}divX &= -\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} \langle E_j, E_i \rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n} f_{ii} \langle E_i, E_i \rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n} f_{ii}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$(\mathcal{L}_X\omega)(E_1, \ldots, E_n) = (divX)\omega(E_1, \ldots, E_n),$$

como o referencial foi escolhido arbitrariamente, segue que $\mathcal{L}_X(\omega) = (divX)\omega$. ■

Proposição 1.39 (Fórmula Invariante das Derivadas Exteriores) *Seja M uma variedade diferenciável e ω uma k-forma em M. Para qualquer campos de vetores diferenciáveis $X_1, \ldots, X_{k+1}$ em M,*

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \ldots, X_{k+1}) &= \sum_{1 \leq i \leq k+1} (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_{k+1})) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_{k+1})), \end{aligned} \tag{1.6}$$

onde o chapéu indica que o elemento foi retirado.

Demonstração. Denotemos as duas somas do lado direito de (1.6) por $I(X_1, \ldots, X_{k+1})$ e $II(X_1, \ldots, X_{k+1})$, e a soma dos dois por $D\omega(X_1, \ldots, X_{k+1})$. Note que $D\omega$ é multilinear em $\mathbb{R}$, e mostremos que $D\omega$ é $C^\infty(M)-$multilinear, isto é, para $1 \leq p \leq k+1$ e $f \in C^\infty(M)$,

$$D\omega(X_1, \ldots, fX_p, \ldots, X_{k+1}) = fD\omega(X_1, \ldots, X_p, \ldots, X_{k+1}).$$

Observe que na expansão de $I(X_1, \ldots, fX_p, \ldots, X_{k+1})$, nos termos em que $i \neq p$, temos

$$\begin{aligned} &\sum_{i \neq p} (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1, \ldots, fX_p, \ldots, X_{k+1})) \\ &\quad = \sum_{i \neq p} (-1)^{i-1} X_i(f\omega(X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_{k+1})) \\ &\quad = \sum_{i \neq p} (-1)^{i-1} (X_i f)(\omega(X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_{k+1})) \\ &\qquad + \sum_{i \neq p} (-1)^{i-1} f X_i(\omega(X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_{k+1})). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I(X_1, \ldots, fX_p, \ldots, X_{k+1}) &= fI(X_1, \ldots, X_p, \ldots, X_{k+1}) \\ &+ \sum_{i \neq p} (-1)^{i-1} (X_i f)(\omega(X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_{k+1})). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Agora na expansão de II, novamente f se destaca em todos os termos em que $i \neq p$ e $j \neq p$. Observe que pelas propriedades dos colchetes de Lie temos

$$[fX_p, X_j] = f[X_p, X_j] - (X_j f)X_p \quad \text{e} \quad [fX_p, X_j] = f[X_i, X_p] + (X_i f)X_p.$$

Expandindo II e inserindo as expressões acima

$$\begin{aligned} II(X_1, \ldots, fX_p, \ldots, X_{k+1}) \\ = \sum_{1 \leq p < j \leq k+1} (-1)^{p+j} \omega([fX_p, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X}_p, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_{k+1}) \\ + \sum_{1 \leq i < p \leq k+1} (-1)^{i+p} \omega([X_i, fX_p], X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, \widehat{X}_p, \ldots, X_{k+1}), \end{aligned}$$

dá definição de colchetes, temos

$$\begin{aligned} II(X_1, \ldots, fX_p, \ldots, X_{k+1}) \\ = \sum_{1 \leq p < j \leq k+1} (-1)^{p+j} f\omega([X_p, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X}_p, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_{k+1}) \\ - \sum_{1 \leq p < j \leq k+1} (-1)^{p+j} (X_j f)\omega(X_p, X_1, \ldots, \widehat{X}_p, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_{k+1}) \\ + \sum_{1 \leq i < p \leq k+1} (-1)^{i+p} f\omega([X_i, X_p], X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, \widehat{X}_p, \ldots, X_{k+1}) \\ + \sum_{1 \leq i < p \leq k+1} (-1)^{i+p} (X_i f)\omega(X_p, X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, \widehat{X}_p, \ldots, X_{k+1}), \end{aligned}$$

colocando f em evidência, obtemos

$$\begin{aligned} II(X_1, \ldots, fX_p, \ldots, X_{k+1}) \\ = fII(X_1, \ldots, X_p, \ldots, X_{k+1}) \\ - \sum_{1 \leq p < j \leq k+1} (-1)^{p+j} (X_j f)\omega(X_p, X_1, \ldots, \widehat{X}_p, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_{k+1}) \\ + \sum_{1 \leq i < p \leq k+1} (-1)^{i+p} (X_i f)\omega(X_p, X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, \widehat{X}_p, \ldots, X_{k+1}). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Por outro lado, observemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq p} (-1)^{i-1} (X_i f)(\omega(X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_{k+1})) \\ = \sum_{i < p} (-1)^{i-1} (X_i f)(\omega(X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_{k+1})) \\ + \sum_{p < i} (-1)^{i-1} (X_i f)(\omega(X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_{k+1})). \end{aligned}$$

Agora reindexando o segundo somatório por j

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\neq p}(-1)^{i-1}(X_i f)(\omega(X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,X_{k+1})) \\
&\qquad = \sum_{i<p}(-1)^{i-1}(X_i f)(\omega(\underbrace{X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,X_p}_{p-2},\ldots,X_{k+1})) \\
&\qquad\quad + \sum_{p<j}(-1)^{j-1}(X_j f)(\omega(\underbrace{X_1,\ldots,X_p}_{p-1},\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_{k+1})),
\end{aligned}$$

e trazendo X_p em ambas as somas para o início e usando o fato de ω ser uma k-forma alternada, temos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\neq p}(-1)^{i+p-3}(X_i f)(\omega(X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,X_{k+1})) \\
&\qquad = \sum_{i<p}(-1)^{i-1}(X_i f)(\omega(\underbrace{X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,X_p}_{p-2},\ldots,X_{k+1})) \\
&\qquad\quad + \sum_{p<j}(-1)^{j+p-2}(X_j f)(\omega(\underbrace{X_1,\ldots,X_p}_{p-1},\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_{k+1})),
\end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\neq p}(-1)^{i-1}(X_i f)(\omega(X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,X_{k+1})) \\
&\qquad = \sum_{p<j}(-1)^{p+j}(X_j f)(\omega(X_p,X_1,\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_{k+1})) \\
&\qquad\quad - \sum_{i<p}(-1)^{i+p}(X_i f)(\omega(X_p,X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,X_{k+1})). \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

Substituindo (1.9) em (1.7) e depois somando (1.7) com (1.8) concluímos que $D\omega$ é $C^\infty(M)$-multilinear.

Pela multilinearidade, para mostrarmos que $D\omega = d\omega$, é suficiente mostrarmos que as duas coincidem em um referencial, uma vez que neste, os colchetes de Lie são nulos. Assim seja $(U,(x^i))$ um sistema de coordenadas em M. Como $D\omega$ e $d\omega$ dependem linearmente de ω, assumiremos que $\omega = f dx^I$ para alguma função suave f e algum multi-índice crescente $I=(i_1,\ldots,i_k)$, assim

$$d\omega = df\wedge dx^I = \sum_l \frac{\partial f}{\partial x^l}dx^l\wedge dx^I.$$

Se $J=(j_1,\ldots,J_{k+1})$ é qualquer multi-índice de comprimento $k+1$, segue que

$$d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{j_{k+1}}}\right) = \sum_{1\leq p\leq k+1}(-1)^{p-1}\frac{\partial f}{\partial x^{j_p}}\delta^I_{\widehat{J}_p}. \qquad (1.10)$$

Por outro lado, como todos os colchetes de Lie são nulos, temos

$$\begin{aligned}
& D\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{j_{k+1}}}\right) \\
&= \sum_{1\le p\le k+1}(-1)^{p-1}\frac{\partial}{\partial x^{j_p}}\left(f dx^I\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{j_{k+1}}}\right)\right) \\
&= \sum_{1\le p\le k+1}(-1)^{p-1}\frac{\partial f}{\partial x^{j_p}}\delta^I_{\widehat{J}_p},
\end{aligned}$$

que concorda com (1.10). ■

Em seguida fazemos uma aplicação da Proposição acima que será de grande valia na seção das Fórmulas Integrais.

Corolário 1.40 *Seja M uma variedade semi-Riemanniana, e $X_1,\dots,X_{k+1}$ campos de vetores em M. Então*

$$d\omega(X_1,\dots,X_{k+1}) = \sum_{1\le i\le k+1}(-1)^i(\nabla_{X_i}\omega)(X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_{k+1}) \tag{1.11}$$

Demonstração. Pela Regra do Produto (1.11) observemos que

$$\begin{aligned}
(\nabla_{X_i}\omega)(X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_{k+1}) &= X_i(\omega(X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_{k+1})) \\
&\quad -\sum_j \omega(X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,\nabla_{X_i}X_j,\dots,X_{k+1}).
\end{aligned}$$

Substituindo a expressão acima em (1.6) temos

$$\begin{aligned}
d\omega(X_1,\dots,X_{k+1}) &= \sum_{1\le i\le k+1}(-1)^{i-1}(\nabla_{X_i}\omega)(X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_{k+1}) \\
&\quad -\sum_{i,j}(-1)^i\omega(X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,\nabla_{X_i}X_j,\dots,X_{k+1}) \qquad (1.12) \\
&\quad +\sum_{1\le i<j\le k+1}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,\widehat{X}_j,\dots,X_{k+1}).
\end{aligned}$$

Note que a soma

$$\sum_{i,j}(-1)^i\omega(X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,\nabla_{X_i}X_j,\dots,X_{k+1}) \tag{1.13}$$

pode ser vista como

$$\begin{aligned}
&\sum_{i<j}(-1)^i\omega(X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,\nabla_{X_i}X_j,\dots,X_{k+1}) \\
&\quad + \sum_{i>j}(-1)^i\omega(X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,\nabla_{X_i}X_j,\dots,X_{k+1}).
\end{aligned}$$

Trocando i por j no segundo somatório, temos

$$\sum_{i<j}(-1)^j\omega(X_1,\ldots,\nabla_{X_j}X_i,\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_{k+1}),$$

como ω é uma forma alternada, obtemos

$$\sum_{i<j}(-1)^i(-1)^{j+2}\omega(\nabla_{X_i}X_j,X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,X_{k+1})$$

e

$$\sum_{i<j}(-1)^j(-1)^{i+1}\omega(\nabla_{X_j}X_i,X_1,\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_{k+1}),$$

ainda no mesmo contexto, podemos escrever

$$\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega(\nabla_{X_i}X_j,X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,X_{k+1})$$

e

$$-\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega(\nabla_{X_j}X_i,X_1,\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_{k+1}),$$

juntando os dois, obtemos que o somatório em (1.13) é dado por

$$\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_{k+1}).$$

Portanto pela expressão (1.12) obtemos

$$d\omega(X_1,\ldots,X_{k+1}) = \sum_{1\leq i\leq k+1}(-1)^{i+1}(\nabla_{X_i}\omega)(X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,X_{k+1}).$$

■

1.2.6 Orientação Temporal

Seja V um espaço vetorial Lorentziano, isto é, um espaço vetorial munido de um produto escalar de índice constante igual a 1. Considere o conjunto

$$\mathcal{T}=\{u\in V;\ \langle u,u\rangle<0\}.$$

Para cada $u\in\mathcal{T}$ defina

$$C(u)=\{v\in\mathcal{T};\ \langle u,v\rangle<0\}$$

chamado o *cone temporal* de V contendo u. Como primeiro resultado, temos o seguinte lema.

Lema 1.13 *Sejam $u, v \in \mathcal{T}$. Então,*

(i) O subespaço $\{v\}^{\perp}$ é tipo-espaço e

$$V = span\{v\} \oplus \{v\}^{\perp}.$$

Consequentemente, $\mathcal{T}$ é a união disjunta de $C(v)$ e $C(-v)$;

(ii) $|\langle v, w\rangle| \geq |v||w|$, onde $|v| = (-\langle v, v\rangle)^{1/2}$, valendo a igualdade se, e somente se, v e w são linearmente dependentes (Desigualdade de Cauchy-Schwarz reversa);

(iii) Se $v \in C(u)$ para algum $u \in \mathcal{T}, w \in C(u)$ se, e somente se, $\langle v, w\rangle < 0$. Consequentemente

$$w \in C(v) \Leftrightarrow v \in C(w) \Leftrightarrow C(v) = C(w).$$

Demonstração.

(i) Afirmamos que $span\{v\}$ é não degenerado com índice igual a 1.

Com efeito, sendo v um vetor tipo-tempo, temos que

$$ind\ (span\{v\}) = 1 \quad \text{e} \quad \langle v, v\rangle = -\ \beta^2,$$

para algum $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$. Agora dado $u \in span\{v\}$, então u é escrito como $u = av$, onde $a \in \mathbb{R}$. Logo se

$$0 = \langle u, v\rangle = \langle av, v\rangle = a\langle v, v\rangle = -\ a\beta^2,$$

então $a = 0$. Portanto $u = 0$ de concluímos que o subespaço $span\{v\}$ é não degenerado o que mostra a nossa afirmação.

Sendo $span\{v\}$ um subespaço não degenerado com índice 1, temos pelo Lema (1.6) que

$$V = span\{v\} \oplus span\{v\}^{\perp} = span\{v\} \oplus \{v\}^{\perp}$$

e

$$1 = ind\ (V) = ind\ (span\{v\}) + ind\ (\{v\}^{\perp}) = 1 + ind\ (\{v\}^{\perp}).$$

Assim, $ind\ (\{v\}^{\perp}) = 0$ e portanto $\{v\}^{\perp}$ é tipo-espaço.

Afirmamos agora que

$$\mathcal{T} = C(v) \cup C(-v),$$

onde esta união é disjunta.

De fato, se $z \in \mathcal{T}$ então $z \in V$ *e* $\langle z, z\rangle < 0$. Como $V = span\{v\} \oplus \{v\}^{\perp}$ então $z = av + w$, com $a \in \mathbb{R},\ a > 0$ e $w \in \{v\}^{\perp}$. Logo,

$$\langle z, v\rangle = \langle av + w, v\rangle = \langle av, v\rangle + \langle w, v\rangle = -a\beta^2.$$

Se $a > 0$ então $\langle z, v\rangle < 0$, e neste caso, $z \in C(v)$. Agora se $a < 0$ então $\langle z, v\rangle > 0$. Equivalentemente $\langle z, -v\rangle < 0$ e neste caso, $z \in C(-v)$. Reciprocamente, se $z \in C(v) \cup C(-v)$ então $z \in C(v)$ ou $z \in C(-v)$. Se $z \in C(v)$ então $z \in \mathcal{T}$ e $\langle z, v\rangle < 0$. Se $z \in C(-v)$ então $z \in \mathcal{T}$ e $\langle z, -v\rangle < 0$. Em qualquer caso, $z \in \mathcal{T}$ e portanto $\mathcal{T} = C(v) \cup C(-v)$.

(ii) Escreva $w = av + \widehat{w}$, com $a \in \mathbb{R}$ e $\widehat{w} \in \{v\}^{\perp}$. Sendo $\{v\}^{\perp}$ tipo-espaço então $\langle \widehat{w}, \widehat{w}\rangle \geq 0$. Como $w \in \mathcal{T}$ então $\langle w, w\rangle < 0$. Assim

$$\langle w, w\rangle = \langle av + \widehat{w}, av + \widehat{w}\rangle = a^2\langle v, v\rangle + \langle \widehat{w}, \widehat{w}\rangle,$$

logo

$$\begin{aligned}
\langle v, w\rangle^2 &= \langle v, av + \widehat{w}\rangle^2 = (\langle v, av\rangle + \underbrace{\langle v, \widehat{w}\rangle}_{=0})^2 = a^2\langle v, v\rangle^2\\
&= a^2\langle v, v\rangle \cdot \langle v, v\rangle = (\langle w, w\rangle - \langle \widehat{w}, \widehat{w}\rangle)\langle v, v\rangle\\
&= \langle w, w\rangle\langle v, v\rangle - \underbrace{\langle \widehat{w}, \widehat{w}\rangle}_{\geq 0}\underbrace{\langle v, v\rangle}_{<0}\\
&\geq \langle w, w\rangle\langle v, v\rangle = (-\langle w, w\rangle)(-\langle v, v\rangle)\\
&= |w|^2|v|^2,
\end{aligned}$$

uma vez que, $-\ \langle \widehat{w}, \widehat{w}\rangle\langle v, v\rangle \geq 0$.

Além disso a igualdade ocorre se, e somente se, $\langle \widehat{w}, \widehat{w}\rangle = 0$, isto é $\widehat{w} = 0$. Assim, a igualdade acontece se, e somente se, $w = av$.

(iii) Como $C\left(\dfrac{u}{|u|}\right) = C(u)$, assumiremos que u é um vetor unitário tipo-tempo. Assim, escrevendo $v = au + \widehat{v}$ e $w = bu + \widehat{w}$, com $a, b \in \mathbb{R}^*$ e $\widehat{v}, \widehat{w} \in \{u\}^{\perp}$ temos que, como $u, v \in \mathcal{T}$ então $\langle v, v\rangle < 0$ e $\langle u, u\rangle < 0$. Logo

$$\begin{aligned} 0 > \langle v, v\rangle &= \langle au + \widehat{v}, au + \widehat{v}\rangle = a^2\langle u, u\rangle + \langle \widehat{v}, \widehat{v}\rangle \\ &= -\, a^2(-\, \langle u, u\rangle) + |\widehat{v}|^2 = -\, a^2|u|^2 + |\widehat{v}|^2 \\ &= -\, a^2 + |\widehat{v}|^2. \end{aligned}$$

Com um cálculo análogo encontramos que

$$0 > \langle w, w\rangle = -\, b^2 + |\widehat{w}|^2.$$

Então

$$|a| > |\widehat{v}| \quad e \quad |b| > |\widehat{w}|,$$

logo

$$\begin{aligned} \langle v, w\rangle &= \langle au + \widehat{v}, bu + \widehat{w}\rangle = ab\langle u, u\rangle + a\langle u, \widehat{w}\rangle + b\langle \widehat{v}, u\rangle + \langle \widehat{v}, \widehat{w}\rangle \\ &= -\, ab + \langle \widehat{v}, \widehat{w}\rangle. \end{aligned}$$

Agora como $v, w \in C(u)$ temos

$$0 > \langle v, u\rangle = \langle au + \widehat{v}, u\rangle = a\langle u, u\rangle = -\, a,$$

e seque que $a > 0$.

Analogamente

$$0 > \langle v, u\rangle = -\, b \implies b > 0,$$

e assim $ab > 0$.

Agora usando a desigualdade de Cauchy-Scharwz clássica para $\widehat{v}, \widehat{w}$ temos

$$\begin{aligned} \langle v, w\rangle &= -\, ab + \langle \widehat{v}, \widehat{w}\rangle \leq -\, ab + |\langle \widehat{v}, \widehat{w}\rangle| \\ &\leq -\, ab + |\widehat{v}||\widehat{w}| < -\, ab + |a||b| \\ &= -\, ab + ab = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $w \in C(u)$ se, e somente se, $\langle v, w\rangle < 0$.

■

Definição 1.41 *Seja M uma variedade de Lorentz e $\mathcal{T}$ uma função em M a qual corresponde a cada ponto $p \in M$ um cone tipo-tempo $\mathcal{T}_p \in T_pM$. Dizemos que $\mathcal{T}$ é diferenciável quando para cada $p \in M$ existem uma vizinhança U de p e $V \in \mathfrak{X}(M)$ tais que $V(q) \in \mathcal{T}_q$, $\forall\ q \in U$. Uma tal função diferenciável é dita uma orientação temporal de M. Se M admite uma orientação temporal então dizemos que M é temporalmente orientado.*

O próximo resultado nos fornece uma maneira de mostrar que uma variedade é temporalmente orientada.

Proposição 1.42 *Uma variedade Lorentziana M é temporalmente orientada se, e somente se, existe um campo $K \in \mathfrak{X}(M)$ tipo-tempo globalmente definido em M.*

Demonstração. Se $K \in \mathfrak{X}(M)$ é tipo-tempo então, defina

$$\mathcal{T}_p = C(K(p)),$$

e observe que $\mathcal{T}_p$ é diferenciável e determina uma orientação temporal em M.

Reciprocamente, seja $\mathcal{T}$ uma orientação temporal em M. Como $\mathcal{T}$ é diferenciável em ponto $p \in M$, existe uma vizinhança U de M na qual o campo de vetores tipo-tempo K_U esta definido, tal que $K_U(q) \in \mathcal{T}_q$, para todo $q \in U$. Assim obtemos uma cobertura $\{U_\alpha\}$ de M e campos de vetores tipo-tempo K_{U_α} tais que $K_{U_\alpha}(q) \in \mathcal{T}_q$, para $q \in U_\alpha$.

Seja $\{f_\alpha\}$ uma partição diferenciável da unidade subordinada a cobertura $\{U_\alpha\}$ e considere o campo

$$K = \sum_\alpha f_\alpha K_{U_\alpha}.$$

Temos que K esta bem definido pois em cada ponto de M a soma em α é finita. Além disso

$$\begin{aligned}\langle K(q), K(q)\rangle &= \left\langle \sum_\alpha f_\alpha(q) K_{U_\alpha}(q), \sum_\beta f_\beta(q) K_{U_\beta}(q)\right\rangle \\ &= \sum_{\alpha,\beta} f_\alpha(q) f_\beta(q) \langle K_{U_\alpha}(q), K_{U_\beta}(q)\rangle,\end{aligned}$$

como $K_{U_\alpha}, K_{U_\beta} \in \mathcal{T}_q$ então, pelo item (iii) do Lema (1.13), temos

$$\langle K_{U_\alpha}(q), K_{U_\beta}(q)\rangle < 0,$$

e como a soma das $f_\alpha(q)$ é igual a 1, então deve existir um índice α tal que $f_\alpha(q) > 0$. De maneira análoga obtemos $f_\beta(q) > 0$.

Logo

$$\langle K(q), K(q)\rangle < 0.$$

Uma vez que q é um ponto arbitrário de M temos que K é um campo de vetores em M tipo-tempo. ∎

Sempre que uma variedade de Lorentz M for temporalmente orientável, a escolha de uma aplicação $\mathcal{T}$ como na Definição (1.41), ou de um campo vetorial tipo-tempo $X \in \mathfrak{X}(M)$ a ela correspondente, será denominada uma orientação temporal para M.

Observação 1.6 *Seja $\mathcal{T}$ uma orientação temporal para M e $K \in \mathfrak{X}(M)$. Então,*

(i) se $K(q) \in \mathcal{T}_q$ para todo $q \in M$, dizemos que K aponta para o futuro;

(ii) se $-K(q) \in \mathcal{T}_q$ para todo $q \in M$, dizemos que K aponta para o passado.

Sendo $X \in \mathfrak{X}(M)$ uma orientação temporal para M, segue do item (iii) do Lema (1.13) que um campo vetorial tipo-tempo K sobre M,

(i) aponta para o futuro se, e somente se, $\langle K, X\rangle < 0$;

(ii) aponta para o passado se, e somente se, $\langle K, X\rangle > 0$.

Encerraremos esta seção com um exemplo.

Exemplo 7 *O espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$ é temporalmente orientado, pois*

$$K = \frac{\partial}{\partial t} = (1, 0, \ldots, 0)$$

é um campo de vetores tipo-tempo globalmente definido em $\mathbb{L}^{n+1}$.

Capítulo 2

Imersões Isométricas e as Transformações de Newton

Em toda esta seção, M^n e $\overline{M}^m$ são duas variedades diferenciáveis de dimensão n e m respectivamente. Quando não houver possibilidade de confusão, vamos denotar por M e $\overline{M}$, respectivamente. Para maiores detalhes [12], [15] e [27].

2.1 Imersões Isométricas

Definição 2.1 *Sejam M^n e $\overline{M}^m$ variedades diferenciáveis de dimensões n e m respectivamente com $m > n$. Dizemos que a aplicação $x : M \to \overline{M}$ é uma imersão se a aplicação diferencial $dx_p : T_pM \to T_{x(p)}\overline{M}$ é injetiva para todo $p \in M$.*

O número $k = m - n$ é chamado *codimensão* de x. Uma imersão $x : M \to \overline{M}$ entre duas variedades semi-Riemannianas com métricas $\langle , \rangle_M$ e $\langle , \rangle_{\overline{M}}$, respectivamente é chamada imersão isométrica se

$$\langle u, v\rangle_M = \langle dx_p(u), dx_p(v)\rangle_{\overline{M}},$$

para todo $p \in M$ e $u, v \in T_pM$.

Observamos que se $x : M \to \overline{M}$ é uma imersão e $\langle , \rangle_{\overline{M}}$ é a métrica em $\overline{M}$, podemos definir uma métrica $\langle , \rangle_M$ em M pelo *pullback*.

Seja $x : M \to \overline{M}$ uma imersão isométrica. Ao redor de cada ponto $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ tal que $x\big|_U$ é um mergulho sobre $x(U)$. Assim podemos identificar U com a sua imagem $x(U)$, isto é x é localmente a aplicação inclusão.

Assim podemos considerar o espaço tangente de M em p com um subespaço do espaço tangente de $\overline{M}$ em p e escrevemos

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$.

Definição 2.2 *Sejam $\overline{M}^m$ uma variedade semi-Riemanniana com a conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ e $x : M \to \overline{M}$ uma imersão isométrica. Então dados campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos que*

$$\overline{\nabla}_X Y = (\nabla_X Y)^{\top} + (\nabla_X Y)^{\perp}.$$

E segue da unicidade da conexão de Levi-Civita que $(\nabla)^{\top}$ é a conexão de Levi-Civita de M e denotamos por ∇.

Assim obtemos a *Fórmula de Gauss*

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

a qual define uma aplicação

$$\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$$

chamada a *Segunda Forma Fundamental* da imersão x.

Proposição 2.3 *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, então a aplicação $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ dada por $\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ é bilinear e simétrica.*

Demonstração. Observe que pelas propriedades da conexão, segue que α é linear na primeira entrada e na segunda entrada. Para a simetria, basta ver que

$$\begin{aligned}
\alpha(X, Y) - \alpha(Y, X) &= \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y - \overline{\nabla}_Y X + \nabla_Y X \\
&= (\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X) + (\nabla_Y X - \nabla_X Y) \\
&= [\overline{X}, \overline{Y}] + [Y, X] \\
&= [X, Y] - [X, Y] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que quando restritos a M os campos são iguais e segue o resultado. ■

Consideremos agora campos de vetores $X \in M$ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, e denotemos por $A_{\xi}X$ a componente tangencial de $-\ \overline{\nabla}_X \xi$, isto é,

$$A_{\xi}X = -\ (\overline{\nabla}_X \xi)^{\top}.$$

Uma vez que para cada $Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$0 = X\langle \xi, Y \rangle = \langle \overline{\nabla}_X \xi, Y \rangle + \langle \xi, \overline{\nabla}_X Y \rangle,$$

pela fórmula de Gauss, temos

$$\langle A_{\xi}X, Y \rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi \rangle.$$

Em particular, a aplicação $A : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^{\perp} \to \mathfrak{X}(M)$ dada por $A(X, \xi) = A_{\xi}X$ é bilinear sobre $C^{\infty}(M)$. Assim, a aplicação $A_{\xi} : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é linear sobre $C^{\infty}(M)$ e também auto adjunta, isto é, $\langle A_{\xi}X, Y \rangle = \langle X, A_{\xi}Y \rangle$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. A aplicação A_{ξ} é chamada *Operador de Forma* ou *Operador de Weingarten* da imersão x.

Não é difícil ver que a componente normal de $\overline{\nabla}_X \xi$, que é denotada por $(\overline{\nabla}_X \xi)^{\perp}$, define uma conexão compatível com o fibrado tangente normal $TM^{\perp}$. Dizemos que $\nabla^{\perp}$ é a conexão normal de x, e obtemos a fórmula de Weingarten

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_{\xi}X + \nabla^{\perp}_X \xi.$$

Agora, usando a fórmula de Gauss e Weingarten, obteremos as equações básicas das imersões isométricas para o nosso interesse: a equação de Gauss e Codazzi.

Proposição 2.4 *Seja M uma subvariedade semi-Riemanniana de $\overline{M}$. Sejam R e $\overline{R}$ os tensores curvatura de M e $\overline{M}$ respectivamente, e α o tensor de forma de M. Então para $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ temos*

(i) Equação de Gauss:

$$\langle R(X,Y)Z, W \rangle = \langle \overline{R}(X,Y)Z, W \rangle + \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z) \rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W) \rangle;$$

(ii) Equação de Codazzi:

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_Y \alpha)(X,Z).$$

Demonstração.

(i) Pela definição (1.5)

$$\overline{R}(X,Y)Z = -\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z + \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z,$$

então

$$\begin{aligned} -\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z &= \overline{\nabla}_X(\nabla_Y Z - \alpha(Y,Z)) = -\overline{\nabla}_X\nabla_Y Z - \overline{\nabla}_X\alpha(Y,Z) \\ &= -\nabla_X\nabla_Y Z - \alpha(X,\nabla_Y Z) - \overline{\nabla}_X\alpha(Y,Z) \\ &= -\nabla_X\nabla_Y Z - \alpha(X,\nabla_Y Z) + A_{\alpha(Y,Z)}X - \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z), \end{aligned}$$

de maneira análoga encontramos,

$$\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z = \nabla_Y\nabla_X Z + \alpha(Y,\nabla_X Z) - A_{\alpha(X,Z)}Y + \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z),$$

e

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z = \nabla_{[X,Y]}Z + \alpha([X,Y],Z).$$

Somando os termos acima temos

$$\begin{aligned} -\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z + \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z &= -\nabla_X\nabla_Y Z - \alpha(X,\nabla_Y Z) + A_{\alpha(Y,Z)}X \\ &\quad - \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) + \nabla_Y\nabla_X Z + \alpha(Y,\nabla_X Z) \\ &\quad - A_{\alpha(X,Z)}Y + \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z) \\ &\quad + \nabla_{[X,Y]}Z + \alpha([X,Y],Z), \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} \overline{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z - \alpha(X,\nabla_Y Z) + \alpha(Y,\nabla_X Z) + A_{\alpha(Y,Z)}X - A_{\alpha(X,Z)}Y \\ &\quad - \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) + \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z) + \alpha([X,Y],Z), \end{aligned} \tag{2.1}$$

fazendo produto escalar com um campo $W \in \mathfrak{X}(M)$ qualquer, temos

$$\begin{aligned} \langle\overline{R}(X,Y)Z,W\rangle &= \langle R(X,Y)Z,W\rangle - \langle\alpha(X,\nabla_Y Z),W\rangle + \langle\alpha(Y,\nabla_X Z),W\rangle \\ &\quad + \langle A_{\alpha(Y,Z)}X,W\rangle - \langle A_{\alpha(X,Z)}Y,W\rangle - \langle\nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z),W\rangle \\ &\quad + \langle\nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z),W\rangle + \langle\alpha([X,Y],Z),W\rangle, \end{aligned}$$

logo

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle A_{\alpha(Y,Z)}X,W\rangle - \langle A_{\alpha(X,Z)}Y,W\rangle.$$

Mas

$$\langle A_{\alpha(Y,Z)}X,W\rangle = \langle \alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle \quad \text{e} \quad \langle A_{\alpha(X,Z)}Y,W\rangle = \langle \alpha(Y,W),\alpha(X,Z)\rangle,$$

e portanto

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle \overline{R}(X,Y)Z,W\rangle + \langle \alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle.$$

(ii) Antes de mostrar esta equação faremos uma pequena observação. Uma vez que $\alpha : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)^{\perp}$ é um campo, pelo exemplo (1) podemos vê-lo como um tensor, isto é,

$$\alpha : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times(\mathfrak{X}(M)^{\perp})^{*}\to C^{\infty}(M).$$

Pela proposição (1.26) sabemos que na presença da métrica podemos identificar campos com 1-formas, assim $\alpha : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)^{\perp}\to C^{\infty}(M)$ é um tensor do tipo $(0,3)$ cuja diferencial covariante é o tensor

$$\overline{\nabla}\alpha : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)^{\perp}\times\mathfrak{X}(M)\to C^{\infty}(M)$$

do tipo $(0,4)$ em M.

Diante do exposto acima, dados $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$ e $\eta\in\mathfrak{X}(M)^{\perp}$, temos pela regra do produto (1.11)

$$(\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z,\eta) = X(\alpha(Y,Z,\eta)) - \alpha(\nabla_XY,Z,\eta) - \alpha(Y,\nabla_XZ,\eta) - \alpha(Y,Z,\nabla_X\eta),$$

mas

$$(\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z,\eta) = \langle(\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z),\eta\rangle,$$

então

$$\langle(\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z),\eta\rangle = \langle\nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z),\eta\rangle - \langle\alpha(\nabla_XY,Z),\eta\rangle - \langle\alpha(Y,\nabla_XZ),\eta\rangle. \quad (2.2)$$

De maneira análoga encontramos

$$\langle(\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(X,Z),\eta\rangle = \langle\nabla^{\perp}_{Y}\alpha(X,Z),\eta\rangle - \langle\alpha(\nabla_{Y}X,Z),\eta\rangle - \langle\alpha(X,\nabla_{Y}Z),\eta\rangle. \quad (2.3)$$

Por outro lado, fazendo o produto escalar com um campo qualquer $\eta \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ na expressão (2.1), obtemos

$$\begin{aligned}\langle\overline{R}(X,Y)Z,\eta\rangle &= \langle R(X,Y)Z,\eta\rangle - \langle\alpha(X,\nabla_{Y}Z),\eta\rangle + \langle\alpha(Y,\nabla_{X}Z),\eta\rangle \\ &+ \langle A_{\alpha(Y,Z)}X,\eta\rangle - \langle A_{\alpha(X,Z)}Y,\eta\rangle - \langle\nabla^{\perp}_{X}\alpha(Y,Z),\eta\rangle \\ &+ \langle\nabla^{\perp}_{Y}\alpha(X,Z),\eta\rangle + \langle\alpha([X,Y],Z),\eta\rangle,\end{aligned}$$

e daí

$$\begin{aligned}\langle(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp},\eta\rangle &= -\langle\alpha(X,\nabla_{Y}Z),\eta\rangle + \langle\alpha(Y,\nabla_{X}Z),\eta\rangle - \langle\nabla^{\perp}_{X}\alpha(Y,Z),\eta\rangle \\ &+ \langle\nabla^{\perp}_{Y}\alpha(X,Z),\eta\rangle + \langle\alpha([X,Y],Z),\eta\rangle.\end{aligned}$$

Ainda neste contexto, podemos reescrever a expressão acima como

$$\begin{aligned}\langle(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp},\eta\rangle &= -\langle\alpha(X,\nabla_{Y}Z),\eta\rangle + \langle\alpha(Y,\nabla_{X}Z),\eta\rangle - \langle\nabla^{\perp}_{X}\alpha(Y,Z),\eta\rangle \\ &+ \langle\nabla^{\perp}_{Y}\alpha(X,Z),\eta\rangle + \langle\alpha(\nabla_{X}Y,Z),\eta\rangle - \langle\alpha(\nabla_{Y}X,Z),\eta\rangle,\end{aligned}$$

substituir as expressões (2.2) e (2.3) na mesma, e concluir que

$$\langle(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp},\eta\rangle = \langle(\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z),\eta\rangle - \langle(\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(X,Z),\eta\rangle.$$

Como $\eta \in \mathfrak{X}(M)$ foi escolhido arbitrariamente segue o resultado.

■

Corolário 2.5 *Se $\{X,Y\}$ é uma base para um plano tangente não degenerado de M gerado por $X,Y \in T_pM$, então*

$$\overline{K}(X,Y) = K(X,Y) + \frac{\langle\alpha(X,Y),\alpha(X,Y)\rangle - \langle\alpha(X,X),\alpha(Y,Y)\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2},$$

onde $\overline{K}$ e K denotam as curvaturas seccionais de $\overline{M}$ e M respectivamente.

Demonstração. Observe que fazendo $X = Z$ e $W = Y$ na equação de Gauss (2.4), temos que

$$\langle R(X,Y)X,Y\rangle = \langle\overline{R}(X,Y)X,Y\rangle + \langle\alpha(X,Y),\alpha(Y,X)\rangle - \langle\alpha(X,X),\alpha(Y,Y)\rangle,$$

uma vez que $|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2 \neq 0$ temos

$$\frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2} = \frac{\langle \overline{R}(X,Y)X,Y\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2} + \frac{\langle \alpha(X,Y),\alpha(Y,X)\rangle - \langle \alpha(X,X),\alpha(Y,Y)\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2},$$

o que implica

$$K(X,Y) = \overline{K}(X,Y) + \frac{\langle \alpha(X,Y),\alpha(X,Y)\rangle - \langle \alpha(X,X),\alpha(Y,Y)\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2}.$$

■

Faremos uma aplicação da Equação de Gauss usando a definição de (1.30).

Exemplo 8 *Mostremos que a esfera n-dimensional*

$$S^n(r) = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ \langle p,p\rangle = r^2\}$$

tem curvatura seccional constante $K = \dfrac{1}{r^2}$*, se* $n \geq 2$*.*

Com efeito, seja $p = \sum_i u^i \partial_i$ *o vetor posição de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *para* $p \in S^n(r)$*. Se* $\overline{\nabla}$ *é a conexão de Levi-Civita de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *então*

$$\overline{\nabla}_X p = \sum_i X(u^i)\partial_i = X, \quad \forall\ X \in \mathfrak{X}(S^n).$$

Daí,

$$\langle p,p\rangle = r^2 \Rightarrow 0 = X\langle p,p\rangle = 2\langle \overline{\nabla}_X p, p\rangle = 2\langle X,p\rangle$$

o que implica

$$0 = \langle X,p\rangle, \quad \forall\ X \in \mathfrak{X}(S^n),$$

isto é, o vetor posição p *é ortogonal a* S^n*.*

Considere agora $U = \dfrac{p}{|p|} = \dfrac{p}{\sqrt{\langle p,p\rangle}} = \dfrac{p}{r}$ *e afirmamos que*

$$\alpha(V,W) = -\,\frac{1}{r}\langle V,W\rangle U, \quad \forall\ V,W \in \mathfrak{X}(S^n).$$

De fato,

$$\begin{aligned}\langle \alpha(V,W),U\rangle &= \langle (\overline{\nabla}_V W)^{\perp}, U\rangle = \frac{1}{r}\langle (\overline{\nabla}_V W)^{\perp}, p\rangle \\ &= \frac{1}{r}\langle \overline{\nabla}_V W, p\rangle = -\,\frac{1}{r}\langle W, \overline{\nabla}_V p\rangle \\ &= -\,\frac{1}{r}\langle V,W\rangle, \quad \forall\ V,W \in \mathfrak{X}(S^n).\end{aligned}$$

Como $\mathbb{R}^{n+1}$ *é flat, concluímos pelo corolário (2.5) que* $K(V,W) = \dfrac{1}{r^2}$*.*

Se a variedade semi-Riemanniana $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante C, então para todos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ podemos reescrever as equações de Gauss e Codazzi da seguinte maneira:

(i) *Equação de Gauss:*

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z, W\rangle &= C(\langle Z, X\rangle\langle Y, W\rangle - \langle Z, Y\rangle\langle X, W\rangle) \\ &\quad + \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle;\end{aligned}$$

(ii) *Equação de Codazzi:*

$$(\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z) = (\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(X,Z).$$

2.2 Hipersuperfícies Tipo-Espaço

Na presente seção, reescreveremos as equações básicas das imersões isométricas apresentadas na seção anterior para o caso em que o espaço ambiente $\overline{M}$ é uma variedade Lorentziana $(n+1)$-dimensional e M é uma hipersuperfície tipo-espaço imersa.

Definição 2.6 *Uma imersão suave $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ de uma variedade n-dimensional conexa em uma variedade de Lorentz $(n+1)$-dimensional é dita uma hipersuperfície tipo-espaço quando a métrica induzida pela imersão x em M^n for Riemanniana. E neste caso denotemos a métrica de M e $\overline{M}$ por $\langle , \rangle$.*

O próximo resultado nos diz que se $\overline{M}^{n+1}$ for temporalmente orientada, então as suas hipersuperfícies tipo-espaço são orientadas.

Proposição 2.7 *Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço de uma variedade de Lorentz temporalmente orientada $\overline{M}^{n+1}$. Então M^n admite um campo de vetores normais e unitários (suave) $N \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, na mesma orientação temporal de $\overline{M}$. Em particular, M^n é orientável.*

Demonstração. Seja $K \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ o campo de vetores tipo-tempo que dá a orientação temporal de $\overline{M}$. Observe que o conjunto de todos os vetores tipo-tempo $v \in T_p\overline{M}$ é a união disjunta de $C(K(p))$ e $C(-K(p))$. Escolhemos então, em cada ponto $p \in M$ um vetor unitário $N(p) \in T_pM^{\perp}$. Desde que $N(p)$ é tipo-tempo, trocando $N(p)$ por $-N(p)$ se necessário, podemos supor que $N(p) \in C(K(p))$. Esta receita define unicamente um campo de vetores normal e unitário N sobre M, na mesma orientação temporal de K. Agora, resta mostrar que N é suave. De fato, fixemos $p \in M$ e consideremos um referencial móvel $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ao redor de p. Então

$$\widetilde{N} = K - \sum_{j=1}^{n} \langle K, e_j \rangle e_j$$

é normal e suave em M com,

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{N}, \widetilde{N} \rangle &= \left\langle K - \sum_{j=1}^{n} \langle K, e_j \rangle e_j, K - \sum_{i=1}^{n} \langle K, e_i \rangle e_i \right\rangle \\
&= \langle K, K \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle K, e_j \rangle \langle K, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle K, e_i \rangle \langle K, e_i \rangle + \sum_{i,j=1}^{n} \langle K, e_i \rangle \langle K, e_j \rangle \delta_{ij} \\
&= \langle K, K \rangle - 2\sum_{j=1}^{n} \langle K, e_j \rangle^2 + \sum_{j=1}^{n} \langle K, e_j \rangle^2 \\
&= \langle K, K \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle K, e_j \rangle^2,
\end{aligned}$$

mas

$$K = \sum_{j=1}^{n} \langle K, e_j \rangle e_j - \langle K, N \rangle N,$$

e assim

$$\langle K, K \rangle = -\ \langle K, N \rangle^2 + \sum_{j=1}^{n} \langle K, e_j \rangle^2.$$

Logo

$$\langle \widetilde{N}, \widetilde{N} \rangle = -\ \langle K, N \rangle^2 + \sum_{j=1}^{n} \langle K, e_j \rangle^2 - \sum_{j=1}^{n} \langle K, e_j \rangle^2 < 0,$$

e além disso

$$\langle \widetilde{N}, K \rangle = \left\langle K - \sum_{j=1}^{n} \langle K, e_j \rangle e_j, K \right\rangle = \langle K, K \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle K, e_j \rangle^2 < 0.$$

Portanto, $\widetilde{N}(p) \in C(K(p))$ e consequentemente, $N = \dfrac{\widetilde{N}}{|\widetilde{N}|}$ é suave. ■

Observação 2.1 *Na ultima proposição, com K e N estão na mesma orientação temporal, temos que $\langle K, N \rangle < 0$.*

Com efeito, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz para vetores tipo-tempo,

$$|\langle K, N \rangle| \geq |K||N| = |K|,$$

pois N é unitário em M^n. Assim $\langle K, N \rangle \leq -|K| < 0$ em M^n.

Uma vez escolhida a orientação temporal da hipersuperfície tipo-espaço imersa num espaço-tempo, $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, iremos denotaremos por N essa escolha e também denominaremos N como sendo a *Aplicação Normal de Gauss* de M.

Seja $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ a hipersuperfície tipo-espaço dada acima. Como existe apenas uma direção normal, deixaremos de escrever o subíndice em A para denotar a direção normal. Com exceção da métrica, denotaremos por $\overline{\nabla}$ e $\overline{R}$ a conexão de Levi-Civita e o tensor curvatura de $\overline{M}$, respectivamente e por ∇ e R a conexão de Levi-Civita e o tensor curvatura de M respectivamente.

Então dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, é fácil ver que a fórmula de Gauss é dada por

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \langle AX, Y\rangle N. \tag{2.4}$$

Por outro lado, uma vez que N é um campo unitário e normal, temos $\langle \overline{\nabla}_X N, N\rangle = 0$, e portanto $\nabla^{\perp}_X N = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Assim, podemos escrever a fórmula de Weingarten como

$$\overline{\nabla}_X N = -\, AX. \tag{2.5}$$

Usando o fato que $\alpha(X, Y) = -\, \langle AX, Y\rangle N$, podemos ver que a equação de Gauss pode ser escrita como

$$R(X,Y)Z = (\overline{R}(X,Y)Z)^{\top} - \langle AX, Z\rangle AY + \langle AY, Z\rangle AX,$$

e a equação de Codazzi por

$$(\overline{R}(X,Y)N)^{\top} = (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X, \tag{2.6}$$

onde por definição

$$(\nabla_X A)Y = \nabla_X(AY) - A(\nabla_X Y).$$

No caso em que a curvatura seccional de $\overline{M}$ é constante C, as equações de Gauss e Codazzi são, respectivamente

$$R(X,Y)Z = C(\langle Z, X\rangle Y - \langle Z, Y\rangle X) - \langle AX, Z\rangle AY + \langle AY, Z\rangle AX$$

e

$$(\nabla_Y A)X = (\nabla_X A)Y.$$

2.3 Campos Conformes

Definição 2.8 *Uma campo vetorial tangente $Y \in \mathfrak{X}(M)$ é dito um campo conforme se a derivada de Lie da métrica Lorentziana com respeito a Y satisfaz*

$$\mathcal{L}_Y\langle , \rangle = 2\phi\langle , \rangle,$$

para alguma função suave $\phi \in C^\infty(M)$.

O resultado que mostraremos agora caracteriza os campos conformes.

Lema 2.1 *Um campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ é conforme se, e somente se,*

$$\langle \nabla_V Y, W\rangle + \langle \nabla_W Y, V\rangle = 2\phi\langle V, W\rangle,$$

para quaisquer $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ e para alguma função suave $\phi \in C^\infty(M)$.

Demonstração. De fato, sendo $\mathcal{L}_Y$ um tensor derivação podemos usar a regra do produto (1.11), então

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y\langle V, W\rangle &= Y\langle V, W\rangle - \langle \mathcal{L}_Y(V), W\rangle - \langle V, \mathcal{L}_Y(W)\rangle \\
&= \langle \nabla_Y V, W\rangle + \langle V, \nabla_Y W\rangle - \langle [Y, V], W\rangle - \langle V, [Y, W]\rangle \\
&= \langle \nabla_Y V, W\rangle + \langle V, \nabla_Y W\rangle - \langle \nabla_Y V, W\rangle \\
&\quad + \langle \nabla_V Y, W\rangle - \langle V, \nabla_Y W\rangle + \langle V, \nabla_W Y\rangle \\
&= \langle \nabla_V Y, W\rangle + \langle \nabla_W Y, V\rangle.
\end{aligned}$$

Logo pela definição (2.8) temos

$$\langle \nabla_V Y, W\rangle + \langle \nabla_W Y, V\rangle = 2\phi\langle V, W\rangle,$$

para quaisquer $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. ■

Como consequência do Lema acima temos que se a função conforme ϕ é identicamente nula, Y é dito um campo de Killing.

Definição 2.9 *Numa variedade semi-Riemanniana M um campo conforme K é dito fechado se, para qualquer $V \in \mathfrak{X}(M)$ temos $\nabla_V K = \phi V$, onde ϕ é uma função suave em M.*

Observe que a definição acima equivale a dizer que a 1-forma dual ω_K de K é fechada, isto é, a derivada exterior de ω_K é identicamente nula.

2.4 Produtos Warped

Em um produto semi-Riemanniano $B \times F$, o tensor métrico definido sobre a mesma é dado por $\pi_B^*(g_B) + \pi_F^*(g_F)$ onde π_B^* e π_F^* são as projeções de $B \times F$ sobre B e F, respectivamente. Uma rica classe de métricas em $B \times F$ pode ser obtida "torcendo" homotéticamente a métrica produto, como veremos nas próximas linhas (para maiores detalhes ver [27]).

Definição 2.10 *Suponha que B e F sejam variedades semi-Riemannianas, e considere $f > 0$ uma função suave em B. O produto warped $\overline{M} = B \times_f F$ é a variedade produto $B \times F$ munida com o tensor métrico*

$$\overline{g} = \pi_B^*(g_B) + (f \circ \pi_B)^2 \pi_F^*(g_F).$$

Observe que se $f = 1$, temos a variedade produto semi-Riemanniana $B \times F$. Chamamos B a *base* de $\overline{M} = B \times_f F$ e F a *fibra.* Nosso objetivo agora é expressar a geometria de M em termos da função warped f e da geometria de B e F.

Como no caso do produto warped semi-Riemanniano, não é difícil mostrar que as fibras $\{p\} \times F = \pi_F^{-1}(p)$ e as folhas $B \times \{q\} = \pi_B^{-1}(q)$ são subvariedades semi-Riemannianas de $\overline{M}$.

Observação 2.2 *A métrica warped e caracterizada por:*

(i) Para cada $p \in F$, a aplicação $\pi_B\big|_{B \times \{q\}}$ é uma isometria sobre B;

(ii) Para cada $q \in B$, a aplicação $\pi_F\big|_{\{p\} \times F}$ é uma homotetia positiva sobre F com fator homotético $\frac{1}{f(p)}$;

(iii) Para cada $(p, q) \in \overline{M}$, a folha $B \times \{q\}$ e a fibra $\pi_F\big|_{\{p\} \times F}$ são ortogonais em (p, q);

Os vetores tangentes as folhas são chamados *horizontais* enquanto os tangentes as fibras são ditos *verticais.*

Funções, vetores tangentes e campos de vetores em F e em B, podem ser levantados para $B \times F$ usando a projeções π_F e π_B, constituindo assim, campos, funções e vetores em $B \times F$. Denotamos por $\mathcal{H}(B)$ o conjunto dos levantamentos horizontais e por $\mathcal{V}(F)$ o conjunto dos levantamentos verticais. Notemos que $\mathcal{H}(B)$ e $\mathcal{V}(F)$ são subespaços vetoriais de $\mathfrak{X}(B \times F)$. Além disso, se $X \in \mathcal{H}(B)$ e $V \in \mathcal{V}(F)$, não é difícil verificar que $[X, V] = 0$.

Proposição 2.11 *Seja o produto warped $\overline{M} = B \times_f F$. Considerando $X, Y \in \mathcal{H}(B)$ e $V, W \in \mathcal{V}(F)$, temos*

(i) $\overline{\nabla}_X V \in \mathcal{H}(B)$ *é o levantamento de* $\overline{\nabla}_X V$ *em* B*;*

(ii) $\overline{\nabla}_X V = \overline{\nabla}_V X = \dfrac{X(f)}{f} V$.

Demonstração.

(i) Pelo item (iii) da observação (2.11) e usando o fato de que $[X, V] = 0 = [Y, V]$, a fórmula de Koszul (1.5)

$$\begin{aligned} 2\langle \overline{\nabla}_X Y, V\rangle &= X\langle Y, V\rangle + Y\langle V, X\rangle - V\langle X, Y\rangle \\ &\quad - \langle X, [Y, V]\rangle + \langle Y, [V, X]\rangle + \langle V, [X, Y]\rangle, \end{aligned}$$

se reduz a

$$2\langle \overline{\nabla}_X Y, V\rangle = -V\langle X, Y\rangle - \langle V, [X, Y]\rangle.$$

Por outro lado, como $X, Y \in \mathcal{H}(B)$ então $\langle X, Y\rangle$ é constante nas fibras, e como $V \in \mathcal{V}(F)$ temos que $V\langle X, Y\rangle = 0$. E assim, $2\langle \overline{\nabla}_X Y, V\rangle = 0$, para qualquer $V \in \mathcal{V}(F)$, isto é, $\overline{\nabla}_X Y$ é um campo horizontal. Agora, pelo item (i) da observação (2.2), segue que $\overline{\nabla}_X V \in \mathcal{H}(B)$ é o levantamento de $\overline{\nabla}_X V$ em B.

(ii) Como $0 = [X, V] = \overline{\nabla}_X V - \overline{\nabla}_V X$ então $\overline{\nabla}_X V = \overline{\nabla}_V X$ e estes campos são verticais, pois pelo item (i) temos que

$$\langle \overline{\nabla}_X V, Y\rangle = X\langle V, Y\rangle - \langle V, \overline{\nabla}_V X\rangle = 0.$$

Seja agora W um campo vertical a F, logo a fórmula de Koszul (1.5)

$$\begin{aligned} 2\langle \overline{\nabla}_X V, W\rangle &= X\langle V, W\rangle + V\langle W, X\rangle - W\langle X, V\rangle \\ &\quad - \langle X, [V, W]\rangle + \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle, \end{aligned}$$

reduz-se a $2\langle \overline{\nabla}_X Y, V\rangle = X\langle Y, V\rangle$.

Por outro lado pela definição da métrica warped,

$$\begin{aligned}\langle V, W\rangle_{(p,q)} &= \langle 0+V, 0+W\rangle_{(p,q)} \\ &= \langle 0,0\rangle_B + f^2(p)\langle V_q, W_q\rangle_F,\end{aligned}$$

escrevendo $f = f \circ \pi_B$ temos que

$$\langle V, W\rangle = f^2(\langle V_q, W_q\rangle_F \circ \pi_F).$$

Observando que $\langle V_q, W_q\rangle_F \circ \pi_F$ é constante nas folhas onde X é tangente, temos

$$\begin{aligned}X\langle V, W\rangle &= X(\langle V_q, W_q\rangle_F \circ \pi_F) \\ &= 2fX(f)(\langle V_q, W_q\rangle_F \circ \pi_F) \\ &= \frac{2X(f)}{f}\left(f^2(\langle V_q, W_q\rangle_F \circ \pi_F)\right) \\ &= \frac{2X(f)}{f}\langle V, W\rangle.\end{aligned}$$

Assim,

$$2\langle \nabla_X V, W\rangle = X\langle V, W\rangle = \frac{2X(f)}{f}\langle V, W\rangle.$$

Sendo a métrica não degenerada e $W \in \mathcal{V}(F)$ qualquer, segue que

$$\overline{\nabla}_X V = \overline{\nabla}_V X = \frac{X(f)}{f} V.$$

■

De posse dos conhecimentos descritos acima, passemos a descrever algumas propriedades importantes de uma classe de variedades de Lorentz do nosso interesse.

Definição 2.12 *Sejam (F^n, g) uma variedade Riemanniana completa de dimensão $n \geq 2$, $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ munido com a métrica $-dt^2$ e $f \in C^\infty(I \times F)$ uma função positiva. A variedade produto $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f F$ munida com a métrica Lorentziana $\overline{g}$ dada por*

$$\overline{g} = \pi_I^*(-dt^2) + f(\pi)\pi_F^*(g),$$

onde π_I e π_F denotam, respectivamente, as projeções sobre I e F, é dita um espaço-tempo de Robertson-Walker Generalizado (GRW). Isto é, um espaço-tempo GRW $(\overline{M}^{n+1}_, \overline{g})$ é um produto warped com base $(I, -dt^2)$, fibra Riemanniana (F, g) e função warped f.

O campo vertical, $\frac{\partial}{\partial_t}$ é por definição o campo de vetores tipo-tempo na direção que contém I. Para simplificar a notação, denotemos $\frac{\partial}{\partial_t}$ por ∂_t e $\overline{g}$ por $\langle , \rangle$.

Proposição 2.13 *Seja $(\overline{M}^{n+1}_{,}\overline{g})$ um espaço-tempo GRW com base $(I, -dt^2)$, fibra Riemanniana (F^n, g) e função warped f. Então o campo $K = f(\pi_I)\partial_t \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ é conforme fechado, tipo-tempo globalmente definido em $\overline{M}$, onde $\pi_I : \overline{M} \to I$ denota a projeção sobre I.*

Demonstração. Identifiquemos $f = f(\pi_I)$. Então

$$\langle K, K\rangle = \langle f\partial_t, f\partial_t\rangle = f^2\langle\partial_t, \partial_t\rangle = -f^2 < 0,$$

isto é, K é tipo-tempo.

Por outro lado, $\langle\partial_t, \partial_t\rangle = -1$, dai

$$0 = \partial_t\langle\partial_t, \partial_t\rangle = 2\langle\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t, \partial_t\rangle,$$

e pelo item (i) da Proposição (2.11) temos $\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = 0$. Logo qualquer $V \in \mathfrak{X}(M)$ pode ser escrito como $V = -h\partial_t + V_F$, onde $h \in C^\infty(M)$ e $V_F \in \mathcal{V}(F)$ e pelo item (ii) da Proposição (2.11)

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_V K &= \overline{\nabla}_{-h\partial_t + V_F}(f\partial_t) = -h\overline{\nabla}_{\partial_t}(f\partial_t) + \overline{\nabla}_{V_F}(f\partial_t)\\
&= -hf\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t - h\partial_t(f)\partial_t + \frac{f\partial_t(f)}{f}V_F\\
&= -f^{'}h\partial_t + f^{'}V_F = f^{'}(-h\partial_t + V_F) = f^{'}V.
\end{aligned}$$

Logo para quaisquer $V, W \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, temos

$$\langle\overline{\nabla}_V K, W\rangle + \langle V, \overline{\nabla}_W K\rangle = \langle f^{'}V, W\rangle + \langle V, f^{'}W\rangle = 2f^{'}\langle V, W\rangle,$$

de onde concluímos que K é conforme e fechado segundo a definição (2.9). ∎

2.5 O Steady State Space $\mathcal{H}^{n+1}$

Nesta seção definiremos o Steady State space $\mathcal{H}^{n+1}$. Mas antes, daremos algumas propriedades e definiremos o espaço de Sitter $\mathbb{S}^{n+1}_1$.

Seja $\mathbb{L}^{n+2}$ o espaço de Lorentz-Minkowski $(n+2)$-dimensional $(n \geq 2)$, que é o espaço vetorial $\mathbb{R}^{n+2}$ munido com a métrica Lorentziana definida por

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} v_i w_i - v_{n+2} w_{n+2}, \ \forall \ v, w \in \mathbb{R}^{n+2}.$$

Definimos o espaço $(n+1)$-dimensional de Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$, com a hiperquádrica de $\mathbb{L}^{n+2}$,

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = \{p \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle p, p \rangle = 1\},$$

formada por todos os vetores unitários de $\mathbb{L}^{n+2}$, munida com a métrica induzida de $\mathbb{L}^{n+2}$.

Afirmemos que $\mathbb{S}_1^{n+1}$ é uma variedade de Lorentz com curvatura seccional constante igual a 1. De fato, considere a função $f : \mathbb{L}^{n+2} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(p) = \langle p, p \rangle,$$

e note que $\mathbb{S}_1^{n+1} = f^{-1}(1)$, isto é, $\mathbb{S}_1^{n+1}$ é uma variedade de Lorentz.

Consideremos agora K e $\overline{K}$ as curvaturas seccionais de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ e $\mathbb{L}^{n+2}$ respectivamente. Então dados $p \in \mathbb{S}_1^{n+1}$, $\eta(p) \in (T_p\mathbb{S}_1^{n+1})^{\perp}$ e $E_1, \ldots, E_{n+1}$ um referencial ortonormal que diagonaliza o operador de Weingarten A de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ em p, isto é, $AE_i = \lambda_i E_i$, $i = 1, \ldots, n+1$, onde λ_i são os autovalores de A, temos pela equação de Gauss (2.4)

$$K(E_i, E_j) = \overline{K}(E_i, E_j) + \langle \alpha(E_i, E_i), \alpha(E_j, E_j) \rangle - \langle \alpha(E_i, E_j), \alpha(E_i, E_j) \rangle, \qquad (2.7)$$

mas

$$\langle \alpha(E_i, E_i), \eta \rangle = \langle AE_i, E_i \rangle = \lambda_i \langle E_i, E_i \rangle = \lambda_i,$$

logo, $\alpha(E_i, E_i) = \lambda_i \eta$.

De maneira análoga obtemos $\alpha(E_j, E_j) = \lambda_j \eta$ e $\alpha(E_i, E_j) = 0$.

Assim, da equação (2.7), segue que

$$K(E_i, E_j) = \overline{K}(E_i, E_j) + \lambda_i \lambda_j, \quad i, j = 1, \ldots, n+1. \qquad (2.8)$$

Como $\langle p, p \rangle = 1$, temos que

$$0 = X\langle p, p \rangle = 2\langle \nabla^{\circ}_X p, p \rangle,$$

o que implica $\langle X, p\rangle = 0, \forall\ X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{n+1})$. Assim, p é ortogonal ao de Sitter.

Considerando $N = -p$, e usando a fórmula de Weingarten (2.5), temos que para qualquer $v \in T_p\mathbb{S}_1^{n+1}$

$$Av = -\overline{\nabla}_v N = -\nabla^{\circ}_v N = \nabla^{\circ}_v p = v.$$

Desta maneira $\mathbb{S}_1^{n+1}$ é uma variedade totalmente umbilíca com $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n+1} = 1$.

Sendo a curvatura seccional de $\mathbb{L}^{n+2}$ constante e igual a zero, segue da equação (2.8) que $K(E_i, E_j) = 1$. Pela linearidade podemos estender para todos os campos tangente a $\mathbb{S}_1^{n+1}$.

Além disso, se $p \in \mathbb{S}_1^{n+1}$, temos

$$T_p(\mathbb{S}_1^{n+1}) = \{v \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle v, p\rangle = 0\}.$$

Observemos que $e_{n+2} = (0, \ldots, 0, 1)$ é um campo de vetores tipo-tempo unitário e globalmente definido em $\mathbb{L}^{n+2}$, determinando assim, uma orientação temporal em $\mathbb{L}^{n+2}$. Logo, dada uma hipersuperfície tipo-espaço no espaço de Sitter $x : M^n \to \mathbb{S}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ podemos escolher um único campo normal unitário de vetores tipo-tempo N ao longo de M^n apontando para o passado em $\mathbb{L}^{n+2}$, isto é $\langle N, e_{n+2}\rangle > 0$. Deste modo, podemos assumir que M^n é orientada por N. De agora em diante denotaremos por ∇°, $\overline{\nabla}$ e ∇ as conexões de Levi-Civita de $\mathbb{L}^{n+2}$, $\mathbb{S}_1^{n+1}$ e M^n, respectivamente. Então a fórmula de Gauss e Weingarten de M^n em $\mathbb{S}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} \nabla^{\circ}_V W &= \overline{\nabla}_V W - \langle V, W\rangle x \\ &= \nabla_V W - \langle AV, W\rangle N - \langle V, W\rangle x \end{aligned} \tag{2.9}$$

e

$$A(V) = -\ \nabla^{\circ}_V N = -\ \overline{\nabla}_V W, \tag{2.10}$$

para todos $V, W \in \mathfrak{X}(M)$.

De fato, para a fórmula de Weingarten observemos que como $\langle W, N\rangle = 0$, temos pela compatibilidade da conexão, que

$$0 = V\langle W, N\rangle = \langle \nabla^{\circ}_V W, N\rangle + \langle W, \nabla^{\circ}_V N\rangle \ \Rightarrow\ \langle \nabla^{\circ}_V W, N\rangle = -\ \langle W, \nabla^{\circ}_V N\rangle.$$

Por outro lado

$$\langle AV, W\rangle = \langle \alpha(V,W), N\rangle = \langle \nabla^\circ_V W - \nabla_V W, N\rangle = \langle \nabla^\circ_V W, N\rangle = -\ \langle W, \nabla^\circ_V N\rangle,$$

como a métrica é não degenerada, segue que $AV = -\ \nabla^\circ_V N$, analogamente mostramos que $AV = -\ \overline{\nabla}_V N$.

Portanto

$$A(V) = -\ \nabla^\circ_V N = -\ \overline{\nabla}_V N.$$

Para a fórmula de Gauss, observemos que, dado $p \in M$, podemos decompor o espaço tangente do Minkowski como

$$T_p\mathbb{L}^{n+2} = T_pM^n \oplus span\{x\} \oplus span\{N\}.$$

Logo para campos tangente a M, temos

$$\nabla^\circ_V W = \nabla_V W + cN + dx, \quad c, d \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Fazendo produto escalar com N na expressão (2.11) obtemos

$$\langle \nabla^\circ_V W, N\rangle = \langle \nabla_V W, N\rangle + \langle cN, N\rangle + \langle dx, N\rangle.$$

Mas pela fórmula de Weingarten (2.10)

$$0 = V\langle W, N\rangle = \langle \nabla^\circ_V W, N\rangle + \langle W, \nabla^\circ_V N\rangle \;\Rightarrow\; \langle \nabla^\circ_V W, N\rangle = \langle W, AV\rangle.$$

Como

$$\langle \nabla_V W, N\rangle = \langle dx, N\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle cN, N\rangle = c\ \langle N, N\rangle = -\ c$$

temos que

$$c = -\ \langle AV, W\rangle.$$

Com um raciocínio análogo encontramos $d = -\ \langle V, W\rangle$ e portanto pela expressão (2.11) concluímos que

$$\nabla^\circ_V W = \nabla_V W - \langle AV, W\rangle N - \langle V, W\rangle x.$$

Agora, seja $a \in \mathbb{L}^{n+2}$, $a \neq 0$ um vetor nulo na metade passado do cone de nulidade com vértice na origem, isto é, $\langle a, a\rangle = 0$ *e* $\langle a, e_{n+2}\rangle > 0$, onde $e_{n+2} = (0, \ldots, 0, 1)$.

Então a região aberta do de Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$ dada por,

$$\mathcal{H}^{n+1} = \{x \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle x, a\rangle > 0\},$$

é chamada *Steady State space.*

Observe que $\mathcal{H}^{n+1}$ é estendível, uma vez que $\mathcal{H}^{n+1}$ é isométrica a um aberto de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ e por isso é não-completo (em verdade, $\mathcal{H}^{n+1}$ é apenas uma metade do de Sitter). A sua fronteira, como um subconjunto de $\mathbb{S}_1^{n+1}$, é a hipersuperfície nula

$$\{x \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle x, a\rangle = 0\},$$

cuja a topologia é equivalente a de $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$ (cf. [19], pág. 126).

Consideremos, em $\mathcal{H}^{n+1}$ o seguinte campo

$$\mathcal{K} = a - \langle x, a\rangle\, x,$$

e mostremos a,

Proposição 2.14 *O campo de vetores $\mathcal{K}$ definido acima é um campo tipo-tempo, conforme e fechado.*

Demonstração. Primeiramente vejamos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{K}(x), x\rangle &= \langle a - \langle a, x\rangle\, x, x\rangle = \langle a, x\rangle - \langle a, x\rangle \langle x, x\rangle \\ &= \langle a, x\rangle - \langle a, x\rangle = 0. \end{aligned}$$

Logo $\mathcal{K} \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}^{n+1})$.

Para verificar que é tipo-tempo, note que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{K}(x), \mathcal{K}(x)\rangle &= \langle a - \langle x, a\rangle\, x, a - \langle x, a\rangle\, x\rangle \\ &= \langle a, a\rangle - 2\,\langle a, \langle x, a\rangle\, x\rangle + \langle x, a\rangle^2 \langle x, x\rangle \\ &= -\ 2\,\langle a, x\rangle \langle x, a\rangle + \langle x, a\rangle^2 \langle x, x\rangle \\ &= -\ 2\,\langle x, a\rangle^2 + \langle x, a\rangle^2 \langle x, x\rangle \\ &= \langle x, a\rangle^2 (\langle x, x\rangle - 2) \\ &= \langle x, a\rangle^2 (1 - 2) \\ &= -\ \langle x, a\rangle^2 . \end{aligned}$$

Como $\langle x, a\rangle > 0$ segue que $\langle x, a\rangle^2 > 0$, logo $-\langle x, a\rangle < 0$. Portanto $\langle \mathcal{K}(x), \mathcal{K}(x)\rangle < 0$, e assim $\mathcal{K}$ é um campo tipo-tempo.

Por outro lado, denotando $\overline{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\mathcal{H}^{n+1}$, temos pela fórmula de Gauss (2.9)

$$\nabla^{\circ}_{V}\mathcal{K} = \overline{\nabla}_{V}\mathcal{K} - \langle V, \mathcal{K}\rangle\, x,$$

dai,

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{V}\mathcal{K} &= \nabla^{\circ}_{V}(a - \langle x, a\rangle\, x) + \langle V, a - \langle x, a\rangle\, x\rangle\, x \\
&= \nabla^{\circ}_{V}a - \nabla^{\circ}_{V}(\langle x, a\rangle\, x) + \langle V, a\rangle\, x - \langle x, a\rangle \langle V, x\rangle\, x \\
&= -\langle x, a\rangle\, \nabla^{\circ}_{V}x - V\langle x, a\rangle\, x + \langle V, a\rangle\, x - \langle x, a\rangle \langle V, x\rangle\, x \\
&= -\langle x, a\rangle\, V - \left\langle \overline{\nabla}_{V}a, x\right\rangle x - \left\langle a, \overline{\nabla}_{V}x\right\rangle x + \langle V, a\rangle\, x - \langle x, a\rangle \langle V, x\rangle\, x \\
&= -\langle x, a\rangle\, V - \langle \nabla^{\circ}_{V}a + \langle V, a\rangle\, x, x\rangle\, x - \langle a, \nabla^{\circ}_{V}x + \langle V, x\rangle\, x\rangle\, x \\
&\quad +\ \langle V, a\rangle\, x - \langle x, a\rangle \langle V, x\rangle\, x.
\end{aligned}$$

Como $\nabla^{\circ}_{V}a = 0$ e $\nabla^{\circ}_{V}x = V$, temos

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{V}\mathcal{K} &= -\langle x, a\rangle\, V - \langle \langle V, a\rangle\, x, x\rangle\, x - \langle a, V + \langle V, x\rangle\, x\rangle\, x \\
&\quad +\ \langle V, a\rangle\, x - \langle x, a\rangle \langle V, x\rangle\, x \\
&= -\langle x, a\rangle\, V - \langle V, a\rangle \langle x, x\rangle\, x - \langle a, V\rangle\, x - \langle a, \langle V, x\rangle\, x\rangle\, x \\
&\quad +\ \langle V, a\rangle\, x - \langle x, a\rangle \langle V, x\rangle\, x \\
&= -\langle x, a\rangle\, V - \langle V, a\rangle\, x - \langle V, x\rangle \langle a, x\rangle\, x - \langle x, a\rangle \langle V, x\rangle\, x.
\end{aligned}$$

Então para todo $W \in \mathcal{H}^{n+1}$, temos

$$\left\langle \overline{\nabla}_{V}\mathcal{K}, W\right\rangle = \langle -\langle x, a\rangle\, V - \langle V, a\rangle\, x - \langle V, x\rangle \langle a, x\rangle\, x - \langle x, a\rangle \langle V, x\rangle\, x, W\rangle$$

logo,

$$\left\langle \overline{\nabla}_{V}\mathcal{K}, W\right\rangle = \langle -\langle x, a\rangle\, V, W\rangle\, .$$

Como $W \in \mathcal{H}^{n+1}$ foi escolhido arbitrariamente, segue que

$$\overline{\nabla}_{V}\mathcal{K} = -\langle x, a\rangle\, V$$

Portanto $\mathcal{K}$ é um campo conforme e fechado com fator conforme $-\langle x, a\rangle$. ■

A próxima proposição é devida a Montiel (cf. [25], Proposição 1). Ela nos garante que Steady State space pode ser folheado por hipersuperfícies totalmente umbílicas isométricas ao $\mathbb{R}^n$.

Proposição 2.15 *Seja $\mathcal{H}^{n+1}$, $n \geq 1$ uma variedade de Lorentz dotada de um campo tipo-tempo $\mathcal{K}$ conforme e fechado. Então temos que*

(i) A distribuição n-dimensional $\mathcal{D}$ definida em $\mathcal{H}^{n+1}$ por

$$p \in \mathcal{H}^{n+1} \mapsto \mathcal{D}(p) = \{v \in T_p\mathcal{H}^{n+1} / \langle \mathcal{K}(p), v \rangle = 0\}$$

determina uma folheação $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ tipo-espaço de codimensão 1, a qual é orientada por $\mathcal{K}$. Além disso, as funções $\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle$, $div\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}\phi$ são constantes sobre as folhas conexas de $\mathcal{F}(\mathcal{K})$.

(ii) O campo unitário tipo tempo definido por $\nu = \dfrac{\mathcal{K}}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle}}$ em $\mathcal{H}^{n+1}$ satisfaz:

$$\overline{\nabla}_\nu \nu = 0 \quad e \quad \overline{\nabla}_u \nu = \frac{\phi}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle}} u \quad se \quad \langle \nu, u \rangle = 0.$$

Então, o fluxo do campo ν é um fluxo geodésico normalizado que aplica as folhas de $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ homotéticamente em folhas de $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ e cada folha de $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ é totalmente umbílica e tem curvatura média constante $H = \dfrac{-\phi}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle}}$.

Demonstração. Aqui, denotaremos por $\overline{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\mathcal{H}^{n+1}$.

(i) Primeiramente observe que dado um referencial ortonormal $E_1, \ldots, E_{n+1}$ em uma vizinhança de $p \in \mathcal{H}^{n+1}$ de $\mathbb{L}^{n+2}$, temos por definição

$$div\mathcal{K} = \sum_{i=1}^{n+1} \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} \mathcal{K}, E_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \langle \phi E_i, E_i \rangle = \phi \sum_{i=1}^{n+1} \langle E_i, E_i \rangle = (n+1)\phi,$$

daí,

$$\phi = \frac{1}{n+1} div\mathcal{K}.$$

Também podemos calcular o gradiente de $\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle$, isto é para qualquer $V \in \mathcal{H}^{n+1}$, temos

$$\left\langle \overline{\nabla} \langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle, V \right\rangle = V(\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle) = 2 \left\langle \overline{\nabla}_V \mathcal{K}, \mathcal{K} \right\rangle = 2\phi \langle V, \mathcal{K} \rangle,$$

logo, $\left\langle \overline{\nabla} \langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle - 2\phi\mathcal{K}, V \right\rangle = 0$, e como a métrica é não degenerada, segue que

$$\overline{\nabla} \langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle = 2\phi\mathcal{K},$$

ou seja $\overline{\nabla}\langle\mathcal{K},\mathcal{K}\rangle = \dfrac{2}{n+1}div(\mathcal{K})\mathcal{K}$.

Assim $\langle\mathcal{K},\mathcal{K}\rangle$ é constante sobre as folhas conexas de $\mathcal{F}(\mathcal{K})$.

Calculando agora o Hessiano de $\langle\mathcal{K},\mathcal{K}\rangle$, temos por definição de Hessiano,

$$(Hess\langle\mathcal{K},\mathcal{K}\rangle)(u,v) = \langle(Hess\langle\mathcal{K},\mathcal{K}\rangle)u,v\rangle = \left\langle\overline{\nabla}_u(\overline{\nabla}\langle\mathcal{K},\mathcal{K}\rangle),v\right\rangle,$$

para todo $u,v \in T_p\mathcal{H}^{n+1}$, logo,

$$\begin{aligned}
(Hess\langle\mathcal{K},\mathcal{K}\rangle)(u,v) &= \left\langle\overline{\nabla}_u(2\phi\mathcal{K}),v\right\rangle \\
&= 2\left\langle\overline{\nabla}_u(\phi\mathcal{K}),v\right\rangle \\
&= 2\left\langle\phi\overline{\nabla}_u(\mathcal{K}) + u(\phi)\mathcal{K},v\right\rangle \\
&= 2\phi\left\langle\overline{\nabla}_u(\mathcal{K}),v\right\rangle + u(\phi)\left\langle\mathcal{K},v\right\rangle \\
&= 2\phi^2\left\langle u,v\right\rangle + u(\phi)\left\langle\mathcal{K},v\right\rangle.
\end{aligned}$$

Sendo o Hessiano é um operador simétrico, temos

$$(Hess\langle\mathcal{K},\mathcal{K}\rangle)(u,v) = (Hess\langle\mathcal{K},\mathcal{K}\rangle)(v,u),$$

daí,

$$2\phi^2\left\langle u,v\right\rangle + u(\phi)\left\langle\mathcal{K},v\right\rangle = 2\phi^2\left\langle v,u\right\rangle + v(\phi)\left\langle\mathcal{K},u\right\rangle,$$

pois, $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$. Logo,

$$u(\phi)\left\langle\mathcal{K},v\right\rangle = v(\phi)\left\langle\mathcal{K},u\right\rangle, \tag{2.12}$$

fazendo $v = \mathcal{K}$,

$$u(\phi)\left\langle\mathcal{K},\mathcal{K}\right\rangle = \mathcal{K}(\phi)\left\langle\mathcal{K},u\right\rangle u(\phi) = \frac{\mathcal{K}(\phi)}{|\mathcal{K}|^2}\left\langle\mathcal{K},u\right\rangle.$$

Mas,

$$\left\langle\overline{\nabla}(\phi),u\right\rangle = u(\phi) = \frac{\mathcal{K}(\phi)}{\langle\mathcal{K},\mathcal{K}\rangle}\left\langle\mathcal{K},u\right\rangle = \left\langle\frac{\mathcal{K}(\phi)}{\langle\mathcal{K},\mathcal{K}\rangle}\mathcal{K},u\right\rangle.$$

Como $u \in T_p\mathcal{H}^{n+1}$ é qualquer e a métrica é não degenerada, segue que

$$\overline{\nabla}(\phi) = \frac{\mathcal{K}(\phi)}{\langle\mathcal{K},\mathcal{K}\rangle}\mathcal{K} = -(\nu\phi)\nu,$$

pois $\nu = \dfrac{\mathcal{K}}{\sqrt{-\langle\mathcal{K},\mathcal{K}\rangle}}$.

Portanto, $\phi = \dfrac{1}{n+1} div\mathcal{K}$ é constante sobre as folhas conexas de $\mathcal{F}(\mathcal{K})$.

Podemos ver a equação (2.12) da seguinte maneira:

$$\langle\overline{\nabla}\phi, u\rangle\langle\mathcal{K}, v\rangle = \langle\overline{\nabla}\phi, v\rangle\langle\mathcal{K}, u\rangle\,. \tag{2.13}$$

Derivando covariantemente a equação acima em relação a w, temos

$$w(\langle\overline{\nabla}\phi, u\rangle\langle\mathcal{K}, v\rangle) = w(\langle\overline{\nabla}\phi, v\rangle\langle\mathcal{K}, u\rangle). \tag{2.14}$$

Expandindo o lado esquerdo da equação (2.14) e usando o fato de $\mathcal{K}$ ser conforme fechado, temos

$$\begin{aligned} w(\langle\overline{\nabla}\phi, u\rangle\langle\mathcal{K}, v\rangle) &= \big(\langle\overline{\nabla}_w(\overline{\nabla}\phi), u\rangle + \langle\nabla\phi, \overline{\nabla}_w u\rangle\big)\langle\mathcal{K}, v\rangle \\ &\quad + \langle\overline{\nabla}\phi, u\rangle\big(\langle\overline{\nabla}_w\mathcal{K}, v\rangle + \langle\mathcal{K}, \overline{\nabla}_w v\rangle\big) \\ &= \big((Hess\phi)(w, u) + \langle\overline{\nabla}\phi, \overline{\nabla}_w u\rangle\big)\langle\mathcal{K}, v\rangle \\ &\quad + \langle\overline{\nabla}\phi, u\rangle\big(\langle\phi w, v\rangle + \langle\mathcal{K}, \overline{\nabla}_w v\rangle\big)\,. \end{aligned}$$

Substituindo a expressão de $\overline{\nabla}\phi$ obtemos,

$$\begin{aligned} w(\langle\overline{\nabla}\phi, u\rangle\langle\mathcal{K}, v\rangle) &= \langle\mathcal{K}, v\rangle(Hess\phi)(w, u) + \langle\mathcal{K}, v\rangle\langle\frac{\mathcal{K}(\phi)}{\langle\mathcal{K}, \mathcal{K}\rangle}\mathcal{K}, \overline{\nabla}_w u\rangle \\ &\quad + \phi(u(\phi))\langle w, v\rangle + \langle\frac{\mathcal{K}(\phi)}{\langle\mathcal{K}, \mathcal{K}\rangle}\mathcal{K}, u\rangle\langle\mathcal{K}, \overline{\nabla}_w v\rangle \\ &= \langle\mathcal{K}, v\rangle(Hess\phi)(w, u) + \frac{\mathcal{K}(\phi)}{\langle\mathcal{K}, \mathcal{K}\rangle}\langle\mathcal{K}, v\rangle\langle\mathcal{K}, \overline{\nabla}_w u\rangle \\ &\quad + \phi(u(\phi))\langle w, v\rangle + \frac{\mathcal{K}(\phi)}{\langle\mathcal{K}, \mathcal{K}\rangle}\langle\mathcal{K}, u\rangle\langle\mathcal{K}, \nabla_w v\rangle. \end{aligned} \tag{2.15}$$

De maneira análoga, o lado direito da equação (2.14) é dado por

$$\begin{aligned} w(\langle\overline{\nabla}\phi, v\rangle\langle\mathcal{K}, u\rangle) &= \langle\mathcal{K}, u\rangle(Hess\phi)(w, v) + \frac{\mathcal{K}(\phi)}{\langle\mathcal{K}, \mathcal{K}\rangle}\langle\mathcal{K}, u\rangle\langle\mathcal{K}, \overline{\nabla}_w v\rangle \\ &\quad + \phi(v(\phi))\langle w, u\rangle + \frac{\mathcal{K}(\phi)}{\langle\mathcal{K}, \mathcal{K}\rangle}\langle\mathcal{K}, v\rangle\langle\mathcal{K}, \overline{\nabla}_w u\rangle. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Usando (2.15) e (2.16) na igualdade (2.14), temos

$$\langle\mathcal{K}, v\rangle(Hess\phi)(w, u) + \phi(u(\phi))\langle w, v\rangle = \langle\mathcal{K}, u\rangle(Hess\phi)(w, v) + \phi(v(\phi))\langle w, u\rangle,$$

para quaisquer u, v, w tangentes a $\mathcal{H}^{n+1}$.

Tomando $v = w = \mathcal{K}$ e u ortogonal a $\mathcal{K}$ na equação acima, deduzimos que

$$(Hess\phi)(u, \mathcal{K}) = 0,$$

uma vez que $\langle \overline{\nabla}\phi, u\rangle = \dfrac{\mathcal{K}(\phi)}{\langle \mathcal{K}, \mathcal{K}\rangle}\langle \mathcal{K}, u\rangle = 0.$

Mas pelas definições do gradiente e Hessiano,

$$u(\mathcal{K}(\phi)) = (Hess\phi)(u, \mathcal{K}) + (\overline{\nabla}_u \mathcal{K}) = (Hess\phi)(u, \mathcal{K}) + \frac{1}{2}u\phi^2 = \frac{1}{2}u\phi^2,$$

mostramos assim, que $\mathcal{K}(\phi)$ é constante em cada folha conexa de $\mathcal{F}(\mathcal{K})$.

De acordo com a Definição (1.37), mostremos que a distribuição é involutiva. Com efeito, defina

$$\mathcal{D}(p) = \{v \in T_p\mathcal{H}^{n+1}; \langle \mathcal{K}(p), v\rangle = 0\},$$

e considere X *e* Y duas seções suaves em $\mathcal{D}$ definidos em uma vizinhança aberta $U \subset \mathcal{H}^{n+1}$. Seja $p \in U$ tal que $X_p, Y_p \in \mathcal{D}(p)$. Devemos mostrar que o colchete de Lie é uma seção suave de $\mathcal{D}$.

De fato,

$$\begin{aligned}\langle [X_p, Y_p], \mathcal{K}(p)\rangle &= \left\langle \overline{\nabla}_X Y(p) - \overline{\nabla}_Y X(p), \mathcal{K}(p)\right\rangle \\ &= \left\langle \overline{\nabla}_X Y(p), \mathcal{K}(p)\right\rangle - \left\langle \overline{\nabla}_Y X(p), \mathcal{K}(p)\right\rangle,\end{aligned}$$

como $X_p, Y_p \in \mathcal{D}(p)$, temos que $\langle X_p, \mathcal{K}(p)\rangle = \langle Y_p, \mathcal{K}(p)\rangle = 0$, logo pela compatibilidade,

$$0 = X_p \langle Y_p, \mathcal{K}(p)\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_X Y, \mathcal{K}\right\rangle(p) + \left\langle Y, \overline{\nabla}_X \mathcal{K}\right\rangle(p)$$

e

$$0 = Y_p \langle X_p, \mathcal{K}(p)\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_Y X, \mathcal{K}\right\rangle(p) + \left\langle X, \overline{\nabla}_Y \mathcal{K}\right\rangle(p),$$

daí,

$$\begin{aligned}\langle [X_p, Y_p], \mathcal{K}(p)\rangle &= \left\langle Y(p), \overline{\nabla}_X \mathcal{K}(p)\right\rangle + \left\langle X(p), \overline{\nabla}_Y \mathcal{K}(p)\right\rangle \\ &= -\phi\langle Y(p), X(p)\rangle + \phi\langle X(p), Y(p)\rangle = 0,\end{aligned}$$

logo $[X_p, Y_p] \in \mathcal{D}(p)$.

Como $p \in U$ é arbitrário, segue que $\mathcal{D}$ é involutivo. Portanto pelo *Teorema de Frobenius* (cf. [19], Teorema 19.21), $\mathcal{D}$ é completamente integrável, isto é, existe uma (única) folheação $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ de dimensão n e de classe C^∞ em $\mathcal{H}^{n+1}$ tal que $T\mathcal{F}(\mathcal{K}) = \mathcal{D}$, a qual é orientada por K (pela própria definição de $\mathcal{D}$) e é tipo-espaço (pois K é tipo-tempo).

(ii) Note que, sendo $\langle \nu, \nu \rangle = -1$ temos,

$$0 = \nu\langle \nu, \nu \rangle = 2\langle \overline{\nabla}_\nu \nu, \nu \rangle = 2\left\langle \overline{\nabla}_\nu \nu, \frac{\mathcal{K}}{\sqrt{-|\mathcal{K}|^2}} \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{-|\mathcal{K}|^2}} \left\langle \overline{\nabla}_\nu \nu, \mathcal{K} \right\rangle,$$

logo $\left\langle \overline{\nabla}_\nu \nu, \mathcal{K} \right\rangle = 0$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_\nu \nu &= \overline{\nabla}_\nu \left(\frac{\mathcal{K}}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle}} \right) = \frac{1}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle}} \overline{\nabla}_\nu \mathcal{K} + \nu \left(\frac{1}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle}} \right) \mathcal{K} \\
&= \frac{\phi}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle}} \nu + \nu \left(\frac{1}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle}} \right) \mathcal{K} \\
&= \frac{\phi}{\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle} \mathcal{K} + \nu \left(\frac{1}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle}} \right) \mathcal{K} \\
&= \left(\frac{\phi}{\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle} + \nu \left(\frac{1}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle}} \right) \right) \mathcal{K}. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \overline{\nabla}_\nu \nu, \mathcal{K} \rangle = \left\langle \mathcal{K}, \left(\frac{\phi}{\mathcal{K}} + \nu \left(\frac{1}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle}} \right) \right) \mathcal{K} \right\rangle \\
&= \left(\frac{\phi}{\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle} + \nu \left(\frac{1}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle}} \right) \right) \langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle.
\end{aligned}$$

Como $\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle \neq 0$, temos que $\dfrac{\phi}{\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle} + \nu \left(\dfrac{1}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle}} \right) = 0$.

Por (2.17), segue que $\overline{\nabla}_\nu \nu = 0$.

Novamente usando o fato de $\langle \nu, \nu \rangle = -1$, temos

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_u \nu &= \overline{\nabla}_u \left(\frac{\mathcal{K}}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle}} \right) \overline{\nabla}_u \mathcal{K} + u \left(\frac{1}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle}} \right) \mathcal{K} \\
&= \frac{\phi}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle}} u + u \left(\frac{1}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle}} \right) \mathcal{K}. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Por outro lado, $0 = u\langle \nu, \nu \rangle = 2\langle \overline{\nabla}_u \nu, \nu \rangle$ e $\langle u, \nu \rangle = 0$, assim de

$$\langle \overline{\nabla}_u \nu, \nu \rangle = \frac{\phi}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle}} \langle u, \nu \rangle + u \left(\frac{1}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle}} \right) \langle \mathcal{K}, \nu \rangle,$$

temos

$$u \left(\frac{1}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle}} \right) \langle \mathcal{K}, \nu \rangle = 0.$$

Como $\langle \mathcal{K}, \nu \rangle \neq 0$ segue que $u \left(\frac{1}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle}} \right) = 0$, e portanto da equação (2.18) segue que $\overline{\nabla}_u \nu = \frac{\phi}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle}} u$.

Como $Au = -\overline{\nabla}_u \nu$ segue que cada folha de $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ é totalmente umbílica com

$$\lambda_i = \frac{\phi}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle}},$$

uma vez que $AE_i = \lambda_i E_i$.

Portanto, como $\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle$ e $\mathcal{K}\phi$ constantes em cada folha conexa de $\mathcal{F}(\mathcal{K})$, o fluxo de ν é um fluxo geodésico normalizado tipo-tempo o qual leva homotéticamente folhas de $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ em folhas de $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ e cada folha de $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ tem curvatura média constante

$$H = -\frac{\phi}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle}}.$$

■

Além disso, as folhas de $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ são hiperplanos horizontais

$$L^n(\tau) = \{x \in \mathbb{S}_1^{n+1};\ \langle x, a \rangle = \tau\}, \quad \tau \in (0, +\infty),$$

que são hipersuperfícies totalmente umbílicas de $\mathcal{H}^{n+1}$ isométricas ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, e possui curvatura média constante igual a um com respeito ao campo unitário, normal e que aponta para o passado

$$N_\tau(x) = \frac{1}{\tau} a - x, \quad x \in L^n(\tau).$$

De fato, pelo item (ii) da Proposição (2.15), temos

$$N_\tau(x) = \frac{\mathcal{K}(x)}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}(x), \mathcal{K}(x) \rangle}},$$

onde $\mathcal{K}(x)$ é um campo conforme e fechado.

Daí, pela definição de $\mathcal{K}(x)$,

$$\begin{aligned} N_\tau(x) &= \frac{a - \langle x, a\rangle x}{\sqrt{-\langle a - \langle x, a\rangle x, a - \langle x, a\rangle x\rangle}} \\ &= \frac{a - \langle x, a\rangle x}{\sqrt{-\langle a, a\rangle + 2\langle a, \langle x, a\rangle x\rangle - \langle x, a\rangle^2\langle x, x\rangle}} \\ &= \frac{a - \tau x}{\tau} \\ &= \frac{1}{\tau}a - x, \ x \in L^n(\tau), \end{aligned}$$

onde foi usado que a é um vetor nulo, $\langle x, a\rangle = \tau$ e $x \in \mathbb{S}_1^{n+1}$.

Agora, pela fórmula de Weingarten, temos que para todo $v \in T_p\mathcal{H}^{n+1}$,

$$Av = -\nabla^\circ_v N_\tau = -\nabla^\circ_v\left(\frac{1}{\tau}a - x\right) = -\frac{1}{\tau}\nabla^\circ_v a + \nabla^\circ_v x = v.$$

Assim, $L^n(\tau)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathcal{H}^{n+1}$. Por outro lado, uma vez que $\phi = -\langle x, a\rangle = -\tau$, temos pelo item (ii) da Proposição (2.15), que a curvatura média de $L^n(\tau)$ é dada por

$$H = \frac{-\phi}{\sqrt{-\langle \mathcal{K}, \mathcal{K}\rangle}} = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2}} = 1.$$

Para concluir o afirmado, que as folhas são isométrica ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ (cf. [4], seção 2), faremos a seguinte proposição.

Proposição 2.16 *As folhas $L^n(\tau)$ de $\mathcal{H}^{n+1}$ são isométricas ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Definamos a seguinte aplicação $\psi_\tau : L^n(\tau) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\psi_\tau(x) = x - \frac{\tau + \langle a, e_0\rangle\langle x, e_0\rangle}{\langle a, e_0\rangle^2}a - \frac{\tau}{\langle a, e_0\rangle}e_0,$$

onde $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ é um vetor tipo-luz tal que $\langle a, e_0\rangle > 0$ e $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Observemos que ψ_τ é diferenciável e mostremos que ψ_τ é um difeomorfismo, para isto definamos a candidata a inversa $\psi_\tau^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow L^n(\tau)$ dada por

$$\psi_\tau^{-1}(x) = x + \frac{\tau}{\langle a, e_0\rangle}e_0 + \frac{\langle a, e_0\rangle^2(1 - \langle x, x\rangle) + \tau^2}{2\tau\langle a, e_0\rangle^2}a.$$

Note que ψ_τ^{-1} é diferenciável e esta bem definida uma vez que $\langle\psi_\tau^{-1}(x), a\rangle = \tau$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e provemos então que $\psi_\tau \circ \psi_\tau^{-1} = \psi_\tau^{-1} \circ \psi_\tau = id$.

De fato, para a primeira parte observemos que para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\langle \psi_\tau^{-1}(x), e_0 \rangle &= \left\langle x + \frac{\tau}{\langle a, e_0 \rangle} e_0 + \frac{\langle a, e_0 \rangle^2 (1 - \langle x, x \rangle) + \tau^2}{2\tau \langle a, e_0 \rangle^2} a, e_0 \right\rangle \\
&= \langle x, e_0 \rangle + \frac{\tau}{\langle a, e_0 \rangle} \langle e_0, e_0 \rangle + \left(\frac{\langle a, e_0 \rangle^2 (1 - \langle x, x \rangle) + \tau^2}{2\tau \langle a, e_0 \rangle^2} a \right) \langle a, e_0 \rangle \\
&= -\frac{\tau}{\langle a, e_0 \rangle} + \frac{\langle a, e_0 \rangle^2 (1 - \langle x, x \rangle) + \tau^2}{2\tau \langle a, e_0 \rangle} a \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

e também que

$$\frac{\tau + \langle a, e_0 \rangle \langle \psi_\tau^{-1}(x), e_0 \rangle}{\langle a, e_0 \rangle^2} a = \frac{\langle a, e_0 \rangle^2 (1 - \langle x, x \rangle) + \tau^2}{2\tau \langle a, e_0 \rangle} a. \qquad (2.20)$$

Então de (2.19) e (2.20) temos

$$\begin{aligned}
\psi_\tau(\psi_\tau^{-1}(x)) &= \psi_\tau^{-1}(x) - \left(\frac{\tau + \langle a, e_0 \rangle \langle \psi_\tau^{-1}(x), e_0 \rangle}{\langle a, e_0 \rangle^2} a \right) - \frac{\tau}{\langle a, e_0 \rangle} e_0 \\
&= x + \frac{\tau}{\langle a, e_0 \rangle} e_0 + \frac{\langle a, e_0 \rangle^2 (1 - \langle x, x \rangle) + \tau^2}{2\tau \langle a, e_0 \rangle^2} a \\
&\quad - \frac{\langle a, e_0 \rangle^2 (1 - \langle x, x \rangle) + \tau^2}{2\tau \langle a, e_0 \rangle^2} a - \frac{\tau}{\langle a, e_0 \rangle} e_0 \\
&= x.
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Para a outra parte, vejamos que

$$\begin{aligned}
\langle \psi_\tau(x), \psi_\tau(x) \rangle &= \langle x, x \rangle - 2 \left(\frac{\tau + \langle a, e_0 \rangle \langle x, e_0 \rangle}{\langle a, e_0 \rangle^2} \right) \langle x, a \rangle - \frac{2\tau \langle x, e_0 \rangle}{\langle a, e_0 \rangle} \\
&\quad + \left(\frac{\tau + \langle a, e_0 \rangle \langle x, e_0 \rangle}{\langle a, e_0 \rangle^2} \right)^2 \langle a, a \rangle + \frac{2\tau}{\langle a, e_0 \rangle} \left(\frac{\tau + \langle a, e_0 \rangle \langle x, e_0 \rangle}{\langle a, e_0 \rangle^2} \right) \langle a, e_0 \rangle \\
&\quad + \frac{\tau^2}{\langle a, e_0 \rangle} \langle e_0, e_0 \rangle \qquad (2.21) \\
&= 1 - \frac{2\tau \langle x, e_0 \rangle}{\langle a, e_0 \rangle} - \frac{\tau^2}{\langle a, e_0 \rangle^2},
\end{aligned}$$

e que

$$\frac{\langle a, e_0 \rangle^2 (1 - \langle \psi_\tau(x), \psi_\tau(x) \rangle) + \tau^2}{2\tau \langle a, e_0 \rangle} a = \frac{\tau + \langle x, e_0 \rangle \langle a, e_0 \rangle}{\langle a, e_0 \rangle^2} a. \qquad (2.22)$$

Então de (2.21) e (2.22) obtemos

$$\begin{aligned}
\psi_\tau^{-1}(\psi_\tau(x)) &= \psi_\tau(x) + \frac{\tau}{\langle a, e_0\rangle} e_0 + \frac{\langle a, e_0\rangle^2(1 - \langle \psi_\tau(x), \psi_\tau(x)\rangle) + \tau^2}{2\tau\langle a, e_0\rangle^2} a \\
&= x - \frac{\tau + \langle a, e_0\rangle\langle x, e_0\rangle}{\langle a, e_0\rangle^2} a - \frac{\tau}{\langle a, e_0\rangle} e_0 \\
&\quad + \frac{\tau}{\langle a, e_0\rangle} e_0 + \frac{\langle a, e_0\rangle^2(1 - \langle \psi_\tau(x), \psi_\tau(x)\rangle) + \tau^2}{2\tau\langle a, e_0\rangle^2} a \\
&= x - \frac{\tau + \langle a, e_0\rangle\langle x, e_0\rangle}{\langle a, e_0\rangle^2} a + \frac{\tau + \langle x, e_0\rangle\langle a, e_0\rangle}{\langle a, e_0\rangle^2} a \\
&= x.
\end{aligned}$$

Portanto ψ_τ é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável, isto é, um difeomorfismo.

Mostremos agora que ψ_τ preserva a métrica. Dado $v \in T_pL^n(\tau)$, existe uma curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to L^n(\tau)$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Então

$$\begin{aligned}
d(\psi_\tau)_p(v) &= \frac{d}{dt}(\psi \circ \alpha)(t)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\alpha(t) - \frac{\tau + \langle a, e_0\rangle\langle \alpha(t), e_0\rangle}{\langle a, e_0\rangle^2} a - \frac{\tau}{\langle a, e_0\rangle} e_0\right)\Bigg|_{t=0} \\
&= v - \frac{\tau + \langle a, e_0\rangle\langle v, e_0\rangle}{\langle a, e_0\rangle^2} a,
\end{aligned}$$

logo

$$\langle d(\psi_\tau)_p(v), d(\psi_\tau)_p(v)\rangle = \left\langle v - \frac{\tau + \langle a, e_0\rangle\langle v, e_0\rangle}{\langle a, e_0\rangle^2} a, v - \frac{\tau + \langle a, e_0\rangle\langle v, e_0\rangle}{\langle a, e_0\rangle^2} a \right\rangle = \langle v, v\rangle,$$

uma vez que $\langle a, a\rangle = \langle v, a\rangle = 0$.

Logo pela identidade de polarização obtemos que

$$\langle d(\psi_\tau)_p(u), d(\psi_\tau)_p(v)\rangle = \langle u, v\rangle,$$

para quaisquer $u, v \in T_pL^n(\tau)$ de onde concluímos que ψ_τ é uma isometria. ∎

No contexto do produto warped Lorentziano, tomando $\tau = \exp(t)$, podemos considerar $\mathcal{H}^{n+1}$ como o $GRW - \mathbb{R} \times_{\exp(t)} \mathbb{R}^n$, que corresponde ao modelo steady state do universo proposto por Bondi, Gold e Hoyle (cf. [18], pág. 126). Mais precisamente,

Proposição 2.17 *O Steady State space $\mathcal{H}^{n+1}$ é isométrico ao $GRW - \mathbb{R} \times_{\exp(t)} \mathbb{R}^n$ que é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ munido da métrica Lorentziana*

$$\langle , \rangle = -\, dt^2 + e^{2t}(dx_1^2 + \ldots + dx_n^2).$$

Demonstração. De fato sejam $b \in \mathbb{L}^{n+2}$ um vetor nulo tal que $\langle a, b\rangle = 1$ e a seguinte aplicação $\phi : \mathcal{H}^{n+1} \longrightarrow -\mathbb{R} \times_{\exp(t)} \mathbb{R}^n$ dada por

$$\phi(p) = \left(\log(\langle p, a\rangle), \frac{p - \langle p, a\rangle b - \langle p, b\rangle a}{\langle p, a\rangle}\right).$$

Observe que ϕ é diferenciável e que dado $v \in T_p\mathcal{H}^{n+1}$ existe uma curva diferenciável $\alpha : I \to \mathcal{H}^{n+1}$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Então

$$\begin{aligned} d\phi_p(v) &= \frac{d}{dt}(\phi \circ \alpha)(t)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\log(\langle \alpha(t), a\rangle), \frac{\alpha(t) - \langle \alpha(t), a\rangle b - \langle \alpha(t), b\rangle a}{\langle \alpha(t), a\rangle}\right)\Big|_{t=0} \\ &= \left(\frac{d}{dt}\log(\langle \alpha(t), a\rangle)\Big|_{t=0}, \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha(t) - \langle \alpha(t), a\rangle b - \langle \alpha(t), b\rangle a}{\langle \alpha(t), a\rangle}\right)\Big|_{t=0}\right), \end{aligned}$$

e usando as regras de derivação,

$$\begin{aligned} d\phi_p(v) &= \left(\frac{\langle v, a\rangle}{\langle p, a\rangle}, \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha(t) - \langle \alpha(t), a\rangle b - \langle \alpha(t), b\rangle a}{\langle \alpha(t), a\rangle}\right)\Big|_{t=0}\right) \\ &= \left(\frac{\langle v, a\rangle}{\langle p, a\rangle}, \frac{(v - \langle v, a\rangle b - \langle v, b\rangle a)\langle p, a\rangle - \langle v, a\rangle(p - \langle p, a\rangle b - \langle p, b\rangle a)}{\langle p, a\rangle^2}\right) \\ &= \left(\frac{\langle v, a\rangle}{\langle p, a\rangle}, \frac{(v - \langle v, b\rangle a)\langle p, a\rangle - \langle v, a\rangle(p - \langle p, b\rangle a)}{\langle p, a\rangle^2}\right). \end{aligned}$$

Assim, com mais alguns cálculos obtemos

$$\langle d\phi_p(v), d\phi_p(v)\rangle = \frac{1}{\langle p, a\rangle^2}\langle v, v\rangle, \quad \forall\, v \in T_p\mathcal{H}^{n+1}.$$

Pela identidade de polarização concluímos que

$$\langle d\phi_p(u), d\phi_p(v)\rangle = \frac{1}{\langle p, a\rangle^2}\langle u, v\rangle, \quad \forall\, u, v \in T_p\mathcal{H}^{n+1}, \tag{2.23}$$

isto é, ϕ preserva métrica.

Pelo mostrado em (2.23) ϕ preserva a métrica, assim $d\phi_p$ é injetora, isto é, o determinante da matriz Jacobiana da transformação linear $d\phi_p$ é não nulo, logo pelo teorema da aplicação inversa ϕ é um difeomorfismo local. Como ϕ é injetora, concluímos que a aplicação

$$\phi : \mathcal{H}^{n+1} \longrightarrow \phi(\mathcal{H}^{n+1}) \subset -\mathbb{R} \times_{\exp(t)} \mathbb{R}^n$$

é uma isometria.

Mostremos agora que $\phi(\mathcal{H}^{n+1}) = -\mathbb{R} \times_{\exp(t)} \mathbb{R}^n$. Com efeito, como a função logaritmo é sobrejetiva temos que $\phi(\mathcal{H}^{n+1}) = -\mathbb{R} \times_{\exp(t)} A^n$, onde A^n é um aberto do $\mathbb{R}^n$. Mas munindo $\mathcal{H}^{n+1}$ da parametrização $y : \mathbb{R} \times L^n(\tau) \longrightarrow \mathcal{H}^{n+1}$, temos que para algum $\tau > 0$ fixado a aplicação $\phi_\tau : L^n(\tau) \longrightarrow A^n$ é uma isometria. Por outro lado, sabemos pela proposição (2.16) que a aplicação $\psi : L^n(\tau) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma isometria. Logo, como a composição de isometrias ainda é uma isometria, segue que a nova aplicação $g = \phi_\tau \circ \psi^{-1} : A^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma isometria. Sendo $A^n \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, obtemos que $A^n = \mathbb{R}^n$ e portanto $\phi(\mathcal{H}^{n+1}) = -\mathbb{R} \times_{\exp(t)} \mathbb{R}^n$ de onde concluímos que $\mathcal{H}^{n+1}$ é isométrico a $-\mathbb{R} \times_{\exp(t)} \mathbb{R}^n$.

■

2.6 As r-ésimas Curvaturas Médias H_r

Nesta seção, introduziremos o conceito de r-ésimas curvaturas médias que será definida por meio dos polinômios simétricos elementares. Antes de darmos a definição de r-ésima curvatura média, daremos uma definição algébrica.

Definição 2.18 *Seja D um domínio de integridade e $x_1, \ldots, x_n$ n indeterminadas sobre D. Chamamos "polinômios simétricos elementares" nas indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$ aos polinômios $e_i \in D[x_1, \ldots, x_n]$ definidos do seguinte modo*

$$\begin{aligned} e_1(x_1, \ldots, x_n) &= x_1 + \ldots + x_n; \\ e_2(x_1, \ldots, x_n) &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n; \\ &\vdots \\ e_n(x_1, \ldots, x_n) &= x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n. \end{aligned}$$

Seja $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ a segunda forma fundamental da imersão x. Sabemos que dado $p \in M$, $A_p : T_pM \to T_pM$ é um operador linear, auto-adjunto e seus autovalores, $k_1, \ldots, k_n$ são as curvaturas principais de M. Associado ao operador de forma A de M^n existem n invariantes algébricos, os quais são funções simétricas elementares σ_r das suas curvaturas principais $k_1, \ldots, k_n$.

Denotemos por $S_r(p)$ a r-ésima função simétrica elementar dos autovalores de A_p, isto é, $S_r = \sigma_r(k_1, \ldots, k_n)$, onde $k_1, \ldots, k_n$ são os autovalores do operador A_p

e $\sigma_r \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ é o r-ésimo polinômio simétrico elementar nas indeterminadas $X_1, \ldots, X_n$ dado por

$$\sigma_r(k_1, \ldots, k_n) = \sum_{i_1 < \ldots < i_n} k_{i_1} \cdots\ k_{i_n}, \quad 1 \leq r \leq n.$$

Proposição 2.19 *Sendo $S_0 = 1$, o polinômio característico de A em um ponto $p \in M$, é dado por*

$$det(tI - A) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S_r t^{n-r},$$

onde S_r denota as funções simétricas elementares de $k_1, \ldots, k_n$.

Demonstração. Mostremos por indução em n. Se $n = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\det(tI_1 - A) &= (t - k_1) \\
&= (-1)^0 S_0 t^{1-0} + (-1)^1 S_1 t^{1-1} \\
&= \sum_{r=0}^{1} (-1)^r S_r t^{1-r}.
\end{aligned}$$

Se $n = 2$,

$$\begin{aligned}
\det(tI_2 - A) &= \prod_{r=1}^{2} (t - k_r) \\
&= (t - k_1)(t - k_2) \\
&= t^2 - tk_1 - tk_2 + k_1 k_2 \\
&= t^2 - t(k_1 + k_2) + k_1 k_2 \\
&= (-1)^0 S_0 t^{2-0} + (-1)^1 S_1 t^{2-1} + (-1)^2 S_2 t^{2-2} \\
&= \sum_{r=0}^{2} (-1)^r S_r t^{2-r},
\end{aligned}$$

onde $S_0 = 1,\ S_1 = k_1 + k_2$ e $S_2 = k_1 k_2$.

Suponha que a afirmação seja válida para n, e mostremos que é válida para $n+1$. De fato,

$$det(tI_{n+1} - A) = \prod_{r=1}^{n+1} (t - k_r) = \prod_{r=1}^{n} (t - k_r)(t - k_{n+1}).$$

Por hipótese de indução

$$\prod_{r=1}^{n} (t - k_r) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S_r t^{n-r}$$

daí,

$$\begin{aligned}
\det(tI_{n+1}-A) &= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r S_r t^{n-r}(t-k_{n+1})\\
&= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r S_r t^{n-r+1} + \sum_{r=0}^{n}(-1)^{r+1} S_r k_{n+1} t^{n-r}\\
&= \sum_{r=-1}^{n-1}(-1)^{r+1} S_{r+1} t^{n+1-r-1} + \sum_{r=0}^{n}(-1)^{r+1} S_r k_{n+1} t^{n-r}\\
&= \sum_{r=-1}^{n-1}(-1)^{r+1} S_{r+1} t^{n-r} + \sum_{r=0}^{n}(-1)^{r+1} S_r k_{n+1} t^{n-r}\\
&= \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{r+1}\left(S_{r+1}+S_r k_{n+1}\right)t^{n-r} + t^{n+1} + (-1)^{n+1}k_1 k_2\cdot\ldots\cdot k_{n+1}.
\end{aligned}$$

Agora que denotando $\sigma_k^j = \sigma_r(k_1,\ldots,k_n),\ j \geq r$, temos $S_{r+1} = \sigma_{r+1}^n(k_1,\ldots,k_n)$ e

$$\begin{aligned}
S_r k_{n+1} &= \sigma_r(k_1,\ldots,k_n)k_{n+1}\\
&= \sum_{i_1<\ldots<i_n} k_{i_1}\cdots\ k_{i_n}\cdot k_{n+1}\\
&= \sum_{i_1<\ldots<i_{n+1}} k_{i_1}\cdots\ k_{i_{n+1}} = \sigma_r^{n+1}.
\end{aligned}$$

Assim $\sigma_{r+1}+\sigma_r^{n+1} = \sigma_{r+1}^{n+1}$ e com um certo de abuso de notação, chamemos $\sigma_{r+1}^{n+1} = S_{r+1}$. Logo

$$\begin{aligned}
\det(tI_{n+1}-A) &= \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{r+1} S_{r+1} t^{n-r} + (-1)^0\sigma_0^{n+1}t^{n+1-0} + (-1)^{n+1-0}\sigma_{n+1}^{n+1}t^{n+1-(n+1)}\\
&= \sum_{r=0}^{n+1}(-1)^r S_r t^{n+1-r}
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

Definição 2.20 *A r-ésima curvatura média H_r da hipersuperfície tipo-espaço M^n é definida por:*

(i) $H_0 = 1$;

(ii) $\binom{n}{r}H_r = (-1)^r\sigma_r(k_1,\ldots,k_n) = \sigma_r(-k_1,\ldots,-k_n),\ 1\leq r\leq n.$

Em particular, $H_1 = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i = -\frac{1}{n}tr(A) = H$ é a curvatura média de M, a qual é a principal curvatura *extrínseca* da hipersuperfície.

A motivação pela escolha do sinal $(-1)^r$ na definição de H_r é dada pelo fato de que o vetor curvatura média $\overrightarrow{H}$ (que é definido como $\overrightarrow{H} = -\frac{1}{n}tr(A)N$) se escreverá como $\overrightarrow{H} = HN$.

Proposição 2.21 *A curvatura média $H(p)$ é positiva em $p \in M$ se, e somente se, $\overrightarrow{H}(p)$ esta na mesma orientação tipo-tempo de $N(p)$.*

Demonstração. Com efeito,

$$\langle \overrightarrow{H}, N\rangle \;=\; \langle HN, N\rangle = H\,\langle N, N\rangle = -\,H,$$

onde $\langle N, N\rangle = -1$.

Logo, por (1.13) item (iii), temos que para todo $p \in M$,

$$H(p) = -\,\langle \overrightarrow{H}, N\rangle_p > 0 \;\Leftrightarrow\; \langle \overrightarrow{H}, N\rangle_p < 0,$$

isto é, $C(\overrightarrow{H}(p)) = C(N(p))$.

■

2.7 As Transformações de Newton T_r

Nesta seção, vamos introduzir as Transformações de Newton, que serão definidas a partir do operador de forma A. Mostraremos as suas principais propriedades, e usaremos estas aplicações no próximo capítulo para obter as Fórmulas Integrais tipo - Minkowski no espaço de Sitter (cf. também [13], 2.2).

Definição 2.22 *De acordo com a definição de r-ésima curvatura média, as transformações de Newton*

$$T_r : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M),\; 0 \le r \le n,$$

são dadas por,

$$T_r = \binom{n}{r}H_rI + \binom{n}{r-1}H_{r-1}A + \cdots + \binom{n}{1}H_1A^{r-1} + A^r,$$

onde I denota a identidade em $\mathfrak{X}(M)$, ou indutivamente por,

$$T_0 = I \text{ e } T_r = \binom{n}{r}H_rI + AT_{r-1}.$$

Lema 2.2 *Seja $p \in M$. O operador $T_r : T_pM \longrightarrow T_pM$, é linear, auto-adjunto e comuta com o operador de forma A.*

Demonstração. De fato, note primeiramente que

$$T_r v = \left(\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} H_i A^{r-i} \right) v,$$

daí,

$$\begin{aligned} \langle T_r v, w \rangle &= \left\langle \left(\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} H_i A^{r-i} \right) v, w \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} H_i A^{r-i}(v), w \right\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} H_i \left\langle A^{r-i}(v), w \right\rangle, \end{aligned}$$

sendo A auto-adjunto e a métrica bilinear, obtemos

$$\begin{aligned} \langle T_r v, w \rangle &= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} H_i \left\langle v, A^{r-i}(w) \right\rangle \\ &= \left\langle v, \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} H_i A^{r-i}(w) \right\rangle \\ &= \langle v, T_r w \rangle, \forall\ v, w \in T_pM. \end{aligned}$$

Logo T_r é auto-adjunto.

Para a comutatividade, basta ver que,

$$\begin{aligned} T_r \circ A &= \left(\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} H_i A^{r-i} \right) \circ A \\ &= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} H_i A^{r-i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} H_i A \circ A^{r-i} \\ &= A \circ \left(\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} H_i A^{r-i} \right) \\ &= A \circ T_r. \end{aligned}$$

■

Observe que a Proposição 2.19 nos diz que o polinômio característico de A pode ser escrito em termos de H_r. Isto é

$$p_A(t) = det(tI - A) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} H_i t^{n-i}$$

e pelo *Teorema de Cayley-Hamilton*,

$$T_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} H_i A^{n-i} = p_A(A) = 0,$$

onde $H_0 = 1$.

Proposição 2.23 (Propriedades)

(i) Seja $E_1, \ldots, E_n$ um referencial local ortonormal em M que diagonaliza o operador A, isto é, $AE_1 = k_iE_i, i = 1, \ldots, n$ então, esta referencial, também diagonaliza cada T_r, e $T_rE_i = \lambda_{i,r}E_i$ com

$$\lambda_{i,r} = (-1)^r \sum_{i_1<\cdots<i_r, i_j\neq i} k_{i_1}\cdots k_{i_r} = \sum_{i_1<\cdots<i_r, i_j\neq i} (-k_{i_1})\cdots(-k_{i_r}).$$

(ii) Para cada $1 \leq r \leq n-1$,

$$tr(T_r) = (r+1)\binom{n}{r+1} H_r$$

e

$$tr(A \circ T_r) = -(r+1)\binom{n}{r+1} H_{r+1}$$

(iii) Para cada $V \in \mathfrak{X}(M)$ e cada $1 \leq r \leq n-1$,

$$tr\,(T_r(\nabla_V A)) = -\binom{n}{r+1} \langle \nabla H_{r+1}, V\rangle$$

Demonstração.

(i) Fixemos i, $1 \leq i \leq n$, e apliquemos indução sobre r.

Se $r = 0$, então

$$T_0E_i = IE_i = 1E_i = \lambda_{i,0}E_i.$$

Suponha que seja válido para r e mostremos ser válido para $r+1$. Seja

$$T_rE_i = \lambda_{i,r}E_i,$$

onde $\lambda_{i,r} = (-1)^r \sum\limits_{i_1<\cdots<i_1} k_{i_1}\cdots k_{i_r}$, é a hipótese de indução.

Uma vez que $T_{r+1}E_i = \binom{n}{r+1} H_r I + AT_{r_1}$, temos que

$$\begin{aligned}
T_{r+1}E_i &= \binom{n}{r+1} H_{r+1} I + AT_r \\
&= \left((-1)^{r+1} \sum_{i_1<\cdots<i_{r+1}} k_{i_1}\cdots k_{i_{r+1}} \right) E_i + A\circ T_r E_i \\
&= \left((-1)^{r+1} \sum_{i_1<\cdots<i_{r+1}} k_{i_1}\cdots k_{i_{r+1}} \right) E_i + A(\lambda_{i,r}E_i) \\
&= \left((-1)^{r+1} \sum_{i_1<\cdots<i_{r+1}} k_{i_1}\cdots k_{i_{r+1}} \right) E_i + \lambda_{i,r}k_iE_i,
\end{aligned}$$

pela hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned}
T_{r+1}E_i &= \left[(-1)^{r+1} \sum_{i_1<\cdots<i_{r+1}} k_{i_1}\cdots k_{i_{r+1}} \right] E_i + \left[\left((-1)^r \sum_{i_1<\cdots<i_r} k_{i_1\cdots k_{i_r}} \right) k_i \right] E_i \\
&= \left[(-1)^{r+1} \sum_{i_1<\cdots<i_{r+1}} k_{i_1}\cdots k_{i_{r+1}} + (-1)^r \sum_{i_1<\cdots<i_{r+1}} k_{i_1}\cdots k_{i_{r+1}} \right] E_i \\
&\quad - \left[(-1)^r \sum_{i_1<\cdots<i_{r+1}, i_j\neq i} k_{i_1}\cdots k_{i_{r+1}} \right] E_i,
\end{aligned}$$

de onde concluímos,

$$\begin{aligned}
T_{r+1}E_i &= \left[-(-1)^r \sum_{i_1<\cdots<i_{r+1}} k_{i_1}\cdots k_{i_{r+1}} + (-1)^r \sum_{i_1<\cdots<i_{r+1}} k_{i_1}\cdots k_{i_{r+1}} \right] E_i \\
&\quad + \left[(-1)^{r+1} \sum_{i_1<\cdots<i_{r+1}, i_j\neq i} k_{i_1}\cdots k_{i_{r+1}} \right] E_i.
\end{aligned}$$

Portanto

$$T_{r+1}E_i = (-1)^{r+1} \left(\sum_{i_1<\cdots<i_{r+1}, i_j\neq i} k_{i_1}\cdots k_{i_{r+1}} \right) E_i = \lambda_{i,r+1}E_i.$$

(ii) Para o mesmo referencial dado no item anterior,

$$tr(T_r) \;=\; \sum_{i=1}^n \langle T_rE_i, E_i\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \lambda_{i,r}E_i, E_i\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,r} \langle E_i, E_i\rangle,$$

pela expressão de $\lambda_{i,r}$,

$$\begin{aligned} tr(T_r) &= \sum_{i=1}^{n} \langle E_i, E_i\rangle \left((-1)^r \sum_{i_1<\cdots<i_{r+1}, i_j\neq i} k_{i_1}\cdots k_{i_r}\right) \\ &= (n-r)(-1)^r \sum_{i_1<\cdots<i_r} k_{i_1}\cdots k_{i_1} \\ &= (n-r)\binom{n}{r} H_r \\ &= (r+1)\binom{n}{r+1} H_r. \end{aligned}$$

Usando o que mostramos acima, temos

$$\begin{aligned} tr(A\circ T_r) &= tr(T_{r+1}) - tr\left(\binom{n}{r+1} H_{r+1} I\right) \\ &= (n-(r+1))\binom{n}{r+1} H_{r+1} - n\binom{n}{r+1} H_{r+1} \\ &= \left((n-r-1)\binom{n}{r+1} - n\binom{n}{r+1}\right) H_{r+1} \\ &= \left((n-r-1-n)\binom{n}{r+1}\right) H_{r+1} \\ &= \left((-r-1)\binom{n}{r+1}\right) H_{r+1} \\ &= -(r+1)\binom{n}{r+1} H_{r+1}. \end{aligned}$$

(iii) Seja $E_1, \ldots, E_n$ um referencial ortonormal local em M^n que diagonaliza o operador A em um ponto $p \in M$, isto é, $AE_i = k_i E_i, i = 1, \ldots, n$, então

$$\begin{aligned} (\nabla_V A)(E_i) &= \nabla_V(AE_i) - A(\nabla_V E_i) \\ &= \nabla_V(k_i E_i) - A\left(\sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_V E_i, E_j\rangle E_j\right) \\ &= k_i \nabla_V E_i + V(k_i) E_i - \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_V E_i, E_j\rangle AE_j \\ &= k_i \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_V E_i, E_j\rangle E_j + V(k_i)E_i - \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_V E_i, E_j\rangle k_j E_j \\ &= \sum_{j=1, i\neq j}^{n} (k_i - k_j)\langle \nabla_V E_i, E_j\rangle E_j + V(k_i)E_i. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} tr\,(T_r\ \circ \nabla_V A) &= \sum_{i=1}^{n} \langle T_r(\nabla_V A)E_i, E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle T_r\left(V(k_i)E_i + \sum_{j=1, i\neq j}^{n} (k_i - k_j)\left\langle \nabla_V E_i, E_j\right\rangle E_j\right), E_i\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle T_r(V(k_i))E_i, E_i\rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \left\langle T_r\left(\sum_{j=1, i\neq j}^{n} (k_i - k_j)\left\langle \nabla_V E_i, E_j\right\rangle E_j\right), E_i\right\rangle, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} tr\,(T_r\ \circ \nabla_V A) &= \sum_{i=1}^{n} V(k_i)\left\langle T_r E_i, E_i\right\rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, i\neq j}^{n} (k_i - k_j)\left\langle \nabla_V E_i, E_j\right\rangle \left\langle T_r E_j, E_i\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} V(k_i)\lambda_{r,i}\left\langle E_i, E_i\right\rangle \\ &\quad + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, i\neq j}^{n} (k_i - k_j)\left\langle \nabla_V E_i, E_j\right\rangle \lambda_{r,j}\left\langle E_j, E_i\right\rangle}_{=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} V(k_i)\lambda_{r,i}, \end{aligned}$$

uma vez que $E_1, \ldots, E_n$ é um referencial ortonormal.

Portanto

$$\begin{aligned} tr(T_r \circ \nabla_V A) &= \sum_{i=1}^{n} V(k_i)\lambda_{i,r} \\ &= -\sum_{i=1}^{n} V(-k_i) \sum_{i_1<\cdots<i_r, i_j\neq i} (-k_{i_1})\cdots(-k_{i_r}) \\ &= -V\left(\sum_{i=1}^{n}(-k_i) \sum_{i_1<\cdots<i_r, i_j\neq i} (-k_{i_1})\cdots(-k_{i_r})\right) \\ &= -V\left(\sum_{i_1<\cdots<i_{r+1}, i_j\neq i} (-k_{i_1})\cdots(-k_{i_{r+1}})\right), \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} tr(T_r \circ \nabla_V A) &= -V\left(\binom{n}{r+1} H_{r+1}\right) \\ &= -\binom{n}{r+1} V(H_{r+1}) \\ &= -\binom{n}{r+1} \langle \nabla H_{r+1}, V \rangle, \end{aligned}$$

onde ∇H_{r+1} denota o gradiente de H_{r+1}.

■

2.8 As Divergências das Transformações de Newton

Antes da próxima definição, convém relembrar a definição de diferencial covariante de um tensor. Tomando T_r com um tensor do tipo $(1,1)$ em M, a diferencial covariante, ∇T_r é dada por

$$\nabla T_r(X,Y) = (\nabla_X T_r)(Y) = \nabla_X(T_r Y) - T_r(\nabla_X Y), \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Definição 2.24 *A divergência da transformação de Newton T_r, $0 \leq r \leq n$, é o vetor $divT_r$ dado por*

$$divT_r = tr(\nabla T_r) = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i} T_r) E_i,$$

onde $E_1, \ldots, E_n$ denota um referencial local ortonormal em M^n.

Proposição 2.25 *Seja $T_r : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ um campo de tensores do tipo $(1,1)$ em M tal que em cada ponto $p \in M$, $T_r : T_pM \to T_pM$ é um operador linear e auto-adjunto. Então para todo campo $E \in \mathfrak{X}(M)$ o campo de tensores $\nabla_E T_r : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ do tipo $(1,1)$ em M, em cada ponto $p \in M$, define um operador linear $\nabla_E T_r : T_pM \to T_pM$ auto-adjunto.*

Demonstração. Pela própria definição de conexão, $\nabla_E T_r$ é linear. Para mostrar que é auto-adjunta observe que

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_E T_r)(X), Y \rangle &= \langle \nabla_E(T_r X) - T_r(\nabla_E X), Y \rangle \\ &= \langle \nabla_E(T_r X), Y \rangle - \langle T_r(\nabla_E X), Y \rangle \\ &= E\langle T_r X, Y \rangle - \langle T_r X, \nabla_E Y \rangle - \langle (\nabla_E X), T_r Y \rangle \\ &= E\langle T_r X, Y \rangle - \langle T_r X, \nabla_E Y \rangle - E\langle X, T_r Y \rangle + \langle X, \nabla_E(T_r Y) \rangle, \end{aligned}$$

sendo T_r auto-adjunto, temos

$$\begin{aligned}\langle(\nabla_E T_r)(X), Y\rangle &= E\langle X, T_r Y\rangle - \langle T_r X, \nabla_E Y\rangle - E\langle X, T_r Y\rangle + \langle X, \nabla_E(T_r Y)\rangle \\ &= -\langle T_r X, \nabla_E Y\rangle + \langle X, \nabla_E(T_r Y)\rangle \\ &= -\langle X, T_r(\nabla_E Y)\rangle + \langle X, \nabla_E(T_r Y)\rangle \\ &= \langle X, \nabla_E(T_r Y) - T_r(\nabla_E Y)\rangle \\ &= \langle X, (\nabla_E T_r)(Y)\rangle, \quad \forall\ X, Y \in \mathfrak{X}(M),\end{aligned}$$

isto é, em cada ponto $p \in M$, $(\nabla_E T_r)$ é auto-adjunta. ■

Obteremos agora uma relação entre as divergências das transformações de Newton e o tensor curvatura de M, mas precisamente o

Lema 2.3 *As divergências das transformações de Newton $T_r, 0 \leq r \leq n-1$ são dadas por:*

$$\begin{cases} div(T_0) = 0 \\ div(T_r) = A(div(T_{r-1})) + (\sum_{i=1}^n (\overline{R}(N, T_{r-1}E_i)E_i))^{\top}. \end{cases} \tag{2.24}$$

Equivalentemente, para todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\langle div(T_r), X\rangle = \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}(N, T_{r-j}E_i)E_i, A^{j-1}X\right\rangle. \tag{2.25}$$

Demonstração. Observe que para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$(\nabla_X I)(Y) = \nabla_X(I(Y)) - I(\nabla_X Y) = \nabla_X - \nabla_X = 0,$$

assim,

$$div(T_0) = div(I) = \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i} I, E_i\rangle = 0.$$

Agora, se $r \geq 1$, da definição indutiva de T_r, temos que para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}(\nabla_X T_r)(Y) &= \nabla_X\left(\binom{n}{r}H_r I + A\circ T_{r-1}\right)Y \\ &= \nabla_X\left(\binom{n}{r}H_r(Y) + (A\circ T_{r-1})Y\right) \\ &= \nabla_X\left(\binom{n}{r}H_r(Y)\right) + \nabla_X(A\circ T_{r-1})Y,\end{aligned}$$

desta forma,

$$\begin{aligned}
(\nabla_X T_r)(Y) &= \left(\binom{n}{r} X(H_r) I\right)(Y) + \underbrace{\binom{n}{r} H_r (\nabla_X I)(Y)}_{(=0)} + \nabla_X (A \circ T_{r-1}) Y \\
&= \binom{n}{r} \langle \nabla(H_r), X\rangle (Y) + (\nabla_X A)(T_{r-1})Y) + (A(\nabla_X T_{r-1}))(Y).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
div(T_r) &= \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i} T_r)(E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{r} \langle \nabla H_r, E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i} A)(T_{r-1} \circ E_i) + \sum_{i=1}^{n} (A(\nabla_{E_i} T_r))(E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{r} \langle \nabla H_r, E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i} A)(T_{r-1} \circ E_i) + A \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} T_{r-1}, E_i\rangle\right)}_{div(T_{r-1})} \\
&= \binom{n}{r} \nabla H_r + \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i} A)(T_{r-1} \circ E_i) + A(div(T_{r-1}).
\end{aligned}$$

Uma vez que $\nabla_{E_i} A$ é auto-adjunto, temos que, para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\langle (\nabla_{E_i} A)(T_{r-1} E_i), X\rangle = \langle T_{r-1} E_i, (\nabla_{E_i} A)(X)\rangle ,$$

pela equação de Codazzi (2.6)

$$\left(\overline{R}(X,Y)N\right)^{\top} = (\nabla_Y A)(X,N) - (\nabla_X A)(Y,N),$$

daí,

$$\begin{aligned}
\langle (\nabla_{E_i} A)(T_{r-1} E_i), X\rangle &= \langle T_{r-1} E_i, (\nabla_{E_i} A)(X)\rangle \\
&= -\left\langle \overline{R}(X, E_i) N, T_{r-1} E_i\right\rangle + \langle T_{r-1} E_i, (\nabla_X A)(E_i)\rangle \\
&= \left\langle \overline{R}(X, E_i) T_{r-1} E_i, N\right\rangle + \langle (\nabla_X A)(E_i), T_{r-1} E_i\rangle \\
&= \left\langle \overline{R}(X, E_i) T_{r-1} E_i, N\right\rangle + \langle T_{r-1} (\nabla_X A)(E_i), E_i\rangle .
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle div(T_r), X\rangle &= \left\langle \binom{n}{r} \nabla H_r + \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i} A)(T_{r-1}) + A(div(T_{r-1})), X \right\rangle \\
&= \left\langle \binom{n}{r} \nabla H_r, X \right\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_{E_i} A)(T_{r-1}), X\rangle + \langle A(div(T_{r-1})), X\rangle ,
\end{aligned}$$

da expressão acima e bilinearidade da métrica, temos

$$\begin{aligned}\langle div(T_r), X\rangle &= \binom{n}{r}\langle \nabla H_r, X\rangle + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}(X, E_i)T_{r-1}E_i, N\right\rangle \\ &+ \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\langle (T_{r-1}\circ(\nabla_X A)(E_i)), E_i\rangle}_{tr(T_{r-1}\circ\ (\nabla_X A))} + \langle A(div(T_{r-1})), X\rangle .\end{aligned}$$

Pelo item (iii) da Proposição (2.23),

$$tr(T_r \circ (\nabla_X A)) = -\binom{n}{r+1}\langle \nabla H_{r+1}, X\rangle ,$$

daí,

$$tr(T_{r-1}\circ(\nabla_X A)) = -\binom{n}{r}\langle \nabla H_r, X\rangle .$$

Logo,

$$\begin{aligned}\langle div(T_r), X\rangle &= \binom{n}{r}\langle \nabla H_r, X\rangle + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}(X, E_i)T_{r-1}E_i, N\right\rangle \\ &\quad -\binom{n}{r}\langle \nabla H_r, X\rangle + \langle A(div(T_{r-1})), X\rangle .\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}\langle div(T_r), X\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}(X, E_i)T_{r-1}E_i, N\right\rangle + \langle A(div(T_{r-1})), X\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}(E_i, X)N, T_{r-1}E_i\right\rangle + \langle A(div(T_{r-1})), X\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}(N, T_{r-1}E_i)E_i, X\right\rangle + \langle A(div(T_{r-1})), X\rangle ,\end{aligned}$$

como $X \in \mathfrak{X}(M)$ é qualquer, segue que

$$div(T_r) = (\overline{R}(N, T_{r-1}E_I)E_i)^{\top} + A(div(T_{r-1}))$$

Agora, mostraremos a equivalência.

Primeiramente, observe que $div(T_1) = (\overline{R}(N, T_{r-1}E_i)E_i)^{\top}$, pois $A(div(T_0)) = 0$. Daí,

$$\langle div(T_1), X\rangle = \left\langle (\overline{R}(N, T_{r-1}E_I)E_i)^{\top}, X\right\rangle , \forall\ X \in \mathfrak{X}(M).$$

Suponhamos que o argumento seja válido para $r-1$, e mostremos que também é válido para r. Seja

$$\langle div(T_r), X\rangle = \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}(N, T_{r-1}E_i)E_i, A^{j-1}X\right\rangle,$$

a hipótese de indução. Então

$$\begin{aligned}
\langle div(T_r), X\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle (\overline{R}(N, T_{r-1}E_i)E_i)^{\top}, X\right\rangle + \langle A(div(T_{r-1})), X\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}(N, T_{r-1}E_I)E_i, X\right\rangle + \langle div(T_{r-1}), AX\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{r-1}\sum_{i=1}^{n}\left\langle A^{j-1}(\overline{R}(N, T_{r-1-j}E_i)E_i), AX\right\rangle + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}(N, T_{r-1}E_i)E_i, X\right\rangle.
\end{aligned}$$

Como A é auto-adjunto,

$$\begin{aligned}
\langle div(T_r), X\rangle &= \sum_{j=1}^{r-1}\sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}(N, T_{r-1-j}E_i)E_i, A^{j}X\right\rangle + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}(N, T_{r-1}E_i)E_i, X\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j+1=2}^{r}\left\langle \overline{R}(N, T_{r-(j+1)}E_i)E_i, A^{(j+1)-1}X\right\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}(N, T_{r-1}E_i)E_i, X\right\rangle,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\langle div(T_r), X\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j+1=2}^{r}\left\langle A^{(j+1)-1}(\overline{R}(N, T_{r-(j+1)}E_i)E_i), X\right\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}(N, T_{r-1}E_i)E_i, X\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\langle \left(\sum_{j+1=2}^{r} A^{(j+1)-1}(\overline{R}(N, T_{r-(j+1)}E_i)E_i)\right) + \overline{R}(N, T_{r-1}E_i)E_i, X\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}\left\langle \overline{R}(N, T_{r-j}E_i)E_i, A^{j-1}X\right\rangle.
\end{aligned}$$

Assim, fica mostrado que (2.24) implica (2.25).

Reciprocamente,

$$\langle div(T_r), X\rangle = \sum_{j-1=0}^{r-1}\sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}(N, T_{r-1-(j-1)}E_i)E_i, A^{j-1}X\right\rangle.$$

Com algumas propriedades,

$$\begin{aligned}
\langle div(T_r), X\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle\overline{R}(N,T_{r-1}E_i)E_i, X\right\rangle + \sum_{j=1}^{r-1}\sum_{i=1}^{n}\left\langle\overline{R}(N,T_{(r-1)-j}E_i)E_i, A^{j-1}(AX)\right\rangle\\
&= \left\langle\sum_{i=1}^{n}(\overline{R}(N,T_{r-1}E_i)E_i)^{\top}, X\right\rangle + \langle div(T_{r-1}), AX\rangle,\\
&= \left\langle\sum_{i=1}^{n}(\overline{R}(N,T_{r-1}E_i)E_i)^{\top}, X\right\rangle + \langle A(div(T_{r-1})), X\rangle\\
&= \left\langle\sum_{i=1}^{n}(\overline{R}(N,T_{r-1}E_i)E_i)^{\top} + A(div(T_{r-1})), X\right\rangle,
\end{aligned}$$

como $X \in \mathfrak{X}(M)$ é qualquer, segue que,

$$div(T_r) = \sum_{i=1}^{n}\overline{R}(N,T_{r-1}E_i)E_i)^{\top} + A(div(T_{r-1})).$$

Portanto (2.25) implica (2.24), o que conclui a demonstração do Lema. ■

Corolário 2.26 *Se o espaço ambiente tem curvatura seccional constante, as transformações de Newton, T_r, $0 \le r \le n-1$ são livres de divergência, isto é,*

$$div_M(T_r) = tr\,(V \to (\nabla_V T_r)\,V) = 0,\ \forall\ V \in \mathfrak{X}(M).$$

Demonstração. Se o espaço ambiente tem curvatura seccional constante igual a C, segue da fórmula de Gauss (2.4) que para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}
\overline{R}(N,X)Y &= C(\langle Y,N\rangle X - \langle Y,X\rangle N)\\
&= C\,\langle Y,X\rangle N,
\end{aligned}$$

assim, tomando a componente tangente de $\overline{R}$, temos

$$(\overline{R}(N,X)Y)^{\top} = 0,\ \forall\ X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Portanto pela equação (2.25), temos que $div(T_r) = 0,\ 0 \le r \le n-1$. ■

Capítulo 3

Fórmulas Integrais Tipo-Minkowski no espaço de Sitter

Neste capítulo desenvolveremos as Fórmulas Integrais tipo-Minkowski para o de Sitter. No que segue, $x : M^n \to \mathbb{S}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$, denotará uma hipersuperfície tipo-espaço compacta e com bordo ∂M imersa do espaço de Sitter. Consideremos M^n orientada por um campo normal de vetores tipo-tempo e unitário N, apontando para o passado. Além disso, $\nu \in T_pM$ denotará o campo de vetores conormal, exterior e unitário ao longo de ∂M, dS denotará o elemento área $(n-1)$-dimensional de ∂M, e dM o elemento volume n-dimensional de ∂M com respeito a métrica induzida e a orientação escolhida.

3.1 Fórmulas Integrais Tipo-Minkowski

Proposição 3.1 *Fixados $a, b \in \mathbb{L}^{n+2}$ com $\langle a, b\rangle \neq 0$, o campo de vetores dado por*

$$Y_{a,b}(x) = \frac{1}{\langle a, b\rangle} \left(\langle b, x\rangle\, a - \langle a, x\rangle\, b\right)$$

é um campo de Killing globalmente definido no espaço de Sitter o qual é ortogonal ao vetor posição x.

Demonstração. De fato,

$$
\begin{aligned}
\langle Y_{a,b}(x), x\rangle &= \left\langle \frac{1}{\langle a,b\rangle}\left(\langle b,x\rangle\, a - \langle a,x\rangle\, b\right), x\right\rangle \\
&= \frac{1}{\langle a,b\rangle}\left(\langle b,x\rangle \langle a,x\rangle - \langle a,x\rangle \langle b,x\rangle\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Isso mostra que geometricamente $Y_{a,b}(x)$ determina uma direção ortogonal ao vetor posição x no subespaço gerado por a e b.

Além disso, denotando por $\overline{\nabla}$ e ∇° as conexões de Levi-Civita de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ e $\mathbb{L}^{n+2}$, respectivamente, temos pela fórmula de Gauss (2.9)

$$
\begin{aligned}
\langle \overline{\nabla}_V Y_{a,b}, W\rangle &= \left\langle \overline{\nabla}_V \left(\frac{1}{\langle a,b\rangle}(\langle b,x\rangle a - \langle a,x\rangle b)\right), W\right\rangle \\
&= \frac{1}{\langle a,b\rangle}\Big(\big\langle \overline{\nabla}_V(\langle b,x\rangle a), W\big\rangle - \big\langle \overline{\nabla}_V(\langle a,x\rangle b), W\big\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{\langle a,b\rangle}\Big(\big\langle \nabla^{\circ}_V(\langle b,x\rangle a) + \big\langle V, \langle b,x\rangle a\big\rangle x, W\big\rangle \\
&\quad - \big\langle \nabla^{\circ}_V(\langle a,x\rangle b) + \big\langle V, \langle a,x\rangle b\big\rangle x, W\big\rangle\Big),
\end{aligned}
$$

da bilinearidade da métrica,

$$
\begin{aligned}
\langle \overline{\nabla}_V Y_{a,b}, W\rangle &= \frac{1}{\langle a,b\rangle}\Big(\big\langle \nabla^{\circ}_V(\langle b,x\rangle a), W\big\rangle + \langle b,x\rangle\langle V,a\rangle\langle x,W\rangle \\
&\quad - \big\langle \nabla^{\circ}_V(\langle a,x\rangle b), W\big\rangle + \langle a,x\rangle\langle V,b\rangle\langle x,W\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{\langle a,b\rangle}\Big(\big\langle \nabla^{\circ}_V(\langle b,x\rangle a), W\big\rangle - \big\langle \nabla^{\circ}_V(\langle a,x\rangle b), W\big\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{\langle a,b\rangle}\Big(\big\langle \langle b,x\rangle \nabla^{\circ}_V a + V\langle b,x\rangle a, W\big\rangle - \big\langle \langle a,x\rangle \nabla^{\circ}_V b + V\langle a,x\rangle, W\big\rangle\Big).
\end{aligned}
$$

Uma vez que $\nabla^{\circ}_V x = V$, $\nabla^{\circ}_V a = \nabla^{\circ}_V b = 0$ e $\langle x, W\rangle = 0$, temos

$$
\begin{aligned}
\langle \overline{\nabla}_V Y_{a,b}, W\rangle &= \frac{1}{\langle a,b\rangle}\Big(\big\langle \langle b,x\rangle \nabla^{\circ}_V a + \langle \nabla^{\circ}_V b, x\rangle a + \langle b, \nabla^{\circ}_V x\rangle a, W\big\rangle \\
&\quad - \big\langle \langle a,x\rangle \nabla^{\circ}_V b + \langle \nabla^{\circ}_V a, x\rangle + \langle a, \nabla^{\circ}_V x\rangle b, W\big\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{\langle a,b\rangle}\Big(\big\langle \langle b, \nabla^{\circ}_V x\rangle a, W\big\rangle - \big\langle \langle a, \nabla^{\circ}_V x\rangle b, W\big\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{\langle a,b\rangle}\Big(\langle b,V\rangle\langle a,W\rangle - \langle a,V\rangle\langle b,W\rangle\Big).
\end{aligned}
$$

Analogamente obtemos,

$$\langle\overline{\nabla}_W Y_{a,b}, V\rangle = \frac{1}{\langle a,b\rangle}\Big(\langle b,W\rangle\langle a,V\rangle - \langle a,W\rangle\langle b,V\rangle\Big).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\langle\overline{\nabla}_V Y_{a,b}, W\rangle + \langle\overline{\nabla}_W Y_{a,b}, V\rangle &= \frac{1}{\langle a,b\rangle}\Big(\langle b,V\rangle\langle a,W\rangle - \langle a,V\rangle\langle b,W\rangle\Big)\\ &+ \frac{1}{\langle a,b\rangle}\Big(\langle b,W\rangle\langle a,V\rangle - \langle a,W\rangle\langle b,V\rangle\Big)\\ &= 0,\end{aligned}$$

para quaisquer campos $V, W \in \mathbb{S}_1^{n+1}$. Logo $Y_{a,b}$ é um campo de Killing. ■

Proposição 3.2 (Fórmulas Integrais Tipo-Minkowski)
Seja $x : M^n \to \mathbb{S}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ uma hipersuperfície tipo-espaço, compacta com bordo ∂M e seja Y um campo de Killing em $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Se a r-ésima curvatura média H_r de M^n é constante para algum r, $1 \leq\ r \leq n$, então:

(i) $\displaystyle\oint_{\partial M}\langle T_{r-1}\nu, Y\rangle\, dS = r\binom{n}{r}H_r\int_M \langle Y, N\rangle\, dM;$

(ii) $\displaystyle\oint_{\partial M}\langle T_{r-1}\nu, Y_{a,b}\rangle\, dS = \binom{n-1}{r-1}H_r\frac{1}{\langle a,b\rangle}\oint_{\partial M} det(x, v_1, \ldots, v_{n-1}, a, b)dS,$

onde $v_1, \ldots, v_{n-1}$ é um referencial tangente ao longo de ∂M.

Demonstração.

(i) Denote por $Y^\top \in \mathfrak{X}(M)$ a componente tangencial de Y. Assim se $E_1, \ldots, E_n$ de M^n é um referencial ortonormal local, então

$$div_M(T_rY^T) = \sum_{i=1}^n \left\langle \nabla_{E_i}(T_rY^\top), E_i\right\rangle,$$

mas,

$$(\nabla_{E_i}T_r)(Y^\top) = \nabla_{E_i}(T_rY^\top) - T_r(\nabla_{E_i}Y^\top)$$

e assim

$$\nabla_{E_i}(T_rY^\top) = (\nabla_{E_i}T_r)(Y^\top) + T_r(\nabla_{E_i}Y^\top).$$

Usando que T_r e $\nabla_V T_r$ são auto-adjuntos, para cada $V \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$div_M(T_rY^\top) = \sum_{i=1}^n \left\langle (\nabla_{E_i}T_r)(Y^\top) + T_r(\nabla_{E_i}Y^\top), E_i\right\rangle.$$

Sendo $\nabla_{E_i} T_r$ e T_r são auto-adjuntos,

$$\begin{aligned} div_M(T_r Y^\top) &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle (\nabla_{E_i} T_r)(Y^\top), E_i \right\rangle + \sum_{i=1}^{n} \left\langle T_r(\nabla_{E_i} Y^\top), E_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle Y^\top, (\nabla_{E_i} T_r)(E_i) \right\rangle + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{E_i} Y^\top, T_r E_i \right\rangle \\ &= \left\langle Y^\top, \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i} T_r)(E_i) \right\rangle + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{E_i} Y^\top, T_r E_i \right\rangle, \end{aligned}$$

uma vez que as T_r são livres de divergências, obtemos

$$\begin{aligned} div_M(T_r Y^\top) &= \left\langle Y^\top, div_M(T_r) \right\rangle + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{E_i} Y^\top, T_r E_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{E_i} Y^\top, T_r E_i \right\rangle . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Por outro lado, derivando covariantemente o campo de Killing $Y = Y^\top - \langle Y, N \rangle N$ na direção de $V \in \mathfrak{X}(M)$ e usando as fórmula de Gauss (2.9), temos

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_V Y &= \nabla_V (Y^\top - \langle Y, N \rangle N) - \langle AV, Y \rangle N \\ &= \nabla_V Y^\top - \nabla_V (\langle Y, N \rangle N) - \langle AV, Y \rangle N \\ &= \nabla_V Y^\top - \langle Y, N \rangle \nabla_V N - V(\langle Y, N \rangle) N - \langle AV, Y \rangle N \\ &= \nabla_V Y^\top - \langle Y, N \rangle \nabla_V N - (V \langle Y, N \rangle + \langle AV, Y \rangle) N \end{aligned}$$

Pela fórmula de Weingarten (2.10), $\nabla_V N = -\, AV$, temos

$$\nabla_V Y^\top = \overline{\nabla}_V Y - \langle Y, N \rangle AV + (V \langle Y, N \rangle + \langle AV, Y \rangle) N.$$

Agora, fazendo produto escalar com $W \in \mathfrak{X}(M)$ qualquer,

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla_V Y^\top, W \right\rangle &= \left\langle \overline{\nabla}_V Y, W \right\rangle - \langle Y, N \rangle \langle AV, W \rangle + \underbrace{\langle (V \langle Y, N \rangle + \langle AV, Y \rangle) N, W \rangle}_{(=0)} \\ &= \left\langle \overline{\nabla}_V Y, W \right\rangle - \langle Y, N \rangle \langle AV, W \rangle . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\left\langle \nabla_V Y^\top, W \right\rangle + \left\langle \nabla_W Y^\top, V \right\rangle \right) &= \frac{1}{2} \Big(\left\langle \overline{\nabla}_V Y, W \right\rangle - \langle Y, N \rangle \langle AV, W \rangle \\ &\quad + \left\langle \overline{\nabla}_W Y, V \right\rangle - \langle Y, N \rangle \langle AW, V \rangle \Big). \end{aligned}$$

Sendo Y um campo de Killing no de Sitter, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\left\langle \nabla_V Y^{\top}, W\right\rangle + \left\langle \nabla_W Y^{\top}, V\right\rangle\right) &= \frac{1}{2}\left(\left\langle \overline{\nabla}_V Y, W\right\rangle + \left\langle \overline{\nabla}_W Y, V\right\rangle\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(\langle Y, N\rangle \langle AV, W\rangle + \langle Y, N\rangle \langle AW, V\rangle\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\langle Y, N\rangle \langle AV, W\rangle + \langle Y, N\rangle \langle AW, V\rangle\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\langle Y, N\rangle \langle V, AW\rangle + \langle Y, N\rangle \langle AW, V\rangle\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(2\langle Y, N\rangle \langle V, AW\rangle\right) \\
&= -\langle Y, N\rangle \langle V, AW\rangle, \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

para quaisquer $V, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Sendo A um operador auto-adjunto, o *Teorema Espectral*, garante a existência de um referencial ortonormal em M que diagonaliza A.

Seja $E_1, \ldots, E_n$ tal referencial. Então pelo item (i) da Proposição (2.23)

$$\begin{aligned}
\left\langle \nabla_{E_i} Y^{\top}, T_r E_i\right\rangle &= \left\langle \nabla_{E_i} Y^{\top}, \lambda_{i,r} E_i\right\rangle \\
&= \lambda_{i,r}\left\langle \nabla_{E_i} Y^{\top}, E_i\right\rangle \\
&= \left\langle \lambda_{i,r}\nabla_{E_i} Y^{\top}, E_i\right\rangle \\
&= \left\langle \nabla_{\lambda_{i,r}E_i} Y^{\top}, E_i\right\rangle \\
&= \left\langle \nabla_{T_rE_i} Y^{\top}, E_i\right\rangle, \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Fazendo $V = T_rE_i$ e $W = E_i$ em (3.3) e usando (3.4) temos

$$\begin{aligned}
-\langle Y, N\rangle \langle T_rE_i, AE_i\rangle &= \frac{1}{2}\left(\left\langle \nabla_{T_rE_i} Y^{\top}, E_i\right\rangle + \left\langle \nabla_{E_i} Y^{\top}, T_rE_i\right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left\langle \nabla_{E_i} Y^{\top}, T_rE_i\right\rangle + \left\langle \nabla_{E_i} Y^{\top}, T_rE_i\right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2\left\langle \nabla_{E_i} Y^{\top}, T_rE_i\right\rangle\right) \\
&= \left\langle \nabla_{E_i} Y^{\top}, T_rE_i\right\rangle,
\end{aligned}$$

de (3.1),

$$\begin{aligned}
div_M(T_rY^\top) &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{E_i}Y^\top, T_rE_i \right\rangle \\
&= -\langle Y, N\rangle \sum_{i=1}^{n} \langle AT_rE_i, E_i\rangle \\
&= -\langle Y, N\rangle\, tr(A \circ T_r) \\
&= -\langle Y, N\rangle \left(-(r+1)\binom{n}{r+1} H_{r+1}\right) \\
&= (r+1)\binom{n}{r+1} \langle Y, N\rangle\, H_{r+1}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$div_M(T_{r-1}Y^\top) = r\binom{n}{r}\langle Y, N\rangle\, H_r.$$

Sendo ν um campo conormal, exterior e unitário ao longo de ∂M, temos pelo *Teorema da Divergência*, que

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial M} \langle T_{r-1}\nu, Y\rangle\, dS &= \int_M div_M(T_{r-1}Y^\top) dM \\
&= r\binom{n}{r} H_r \int_M \langle Y, N\rangle\, dM.
\end{aligned}$$

(ii) Definimos em M^n a $(n-1)$ forma diferencial

$$\theta_{a,b}(v_1, \dots, v_{n-1}) = det(x, v_1, \dots, v_{n-1}, a, b).$$

Então, pela fórmula de Gauss (2.9) e Weingarten (2.10), temos

$$\begin{aligned}
&(\nabla_Z\theta_{a,b})(X_1, \dots, X_{n-1}) \\
&\quad = Z(\theta_{a,b}(X_1, \dots, X_{n-1})) - \sum_{i=1}^{n-1} \theta_{a,b}(X_1, \dots, \nabla_Z X_i, \dots, X_{n-1}),
\end{aligned}$$

mas,

$$\begin{aligned}
&Z(\theta_{a,b}(X_1, \dots, X_{n-1})) \\
&\quad = Z(\det(x, X_1, \dots, X_{n-1}, a, b)) \\
&\quad = \det(\nabla^\circ_Z x, X_1, \dots, X_{n-1}, a, b) + \sum_{i=1}^{n-1} \det(x, X_1, \dots, \nabla^\circ_Z X_i, \dots, X_{n-1}, a, b) \\
&\qquad + \det(x, X_1, \dots, X_{n-1}, \nabla^\circ_Z a, b) + \det(x, X_1, \dots, X_{n-1}, a, \nabla^\circ_Z b) \\
&\quad = \det(Z, X_1, \dots, X_{n-1}, a, b) + \sum_{i=1}^{n-1} \det(x, X_1, \dots, \nabla^\circ_Z X_i, \dots, X_{n-1}, a, b)
\end{aligned}$$

onde $\nabla^\circ_Z a = \nabla^\circ_Z b = 0$. Logo

$$
\begin{aligned}
&Z(\theta_{a,b}(X_1,\ldots,X_{n-1}))\\
&\quad= \det(Z,X_1,\ldots,X_{n-1},a,b) + \sum_{i=1}^{n-1}\det(x,X_1,\ldots,\nabla^\circ_Z X_i,\ldots,X_{n-1},a,b)\\
&\quad= \det(Z,X_1,\ldots,X_{n-1},a,b) + \sum_{i=1}^{n-1}\det(x,X_1,\ldots,\nabla_Z X_i - \langle AX_i,Z\rangle N\\
&\qquad - \langle X_i,Z\rangle x,\ldots,X_{n-1},a,b)\\
&\quad= \det(Z,X_1,\ldots,X_{n-1},a,b) + \sum_{i=1}^{n-1}\det(x,X_1,\ldots,\nabla_Z X_i,\ldots,X_{n-1},a,b)\\
&\qquad - \langle AX_i,Z\rangle\sum_{i=1}^{n-1}\det(x,X_1,\ldots,N,\ldots,X_{n-1},a,b)\\
&\qquad\quad - \langle X_i,Z\rangle\sum_{i=1}^{n-1}\det(x,X_1,\ldots,x,\ldots,X_{n-1},a,b),
\end{aligned}
$$

o que implica

$$
\begin{aligned}
&Z(\theta_{a,b}(X_1,\ldots,X_{n-1}))\\
&\quad= \det(Z,X_1,\ldots,X_{n-1},a,b) + \sum_{i=1}^{n-1}\det(x,X_1,\ldots,\nabla_Z X_i,\ldots,X_{n-1},a,b)\\
&\qquad - \langle AX_i,Z\rangle\sum_{i=1}^{n-1}\det(x,X_1,\ldots,N,\ldots,X_{n-1},a,b),
\end{aligned}
$$

e também,

$$
\begin{aligned}
(\nabla_Z\theta_{a,b})(X_1,\ldots,X_{n-1}) &= \det(Z,X_1,\ldots,X_{n-1},a,b)\\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1}\det(x,X_1,\ldots,\nabla_Z X_i,\ldots,X_{n-1},a,b)\\
&\qquad - \langle AX_i,Z\rangle\sum_{i=1}^{n-1}\det(x,X_1,\ldots,N,\ldots,X_{n-1},a,b)\\
&\qquad\quad - \sum_{i=1}^{n-1}\theta_{a,b}(X_1,\ldots,\nabla_Z X_i,\ldots,X_{n-1},a,b)
\end{aligned}
$$

de onde concluímos

$$
\begin{aligned}
(\nabla_Z\theta_{a,b})(X_1,\ldots,X_{n-1}) &= \det(Z,X_1,\ldots,X_{n-1},a,b)\\
&\quad - \sum_{i=1}^{n-1}\langle AX_i,Z\rangle\det(x,X_1,\ldots,N,\ldots,X_{n-1},a,b),
\end{aligned}
$$

para todo $Z, X_1, \ldots, X_{n-1} \in \mathfrak{X}(M)$.

Então, pelo corolário (1.40) a derivada exterior de $\theta_{a,b}$, é dada por

$$\begin{aligned}
& d\theta_{a,b}(X_1, \ldots, X_n) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (\nabla_{X_i}\theta_{a,b})(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \det(X_i, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, a, b) \\
&\quad\quad - \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \sum_{j=1, i\neq j}^{n-1} \langle AX_j, X_i\rangle \det(x, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \overset{j}{N}, \ldots, a, b),
\end{aligned}$$

onde $X_1, \ldots, X_n$ é um referencial local ortonormal tangente em M^n que diagonaliza o operador de forma A. Assim,

$$\begin{aligned}
& d\theta_{a,b}(X_1, \ldots, X_n) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (-1)^{i-1} \det(X_1, \ldots, X_n, a, b) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{2i} (-1)^{-1} \det(X_1, \ldots, X_n, a, b) \\
&\quad = -\sum_{i=1}^{n} 1^i \det(X_1, \ldots, X_n, a, b) \\
&\quad = -n \det(X_1, \ldots, X_n, a, b).
\end{aligned}$$

Então escrevendo

$$a = a^{\top} - \langle a, N\rangle N + \langle a, x\rangle x \quad \text{e} \quad b = b^{\top} - \langle b, N\rangle N + \langle b, x\rangle x,$$

concluímos que

$$d\theta_{a,b} = n(\langle a, N\rangle \langle b, x\rangle - \langle b, N\rangle \langle a, x\rangle)dM,$$

e consequentemente,

$$\begin{aligned}
d\theta_{a,b} &= n(\langle a, N\rangle \langle b, x\rangle - \langle b, N\rangle \langle a, x\rangle)dM \\
&= n(\langle \langle b, x\rangle a - \langle a, x\rangle b, N\rangle)dM \\
&= n(\langle \langle a, b\rangle Y_{a,b}, N\rangle)dM \\
&= n(\langle a, b\rangle \langle Y_{a,b}, N\rangle)dM.
\end{aligned}$$

Agora, usando o Teorema de Stokes, temos

$$\begin{aligned}\oint_{\partial M} \theta_{a,b} dS &= \int_M d\theta_{a,b} = \int_M n \langle a, b\rangle \langle Y_{a,b}, N\rangle \, dM \\ &= n\langle a, b\rangle \int_M \langle Y_{a,b}, N\rangle \, dM.\end{aligned}$$

Por outro lado, aplicando o item (i) da Proposição (3.2) ao campo de Killing $Y_{a,b}$, obtemos

$$\begin{aligned}\oint_{\partial M} \langle T_{r-1}\nu, Y_{a,b}\rangle \, dS &= r\binom{n}{r} H_r \int_M \langle Y_{a,b}, N\rangle \, dM \\ &= \frac{r}{n}\binom{n}{r}\frac{1}{\langle a, b\rangle} H_r \oint_{\partial M} \theta_{a,b} dS \\ &= \binom{n-1}{r-1}\frac{1}{\langle a, b\rangle} H_r \oint_{\partial M} \det(x, v_1, \ldots, v_{n-1}, a, b) dS.\end{aligned}$$

■

Capítulo 4

Resultados Principais

No presente capítulo, apresentaremos os resultados deste trabalho. Para a demonstração, utilizaremos as Fórmulas Integrais Tipo-Minkowski apresentadas no capítulo anterior. Logo após, faremos uma aplicação deste resultado quando o bordo é esférico.

4.1 Uma Fórmula do Fluxo para o Campo $Y_{a,b}$

Se Σ é uma subvariedade fechada $(n-1)$-dimensional em $L^n(\tau) \hookrightarrow \mathcal{H}^{n+1}$, uma hipersuperfície tipo-espaço $x : M^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ é dita uma hipersuperfície com bordo Σ se a restrição da imersão x ao bordo ∂M é um difeomorfismo sobre Σ. Neste caso, identificamos $\partial M = \Sigma$.

Observação 4.1 *Para a demonstração será utilizado o Teorema de Dualidade de Alexander (cf. [20], pág.77) que para o nosso propósito terá a finalidade de que dado um n-ciclo*[1] *imerso em um espaço simplesmente conexo, ele é o bordo de um domínio compacto imerso neste espaço.*

Passemos agora à prova do resultado principal deste trabalho que corresponde ao **Teorema 1** da referência [14].

Teorema 4.1 *Seja $x : M^n \to \mathcal{H}^{n+1} \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ uma imersão tipo-espaço de uma hipersuperfície compacta, cujo bordo é uma subvariedade mergulhada $(n-1)$-dimensional*

[1] Veja definição em [20], pág. 1.

$\Sigma = x(\partial M)$ a qual esta contida num hiperplano horizontal $L^n(\tau)$, para algum $\tau > 0$. Seja $Y_{a,b}$ um campo de Killing $\frac{1}{\langle a, b\rangle}(\langle b, .\rangle\, a - \langle a, .\rangle\, b)$ em $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Se a r-ésima curvatura média H_r é constante, para algum r, $1 \le r \le n$, então

$$\oint_{\partial M} \langle T_{r-1}\nu, Y_{a,b}\rangle\, dS = -r\binom{n}{r} H_r vol(\Omega),$$

onde $T_{r-1} : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é a $(r-1)$-ésima transformação de Newton associada a segunda forma fundamental de x, e Ω é um domínio em $L^n(\tau)$ limitado por Σ.

Demonstração. Notemos inicialmente que para uma escolha adequada da orientação em M e Ω, podemos supor que $M \cup \Omega$ é um n-ciclo de $\mathcal{H}^{n+1}$. Então pela Observação (4.1) temos que $M \cup \Omega = \partial D$, onde D é um domínio compacto, orientado e imerso em $\mathcal{H}^{n+1} \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ (mais precisamente, podemos escolher as orientações de M e Ω de tal modo que ambas apontem para fora em relação ao bordo do domínio D).

Por outro lado, uma vez que $Y_{a,b}$ é um campo de Killing no de Sitter, temos que

$$\left\langle \overline{\nabla}_V Y_{a,b}, W\right\rangle + \left\langle V, \overline{\nabla}_W Y_{a,b}\right\rangle = 0,\ \forall\ V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{n+1}),$$

em particular, quando $V = W$,

$$\left\langle V, \overline{\nabla}_V Y_{a,b}\right\rangle = 0. \tag{4.1}$$

Agora, sendo $\{E_1, \ldots, E_{n+1}\} \subset \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{n+1})$ um referencial ortonormal em uma vizinhança de $p \in \mathbb{S}_1^{n+1}$, temos

$$div_{\mathbb{S}_1^{n+1}}(Y_{a,b}) = \sum_{i=1}^{n+1} \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} Y_{a,b}, E_i\right\rangle.$$

Assim, segue da equação (4.1) que

$$\left\langle \overline{\nabla}_{E_i} Y_{a,b}, E_i\right\rangle = 0,$$

logo $div_{\mathbb{S}_1^{n+1}}(Y_{a,b}) = 0$.

Uma vez que $\mathcal{H}^{n+1}$ é a metade do de Sitter, temos que isso também é verdade para $\mathcal{H}^{n+1}$.

Assim pelo Teorema da Divergência,

$$\oint_{\partial D} \langle Y_{a,b}, \overline{v}\rangle\, dS = \int_D div_{\mathbb{S}_1^{n+1}}(Y_{a,b}) = 0,$$

onde $\overline{v} \in T_xD$ denota o vetor, unitário e conormal apontando para fora ao longo de ∂D e dS é o elemento área n-dimensional induzida de ∂D. Então, uma vez que N e N_τ estão na mesma orientação, obtemos que

$$\int_M \langle Y_{a,b}, N\rangle\, dM - \int_\Omega \langle Y_{a,b}, N_\tau\rangle\, d\Omega = 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
&\int_M \langle Y_{a,b}, N\rangle\, dM \\
&= \int_\Omega \langle Y_{a,b}, N_\tau\rangle\, d\Omega \\
&= \int_\Omega \left\langle \frac{1}{\langle a,b\rangle}(\langle b,x\rangle\, a - \langle a,x\rangle\, b), N_\tau \right\rangle d\Omega \\
&= \int_\Omega \frac{1}{\langle a,b\rangle}(\langle b,x\rangle\, \langle a,N_\tau\rangle - \langle a,x\rangle\, \langle b,N_\tau\rangle) d\Omega \\
&= \frac{1}{\langle a,b\rangle}\int_\Omega (\langle b,x\rangle \left\langle a, \frac{1}{\tau}a - x\right\rangle - \langle a,x\rangle \left\langle b, \frac{1}{\tau}a - x\right\rangle) d\Omega \\
&= \frac{1}{\langle a,b\rangle}\int_\Omega (\langle b,x\rangle\, \frac{1}{\tau}\, \langle a,a\rangle - \langle b,x\rangle\, \langle a,x\rangle - \langle a,x\rangle\, \frac{1}{\tau}\, \langle b,a\rangle + \langle a,x\rangle\, \langle b,x\rangle) d\Omega \\
&= \frac{1}{\langle a,b\rangle}\int_\Omega (\langle b,x\rangle\, \frac{1}{\tau}\, \langle a,a\rangle - \langle a,x\rangle\, \frac{1}{\tau}\, \langle b,a\rangle) d\Omega,
\end{aligned}$$

sendo $\langle a,a\rangle = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\int_M \langle Y_{a,b}, N\rangle\, dM &= -\frac{1}{\langle a,b\rangle}\int_\Omega \langle a,x\rangle\, \frac{1}{\tau}\, \langle b,a\rangle\, d\Omega \\
&= -\frac{1}{\langle a,b\rangle}\int_\Omega \tau\frac{1}{\tau}\, \langle b,a\rangle\, d\Omega \\
&= -\int_\Omega d\Omega \\
&= -\, vol(\Omega).
\end{aligned}$$

Pelo item (i) da Proposição (3.2), obtemos

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial M} \langle T_{r-1}\nu, Y_{a,b}\rangle\, dS &= r\binom{n}{r} H_r \int_M \langle Y_{a,b}, N\rangle\, dM \\
&= r\binom{n}{r} H_r(-\, vol(\Omega)) \\
&= -\, r\binom{n}{r} H_r vol(\Omega).
\end{aligned}$$

■

Como uma consequência do teorema anterior, consideremos o modelo warped $-\mathbb{R}\times_{\exp(t)}\mathbb{R}^n$ para $\mathcal{H}^{n+1}$, como em (2.17). Neste modelo, desde que $\mathcal{K}$ aponta para o passado, temos que

$$\mathcal{K}(t,p) = -\ \exp(t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(t,p)}.$$

Observe que pela proposição (2.13), o campo $\mathcal{K}$ definido acima é tipo-tempo, conforme fechado e tem fator conforme igual a $-\ \exp(t)$. Diante disso temos o seguinte resultado:

Corolário 4.2 *Seja $x : M^n \to \mathcal{H}^{n+1} \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ uma imersão tipo-espaço de uma hipersuperfície compacta, cujo bordo é uma subvariedade mergulhada $(n-1)$-dimensional $\Sigma = x(\partial M)$ a qual esta contida num hiperplano horizontal $L^n(\tau)$, para algum $\tau > 0$. Se a r-ésima curvatura média H_r é constante, para algum r, $1 \le r \le n$, e que $b \in L^n(\tau)$. Então*

$$\oint_{\partial M} \langle T_{r-1}\nu, Y_{a,b}\rangle\, dS = \frac{r}{n+1}\binom{n}{r} H_r \frac{d}{dt} vol(\varphi_t(\Omega))\bigg|_{t=0},$$

onde $t = \ln(\tau)$, φ_t é o fluxo de $\mathcal{K}$ e Ω é um domínio em $L^n(\tau)$ limitado por Σ.

Demonstração. Seja φ o fluxo local gerado pelo campo $\mathcal{K}$, e para cada $t \in \mathbb{R}$, seja D_t o domínio de φ_t. Se Ω é um domínio de integração compacto contido em D_t, então

$$vol(\varphi_t(\Omega)) = \int_{\varphi_t(\Omega_t)} d\Omega_t = \int_{\Omega} \varphi_t^*(d\Omega_t), \tag{4.2}$$

onde $d\Omega_t$ denota o elemento volume n-dimensional de $\varphi_t(\Omega)$ com respeito a métrica induzida e na segunda igualdade foi usando o teorema de mudança de variáveis para integrais múltiplas.

Como o integrando é uma função suave de t, podemos diferenciar esta expressão com respeito a t pela derivação sob o sinal de integração (em verdade, usamos a partição da unidade para expressar a integral como soma de integrais com domínios em $\mathbb{R}^n$, e então aplicamos a derivação sob o sinal de integração em cada uma delas).

Assim, usando (4.2) e os Lemas (1.11) e (1.12), obtemos

$$\frac{d}{dt} vol(\varphi_t(\Omega))\bigg|_{t=t_0} = \int_{\Omega} \frac{d}{dt}(\varphi_t^*(d\Omega_t))\bigg|_{t=t_0} = \int_{\Omega} \varphi_{t_0}^*(\mathcal{L}_{\mathcal{K}}(d\Omega_{t_0})) = \int_{\Omega} \varphi_{t_0}^*(div\mathcal{K}\ d\Omega_{t_0}).$$

E do teorema de mudança de variáveis, concluímos

$$\frac{d}{dt} vol(\varphi_t(\Omega))\bigg|_{t=t_0} = \int_{\varphi_{t_0}(\Omega)} div\mathcal{K}\ d\Omega_{t_0}.$$

Como $\mathcal{K}$ é um campo conforme e fechado com fator conforme $\phi = -\ \exp(t)$, temos pela Proposição (2.15) que o divergente de $\mathcal{K}$ é dado por

$$div\mathcal{K} = -\ (n+1)\exp(t).$$

Assim

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}vol(\varphi_t(\Omega))\Big|_{t=t_0} &= -\ (n+1)\exp(t_0)\int_{\varphi_{t_0}(\Omega)} d\Omega_{t_0}\\ &= -\ (n+1)\exp(t_0)vol(\varphi_{t_0}(\Omega)).\end{aligned}$$

Consequentemente, tomando $t_0 = 0$, temos

$$\frac{d}{dt}vol(\varphi_t(\Omega))\Big|_{t=0} = -\ (n+1)\exp(0)vol(\varphi_0(\Omega)) = -\ (n+1)vol(\Omega).$$

Logo,

$$-\ \frac{1}{n+1}\frac{d}{dt}vol(\varphi_t(\Omega))\Big|_{t=0} = vol(\Omega),$$

e portanto, pelo teorema (4.1)

$$\oint_{\partial M}\langle T_{r-1}\nu, Y_{a,b}\rangle\, dS = \frac{r}{n+1}\binom{n}{r}H_r\frac{d}{dt}vol(\varphi_t(\Omega))\Big|_{t=0}.$$

■

4.2 Bordo Esférico e Curvatura Média

Nesta parte, faremos uma aplicação do Teorema (4.1) no caso em que o bordo é esférico, obtendo assim, uma relação entre a curvatura média H de M^n e a geometria do seu bordo. Em todo o desenvolvimento desta aplicação consideraremos N como um campo normal, unitário apontando para o futuro, para assim, usarmos a Estimativa do gradiente. Resultado este, devido a Montiel [24] e que se encontra demonstrado no Apêndice deste trabalho.

Proposição 4.3 (Estimativa do Gradiente) *Seja $\psi : M^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma imersão tipo-espaço de uma variedade compacta M^n com bordo não-vazio no Steady State space. Suponha que ψ tenha curvatura média constante $H > 1$ com respeito ao campo unitário e normal N apontando para o passado e que a aplicação ψ leva ∂M^n no slice temporal $L^n(\tau)$, para algum $\tau > 0$. Então podemos escolher um campo unitário e normal n da* *imersão* $\psi\big|_{\partial M^n} : \partial M^n \to L^n(\tau)$ *tal que* $\langle N, n\rangle > 0$. *Assuma que, com respeito a esta orientação, a curvatura média de* $\psi\big|_{\partial M^n} : \partial M^n \to L^n(\tau)$ *é não negativa. Então*

$$H\langle \psi, a\rangle + \langle N, a\rangle \geq 0,$$

e também $\langle N, a\rangle \geq -H\tau$ *em* M^n,

e seja o,

Teorema 4.4 *Seja* $x : M^n \to \mathcal{H}^{n+1} \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ *uma imersão tipo-espaço de uma hipersuperfície compacta* M^n *com bordo não-vazio* ∂M *no Steady State space. Suponha que* M^n *tem curvatura média constante* $H > 1$ *com respeito ao campo normal unitário* N *apontando para o futuro e que* $\partial M = S^{n-1}(b,\rho)$ *é uma esfera geodésica* $(n-1)$*-dimensional com centro em* b *e raio* ρ *contida num hiperplano horizontal* $L^n(\tau)$*, para algum* $\tau > 0$. *Então*

$$\rho H - \left|1 - \frac{\rho^2}{2}\right|\sqrt{H^2 - 1} \leq 1.$$

Demonstração. Consideremos $S^{n-1}(b,\rho) = \{x \in L^n(\tau);\ d(x,b) = \rho\}$ como sendo a esfera geodésica $(n-1)$-dimensional com centro b e raio $\rho > 0$ contida no hiperplano $L^n(\tau) \hookrightarrow \mathcal{H}^{n+1}$. Mostremos primeiramente que

$$S^{n-1}(b,\rho) = \{x \in L^n(\tau);\ \langle x - b, x - b\rangle = \rho^2\}$$

ou equivalentemente,

$$S^{n-1}(b,\rho) = \left\{x \in L^n(\tau);\ \langle x, b\rangle = 1 - \frac{\rho^2}{2}\right\}$$

uma vez que

$$\rho^2 = \langle x - b, x - b\rangle = \langle x, x\rangle - 2\langle x, b\rangle + \langle b, b\rangle = 2 - 2\langle x, b\rangle$$

temos, $-2\langle x, b\rangle = -2 + \rho^2$, isto é, $\langle x, b\rangle = 1 - \dfrac{\rho^2}{2}$.

Por um lado, observe que

$$T_b(L^n(\tau)) = \{v \in \mathbb{L}^{n+2};\ \langle v, b\rangle = 0 \text{ e } \langle v, a\rangle = 0\}.$$

Por outro lado, dada $\gamma_v : \mathbb{R} \to L^n(\tau)$, definida por $\gamma_v(s) = -\dfrac{s^2}{2\tau}a + vs + b$, que parte de b na direção de $v \in T_b(L^n)$, $|v| = 1$ é uma geodésica. Com efeito, primeiramente vejamos que $\gamma_v(\mathbb{R}) \subset L^n(\tau)$, mas isso segue de

$$\left\langle -\frac{s^2}{2\tau}a + vs + b, a\right\rangle = -\frac{s^2}{2\tau}\langle a, a\rangle + s\langle v, a\rangle + \langle b, a\rangle = \tau,\ \forall\ s \in \mathbb{R},$$

uma vez que $\langle a, a\rangle = \langle v, a\rangle = 0$ e $b \in L^n(\tau)$. Para ver que $\gamma_v(s)$ é uma geodésica de $L^n(\tau)$, basta ver que $\gamma_v''(s) = -\dfrac{1}{\tau}a$ e dai decorre que $\langle \gamma_v''(s), a\rangle = -\dfrac{1}{\tau}\langle a, a\rangle = 0$.

Assim dado $q \in S^{n-1}(b, \rho)$, como $q = \gamma_v(\rho)$ para alguma geodésica γ_v onde $\gamma_v(0) = b$, temos que $q = -\dfrac{\rho^2}{2\tau}a + v\rho + b$, donde $\langle q, b\rangle = 1 - \dfrac{\rho^2}{2}$ e portanto

$$S^{n-1}(b, \rho) \subset \left\{x \in L^n(\tau); \langle x, b\rangle = 1 - \frac{\rho^2}{2}\right\}.$$

Reciprocamente, dado $q \in \left\{x \in L^n(\tau); \langle x, b\rangle = 1 - \dfrac{\rho^2}{2}\right\}$, consideremos

$$v = \frac{1}{\rho}\left(q + \frac{\rho^2}{2\tau}a - b\right) \in \mathbb{L}^{n+2}$$

e observemos que

$$\begin{aligned} \langle v, b\rangle &= \frac{1}{\rho}\langle q, b\rangle + \frac{\rho}{2\tau}\langle a, b\rangle - \frac{1}{\rho}\langle b, b\rangle = \frac{1}{\rho}\langle q, b\rangle + \frac{\rho}{2} - \frac{1}{\rho} \\ &= \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{\rho^2}{2}\right) + \frac{\rho}{2} - \frac{1}{\rho} = 0. \end{aligned}$$

Portanto $v \in T_b(L^n)$.

Além disso,

$$\begin{aligned} \langle v, v\rangle &= \frac{1}{\rho^2}\langle q, q\rangle + \frac{1}{2\tau}\langle q, a\rangle - \frac{1}{\rho^2}\langle q, b\rangle + \frac{1}{2\tau}\langle q, a\rangle + \frac{\rho^2}{4\tau}\langle a, a\rangle \\ &- \frac{1}{2\tau}\langle b, a\rangle - \frac{1}{\rho^2}\langle q, b\rangle - \frac{1}{2\tau}\langle b, a\rangle - \frac{1}{2\tau}\langle b, a\rangle + \frac{1}{\rho^2}\langle b, b\rangle \\ &= \frac{2}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\left(1 - \frac{\rho^2}{2}\right) = 1, \end{aligned}$$

isto é, $|v| = 1$.

Note também que $\gamma_v(\rho) = -\dfrac{\rho^2}{2\tau}a + v\rho + b$ e sendo $v = \dfrac{1}{\rho}\left(q + \dfrac{\rho^2}{2\tau}a - b\right)$ temos

$$q = -\frac{\rho^2}{2\tau}a + \rho v + b = \gamma_v(\rho).$$

Logo $q \in S^{n-1}(b, \rho)$.

Portanto

$$\left\{x \in L^n(\tau); \langle x, b\rangle = 1 - \frac{\rho^2}{2}\right\} \subset S^{n-1}(b, \rho).$$

Assim,

$$S^{n-1}(b, \rho) = \left\{x \in L^n(\tau); \langle x, b\rangle = 1 - \frac{\rho^2}{2}\right\},$$

onde $\langle , \rangle$ denota a métrica induzida pela inclusão $L^n(\tau) \hookrightarrow \mathcal{H}^{n+1}$.

Agora, fazendo $r = 1$ e $\Omega = B^n(\rho)$ no teorema (4.1), temos

$$\oint_{\partial M} \langle \nu, Y_{a,b} \rangle \, dS = - \, nHvol(B^n(\rho)),$$

e assim,

$$\begin{aligned} nHvol(B^n(\rho)) &= \left| \oint_{\partial M} \langle \nu, Y_{a,b} \rangle \, dS \right| \leq \oint_{\partial M} \left| \langle \nu, Y_{a,b} \rangle \right| dS \\ &= \oint_{\partial M} \left| \left\langle \nu, \frac{1}{\langle a, b \rangle} \left(\langle b, x \rangle \, a - \langle a, x \rangle \, b \right) \right\rangle \right| dS \\ &= \frac{1}{\langle a, b \rangle} \oint_{\partial M} \left| \langle b, x \rangle \, \langle a, \nu \rangle - \langle a, x \rangle \, \langle b, \nu \rangle \right| dS \\ &= \frac{1}{\tau} \oint_{\partial M} \left| \left(1 - \frac{\rho^2}{2} \right) \langle a, \nu \rangle - \tau \, \langle b, \nu \rangle \right| dS, \end{aligned}$$

da desigualdade triangular, temos

$$nHvol(B^n(\rho)) \leq \left(\frac{1}{\tau} \left| 1 - \frac{\rho^2}{2} \right| \sup_{\partial M} | \, \langle a, \nu \rangle \, | + \sup_{\partial M} | \, \langle b, \nu \rangle \, | \right) \oint_{\partial M} dS.$$

Agora observando que os vetores b e ν são tipo-espaço, podemos usar a desigualdade de Cauchy-Schwarz clássica para obter,

$$\begin{aligned} nHvol(B^n(\rho)) &\leq \left(\frac{1}{\tau} \left| 1 - \frac{\rho^2}{2} \right| \sup_{\partial M} | \, \langle a, \nu \rangle \, | + 1 \right) area(S^{n-1}(\rho)) \\ &= \left(\frac{1}{\tau} \left| 1 - \frac{\rho^2}{2} \right| \sup_{\partial M} | \, \langle a, \nu \rangle \, | + 1 \right) \frac{n \; vol(B^n(\rho))}{\rho}. \end{aligned}$$

Logo

$$\rho H \leq \frac{1}{\tau} \left| 1 - \frac{\rho^2}{2} \right| \sup_{\partial M} | \, \langle a, \nu \rangle \, | + 1.$$

Por outro lado, seja $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ um referencial ortonormal local ao longo de ∂M. Podemos completar este referencial de modo que, $\{x, N, \nu, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ seja um referencial ortonormal local em $\mathbb{L}^{n+2}$, e assim escrevemos $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ como

$$a = b_1 x + b_2 N + b_3 \nu + b_4 e_1 + \ldots + b_{n-1} e_{n-1},$$

onde $b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Então

$$a = \langle a, x \rangle x - \langle a, N \rangle N + \langle a, \nu \rangle \nu + \langle a, e_1 \rangle e_1 + \ldots + \langle a, e_{n-1} \rangle e_{n-1},$$

daí,

$$a = \langle a, x\rangle x - \langle a, N\rangle N + \langle a, \nu\rangle \nu,$$

pois $\langle a, e_i\rangle = 0,$ para todo $e_i \in T_x(L^n(\tau)),\ i = 1, \ldots, n-1.$

Logo

$$\begin{aligned}\langle a, a\rangle &= \Big\langle \langle a, x\rangle x - \langle a, N\rangle N + \langle a, \nu\rangle \nu, \langle a, x\rangle x - \langle a, N\rangle N + \langle a, \nu\rangle \nu\Big\rangle \\ &= \langle a, x\rangle^2 - \langle a, N\rangle^2 + \langle a, \nu\rangle^2,\end{aligned}$$

como $\langle a, a\rangle = 0$, temos que

$$\langle a, \nu\rangle^2 = \langle a, N\rangle^2 - \langle a, x\rangle^2.$$

Consequentemente,

$$\rho H \leq \frac{1}{\tau}\left|1 - \frac{\rho^2}{2}\right|\sqrt{\langle a, N\rangle^2 - \tau^2} + 1. \tag{4.3}$$

Finalmente, como supomos que $H > 1$, podemos usar a Estimativa do Gradiente

$$-\tau H \leq \langle a, N\rangle < 0,$$

para concluir que

$$\rho H - \left|1 - \frac{\rho^2}{2}\right|\sqrt{H^2 - 1} \leq 1.$$

∎

Antes de apresentarmos o próximo resultado, faremos um breve comentário a respeito da escolha de $H > 1$ no teorema anterior. A um primeiro olhar, o leitor é levado a pensar que a motivação pela escolha de $H > 1$ é puramente analítica, o que não é em sua totalidade. Observamos que o bordo ∂M da hipersuperfície M esta contido na folha que é uma variedade de curvatura média identicamente 1. Podemos então, pensar em M como sendo um "leve impulso" que foi dado em seu bordo de modo que que ela assuma um corpo acima da variedade mas que não se desprenda da folha. Sendo assim, é geometricamente aceitável supor que $H > 1$ em M, uma vez que seu corpo esta estritamente acima da folha.

Corolário 4.5 *Seja $x : M^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço compacta com curvatura média constante H e cujo o bordo ∂M é uma esfera geodésica de raio $\sqrt{2}$ contida num hiperplano horizontal. Então*

$$|H| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Demonstração. Com efeito, basta observar que na estimativa (4.3), não é pedido que a curvatura média seja maior que 1. Em verdade, para esta estimativa a curvatura média só precisa ser constante. Então fazendo $\rho = \sqrt{2}$ e observando que $|H| = H$ obtemos o resultado. ■

Apêndice A

Apêndice

A.1 Uma Prova Alternativa para a Proposição 4.1

Nesta seção, daremos uma demonstração alternativa para o Teorema (4.1) no caso em que o bordo da hipersuperfície tipo espaço $x : M^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ é esférico, isto é, $\partial M^n = S^{n-1}(b,\rho) \subset L^n(\tau)$.

Teorema A.1 *Seja $x : M^n \to \mathcal{H}^{n+1} \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ uma imersão tipo-espaço de uma hipersuperfície compacta, cujo bordo é a esfera geodésica $S^{n-1}(b,\rho)$ a qual esta contida num hiperplano horizontal $L^n(\tau)$, para algum $\tau > 0$. Seja $Y_{a,b}$ um campo de Killing $\dfrac{1}{\langle a,b\rangle}(\langle b,.\rangle\, a - \langle a,.\rangle\, b)$ em $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Se a r-ésima curvatura média H_r é constante, para algum r, $1 \le r \le n$, então*

$$\oint_{\partial M} \langle T_{r-1}\nu, Y_{a,b}\rangle\, dS = -r\binom{n}{r} H_r vol(B^n(\rho)).$$

Demonstração. Pelo item (ii) da Proposição (3.2), é suficiente mostrar que

$$\oint_{\partial M^n} \det(x, e_1, \ldots, e_{n-1}, a, b) dS = -\; n\; \tau vol(B^n(\rho)).$$

Com efeito, como N_τ aponta para o passado cronológico e sendo $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ um referencial ortonormal local tangente positivamente orientado ao longo do bordo ∂M^n, temos que o referencial $\{x, -N_\tau, \eta, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ é positivamente orientado e

$$\det(x, -N_\tau, \eta, e_1, \ldots, e_{n-1}) = 1.$$

Daí temos que o $\det(x, e_1 \ldots, e_{n-1}, a, b)$ é dado por

$$\det \begin{pmatrix} \langle x, x\rangle & \langle e_1, x\rangle & \ldots & \langle e_{n-1}, x\rangle & \langle a, x\rangle & \langle b, x\rangle \\ \langle x, e_1\rangle & \langle e_1, e_1\rangle & \ldots & \langle e_{n-1}, e_1\rangle & \langle a, e_1\rangle & \langle b, e_1\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle x, e_{n-1}\rangle & \langle e_1, e_{n-1}\rangle & \ldots & \langle e_{n-1}, e_{n-1}\rangle & \langle a, e_{n-1}\rangle & \langle b, e_{n-1}\rangle \\ \langle x, -N_\tau\rangle & \langle e_1, -N_\tau\rangle & \ldots & \langle e_n, -N_\tau\rangle & \langle a, -N_\tau\rangle & \langle b, -N_\tau\rangle \\ \langle x, \eta\rangle & \langle e_1, \eta\rangle & \ldots & \langle e_{n-1}, \eta\rangle & \langle a, \eta\rangle & \langle b, \eta\rangle \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\det(x, e_1 \ldots, e_{n-1}, a, b) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \tau & 1 - \dfrac{\rho^2}{2} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \langle b, e_1\rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \langle b, e_{n-1}\rangle \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \tau & -\dfrac{\rho^2}{2} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \langle b, \eta\rangle \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\det(x, e_1 \ldots, e_{n-1}, a, b) = \tau\langle b, \eta\rangle.$$

Mas por outro lado a geodésica $\gamma_v : \mathbb{R} \to L^n(\tau)$ que parte de b na direção de $v \in T_b(L^n(\tau))$, $|v| = 1$ é dada por $\gamma_v(s) = -\dfrac{s^2}{2\tau}a + vs + b$, e assim $\eta = \gamma_v'(\rho)$ para alguma geodésica γ_v. Daí, $\eta = -\dfrac{\rho}{\tau}a + v$.

Logo

$$\langle b, \eta\rangle = \langle b, -\frac{\rho}{\tau}a + v\rangle = -\rho,$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial M} \det(x, e_1 \ldots, e_{n-1}, a, b)dS &= \oint_{\partial M} -\tau\rho dS = -\tau\rho \oint_{\partial M} dS \\ &= -\tau\rho\ area(S^{n-1}(\rho)) \\ &= -\tau\rho\frac{n\ vol(B^n(\rho))}{\rho} \\ &= -\tau\ n\ vol(B^n(\rho)). \end{aligned} \tag{A.1}$$

Usando o item (ii) da Proposição (3.2) juntamente com a equação (A.1), temos

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial M} \langle T_{r-1}\nu, Y_{a,b}\rangle &= \binom{n-1}{r-1} H_r \frac{1}{\langle a,b\rangle} \oint_{\partial M} \det(x, e_1, \ldots, e_{n-1}, a, b) dS \\
&= \binom{n-1}{r-1} H_r \frac{1}{\langle a,b\rangle} (-\ n\ \tau vol(B^n(\rho))) \\
&= \binom{n-1}{r-1} H_r \frac{1}{\tau} (-\ n\ \tau vol(B^n(\rho))) \\
&= -\ n \binom{n-1}{r-1} H_r vol(B^n(\rho)) \\
&= -\ n\ \frac{r}{n} \binom{n}{r} H_r vol(B^n(\rho)) \\
&= -\ r \binom{n}{r} H_r vol(B^n(\rho)).
\end{aligned}$$

■

A.2 A Estimativa do Gradiente

Nesta parte do trabalho direcionaremos o nosso estudo ao artigo do Montiel [24] intitulado por: *Complete non-compact spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in de Sitter spaces*, publicado no ano de 2003.

Antes de mostrarmos a *Estimativa do Gradiente*, exibiremos alguns resultados importantes que servirão de base para a demonstração bem como para o entendimento da mesma.

Observação A.1 *Convém observar que neste artigo a definição da curvatura média é a mesma apresentada neste trabalho a menos de sinal. Além disso, nesta demonstração, será considerado o modelo do semi-espaço*

$$\phi : \mathcal{H}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}_{+} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$$

para o Steady State space dado por

$$\phi(p) = \frac{1}{\langle p, a\rangle}(p - \langle p,a\rangle b - \langle p,b\rangle a, 1),$$

onde $a, b \in \mathbb{L}^{n+2}$ são vetores tipo-luz tais que $\langle a,b\rangle = 1$.

Lema A.1 (Princípio da Tangência) *Sejam M_1^n e M_2^n duas hipersuperfícies tipo espaço imersas no Steady State space com a mesma curvatura média constante (com* *respeito a direção passada ou orientação para cima). Suponha que eles são tangentes em uma vizinhança não vazia do ponto p e que M_1^n situa-se acima de M_2^n em p. Então eles coincidem em uma vizinhança de p.*

Observação A.2 *Existe uma versão análoga do princípio da tangência no bordo quando o ponto em comum p esta em $\partial M_1^n \cap \partial M_2^n$, uma vez que assumimos que ∂M_1^n e ∂M_2^n são tangentes em p.*

Observação A.3 (Comparação da Curvatura Média) *Se as duas hipersuperfícies M_1^n e M_2^n não tem a mesma curvatura média e representamos por H_1 e H_2 suas funções curvaturas médias, temos que, quando M_1^n esta sobre M_2^n em um ponto em comum onde elas são tangentes, então $H_1 \leq H_2$ neste ponto.*

Lema A.2 *Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço compacta do Steady State space $\mathcal{H}^{n+1}$ com curvatura média constante H e com o bordo contido em um slice temporal $L^n(t)$ para algum $t \in (0, +\infty)$. Então $H \geq 1$ se, e somente se, a hipersuperfície M^n esta contida em $L^n(t)_+ = \{(x, x_{n+1}) \in \mathcal{H}^{n+1};\ x_{n+1} \geq t\}$.*

Finalmente, apresentaremos a demonstração do

Teorema A.2 (Estimativa do Gradiente) *Seja $\psi : M^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma imersão tipo-espaço de uma variedade compacta M^n com bordo não-vazio no steady state space. Suponha que ψ tenha curvatura média constante $H > 1$ com respeito ao campo unitário e normal N apontando para o passado e que a aplicação ψ leva ∂M^n no slice temporal $L^n(\tau)$, para algum $\tau > 0$. Então podemos escolher um campo unitário e normal n da imersão $\psi\big|_{\partial M^n} : \partial M^n \to L^n(\tau)$ tal que $\langle N, n\rangle > 0$. Assuma que, com respeito a esta orientação, a curvatura média de $\psi\big|_{\partial M^n} : \partial M^n \to L^n(\tau)$ é não negativa. Então*

$$H\langle \psi, a\rangle + \langle N, a\rangle \geq 0,$$

e também $\langle N, a\rangle \geq -H\tau$ em M^n.

Demonstração. Denotemos por ∇ o gradiente da função e consideremos:

$$\langle \psi, a\rangle : M^n \to \mathbb{R}.$$

Vamos obter o gradiente, Hessiano e Laplaciano.

Seja $v \in T_pM$, então

$$\begin{aligned} \langle \nabla\langle \psi, a\rangle, v\rangle &= v\langle \psi, a\rangle = \langle \nabla^\circ_v \psi, a\rangle + \langle \psi, \nabla^\circ_v a\rangle = \langle v, a\rangle \\ &= \langle v, a^\top\rangle,\ \forall\ v \in T_pM. \end{aligned}$$

Como a métrica é não degenerada, temos

$$\nabla\langle\psi, a\rangle = a^{\top} = a + \langle a, N\rangle N - \langle a, \psi\rangle\psi.$$

Para o Hessiano, temos que para quaisquer $v, w \in T_pM$,

$$\langle(Hess\langle\psi, a\rangle)v, w\rangle = \langle\nabla_v(\nabla\langle\psi, a\rangle), w\rangle,$$

daí pela fórmula de Gauss (2.9)

$$\begin{aligned}
\langle\nabla_v a^{\top}, w\rangle &= \langle\nabla_v(a + \langle a, N\rangle N + \langle a, \psi\rangle\psi), w\rangle \\
&= \langle\nabla_v a, w\rangle + \langle\nabla_v(\langle a, N\rangle N), w\rangle + \langle\nabla_v(\langle a, \psi\rangle\psi), w\rangle \\
&= \underbrace{\langle\nabla^{\circ}_v a + \langle Av, a\rangle N + \langle v, a\rangle\psi, w\rangle}_{(=0)} + \langle\langle a, N\rangle\nabla^{\circ}_v N + v\langle a, N\rangle N, w\rangle \\
&\quad - \langle\langle a, \psi\rangle\nabla^{\circ}_v\psi + v\langle a, \psi\rangle\psi, w\rangle \\
&= -\langle a, N\rangle\langle Av, w\rangle - \langle a, \psi\rangle\langle v, w\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\langle(Hess\langle\psi, a\rangle)v, w\rangle = -\langle a, N\rangle\langle Av, w\rangle - \langle a, \psi\rangle\langle v, w\rangle, \ \forall\ v, w \in T_pM.$$

Para o Laplaciano, seja $E_1, \ldots, E_n$ um referencial ortonormal em $p \in M^n \subset \mathbb{S}^{n+1}_1$, então

$$\begin{aligned}
\Delta\langle\psi, a\rangle &= div(\nabla\langle\psi, a\rangle) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{E_i}(\nabla\langle\psi, a\rangle), E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle(Hess\langle\psi, a\rangle)E_i, E_i\rangle,
\end{aligned}$$

uma vez que $nH = tr(A)$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta\langle\psi, a\rangle &= -\sum_{i=1}^{n}(\langle a, N\rangle\langle AE_i, E_i\rangle + \langle a, \psi\rangle\langle E_i, E_i\rangle) \\
&= -\langle a, N\rangle\sum_{i=1}^{n}\langle AE_i, E_i\rangle - \langle a, \psi\rangle\sum_{i=1}^{n}\langle E_i, E_i\rangle \\
&= -nH\langle a, N\rangle - n\langle a, \psi\rangle.
\end{aligned}$$

Agora, consideremos a seguinte função:

$$\langle N, a\rangle : M^n \to \mathbb{R},$$

e de maneira análoga, determinemos o gradiente, Hessiano e Laplaciano.

O gradiente é dado por,

$$\begin{aligned}\langle \nabla\langle N, a\rangle, v\rangle &= v\langle N, a\rangle = \langle \nabla^{\circ}_v N, a\rangle + \langle N, \nabla^{\circ}_v a\rangle = -\ \langle Av, a\rangle \\ &= -\ \langle Av, a^{\top}\rangle = \langle v, -A(a^{\top})\rangle,\ \forall\ v \in T_pM.\end{aligned}$$

Como a métrica é não degenerada, temos

$$\nabla\langle N, a\rangle = -A(a^{\top}).$$

O Hessiano,

$$\langle (Hess\langle N, a\rangle)v, w\rangle = \langle \nabla_v(\nabla\langle N, a\rangle), w\rangle = -\langle \nabla_v A(a^{\top}), w\rangle.$$

Mas como $v\langle A(a^{\top}), w\rangle = \langle \nabla_v A(a^{\top}), w\rangle + \langle A(a^{\top}), \nabla_v w\rangle$ então

$$\begin{aligned}\langle (Hess\langle N, a\rangle)v, w\rangle &= -\ v\langle A(a^{\top}), w\rangle + \langle A(a^{\top}), \nabla_v w\rangle \\ &= -\ v\langle a^{\top}, Aw\rangle + \langle a^{\top}, A(\nabla_v w)\rangle \\ &= -\ v\langle a, Aw\rangle + \langle a, A(\nabla_v w)\rangle + \langle a, N\rangle\langle N, A(\nabla_v w)\rangle \\ &\quad -\ \langle a, \psi\rangle\langle \psi, A(\nabla_v w)\rangle \\ &= -\ \langle \nabla_v a^{\top}, Aw\rangle - \langle a, \nabla_v(Aw)\rangle + \langle a, A(\nabla_v w)\rangle,\end{aligned}$$

como $a^{\top} = a + \langle a, N\rangle N - \langle a, \psi\rangle\psi$, temos

$$\begin{aligned}\langle (Hess\langle N, a\rangle)v, w\rangle &= -\ \langle \nabla_v(a + \langle a, N\rangle N - \langle a, \psi\rangle\psi), Aw\rangle \\ &\quad +\ \langle a, -\nabla_v(Aw) + A(\nabla_v w)\rangle \\ &= -\ \langle \nabla_v a, Aw\rangle - \langle \nabla_v(\langle a, N\rangle N), Aw\rangle + \langle \nabla_v(\langle a, \psi\rangle\psi), Aw\rangle \\ &\quad +\ \langle a, -\nabla_v(Aw) + A(\nabla_v w)\rangle \\ &= -\ \underbrace{\langle\langle \nabla^{\circ}_v a + \langle Av, a\rangle N + \langle v, a\rangle\psi, w\rangle, Aw\rangle}_{(=0)} \\ &\quad -\ \langle \nabla_v(\langle a, N\rangle N), Aw\rangle + \langle \nabla_v(\langle a, \psi\rangle\psi), Aw\rangle \\ &\quad +\ \langle a, -\nabla_v(Aw) + A(\nabla_v w)\rangle,\end{aligned}$$

onde usamos a fórmula de Gauss (2.4). Agora da fórmula de Weingarten (2.5),

$$\begin{aligned}\langle (Hess\langle N,a\rangle)v,w\rangle &= -\langle \langle a,N\rangle \nabla^{\circ}_v N + v\langle a,N\rangle N, Aw\rangle \\ &\quad + \langle \langle a,\psi\rangle \nabla^{\circ}_v \psi + v\langle a,\psi\rangle \psi, Aw\rangle + \langle a, -\nabla_v(Aw) + A(\nabla_v w)\rangle \\ &= \langle a,N\rangle\langle Av,Aw\rangle + \langle\langle a,\psi\rangle\nabla_v\psi, Aw\rangle \\ &\quad + \langle a, -\nabla_v(Aw) + A(\nabla_v w)\rangle.\end{aligned}$$

Como $\nabla^{\circ}_v\psi = v$, concluímos

$$\begin{aligned}\langle (Hess\langle N,a\rangle)v,w\rangle &= \langle a,N\rangle\langle Av,Aw\rangle + \langle a,\psi\rangle\langle\langle\nabla^{\circ}_v\psi + \langle Av,\psi\rangle N + \langle v,\psi\rangle\psi\rangle, Aw\rangle \\ &\quad + \langle a, -\nabla_v(Aw) + A(\nabla_v w)\rangle \\ &= \langle a,N\rangle\langle Av,Aw\rangle + \langle a,\psi\rangle\langle v,Aw\rangle + \langle a, -\nabla_v(Aw) + A(\nabla_v w)\rangle,\end{aligned}$$

e uma vez que $(\nabla_v A)w = \nabla_v(Aw) - A(\nabla_v w)$, segue que

$$\langle (Hess\langle N,a\rangle)v,w\rangle = \langle a,N\rangle\langle Av,Aw\rangle + \langle a,\psi\rangle\langle Av,w\rangle - \langle(\nabla_v A)w, a\rangle, \ \forall\ v,w \in T_pM.$$

Considerando o mesmo referencial ortonormal da função anterior, calculemos o Laplaciano da função $\langle N,a\rangle$.

$$\begin{aligned}\Delta\langle N,a\rangle &= div(\nabla\langle N,a\rangle) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{E_i}(\nabla\langle N,a\rangle), E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle(Hess\langle N,a\rangle)E_i, E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\langle a,N\rangle\langle AE_i,AE_i\rangle + \langle a,\psi\rangle\langle AE_i,E_i\rangle - \langle(\nabla_{E_i}A)E_i, a\rangle),\end{aligned}$$

como $|A|^2 = tr(A^2)$ e $nH = tr(A)$, obtemos

$$\begin{aligned}\Delta\langle N,a\rangle &= \langle a,N\rangle\sum_{i=1}^{n}\langle AE_i,AE_i\rangle + \langle a,\psi\rangle\sum_{i=1}^{n}\langle AE_i,E_i\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla_{E_i}A)E_i,a\rangle) \\ &= \langle a,N\rangle\sum_{i=1}^{n}\langle|A|^2E_i,E_i\rangle + nH\langle a,\psi\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla_{E_i}A)E_i,a\rangle) \\ &= |A|^2\langle a,N\rangle + nH\langle a,\psi\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla_{E_i}A)E_i,a\rangle.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla H, v\rangle &= v(H) = v\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle AE_i, E_i\rangle\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\langle \nabla^\circ_v(AE_i), E_i\rangle + \langle AE_i, \nabla^\circ_v E_i\rangle\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\langle \nabla_v(AE_i), E_i\rangle + \langle E_i, A(\nabla_v E_i)\rangle\right).
\end{aligned}$$

Considerando que além de $E_1, \ldots, E_n$ ser um referencial ortonormal ele também diagonaliza o operador de forma A,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla H, v\rangle &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\langle \nabla_v(AE_i) - A(\nabla_v E_i) + A(\nabla_v E_i) + A(\nabla_v E_i), E_i\rangle\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\langle \nabla_v(AE_i) - A(\nabla_v E_i), E_i\rangle\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\langle A(\nabla_v E_i) + A(\nabla_v E_i), E_i\rangle\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle (\nabla_v A)E_i, E_i\rangle, \ \forall\ v \in T_pM,
\end{aligned}$$

Como M tem curvatura seccional constante, segue da equação de Codazzi que

$$\langle \nabla H, v\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle (\nabla_{E_i} A)v, E_i\rangle,$$

sendo $(\nabla_{E_i} A)$ auto-adjunto, temos

$$\langle \nabla H, v\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle v, (\nabla_{E_i} A)E_i\rangle,$$

e como a métrica e não degenerada,

$$\nabla H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{E_i} A)E_i.$$

Logo,

$$\Delta\langle N, a\rangle = |A|^2\langle a, N\rangle + nH\langle a, \psi\rangle - n\langle \nabla H, a\rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Delta(H\langle \psi, a\rangle + \langle N, a\rangle) &= \Delta(H\langle \psi, a\rangle) + \Delta\langle N, a\rangle\\
&= \langle \psi, a\rangle\Delta H + H\Delta\langle \psi, a\rangle + 2\langle \nabla H, \nabla\langle \psi, a\rangle\rangle + \Delta\langle N, a\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(H\langle\psi,a\rangle+\langle N,a\rangle) &= \langle\psi,a\rangle\Delta H - nH\langle\psi,a\rangle - nH^2\langle N,a\rangle + 2\langle\nabla H, a^\perp\rangle\\ &\quad + |A|^2\langle a,N\rangle + nH\langle a,\psi\rangle - n\langle\nabla H,a\rangle\\ &= \langle\psi,a\rangle\Delta H + (|A|^2-nH^2)\langle N,a\rangle\\ &\quad + 2\langle\nabla H, a+\langle a,N\rangle N - \langle a,\psi\rangle\psi\rangle - n\langle\nabla H,a\rangle\\ &= \langle\psi,a\rangle\Delta H + (|A|^2-nH^2)\langle N,a\rangle - (n-2)\langle\nabla H,a\rangle,\end{aligned}$$

como a curvatura média é constante, temos que $\nabla H = \Delta H = 0$, e portanto

$$\Delta(H\langle\psi,a\rangle+\langle N,a\rangle) = (|A|^2-nH^2)\langle N,a\rangle.$$

Agora vamos mostrar que $|A|^2 - nH^2 \geq 0$.

Com efeito, considere os seguintes vetores em $\mathbb{R}^{n^2}$

$$\begin{aligned} u &= (\underbrace{k_1,\ldots,k_1}_{n\ vezes},\underbrace{k_2,\ldots,k_2}_{n\ vezes},\ldots,\underbrace{k_n,\ldots,k_n}_{n\ vezes})\\ v &= (\underbrace{k_1,\ldots,k_n,k_1,\ldots,k_n,\ldots,k_1,\ldots,k_n}_{n^2\ vezes}).\end{aligned}$$

Por um lado,

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle &= k_1(k_1+\ldots+k_n) + k_2(k_1+\ldots+k_n)+\ldots+k_n(k_1+\ldots+k_n)\\ &= (k_1+\ldots+k_n)\sum_{i=1}^n k_i\\ &= \sum_{j=1}^n k_j \sum_{i=1}^n k_i\\ &= n^2H^2,\end{aligned}$$

mas por outro lado,

$$\begin{aligned}\langle u,u\rangle &= |u|^2 = \langle(k_1,\ldots,k_1,\ldots,k_n,\ldots,k_n),(k_1,\ldots,k_1,\ldots,k_n,\ldots,k_n)\rangle\\ &= nk_1^2+nk_2^2+\ldots+nk_n^2\\ &= n|A|^2,\end{aligned}$$

e

$$\langle v,v\rangle = |v|^2 = \langle(k_1,\ldots,k_n,\ldots,k_1,\ldots,k_n),(k_1,\ldots,k_n,\ldots,k_1,\ldots,k_n)\rangle$$

isto é,

$$\langle v, v\rangle = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} k_i^2 + \sum_{i=1}^{n} k_i^2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} k_i^2}_{n \ vezes} = n|A|^2,$$

então usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\langle u, v\rangle \leq |u||v| = |u|^2,$$

logo

$$n^2H^2 \leq n|A|^2 \ \Rightarrow \ |A|^2 - nH^2 \geq 0^1.$$

Valendo a igualdade se, e somente se, u e v são linearmente dependentes, isto é, $k_1 = k_2 = \ldots = k_n$, ou seja, M^n é totalmente umbílica, e a orientação escolhida foi $\langle N, a\rangle < 0$. Portanto a função $H\langle\psi, a\rangle + \langle N, a\rangle$ é superharmônica em M^n e pelo princípio do máximo clássico, atinge o mínimo em um ponto da fronteira, seja $q \in \partial M^n$.

Denote por ν o campo unitário, conormal e interior ao longo de ∂M^n. Então

$$\begin{aligned}
\nu_q(H\langle\psi, a\rangle + \langle N, a\rangle) &= \nu_q(H)\langle\psi, a\rangle + \nu_q(\langle\psi, a\rangle)H + \nu_q\langle N, a\rangle \\
&= H\langle\nabla^\circ_{\nu_q}\psi, a\rangle + H\langle\psi, \nabla^\circ_{\nu_q}a\rangle + \langle\nabla^\circ_{\nu_q}N, a\rangle + \langle N, \nabla^\circ_{\nu_q}a\rangle \\
&= H\langle\nu_q, a\rangle + \langle\nabla^\circ_{\nu_q}N, a\rangle,
\end{aligned}$$

pelo Lema de Hopf (cf. [30], Lema 3.4)

$$0 \leq H\langle\nu_q, a\rangle + \langle(dN)_q(\nu_q), a\rangle,$$

onde denotamos $\nabla^\circ_{\nu_q}N = (dN)_q(\nu_q)$.

Mas tomando um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ positivamente orientado ao longo do bordo ∂M^n, podemos completa-lo de modo que o novo referencial

$$\{e_1, \ldots, e_{n-1}, x, N, \nu_q\}$$

seja ortonormal em $\mathbb{L}^{n+2}$. Então podemos escrever

$$a = \langle a, e_1\rangle e_1 + \ldots + \langle a, e_{n-1}\rangle e_{n-1} + \langle a, x\rangle x - \langle a, N\rangle N + \langle a, \nu_q\rangle\nu_q.$$

[1] Uma outra maneira de mostrar esta desigualdade, é definindo a aplicação $\phi(X) = AX - HX$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e observar que $|\phi|^2 = tr(\phi^2) = |A|^2 - nH^2$.

Por outro lado, $T_xL^n(\tau) = T_x(\partial M^n) = \{v \in \mathbb{L}^{n+2};\ \langle a, v\rangle = 0 \text{ e } \langle x, v\rangle = 0\}$ e assim $\langle a, e_i\rangle = 0$ para qualquer $e_i \in T_x(\partial M^n),\ i = 1, \ldots, n-1$. Portanto

$$a = \langle a, x\rangle x - \langle a, N\rangle N + \langle a, \nu_q\rangle \nu_q.$$

Assim

$$\begin{aligned}
0 &\leq H\langle \nu_q, a\rangle + \langle (dN)_q(\nu_q), a\rangle \\
&= H\langle \nu_q, a\rangle + \langle (dN)_q(\nu_q), \langle a, x\rangle x - \langle a, N\rangle N + \langle a, \nu_q\rangle \nu_q\rangle \\
&= H\langle \nu_q, a\rangle + \langle a, x\rangle\langle (dN)_q(\nu_q), x\rangle - \langle a, N\rangle\langle (dN)_q(\nu_q), N\rangle + \langle a, \nu_q\rangle\langle (dN)_q(\nu_q), \nu_q\rangle \\
&= H\langle \nu_q, a\rangle + \langle a, \nu_q\rangle\langle (dN)_q(\nu_q), \nu_q\rangle \\
&= \langle \nu_q, a\rangle(H + \langle (dN)_q(\nu_q), \nu_q\rangle) \qquad \text{(A.2)}
\end{aligned}$$

Uma vez que $H > 1$, sabemos pela Observação (A.1) que

$$x_{n+1}(\psi) = \frac{1}{\langle \psi, a\rangle}.$$

Mas o Lema (A.2) garante que se $H \geq 1$ então, $x_{n+1} \geq 1/\tau$, dai segue que $\langle \psi, a\rangle \leq \tau$ em M^n. Então, como supomos $\langle \psi, a\rangle = \tau$ ao longo do bordo ∂M^n, pois $\partial M^n \subset L^n(\tau)$ temos que $\langle \nu, a\rangle \leq 0$ ao longo de ∂M^n.

Agora se a igualdade $\langle \nu, a\rangle = 0$ é atingida em algum ponto de ∂M^n, então tomando a folha $L^n(\theta)$ com $\theta > \tau$ suficientemente grande de modo que $M^n \cap L^n(\theta) = \emptyset$ podemos diminuir gradativamente o θ até que $L^n(\theta)$ toque M^n pela primeira vez. Seja $p \in M^n \cap L^n(\theta)$. Pelo principio da tangência, estas duas variedades coincidem em uma vizinhança do ponto p. Agora usando as Observações (A.2), (A.3) e o fato de que a curvatura média nas folhas é igual a 1, segue que $1 \leq H$. Por outro lado, tomando $L^n(\theta)$ com $\theta < \tau$ suficientemente pequeno de modo que $M^n \cap L^n(\theta) = \emptyset$, podemos aumentar o valor de θ de modo que $L^n(\theta)$ toque M^n pela primeira vez. Desta forma, repetindo o mesmo raciocínio obtemos que $1 \geq H$ e portanto $H = 1$ o que é uma contradição com a hipótese da curvatura média ser maior estrito que 1, logo $\langle \nu, a\rangle < 0$.

Portanto por (A.2) e usando o fato de que $\langle \nu, a\rangle < 0$ temos

$$H + \langle (dN)_q(\nu_q), \nu_q\rangle \leq 0. \qquad \text{(A.3)}$$

Como $nH = -$ traço(dN) temos

$$\begin{aligned} nH &= -\sum_{i=1}^{n}\langle (dN)_q(e_i), e_i\rangle + \langle (dN)_q(e_i), e_i\rangle - \langle (dN)_q(e_i), e_i\rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n-1}\langle (dN)_q(e_i), e_i\rangle - \langle (dN)_q(e_i), e_i\rangle, \end{aligned}$$

da estimativa (A.3) obtemos,

$$nH \geq -\sum_{i=1}^{n-1}\langle (dN)_q(e_i), e_i\rangle + H,$$

ou seja

$$H(n-1) \geq -\sum_{i=1}^{n-1}\langle (dN)_q(e_i), e_i\rangle, \tag{A.4}$$

onde $e_1, \ldots, e_{n-1}$ o referencial ortonormal de $T_q(\partial M^n)$. Agora decompondo a segunda forma fundamental da imersão[2] α em qualquer ponto do bordo como ∂M^n como a soma da segunda forma fundamental α^∂ de $\psi\big|_{\partial M^n} : \partial M^n \to L^n(\tau)$ e a segunda forma fundamental da hipersuperfície totalmente umbílica $L^n(\tau)$ no espaço de Sitter.

Assim

$$\begin{aligned} -\langle (dN)_q(e_i), e_i\rangle &= \langle \alpha_q(e_i, e_i), N(q)\rangle \\ &= \langle \alpha^\partial(e_i, e_i) + N_\tau(q), N(q)\rangle \\ &= \langle \alpha^\partial(e_i, e_i), N(q)\rangle + \langle N_\tau(q), N(q)\rangle \\ &= \langle \alpha^\partial(e_i, e_i), N(q)\rangle + \langle -q + \frac{1}{\tau}a, N(q)\rangle \\ &= \langle \alpha^\partial(e_i, e_i), N(q)\rangle + \frac{1}{\tau}\langle a, N(q)\rangle. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Agora se n é um vetor normal e unitário qualquer da restrição $\psi\big|_{\partial M^n}$ então $\langle n, N\rangle > 0$, do contrario se $\langle n, N\rangle = 0$, como $\langle \nu, N\rangle = 0$ temos que n é um múltiplo não nulo de ν e dai $\langle n, a\rangle \neq 0$ o que não pode acontecer visto que $\psi(\partial M^n) \subset L^n(\tau)$, logo $\langle n, N\rangle > 0$.

Somando de $i = 1$ a $i = n-1$ em $(A.5)$ temos

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{n-1}\langle (dN)_q(e_i), e_i\rangle &= \sum_{i=1}^{n-1}\big(\langle \alpha^\partial(e_i, e_i), N(q)\rangle + \langle N_\tau(q), N(q)\rangle\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\langle \alpha^\partial(e_i, e_i), N(q)\rangle + \sum_{i=1}^{n-1}\langle N_\tau(q), N(q)\rangle, \end{aligned}$$

[2]Em verdade basta observar que a decomposição do fibrado normal da hipersuperfície é a soma do fibrado normal do bordo juntamente com o fibrado normal das folhas.

o que fornece,

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{n-1}\langle (dN)_q(e_i), e_i\rangle &= \sum_{i=1}^{n-1}\langle\langle A^{\partial}e_i, e_i\rangle n(q), N(q)\rangle - (n-1)\frac{1}{\tau}\langle a, N(q)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\langle A^{\partial}e_i, e_i\rangle\langle n(q), N(q)\rangle - (n-1)\frac{1}{\tau}\langle a, N(q)\rangle \\
&= (n-1)H^{\partial}\langle n(q), N(q)\rangle - (n-1)\frac{1}{\tau}\langle a, N(q)\rangle,
\end{aligned}$$

de $(A.4)$ obtemos que

$$(n-1)H \geq (n-1)\big(H^{\partial}\langle n(q), N(q)\rangle - \frac{1}{\tau}\langle a, N(q)\rangle\big),$$

mas isso implica

$$H \geq H^{\partial}\langle n(q), N(q)\rangle - \frac{1}{\tau}\langle a, N(q)\rangle,$$

onde H^{∂} representa a função curvatura média da imersão $\psi\big|_{\partial M^n} : \partial M^n \to L^n(\tau)$ com respeito a escolha da orientação n.

Como $H^{\partial}\langle n(q), N(q)\rangle \geq 0$, pois por hipótese $H^{\partial} \leq 0$, temos

$$H + \frac{1}{\tau}\langle a, N(q)\rangle \geq H^{\partial}\langle n(q), N(q)\rangle \geq 0$$

mas

$$H\langle\psi(q), a\rangle + \langle N(q), a\rangle = H\tau + \langle N, a\rangle \geq 0.$$

O que conclui a demonstração uma vez que q é um ponto de M^n onde a função $H\langle\psi, a\rangle + \langle N, a\rangle$ atinge o mínimo, isto é, para qualquer ponto de M^n tem-se

$$H\langle\psi, a\rangle + \langle N, a\rangle \geq H\langle\psi(q), a\rangle + \langle N(q), a\rangle \geq 0$$

e também $\langle N, a\rangle \geq -\,\tau H$ em M^n.

∎

Bibliografia

[1] R. Aiyama, *On complete spacelike surfaces with constant mean curvature in a Lorentzian 3-space form*, Tsukuba J. Math., **15** (1991), 235-247.

[2] K. Akutagawa, *On spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space*, Math. Z. **196** (1987) 13-19.

[3] L.J. Alías, A. Brasil Jr., A.G. Colares, *Integral formulae for spacelike hypersurfaces in conformally stationary spacetimes and applications*. Proc. Edinb. Math. Soc. **46** (2003) 465–488.

[4] L.J. Alías, A. L. Albujer, *Spacelike Hypersurfaces With Constant Mean Curvature in The Steady State Space*, American Mathematical Society (2008).

[5] L.J. Alías, J.M. Malacarne, *Spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in Minkowski space–time*. J. Geom. Phys. **41** (2002) 359–375.

[6] L.J. Alías, J.A. Pastor, *Constant mean curvature spacelike hypersurfaces with spherical boundary in the Lorentz–Minkowski space*, J. Geom. Phys. **28** (1998) 85–93.

[7] E. Calabi, *Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations*, Proc. Sympos. Pure Math. **15** (1970), 223-230.

[8] Q.M. Cheng, *Complete space-like submanifolds in a de Sitter space with parallel mean curvature vector*, Math. Z. **206** (1991) 333-339.

[9] S.Y. Cheng, S.T. Yau, *Maximal spacelike hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski space*, Ann. of Math., **104** (1976), 407-419.

[10] Y. Choquet-Bruhat, *Maximal submanifolds and submanifolds of constant extrinsic curvature of a Lorentzian manifold*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **3** (1976), 361-376.

[11] Y. Choquet-Bruhat, A.E. Fischer, J.E. Marsden, *Maximal hypersurfaces and positivity of mass*, Proc. of the E. Fermi Summer School of the Italian Physical Society, J. Ehlers ed., North-Holland, 1979.

[12] M. Dajczer, *Submanifolds and Isometric Immersions*, Publish or Perish, Houston, Texas.

[13] H.F. de Lima, *Fórmulas Integrais Tipo-Minkowski para Hipersuperfícies Tipo-Espaço em Variedades de Lorentz Conformemente Estacionárias e Aplicações*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará (2002).

[14] H.F. de Lima, *Spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in de Sitter space*, Jornal of Geometry an Physics, **57** (2007), 967–975.

[15] M.P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, IMPA, Rio de Janeiro, (2008).

[16] A.J. Goddard, *Foliations of space by spacelike hypersurfaces of constant mean curvature*, Comm. Math. Phys., **54** (1977), 279–282.

[17] A.J. Goddard, *Some remarks on the existence of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **82** (1977) 489–495.

[18] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Spacetime*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.

[19] J.M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Matematical **218**, Ed. Board, (2003).

[20] E.L. Lima, *Homologia Básica*, IMPA, Rio de Janeiro, Projeto Euclides (2009).

[21] R. López, *Area Monotonicity for spacelike surfaces with constant mean curvature*, J. Geom. Phys. **52** (2004) 353–363.

[22] J.E. Marsden, F.J. Tipler, *Maximal hypersurfaces and foliations of constant mean curvature in general relativity*, Phys. Rep. C, **66** (1980), 109-139.

[23] S. Montiel, *An integral inequality for compact spacelike hypersurfaces in de Sitter space and applications to the case of constant mean curvature*, Indiana Univ. Math. J. **37** (1988) 909–917.

[24] S. Montiel, *Complete non-compact spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in de Sitter spaces*, J. Math. Soc. Japan **55** (2003) 915–938.

[25] S. Montiel, *Uniqueness of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in foliated spacetimes*, Math. Ann. **314** (1999) 529–553.

[26] S. Montiel, *Constant mean curvature spacelike hypersurfaces in de Sitter spaces*, Workshop on Diff. Geom. **9** (2005) 17-30.

[27] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, (1983).

[28] S. Stumbles, *Hypersurfaces of constant mean extrinsic curvature*, Ann. of Physics **133** (1981), 28-56.

[29] N. Trudinger, D. Gilbarg, *Elliptic PDE of Second Order*, Springer-Verlag, 1983.

[30] Y.L. Xin, *On the Gauss image of a spacelike hypersurface with constant mean curvature in Minkowski space*, Comment. Math. Helv. **66** (1991), 590–598.