

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência de solução e estabilidade na fronteira da equação da onda semilinear

por

Fabício Lopes de Araujo Paz [†]

sob orientação do

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

Existência de solução e estabilidade na fronteira da equação da onda semilinear

por

Fabício Lopes de Araujo Paz

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna-UFPB

Prof. Dr. Manuel Antollino Milla Miranda-UEPB

Prof. Dr. Angelo Roncalli Furtado de Holanda-UFCG

Co-Orientador

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo-UEPB

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Junho /2012

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me deu a vida e pela força que me foi concedida para enfrentar os obstáculos.

Ao Prof. Aldo Trajano e Angelo Roncalli por orientar-me, pela paciência e dedicação. Sou grato aos que participaram da minha banca, professores Fágner Araruna, Manuel Milla Miranda que disponibilizaram seu tempo em ler minha dissertação e pela contribuição com suas sugestões.

A todos os professores da Graduação e da Pós-graduação que contribuíram de forma significativa na minha formação acadêmica.

Aos meus amigos da Graduação e Pós-graduação em especial a Marcos, José Brito, Arthur, Alex, Bruno Sérgio, Bruno Fontes, Luciano, Ailton, Aline, Eraldo, Michel, Israel entre outros.

Agradeço a minha família por me apoiar e me proporcionar um conforto para a minha educação, além de carinho e incentivo.

Aos funcionários do Departamento de Matemática da UFCG, em especial a Andrezza A Mayara Carvalho Rocha pela paciência, compreensão e ajuda.

Por fim, agradeço aos meus amigos de forma geral, em especial a Isabelly Lourêdo Rocha.

Dedicatória

Aos meus pais e irmãos.

Resumo

Neste trabalho estudaremos a existência e comportamento assintótico da solução fraca para o problema

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' - \mu(t)\Delta u + h(u) = f \text{ em } Q \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \mu \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u' = 0 \text{ sobre } \Gamma_1, \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \text{ em } \Omega \end{array} \right. \quad (1)$$

onde $Q = \Omega \times T$ é um domínio cilíndrico, $T > 0$ um número real, sujeita a certas condições de fronteira $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$ com $med(\Gamma_0), med(\Gamma_1) > 0$ e h uma função contínua satisfazendo a condição de Strauss $sh(s) \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}$.

A existência de solução forte será feita utilizando o método de Faedo-Galerkin com uma base especial para $V \cap H^2(\Omega)$ como feito em [16] e resultado de compacidade cf em Lions [11]. A existência de solução fraca utiliza o Teorema de Strauss cf Strauss [24] e resultados bem gerais de traço devido a M.Milla Miranda e L.A.Medeiros [20]. O comportamento assintótico é feito usando o funcional de Liapunov, juntamente com técnicas multiplicativas como feito em Kormonik-Zuazua [9].

Palavras-chave: Estabilidade na fronteira, Base especial, Método de Faedo-Galerkin.

Abstract

We study the existence and asymptotic behavior of the weak solution to the problem

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' - \mu(t)\Delta u + h(u) = f, \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \mu \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u' = 0 \text{ em } \Gamma_1, \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \text{ em } \Omega \end{array} \right. \quad (2)$$

where Q is a cylindrical domain, $T > 0$ a real number, subject to certain boundary conditions $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$ with $med(\Gamma_0), med(\Gamma_1) > 0$ and h continues function satisfying the Strauss's conditions $sh(s) \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}$.

The existence of strong solution is made using the Faedo-Galerkin's method with a special basis to $V \cap H^2(\Omega)$ as done in [16] and the result of compactness as done in [12]. The existence of weak solution uses the theorem of Strauss as done in [24] and results and general trace as done in [20]. The asymptotic behavior is done using the Liapunov functional, with multiplicative techniques as done in Kormonik-Zuazua [9].

Key words: Boundary Stabilization, special basis, Faedo-Galerkin's method.

Conteúdo

Introdução	2
1 Resultados Preliminares e Base Especial	4
1.1 Espaços funcionais	4
1.2 Espaços funcionais a valores vetoriais	6
1.3 Espaços de Sobolev	9
1.4 Espaços de Sobolev fracionários	9
1.5 Teoria do Traço	15
1.5.1 Traço em $L^2(0, T, H^m(\Omega))$	16
1.5.2 Traço em $H^{-1}(0, T, H^m(\Omega))$	17
1.5.3 Traço em $L^1(0, T, E)$	18
1.6 Principais Resultados	18
1.7 Construção da base especial	21
2 Solução forte	28
2.1 Existência de solução forte	28
2.2 Estimativas a Priori	30
2.3 Passagem ao limite quando $m \rightarrow \infty$	40
2.4 Passagem ao limite quando $k \rightarrow \infty$	43
2.5 Condições iniciais	46
2.6 Unicidade	47
3 Solução fraca	50
3.1 Existência de Solução Fraca	50
3.2 Passagem ao limite	59

	ii
4 Comportamento assintótico	66
4.1 Decaimento Exponencial da Energia	67
A Dual de espaços $L^p(0, T; X)$ ($p > 1$) para funções vetoriais	80
A.1 Integral para funções de $L^p(0, T, X)$	80
A.2 Preliminares	82
A.3 Uma primeira caracterização de $(L^p(0, T, X))'$	83
A.4 O espaço dual de $L^p(0, T, X)$	88
B Resultados utilizados	95
B.1 Teorema de Carathéodory	95
B.2 Resultados Auxiliares	103
B.3 Existência de solução para o Problema Aproximado (2.12)	107
Bibliografia	114

Notações e Simbologias

- Ω é um aberto limitado de classe C^2 do \mathbb{R}^n
- Γ é uma variedade de dimensão $n - 1$ que representa a fronteira de Ω
- $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ é uma partição de Γ com $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$
- $Q = \Omega \times (0, T)$ subconjunto de \mathbb{R}^{n+1}
- $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T)$
- $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, T)$
- $\frac{\partial}{\partial \nu}$ designa a derivada na direção normal exterior
- \rightharpoonup designa convergência fraca
- \rightharpoonup^* designa convergência fraca estrela
- X' designa o dual topológico de X
- \hookrightarrow designa imersão
- \xrightarrow{cont} designa imersão contínua
- \xrightarrow{comp} designa imersão compacta

Introdução

Neste trabalho estudaremos a existência e comportamento assintótico da solução fraca para o problema

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' - \mu(t)\Delta u + h(u) = f, \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \mu \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u' = 0 \text{ em } \Gamma_1, \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \text{ em } \Omega \end{array} \right. \quad (3)$$

onde $Q = \Omega \times T$ é um domínio cilíndrico, $T > 0$ um número real, sujeita a certas condições de fronteira $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$ com $med(\Gamma_0), med(\Gamma_1) > 0$ e h uma função contínua satisfazendo a condição de Strauss, $sh(s) \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

Este trabalho está dividido como segue abaixo:

No Capítulo 1 daremos alguns conceitos básicos sobre distribuições para funções reais, funções vetoriais, espaços de Sobolev e resultados gerais de traço. Além disso, enunciaremos e demonstraremos alguns resultados de fundamental importância no decorrer deste trabalho e faremos a construção da base especial para $V \cap H^2(\Omega)$ como feito em Milla Miranda e L.A.Medeiros [16].

No Capítulo 2, mostramos a existência e unicidade de solução forte, utilizando o método de Faedo-Galerkin com a base especial para $V \cap H^2(\Omega)$ obtida no Capítulo 1 juntamente com resultado de compacidade cf em Lions [11]. A importância dessa base especial deve-se ao fato de que necessitaremos limitar o termo $u''_{km}(0)$ em $L^2(\Omega)$.

No Capítulo 3, mostramos a existência de solução fraca, aproximando a função contínua h pela sequência de Strauss, isto é, uma sequência de funções lipschitzianas satisfazendo o Teorema de Strauss cf em Strauss [24]. A solução fraca é obtida como limite de uma sequência de soluções fortes obtidas no Capítulo 2.

No capítulo 4, mostraremos o decaimento da energia associada a solução fraca do problema (1) usando o funcional de Liapunov e técnicas multiplicativas como feito em Kormonik-Zuazua [9]. Obteremos o decaimento da energia associada a solução fraca como limite inferior da energia associada a solução forte do Problema (1).

No apêndice A, daremos uma caracterização dos espaços $L^p(0, T; X)$, onde X é um espaço de Banach e $p > 1$. Demonstramos que se o dual X' de X goza da propriedade de que toda função de variação limitada possui derivada quase sempre, podemos identificar $(L^p(0, T; X))'$ com $L^q(0, T; X')$.

No apêndice B, faremos um resumo dos resultados utilizados nesta dissertação e enunciaremos e demonstraremos o Teorema de Carathéodory, que será usado utilizado no Capítulo 1. Além disso, mostraremos a existência de solução para o problema aproximado obtido no Capítulo 1.

Capítulo 1

Resultados Preliminares e Base Especial

Nosso objetivo neste capítulo é obter ferramentas para a construção de uma base ortonormal no espaço vetorial $V \cap H^2(\Omega)$, ao qual chamaremos de base especial.

No que segue, apresentaremos algumas definições e conceitos básicos relacionados à teoria das distribuições e análise funcional, que serão de fundamental importância no decorrer deste trabalho. Além disso, seguindo o artigo de Milla Miranda e L.A. Medeiros [16], construiremos a base especial em $V \cap H^2(\Omega)$, no qual iremos usar amplamente no capítulo 2.

1.1 Espaços funcionais

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, definimos por suporte de f , e denotamos por $\text{supp}(f)$ o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$.

Se este conjunto for um compacto do \mathbb{R}^n então dizemos que f possui suporte compacto.

Uma n -upla de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é denominada *multi-índice* e sua ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

Representamos por D^α o operador derivação de ordem $|\alpha|$, isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Observação 1.1.1 Se $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ definimos $D^0 u = u$, para toda função u .

Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto.

Definição 1.1.1 *Seja Ω um aberto do \mathbb{R}^n . Uma sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando as seguintes condições forem satisfeitas:*

- i) *Existe um compacto K de Ω tal que $\text{supp}(\varphi), \text{supp}(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$.*
- ii) *Para todo multi-índice α , tem-se $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K*

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido da noção de convergência acima definida será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de *Espaço das Funções Testes sobre Ω* .

Uma distribuição sobre Ω é um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

- i) $T(a\varphi + b\psi) = aT(\varphi) + bT(\psi), \forall a, b \in \mathbb{R}$ e $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$;
- ii) T é contínua, isto é, se φ_n converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $T(\varphi_n)$ converge para $T(\varphi)$ em \mathbb{R} .

Denotaremos o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi \rangle$ e por $\mathcal{D}'(\Omega)$ conjunto de todas as distribuições sobre Ω .

Lema 1.1.1 (Du Bois Raymond) *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Então, $u = 0$ quase sempre em Ω .

Demonstração: Para a prova ver Brezis [3]. ■

A seguir, daremos um exemplo de uma distribuição.

Exemplo 1.1.1 *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. O funcional $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx$$

é uma distribuição.

Observação 1.1.2 *Segue do Lema de Du Bois Raymond que se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se, e somente, se $u = v$. Desta forma, temos uma correspondência biunívoca entre as distribuições do tipo T_u com o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$.*

Definição 1.1.2 *Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada $D^\alpha T$ de ordem $|\alpha|$ de T é um funcional $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, D^\alpha \varphi \rangle.$$

Além disso, $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω .

Observação 1.1.3 *Decorre da definição acima que uma distribuição tem derivadas de todas as ordens.*

1.2 Espaços funcionais a valores vetoriais

Seja X um espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{D}(0, T, X)$ o espaço localmente convexo das funções vetoriais $\varphi : (0, T) \rightarrow X$ indefinidamente diferenciáveis com suporte compacto em $(0, T)$. Diremos que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ em $\mathcal{D}(0, T, X)$ se:

- i) Existe um compacto K de $(0, T)$ tal que $\text{supp}(\varphi_n), \text{supp}(\varphi) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$;
- ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \rightarrow \varphi$ em X uniformemente em $t \in (0, T)$.

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0, T)$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(0, T, X)$, isto é, $T \in \mathcal{D}'(0, T, X)$ se $T : \mathcal{D}(0, T) \rightarrow X$ é linear e se $\theta_n \rightarrow \theta$ em $\mathcal{D}(0, T)$ então $\langle T, \theta_n \rangle \rightarrow \langle T, \theta \rangle$ em X .

Diremos que $T_n \rightarrow T$ em $\mathcal{D}'(0, T, X)$ se $\langle T_n, \theta \rangle \rightarrow \langle T, \theta \rangle$ em $X, \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T)$. O espaço $\mathcal{D}'(0, T, X)$ munido da convergência acima é denominado *espaço das distribuições vetoriais de $(0, T)$ com valores em X*

Observação 1.2.1 *Temos que o conjunto $\{\theta\xi, \theta \in \mathcal{D}(\Omega), \xi \in X\}$ é total em $\mathcal{D}(0, T, X)$.*

Definição 1.2.1 *Dizemos que u é fortemente mensurável quando existir uma sequência de funções simples $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que*

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ em } X, \text{ quase sempre em } (0, T).$$

Denotaremos por $L^p(0, T, X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções u , definidas em $(0, T)$ com valores em X , que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X$ é integrável a Lebesgue, com a norma

$$\|u\|_{L^p(0, T, X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^\infty(0, T, X)$ representamos o espaço de Banach das (classes de) funções u , definidas em $(0, T)$ com valores em X , que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X$ possui supremo essencial finito em $(0, T)$, com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(0, T, X)} = \text{sup ess}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X. \quad (1.1)$$

Observação 1.2.2 *No caso $p = 2$ e X um espaço de Hilbert, segue que $L^2(0, T, X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por*

$$(u, v)_{L^2(0, T, X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

Se X é reflexivo, então podemos identificar

$$[L^p(0, T; X)]' = L^q(0, T; X'),$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. No caso em que $p = 1$, identificamos

$$[L^1(0, T; X)]' = L^\infty(0, T; X')$$

Essas identificações encontram-se demonstradas detalhadamente no Apêndice A.

Observação 1.2.3 Quando Ω for um subconjunto limitado do \mathbb{R}^n , $T > 0$ e $Q = \Omega \times (0, T)$ for o cilindro em \mathbb{R}^{n+1} então, para $1 \leq p < \infty$ temos

$$L^p(0, T; L^p(\Omega)) = L^p(Q).$$

Definição 1.2.2 Dada $T \in \mathcal{D}'(0, T, X)$, definimos a derivada de ordem n como sendo a distribuição vetorial sobre $(0, T)$ com valores em X dada por:

$$\left\langle \frac{d^n T}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Representamos por $C([0, T], X)$ o espaço de Banach das funções u , definidas em $[0, T]$ com valores em X , cuja norma é dada por

$$\|u\|_\infty = \sup \|u(t)\|_X.$$

Por fim, denotaremos por $H_0^1(0, T, X)$ o espaço de Hilbert

$$H_0^1(0, T, X) = \{u \in L^2(0, T, X); u' \in L^2(0, T, X), u(0) = u(T) = 0\},$$

munido do produto interno

$$((u, v))_{H_0^1(0, T, X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt + \int_0^T (u'(t), v'(t))_X dt.$$

Identificando $L^2(0, T, X)$ com o seu dual $(L^2(0, T, X))'$, via o Teorema de Riesz, obtemos a seguinte cadeia

$$\mathcal{D}(0, T, X) \hookrightarrow H_0^1(0, T, X) \hookrightarrow L^2(0, T, X) \hookrightarrow H^{-1}(0, T, X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0, T, X),$$

onde

$$H_0^1(0, T, X) = (H^{-1}(0, T, X))'.$$

Proposição 1.2.1 *Seja $u \in L^2(0, T, X)$. Então, existe um único $f \in H^{-1}(0, T, X)$ que verifica*

$$\langle f, \theta \xi \rangle = (\langle u', \theta \rangle, \xi), \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T), \forall \xi \in X$$

Demonstração: Ver M. Milla Miranda [18]. ■

Baseado na Proposição anterior, identificamos u' com f . Em razão disto, diremos que se $u \in L^2(0, T, X)$ então $u' \in H^{-1}(0, T, X)$.

Proposição 1.2.2 *A aplicação*

$$u \in L^2(0, T, X) \mapsto u' \in H^{-1}(0, T, X)$$

onde X é um espaço de Hilbert, é linear e contínua.

Demonstração: Ver M. Milla Miranda [18]. ■

Proposição 1.2.3 *Suponhamos que $u, g \in L^1(0, T, X)$. Então, as condições abaixo são equivalentes:*

i) Existe $\xi \in X$, independente de t , tal que $u(t) = \xi + \int_0^t g(s) ds$ quase sempre em $(0, T)$, (u é quase sempre uma primitiva de g);

ii) Para cada $\varphi \in D(0, T)$ tem-se $\int_0^T u(t) \varphi'(t) dt = - \int_0^T g(t) \varphi(t) dt$, ($g = \frac{du}{dt}$ derivada no sentido das distribuições);

iii) Para cada $y \in X'$, $\frac{d}{dt} \langle u(t), y \rangle = \langle g(t), y \rangle$ no sentido das distribuições.

Demonstração: Ver L. A. Medeiros [15] ou Temam [22]. ■

Teorema 1.2.1 *Sejam X, Y espaços de Hilbert tal que $X \xrightarrow{\text{cont}} Y$ e $u \in L^p(0, T, X)$, $u' \in L^p(0, T, Y)$, $1 \leq p \leq \infty$, então $u \in C^0([0, T]; Y)$.*

Demonstração: Ver L. A. Medeiros [15]. ■

Teorema 1.2.2 *Seja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sejam $u \in [L^q(0, T, X)]'$ e $v \in L^p(0, T, X)$, então*

$$\langle u, v \rangle_{[L^q(0, T, X)]' \times L^p(0, T, X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_{X' \times X} dt.$$

Demonstração: Ver L. A. Medeiros [15]. ■

1.3 Espaços de Sobolev

No que segue, definiremos o espaços de Sobolev e daremos algumas de suas principais propriedades básicas. Consideremos Ω um aberto limitado do \mathbb{R}^n . Se $u \in L^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$, sabemos que u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral, que $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$, definimos o espaço de Sobolev. Dado um número inteiro $m > 0$, representamos $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções u pertencentes a $L^p(\Omega)$, tais que para todo *multi-índice* $|\alpha| \leq m$, temos $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, isto é,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$, definimos a norma de u pondo

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|_{L^p(\Omega)}^p, \text{ quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_{L^\infty(\Omega)}, \text{ quando } p = \infty.$$

Observação 1.3.1 Para $p = 2$, representamos $W^{m,p}(\Omega) = H^m(\Omega)$ devido a estrutura Hilbertina de tais espaços.

Proposição 1.3.1 Os espaços $H^m(\Omega)$ munido do produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

são espaços de Hilbert.

Demonstração: Ver M. Milla Miranda e L. A. Medeiros [13]. ■

Por fim, o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$ denotamos por $H_0^m(\Omega)$ e por $H^{-m}(\Omega)$ o seu dual topológico de $H_0^m(\Omega)$.

1.4 Espaços de Sobolev fracionários

Nesta seção daremos uma outra caracterização dos espaços $H^m(\Omega)$, com $m \in \mathbb{N}$, que servirá de motivação para definir os espaços $H^s(\Omega)$, quando s for um número

real positivo e Ω um aberto limitado do \mathbb{R}^n com fronteira Γ regular. No que segue, apresentaremos algumas definições e propriedades destes espaços que serão utilizados neste trabalho. Na seção anterior, definimos os espaços $W^{m,p}(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto regular e limitado. No caso $p = 2$, temos

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}. \quad (1.2)$$

Definição 1.4.1 *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A transformada de fourier de f , denotada por \hat{f} , é uma função definida sobre o \mathbb{R}^n pela fórmula*

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} f(x) dx,$$

onde $\langle \xi, x \rangle$ é o produto interno usual em \mathbb{R}^n e $i = \sqrt{-1}$.

Definição 1.4.2 (Espaço de Schwartz) *O espaço de Schwartz ou espaço das funções rapidamente decrescente no infinito, que denotaremos por \mathcal{F} , é o subespaço vetorial formado pelas funções $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que*

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^k D^\alpha \varphi(x) = 0,$$

qualquer que sejam $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Exemplo 1.4.1 *Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então $\varphi \in \mathcal{F}$.*

De fato, desde que $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\text{supp} \varphi \subset K$. Assim, consideremos $\sigma > 0$ tal que $K \subset \mathbb{R}^n$. Logo, dados $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, tem-se para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\| > \sigma$

$$\|x\|^k |D^\alpha \varphi(x)| = 0 < \varepsilon,$$

mostrando que $\varphi \in \mathcal{F}$.

Definição 1.4.3 (Distribuição Temperada) *Um funcional linear T definido e contínuo sobre \mathcal{F} é denominado distribuição temperada, ao qual denotaremos por \mathcal{F}' o espaço vetorial dos funcionais lineares contínuos sobre \mathcal{F} .*

Vamos definir o espaço $H^s(\Omega)$ e, para tanto, consideremos o seguinte resultado:

Proposição 1.4.1 *Para todo $m \in \mathbb{N}$ temos:*

$$H^m(\Omega) = \{u \in \mathcal{F}'; (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Demonstração: Ver M.Milla Miranda e L. A. Medeiros [13]. ■

Dessa forma, motivados pela proposição anterior, definimos para $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$,

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{F}'; (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

munido do produto interno

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^s \hat{u}(x) \hat{v}(x) dx.$$

Em Milla Miranda e L. A. Medeiros [13] podemos ver que

$$H^s(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\text{cont}} L^2(\mathbb{R}^n),$$

Proposição 1.4.2 Para todo $s \geq 0$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert.

Demonstração: Ver M. Miranda e L. A. Medeiros [13]. ■

Observação 1.4.1 Para todo $s \in \mathbb{R}$, denotaremos o dual topológico de $H^s(\mathbb{R}^n)$ como sendo

$$H^{-s}(\mathbb{R}^n) = (H^s(\mathbb{R}^n))'$$

Quando Ω é um aberto limitado e regular do \mathbb{R}^n , define-se o espaço $H^s(\Omega)$ como

$$H^s(\Omega) = \{v|_{\Omega}; v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

munido da norma

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \inf\{\|w\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}; w|_{\Omega} = u\}$$

Proposição 1.4.3 Se $0 \leq s_1 \leq s_2$ então $H^{s_2}(\Omega) \xrightarrow{\text{cont}} H^{s_1}(\Omega)$.

Demonstração: Ver Lions Magenes [14]. ■

Observação 1.4.2 Os resultados acima valem quando Ω for um aberto limitado e regular do \mathbb{R}^n .

Finalizaremos esta seção caracterizando o espaço $H^s(\Gamma)$, onde Γ é a fronteira de um aberto limitado regular Ω do \mathbb{R}^n . Enunciaremos também alguns resultados que usamos de espaços de sobolev em variedades como feito em Lions-Magenes [14].

Sejam $Q = \{y; y = (y', y_n); \|y'\| \leq 1 \text{ e } -1 < y_n < 1\}$, $Q^+ = \{y \in Q; y_n > 0\}$ e $Q^- = \{y \in Q; y_n < 0\}$. Além disso, seja $\Sigma = Q \cap \{y_n = 0\}$ e consideremos $\{(U_1, \varphi_1), \dots, (U_k, \varphi_k)\}$ um sistema de cartas locais para Γ . A cobertura aberta U_1, U_2, \dots, U_k de $\bar{\Omega}$ determina uma partição C^∞ da unidade subordinada, isto é, existem $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que:

- (i) $\text{supp}(\theta_0) \subset \Omega; \text{supp}(\theta_i) \subset U_i, i = 1, 2, \dots, k;$
- (ii) $0 \leq \theta_i \leq 1;$
- (iii) $\sum_{i=0}^k \theta_i(x) = 1, \forall x \in \bar{\Omega}.$

Consideremos u uma função integrável definida sobre Γ . Desde que (i) vale, temos

$$u(x) = \sum_{i=1}^k (\theta_i u)(x) \text{ para quase todo } x \in \Gamma. \quad (1.3)$$

Definamos para cada $1 \leq i \leq k$ as funções

$$u_i(y) = (\theta_i u)(\varphi^{-1}(y)).$$

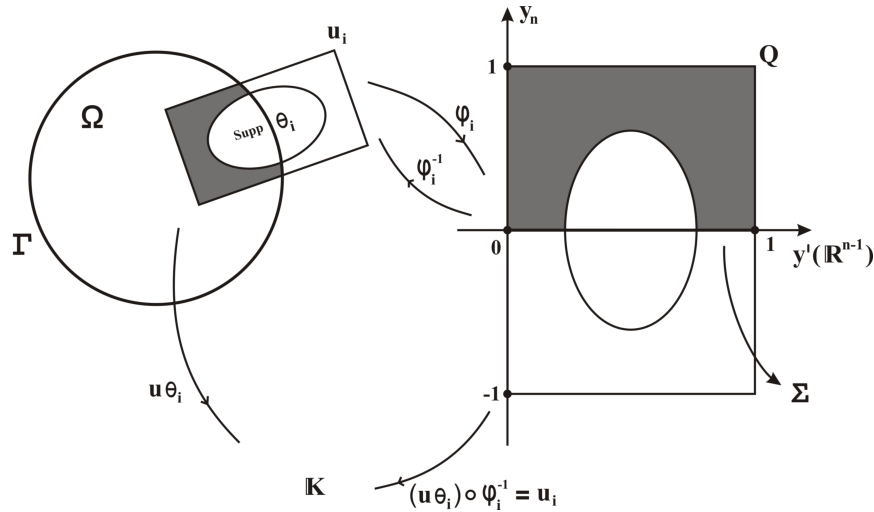


Figura 1.1:

Notemos que

$$S(u\theta_i) = \overline{\{x \in \Omega; (u\theta_i) \neq 0\}} \subset \text{supp}(\theta_i) \cap \Gamma \subset U_i \cap \Gamma.$$

Daí, temos que $S(u\theta_i)$ é um compacto do \mathbb{R}^n , pois a intersecção de fechados é ainda um fechado e $U_i \cap \Gamma$ é limitado. Segue daí que o conjunto

$$S(u_i) = \overline{\{x \in \Omega; (u\theta_i) \neq 0\}}$$

é um compacto de \mathbb{R}^{n-1} contido no aberto Γ , pois $\varphi_i(S(u\theta_i)) = S(u_i)$ e φ é contínua e $S(u\theta_i)$, como vimos, é um compacto. Note que $\text{supp}(u_i) \subset S(u_i) \subset \Gamma$. Assim, podemos

estender u_i da seguinte forma:

$$\tilde{u}_i(y) = \begin{cases} (u\theta_i)(\varphi^{-1}(y)), & \text{se } y \in \Gamma \\ 0, & \text{se } y \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \Gamma \end{cases} \quad (1.4)$$

Da construção acima, podemos ver que \tilde{u}_i tem as mesmas propriedades de u_i . Neste caso, como u é integrável, então \tilde{u}_i é também integrável e

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{u}_i(y) dy = \int_{U_i \cap \Gamma} u(x) \theta_i(x) J_i(x) d\Gamma$$

onde $J_i(x)$ é uma aplicação infinitamente diferenciável sobre $\Gamma_i = U \cap \Gamma$. Por outro lado, se para cada $1 \leq i \leq k$, \tilde{u}_i for integrável, temos por (1.3) que u também será e

$$\int_{\Gamma} u(x) d\Gamma = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma} (u\theta_i)(x) d\Gamma = \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{u}_i(y) \bar{J}(y) dy$$

onde $\bar{J}(y)$ é uma aplicação diferenciável sobre \mathbb{R}^{n-1} . Denotando por $d\Gamma$ a medida sobre Γ induzida pela medida de Lebesgue, definiremos o espaço $L^p(\Gamma)$ como sendo o espaço das funções L^p das funções somáveis sobre Γ para a medida $d\Gamma$ com a norma

$$\|v\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\int_{\Gamma} |v(x)|^p d\Gamma \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (1.5)$$

$$\|v\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Gamma} |v(x)|, \quad p = \infty$$

Equivaletemente, usando a partição da unidade (θ_i) , $1 \leq i \leq k$, definimos

$$L^p(\Gamma) = \{v : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}; v\theta_i \circ \tilde{\theta}_i^{-1} = \tilde{v}_i \in L^p(\mathbb{R}^{n-1}), i = 1, \dots, k\},$$

munido da norma

$$\|v\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\sum_{i=1}^k \|\tilde{v}_i\|_{\mathbb{R}^{n-1}}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

que é equivalente a norma dada em (1.5). Definiremos o espaço $D(\Gamma)$ da seguinte forma:

$$\mathcal{D}(\Gamma) = \{v : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}; v\tilde{\theta}_i \circ \varphi^{-1} \in C^m(\mathbb{R}^{n-1}), \forall m \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, k\}$$

onde

$$C^m(\Gamma) = \{v : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}; v\theta_i \circ \tilde{\theta}_i^{-1} = \tilde{u}_i \in C^m(\mathbb{R}^{n-1}), \forall m \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, k\}$$

Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned}\phi_i : \mathcal{D}(\Gamma) &\rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ u &\mapsto \phi_i(u) = \tilde{u}_i = \widetilde{u\theta_i} \circ \varphi^{-1}\end{aligned}\tag{1.6}$$

Sendo $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, temos que

$$\langle \phi_i(u), v \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1}) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{u}_i v(y) dy = \int_{U_i \cap \Gamma} u(x) \theta_i(x) v(\varphi_i(x)) J_i(x) d\Gamma \tag{1.7}$$

onde $J_i(x)$ é uma função infinitamente diferenciável sobre $U_i \cap \Gamma$. Definindo

$$\psi_i(v) = \begin{cases} \theta_i(x) v(\varphi_i(x)) J_i(x), & x \in U_i \cap \Gamma \\ 0, & x \in \Gamma \setminus U_i \cap \Gamma \end{cases}$$

Então, de (1.7) podemos escrever

$$\langle \phi_i(u), v \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1}) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})} = \int_{\Gamma} u(x) \psi_i(v)(x) dx,$$

ou ainda pelo fato de que $\psi_i(v) \in \mathcal{D}(\Gamma)$, temos

$$\langle \phi_i(u), v \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1}) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})} = \langle u, \psi_i(v) \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma) \times \mathcal{D}(\Gamma)}.\tag{1.8}$$

Da igualdade em (1.8) e do fato de que $\mathcal{D}(\Gamma)$ ser denso em $\mathcal{D}'(\Gamma)$, resulta que a aplicação definida em (1.6) se prolonga, por continuidade a uma aplicação, que continuaremos denotando por ϕ_i de $\mathcal{D}'(\Gamma)$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$.

Definimos para todo $s \in \mathbb{R}$ o espaço

$$H^s(\Gamma) = \{u; \phi_i(u) \in H^s(\mathbb{R}^{n-1}), i = 1, \dots, k\},$$

munido da norma

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} = \left(\sum_{j=1}^k \|\phi_j(u)\|_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.\tag{1.9}$$

Mostra-se em Milla Miranda e L.A.Medeiros [13] que a definição do espaço $H^s(\Gamma)$ não depende do sistema de cartas locais de Γ .

Seja $\{(U_1, \psi_1), \dots, (U_k, \psi_k)\}$ outro sistema de Cartas locais de Γ satisfazendo as mesmas propriedades que o sistema de cartas locais U de Γ . Então, a norma gerada por essa cartas será equivalente a norma em (1.9). Portanto, a definição do espaço $H^s(\Gamma)$ não depende do sistema de cartas locais.

Para uma exposição completa dos espaços de sobolev em uma variedade, o leitor interessado poderá encontrar em Herby [7]. No entanto, enunciaremos os seguintes resultados.

Proposição 1.4.4 *O espaço $\mathcal{D}(\Gamma)$ é denso em $H^s(\Gamma)$.*

Demonstração: Ver Lions-Magenes [14]. ■

Proposição 1.4.5 *O espaço $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \xrightarrow{cont} L^2(\Gamma)$.*

Demonstração: Ver Lions-Magenes [14]. ■

1.5 Teoria do Traço

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado bem regular do \mathbb{R}^n com fronteira Γ . Por $\mathcal{D}(\Omega)$ representamos o espaço vetorial das funções reais definidas em Ω , possuindo derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Dada uma função u definida em $\overline{\Omega}$, representa-se por $\gamma_0 u$ a restrição de u a Γ . Por $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ representa o conjunto de todas as funções $\rho : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ que são restrições de funções pertencentes a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ restrita a $\overline{\Omega}$. Em símbolos

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = \{\phi|_{\overline{\Omega}} = \rho, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}$$

Proposição 1.5.1 *Existe uma constante positiva C tal que*

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Demonstração: Ver Milla Miranda e L.A. Medeiros [13]. ■

De acordo com a Proposição 1.5.1 e pelo fato que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $H^1(\Omega)$, podemos estender a aplicação

$$\gamma_0 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

a uma única aplicação linear e contínua, ainda representada por γ_0 ,

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) &\rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u &\mapsto \gamma_0 u|_{\Omega}, \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}). \end{aligned} \tag{1.10}$$

A aplicação dada em (1.10) é denominada a *aplicação traço de ordem zero*.

Teorema 1.5.1 *O núcleo de γ_0 é o espaço $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: Ver Milla Miranda e L.A. Medeiros [13]. ■

Em face de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ ser denso em $H^m(\Omega)$ podemos estender a aplicação

$$\gamma_j : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \rightarrow H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

a uma única aplicação linear e contínua e tal que

$$\left. \frac{\partial w^j}{\partial \nu^j} \right|_{\Gamma} = \gamma_j u, \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}), \forall j = 1, \dots, m-1.$$

Assim, a partir das γ_j 's, podemos enunciar o seguinte Teorema:

Teorema 1.5.2 *Existe uma única aplicação linear e contínua γ*

$$\begin{aligned} \gamma : H^m(\Omega) &\rightarrow \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u &\mapsto \gamma u = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}) \end{aligned}$$

com a topologia natural do espaço $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dada por

$$\|w\|_{\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \|w_0\|_{H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|w\|_{H^{m-\frac{3}{2}}(\Gamma)} + \dots + \|w\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)},$$

onde $w = (w_0, w_1, \dots, w_{m-1}) \in \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Demonstração: Ver M. Miranda e L. A. Medeiros [13]. ■

Observação 1.5.1 *A aplicação γ acima é denominada aplicação traço de ordem m .*

1.5.1 Traço em $L^2(0, T, H^m(\Omega))$

Nesta seção apresentaremos alguns resultados de traço em $L^2(0, T, H^m(\Omega))$ devido a M.Milla Miranda [18]. Pelo visto anteriormente, temos que existe uma aplicação traço

$$\gamma : H^m(\Omega) \rightarrow \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad (1.11)$$

que é linear, contínua e sobrejetora.

Definamos a aplicação

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} : L^2(0, T, H^m(\Omega)) &\rightarrow L^2\left(0, T, \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ u &\mapsto \hat{\gamma}u, (\gamma u)(t) = \gamma u(t), \end{aligned} \quad (1.12)$$

onde $\gamma u(t)$ é a aplicação (1.11) aplicado em $u(t) \in H^m(\Omega)$. A aplicação (1.12) é linear, contínua e sobrejetora.

Proposição 1.5.2 *Seja $u \in L^2(0, T, H^m(\Omega))$ com $u' \in L^2(0, T, H^m(\Omega))$ então $\hat{\gamma}u' = (\hat{\gamma}u)'$*

Demonstração: Ver M. Milla Miranda [18]. ■

1.5.2 Traço em $H^{-1}(0, T, H^m(\Omega))$

No que segue, enunciaremos para funções de $H^{-1}(0, T, H^m(\Omega))$ um resultado de traço devido a Milla Miranda cf [18], no qual vamos utilizar no Capítulo 3. Notemos que para $f \in H^{-1}(0, T, H^m(\Omega))$ implica que

$$f = \phi_f^0 + \psi_f^0, \text{ com } \phi_f^0, \psi_f^0 \in L^2(0, T, H^m(\Omega)).$$

Seja $\mathbb{L} = L^2(0, T, H^m(\Omega)) \times L^2(0, T, H^m(\Omega))$ e M o subespaço fechado de \mathbb{L} dos vetores $\{\alpha, \beta\}$ tais que

$$(\alpha, v)_{L^2(0, T, H^m(\Omega))} + (\beta, v')_{L^2(0, T, H^m(\Omega))} = 0,$$

para todo $v \in H_0^1(0, T, H^m(\Omega))$ e M^\perp o complemento ortogonal de M . Então, definimos a aplicação

$$H^{-1}(0, T, H^m(\Omega)) \rightarrow M^\perp$$

$$f \mapsto \{\phi_f^0, \psi_f^0\},$$

onde $\{\phi_f^0, \psi_f^0\} \in \xi_f$ é tal que $\|f\| = \|\{\phi_f^0, \psi_f^0\}\|$ e

$$\xi_f = \{ \{\phi_f^0, \psi_f^0\} \in \mathbb{L}; (\phi_f, v) + (\psi_f, v') = \langle f, v \rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega) \},$$

isto é, o conjunto dos $\{\phi_f, \omega_f\} \in \mathbb{L}$ tais que $f = \phi_f + \psi_f$. A aplicação definida acima é uma isometria linear e contínua.

Para $f \in H^{-1}(0, T, H^m(\Omega))$ define-se $\tilde{\gamma}f$ da seguinte forma:

$$\langle \tilde{\gamma}f, w \rangle = \int_0^T (\gamma\phi_f^0, w)_Y dt - \int_0^T (\gamma\psi_f^0, w')_Y dt$$

com $w \in H^{-1}\left(0, T, \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)$, que é linear e contínua. Assim, temos estabelecido uma aplicação

$$\tilde{\gamma} : H^{-1}(0, T, H^m(\Omega)) \rightarrow H^{-1}\left(0, T, \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)$$

$$f \mapsto \tilde{\gamma}f,$$

onde $\tilde{\gamma}$ é definido acima, que é linear e contínua. Esta aplicação é denominada *aplicação traço para as funções de $H^{-1}(0, T, H^m(\Omega))$* .

1.5.3 Traço em $L^1(0, T, E)$

A seguir, consideraremos o espaço de Banach

$$E = \{v \in L^{p'}(\Omega); \Delta v \in L^1(\Omega)\}$$

com a norma

$$\|v\|_E = \|v\|_{L^{p'}(\Omega)} + \|\Delta v\|_{L^1(\Omega)}.$$

Podemos ver em M. Miranda e L. A. Medeiros [20] que existe uma aplicação

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} : E &\rightarrow W^{\frac{1}{p}-1, p'}(\Gamma) \times W^{\frac{1}{p}-2, p'}(\Gamma) \\ v &\mapsto \bar{\gamma}v = (\gamma_0 v, \gamma_1 v) \end{aligned}$$

linear e contínua.

1.6 Principais Resultados

Daremos a seguir resultados que serão utilizados neste trabalho.

Proposição 1.6.1 *Considere o números reais p e p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

(i) $p = 2$ se $n = 1, 2, 3$

(ii) $p > \frac{n}{2}$ se $n \geq 4$

Então, a imersão $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ é contínua.

Demonstração: Ver Milla Miranda e L. A. Medeiros [20]. ■

No que segue, vamos provar a existência e unicidade de solução para o problema homogêneo

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ em } \Omega (f \in L^1(\Omega)) \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (1.13)$$

Para tanto, usaremos o método da transposição, como feito em Lions-Magenes [14].

Formalmente, pelo Teorema de Green, obtemos

$$\int_{\Omega} u(-\Delta v) dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\Gamma_0 - \int_{\Gamma_1} u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\Gamma_1. \quad (1.14)$$

Seja

$$\mathcal{P} = \left\{ \varphi \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega); \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \right\},$$

onde

$$W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega) = \{\phi \in W^{1,p}(\Omega); \phi = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\}.$$

Então, de (1.14) temos

$$\int_{\Omega} u(-\Delta v) dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in \mathcal{P} \quad (1.15)$$

Adotaremos (1.15) com definição de solução do Problema (1.13). A existência e unicidade de problema (1.13), é dada no seguinte resultado:

Proposição 1.6.2 *Seja $f \in L^1(\Omega)$, então existe uma única função $u \in L^p(\Omega)$ satisfazendo (1.15). A aplicação $T : L^1(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$, $Tf = u$ é linear, contínua e $-\Delta u = f$.*

Demonstração: Seja $g \in L^p(\Omega)$ e v uma solução do problema

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta v = g \text{ em } \Omega \\ v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (1.16)$$

Então, pelo Teorema B.2.6, $v \in \mathcal{P}$. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} J : L^p(\Omega) &\rightarrow C^0(\bar{\Omega}) \\ Jg &\mapsto v, \end{aligned}$$

onde v é solução do Problema (1.16). Note que pela Proposição 1.6.1 a aplicação J está bem definida. Além disso, J é linear e contínua.

De fato, sejam $g, h, r + h \in L^p(\Omega)$ tal que $J(r) = v_1$, $J(h) = v_2$ e $J(r + h) = v_3$, isto é, v_1, v_2 e v_3 são soluções do Problema 1.16. Desejamos mostrar que $J(r + h) = J(r) + J(h)$. Como $r + h \in L^p(\Omega)$, temos que v_3 é solução do problema

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta v_3 = r + h \text{ em } \Omega, \\ v_3 = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \frac{\partial v_3}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1. \end{array} \right.$$

Temos também para $r \in L^p(\Omega)$ que v_1 é solução do problema

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta v_1 = r \text{ em } \Omega, \\ v_1 = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \frac{\partial v_1}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1. \end{array} \right.$$

De modo análogo, temos para $h \in L^p(\Omega)$ que v_2 é solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta v_2 = h \text{ em } \Omega, \\ v_2 = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1. \end{array} \right.$$

Assim, $(v_1 + v_2)$ é solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta(v_1 + v_2) = r + h \text{ em } \Omega, \\ v_1 + v_2 = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1. \end{array} \right.$$

Por unicidade de solução do Problema 1.16 obtemos que $v_3 = v_1 + v_2$, ou seja, $J(r + h) = J(r) + J(h)$. Analogamente, mostraremos que $J(\lambda v) = \lambda v$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

A continuidade da aplicação J segue da Proposição 1.6.1.

Dessa forma, podemos definir a aplicação adjunta

$$J^* : [C^0(\overline{\Omega})]' \rightarrow L^{p'}(\Omega)$$

$$\langle J^* \theta, \phi \rangle_{L^{p'}(\Omega) \times L^p(\Omega)} = \langle \theta, J\phi \rangle_{[C^0(\overline{\Omega})]' \times C^0(\overline{\Omega})}, \forall \phi \in L^p(\Omega).$$

Provemos que a função $u = J^* f$ é solução do problema 1.16. De fato, temos

$$\langle J^* f, g \rangle_{L^{p'}(\Omega) \times L^p(\Omega)} = \langle f, Jg \rangle_{[C^0(\overline{\Omega})]' \times C^0(\overline{\Omega})}$$

isto é,

$$\int_{\Omega} J^* f g dx = \int_{\Omega} f Jg dx.$$

Assim, obtemos

$$\int_{\Omega} u(-\Delta v) dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Para a unicidade, sejam $u_1, u_2 \in L^{p'}(\Omega)$ satisfazendo (1.15). Então

$$\int_{\Omega} (u_1 - u_2)(-\Delta v) dx = 0, \forall v \in \mathcal{P}.$$

Consideremos $g \in L^p(\Omega)$ e v solução do problema (P_2) , obtemos

$$\int_{\Omega} (u_1 - u_2) g dx = 0, \forall g \in L^p(\Omega).$$

Portanto, $u_1 = u_2$ e a unicidade está provada. Como $u = Tf$ e $u = J^* f$, por unicidade de solução, tem-se $T = J^*$, e assim, T possui as mesmas propriedades. ■

Para o problema de fronteira não homogêneo,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = g \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \chi \text{ sobre } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (1.17)$$

temos o seguinte resultado:

Proposição 1.6.3 *Seja $f \in L^1(\Omega)$ e $\chi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, então existe uma única solução $u \in L^{p'}(\Omega)$ para o problema (1.17).*

Demonstração: Seja $\{0, \tilde{\chi}\} \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ definida por

$$\tilde{\chi} = \left\{ \begin{array}{l} \chi \text{ sobre } \Gamma_1 \\ 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \end{array} \right.$$

Pelo Teorema 1.5.2, existe $\xi \in H^2(\Omega)$ tal que $\gamma(\xi) = (\gamma_0\xi, \gamma_1(\xi)) = (0, \tilde{\chi})$. Seja w uma solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta w = f + \Delta\xi \text{ em } \Omega, \\ w = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1, \end{array} \right.$$

Note que $f + \Delta\xi \in L^1(\Omega)$, então pela Proposição 1.6.2 temos que $w \in L^{p'}(\Omega)$. Tomando $u = w + \xi$, temos $u \in L^{p'}(\Omega)$ é solução para o Problema (1.17). Para a unicidade, sejam u_1, u_2 duas soluções do problema 1.17, então $v = u_1 - u_2$ é solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta v = 0 \text{ em } \Omega; \\ v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0; \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1. \end{array} \right.$$

Por unicidade do Problema 1.13, temos $v = 0$, isto é $u_1 = u_2$. ■

1.7 Construção da base especial

A partir de agora, daremos alguns resultados que nos proporcionará a construção da base especial em $V \cap H^2(\Omega)$. A construção desta base especial foi obtida por M. Miranda e L. A. Medeiros [16]. Definamos o espaço de Hilbert V por

$$V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\},$$

como sendo o subespaço de $H^1(\Omega)$ munido do produto interno e da norma

$$((u, v))_V = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx$$

e

$$\|u\|_V = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx. \quad (1.18)$$

respectivamente.

Neste trabalho, denotaremos o produto interno de $L^2(\Omega)$ por (\cdot, \cdot) e a norma induzida por este produto interno por $|\cdot|$. Também denotaremos o produto interno em V por $((\cdot, \cdot))$ e a norma em V por $\|\cdot\|$, afim de não sobrecarregar a notação.

Proposição 1.7.1 *Em V vale a desigualdade de Poincaré.*

Para a prova da Proposição 1.7.1 ver Dautray Robert e Lions [6].

Consideremos o operador $-\Delta$ definido pela terna $\{V, L^2(\Omega), ((u, v))_V\}$. Decorre da teoria Espectral, cf em Lions [12] que

$$D(-\Delta) = \left\{ u \in V \cap H^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \right\}.$$

A seguir, daremos um resultado que nos garantirá a existência de solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ em } \Omega, (f \in L^2(\Omega)) \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ sobre } \Gamma_1, (g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)). \end{cases} \quad (1.19)$$

Lema 1.7.1 *Dado $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, existe uma única $u \in V \cap H^2(\Omega)$ solução do Problema (1.19).*

Demonstração: Seja $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$a(u, v) = ((u, v)), \quad \forall u, v \in V$$

Temos que a é uma forma bilinear contínua e coerciva. Seja $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle L, v \rangle = (f, v) + \int_{\Gamma_1} g v d\Gamma, \quad \forall v \in V.$$

Note que L é uma forma linear e contínua sobre V . De fato

i) L é linear

Sejam $v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned} \langle L, \alpha v + w \rangle &= (f, \alpha v + w) + \int_{\Gamma_1} g(\alpha v + w) d\Gamma = \alpha(f, v) + (f, w) + \alpha \int_{\Gamma_1} g v d\Gamma + \int_{\Gamma_1} g w d\Gamma = \\ &= \alpha(f, v) + \alpha \int_{\Gamma_1} g v d\Gamma + (f, w) + \int_{\Gamma_1} g w d\Gamma = \alpha \langle L, v \rangle + \langle L, w \rangle. \end{aligned}$$

ii) L é contínua

Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz e pela imersão contínua $V \xrightarrow{\text{cont}} L^2(\Omega)$, com constante de imersão C_1 , temos

$$|\langle L, v \rangle| \leq |f||v| + |g|_{L^2(\Gamma_1)}|v|_{L^2(\Gamma_1)} \leq C_1|f||v| + |g|_{L^2(\Gamma_1)}|v|_{L^2(\Gamma_1)}.$$

Temos que $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \xrightarrow{\text{cont}} L^2(\Gamma_1)$. Além disso, pelo teorema do traço

$$|\gamma_0 v|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \leq C_3 \|v\|.$$

Daí,

$$\begin{aligned} |\langle L, v \rangle| &\leq C_1|f||v| + C_2|g|_{L^2(\Gamma_1)}|v|_{L^2(\Gamma_1)} \leq C_1|f||v| + C_2|g||v|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \leq \\ &\leq C_1|f||v| + C_2C_3\|v\| = C\|v\| \end{aligned}$$

onde $C = C_1|f| + C_2C_3|g|_{L^2(\Gamma_1)}$.

Pelo lema de Lax-Milgran, existe um único $v \in V$ tal que

$$a(u, v) = \langle L, v \rangle,$$

ou ainda

$$((u, v)) = \langle L, v \rangle.$$

Assim,

$$((u, v)) = (f, v) + \int_{\Gamma_1} g v d\Gamma, \quad \forall v \in V. \quad (1.20)$$

Em particular, (1.20) é válida para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Então,

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$$

Pelo Teorema de Green, temos

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \quad (1.21)$$

Daí,

$$(-\Delta u, \varphi) = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.22)$$

Desde que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, segue de (1.22) que

$$(-\Delta u, v) = (f, v), \quad \forall v \in L^2(\Omega). \quad (1.23)$$

Por (1.23), obtemos $-\Delta u = f$ em $L^2(\Omega)$. De (1.21) e do Lema de Du Bois Raymond obtemos que $-\Delta u = f$ quase sempre em Ω . Daí, segue por regularidade elíptica que $u \in V \cap H^2(\Omega)$.

Por outro lado, desde que $u \in H^2(\Omega)$ e $\Delta u \in L^2(\Omega)$, segue pela fórmula de Green que

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, v \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = (\Delta u, v) + ((u, v)). \quad (1.24)$$

Por (1.20), temos substituindo em (1.24) que

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, v \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = (\Delta u, v) + (f, v) + \int_{\Gamma_1} g v d\Gamma$$

o que implica

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, v \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \int_{\Gamma_1} g v d\Gamma$$

Pelo teorema da Representação de Riesz, obtemos

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, v \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \langle g, v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}$$

donde segue que $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ em $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$. Como $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, resulta que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ em } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$$

o que prova o resultado. ■

Proposição 1.7.2 *Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$. Então, a solução do problema*

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ sobre } \Gamma_1, \end{array} \right. \quad (1.25)$$

pertence a $V \cap H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq [\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}]$.

Demonstração: Seja $\{0, \tilde{g}\} \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ definido por

$$\hat{g} = \begin{cases} g, & \text{sobre } \Gamma_1 \\ 0, & \text{sobre } \Gamma_0 \end{cases}$$

Pelo Teorema 1.5.2, existe $h \in H^2(\Omega)$ tal que $\gamma(h) = (\gamma_0(h), \gamma_1(h)) = (0, \hat{g})$ e

$$\|h\|_{H^2(\Omega)} \leq c [\|0\| + \|\hat{g}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}] = c\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \quad (1.26)$$

Seja w solução fraca do seguinte problema(a qual existe pelo Lema anterior)

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = \Delta w \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1. \end{array} \right. \quad (1.27)$$

Isto significa que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla w \nabla v dx &= \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Omega} (\Delta h) v dx, \quad \forall v \in V. \\ \|w\|_{H^2(\Omega)} &\leq c[\|f - \Delta h\|_{L^2(\Omega)}] \leq c[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta h\|_{L^2(\Omega)}] \end{aligned} \quad (1.28)$$

pelo Teorema B.2.6. Então, $u = w + h \in V \cap H^2(\Omega)$ é solução do Problema (1.27) e por (1.26) e (1.28), obtemos

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2(\Omega)} &= \|w + h\|_{H^2(\Omega)} \leq \|w\|_{H^2(\Omega)} + \|h\|_{H^2(\Omega)} \leq c[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta h\|_{L^2(\Omega)}] + \|h\|_{H^2(\Omega)} \leq \\ &\leq c[\|f\|_{L^2(\Omega)} + c_1\|h\|_{H^2(\Omega)}] \leq c_2[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}], \end{aligned}$$

onde c_1 e c_2 são as constantes positivas. ■

Proposição 1.7.3 Em $V \cap H^2(\Omega)$, as normas de $H^2(\Omega)$ e a norma

$$u \mapsto \left\{ |\Delta u|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

são equivalentes.

Demonstração: Seja $u \in V \cap H^2(\Omega)$. Pela Proposição anterior, tem-se

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq C_1 \left\{ |\Delta u|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2 \right\} \quad (1.29)$$

Por outro lado,

$$|\Delta u|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{H^2(\Omega)}^2. \quad (1.30)$$

Pelo Teorema de traço

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2 \leq C_2 \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \quad (1.31)$$

Por (1.30) e (1.31), temos

$$|\Delta u|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2 \leq C_3 \|u\|_{H^2(\Omega)}^2. \quad (1.32)$$

Portanto, de (1.29) e (1.32), segue que as normas em $V \cap H^2(\Omega)$ são equivalentes. ■

A seguir, vamos enunciar e demonstrar um resultado que permitirá construir uma base especial em $V \cap H^2(\Omega)$ e esta base será utilizada para mostrar a existência de solução forte do Problema (1) no Capítulo 2. Antes, vamos assumir que vale

- (H_1) $\mu \in W^{1,\infty}(0, T)$ com $\mu(t) \geq \mu_0 > 0$
- (H_2) $\beta \in W^{1,\infty}(\Gamma_1)$ com $\beta(x) \geq \beta_0 > 0$.

Proposição 1.7.4 *Suponhamos (H_1) – (H_2) e que $u_0 \in V \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in V$ e $\mu(0) \frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \beta u_1 = 0$ sobre Γ_1 . Então, para cada $\varepsilon > 0$, existem vetores $z, w \in V \cap H^2(\Omega)$ tais que*

$$\|w - u_0\|_{V \cap H^2(\Omega)} < \varepsilon, \quad \|z - u_1\|_V < \varepsilon$$

e

$$\mu(0) \frac{\partial w}{\partial \nu} + \beta z = 0 \text{ sobre } \Gamma_1.$$

Demonstração: Desde que $u_1 \in V$ e $V \cap H^2(\Omega)$ é denso em V , dado $\varepsilon > 0$, existe $z \in V \cap H^2(\Omega)$ tal que $\|z - u_1\| < \varepsilon$.

Consideremos o problema

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f + \Delta u_0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\beta(x)}{\mu(0)} z \text{ sobre } \Gamma_1, \end{array} \right. \quad (1.33)$$

Observemos que $\Delta u_0 \in L^2(\Omega)$. Por outro lado, como $z \in H^2(\Omega)$, segue pelo Teorema 1.5.2 que

$$\gamma_0(z) = z \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1).$$

Por fim, consideremos as aplicações contínuas

$$\begin{aligned}\phi : L^2(\Gamma_1) &\rightarrow L^2(\Gamma_1) \\ u &\mapsto \beta u\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\phi : H^1(\Gamma_1) &\rightarrow H^1(\Gamma_1) \\ u &\mapsto \beta u\end{aligned}$$

e observemos que tais aplicações estão bem definidas, pois $\beta \in W^{1,\infty}(\Gamma_1)$. Da imersão contínua $H^1(\Gamma_1) \hookrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \hookrightarrow L^2(\Gamma_1)$, temos por interpolação dos espaços que a aplicação

$$\begin{aligned}\phi : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) &\rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \\ u &\mapsto \beta u\end{aligned}$$

é contínua. Agora, observe que o problema (1.33) está nas condições da Proposição 1.7.2, dessa forma existe $w \in V \cap H^2(\Omega)$ e assim pelo Teorema do traço

$$\begin{aligned}\|w - u_0\|_{V \cap H^2(\Omega)}^2 &\leq |\Delta w - \Delta u_0|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial w}{\partial \nu} + \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2 = \\ &= \left\| \frac{-\beta(x)z}{\partial \mu(0)} + \frac{\beta(x)}{\mu(0)} u_1 \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2 \leq C \|z - u_1\|_V^2 < C \varepsilon^2\end{aligned}$$

Além disso, por (1.33), obtemos

$$\mu(0) \frac{\partial w}{\partial \nu} + \beta z = \text{sobre } \Gamma_1.$$

Portanto, a proposição está provada. ■

Capítulo 2

Solução forte

Neste capítulo, vamos provar a existência e unicidade de solução forte do problema (1), onde as condições iniciais são funções suaves. Para tanto, empregaremos o *método de Faedo-Galerkin*, que consiste em aproximar a solução que desejamos encontrar por uma sequência de soluções de problemas análogos, porém em dimensão finita.

No que segue, assumimos que Ω é um aberto do \mathbb{R}^n de classe C^2 com fronteira Γ . Seja $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, com $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$, $med(\Gamma_0), med(\Gamma_1) > 0$ e consideremos $Q = \Omega \times (0, T)$ um domínio cilíndrico de \mathbb{R}^{n+1} , com $T > 0$ um número real.

2.1 Existência de solução forte

Iniciaremos esta seção com o conceito de solução forte.

Definição 2.1.1 Dizemos que uma função $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução forte do problema (1) se

$$u \in L_{loc}^\infty(0, \infty; V \cap H^2(\Omega)) \text{ e } u' \in L_{loc}^\infty(0, \infty; V)$$

$$u'' \in L_{loc}^2(0, \infty; L^2(\Omega))$$

$$u'' - \mu \Delta u + h(u) = f \text{ em } L_{loc}^2(0, \infty; L^2(\Omega))$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u' = 0 \text{ em } L_{loc}^\infty(0, \infty; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$$

$$u(0) = u_0 \text{ e } u'(0) = u_1 \text{ em } \Omega.$$

Sejam Ω , Q , Γ como na introdução e $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$, $u_0, u_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\beta : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mu : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ uma função lipschitziana com constante } C_h \text{ e} \\ sh(s) \geq 0, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}; \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$(u_0, u_1) \in [V \cap H^2(\Omega)] \times V; \quad (2.2)$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(\Gamma_1) \text{ tal que } \beta(x) \geq \beta_0 > 0; \quad (2.3)$$

$$\mu \in W^{1,\infty}(0, T) \text{ tal que } \mu(t) \geq \mu_0 > 0; \quad (2.4)$$

$$\mu(0) \frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \beta u_1 = 0 \text{ em } \Gamma_1; \quad (2.5)$$

$$f \in H^1(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.6)$$

Teorema 2.1.1 *Considere as hipóteses (2.1)-(2.6). Então, existe uma única função $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$u \in L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)),$$

$$u' \in L^\infty(0, T; V),$$

$$u'' \in L^2(Q).$$

$$u'' - \mu \Delta u + h(u) = f \text{ em } L^2(Q);$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u' = 0 \text{ em } L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1));$$

$$u(0) = u_0, u'(0) = u_1 \text{ em } \Omega.$$

Demonstração: Para a prova, empregaremos o método de Faedo-Galerkin com a base especial em $V \cap H^2(\Omega)$. Como $u_0 \in V \cap H^2(\Omega)$ e $u_1 \in V$ segue pela Proposição 1.7 que existem duas sequências u_{0k} , u_{1k} de vetores em $V \cap H^2(\Omega)$ tais que

$$u_{0k} \rightarrow u_0 \text{ em } V \cap H^2(\Omega). \quad (2.7)$$

$$u_{1k} \rightarrow u_1 \text{ em } V. \quad (2.8)$$

$$\mu(0) \frac{\partial u_{0k}}{\partial \nu} + \beta(x) u_{1k} = 0 \text{ em } \Gamma_1, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

Fixemos $k \in \mathbb{N}$ de forma que u_{0k}, u_{1k} sejam linearmente independente e tomamos

$$w_1^k = \frac{u_{0k}}{\|u_{0k}\|_{V \cap H^2(\Omega)}} \text{ e } w_2^k = \frac{u_{1k}}{\|u_{1k}\|_{V \cap H^2(\Omega)}}$$

os dois primeiros vetores ortonormais. Assim, pelo processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, construiremos uma base ortonormal em $V \cap H^2(\Omega)$ que representaremos por

$$\mathcal{B} = \{w_1^k, w_2^k, \dots, w_j^k, \dots\}, \quad (2.10)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Se para cada $k \in \mathbb{N}$, os vetores são linearmente dependentes, escolhemos

$$w_1^k = \frac{u_{0k}}{\|u_{0k}\|_{V \cap H^2(\Omega)}}$$

e w_2^k qualquer vetor fora da reta λu_{0k} . Continuando com este processo, obteremos uma sequência $(w_j^k)_{j \in \mathbb{N}} \subset V \cap H^2(\Omega)$ de vetores linearmente independente.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $V_m^k = [w_1^k, w_2^k, \dots, w_m^k]$ o subespaço de $V \cap H^2(\Omega)$ gerado pelos m primeiros vetores da base (2.10).

Vamos encontrar uma solução $u_{km} \in V_m^k$ do tipo

$$u_{km}(t) = \sum_{j=1}^m g_{jkm}(t) w_j^k(x), \quad (2.11)$$

onde g_{jkm} são as soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_{km}''(t), v) + \mu(t)((u_{km}(t), v)) + (h(u_{km}(t)), v) + (\beta u_{km}'(t), v)_{L^2(\Gamma_1)} = (f, v), \forall v \in V_m^k \\ u_{km}(x, 0) = u_{0k} \\ u_{km}'(x, 0) = u_{1k} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Dessa forma, estamos diante de um problema de valor inicial de um sistema de equações diferenciais ordinárias. Agora, note que a existência da solução do problema aproximado (2.12) é garantida por ser um sistema de equações diferenciais ordinárias nas condições do Teorema de Caratheódory, como feito em [5].(Ver Apêndice B).

Portanto, existe uma solução aproximada para $t \in [0, t_{km})$ com $t < t_{km}$.

2.2 Estimativas a Priori

No que segue, obteremos estimativas a priori para as soluções $u_{km}(t)$ do sistema (2.12), permitindo prolongar a solução ao intervalo $[0, T]$, como consequência do teorema do prolongamento de soluções, cf [5].

Primeira Estimativa:

Tomando $v = 2u'_{km}(t) \in V_m^k$ em (2.12), tem-se

$$\begin{aligned} & (u''_{km}(t), 2u'_{km}(t)) + \mu(t)((u_{km}(t), 2u'_{km}(t))) + (h(u_{km}(t)), 2u'_{km}(t)) + \int_{\Gamma_1} \beta(x)u''_{km}(t)2u'_{km}(t)d\Gamma = \\ & = (f(t), 2u'_{km}(t)) \end{aligned}$$

A partir de agora, analizaremos cada termo da igualdade acima separadamente.

$$(u''_{km}(t), 2u'_{km}(t)) = \frac{d}{dt}|u'_{km}(t)|^2. \quad (2.13)$$

$$\mu(t)((u_{km}(t), 2u'_{km}(t))) = \mu(t)\frac{d}{dt}\|u_{km}(t)\|^2. \quad (2.14)$$

Observe que

$$\frac{d}{dt}\left[\mu(t)\|u_{km}(t)\|^2\right] = \mu'(t)\|u_{km}(t)\|^2 + \mu(t)\frac{d}{dt}\|u_{km}(t)\|^2$$

implicando

$$\mu(t)\frac{d}{dt}\|u_{km}(t)\|^2 = -\mu'(t)\|u_{km}(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\left[\mu(t)\|u_{km}(t)\|^2\right].$$

Portanto

$$\mu(t)((u_{km}(t), 2u'_{km}(t))) = -2\mu'(t)\|u_{km}(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\left[\mu(t)\|u_{km}(t)\|^2\right]. \quad (2.15)$$

$$(h(u_{km}(t)), 2u'_{km}(t)) = 2 \int_{\Omega} h(u_{km}(t))2u'_{km}(t)dx.$$

Temos $\Lambda(t) = \int_0^t h(s)ds$. Então $\Lambda(u_{km}(x, t)) = \int_0^{u_{km}(x, t)} h(s)ds$. Daí,

$$2\frac{d}{dt}[\Lambda(u_{km}(x, t))] = 2h(u_{km}(x, t))u'_{km}(x, t)$$

o que implica

$$2 \int_{\Omega} \frac{d}{dt}[\Lambda(u_{km}(x, t))]dx = 2 \int_{\Omega} h(u_{km}(x, t))u'_{km}(x, t)dx.$$

Pela duas última igualdades acima, temos

$$(h(u_{km}(t)), 2u'_{km}(t)) = 2 \int_{\Omega} \frac{d}{dt}[\Lambda(u_{km}(x, t))]dx. \quad (2.16)$$

Logo, de (2.13), (2.15) e (2.16), podemos escrever

$$\begin{aligned}
& (u''_{km}(t), 2u'_{km}(t)) + \mu(t)((u_{km}(t), 2u'_{km}(t)) + (h(u_{km}(t)), 2u'_{km}(t)) + \int_{\Gamma_1} \beta(x) [u'_{km}(t)]^2 d\Gamma = \\
& = \frac{d}{dt} |u'_{km}(t)|^2 - 2\mu'(t) \|u_{km}(t)\|^2 + \frac{d}{dt} [\mu(t) \|u_{km}(t)\|^2] + 2 \int_{\Omega} \frac{d}{dt} [\Lambda(u_{km}(x, t))] dx + \\
& + \int_{\Gamma_1} \beta(x) [u'_{km}(t)]^2 d\Gamma = 2(f(t), u'_{km}(t)).
\end{aligned}$$

Integrando no intervalo $[0, t_{km}]$, com $t_{km} < T$, obtemos

$$\begin{aligned}
& |u'_{km}(t)|^2 - |u'_{1k}|^2 - \int_0^t \mu'(s) \|u_{km}(s)\|^2 ds + \mu(t) \|u_{km}(t)\|^2 - \mu(0) \|u_{0k}\|^2 = \\
& = 2 \int_{\Omega} \Lambda(u_{km}(x, t)) dx - 2 \int_{\Omega} \Lambda(u_{km}(x, 0)) dx + 2 \int_0^t \int_{\Gamma_1} \beta(x) [u_{km}(x, s)]^2 d\Gamma ds = l \\
& = 2 \int_0^t (f(s), u'_{km}(s)) ds.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schartz e Young, obtemos

$$\begin{aligned}
& |u'_{km}(t)|^2 + \mu(t) \|u_{km}(t)\|^2 + 2 \int_{\Omega} \Lambda(u_{km}(x, t)) dx + 2 \int_0^t \int_{\Gamma_1} \beta(x) [u'_{km}(x, s)]^2 d\Gamma ds \leq \\
& \leq |u'_{1k}|^2 + \mu(0) \|u_{0k}\|^2 + \int_0^t |f(s)|^2 ds + \int_0^t \|u_{km}(s)\|^2 ds \int_0^t \mu'(s) ds + \\
& + \int_{\Omega} \Lambda(u_{0k}(x)) dx.
\end{aligned}$$

Usando as hipóteses que $\mu \in W^{1,\infty}(0, T)$, $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e as convergências dos dados iniciais, obtemos

$$\begin{aligned}
& |u'_{km}(t)|^2 + \mu_0 \|u_{km}(t)\|^2 + 2 \int_{\Omega} \Lambda(u_{km}(x, t)) dx + 2\beta_0 \int_0^t \int_{\Gamma_1} [u'_{km}(x, s)]^2 d\Gamma ds \leq \\
& \leq |u_{1k}|^2 + \mu(0) \|u_{0k}\|^2 + \int_0^t |f(s)|^2 ds + \int_0^t \|u_{km}(s)\|^2 ds + \|\mu\|_{L^\infty(0, T)} \int_0^t \|u_{km}(s)\|^2 ds + \\
& + \int_{\Omega} \Lambda(u_{0k}(x)) dx.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Desejamos utilizar o Lema de Gronwall, para tanto devemos mostrar que

$$\int_{\Omega} \Lambda(u_{0k}(x)) dx \leq C,$$

onde C é uma constante que independe de $k, m \in \mathbb{N}$.

De fato, como $sh(s) \geq 0$ e $0 \leq s \leq t$, segue que $h(s) \geq 0$. Da continuidade de h ,

obtemos que

$$\Lambda(t) = \int_0^t h(s) \geq 0, \forall t \in (0, T).$$

Além disso, devemos notar que $h(0) = 0$. Daí, obtemos

$$2 \int_{\Omega} \Lambda(u_{0k}(x)) dx \leq 2 \left| \int_{\Omega} \Lambda(u_{0k}(x)) dx \right| \leq 2 \left| \int_{\Omega} \int_0^{u_{0k}(x)} h(s) ds \right| \leq \int_{\Omega} \int_0^{u_{0k}(x)} |h(s) - h(0)| ds.$$

Desde que h é lipschitziana, temos

$$\int_{\Omega} \Lambda(u_{0k}(x)) dx \leq \int_{\Omega} \int_0^{u_{0k}(x)} C_h |s - 0| ds dx = C_h \int_{\Omega} |u_{0k}(x)|^2 dx = C_h |u_{0k}(x)|.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} \Lambda(u_{0k}(x)) dx \leq C_h |u_{0k}|^2 \quad (2.18)$$

Daí, usando o fato que a imersão $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é contínua, decorre de (2.7) que

$$\int_{\Omega} \Lambda(u_{0k}(x)) dx \leq c_0$$

Logo, de (2.17)

$$\begin{aligned} & |u'_{km}(t)|^2 + \|u'_{km}(t)\|^2 + 2 \int_{\Omega} \Lambda(u_{km}(x, t)) dx + \int_0^t \int_{\Gamma_1} [u'_{km}(x, s)]^2 ds d\Gamma \leq \\ & \leq P + \int_0^t |u'_{km}(s)| ds + \|\mu'\|_{L^\infty(0, T)} \int_0^t \|u_{km}(s)\|^2 ds \end{aligned}$$

onde P é uma constante positiva. Então, pelo Lema de Gronwall podemos concluir que

$$|u'_{km}(t)|^2 + \|u_{km}(t)\|^2 + \int_0^t \int_{\Gamma_1} [u'_{km}(x, s)]^2 ds d\Gamma \leq M, \quad (2.19)$$

onde M é uma constante que independe de $k, m \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, T]$.

Dessa forma, podemos prolongar a solução aproximada $u_{km}(t)$ para todo $t \in [0, T]$, devido ao teorema do prolongamento de soluções.

Segunda Estimativa

Nosso objetivo agora será obter uma estimativa para $u''_{km}(t)$ e, para tanto, consideremos a derivada com respeito a t da equação aproximada (2.12), isto é,

$$\begin{aligned} & (u'''_{km}(t), v) + \frac{d}{dt} [\mu(t)((u_{km}(t), v))] + (h'(u_{km}(t))u'_{km}(t), v) + \int_{\Gamma_1} \beta(x)u''_{km}(x, t)v d\Gamma = \\ & = (f'(t), v). \end{aligned}$$

Considerando $v = 2u''_{km}(t) \in V_m^k$, obtemos

$$\begin{aligned} & (u'''_{km}(t), 2u''_{km}(t)) + \mu'(t)((u_{km}(t), 2u''_{km}(t))) + \mu(t)((u'_{km}(t), 2u''_{km}(t))) + \\ & + ((h'(u_{km}(t))u'_{km}(t), 2u'_{km}(t))) + \int_{\Gamma_1} \beta(x)u''_{km}(x, t)2u''_{km}(x, t)d\Gamma = \\ & = (f'(t), 2u'_{km}(t)). \end{aligned}$$

Temos

$$\mu(t)((u'_{km}(t), 2u''_{km}(t))) = \mu(t)\frac{d}{dt}\|u''_{km}(t)\|^2. \quad (2.20)$$

Observe que

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)\|u'_{km}(t)\|) = \mu'(t)\|u''_{km}(t)\|^2 + \mu(t)\frac{d}{dt}\|u'_{km}(t)\|^2$$

o que implica

$$\mu(t)\frac{d}{dt}\|u'_{km}(t)\|^2 = \frac{d}{dt}(\mu(t)\|u'_{km}(t)\|) - \mu'(t)\|u''_{km}(t)\|^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}|u'_{km}(t)|^2 + 2\mu'(t)((u_{km}(t), u''_{km}(t))) + \frac{d}{dt}(\mu(t)\|u'_{km}(t)\|^2) - \mu'(t)\|u''_{km}(t)\|^2 + \\ & ((h'(u_{km}(t)), 2u'_{km}(t))) + 2 \int_{\Gamma_1} \beta(x)u''_{km}(x, t)u''_{km}(x, t)d\Gamma = 2(f'(t), u'_{km}(t)) \end{aligned}$$

Integrando de $0 \leq t \leq T$, temos

$$\begin{aligned} & |u'_{km}(t)|^2 + 2 \int_0^t \mu'(s)((u_{km}(s), u''_{km}(s)))ds + \mu(t)\|u'_{km}(t)\|^2 + 2 \int_0^t ((h'(u_{km}(s)), u'_{km}(s)))ds + \\ & + 2 \int_0^t \int_{\Gamma_1} \beta(x)u''_{km}(x, s)u''_{km}(x, s)d\Gamma = |u''_{km}(0)|^2 + \mu(0)\|u_{1k}\|^2 + 2 \int_0^t (f'(s), u'_{km}(s))ds + \\ & + \int_0^t \mu'(t)\|u''_{km}(s)\|^2 ds \end{aligned}$$

Como

$$- \int_0^t (h'(u_{km}(s)), 2u'_{km}(s))ds \leq \int_0^t |((h'(u_{km}(s)), 2u'_{km}(s)))|ds$$

e pela hipótese (2.4) obtemos,

$$\begin{aligned} & |u'_{km}(t)|^2 + 2 \int_0^t \mu'(s)((u_{km}(s), u''_{km}(s)))ds + \mu(t)\|u'_{km}(t)\|^2 + \\ & + 2 \int_0^t \int_{\Gamma_1} \beta(x)u''_{km}(x, s)u''_{km}(x, s)d\Gamma \leq |u''_{km}(0)|^2 + \mu(0)\|u_{1k}\|^2 + \int_0^t |(h'(u_{km}(s)), 2u'_{km}(s))|ds \\ & + 2 \int_0^t (f'(s), u'_{km}(s))ds + \|\mu'\| \int_0^t \|u'_{km}(s)\|ds. \end{aligned}$$

(2.21)

Desejamos novamente fazer uso do Lema de Gronwall, dessa forma, necessitamos mostrar que

$$|u''_{km}(0)|^2 \text{ é limitada em } L^2(\Omega). \quad (2.22)$$

De fato, considerando $t = 0$ em (2.12) e tomando $v = u''_{km}(0) \in V_m^k$, temos

$$\begin{aligned} & (u''_{km}(0), u''_{km}(0)) + \mu(0)((u_{km}(0), u''_{km}(0))) + (h(u_{km}(0)), u''_{km}(0)) + \int_{\Gamma_1} \beta(x)u'_{km}(x, 0)u''_{km}(0)d\Gamma \\ & = (f(0), u''_{km}(0)) \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} & |u''_{km}(0)|^2 + \mu(0)((u_{km}(0), u''_{km}(0))) + (h(u_{km}(0)), u''_{km}(0)) + \int_{\Gamma_1} \beta(x)u'_{km}(x, 0)u''_{km}(0)d\Gamma = \\ & = (f(0), u''_{km}(0)) \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} & |u''_{km}(0)|^2 + (\nabla\mu(0)u_{km}(0), \nabla u''_{km}(0)) + (h(u_{km}(0)), u''_{km}(0)) + \int_{\Gamma_1} \beta(x)u'_{km}(x, 0)u''_{km}(x, 0)d\Gamma \\ & = (f(0), u''_{km}(0)). \end{aligned}$$

Pela fórmula de Green, obtemos

$$\begin{aligned} & |u''_{km}(0)|^2 - \int_{\Omega} \Delta [\mu(0)u_{km}(0)u''_{km}(0)] dx + \int_{\Gamma_1} \mu(0) \frac{\partial u_{km}(x, 0)}{\partial \nu} u''_{km}(x, 0) d\Gamma + (h(u_{km}(0)), u''_{km}(0)) \\ & + \int_{\Gamma_1} \beta(x)u'_{km}(x, 0)u''_{km}(x, 0) d\Gamma = (f(0), u''_{km}(0)). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & |u''_{km}(0)|^2 - \mu(0) \int_{\Omega} \Delta u_{km}(0)u''_{km}(0) dx + (h(u_{km}(0)), u''_{km}(0)) + \\ & + \int_{\Gamma_1} \left[\mu(0) \frac{\partial u_{0k}}{\partial \nu} + \beta(x)u_{1k} \right] u''_{km}(x, 0) d\Gamma = (f'(0), u''_{km}(0)). \end{aligned}$$

Segue por (2.9) que

$$|u''_{km}(0)|^2 - \mu(0) \int_{\Omega} \Delta u_{km}(0)u''_{km}(0) dx + (h(u_{km}(0)), u''_{km}(0)) = (f(0), u''_{km}(0)).$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwartz, tem-se

$$|u''_{km}(0)|^2 \leq \mu(0)|\Delta u_{0k}| |u''_{km}(0)| + |h(u_{0k})| |u''_{km}(0)| + |f(0)| |u''_{km}(0)|.$$

Daí, obtemos

$$|u''_{km}(0)| \leq \mu(0)|\Delta u_{0k}| + |h(u_{0k})| + |f(0)|.$$

Usando a norma induzida de $H^2(\Omega)$ em $V \cap H^2(\Omega)$, por (2.7) segue que

$$\Delta u_{0k} \rightarrow \Delta u_0 \text{ em } L^2(\Omega)$$

e daí

$$|\Delta u_{0k}| \text{ é limitada em } L^2(\Omega).$$

Por outro lado, de (2.2) e (2.7), temos

$$|h(u_{0k})| \leq \int_{\Omega} C_h^2 |u_{0k}|^2 \leq C_h^2 |u_{0k}|^2.$$

Portanto

$$|u''_{km}(0)|^2 \leq L, \quad (2.23)$$

onde L é uma constante positiva independente de $t, k \in \mathbb{N}$.

Observação 2.2.1 *Note que faz sentido calcular $f(0)$, pois $f \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$, isto é, $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e $f' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Logo, pelo teorema 1.2.1 faz sentido calcular $f(0)$.*

Observação 2.2.2 *A limitação de $(u''_{km}(0))$ em $L^2(\Omega)$ é um dos pontos chave da prova.*

No que segue, vamos analisar o termo $2 \int_0^t \mu'(s)((u_{km}(t), u''_{km}(t)))$. Com efeito, multiplicando ambos os lados do problema aproximado (2.12) por $\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}$ e tomando $v = 2u''_{km}(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \mu'(t)((u_{km}(t), u''_{km}(t))) &= \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}(f(t), u''_{km}(t)) - \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}|u_{km}(t)|^2 - \\ &\quad - \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}(h(u_{km}(t), u''_{km}(t)) - \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} \int_{\Gamma_1} \beta(x) u'_{km}(t) u''_{km}(t) d\Gamma_1. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Logo, substituindo (2.24) em (2.21), obtemos

$$\begin{aligned} &|u''_{km}(t)|^2 + \mu(t) \|u'_{km}(t)\| + 2 \int_0^t \int_{\Gamma_1} \beta(x) [u''_{km}(x, s)]^2 d\Gamma + 2 \int_0^t \frac{\mu'(s)}{\mu(s)} (f(s), u''_{km}(s)) ds - \\ &- 2 \int_0^t \frac{\mu'(s)}{\mu(s)} |u''_{km}(s)|^2 ds - 2 \int_0^t \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} (h(u_{km}(s), u''_{km}(s))) - 2 \int_0^t \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} \int_{\Gamma_1} \beta(x) u'_{km}(s) u''_{km}(s) ds \\ &\leq |u''_{km}(0)|^2 + \mu(0) \|u_{1k}\| + 2 \int_0^t (h'(u_{km}(s)) \cdot u'_{km}(s), u''_{km}(s)) ds + 2 \int_0^t (f'(s), u''_{km}(s)) ds + \\ &\| \mu' \|_{L^\infty(0, T)} \int_0^t \|u'_{km}(s)\|^2 ds, \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
& |u''_{km}(t)|^2 + \mu(t)\|u'_{km}(t)\|^2 + 2 \int_0^t \int_{\Gamma_1} \beta(x)[u''_{km}(x, s)]^2 d\Gamma \leq |u''_{km}(0)|^2 + \mu(0)\|u_{1k}\|^2 + \\
& + 2 \int_0^t (h'(u_{km}(s)) \cdot u'_{km}(s), u''_{km}(s)) ds + 2 \int_0^t (f'(s), u''_{km}(s)) ds + \|\mu'\|_{L^\infty(0, T)} \int_0^t \|u'_{km}(s)\|^2 ds \\
& + 2 \int_0^t \left| \frac{\mu'(s)}{\mu(s)} \right| |(f(s), u''_{km}(s))| ds + 2 \int_0^t \frac{\mu'(s)}{\mu(s)} |u''_{km}(s)|^2 ds + 2 \int_0^t \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} (h(u_{km}(s), u''_{km}(s)) + \\
& 2 \int_0^t \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} \int_{\Gamma_1} \beta(x) u'_{km}(s) u''_{km}(s) ds d\Gamma.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Vamos analisar o termo $\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} \int_{\Gamma_1} \beta(x) u'_{km}(s) u''_{km}(s) ds$ da desigualdade acima.

Note que pela desigualdade de Hölder e Young, obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} \int_{\Gamma_1} \beta(x) u'_{km}(s) u''_{km}(s) ds \leq 2 \left| \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} \int_{\Gamma_1} \beta(x) u'_{km}(s) u''_{km}(s) ds \right| d\Gamma \\
& \leq 2 \left[\int_{\Gamma_1} \left(\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} \sqrt{\beta(x)} u'_{km}(s) d\Gamma \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \left[\int_{\Gamma_1} [\sqrt{\beta(x)} u''_{km}(t)]^2 d\Gamma \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \\
& \int_{\Gamma_1} \beta(x) \left[\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} u'_{km}(t) \right]^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \beta(x) [u''_{km}(t)]^2 d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Substituindo (2.26) em (2.25), resulta que

$$\begin{aligned}
& |u''_{km}(t)|^2 + \mu(t)\|u_{km}(t)\| + 2 \int_0^t \int_{\Gamma_1} \beta(x)[u''_{km}(x, s)]^2 d\Gamma \leq |u''_{km}(0)|^2 + \mu(0)\|u_{1k}\| + \\
& + 2 \int_0^t (h'(u_{km}(s)) \cdot u'_{km}(s), u''_{km}(s)) ds + 2 \int_0^t (f'(s), u''_{km}(s)) ds + \|\mu'\|_{L^\infty(0, T)} \int_0^t \|u'_{km}(s)\|^2 ds \\
& + 2 \int_0^t \left| \frac{\mu'(s)}{\mu(s)} \right| |(f(s), u''_{km}(s))| ds + 2 \int_0^t \frac{\mu'(s)}{\mu(s)} |u''_{km}(s)|^2 ds + 2 \int_0^t \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} (h(u_{km}(s), u''_{km}(s)) ds + \\
& + \int_0^t \int_{\Gamma} \beta(x) \left[\frac{\mu'(s)}{\mu(s)} u''_{km}(s) \right]^2 d\Gamma ds + \int_0^t \int_{\Gamma} \beta(x) [u''_{km}(s)]^2 d\Gamma ds.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
& |u''_{km}(t)|^2 + \mu(t)\|u_{km}(t)\| + 2 \int_0^t \int_{\Gamma_1} \beta(x)[u''_{km}(x, s)]^2 d\Gamma ds - \int_0^t \int_{\Gamma_1} \beta(x)[u''_{km}(x, s)]^2 d\Gamma ds \leq \\
& \leq |u''_{km}(0)|^2 + \mu(0)\|u_{1k}\| + 2 \int_0^t (h'(u_{km}(s)) \cdot u'_{km}(s), u''_{km}(s)) ds + 2 \int_0^t (f'(s), u''_{km}(s)) ds \\
& + \|\mu'\|_{L^\infty(0, T)} \int_0^t \|u'_{km}(s)\|^2 ds + 2 \int_0^t \left| \frac{\mu'(s)}{\mu(s)} \right| |(f(s), u''_{km}(s))| ds + 2 \int_0^t \frac{\mu'(s)}{\mu(s)} |u''_{km}(s)|^2 ds + \\
& + 2 \int_0^t \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} (h(u_{km}(s), u''_{km}(s)) + \int_0^t \int_{\Gamma} \beta(x) \left[\frac{\mu'(s)}{\mu(s)} u''_{km}(s) \right]^2 d\Gamma ds.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
& |u''_{km}(t)|^2 + \mu(t)\|u_{km}(t)\| + \int_0^t \int_{\Gamma_1} \beta(x)[u''_{km}(x, s)]^2 d\Gamma ds \leq |u''_{km}(0)|^2 + \mu(0)\|u_{1k}\| + \\
& + 2 \int_0^t (h'(u_{km}(s)) \cdot u'_{km}(s), u''_{km}(s)) ds + 2 \int_0^t (f'(s), u''_{km}(s)) ds \\
& + \|\mu'\|_{L^\infty(0, T)} \int_0^t \|u'_{km}(s)\|^2 ds + 2 \int_0^t \left| \frac{\mu'(s)}{\mu(s)} \right| |(f(s), u''_{km}(s))| ds + 2 \int_0^t \frac{\mu'(s)}{\mu(s)} |u''_{km}(s)|^2 ds + \\
& 2 \int_0^t \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} (h(u_{km}(s), u''_{km}(s))) ds + \int_0^t \int_{\Gamma} \beta(x) \left[\frac{\mu'(s)}{\mu(s)} u''_{km}(s) \right]^2 d\Gamma ds
\end{aligned} \tag{2.27}$$

No que segue, faremos a análise dos termos da direita de (2.27).

- $2 \int_0^t (h'(u_{km}(s)) \cdot u'_{km}(s), u''_{km}(s)) ds$

Sendo h Lipschitziana, temos $|h'(s)| \leq C_h$ quase sempre. Temos também pela Desigualdade de Cauchy-Schwartz e Young e pela imersão contínua $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ com constante de imersão c_0 , obtemos

$$\begin{aligned}
& 2 \int_0^t (h'(u_{km}(s)) \cdot u'_{km}(s), u''_{km}(s)) ds \leq 2 \int_0^t |h'(u_{km}(s)) u'_{km}(s)| |u''_{km}(s)| ds \\
& \leq 2 \int_0^t C_h |u'_{km}(s)| |u''_{km}(s)| ds \leq C_h^2 \int_0^t |u'_{km}(s)|^2 ds + \int_0^t |u''_{km}(s)|^2 ds \leq \\
& \leq C_h c_0 \|u'_{km}(s)\|^2 ds + \int_0^t |u''_{km}(s)|^2 ds.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

- $2 \int_0^t (f'(s), u''_{km}(s)) ds.$

Observe que pela desigualdade de Cauchy-Schwartz e Young, obtemos

$$\begin{aligned}
& 2 \int_0^t (f'(s), u''_{km}(s)) ds \leq 2 \int_0^t |(f'(s), u''_{km}(s))| ds \leq 2 \int_0^t |f'(s)| |u''_{km}(s)| ds \\
& \leq \int_0^t |f'(s)|^2 ds + \int_0^t |u''_{km}(s)|^2 ds.
\end{aligned}$$

- $2 \int_0^t \left| \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} (f(s), u''_{km}(s)) \right| ds.$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz e Young e por (2.4), obtemos

$$\begin{aligned}
& 2 \int_0^t \left| \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} (f(s), u''_{km}(s)) \right| ds \leq \frac{\|\mu'\|_{L^\infty(0, T)}}{\mu_0} \int_0^t |f(s)|^2 ds + \frac{\|\mu'\|_{L^\infty(0, T)}}{\mu_0} \int_0^t |u''_{km}(s)|^2 ds \\
& \bullet 2 \int_0^t \frac{\mu'(s)}{\mu(s)} |u''_{km}(s)|^2 ds
\end{aligned}$$

Novamente pela desigualdade de Cauchy-Schwartz e Young, e pela imersão contínua $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$, obtemos

$$2 \int_0^t \frac{\mu'(s)}{\mu(s)} |u''_{km}(s)|^2 ds \leq 2 \frac{\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0} c_0 \int_0^t \|u''_{km}(s)\|^2 ds,$$

$$\bullet 2 \int_0^t \frac{\mu'(s)}{\mu(t)} (h(u_{km}(s)), u''_{km}(s)) ds.$$

Observe que pela primeira estimativa, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz e Young, por h ser Lipschitziana, e pela imersão contínua $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$, obtemos

$$2 \int_0^t \frac{\mu'(s)}{\mu(t)} (h(u_{km}(s)), u''_{km}(s)) ds \leq 2 \int_0^t \left| \frac{\mu'(s)}{\mu(t)} \right| (h(u_{km}(s)), u''_{km}(s)) ds \leq$$

$$\leq 2 \int_0^t \left| \frac{\mu'(s)}{\mu(t)} \right| |h(u_{km}(s))| |u''_{km}(s)| ds \leq 2 \frac{\|\mu'\|}{\mu_0} \int_0^t C_h |u_{km}(s)| |u''_{km}(s)| ds \leq \frac{\|\mu'\|}{\mu_0} C_h c_0 M +$$

$$+ \frac{\|\mu'\|}{\mu_0} C_h c_0 \int_0^t |u_{km}(s)|^2 ds$$

$$\bullet \int_0^t \int_{\Gamma_1} \beta(x) \left[\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} u'_{km}(t) \right]^2 d\Gamma ds$$

Novamente pela primeira estimativa, segue que

$$\int_0^t \int_{\Gamma_1} \beta(x) \left[\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} u'_{km}(t) \right]^2 d\Gamma ds \leq \frac{\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \|\mu'\|^2}{\mu_0^2} \int_{\Gamma_1} [u'_{km}(t)]^2 d\Gamma \leq \frac{\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \|\mu'\|^2}{\mu_0^2} M.$$

Pela análise dos termos acima, da imersão contínua $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e por (2.9), podemos escrever (2.27) da seguinte forma:

$$|u''_{km}(t)|^2 + \mu_0 \|u'_{km}(t)\|^2 + \int_0^t \int_{\Gamma_1} \beta(x) [u''_{km}(x, s)]^2 d\Gamma ds \leq |u''_{km}(t)|^2 + \mu(t) \|u_{km}(t)\|^2 +$$

$$\int_0^t \int_{\Gamma_1} \beta(x) [u''_{km}(x, s)]^2 d\Gamma ds \leq C_h c_0 \int_0^t \|u'_{km}(s)\|^2 ds + \int_0^t |u''_{km}(s)|^2 ds + \int_0^t |f(s)|^2 ds +$$

$$+ \int_0^t |f'(s)|^2 ds \frac{\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0} \int_0^t |u''_{km}(s)|^2 ds + 2 \frac{\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0} c_0 \int_0^t \|u''_{km}(s)\|^2 ds +$$

$$+ \frac{\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0} C_h c_0 M + \frac{\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0} C_h c_0 \int_0^t \|u''_{km}(s)\|^2 ds + \frac{\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \|\mu'\|^2}{\mu_0^2} M.$$

Desde que $f \in H^1(0, T, L^2(\Omega))$, temos

$$\int_0^t |f(s)|^2 ds \leq P_1 \quad \text{e} \quad \int_0^t |f'(s)|^2 ds \leq P_2.$$

Logo, denotando por S a constante que limita o termo $\mu(0)\|u_{1k}\|^2$, temos

$$\begin{aligned}
& |u''_{km}(t)|^2 + \mu_0 \|u'_{km}(t)\|^2 + \beta_0 \int_0^t \int_{\Gamma_1} [u''_{km}(x, s)]^2 d\Gamma ds \leq [C_h^2 c_0] + \|\mu'\|_{L^\infty(0, T)} \int_0^t \|u'_{km}(s)\|^2 ds \\
& + \left[2 + \frac{\|\mu'\|_{L^\infty(0, T)}}{\mu_0} + 2 \frac{\|\mu'\|_{L^\infty(0, T)}}{\mu_0} c_0 + \frac{\|\mu'\|_{L^\infty(0, T)}}{\mu_0} C_h c_0 \right] \int_0^t |u''_{km}(s)|^2 ds + \\
& + \frac{\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \|\mu'\|_{L^\infty(0, T)}^2}{\mu_0^2} M + P_1 + P_2 + \frac{\|\mu'\|_{L^\infty(0, T)}}{\mu_0} C_h c_0 + L + S
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Daí, denotando por $D_1 = \frac{\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \|\mu'\|_{L^\infty(0, T)}^2}{\mu_0^2} M + P_1 + P_2 + \frac{\|\mu'\|_{L^\infty(0, T)}}{\mu_0} C_h c_0 + L + S$,
 $D_2 = [C_h^2 c_0] + \|\mu'\|_{L^\infty(0, T)}$ e $D_3 = \left[2 + \frac{\|\mu'\|_{L^\infty(0, T)}}{\mu_0} + 2 \frac{\|\mu'\|_{L^\infty(0, T)}}{\mu_0} c_0 + \frac{\|\mu'\|_{L^\infty(0, T)}}{\mu_0} C_h c_0 \right]$,
resulta de (2.29) que

$$\begin{aligned}
& |u''_{km}(t)|^2 + \mu_0 \|u'_{km}(t)\|^2 + \beta_0 \int_0^t \int_{\Gamma_1} [u''_{km}(x, s)]^2 d\Gamma ds \leq D_1 + D_2 \int_0^t \|u'_{km}(s)\|^2 ds + \\
& + D_3 \int_0^t |u''_{km}(s)|^2 ds.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema de Gronwall, obtemos

$$|u''_{km}(t)|^2 + \|u'_{km}(t)\|^2 + \int_0^t \int_{\Gamma_1} [u''_{km}(x, s)]^2 d\Gamma ds \leq N, \forall t \in [0, T] \tag{2.30}$$

onde N é uma constante que independe de k, m . Logo, da última desigualdade acima e por (2.19), obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_{km}) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V) \\ (u'_{km}) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V) \\ (u''_{km}) \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)) \\ (u''_{km}) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \end{array} \right. \tag{2.31}$$

Além disso, $h(u_{km})$ é limitada em $L^2(Q)$. De fato, por h ser Lipschitziana com constante C_h e pela primeira estimativa, obtemos

$$\|h(u_{km})\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} = \int_0^t \int_{\Omega} |h(u_{km}(x, t))|^2 dx dt \leq C_h^2 \int_0^t \int_{\Omega} |u_{km}(x, t)|^2 ds dx \leq \|u_{km}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}$$

Da imersão $L^2(0, T; V) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega))$, segue que $h(u_{km})$ é limitada em $L^2(Q)$.

2.3 Passagem ao limite quando $m \rightarrow \infty$

No que segue, com as limitações em (2.31), obtemos as seguintes convergências quando $m \rightarrow \infty$.

$$u_{km} \xrightarrow{*} u_k \text{ em } L^\infty(0, T; V); \tag{2.32}$$

$$u'_{km} \xrightarrow{*} r \text{ em } L^\infty(0, T; V); \quad (2.33)$$

$$u''_{km} \rightharpoonup s \text{ em } L^2(Q). \quad (2.34)$$

Pelo teorema do traço de ordem zero e da imersão contínua $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$, obtemos

$$\|\gamma_0 u'_{km}(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \leq C \|u'_{km}(t)\|$$

Desta última desigualdade e (2.32), segue que (u'_{km}) é limitada em $L^\infty(0, T, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$ e, portanto,

$$u'_{km} \xrightarrow{*} u'_k \text{ em } L^\infty(0, T, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)). \quad (2.35)$$

Mostraremos que $s = u'_k$ e seguindo o mesmo raciocínio podemos mostrar que $r = u''_k$. Com efeito, a convergência em (2.32) é equivalente a

$$\langle u_{km}, \psi \rangle_{L^\infty(0, T; V) \times L^1(0, T; V')} \rightarrow \langle u_k, \psi \rangle_{L^\infty(0, T; V) \times L^1(0, T; V')}, \quad \forall \psi \in L^1(0, T; V').$$

Note que pelo Teorema 1.2.2, obtemos

$$\langle u_{km}, \psi \rangle_{L^\infty(0, T; V) \times L^1(0, T; V')} = \int_0^T \langle u_{km}(t), \psi(t) \rangle_{V \times V'} dt.$$

Daí

$$\int_0^T \langle u_{km}(t), \psi(t) \rangle_{V \times V'} dt \rightarrow \int_0^T \langle u_k(t), \psi(t) \rangle_{V \times V'} dt, \quad \forall \psi \in L^1(0, T; V')$$

Em particular

$$\int_0^T \langle u_{km}(t), \psi(t) \rangle_{V \times V'} dt \rightarrow \int_0^T \langle u_k(t), \psi(t) \rangle_{V \times V'} dt, \quad \forall \psi \in L^2(0, T, L^2(\Omega)).$$

Temos como consequência do Teorema da Representação de Riesz

$$\langle u_{km}(t), \psi(t) \rangle_{V \times V'} = (u_{km}(t), \psi(t))_{L^2(\Omega)},$$

logo

$$u_{km} \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q) \quad (2.36)$$

Daí, por definição de convergência fraca, para todo $g \in [L^2(Q)]'$, tem-se

$$(g, u_{km})_{L^2(Q)} \rightarrow (g, u_k)_{L^2(Q)}.$$

Pelo teorema da Representação de Riesz

$$\int_\Omega \int_0^T u_{km}(x, t) \psi(x, t) dx dt \rightarrow \int_\Omega \int_0^T u_k(x, t) \psi(x, t) dx dt$$

isto é

$$\int_0^T (u_{km}(t), \psi(t)) dt \rightarrow \int_0^T (u_k(t), \psi(t)) dt,$$

Seja $\theta \in D(0, T)$ e $\rho \in L^2(\Omega)$ e considere $\kappa = \theta\rho \in L^2(\Omega)$. Daí

$$\int_0^T (u_{km}(t), \rho(t))\theta(t) dt \rightarrow \int_0^T (u_k, \rho(t))\theta(t) dt,$$

implicando que

$$(u_{km}(t), \rho) \rightarrow (u_k, \rho), \text{ em } D'(0, T), \quad \forall \rho \in L^2(\Omega) \quad (2.37)$$

Da convergência (2.33), segue de forma análogo ao que foi feito anteriormente que

$$u'_{km} \rightharpoonup r \text{ em } L^2(Q),$$

e portanto podemos concluir que

$$(u'_{km}(t), \rho) \rightarrow (r(t), \rho) \text{ em } D'(0, T), \quad \forall \rho \in L^2(\Omega) \quad (2.38)$$

Usando a derivada distribuicional em (2.37) resulta

$$\frac{d}{dt}(u_{km}(t), \rho) \rightarrow \frac{d}{dt}(u_k(t), \rho)$$

implicando

$$(u'_{km}(t), \rho) \rightarrow \frac{d}{dt}(u_k(t), \rho) \quad (2.39)$$

da unicidade do limite

$$\frac{d}{dt}(u_k(t), \psi) = (r(t), \psi)$$

Pela Proposição 1.2.3, obtemos

$$u'_k(t) = r(t)$$

Temos por (2.32) e da imersão contínua $L^\infty(0, T; V) \hookrightarrow L^2(0, T; V)$ que

$$u_{km} \rightharpoonup u_k \text{ em } L^2(0, T, V).$$

Como $L^2(0, T; V)$ é reflexivo, temos $u_{km} \rightharpoonup u_k$ em $L^2(0, T; V)$ e consequentemente, $(u_{km})_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0, T, H^1(\Omega))$, pois $V \xrightarrow{\text{cont}} H^1(\Omega)$.

De modo análogo, podemos concluir que

$$(u'_{km})_{m \in \mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Sendo a imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ compacta, segue do Teorema de Aubin-Lions cf em [11] ou [22] que existe uma subsequência de (u_{km}) , que continuaremos denotando por (u_{km}) , tal que

$$u_{km} \rightarrow u_k \text{ em } L^2(Q),$$

de onde segue cf em Brezis [3] que existe uma subsequência de (u_{km}) , ainda denotada por (u_{km}) , tal que

$$u_{km} \rightarrow u_k \text{ quase sempre em } Q.$$

Da continuidade de h , obtemos

$$h(u_{km}) \rightarrow h(u_k) \text{ quase sempre em } Q. \quad (2.40)$$

Agora usando $h(u_{km})$ ser limitada em $L^2(Q)$, por (2.40) e do Lema de Lions cf em [11], obtemos

$$h(u_{km}) \rightharpoonup h(u_k) \text{ em } L^2(Q). \quad (2.41)$$

Multiplicando ambos os lados de (2.12) por $\theta \in D(0, T)$, integrando de 0 a T e usando as convergências (2.32), (2.34), (2.35), (2.41), obtemos por passagem ao limite quando $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \int_0^T (u_k''(t), v)\theta dt + \int_0^T \mu(t)((u_k(t), v))\theta dt + \int_0^T (h(u_k(t), v))\theta dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \beta(x)u_k'(x, t)v\theta d\Gamma_1 dt \\ &= \int_0^T (f(t), v)\theta dt, \quad \forall v \in V_m^k, \quad \forall \theta \in D(0, T). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Desde que V_m^k é denso em $V \cap H^2(\Omega)$, segue que (2.42) esta assegurado para todo $v \in V \cap H^2(\Omega)$.

2.4 Passagem ao limite quando $k \rightarrow \infty$

Afirmamos que a primeira e segunda estimativas também são garantidas para a subsequência (u_k) . De fato, de (2.32), segue da Proposição (B.2.3) que

$$\|u_k\|_{L^\infty(0, T; V)} \leq \liminf \|u_{km}\| \leq C, \quad \forall k, m \in \mathbb{N},$$

onde C é uma constante que independe de k e m . Assim, passando o limite quando $k \rightarrow \infty$ em (u_k) obtemos uma função $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$u_k \xrightarrow{*} u \text{ em } L^\infty(0, T; V) \quad (2.43)$$

De modo análogo, obtemos

$$u'_k \xrightarrow{*} u' \text{ em } L^\infty(0, T; V) \quad (2.44)$$

$$u'_k \xrightarrow{*} u' \text{ em } L^\infty(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)) \quad (2.45)$$

Temos também, como feito anteriormente que

$$u''_k \rightharpoonup u'' \text{ em } L^2(Q) \quad (2.46)$$

$$h(u_k) \rightharpoonup h(u) \text{ em } L^2(Q) \quad (2.47)$$

Passando ao limite em (2.42) quando $k \rightarrow \infty$ e usando as convergências (2.43)-(2.47) e o fato de que $V \cap H^2(\Omega)$ é denso em V , obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T (u''(t), v)\theta dt + \int_0^T \mu(t)((u(t), v))\theta dt + \int_0^T (h(u(t), v)\theta dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \beta(x)u'(x, t)v\theta d\Gamma_1 dt \\ &= \int_0^T (f(t), v)\theta dt, \quad \forall v \in V, \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Tomemos $\theta v \in \mathcal{A}$ (isto é, $\theta \in D(0, T)$ e $v \in \mathcal{D}(\Omega)$). Assim, para $\theta v \in \mathcal{A}$, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T (u''(t), v)\theta dt = \langle u'', \theta v \rangle_{\mathcal{D}'(Q) \times \mathcal{D}(Q)} \\ & \int_0^T \mu(t)((u(t), v))_V \theta dt = \langle \mu(t)((\mu(t)u(t), v))_V \rangle_{\mathcal{D}'(Q) \times \mathcal{D}(Q)} \\ & \int_0^T (h(u(t), v)\theta dt = \int_0^T (h(u(t), \theta v) dt = \langle h, \theta v \rangle_{\mathcal{D}'(Q) \times \mathcal{D}(Q)} \end{aligned}$$

Como $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ segue $v = 0$ sobre Γ_1 , e portanto,

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} \beta(x)u'(x, t)v\theta d\Gamma_1 dt = 0.$$

Temos também

$$\int_0^T (f(t), v)\theta dt = \int_0^T (f(t), \theta v) dt = \langle f, \theta v \rangle_{\mathcal{D}'(Q) \times \mathcal{D}(Q)}$$

Destes fatos acima, podemos escrever

$$\langle u'', \theta v \rangle_{\mathcal{D}'(Q) \times \mathcal{D}(Q)} + \langle \mu \Delta u, \theta v \rangle_{\mathcal{D}'(Q) \times \mathcal{D}(Q)} + \langle h, \theta v \rangle_{\mathcal{D}'(Q) \times \mathcal{D}(Q)} = \langle f, \theta v \rangle_{\mathcal{D}'(Q) \times \mathcal{D}(Q)}$$

o que implica

$$\langle u'' - \mu \Delta u + h(u), \theta v \rangle_{\mathcal{D}'(Q) \times \mathcal{D}(Q)} = 0, \quad \forall \theta v \in \mathcal{A}. \quad (2.49)$$

Logo, pela densidade de \mathcal{A} em $\mathcal{D}(Q)$, resulta de (2.49) que:

$$u'' - \mu\Delta u + h(u) = f \text{ em } \mathcal{D}'(Q)$$

Portanto, obtemos $\mu\Delta u \in L^2(Q)$, pois $u'', h(u), f \in L^2(Q)$ e assim,

$$u'' - \mu\Delta u + h(u) = f \text{ em } L^2(Q) = L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.50)$$

Como $u \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$ e $\Delta(\mu u) \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$, resulta como feito em Milla Miranda [18] que

$$\mu \frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^2(0, T, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)).$$

Multiplicando ambos os lados de (2.50) por $v\theta$, com $v \in V$ e $\theta \in D(0, T)$, integrando de 0 a T , obtemos

$$\int_0^T (u''(t), v)\theta dt + \int_0^T \mu(t)(-\Delta u, v)\theta dt + \int_0^T (h(u), v)\theta dt = \int_0^T (f(t), v)\theta dt.$$

Pela formula de Green, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T (u''(t), v)\theta dt + \int_0^T \mu((u(t), v(t)))\theta dt - \int_0^T \left\langle \mu \frac{\partial u}{\partial \nu}, v \right\rangle_{-H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \theta dt + \\ \int_0^T (h(u), v)\theta dt = \int_0^T (f(t), v)\theta dt \end{aligned} \quad (2.51)$$

Comparando (2.48) com (2.51), obtemos

$$\int_0^T \left\langle \beta u' + \mu \frac{\partial u}{\partial \nu}, v \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \theta dt = 0 \quad \forall v \in V, \quad \forall \theta \in D(0, T).$$

Portanto,

$$\mu(t) \frac{\partial u(t)}{\partial \nu} + \beta u'(t) = 0 \text{ em } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1).$$

Como $\beta \in W^{1,\infty}(\Gamma_1)$ e $u' \in L^\infty(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$, temos $\beta u' \in L^\infty(0, T, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$. Portanto,

$$\mu \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u' = 0 \text{ em } L^\infty(0, T, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$$

Para completar a prova do teorema, devemos provar que $u \in L^2(0, T, H^2(\Omega))$. Consideremos o seguinte problema de fronteira

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta(\mu u(t)) = f(t) - u''(t) - h(u(t)) \text{ em } Q, \\ \mu(t)u(t) = 0 \text{ em } \Gamma_0 \times [0, T], \\ \frac{\partial(\mu(t)u(t))}{\partial \nu} = -\beta u'(t) \text{ em } \Gamma_1 \times [0, T]. \end{array} \right. \quad (2.52)$$

Sendo $f(t) - u''(t) - h(u(t)) \in L^2(\Omega)$, segue pelo Teorema (B.2.6) que $\mu(t)u(t) \in H^2(\Omega)$. Observe que $\mu u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$ e por (2.4) segue que $u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$. Portanto, $u \in L^\infty(0, T; V \cap H^2(\Omega))$.

2.5 Condições iniciais

Nesta seção, mostraremos que $u(0) = u_0$ e que $u'(0) = u_1$. Observe que

$$\left| \begin{array}{l} u \in L^\infty(0, T; V \cap H^2(\Omega)) \\ u' \in L^\infty(0, T; V) \end{array} \right.$$

e $V \cap H^2(\Omega) \xrightarrow{\text{cont}} V$, e então pelo Teorema 1.2.1, resulta que $u \in C^0([0, T]; V)$. Logo, faz sentido calcular $u(0)$. De modo análogo, temos

$$\left| \begin{array}{l} u' \in L^\infty(0, T; V) \leftrightarrow L^2(0, T; V) \\ u'' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \end{array} \right.$$

e $V \xrightarrow{\text{cont}} L^2(\Omega)$. Dessa forma, seguindo o mesmo raciocínio, podemos concluir que $u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$. Portanto, faz sentido calcular $u'(0)$.

Da convergência $u_k \xrightarrow{*} u$ em $L^\infty(0, T; V)$, conclui-se que para toda $\theta \in C^1([0, T])$ com $\theta(T) = 0$ e $\theta(0) = 1$, obtemos que

$$\int_0^T \langle u_k(t), v \rangle_{V \times V'} \theta'(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle u(t), v \rangle_{V \times V'} \theta'(t) dt, \forall v \in V. \quad (2.53)$$

Analogamente, da convergência $u'_k \xrightarrow{*} u'$ em $L^\infty(0, T; V)$, para toda $\theta \in C^1([0, T])$ com $\theta(T) = 0$ e $\theta(0) = 1$, obtemos

$$\int_0^T \langle u'_k(t), v \rangle_{V \times V'} \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle u'(t), v \rangle_{V \times V'} \theta(t) dt, \forall v \in V \quad (2.54)$$

Assim, de (2.53) e (2.54), resulta que:

$$\int_0^T \frac{d}{dt} [\langle u_k(t), v \rangle \theta(t)] dt \rightarrow \int_0^T \frac{d}{dt} [\langle u(t), v \rangle \theta(t)] dt$$

implicando que

$$\langle u_k(T), v \rangle \theta(T) - \langle u_k(0), v \rangle \theta(0) \rightarrow \langle u(T), v \rangle \theta(T) - \langle u(0), v \rangle \theta(0).$$

Daí,

$$\langle u_k(0), v \rangle \rightarrow \langle u(0), v \rangle, \forall v \in V.$$

Da imersão $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$, segue que

$$(u_k(0), v) \rightarrow (u(0), v), \quad \forall v \in L^2(\Omega). \quad (2.55)$$

Pela convergência do dado inicial, temos que (u_{0k}) converge forte para u_0 em $V \cap H^2(\Omega)$, e portanto converge forte em $L^2(\Omega)$ pois $V \cap H^2(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^2(\Omega)$, logo converge fraco em $L^2(\Omega)$. Assim,

$$(u_k(0), v) \rightarrow (u_0, v), \quad \forall v \in L^2(\Omega). \quad (2.56)$$

Portanto, de (2.55) e (2.56) e pela unicidade de limite fraco, obtemos $u(0) = u_0$. Com o mesmo raciocínio obtém-se que $u'(0) = u_1$, mostrando as condições iniciais. ■

2.6 Unicidade

Nesta seção, mostraremos que a solução do problema (1) com h sendo uma função Lipschitziana é única e, para tanto, usaremos o Lema de Gronwall. Suponha que existam duas soluções u, v nas condições do Teorema 1.2.1. Daí

$$u'' - \mu \Delta u + h(u) = f \text{ em } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \quad (2.57)$$

e

$$v'' - \mu \Delta v + h(v) = f \text{ em } L^2(0, T, L^2(\Omega)). \quad (2.58)$$

Definindo $w = u - v$ e fazendo a diferença entre (2.57) e (2.58), obtemos

$$w'' - \mu \Delta w + h(u) - h(v) = 0 \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Como $w' \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$, temos

$$(w'', w') - (\Delta(\mu w), w') = (h(u) - h(v), w').$$

Pelo teorema de Green, resulta que

$$(w''(t), w'(t)) + \mu(t)((w(t), w'(t))) + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w(t)}{\partial \nu} w'(t) d\Gamma = (h(v) - h(u), w'(t)).$$

Desde que $\mu(t) \frac{\partial w(t)}{\partial \nu} = \beta w'(t)$, temos que

$$(w''(t), w'(t)) + \mu(t)((w(t), w'(t))) + \int_{\Gamma_1} \beta (w'(t))^2 d\Gamma = (h(v) - h(u), w'(t)). \quad (2.59)$$

Segue da desigualdade de Cauchy-Schwartz e pela desigualdade de Young,

$$\begin{aligned} (w''(t), w'(t)) + \mu(t)((w(t), w'(t))) + \int_{\Gamma_1} \beta(w'(t))d\Gamma &= (h(v) - h(u), w'(t)) \leq \\ |h(v) - h(u)||w'(t)| &\leq \frac{1}{2}|h(v) - h(u)|^2 + \frac{1}{2}|w'(t)|^2. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Observemos que

$$|h(v) - h(u)|^2 = \int_{\Omega} |h(v(x, t)) - h(u(x, t))|^2 dx dt = C_h \int_{\Omega} |v(x, t) - u(x, t)|^2 dx dt = C_h^2 |w(t)|^2. \quad (2.61)$$

Substituindo (2.60) e (2.61) em (2.59), obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w'(t)|^2 + \frac{1}{2} \mu(t) \frac{d}{dt} \|w(t)\| + \int_{\Gamma_1} \beta(w'(t))^2 d\Gamma \leq \frac{C_h}{2} |w(t)|^2 + \frac{1}{2} |w'(t)|^2. \quad (2.62)$$

Desde que $V \xrightarrow{cont} L^2(\Omega)$, obtemos de (2.62) que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w'(t)|^2 + \frac{1}{2} \mu(t) \frac{d}{dt} \|w(t)\| + \int_{\Gamma_1} \beta(w'(t))^2 d\Gamma \leq \frac{C_h c_0}{2} \|w(t)\|^2 + \frac{1}{2} |w'(t)|^2.$$

Notemos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\mu(t) \|w(t)\|^2] = \frac{1}{2} \mu'(t) \|w(t)\|^2 + \frac{1}{2} \mu(t) \frac{d}{dt} \|w(t)\|^2$$

o que implica

$$\frac{1}{2} \mu(t) \frac{d}{dt} \|w(t)\|^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\mu(t) \|w(t)\|^2] - \frac{1}{2} \mu'(t) \|w(t)\|^2 \quad (2.63)$$

Substituindo (2.63) em (2.62), resulta que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w'(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\mu(t) \|w(t)\|^2] - \frac{1}{2} \mu'(t) \|w(t)\|^2 + \int_{\Gamma_1} \beta(w'(t))^2 &\leq \\ \leq \frac{C_h^2 c_0}{2} \|w(t)\|^2 + |w'(t)|^2. \end{aligned}$$

implicando que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w'(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\mu(t) \|w(t)\|^2] + \int_{\Gamma_1} \beta(w'(t))^2 &\leq \\ \leq \frac{C_h^2 c_0}{2} \|w(t)\|^2 + \frac{1}{2} |w'(t)|^2 + \frac{1}{2} \mu'(t) \|w(t)\|^2. \end{aligned}$$

Como $\int_{\Gamma_1} \beta(w'(t))^2 \geq 0$, obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w'(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\mu(t) \|w(t)\|^2] \leq \frac{C_h^2 c_0}{2} \|w(t)\|^2 + \frac{1}{2} |w'(t)|^2 + \|\mu'\|_{L^\infty(0, T)} \frac{1}{2} \|w(t)\|^2.$$

ou ainda

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|w'(t)|^2 + \mu(t)\|w(t)\|^2] \leq \frac{C_h^2 c_0 + \|\mu'\|_{L^\infty(0,T)} \mu(t)}{2\mu_0} \|w(t)\|^2 + \frac{1}{2} |w'(t)|^2. \quad (2.64)$$

Integrando (2.64) de $0 \leq t \leq T$, e denotaremos a constante acima por $M_1 = \frac{C_h^2 c_0 + \|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}}{2}$.

Assim, obtemos

$$|w'(t)|^2 + \mu(t)\|w(t)\|^2 \leq \{|w'(0)|^2 + \|w(0)\|^2\} + M_1 \int_0^t \mu(t)\|w(t)\|^2 dt + \int_0^t |w'(t)|^2 dt.$$

Como $w'(0) = 0$ e $w(0) = 0$, temos

$$|w'(t)|^2 + \mu(t)\|w(t)\|^2 \leq 0 + M_1 \int_0^t \mu(t)\|w(t)\|^2 dt$$

Pelo Lema de Gronwall, segue que

$$|w'(t)|^2 + \mu(t)\|w(t)\|^2 = 0$$

e assim $w = 0$, pois $\mu(t) \geq \mu_0 > 0$. Portanto, $u = v$.

Capítulo 3

Solução fraca

Nosso objetivo neste Capítulo é obter solução para o problema (1) com dados iniciais menos regulares, isto é, $u_0 \in V$ e $u_1 \in L^2(\Omega)$. A correspondente solução será chamada de *solução fraca*. Para obtermos esta solução, aproximaremos u_0 e u_1 por seqüências de vetores em $V \cap H^2(\Omega)$ e em V respectivamente e aplicaremos o resultado de Teorema 1 (solução forte).

3.1 Existência de Solução Fraca

A solução fraca do problema (1) é entendida no seguinte sentido.

Definição 3.1.1 *Uma função $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução fraca do problema (1) se:*

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in L_{loc}^{infty}(0, \infty, V), \quad u' \in L_{loc}^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)), \\ u'' - \mu \Delta u + h(u) = f \text{ em } L_{loc}^1(0, \infty; V' + L^1(\Omega)), \\ \mu \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u' = 0 \text{ em } L_{loc}^1(0, \infty; L^2(\Gamma_1)), \\ u(0) = u_1, \quad u'(0) = u_1 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

O seguinte resultado estabelece a existência de solução fraca para o problema (1) no sentido acima.

Seja Ω um aberto limitado de classe C^2 com fronteira Γ . Assumamos as seguintes hipóteses:

$$(H1) \quad \beta \in W^{1,\infty}(\Gamma_1), \quad \beta(x) \geq \beta_0 > 0;$$

$$(H2) \quad \mu \in W^{1,\infty}(0, T), \quad \mu(t) \geq \mu_0 > 0;$$

(H3) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $sh(s) \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}$;

(H4) $(u_0, u_1, f) \in V \times L^2(\Omega) \times L^2(Q)$ e $\Lambda(u_0) \in L^1(\Omega)$.

Observação 3.1.1 A função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto f(s) = |s|^\rho s \end{aligned}$$

com $\rho > 0$ e $\rho \in \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Strauss.

Teorema 3.1.1 Supondo $(H_1) - (H_4)$. Então, existe uma função $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.2)$$

$$u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.3)$$

$$u'' - \mu \Delta u + h(u) = f \text{ em } L^1(0, T; V' + L^1(\Omega)) \quad (3.4)$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u' = 0 \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)) \quad (3.5)$$

$$u(0) = u_0, u'(0) = u_1 \text{ em } \Omega \quad (3.6)$$

Demonstração: Desde que h é uma função contínua com $sh(s) \geq 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$, segue do Teorema de Strauss cf em [24](ver apêndice A) que existe uma sequência de funções Lipschitzianas $(h_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ tal que, para cada ν fixado, $h_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitziana com constante C_ν . Além disso, $sh_\nu(s) \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}$ e

$$h_\nu \rightarrow h \text{ uniformemente em conjuntos limitados de } \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

Sendo a condição inicial u_0 não necessariamente limitada, devemos aproxima-la por funções limitadas de V . Para tanto, como feito em Kinderlehrer [8] consideremos as funções

$$\xi_j(s) = \begin{cases} -j, & \text{se } s < -j \\ s, & \text{se } |s| \leq j \\ j, & \text{se } s > j \end{cases}$$

Considerando $\xi_j(u_0(x)) = u_{0j}(x)$, temos que a sequência $(u_{0j}) \subset V$ é limitada q.s. em Ω e além disso,

$$u_{0j} \rightarrow u_0 \text{ forte em } V \quad (3.8)$$

Notemos inicialmente que

$$\xi_j'(s) = \begin{cases} 0, & \text{se } s < -j \\ 1, & \text{se } |s| \leq j \\ 0, & \text{se } s > j \end{cases}$$

Como $\xi_j(s)$ é uma função Lipschitziana e $\xi_j(0) = 0$, resulta do Teorema (B.2.2) que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi_j(u_0(x))) = \xi_j'(u_0(x)) \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad \xi(u_0) = u_{0j} \in V.$$

Temos que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi_j(u_0(x))) \rightarrow \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \quad \text{quase sempre em } \Omega,$$

o que implica

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i}(\xi_j(u_0(x))) \right|^2 \rightarrow \left| \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \right|^2 \quad \text{quase sempre em } \Omega.$$

Afirmção: $\left| \frac{\partial}{\partial x_i} \xi_j'(u_0)(x) \right|^2 \leq \left| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right|^2$, onde $\left| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right| \in L^1(\Omega)$.

De fato, observemos que $\left| \frac{\partial}{\partial x_i}(\xi_j(u_0)(x)) \right|^2 = |\xi_j'(u_0(x))| \left| \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \right| \leq \left| \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \right|$. Como $u_0 \in V$, então $u_0 \in H^1(\Omega)$ e, portanto, $\frac{\partial u_0}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$. Desde que a imersão $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ é contínua, provamos a afirmação. Pela afirmação acima e pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \xi_j(u_0(x)) \right|^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right|^2 dx.$$

Além disso, da última convergência acima, obtemos

$$\|\nabla(\xi_j u_0)\| \rightarrow \|\nabla u_0\|$$

isto é

$$\xi_j(u_0) \rightarrow u_0 \quad \text{em } V$$

Novamente pela imersão contínua V em $L^2(\Omega)$, obtemos uma subsequência de $\xi_j(u_0) = u_{0j}$, que ainda denotaremos por u_{0j} , tal que

$$u_{0j} \rightarrow u_0 \quad \text{quase sempre em } \Omega$$

e portanto, (u_{0j}) é limitada quase sempre em Ω .

Como $D(-\Delta)$ é denso em V , cf em Lions [12], segue que existe uma sequência $(u_{0jp}) \subset D(-\Delta) \subset V \cap H^2(\Omega)$ tal que

$$u_{0jp} \rightarrow u_{0j} \quad \text{forte em } V. \tag{3.9}$$

Por outro lado, desde que V é denso em $L^2(\Omega)$, dado $u_1 \in L^2(\Omega)$, existe uma sequência $(u_{1p}) \subset V$ tal que

$$u_{1p} \rightarrow u_1 \text{ em } L^2(\Omega). \quad (3.10)$$

Por fim, sabemos que $H^1(Q)$ é denso em $L^2(Q)$. Logo, dado $f \in L^2(Q)$, existe uma sequência $(f_p)_{p \in \mathbb{N}} \subset H^1(Q)$ tal que

$$f_p \rightarrow f \text{ em } L^2(Q). \quad (3.11)$$

Para cada termo $(u_{0jp}, u_{1p}, f_p) \in [V \cap H^2(\Omega)] \times V \times H^1(0, T, L^2(\Omega))$, existe uma única função $u_{jpv} : Q \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as condições do Teorema 2. Dessa forma, pelos mesmos argumentos utilizados no Capítulo 2, obtemos

$$\begin{aligned} & |u'_{jpv}(t)|^2 + \mu_0 \|u_{jpv}(t)\|^2 + 2 \int_{\Omega} \Lambda_{\nu}(u_{jpv}(x, t)) dx + 2\beta_0 \int_0^t \int_{\Gamma_1} [u'_{jpv}(x, s)]^2 d\Gamma ds \leq \\ & \leq |u_{1p}|^2 + \mu(0) \|u_{0jp}\|^2 + 2 \int_{\Omega} \Lambda_{\nu}(u_{0jp}(x)) dx + \int_0^t |f_p(s)|^2 ds + \int_0^t |u'_{jpv}|^2 ds + \\ & + \|\mu\|_{L^{\infty}(0, T)} \int_0^t \|u_{jpv}(s)\|_V^2 ds, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde $\Lambda_{\nu} = \int_0^t h_{\nu}(s) ds$.

Queremos utilizar o Lema de Gronwall, então precisamos obter uma estimativa para

$$\int_{\Omega} \Lambda_{\nu}(u_{0jp}(x)) dx.$$

Sendo u_{0j} limitada q.s. em Ω , $\forall j \in \mathbb{N}$, segue do Teorema de Strauss que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} h_{\nu}(u_{0j}(x)) = h(u_{0j}(x)) \text{ q.s. em } \Omega,$$

Assim

$$|h_{\nu}(s) - h(s)| \leq \frac{\epsilon}{C}, \quad \forall s \in [-C, C],$$

onde $C > 0$ é uma constante tal que $|u_{0j}(x)| \leq C$ q.s. em Ω . Mostraremos que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \Lambda_{\nu}(u_{0jp}(x)) dx = \int_{\Omega} \Lambda_{\nu}(u_0(x)) dx \quad (3.13)$$

e para tanto, usaremos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. De fato, temos

$$\Lambda_{\nu}(u_{0j}(x)) = \int_0^{u_{0j}(x)} h_{\nu}(s) ds.$$

Daí,

$$|\Lambda_\nu(u_{0j}(x)) - \Lambda(u_{0j}(x))| = \left| \int_0^{u_{0j}(x)} h_\nu(s) ds - \int_0^{u_{0j}(x)} h(s) ds \right| = \left| \int_0^{u_{0j}(x)} [h_\nu(s) - h(s)] ds \right|.$$

Portanto,

$$|\Lambda_\nu(u_{0j}(x)) - \Lambda(u_{0j}(x))| < \int_0^{u_{0j}(x)} \frac{\epsilon}{C} ds \leq \frac{\epsilon}{C} |u_{0j}(x)| < \epsilon,$$

e assim

$$\Lambda_\nu(u_{0j}(x)) \rightarrow \Lambda(u_{0j}(x)) \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Além disso

$$\begin{aligned} |\Lambda_\nu(u_{0j}(x))| &= \left| \int_0^{u_{0j}(x)} h_\nu(s) ds \right| = \left| \int_0^{u_{0j}(x)} \{[h_\nu(s) - h(s)] + h(s)\} ds \right| \leq \\ &\leq \int_0^{u_{0j}(x)} \{|h_\nu(s) - h(s)| ds + \int_0^{u_{0j}(x)} |h(s)| ds \leq \frac{\epsilon}{C} |u_{0j}(x)| + K |u_{0j}(x)| \leq \\ &\leq \epsilon + KC. \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, segue o resultado. Agora, usando a imersão contínua $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e por (3.9), segue do Teorema (B.2.9) que podemos extrair uma subsequência de $(u_{0j})_{j \in \mathbb{N}}$ a qual ainda denotaremos por (u_{0j}) tal que

$$u_{0j} \rightarrow u_0 \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Portanto, pela continuidade de Λ , temos

$$\Lambda(u_{0j}) \rightarrow \Lambda(u_0) \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Queremos fazer novamente uso do Teorema B.2.10, mas para isto, resta mostrar que $\Lambda(u_{0j}) \leq q(x)$, onde $q(x) \in L^1(\Omega)$.

Com efeito, basta observarmos que :

$$|u_{0j}(x)| = |u_{0j}(x) - u_0(x) + u_0(x)| \leq |u_{0j}(x) - u_0(x)| + |u_0(x)| \leq \epsilon + |u_0(x)|$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos $|u_{0j}(x)| \leq |u_0(x)|$, para quase todo $x \in \Omega$. Dessa forma, teremos

$$|\Lambda(u_{0j}(x))| = \left| \int_0^{u_{0j}(x)} |h(s)| ds \right| \leq \int_0^{|u_0(x)|} |h(s)| ds.$$

Daí, tomando $q(x) = \Lambda(|u_0(x)|)$, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \Lambda(u_{0j}(x)) dx = \int_{\Omega} \Lambda(u_0(x)) dx \quad (3.14)$$

Como $u_{0jp} \rightarrow u_{0j}$ forte em V , de forma análoga ao que foi feito anteriormente, temos

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \Lambda_{\nu}(u_{0jp}(x)) dx = \int_{\Omega} \Lambda_{\nu}(u_{0j}(x)) dx \quad (3.15)$$

De (3.13), (3.14) e (3.15), obtemos

$$\lim \int_{\Omega} \Lambda_{\nu}(u_{0jp}(x)) dx = \int_{\Omega} \Lambda_{\nu}(u_0(x)) dx, \text{ quando } j, p, \nu \rightarrow \infty.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} \Lambda_{\nu}(u_{0jp}(x)) dx \leq P,$$

onde P é uma constante positiva que independe de p e ν . Logo, pelo Lema de Gronwall

$$|u'_{jpv}(t)|^2 + \|u_{jpv}(t)\|^2 + \int_0^t \int_{\Gamma_1} [u'_{jpv}(x, s)]^2 d\Gamma ds \leq R, \quad (3.16)$$

onde R é uma constante que independe de j , p , ν e, portanto,

$$\left| \begin{array}{l} (u_{jpv}) \text{ é limitada em } L^{infty}(0, T; V); \\ (u'_{jpv}) \text{ é limitada em } L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)); \\ (u_{jpv}) \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)). \end{array} \right.$$

Da imersão contínua $L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega))$, segue que

$$(u'_{jpv}) \text{ é limitada em } L^2(Q) = L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Também por (3.16), obtemos

$$(u_{jpv}) \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)) \quad (3.17)$$

Além disso, temos

$$\left(\frac{\partial u_{jpv}}{\partial \nu} \right) \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)). \quad (3.18)$$

Do Teorema 2, obtemos

$$\mu \frac{\partial u_{jpv}}{\partial \nu} + \beta u'_{jpv} = 0 \text{ em } L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)). \quad (3.19)$$

Recorde que $\mu \in W^{1,\infty}(0, T)$, $\mu(t) \geq \mu_0 > 0$ e $\beta \in W^{1,\infty}(\Gamma_1)$, $\beta(x) \geq \beta_0 > 0$. Então, temos por (3.17) e (3.19) que

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} \left[\frac{\partial u_{jpv}(x, t)}{\partial \nu} \right]^2 d\Gamma dt \leq \frac{\|\beta\|_{L^{\infty}(\Gamma_1)}^2}{\mu_0} \int_0^T \int_{\Gamma_1} [u'_{jpv}(x, t)]^2 d\Gamma dt < +\infty,$$

Logo,

$$\left(\frac{\partial u_{j p \nu}}{\partial \nu} \right) \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)). \quad (3.20)$$

Desde que as limitações acima valem para todos os termos $(j, p, \nu) \in \mathbb{N}^3$, em particular, vale para $(p, p, p) \in \mathbb{N}^3$.

Como $(u_{ppp})_{p \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0, T, V)$ e $L^1(0, T, V')$ é um espaço de Banach separável, então existe uma subsequência de $(u_{ppp})_{p \in \mathbb{N}}$, ao qual denotaremos apenas por (u_p) , e uma função $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$u_p \xrightarrow{*} u \text{ em } L^\infty(0, T; V). \quad (3.21)$$

Como (u'_p) é limitada em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, e sendo $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ um espaço de Banach reflexivo, existe uma subsequência de (u'_p) , ao qual denotaremos por (u_p) tal que

$$u_p \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

De forma análoga, existe uma função $\zeta : \Gamma_1 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial u_p}{\partial \nu} \rightharpoonup \zeta \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)). \quad (3.22)$$

Como $u_p(t) \in V$, pelo Teorema do Traço em Milla Miranda e L.A.Medeiros [13] resulta que $u_p(t) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ e

$$\|\gamma_0 u_p(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \leq C \|u_p(t)\|. \quad (3.23)$$

Desde que $u_p \xrightarrow{*} u$ em $L^\infty(0, T; V)$, temos da Proposição 1.2.2, cf em M.Milla Miranda [18] que

$$u'_p \rightharpoonup u' \text{ em } H^{-1}(0, T, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)).$$

Além disso, de $u_p \xrightarrow{*} u$ podemos concluir que

$$\Delta u_p \xrightarrow{*} \Delta u \text{ em } L^\infty(0, T; V'). \quad (3.24)$$

Do Capítulo 2, decorre que $u''_p - \mu \Delta u_p + h_p(u_p) = f_p$ em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e

$$\mu(t) \frac{\partial u_p(x, t)}{\partial \nu} + \beta(x) u'_p(x, t) = 0 \text{ em } \Gamma_1 \times (0, T). \quad (3.25)$$

Como $u'_p \rightharpoonup u'$ em $H^{-1}(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$ que está imerso continuamente em $H^{-1}(0, T; L^2(\Gamma_1))$ e $\frac{\partial u}{\partial \nu} \rightharpoonup \zeta$ em $L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$ que está imerso continuamente em $H^{-1}(0, T; L^2(\Gamma_1))$, então

$$\mu \zeta + \beta u' = 0 \text{ em } H^{-1}(0, T; L^2(\Gamma_1)).$$

Da imersão $L^\infty(0, T; V) \xrightarrow{\text{cont}} L^2(0, T; H^1(\Omega))$ e de $u_p \xrightarrow{*} u$ em $L^\infty(0, T; V)$, segue que $u_p \xrightarrow{*} u$ em $L^2(0, T; H^1(\Omega))$. Desde que $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ é reflexivo, obtemos

$$u_p \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0, T; H^1(\Omega))$$

implicando que

$$(u_p) \text{ é limitada em } L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (3.26)$$

Por outro lado, $u'_p \rightharpoonup u'$ em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e, portanto, teremos que

$$(u'_p) \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.27)$$

Além disso

$$H^1(\Omega) \xrightarrow{\text{comp}} L^2(\Omega). \quad (3.28)$$

Portanto, segue do Teorema de Aubin-Lions, de (3.26), (3.27) e (3.28) que existe uma subsequência de $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$, ao qual ainda denotaremos por $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ tal que

$$u_p \rightarrow u \text{ forte em } L^2(0, T, L^2(\Omega)) = L^2(Q),$$

e conseqüentemente, pelo Teorema (B.2.9) existe uma subsequência de $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ a qual ainda continuaremos denotando por (u_p) tal que

$$u_p \rightarrow u \text{ quase sempre em } Q.$$

Sabemos que h é contínua, então $h(u_p) \rightarrow h(u)$ q.s em Q , isto é, dado $\varepsilon \geq 0$, existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|h(u_p(x, t)) - h(u(x, t))| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para } p \geq p_1.$$

Por outro lado, desde que $u_p \rightarrow u$ quase sempre em Q , temos que para (x, t) fixado, o conjunto $\{u_p(x, t) : p \in \mathbb{N}\}$ é limitada em \mathbb{R} e, portanto, pelos Teorema de Strauss, segue que

$$h_p(u_p(x, t)) \rightarrow h(u_p(x, t))$$

ou ainda, existe $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|h_p(u_p(x, t)) - h(u_p(x, t))| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para } p \geq p_2.$$

Tomando $p = \max\{p_1, p_2\}$, temos

$$\begin{aligned} |h_p(u_p(x, t)) - h(u_p(x, t))| &= |h_p(u_p(x, t)) - h(u_p(x, t)) + h(u_p(x, t)) - h(u(x, t))| \leq \\ &\leq |h_p(u_p(x, t)) - h(u_p(x, t))| + |h(u_p(x, t)) - h(u(x, t))| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $p \geq p_0$. Assim,

$$h_p(u_p) \rightarrow h(u) \text{ q.s. em } Q. \quad (3.29)$$

Vimos que $u_p'' - \mu \Delta u_p + h_p(u_p) = f_p$ em $L^2(Q)$. Multiplicando a equação por $u_p \in L^2(Q)$ e integrando em Q , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T (h_p(u_p(t)), u_p(t)) dt &= \int_0^T (f_p(t), u_p(t)) dt + \int_0^T (\mu \Delta u_p(t), u_p(t)) dt \\ &- \int_0^T (u_p''(t), u_p(t))_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Vamos analisar cada termo da expressão acima separadamente.

$$\int_0^T (\mu(t) \Delta u_p(t), u_p(t)) dt = \int_0^T \int_{\Omega} \mu(t) \Delta u_p(x, t) u_p(x, t) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \Delta(\mu(t) u_p(x, t)) dx dt.$$

Pelo Teorema de Green, temos

$$\begin{aligned} \int_0^T (\mu(t) \Delta u_p(t), u_p(t)) dt &= \int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{\partial(\mu(t) u_p(x, t))}{\partial \nu} u_p(x, t) d\Gamma dt - \\ &- \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u_p(x, t) \nabla \mu(t) u_p(x, t) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} u_p(x, t) \mu(t) \frac{\partial u_p(x, t)}{\partial \nu} d\Gamma dt - \\ &- \int_0^T \int_{\Omega} \mu(t) (\nabla u_p(x, t) \nabla u_p(x, t)) = \int_0^T \int_{\Gamma_1} \beta(x) u_p'(x, t) u_p(x, t) d\Gamma dt - \\ &- \int_0^T \mu(t) ((u_p(t), u_p(t))) dt \end{aligned}$$

Observemos que

$$- \int_0^T \mu(t) ((u_p(t), u_p(t))) dt \leq \left| \int_0^T \mu(t) ((u_p(t), u_p(t))) dt \right|$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos

$$- \int_0^T \mu(t) ((u_p(t), u_p(t))) dt \leq \|\mu\|_{L^\infty(0, T)} \int_0^T \|u_p(t)\|^2 < \infty$$

pois a imersão $u_p \in L^\infty(0, T, V) \hookrightarrow L^2(0, T, V)$ é contínua e (u_p) é convergente em $L^2(0, T, V)$. Notemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\Gamma_1} \beta(x) u_p'(x, t) u_p(x, t) d\Gamma dt \right| &\leq \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\beta(x) u_p'(x, t) u_p(x, t)| d\Gamma dt \leq \\ &\leq \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \int_0^T (u_p'(t), u_p(t))_{L^2(\Gamma_1)} \leq \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \int_0^T |u_p(t)|_{L^2(\Gamma_1)} |u_p'(t)|_{L^2(\Gamma_1)} \leq \\ &\leq \frac{\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_1)}}{2} \int_0^T |u_p(t)|_{L^2(\Gamma_1)}^2 dt + \frac{\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_1)}}{2} \int_0^T |u_p'(t)|_{L^2(\Gamma_1)}^2 dt \leq C \end{aligned}$$

pois (u'_p) é convergente e $\|u_p\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma_1))} \leq k\|u_p\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}$, onde k é a constante de imersão $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Temos que

$$\left| \int_0^T (f_p(t), u_p(t))_{L^2(\Omega)} dt \right| \leq \int_0^T |(f_p(t), u_p(t))|_{L^2(\Omega)} dt$$

Novamente pela desigualdade de Cauchy-Schwartz e Young, obtemos

$$\left| \int_0^T (f_p(t), u_p(t)) dt \right| \leq \int_0^T |f_p(t)|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T |u_p(t)|_{L^2(\Omega)}^2 dt < \infty,$$

pois $f_p \in H^1(0, T, L^2(\Omega))$, $u_p \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$ e são convergentes. Por fim, como feito em Temam [22], obtemos

$$\frac{d}{dt}(u'_p(t), u_p(t)) = (u''_p(t), u_p(t)) + (u'_p(t), u'_p(t))$$

o que implica

$$-(u''_p(t), u_p(t)) = -\frac{d}{dt}(u'_p(t), u_p(t)) + (u'_p(t), u'_p(t))$$

Integrando de 0 até T, obtemos

$$-\int_0^T (u''_p(t), u_p(t)) dt = -(u'_p(T), u_p(T)) + (u'_p(0), u_p(0)) + \int_0^T |u'_p(t)|^2 dt,$$

pois u'_p converge em $L^\infty(0, T; V)$. Notemos que pelo Teorema 1, que $u_p(0), u_p(T), u'_p(0), u'_p(T)$ são limitadas em $L^2(\Omega)$. Portanto, das limitações acima, obtemos

$$\int_0^T (h_p(t), u_p(t)) dt \leq C, \tag{3.30}$$

onde C é uma constante que independe de p . Notemos também que $\int_0^T |u'_p(t)| dt < \infty$. Então, por (3.29) e (3.30), segue do Teorema B.1.5 que

$$h_p(u_p) \rightarrow h(u) \text{ forte em } L^1(Q) \tag{3.31}$$

3.2 Passagem ao limite

De modo análogo ao feito no Capítulo 2, multiplicando a equação $u''_p + \mu\Delta u_p + h_p(u_p) = f_p$ por $v\theta$ com $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$, integrando de 0 a T e usando as convergências, (3.11), (3.21), (3.23) e (3.30) concluímos que

$$u'' - \mu\Delta u + h(u) = f \text{ em } \mathcal{D}'(Q).$$

Como $u \in L^\infty(0, T; V)$, obtemos que $-\Delta u \in L^\infty(0, T; V')$. De fato, o operador laplaciano dado por

$$\begin{aligned} -\Delta : V &\rightarrow V' \\ u &\mapsto \Delta u \end{aligned}$$

é linear e contínuo. Logo, $\|\Delta u(t)\|_{V'} \leq C\|u(t)\|$, donde segue que $-\Delta u \in L^\infty(0, T, V')$. Vamos mostrar que u satisfaz o Problema (1), isto é,

$$u'' - \mu\Delta u + h(u) = f \text{ em } L^1(0, T; V' + L^1(\Omega)). \quad (3.32)$$

Com efeito, sabemos que $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e que a imersão $L^2(0, T, L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^1(0, T; V')$ é contínua. Além disso, $\mu\Delta u \in L^\infty(0, T; V')$ e $h(u) \in L^1(0, T; L^1(\Omega))$, com $L^1(0, T; L^1(\Omega)) \hookrightarrow L^1(0, T; V' + L^1(\Omega))$ contínua. Portanto, segue a igualdade (3.32). Para completar a prova do teorema, devemos mostrar que $\zeta = \frac{\partial u}{\partial \nu}$ e para tanto, usaremos os resultados do Capítulo 1.

De fato, temos

$$-\Delta(\mu u) = f - u'' - h(u), \text{ com } f \in L^2(Q) \text{ e } h(u) \in L^1(Q)$$

Desde que $f(t) \in L^2(\Omega)$, pelo Teorema (B.2.6) existe um único $y(t) \in V \cap H^2(\Omega)$ solução do problema $-\Delta y(t) = f(t)$.

De modo análogo, existe único $z(t) \in V \cap H^2(\Omega)$ solução do problema $-\Delta z(t) = u'(t)$. Como $h(u(t)) \in L^1(\Omega)$, então existe uma única função $v(t) \in L^{p'}(\Omega)$ solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta v(t) = h(u(t)) \text{ em } \Omega \\ v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ em } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Além disso a aplicação $T : L^1(\Omega) \rightarrow L^{p'}(\Omega)$, $T(h(u(t))) = v(t)$ é linear e contínua, conforme a Proposição 1.6.2. Daí, $v \in L^1(0, T; L^{p'}(\Omega))$. De fato

$$\int_0^T \|v(t)\|_{L^{p'}(\Omega)} dt = \int_0^T \|T(h(u(t)))\|_{L^1(\Omega)} dt \leq C \int_0^T \|h(u(t))\|_{L^1(\Omega)} < \infty$$

mostrando que $v \in L^1(0, T, L^{p'}(\Omega))$. Analogamente, usando o Teorema B.2.6, obtemos

$$y, z \in L^p(0, T, V \cap H^2(\Omega)).$$

Consequentemente

$$-\Delta(\mu u) = -\Delta y + (\Delta z)' + \Delta v \text{ em } L^1(0, T, V' + L^1(\Omega)).$$

Daí, para $w \in D(\Omega)$, temos

$$\langle -\Delta(\mu(t)u(t)), w \rangle = \langle -\Delta y(t) + (\Delta z(t))' + \Delta v(t), w \rangle \in L^1(0, T).$$

Recordemos que $L^1(0, T) \xrightarrow{\text{cont}} \mathcal{D}'(0, T)$, assim para $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$, temos

$$\langle \langle -\Delta(\mu(t)u(t)), w \rangle, \theta(t) \rangle_{\mathcal{D}'(0, T) \times \mathcal{D}(0, T)} = \langle \langle -\Delta y(t) + (\Delta z(t))' + \Delta v(t), w \rangle, \theta(t) \rangle_{\mathcal{D}'(0, T) \times \mathcal{D}(0, T)}.$$

o que implica

$$\int_0^T \langle -\Delta(\mu(t)u(t)), w \rangle \theta(t) dt = \int_0^T \langle -\Delta y(t) + (\Delta z(t))' + \Delta v(t), w \rangle \theta(t) dt.$$

Logo,

$$\left\langle \int_0^T (-\Delta(\mu(t)u(t)) \theta(t) dt, w \right\rangle = \left\langle \int_0^T (-\Delta y(t) + (\Delta z(t))' + \Delta v(t)) \theta(t), w \right\rangle.$$

implicando

$$\int_{\Omega} \left(\int_0^T (-\Delta(\mu(t)u(t)) \theta(t) dt \right) w dx = \int_{\Omega} \left(\int_0^T (-\Delta y(t) + (\Delta z(t))' + \Delta v(t)) \theta(t) dt \right) w dx.$$

Pelo Lema 1.1.1, obtemos

$$-\int_0^T \Delta \mu(t)u(t)\theta(t) dt = -\int_0^T \Delta y(t)\theta(t) dt + \int_0^T (\Delta z(t))'\theta(t) dt + \int_0^T \Delta v(t)\theta(t) dt.$$

Usando derivada distribucional, obtemos

$$-\int_0^T \Delta \mu(t)u(t)\theta(t) dt = -\int_0^T \Delta y(t)\theta(t) dt - \int_0^T \Delta z(t)\theta'(t) dt + \int_0^T \Delta v(t)\theta(t) dt$$

Assim, segue do Teorema B.2.12 que

$$-\Delta \left[\int_0^T \mu(t)u(t)\theta(t) dt - \int_0^T y(t)\theta(t) dt - \int_0^T z(t)\theta'(t) dt \right] = -\Delta \left[\int_0^T (-v(t))\theta(t) dt \right].$$

e, portanto, pela unicidade do problema de Dirichlet-Neumann, temos que

$$\int_0^T \mu(t)u(t)\theta(t) dt - \int_0^T y(t)\theta(t) dt - \int_0^T z(t)\theta'(t) dt = \int_0^T (-v(t))\theta(t) dt.$$

Daí,

$$\int_0^T (u(t) - y(t) + z'(t) + v(t))\theta(t) dt = 0, \forall \theta \in D(0, T).$$

Logo, pelo Lema Du Boys Reymound, obtemos

$$\mu(t)u(t) - y(t) + z'(t) = -v(t). \quad (3.34)$$

Pela linearidade da aplicação traço e por $z \in L^2(0, T, H^2(\Omega))$, segue da Proposição (1.5.2) que

$$\gamma_1(\mu(t)u(t)) = \gamma_1 y(t) - \gamma_1 z'(t) - \gamma_1 v(t) = \gamma_1 y(t) - (\gamma_1 z(t))' - \gamma_1 v(t). \quad (3.35)$$

Pela aplicação traço (1.12), temos $\gamma_1 y \in L^2(0, T, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$. Segue da imersão contínua $L^2(0, T, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)) \hookrightarrow H^{-1}(0, T, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$ que

$$\gamma_1 y \in H^{-1}(0, T, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)). \quad (3.36)$$

De modo análogo, temos que

$$\gamma_1 z \in H^{-1}(0, T, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)). \quad (3.37)$$

Como $v \in E$, onde $E = \{v \in L^{p'}(\Omega); \Delta v \in L^1(\Omega)\}$, segue da aplicação traço para E visto no Capítulo 1 que

$$\gamma_1 v \in L^1(0, T; W^{\frac{1}{p}-2}(\Gamma_1)) \quad (3.38)$$

Portanto de (3.35)-(3.38), concluimos que

$$\gamma_1(\mu u) \in H^{-1}(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)) + L^1(0, T; W^{\frac{1}{p}-2}(\Gamma_1)).$$

Recorde que

$$-\Delta(\mu u)_p = f_p - u_p'' - h_p(u_p) \text{ em } L^2(Q).$$

Pelo Teorema de Agmon-Douglis-Nirenberg, existem únicas funções

$$y_p, z_p, v_p \in L^2(0, T; V \cap H^2(\Omega))$$

tais que

$$-\Delta y_p = f_p, \quad -\Delta z_p = u_p' \text{ e } -\Delta v_p = h_p(u_p).$$

Portanto, pelo mesmo raciocínio anterior, obtemos que

$$(\mu u)_p = y_p - z_p' - v_p. \quad (3.39)$$

Mostraremos que $y_p \rightharpoonup y$ em $L^2(0, T; V \cap H^2(\Omega))$. De fato, observemos que

$$\begin{aligned} \|y_p\|_{L^2(0, T; V \cap H^2(\Omega))}^2 &= \int_0^T \|y_p(t)\|_{V \cap H^2(\Omega)}^2 dt \leq \\ &\leq C \int_0^T |\Delta y_p(t)|^2 dt = C \int_0^T |f_p(t)|^2 dt = \\ &= C \|f_p\|_{L^p(0, T; L^2(\Omega))}^2 < \infty, \end{aligned}$$

por (3.11). Assim, (y_p) é limitada em $L^2(0, T; V \cap H^2(\Omega))$ e sendo reflexivo, existe uma subsequência de (y_p) , que denotaremos por $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$, tal que

$$y_p \rightharpoonup \chi \text{ em } L^2(Q).$$

Desde que $L^2(Q) \xrightarrow{\text{cont}} \mathcal{D}'(Q)$, então

$$\Delta y_p \rightharpoonup \Delta \chi \text{ em } \mathcal{D}'(Q) \quad (3.40)$$

Por outro lado, $\Delta y_p = f_p$ e por (3.11) segue que

$$\Delta y_p \rightharpoonup \Delta y \text{ em } \mathcal{D}'(Q). \quad (3.41)$$

De (3.40) e (3.41), segue que $\Delta \chi = \Delta y$. Como $\Delta y \in L^2(\Omega)$, por unicidade do problema de Dirichlet, segue que $\chi = y$. Portanto, obtemos que

$$y_p \rightharpoonup y \text{ em } L^2(0, T; V \cap H^2(\Omega))$$

Pela continuidade da aplicação Traço, resulta que

$$\gamma_1 y_p \rightharpoonup \gamma_1 y \text{ em } L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)). \quad (3.42)$$

Analogamente

$$z_p \rightharpoonup z \text{ em } L^2(0, T; V \cap H^2(\Omega)). \quad (3.43)$$

Por (3.43) e pela Proposição 1.2.2, obtemos

$$z'_p \rightharpoonup z' \text{ em } H^{-1}(0, T; V \cap H^2(\Omega)),$$

implicando pela continuidade da aplicação traço

$$\gamma_1 z'_p \rightharpoonup \gamma_1 z' \text{ em } H^{-1}(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)),$$

ou seja

$$(\gamma_1 z_p)' \rightharpoonup (\gamma_1 z)' \text{ em } H^{-1}(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)) \quad (3.44)$$

Por fim, mostraremos que

$$v_p \rightarrow v \text{ em } L^1(0, T; E)$$

De fato, devemos mostrar que

$$\|v_p - v\|_{L^1(0, T; E)} \rightarrow 0$$

De acordo com a Proposição (1.6.2), obtemos

$$\begin{aligned} \|v_p - v\|_{L^1(0, T; E)} &= \int_0^T \|v_p(t) - v(t)\|_{L^{p'}(\Omega)} dt + \int_0^T \|\Delta v_p(t) - v(t)\|_{L^1(\Omega)} dt = \\ &= \int_0^T \|T(h_p(u_p(t))) - T(h(u(t)))\|_{L^{p'}(\Omega)} dt + \int_0^T \|h_p(u_p(t)) - h(u(t))\| dt \leq \\ &\leq (C + 1) \int_0^T \|h_p(u_p(t)) - h(u(t))\|_{L^1(\Omega)} dt = (C + 1) \|h_p(t) - h(u)\|_{L^1(0, T; L^1(\Omega))} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $p \rightarrow \infty$. Portanto, por (3.11) e (3.30) concluimos que

$$\|v_p - v\|_{L^1(0, T; E)} \rightarrow 0.$$

Assim, como feito em Milla Miranda e L.A.Medeiros, (traço para funções de E)

$$\gamma_1 v_p \rightharpoonup \gamma_1 v \text{ em } L^1(0, T; W^{\frac{1}{p}-2, p'}(\Gamma_1)) \quad (3.45)$$

Portanto, usando a linearidade da aplicação traço e pelas convergências (3.42), (3.44) e (3.45), obtemos

$$\gamma_1(\mu u)_p \rightharpoonup \gamma_1(\mu u) \text{ em } H^{-1}(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)) + L^1(0, T; W^{\frac{1}{p}-2, p'}(\Gamma_1))$$

Observe que

$$H^{-1}(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)) + L^1(0, T; W^{\frac{1}{2}-2, p'}(\Gamma_1)) \xrightarrow{\text{cont}} H^{-1}(0, T; L^2(\Gamma_1)) + L^1(0, T; W^{\frac{1}{2}-2, p'}(\Gamma_1)).$$

Portanto

$$\gamma_1(\mu u)_p \rightharpoonup \gamma_1(\mu u) \text{ em } H^{-1}(0, T; L^2(\Gamma_1)) + L^1(0, T; W^{\frac{1}{2}-2, p'}(\Gamma_1)). \quad (3.46)$$

Logo, de (3.22) e (3.46), obtemos

$$\zeta = \frac{\partial u_p}{\partial \nu} \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$$

e que

$$\gamma_1(\mu u)_p \rightharpoonup \gamma_1(\mu u) \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)).$$

■

Observação 3.2.1 *As condições iniciais mostra-se como feito para solução forte. (Ver Capítulo 1)*

Observação 3.2.2 *Para h nas condições do Teorema, a unicidade é um problema em aberto.*

Capítulo 4

Comportamento assintótico

Neste capítulo, apresentaremos o decaimento exponencial da energia associada a solução fraca do problema (1), onde essa energia será dada pelo funcional

$$E(t) = \frac{1}{2} \left[|u'(t)|^2 + \mu(t) \|u(t)\|^2 + 2 \int_{\Omega} \Lambda(u(x, t)) dx \right]. \quad (4.1)$$

Para obter este decaimento, construiremos o operador de Liapunov e utilizaremos técnicas multiplicativas como feito em Kormonik-Zuazua [9]. Considerando a hipótese

$$\mu'(t) \leq 0 \text{ quase sempre em } [0, \infty) \quad (4.2)$$

temos que o problema (1) tem uma solução global forte e fraca na variável temporal t . Antes de enunciarmos o teorema, vamos considerar algumas hipóteses:

$$\text{Existe } \delta > 0 \text{ tal que } h(s)s \geq (2 + \delta)\Lambda(s), \forall s \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

$$\text{Seja } K \text{ uma constante positiva tal que } \int_{\Gamma_1} \beta(x)|v| \leq K\|v\|^2 \quad (4.4)$$

Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $m(x) = x - x_0$, com $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma : m(x)\nu(x) \leq 0\} \text{ e } \Gamma_1 = \{x \in \Gamma : m(x)\nu(x) \geq \tau \geq 0\}$$

No que segue, vamos considerar $\beta(x) = m(x) \cdot \nu(x)$, onde $\nu(x)$ é o vetor normal unitário exterior a Γ e o número $\|m\|_{L^\infty(\Omega)}$ será representado por R . Por fim, denotaremos λ_1 como sendo o primeiro autovalor do problema espectral

$$((w, v)) = \lambda(w, v), \forall v \in V.$$

4.1 Decaimento Exponencial da Energia

Teorema 4.1.1 *Suponhamos que (H_1) - (H_3) e que (4.2) e (4.3) estão asseguradas. Então, dado $(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega)$ existe uma constante $\omega > 0$ tal que a energia (4.1) satisfaz*

$$E(t) \leq 4E(0) \exp^{-\frac{\omega}{2}t}, \forall t \geq 0. \quad (4.5)$$

Demonstração: Provaremos a princípio (4.5) para a energia $E_p(t)$ que é similar a $E(t)$, onde $E_p(t)$ é a energia associada a solução forte obtida no Capítulo 2 e tomando o limite inferior na energia $E_p(t)$, obteremos (4.5). Pelo Teorema 3 tínhamos a igualdade

$$u_p'' - \mu \Delta u_p + h_p(u_p) = f_p \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Agora considerando $f_p = 0$. Daí, daí podemos escrever a igualdade acima da seguinte forma:

$$u_p'' - \mu \Delta u_p + h_p(u_p) = 0 \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Tomando o produto interno em $L^2(\Omega)$ com $u_p'(t) \in L^2(\Omega)$, obtemos

$$(u_p''(t), u_p'(t)) - (\mu(t) \Delta u_p(t), u_p'(t)) + (h_p(u_p)(t), u_p'(t)) = 0. \quad (4.6)$$

Observemos que

$$(u_p''(t), u_p'(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_p'(t)|^2$$

e

$$(\mu(t) \Delta u_p(t), u_p'(t)) = (\Delta[\mu(t) u_p(t)], u_p'(t)).$$

Pelo Teorema (B.2.4),

$$\begin{aligned} (\Delta[\mu(t) u_p(t)], u_p'(t)) &= -(\nabla \mu(t) u_p(t), \nabla u_p'(t)) - \mu(t) ((u_p(t), u_p'(t))) + \int_{\Gamma_1} u_p'(t) \mu \frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu} d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma_1} u_p'(t) \mu(t) \frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu} d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.7)$$

De (??), segue como foi feito no Capítulo 3

$$\mu(t) \frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu} = -\beta(x) \cdot u_p'(t).$$

Assim, de (4.7) tem-se

$$(\Delta[\mu(t) u_p(t)], u_p'(t)) = -\mu(t) ((u_p(t), u_p'(t))) - \int_{\Gamma_1} \beta(x) [u_p'(t)]^2 d\Gamma$$

$$= \mu(t) \frac{d}{dt} \|u_p(t)\|^2 - \int_{\Gamma_1} \beta(x) [u'_p(t)]^2 d\Gamma. \quad (4.8)$$

Notemos que,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mu(t) \|u_p(t)\|^2) = \frac{1}{2} \mu'(t) \|u_p(t)\|^2 + \mu(t) \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_p(t)\|^2,$$

implicando que

$$-\mu(t) \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_p(t)\|^2 = \frac{1}{2} \mu'(t) \|u_p(t)\|^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mu(t) \|u_p(t)\|^2).$$

Portanto de (4.7), obtemos

$$\begin{aligned} (\Delta[\mu(t)u_p(t)], u'_p(t)) &= \frac{1}{2} \mu'(t) \|u_p(t)\|^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mu(t) \|u_p(t)\|^2) - \\ &\quad - \int_{\Gamma_1} \beta(x) [u'_p(t)]^2 d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Por fim, recordemos que

$$(h_p(u_p(t), u'_p(t))) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Lambda_p(u_p(x, t)) dx.$$

Assim, de (4.6) e das últimas igualdades acima, obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u'_p(t)|^2 - \frac{1}{2} \mu'(t) \|u_p(t)\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mu(t) \|u_p(t)\|^2) + \int_{\Gamma_1} \beta(x) [u'_p(t)]^2 d\Gamma = 0$$

o que implica

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[|u'_p(t)|^2 + \mu(t) \|u_p(t)\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + 2 \int_{\Omega} \Lambda_p(u_p(x, t)) dx \right] &= \frac{1}{2} \mu'(t) \|u_p(t)\|_{L^2(\Gamma_1)} - \\ - \int_{\Gamma_1} \beta(x) [u'_p(t)]^2 d\Gamma &\leq -\beta_0 \|u'_p(t)\|_{L^2(\Gamma_1)}^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$E'_p(t) \leq -\beta_0 \|u'_p(t)\|_{L^2(\Gamma_1)}^2. \quad (4.10)$$

onde $E_p(t)$ é a energia associada a solução forte u_p . Portanto, de (4.10) podemos concluir que $E_p(t)$ é uma função decrescente. Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, definimos a energia perturbada por

$$E_{p\epsilon}(t) = E_p(t) + \epsilon\psi(t)$$

com

$$\psi(t) = 2(u'_p(t), m\nabla u_p(t)) + \theta(u'_p(t), u_p(t)),$$

onde $\theta \in (0, n)$ tal que

$$\exists \gamma > 0 \text{ tal que } \theta h(s)s \geq (2n + \gamma)\Lambda(s), \forall s \in \mathbb{R}. \quad (4.11)$$

Observemos que a escolha desse θ é possível por (4.3). De fato, tomando algum γ tal que $0 < \gamma < \delta n$, temos

$$\frac{2n + \gamma}{2 + \delta} h(s)s \geq (2n + \gamma)\Lambda(s),$$

onde

$$0 < \frac{2n + \gamma}{2 + \delta} < \frac{2n + \delta n}{2 + \delta} = \frac{n(2 + \delta)}{2 + \delta} = n,$$

para $0 < \gamma < \delta n$. Agora, notemos que

$$|\psi(t)| \leq \frac{R}{\mu_0} |u'_p(t)|^2 + R\mu(t) \|u_p(t)\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \frac{\theta}{2} \left[\frac{|u'_p(t)|^2}{\mu_0} + \frac{\mu(t) \|u_p(t)\|_{L(\Gamma_1)}}{\lambda_1} \right].$$

Com efeito,

$$|\psi(t)| \leq 2|(u'_p(t), m \nabla u_p(t))| + \theta |(u'_p(t), u_p(t))|.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz e Young e da imersão contínua $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ obtemos

$$\begin{aligned} |\psi(t)| &\leq 2|(u'_p(t))| \|m\|_{L^\infty(\Omega)} |\nabla u_p(t)| + \theta |u'_p(t)| \|u_p(t)\| \leq \\ &2 \frac{\sqrt{\mu(t)}}{\sqrt{\mu(t)}} |(u'_p(t))| \|m\|_{L^\infty(\Omega)} |\nabla u_p(t)| + \theta \frac{\sqrt{\mu(t)}}{\sqrt{\mu(t)}} |u'_p(t)| \|u_p(t)\| \leq \\ &\leq 2 \frac{\sqrt{\mu(t)}}{\sqrt{\mu_0}} |u'_p(t)| \|m\|_{L^\infty(\Omega)} |\nabla u_p(t)| + \theta \frac{\sqrt{\mu(t)}}{\sqrt{\mu_0}} |u'_p(t)| \|u_p(t)\| \\ &2R \left[\frac{|u'_p(t)|^2}{2\mu_0} + \frac{|\nabla u_p(t)|^2}{2} \right] + \frac{\theta}{2} \left[\frac{|(u'_p(t))|^2}{\mu_0} + c_0 \mu(t) \|u_p(t)\|^2 \right]. \end{aligned}$$

onde $R = \|m\|_{L^\infty(\Omega)}$ e c_0 a constante de imersão. Do problema spectral $((w, v)) = \lambda(w, v)$, $\forall v \in V$, tomando $w = v = u_p(t) \in V$, pois $u_p \in L^\infty(0, T, V)$, segue que

$$((u_p(t), u_p(t))) = \lambda(u_p(t), u_p(t))$$

implicando

$$|u_p(t)|^2 = \frac{1}{\lambda} \|u_p(t)\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \|u_p(t)\|^2,$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor do problema espectral acima. Assim, temos que

$$|\psi(t)| \leq \frac{R}{\mu_0} |u'_p(t)|^2 + R\mu(t) \|u_p(t)\|^2 + \frac{\theta}{2} \left[\frac{|u'_p(t)|^2}{\mu_0} + \frac{\mu(t) \|u_p(t)\|^2}{\lambda_1} \right],$$

ou

$$\begin{aligned} |\psi(t)| &\leq \left[\frac{R}{\mu_0} + \frac{\theta}{2\mu_0} \right] |u'_p(t)|^2 + \left[R + \frac{1}{2\lambda_1} \right] \mu(t) \|u_p(t)\|^2 \leq \\ &\leq 2 \left[\frac{R}{\mu_0} + \frac{\theta}{2\mu_0} + R + \frac{1}{2\lambda_1} \right] \left(\frac{1}{2} \right) \left[|u'_p(t)|^2 + \mu(t) \|u_p(t)\|^2 \right] \left[\frac{2R}{\mu_0} + \frac{\theta}{\mu_0} + 2R + \frac{\theta}{\lambda_1} \right] E_p(t), \end{aligned}$$

isto é,

$$|\psi(t)| \leq C_1 E_p(t), \quad (4.12)$$

onde $C_1 = C_1(R, \mu_0, \theta, \lambda_1) = \frac{2R}{\mu_0} + \frac{\theta}{\mu_0} + 2R + \frac{\theta}{\lambda_1}$. Recordemos que

$$E_{p\epsilon}(t) = E_p(t) + \epsilon\psi(t).$$

Por (4.12), temos

$$|E_{p\epsilon}(t) - E_p(t)| = |E_p(t) + \epsilon\psi(t) - E_p(t)| = \epsilon|\psi(t)| \leq \epsilon C_1 E_p(t),$$

ou ainda

$$(1 - \epsilon C_1) E_p(t) \leq E_{p\epsilon}(t) \leq (1 + \epsilon C_1) E_p(t).$$

Tomando $0 < \epsilon < \frac{1}{2C_1}$ e da desigualdade acima, obtemos:

$$\frac{E_p(t)}{2} \leq E_{p\epsilon}(t) \leq \frac{3}{2} E_p(t) \leq 2E_p(t). \quad (4.13)$$

Consideremos a derivada da função $\psi(t)$ e usando que $u''_p - \mu\Delta u_p + h_p(u_p) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= 2(u''_p(t), m\nabla u_p(t)) + 2(u'_p(t), m\nabla u'_p(t)) + \theta(u''_p(t), u_p(t)) + \theta(u'_p(t), u'_p(t)) = \\ &= 2(\mu(t)\Delta u_p(t) - h_p(u_p), m\nabla u_p(t)) + 2(u'_p(t), m\nabla u'_p(t)) + \theta(\mu(t)\Delta u_p(t) - \\ &h_p(u_p(t)), u_p(t)) + \theta|u'_p(t)|^2 = 2\mu(t)(\Delta u_p(t), m\nabla u_p(t)) - 2(h_p(u_p), m\nabla u_p(t)) + \\ &+ 2(u'_p(t), m\nabla u'_p(t)) + \theta(t)(\Delta u_p(t), u_p(t)) - \theta(h_p(u_p(t)), u_p(t)) + \theta|u'_p(t)|^2. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Green, obtemos

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= 2\mu(t)(\Delta u_p(t), m\nabla u_p(t)) - 2(h_p(u_p), m\nabla u_p(t)) + 2(u'_p(t), m\nabla u'_p(t)) + \\ &+ \theta|u'_p(t)|^2 - \theta\mu(t)(\nabla u_p(t), \nabla u_p(t)) + \theta\mu(t) \left(u_p(t), \frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Gamma_1)} - \theta(h_p(u_p(t)), u_p(t)) \end{aligned}$$

implicando que

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= 2\mu(t)(\Delta u_p(t), m\nabla u_p(t)) - 2(h_p(u_p), m\nabla u_p(t)) + 2(u_p'(t), m\nabla u_p'(t)) + \theta|u_p'(t)|^2 - \\ &- \theta\mu(t)\|u_p(t)\|^2 - \theta(u_p(t), u_p'(t))_{L^2(\Gamma_1)} - \theta(h_p(u_p(t), u_p(t))). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Vamos agora analisar cada termo de (4.14), e para tanto consideraremos por conviência apenas os termos com índice j .

Análise de

- $(\Delta u_p(t), m\nabla u_p(t))$.

Pelo teorema de Green, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_p(t)}{\partial x_i^2} \left(m_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} \right) dx &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu} m_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(m_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} \right) dx + \\ &+ \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} m_j(x) \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} \cdot \nu_i d\Gamma = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} m_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} dx - \int_{\Omega} \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} \cdot m_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i \partial x_j} dx + \\ &+ \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} m_j(x) \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} \cdot \nu_i d\Gamma \end{aligned}$$

Sendo

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} m_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial u_p}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(m_j \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial u_p}{\partial x_i} m_j \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Assim

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} m_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} \right) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial u_p}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(m_j \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \right) dx + \int_{\Omega} \frac{\partial u_p}{\partial x_i} m_j \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i \partial x_j} dx.$$

Então, pelo teorema de Gauss, temos que

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u_p}{\partial x_i} m_j \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \nu_j dx d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\partial u_p}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(m_j \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \right) dx + \int_{\Omega} \frac{\partial u_p}{\partial x_i} m_j \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i \partial x_j} dx.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_p(t)}{\partial x_i \partial x_j} \left(m_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} \right) dx &= - \int_{\Omega} \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \frac{\partial m_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_p}{\partial x_j} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \frac{\partial m_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_p}{\partial x_j} dx - \\ &- \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_p}{\partial x_i} m_j \frac{\partial u_p}{\partial x_j} \nu_j dx + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_p}{\partial x_i} m_j(x) \frac{\partial u_p}{\partial x_j} \nu_i dx. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Tomando o somatório com $i, j = 1, \dots, n$, obtemos

$$\begin{aligned} (\Delta u_p(t), m\nabla u_p(t)) &= - \int_{\Omega} \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \frac{\partial m_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_p}{\partial x_j} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \frac{\partial m_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_p}{\partial x_j} dx - \\ &- \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_p}{\partial x_i} m_j \frac{\partial u_p}{\partial x_j} \nu_j d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_p}{\partial x_i} m_j(x) \frac{\partial u_p}{\partial x_j} \nu_i d\Gamma. \end{aligned}$$

Análise de

- $(h_p(u_p(t)), m\nabla u_p(t))$.

Observemos que

$$\int_{\Omega} m_j \frac{\partial \Lambda(u_p(t))}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} m_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\int_0^{u_p(t)} h_p(s) ds \right) dx = \int_{\Omega} m_j h(u_p(t)) \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}.$$

Assim,

$$(h_p(u_p(t)), \left(m_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} \right) dx = \int_{\Omega} m_j h(u_p(t)) \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} m_j \frac{\partial \Lambda_p(u_p(t))}{\partial x_j} dx.$$

Pelo Teorema de Green e pelo fato de $u_p(t) \in V$,

$$\begin{aligned} \left(h_p(u_p(t)), m_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} \right) &= - \int_{\Omega} \frac{\partial m_j}{\partial x_j} \Lambda_p(u_p(t)) dx + \int_{\Gamma_1} m_j \Lambda_p(u_p(t)) \cdot \nu d\Gamma = \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial m_j}{\partial x_j} \Lambda_p(u_p(t)) dx + \int_{\Gamma_1} \sum_{j=1}^m m_j \nu_j \Lambda_p(u_p(t)) dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial m_j}{\partial x_j} \Lambda_p(u_p(t)) dx + \\ &+ \int_{\Gamma_1} (m\nu) \Lambda_p(u_p(t)) dx \end{aligned}$$

Tomando o somatório quando $j = 1, \dots, n$, obtemos

$$\begin{aligned} (h_p(u_p(t)), m\nabla u_p(t)) &= - \int_{\Omega} \frac{\partial m_j}{\partial x_j} \Lambda_p(u_p(t)) dx + \int_{\Gamma_1} m_j \Lambda_p(u_p(t)) \cdot \nu d\Gamma = \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial m_j}{\partial x_j} \Lambda_p(u_p(t)) dx + \int_{\Gamma_1} \sum_{j=1}^m m_j \nu_j \Lambda_p(u_p(t)) dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial m_j}{\partial x_j} \Lambda_p(u_p(t)) dx + \\ &+ \int_{\Gamma_1} (m\nu) \Lambda_p(u_p(t)) dx \end{aligned} \tag{4.16}$$

Análise de

- $(u'_p(t), m\nabla u'_p(t))$

$$\int_{\Omega} u'_p(t) \left(m_j \frac{\partial u'_p(t)}{\partial x_j} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} m_j \frac{\partial}{\partial x_j} |u'_p(t)|^2 dx,$$

pois, $2 \frac{\partial}{\partial x_j} |u'_p(t)| |u'_p(t)| = \frac{\partial}{\partial x_j} |u'_p(t)|^2 dx$.

Assim,

$$\int_{\Omega} u'_p(t) \left(m_j \frac{\partial u'_p(t)}{\partial x_j} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} m_j \frac{\partial}{\partial x_j} |u'_p(x, t)|^2 dx.$$

De acordo com o Teorema de Green, segue que

$$\int_{\Omega} u'_p(t) \left(m_j \frac{\partial u'_p(t)}{\partial x_j} \right) dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial m_j}{\partial x_j} (u'_p(t))^2 dx + \int_{\Gamma_1} m_j \nu_j (u'_p(x, t))^2 dx. \tag{4.17}$$

Substituindo (4.15), (4.16), (4.17) em (4.14), obtemos

$$\begin{aligned} \psi'(t) = & -2\mu(t) \int_{\Omega} \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} \frac{\partial m_j}{\partial x_j} \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} dx + \mu(t) \int_{\Omega} \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} \frac{\partial m_j}{\partial x_j} \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} dx - \\ & -\mu(t) \int_{\Gamma} \frac{\partial u_p(t)}{\partial i} m_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} \nu_j d\Gamma + 2\mu(t) \int_{\Gamma} \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} m_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} \nu_i d\Gamma + 2 \int_{\Omega} \frac{\partial m_j}{\partial x_j} \Lambda_p(u_p(t)) dx - \\ & -2 \int_{\Gamma_1} (m\nu) \Lambda_p(u_p(t)) d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial m_j}{\partial x_j} |u'_p(t)|^2 dx + \int_{\Gamma_1} (m_j \nu_j) |u'_p(t)|^2_{L^2(\Omega)} d\Gamma + \theta |u'_p(t)|^2 - \\ & -\theta \mu(t) \|u_p(t)\|^2 - \theta (h_p(u_p(t)), u_p(t)) - \theta (\beta(x) u'_p(t), u_p(t))_{L^2(\Gamma_1)}. \end{aligned}$$

Daí, voltando ao somatório $\sum_{i=1}^m$ e $\sum_{j=1}^m$, temos

$$\begin{aligned} \psi'(t) = & \mu(t) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} \right)^2 \sum_{j=1}^m \frac{\partial m_j}{\partial x_j} dx - \mu(t) \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} \right)^2 \sum_{j=1}^m (m_j \nu_j) d\Gamma + \\ & + 2\mu(t) \int_{\Gamma} \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} m_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} \nu_i d\Gamma + 2 \int_{\Omega} \sum_{j=1}^m \frac{\partial m_j}{\partial x_j} \Lambda_p(u_p) \int_{\Gamma_1} (m\nu) |u'_p(t)|^2 d\Gamma - \\ & - 2 \int_{\Gamma_1} (m\nu) \Lambda_p(u_p) \frac{\partial m_j}{\partial x_j} + \theta |u'_p(t)|^2 - \theta \mu(t) \|u_p(t)\|^2 - \theta (h_p(t), u_p(t)) - \\ & - \theta (\beta u'_p(t), u_p(t))_{L^2(\Gamma_1)} \end{aligned}$$

implicando que

$$\begin{aligned} \psi'(t) = & -\mu(t)n \int_{\Omega} |\nabla u_p(t)|^2 dx - \mu(t) \int_{\Gamma} (m\nu) \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} \right)^2 dx + \\ & + 2\mu(t) \int_{\Gamma} \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} m_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} \nu_i d\Gamma + 2n \int_{\Omega} \Lambda_p(u_p(t)) dx + \int_{\Gamma_1} (m\nu) |u'_p(t)|^2 d\Gamma - \\ & - 2 \int_{\Gamma_1} (m\nu) \Lambda_p(u_p) d\Gamma - n |u'_p(t)|^2 = \theta |u'_p(t)|^2 - \theta \mu(t) \|u_p(t)\|^2 - \theta (h_p(t), u_p(t)) - \\ & - \theta (\beta u'_p(t), u_p(t))_{L^2(\Gamma_1)}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \psi'(t) = & -\mu(t)(n + \theta) \|u_p(t)\|^2 - (n - \theta) |u'_p(t)|^2 - \mu(t) \int_{\Gamma} (m\nu) \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} \right)^2 d\Gamma + \\ & + 2n \int_{\Gamma_1} (m\nu) \Lambda_p(u_p(t)) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (m\nu) |u'_p(t)|^2 d\Gamma + 2\mu(t) \int_{\Gamma} \frac{u_p(t)}{\partial x_i} m_j \frac{u_p(t)}{\partial x_j} \nu_i d\Gamma - \\ & - \theta (h_p(t), u_p(t)) - \theta (\beta u'_p(t), u_p(t))_{L^2(\Gamma_1)}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

No que segue, continuaremos analisando os termos de (4.18).

Análise de

- $\mu(t) \int_{\Gamma} (m\nu) \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} \right)^2 d\Gamma.$

Temos

$$\begin{aligned} \mu(t) \int_{\Gamma} (m\nu) \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} \right)^2 d\Gamma &= \mu(t) \int_{\Gamma_0} (m\nu) \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} \right)^2 d\Gamma + \\ &+ \mu(t) \int_{\Gamma_1} (m\nu) \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} \right)^2 d\Gamma. \end{aligned}$$

Desde que sobre Γ_0 , como feito em Milla Miranda e L.A.Medeiros [20],

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2,$$

segue que

$$\begin{aligned} \mu(t) \int_{\Gamma} (m\nu) \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} \right)^2 d\Gamma &= \mu(t) \int_{\Gamma_0} (m\nu) \left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma + \\ &+ \mu(t) \int_{\Gamma_1} (m\nu) \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} \right)^2 d\Gamma. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Análise de

- $2\mu(t) \int_{\Gamma} \frac{\partial u_p(x,t)}{\partial x_i} m_j \frac{\partial u_p(x,t)}{\partial x_j} d\Gamma.$

Sobre Γ_1 , tem-se $\frac{\partial u}{\partial x_j} = \nu_j \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)$, como feito em Milla Miranda e L.A.Medeiros [20].

Assim,

$$\begin{aligned} 2\mu(t) \int_{\Gamma} \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} m_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} \nu_i d\Gamma &= 2\mu(t) \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu} \right) m_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} d\Gamma = \\ &= 2\mu(t) \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu} m_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} d\Gamma + 2 \int_{\Gamma_1} \mu(t) \frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu} m_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} d\Gamma = \\ &= 2\mu(t) \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu} m_j \nu_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu} d\Gamma + 2 \int_{\Gamma_1} \mu(t) \frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu} m_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} d\Gamma = \\ &= 2\mu(t) \int_{\Gamma_0} \sum_{i=1}^m (m_j \nu_j) \left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma - 2 \int_{\Gamma_1} \beta(x) u'_p(t) m_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} d\Gamma, \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} 2\mu(t) \int_{\Gamma} \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} m_j \frac{\partial u_p(x,t)}{\partial x_j} \nu_i d\Gamma &= 2\mu(t) \int_{\Gamma_0} (m\nu) \left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma \\ &- 2 \int_{\Gamma_1} \beta(x) u'_p(t) m_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} d\Gamma. \end{aligned}$$

Desde que $\beta(x) = m(x)\nu(x)$ e $|m_j(x)| \leq \|m(x)\| \leq \|m\|_{L^\infty(\Omega)} = R$, temos

$$-2 \int_{\Gamma_1} \beta(x) u'_p(t) m_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} d\Gamma \leq 2 \int_{\Gamma_1} \sqrt{\mu(t)} \sqrt{(m\nu)} R u'_p(t) \frac{\sqrt{(m\nu)}}{\sqrt{\mu(t)}} \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\Gamma.$$

Pela desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned} & -2 \int_{\Gamma_1} \beta(x) u'_p(t) m_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} d\Gamma \leq \\ & \leq \frac{R^2}{\mu_0} (m\nu) |u'_p(t)|^2 d\Gamma + \mu(t) \int_{\Gamma_1} (m\nu) \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} \right)^2 d\Gamma. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} & 2\mu(t) \int_{\Gamma} \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} m_j \frac{\partial u_p(x, t)}{\partial x_j} \nu_i d\Gamma \leq 2\mu(t) \int_{\Gamma_0} (m\nu) \left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma + \\ & + \frac{R^2}{\mu_0} \left(\int_{\Gamma_1} (m\nu) |u'_p(t)|^2 \right) d\Gamma + \mu(t) \int_{\Gamma_1} (m\nu) \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} \right)^2 d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Análise de

- $-\theta(\beta(x)u'_p(t), u_p(t))_{L^2(\Gamma_1)}$.

Temos

$$\begin{aligned} & -\theta(\beta(x)u'_p(t), u_p(t))_{L^2(\Gamma_1)} = \int_{\Gamma_1} -\theta\beta(x)u'_p(t)u_p(t)d\Gamma = \\ & = \int_{\Gamma_1} -\theta \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{\xi}} \frac{\sqrt{\beta(x)}}{\sqrt{\mu(t)}} u'_p(t) \frac{\sqrt{\beta(x)}}{\sqrt{K}} \sqrt{\mu(t)} \sqrt{\xi} u_p(t). \end{aligned}$$

Novamente pela desigualdade de Young, obtemos

$$-\theta(\beta(x)u'_p(t), u_p(t))_{L^2(\Gamma_1)} \leq \frac{\theta^2 K}{\xi} \int_{\Gamma_1} \frac{\beta(x)}{\mu(t)} \frac{|u'_p(t)|^2}{2} d\Gamma + \frac{\xi}{K} \int_{\Gamma_1} \mu(t) \beta(x) \frac{|u_p(t)|^2}{2} d\Gamma,$$

onde $K > 0$ é uma constante tal que $\int_{\Gamma_1} \beta(x) |u_p(t)|^2 d\Gamma \leq K \|u_p(t)\|^2$ e $\xi > 0$ uma constante positiva a ser escolhida. Então,

$$-\theta(\beta(x)u'_p(t), u_p(t))_{L^2(\Gamma_1)} \leq \frac{\theta^2 K}{2\mu_0} \int_{\Gamma_1} \beta(x) |u'_p(t)|^2 d\Gamma + \xi \frac{\mu(t)}{2} \|u_p(t)\|^2. \quad (4.21)$$

Substituindo (4.18), (4.19), (4.20) em (4.14), obtemos

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &\leq -(n + \theta)\mu(t)\|u_p(t)\|^2 - (n - \theta)|u'_p(t)|^2 - \mu(t) \int_{\Gamma_0} (m\nu) \left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma - \\
&- \mu(t) \int_{\Gamma_1} (m\nu) \left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i} \right)^2 d\Gamma + 2n \int_{\Omega} \Lambda_p(u_p(t)) dx - 2 \int_{\Gamma_1} (m\nu) \Lambda_p(u_p(x, t)) d\Gamma + \\
&+ \int_{\Gamma_1} (m\nu) |u'_p(t)|^2 d\Gamma + 2\mu(t) \int_{\Gamma_0} (m\nu) \left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma + \frac{R^2}{\mu_0} \int_{\Gamma_1} (m\nu) |u'_p(t)|^2 d\Gamma + \\
&+ \mu(t) \int_{\Gamma_1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} \right)^2 d\Gamma - \theta(h_p(u_p(t)), u_p(t)) + \frac{\theta^2 K}{2\mu_0} \int_{\Gamma_1} \beta(x) |u'_p(t)|^2 d\Gamma + \\
&+ \frac{\xi\mu(t)}{2} \|u_p(t)\|^2
\end{aligned}$$

implicando que

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &\leq -(n + \theta)\mu(t)\|u_p(t)\|^2 - (n - \theta)|u'_p(t)|^2 - \theta(h_p(u_p(t)), u_p(t)) + 2n \int_{\Omega} \Lambda_p(u_p(t)) dx + \\
&+ \left(\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2 K}{2\mu_0 \xi} + 1 \right) \int_{\Gamma_1} (m\nu) |u'_p(t)|^2 d\Gamma + \xi \frac{\mu(t)}{2} \|u_p(t)\|^2.
\end{aligned}$$

Por (4.3), temos $-\theta(h(s), s) \leq -(2n + \delta)\Lambda(s)$. Assim,

$$\begin{aligned}
&- \int_{\Omega} \theta(h_p(u_p(t))u_p(t)) dx \leq - \int_{\Omega} (2n + \delta)\Lambda(u_p(t)) dx = -2n \int_{\Omega} \Lambda(u_p(t)) dx - \\
&- \gamma \int_{\Omega} \Lambda(u_p(t)) dx.
\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &\leq -(n + \theta)\mu(t)\|u_p(t)\|^2 - (n - \theta)|u'_p(t)|^2 + \left(\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2 K}{2\mu_0 \xi} + 1 \right) \int_{\Gamma_1} (m\nu) |u'_p(t)|^2 d\Gamma + \\
&+ \xi \frac{\mu(t)}{2} \|u_p(t)\|^2 - \gamma \int_{\Omega} \Lambda(u_p(t)) dx.
\end{aligned}$$

Desde que $\xi \frac{1}{2} (\mu(t)\|u_p(t)\|^2) \leq \xi E_p(t)$, segue que

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &\leq -(n + \theta)E_p(t) - (n - \theta)|u'_p(t)|^2 + \left(\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2 K}{2\mu_0 \xi} + 1 \right) \int_{\Gamma_1} (m\nu) |u'_p(t)|^2 d\Gamma + \\
&+ \xi E_p(t) - \gamma E_p(t).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \psi'(t) &\leq \max(- (n + \theta), -(n - \theta), -\gamma) E_p(t) + \left(\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2 K}{2\mu_0 \xi} + 1 \right) \int_{\Gamma_1} (m\nu) |u'_p(t)|^2 d\Gamma + \xi E_p(t) = \\ &= -\min(n - \theta, \gamma) E_p(t) + \left(\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2 K}{2\mu_0 \xi} + 1 \right) \int_{\Gamma_1} (m\nu) |u'_p(t)|^2 d\Gamma + \xi E_p(t). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Consideremos a derivada em relação a variável t da expressão

$$E_{p\epsilon}(t) = E_p(t) + \epsilon \psi(t)$$

e por (4.10) e (4.22) , temos

$$\begin{aligned} E'_{p\epsilon} &= E'_p(t) + \epsilon \psi'(t) \leq -\beta_0 \|u'_p(t)\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 - \epsilon \min \left[(n - \theta), \gamma \right] - \\ &- \epsilon \left(\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2 K}{2\mu_0 \xi} + 1 \right) \int_{\Gamma_1} (m\nu) |u'_p(t)|^2 d\Gamma \leq -\epsilon [\min\{(n - \theta), \gamma\} - \xi] E_p(t) - \\ &- \int_{\Gamma_1} \beta(x) |u'_p(t)|^2 d\Gamma - \epsilon \left(\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2 K}{2\mu_0 \xi} + 1 \right) \int_{\Gamma_1} (m\nu) |u'_p(t)|^2 d\Gamma - \\ &- \epsilon [\min\{(n - \theta), \gamma\} - \xi] E_p(t) - \int_{\Gamma_1} (m\nu) |u'_p(t)|^2 d\Gamma \epsilon \left(\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2 K}{2\mu_0 \xi} + 1 \right) + \\ &+ \int_{\Gamma_1} (m\nu) |u'_p(t)|^2 d\Gamma = -\epsilon [\min\{(n - \theta), \gamma\} - \xi] E_p(t) - \\ &- \left[1 + \left(\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2}{2\mu_0 \xi} + 1 \right) \right] \int_{\Gamma_1} (m\nu) |u'_p(t)|^2 d\Gamma. \end{aligned}$$

Tomando $0 < \epsilon < \left(\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2 K}{2\mu_0 \xi} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}$ e $0 < \xi < \min\{n - \theta, \gamma\}$, obtemos

$$\epsilon \left[1 - \left(\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2}{2\mu_0 \xi} + 1 \right) \right] \int_{\Gamma_1} (m\nu) |u'_p(t)|_{L^2(\Omega)}^2 d\Gamma \geq 0,$$

pois $1 - \left(\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2}{2\mu_0 \xi} + 1 \right) \geq 0$ e sobre Γ_1 e $m\nu > 0$. Recorde que

$$\frac{E_p(t)}{2} \leq E_{p\epsilon}(t) \leq 2E_p(t). \quad (4.23)$$

Assim, por (4.13) obtemos

$$E'_{p\epsilon}(t) + \frac{\omega}{2} E_{p\epsilon}(t) \leq 0,$$

com $\omega = \min \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{2R}{\mu_0} + \frac{\theta}{\mu_0} + 2R + \frac{\theta}{\lambda_1} \right)^{-1}, \left(\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2 K}{2\mu_0 \xi} + 1 \right)^{-1} \right\} > 0$. Então, a solução da EDO acima satisfaz

$$E_p(t) \leq E_{p\epsilon}(0) \exp^{-\frac{\omega}{2} t}, \forall t \geq 0. \quad (4.24)$$

Segue de (4.23) e (4.24) que

$$\frac{E_p(t)}{2} \leq E_{p\epsilon}(t) \leq 2E_p(t),$$

implicando que

$$E_p(t) \leq 4E_{p\epsilon}(0) \exp^{-\frac{\omega}{2}t}, \forall t \geq 0.$$

Desde que (u_p) é limitada em $L^\infty(0, T, V)$ e (u_p) é limitada em $L^2(0, T, L^2(\Omega))$, segue do Teorema de Aubin-Lions que existe uma subsequência de (u_p) , ao qual ainda denotaremos por (u_p) tal que

$$u_p \rightarrow u \text{ em } L^2(Q).$$

Pela Proposição (B.2.3), existe uma subsequência de (u_p) , que ainda denotaremos por (u_p) tal que

$$u_p \rightarrow u \text{ quase sempre em } Q.$$

Portanto,

$$u_p(\cdot, t) \rightarrow u_p(\cdot, t) \text{ quase sempre em } \Omega, \forall t \geq 0$$

Sendo Λ_p contínua, segue que

$$\Lambda_p(u(\cdot, t)) \rightarrow \Lambda_p(u(\cdot, t)) \text{ q.s em } \Omega, \forall t \geq 0. \quad (4.25)$$

Temos que $h_p \rightarrow h$ em conjuntos limitados da \mathbb{R} , e portanto

$$\Lambda_p(u(\cdot, t)) \rightarrow \Lambda(u(\cdot, t)) \text{ q.s em } \Omega, \forall t \geq 0. \quad (4.26)$$

Então, por (4.25) e (4.26)

$$\Lambda_p(u_p(\cdot, t)) \rightarrow \Lambda(u(\cdot, t)) \text{ q.s em } \Omega, \forall t \geq 0 \quad (4.27)$$

Temos ainda por (4.24) que

$$\frac{1}{2} \left[|u_p'(t)|^2 + \mu(t) \|u_p'(t)\|^2 + 2 \int_{\Omega} \Lambda_p(t)(u_p(x, t)) dx \right] \leq 2E_p(0) \exp^{-\frac{\omega}{2}t}$$

donde

$$\int_{\Omega} \Lambda_p(t)(u_p(x, t)) dx \leq 4E_p(0)$$

pois $\exp^{-\frac{\omega}{2}t} \leq 1$. Da convergência dos dados iniciais e pelo fato que

$$\int_{\Omega} \Lambda_p(u_{0p}(x)) dx \rightarrow \int_{\Omega} \Lambda(u_0(x)) dx \text{ em } \mathbb{R}, \text{ q.s em } \Omega, \forall t \geq 0,$$

obtemos,

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \Lambda_p(u_p(x)) dx \leq 4E(0). \quad (4.28)$$

De fato,

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} E_p(0) = \frac{1}{2} \left[|u_1|^2 + \mu(t) \|u_0\|^2 + 2 \int_{\Omega} \Lambda(u_0(x)) dx \right] = 4E(0).$$

Assim,

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \Lambda_p(u_p(x, t)) dx \leq 4E(0).$$

Por (4.28) e pelo Lema de Fatou, obtemos

$$\int_{\Omega} \Lambda(u(x, t)) \leq \liminf_{p \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \Lambda_p(u_p(x, t)) dx.$$

Então, de (4.28), temos

$$\int_{\Omega} \Lambda(u(x, t)) dx \leq 4E(0).$$

Passando \liminf na expressão $E_p(t) \leq 4E_{p\epsilon}(0) \exp^{-\frac{\omega}{2} t}, \forall t \geq 0$, obtemos

$$\frac{1}{2} \left[\liminf_{p \rightarrow \infty} |u'_p(t)|^2 + \liminf_{p \rightarrow \infty} \mu(t) \|u_p(t)\|^2 + \liminf_{p \rightarrow \infty} 2 \int_{\Omega} \Lambda_p(u_p(x, t)) \right] \leq 4 \exp^{-\frac{\omega}{2} t} \liminf_{p \rightarrow \infty} E_p(0),$$

o que implica

$$\frac{1}{2} \left[|u'(t)|^2 + \mu(t) \|u(t)\|^2 + 2 \int_{\Omega} \Lambda(u(x, t)) \right] \leq 4 \exp^{-\frac{\omega}{2} t} E(0).$$

isto é

$$E(t) \leq 4E(0) \exp^{-\frac{\omega}{2} t}, \forall t \geq 0.$$

■

Observação 4.1.1 A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(s) = s^3$ satisfaz a condição 4.3.

Apêndice A

Dual de espaços $L^p(0, T; X)$ ($p > 1$) para funções vetoriais

No que segue, daremos uma caracterização do dual de $L^p(0, T; X)$, com $p > 1$ e X um espaço de Banach. Demonstraremos que se o dual X' gozar da propriedade de que toda função de variação limitada $f : [0, T] \rightarrow X'$ possui uma derivada quase sempre, então o dual de $(L^p(0, T; X))' = L^q(0, T; X')$, sendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Este resultado encontramos no artigo de F. M. R. Neyde [21].

A.1 Integral para funções de $L^p(0, T, X)$

Nesta seção vamos definir um certo tipo de integrais para funções de $L^p(0, T, X)$, baseado na noção de Riemann-Stieltjes. Usaremos esta integral para mostrarmos a sobrejetividade da aplicação

$$\begin{array}{ccc} S : (L^p(0, T, X))' & \rightarrow & V_0^q(0, T, X') \\ U & \mapsto & \phi \end{array}$$

.

Observação A.1.1 Na página 81, definimos os espaços $V^q(0, T, X)$ e $V_0^q(0, T, X)$.

Se $u \in C(0, T, X)$ e $\phi \in V^q(0, T, X')$, correspondendo a uma partição $D_n : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ e pontos τ_v tal que $t_{v-1} \leq \tau_v \leq t_v$. Daí, formamos a soma

$$\delta(D_n) = \sum_{v=1}^n [\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})]u(\tau_v)$$

que é um elemento de $C(0, T, X)$, pois $u \in C(0, T, X)$. Seja então

$$|D_n| = \max_{1 \leq v \leq n} |t_v - t_{v-1}|.$$

A prova de que, para uma sequência de partições (D_i) com $|D_i| \rightarrow 0$, as somas $\delta(D_n)$ tem um limite em $C(0, T, X)$ que independe da sequência (D_i) , é feita de maneira usual. De fato, temos que

$$|\delta(D_n)| = \left| \sum_{v=1}^n [\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})u(\tau_v)] \right| \leq \sum_{v=1}^n \|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\| \|u(\tau_v)\| = \sum_{v=1}^n \frac{\|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\|}{|t_v - t_{v-1}|^{\frac{1}{p}}}.$$

Pela desigualdade de Hölder, temos

$$|\delta(D_n)| \leq \left(\sum_{v=1}^n \frac{\|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\|^q}{|t_v - t_{v-1}|^{q-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{v=1}^n \|u(\tau_v)\|^p |t_v - t_{v-1}| \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Mas como $\phi \in V^q(0, T, X')$ e $t \mapsto \|u(t)\|$ é contínua, passando ao limite quando $n \rightarrow \infty$, tem-se $|D_n| \rightarrow 0$ e portanto,

$$\lim_{|D_n| \rightarrow 0} \sum_{v=1}^n \frac{\|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\|^q}{|t_v - t_{v-1}|^{q-1}} = V^q(\phi)$$

e

$$\lim_{|D_n| \rightarrow 0} \sum_{v=1}^n \|u(\tau_v)\|^p |t_v - t_{v-1}| = \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{v=1}^n \frac{\|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\|^q}{|t_v - t_{v-1}|^{q-1}} \right| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{v=1}^n \frac{\|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\|^q}{|t_v - t_{v-1}|^{q-1}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^n \|u(\tau_v)\|^p |t_v - t_{v-1}| \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \{V^q(\phi)\}^{\frac{1}{q}} \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt. \end{aligned}$$

Logo, a série $\sum_{v=1}^n [\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})u(\tau_v)]$ é absolutamente convergente, pois é uma sequência monótona limitada. Daí, seu limite será denotado por $\int_0^T u(t)d\phi(t)$. Pela desigualdade estabelecida, temos

$$\left| \int_0^T u(t)d\phi(t) \right| \leq \{V^q(\phi)\}^{\frac{1}{q}} \text{ e } \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \{V^q(\phi)\}^{\frac{1}{q}} \|u\|_{L^p(0, T, X)}.$$

Note que

$$\begin{aligned} U : C(0, T, X) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \int_0^T u(t)d\phi(t) \end{aligned}$$

é um funcional linear sobre $C(0, T, X)$ de norma $\{V^q(\phi)\}$. Como $C(0, T, X)$ é denso em $L^p(0, T, X)$, podemos estender U a um único funcional linear sobre $L^p(0, T, X)$ com a mesma norma, que ainda denotaremos por U . Definimos então para $u \in L^p(0, T, X)$, $\int_0^T u(t)d\phi(t)$ por esta extensão. Assim, está bem definido

$$U : L^p(0, T, X) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \int_0^T u(t)d\phi(t)$$

e

$$|U(u)| = \left| \int_0^T u(t)d\phi(t) \right| \leq \{V^q(\phi)\}^{\frac{1}{q}} \|u\|_{L^p(0, T, X)}.$$

A.2 Preliminares

No que segue, X é um espaço de Banach tal que X' satisfaz a condição de que toda função de variação limitada tem uma derivada quase sempre. Estudaremos o dual dos espaços L^p quando os elementos são funções definidas em um intervalo $[0, T]$ e toma valores em X . Para $u : [0, T] \rightarrow X$ e $f : X' \rightarrow \mathbb{R}$ denotaremos $\langle f, u(t) \rangle$ em vez de $f(u(t))$.

Consideremos $V^p(0, T, X)$ o conjunto das funções u com valores em X , definidas quase sempre em $[0, T]$ e tais que as somas

$$\sum_{v=1}^n \frac{\|u(t_v) - u(t_{v-1})\|}{|t_v - t_{v-1}|}$$

são limitadas para todas as partições $\{t_v\}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. Note que faz sentido definirmos o supremo destas somas, logo denotaremos este supremo por $V^p(u)$. Definimos

$$\|u\|_{V^p(0, T, X)} = \|u(0)\| + \{V^p(u)\}^{\frac{1}{p}}.$$

Se $u \in V^p(0, T, X)$, então dizemos que u é uma função de variação p limitada. No caso de $p = 1$, dizemos simplesmente função de variação limitada.

Denotaremos por $V_0^p(0, T, X)$ um subconjunto de $V^p(0, T, X)$ para os quais $u(0) = 0$. Considerando os espaços $C(0, T, X)$ e $L^p(0, T, X)$, mostra-se que $C(0, T, X)$ é denso em $L^p(0, T, X)$ na norma de $L^p(0, T, X)$.

A.3 Uma primeira caracterização de $(L^p(0, T, X))'$

Nesta seção, vamos dar uma caracterização do espaço $(L^p(0, T, X))'$ no sentido de definir uma aplicação linear, sobrejetiva e que preserva norma.

Definamos para cada $x \in X$ e cada número real s , com $0 \leq s \leq T$, a seguinte função:

Se $s > 0$

$$u_{s,x} : [0, T] \rightarrow X$$

$$t \mapsto u_{s,x}(t)$$

onde

$$u_{s,x}(t) = \begin{cases} x, & 0 \leq t \leq s \\ 0, & s < t \leq T \end{cases}$$

e para $s = 0$, definiremos

$$u_{s,x}(t) = 0$$

Afirmção 1: Para cada $s \in [0, T]$ e para cada $x \in X$, $u_{s,x} \in L^p(0, T, X)$. De fato, temos que

$$\int_0^T \|u_{s,x}(t)\|_X^p dt = \int_0^s \|x\|_X^p dt < \infty,$$

pois $x \in X$.

Seja $U \in (L^p(0, T, X))'$. Consideremos para cada $s \in [0, T]$ a seguinte função:

$$\phi(s) : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto U(u_{s,x}) = \phi(s)[x].$$

Desejamos que a aplicação

$$S : (L^p(0, T, X))' \rightarrow V_0^q(0, T, X')$$

esteja bem definida, e para tanto, mostraremos que $\phi \in V_0^q(0, T, X')$.

i) $\phi(s) : X \rightarrow \mathbb{R}$ é linear.

Com efeito, se $s=0$, temos $\phi(s) = 0$, logo linear. Agora, se $s \neq 0$, $\forall t \in [0, T]$ temos

$$u_{s,\varphi x_1 + x_2} = \begin{cases} \varphi x_1 + x_2, & 0 \leq t \leq s \\ 0, & s < t \leq T \end{cases} = \begin{cases} \varphi x_1, & 0 \leq t \leq s \\ 0, & s < t \leq T \end{cases} + \begin{cases} x_2, & 0 \leq t \leq s \\ 0, & s < t \leq T \end{cases}$$

$= \varphi u_{s,x_1} + u_{s,x_2}$, isto é, $u_{s,\varphi x_1 + x_2}(t) = \varphi u_{s,x_1}(t) + u_{s,x_2}(t)$, para todo $x_1, x_2 \in X$ e $\varphi \in \mathbb{R}$, o que implica

$$\begin{aligned}\phi(s)[\varphi x_1 + x_2] &= U(u_{s,\varphi x_1 + x_2}(t)) = U(\varphi u_{s,x_1}(t) + u_{s,x_2}(t)) = \varphi U(u_{s,x_1}) + U(u_{s,x_2}) = \\ &= \varphi \phi(s)[x_1] + \phi(s)[x_2].\end{aligned}$$

ii) $\phi(s) \in X', \forall s \in [0, T]$

De fato, $\phi(0) = 0$, logo $\phi(0) \in X'$. Suponha agora $s \neq 0$. Desde que

$$\|u_{s,x}\|_{L^p(0,T,X)}^p = \int_0^T \|u_{s,x}(t)\|^p dt = \|x\|^p s$$

isto é,

$$\|u_{s,x}\|_{L^p(0,T,X)} = s^{\frac{1}{p}} \|x\|.$$

Assim,

$$|\phi(s)[x]| = |U(u_{s,x})| \leq \|U\| \|u_{s,x}\|_{L^p(0,T,X)} = \|U\| s^{\frac{1}{p}} \|x\|,$$

mostrando que ϕ é contínua e, portanto, $\phi \in X'$.

iii) $\phi \in V_0^q(0, T, X')$ e $V^q(\phi) \leq \|U\|_{(L^p(0,T,X))}^q$.

Devemos mostrar que

$$\sum_{v=1}^n \frac{\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})}{t_v - t_{v-1}} \leq \|U\|^q,$$

para toda partição $\{t_v\}$ de $[0, T]$. Seja $\varepsilon > 0$ e b_1, \dots, b_n números reais não negativos.

Fixemos v . Consideraremos dois casos:

Caso i) $b_v > 0$.

Neste caso, note que $\frac{\varepsilon}{nb_v} > 0$ e $\|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\| = \sup_{\|x\|=1} |\phi(t_v)x_v - \phi(t_{v-1})x_v|$. Por definição de supremo, existe $\|\bar{x}_v\| = 1$ tal que

$$|\phi(t_v)\bar{x}_v - \phi(t_{v-1})\bar{x}_v| > \|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\| - \frac{\varepsilon}{nb_v} = \|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\| \|\bar{x}_v\| - \frac{\varepsilon}{nb_v} \quad (\text{A.1})$$

Multiplicando (A.1) por b_v , obtemos

$$|\phi(t_v)b_v\bar{x}_v - \phi(t_{v-1})b_v\bar{x}_v| > \|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\| \|b_v\bar{x}_v\| - \frac{\varepsilon}{n}.$$

Tomando $x_v = b_v\bar{x}_v$, obtemos

$$|\phi(t_v)x_v - \phi(t_{v-1})b_vx_v| > \|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\| \|x_v\| - \frac{\varepsilon}{n}, \|x_v\| = b_v.$$

Caso ii)

Se $b_v = 0$, tomaremos $x_v = 0$ e para os números reais não negativos b_1, \dots, b_n , existe $x_v \in X$ com $\|x_v\| = b_v$ tal que

$$|\phi(t_v)[x_v] - \phi(t_{v-1})[x_v]| > \|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\| b_v - \frac{\varepsilon}{n}. \quad (\text{A.2})$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
& \sum_{v=1}^n |\phi(t_v)[x_v] - \phi(t_{v-1})[x_v]| = \sum_{v=1}^n |U(U_{t_v-x_v}) - U(t_{v-1}, x_v)| \leq \\
& \leq \|U\| \sum_{v=1}^n \|u_{t_v, x_v} - u_{t_{v-1}, x_v}\| = \|U\| \sum_{v=1}^n \left(\int_0^T \|u_{t_v, x_v}(t) - u_{t_{v-1}, x_v}(t)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \\
& = \|U\| \sum_{v=1}^n \left(\int_0^T \|x_v \chi_{(t_{v-1}, t_v)}(t)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|U\| \left(\sum_{v=1}^n \|x_v\|^p (t_v - t_{v-1}) \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (A.3)
\end{aligned}$$

Por (A.2) e (A.3), segue que

$$\sum_{v=1}^n \|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\| b_v < \varepsilon + \|U\| \left(\sum_{v=1}^n b_v^p (t_v - t_{v-1}) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Assim, se $b_v = \left(\frac{\|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\|}{|t_v - t_{v-1}|} \right)^{\frac{q}{p}}$, fazendo $a_v = \|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\|$ e $\Delta_v = |t_v - t_{v-1}|$, obtemos

$$b_v = \left(\frac{a_v}{\Delta_v} \right)^{\frac{q}{p}}.$$

Daí, a desigualdade anterior é dada por

$$\sum_{v=1}^n a_v b_v = \sum_{v=1}^n \frac{a_v^{\frac{q+p}{p}}}{\Delta_v^{\frac{q}{p}}} \leq \|U\| \left(\sum_{v=1}^n \frac{a_v^q}{\Delta_v^{q-1}} \right)^{\frac{1}{p}},$$

o que implica

$$\sum_{v=1}^n \frac{a_v^q}{\Delta_v^{q-1}} \leq \|U\|^q \left(\sum_{v=1}^n \frac{a_v^q}{\Delta_v^{q-1}} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (A.4)$$

Elevando (A.4) à potência q e observando que $q - \frac{q}{p} = 1$, obtemos

$$\frac{\left(\sum_{v=1}^n \frac{a_v^q}{\Delta_v^{q-1}} \right)^q}{\left(\sum_{v=1}^n \frac{a_v^q}{\Delta_v^{q-1}} \right)^{\frac{q}{p}}} \leq \|U\|^q$$

ou seja

$$\sum_{v=1}^n \frac{\|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\|^q}{|t_v - t_{v-1}|^{q-1}} \leq \|U\|^q$$

para toda partição $\{t_v\}$ de $[0, T]$, mostrando que $\phi \in V_0^q(0, T, X')$ com $V^q(\phi) \leq \|U\|^q$.

Logo, a função

$$\begin{aligned}
S : (L^p(0, T, X))' &\rightarrow V_0^q(0, T, X') \\
U &\mapsto \phi
\end{aligned}$$

está bem definida e é linear, pois ϕ é linear. Mostraremos agora que S é sobrejetiva. Devemos mostrar que dado $\phi \in V_0^q(0, T, X')$, existe $U \in (L^p(0, T, X))'$ tal que $S(U) = \phi$, ou seja, tal que, se $s \in [0, T]$ então para todo $x \in X$, $U(u_{s,x}) = \phi(x)$.

De fato, se $s = 0$, então $u_{0,x} \equiv 0$, logo $U(u_{0,x}) = 0 = \phi(0)x$, já que $\phi(0) = 0$, pois $\phi \in V_0^q$.

Suponha agora $s > 0$ e definiremos para $x \in X$,

$$u_n(t) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq t \leq s \\ -n(t - s - \frac{1}{n})x, & \text{se } s \leq t \leq s + \frac{1}{n} \\ 0, & \text{se } s - \frac{1}{n} \leq t \leq T \end{cases}$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n(t) \in C(0, T, X)$ e

$$\int_0^T \|u_n(t) - u_{s,x}(t)\|^p dt = \int_s^{s+\frac{1}{n}} \left\| -n\left(t - s - \frac{1}{n}\right)x \right\|^p dt \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Assim, (u_n) converge em $L^p(0, T, X)$ para $u_{s,x}$ e como $U \in (L^p(0, T, X))'$, temos que

$$U(u_n) \rightarrow U(u_{s,x}). \quad (\text{A.5})$$

Notemos que

$$U(u_n) \rightarrow \phi(s)x.$$

Com efeito,

$$U(u_n) = \int_0^T u_n(t) d\phi(t) = \int_0^s x d\phi(t) + \int_s^{s+\frac{1}{n}} \left[-n\left(t - s - \frac{1}{n}\right)x \right] d\phi(t) + \int_{s+\frac{1}{n}}^T 0 d\phi(t).$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \int_0^s x d\phi(t) &= \lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_{v=1}^n [\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})]x = \lim_{|D| \rightarrow 0} [\phi(t_1)x - \phi(t_0)x + \phi(t_2)x - \phi(t_1)x + \dots + \phi(t_{n-1})x - \phi(t_{n-2})x] \\ &= \phi(s)x \end{aligned}$$

e daí,

$$\begin{aligned} |U(u_n) - \phi(s)x| &= \left| \int_0^{s+\frac{1}{n}} \left[n\left(s + \frac{1}{n} - t\right)x \right] d\phi(t) \right| \leq \\ &\leq \lim_{|D_k| \rightarrow 0} \sum_{v=1}^n \|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\| \left\| n\left(s + \frac{1}{n} - \rho_v\right)x \right\| = \\ &= \|x\| \lim_{|D_k| \rightarrow 0} \sum_{v=1}^n \|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\| \left\| n\left(s + \frac{1}{n} - \rho_v\right)x \right\| \end{aligned}$$

onde $s \leq \rho_v \leq s + \frac{1}{n}$, o que implica

$$0 \leq n \left(s + \frac{1}{n} - \rho_v \right) \leq 1.$$

e daí

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{s+\frac{1}{n}} \left[n \left(s + \frac{1}{n} - t \right) x \right] d\phi(t) \right| &\leq \lim_{|D_k| \rightarrow 0} \sum_{v=1}^n \|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\| \leq \\ &\leq \|x\| \left\{ \text{variação de } \phi \text{ sobre } \left(s + \frac{1}{n} \right) \right\} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |U(u_n) - \phi(s)x| = 0. \quad (\text{A.6})$$

Segue de (A.5) e (A.6) e pela unicidade do limite que $U(u_{s,x}) = \phi(s)x$, mostrando a sobrejetividade da aplicação S .

Por fim, provaremos que S preserva norma, ou seja, devemos mostrar que

$$\|S(U)\|_{V_0^q(0,T,X)} = \|U\|_{L^p(0,T,X)}.$$

Notemos que

$$\|S(U)\|_{V_0^q(0,T,X)} = \|\phi\|_{V_0^q(0,T,X)} = \|\phi(0)\|'_X + \{V_0^q(\phi)\} \leq \|U\|_{L^p(0,T,X)} \quad (\text{A.7})$$

Então, resta-nos mostrar que

$$\|U\|_{L^p(0,T,X)} \leq \|S(U)\|_{V_0^q(0,T,X)} \quad (\text{A.8})$$

Com efeito, seja $u_n : [0, T] \rightarrow X$ uma função simples que toma valor x_v para o intervalo $t_{v-1} \leq t \leq t_v$. Mas

$$u_n(t) = \sum_{v=1}^n [u_{t_v, x_v} - u_{t_{v-1}, x_v}] = \sum_{v=1}^n [\chi_{t_{v-1}, t_v}] x_v = x_j,$$

com $t \in (t_{j-1}, t_j]$. Assim,

$$u_n(t) = \sum_{v=1}^n [u_{t_v, x_v} - u_{t_{v-1}, x_v}] \Rightarrow \int_0^T \|u_n(t)\|^p dt = \sum_{v=1}^n \int_{t_{v-1}}^{t_v} \|x_v\|^p dt = \sum_{v=1}^n \|x_v\|^p |t_v - t_{v-1}|$$

e

$$|U(u_n)| = \left| \sum_{v=1}^n U(u_{t_v, x_v}) - U(u_{t_{v-1}, x_v}) \right| = \left| \sum_{v=1}^n \phi(t_v)[x_v] - \phi(t_{v-1})[x_v] \right| \leq \sum_{v=1}^n \|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\| \|x_v\|.$$

Pela Desigualdade de Hölder, obtemos

$$|U(u_n)| \leq \left(\sum_{v=1}^n \frac{\|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\|^q}{|t_v - t_{v-1}|^q - 1} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{v=1}^n \|x_v\|^p |t_v - t_{v-1}| \right)^{\frac{1}{p}} \leq \{V^q(\phi)^{\frac{1}{q}}\} \|u_n\|_{L^p(0,T,X)}.$$

Logo, se $u \in L^p(0, T, X)$ e u_n é escolhida tal que $u_n \rightarrow u$ na norma de $L^p(0, T, X)$, teremos que

$$|U(u)| \leq \{V^q(\phi)\}^{\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(0,T,X)}$$

e daí

$$\|U\|_{(L^p(0,T,X))'} \leq \{V^q(\phi)\}^{\frac{1}{p}} = \|S(U)\|_{V_0^q(0,T,X')}.$$

Concluimos então que a aplicação

$$\begin{aligned} S : (L^p(0, T, X))' &\rightarrow V_0^q(0, T, X) \\ U &\mapsto \phi \end{aligned}$$

é linear, sobrejetiva e preserva norma, o que implica $(L^p(0, T, X))'$ é equivalente a $V_0^q(0, T, X)$ sempre que X é um espaço de Banach e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p \leq \infty$.

A.4 O espaço dual de $L^p(0, T, X)$

Nesta seção, vamos mostrar que a aplicação

$$\begin{aligned} L : V_0^p(0, T, Y) &\rightarrow L^p(0, T, Y) \\ u &\rightarrow u' \end{aligned}$$

está bem definida, preserva norma, é linear e sobrejetiva. Vamos demonstrar em alguns casos.

1) L está bem definida.

De fato, seja $u \in V_0^p(0, T, Y)$. Mostraremos que $t \mapsto u'(t)$ é fortemente mensurável e $t \mapsto \|u'(t)\|_Y \in L^p(0, T, \mathbb{R})$.

Consideremos uma sequência de conjuntos finitos de pontos no intervalo $[0, T]$, o m -ésimo conjunto sendo $t_{m,1}, t_{m,2}, \dots, t_{m,n}$ e tais que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_v (t_{m,v+1} - t_{m,v}) = 0$$

[como por exemplo se dividimos em 2^m partes iguais]. Definimos

$$u_m(t) = \frac{u(t_{m,v+1}) - u(t_{m,v})}{t_{m,v+1} - t_{m,v}},$$

em cada intervalo $t_{m,v} \leq t < t_{m,v+1}$. Se t não é um dos pontos $t_{m,v}$, com $t_{m,v} < t < t_{m,v+1}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} u_m(t) &= \frac{u(t_{m,v+1}) - u(t)}{t_{m,v+1} - t} \frac{t_{m,v+1} - t}{t_{m,v+1} - t_{m,v}} + \frac{u(t_{m,v}) - u(t)}{t_{m,v} - t} \frac{t - t_{m,v}}{t_{m,v+1} - t_{m,v}} = \\ &= \{u'(t) + o_1(t)\} \frac{u(t_{m,v+1}) - u(t)}{t_{m,v+1} - t} + \{u'(t) + o_2(t)\} \frac{t_{m,v+1} - t}{t_{m,v+1} - t_{m,v}} = u'(t) + o_3(t) \end{aligned}$$

onde $o_3(t) \leq \|o_1(t)\| + \|o_2(t)\|$, e $\|o_1(t)\|, \|o_2(t)\|$ tendem a zero quando $t_{m,v+1} - t_{m,v} \rightarrow 0$. Assim,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m(t) - u'(t)\| = 0 \text{ quase sempre}$$

isto é, existe uma sequência de funções simples convergindo fortemente para u' quase sempre, logo u' é fortemente mensurável. Para cada m , $u_m \in L^p(0, T, X)$, logo

$$t \mapsto \|u_m(t)\| \in L^p(0, T, \mathbb{R})$$

e

$$\int_0^T \|u'_m(t)\|^p dt = \sum_{P_m} \frac{\|u(t_{m,v+1}) - u(t_{m,v})\|^p}{|t_{m,v+1} - t_{m,v}|^{p-1}} \leq \sup_P \sum_{v=1}^{n_P} \frac{\|u(t_v) - u(t_{v-1})\|^p}{|t_v - t_{v-1}|^{p-1}} = V^p(u).$$

Pelo Lema (B.2.5), segue que $t \mapsto \|u'(t)\|$ é integrável e $\int_0^T \|u'(t)\|^p dt \leq V^p(u)$, isto é, $\|u'\|_{L^p(0,T,Y)} \leq V^p(u)$.

Portanto, L está bem definida e

$$\|L(u)\|_{L^p(0,T,Y)} = \|u'\|_{L^p(0,T,Y)} \leq \|u\|_{V^p(0,T,Y)}. \quad (\text{A.9})$$

2) L preserva norma

Com efeito, por (A.9), é suficiente provar que

$$\|u\|_{V^p(0,T,Y)} \leq \|u'\|_{L^p(0,T,Y)}.$$

Para provarmos, iniciaremos definindo a função vetorial

$$\begin{aligned} v &: [0, T] \rightarrow Y \\ t &\mapsto u(0) + \int_0^t u'(s) ds \end{aligned}$$

e mostrando que $v(t) = u(t)$, $\forall t \in [0, T]$, para $u' \in L^p(0, T; Y)$

Seja $f \in Y'$ qualquer. Então: é quase sempre derivável, isto é, existe $\frac{d}{dt}$ quase sempre.

De fato, para os t 's tais que existe $u'(t)$, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\langle f, \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right\rangle = \left\langle f, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right\rangle = \langle f, u'(t) \rangle$$

isto é

$$\frac{d}{dt} \langle f, u(t) \rangle = \langle f, \frac{d}{dt} u(t) \rangle.$$

Notemos que $t \mapsto \langle f, u(t) \rangle$ é absolutamente contínua. De fato, dado $\varepsilon > 0$ e se $I_n = (\alpha_n, \beta_n)$ é uma sequência de intervalos dois a dois disjuntos, definindo $\delta = \frac{\varepsilon}{\|f\|(V^p(u))^{\frac{1}{p}}}$, obtemos

$$\sum |\langle f, u(\beta_n) \rangle - \langle f, u(\alpha_n) \rangle| \leq \|f\| \sum \|u(\beta_n) - u(\alpha_n)\| \leq \|f\| \left(\sum \frac{\|u(\beta_n) - u(\alpha_n)\|}{|\beta_n - \alpha_n|} \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Daí,

$$\langle f, u(t) \rangle = \langle f, u(0) \rangle + \int_0^t \frac{d}{dt} \langle f, u(s) \rangle ds = \langle f, u(0) \rangle + \int_0^t \left\langle f, \frac{d}{dt} u(s) \right\rangle ds = \langle f, v(t) \rangle.$$

Assim, $\forall f \in Y'$ e $\forall t \in [0, T]$, temos $\langle f, u(t) \rangle = \langle f, v(t) \rangle$ e, portanto, $u = v$, isto é

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s) ds = \int_0^t u'(s) ds.$$

Seja agora P uma partição qualquer do intervalo $[0, T]$. Então,

$$\|u(t_{v+1}) - u(t_v)\| = \left\| \int_0^{t_{v+1}} u'(s) ds - \int_0^{t_v} u'(s) ds \right\| \leq \int_{t_v}^{t_{v+1}} \|u'(s)\| ds.$$

Novamente pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\|u(t_{v+1}) - u(t_v)\| \leq \left(\int_{t_v}^{t_{v+1}} \|u'(s)\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{t_{v+1}} 1 ds \right)^{1 - \frac{1}{p}}$$

Logo,

$$\frac{\|u(t_{v+1}) - u(t_v)\|}{|t_{v+1} - t_v|^{\frac{p-1}{p}}} \leq \left(\int_{t_v}^{t_{v+1}} \|u'(s)\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}}$$

Daí, para toda partição P de $[0, T]$, obtemos

$$\sum_{v=1}^{n_P} \frac{\|u(t_{v+1}) - u(t_v)\|^p}{|t_{v+1} - t_v|^p} \leq \int_0^T \|u'(s)\|^p ds,$$

donde

$$\|u\|_{V^q(0, T, Y)} = \{V^p(u)\}^{\frac{1}{p}} \leq \|u'\|_{L^p(0, T, Y)} = \|L(u)\|_{L^p(0, T, Y)}. \quad (\text{A.10})$$

Portanto, de (A.9) e (A.10), temos $\|u'\|_{L^p(0, T, Y)} = \|u\|_{V^q(0, T, Y)}$.

3) L é linear.

De fato, sejam $u, v \in V_0^q(0, T, Y)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim

$$L(u + v) = (u + v)' = u' + v' = L(u) + L(v) \text{ e } L(\alpha u) = (\alpha u)' = \alpha u' = \alpha L(u)$$

4) L é sobrejetiva.

Seja $u \in L^p(0, T, Y)$. Devemos mostrar que existe $v \in V^p(0, T, Y)$ tal que $L(v) = v' = u$. Definimos

$$r(t) = \int_0^T u(s) ds, 0 \leq t \leq T.$$

Como $u \in L^p(0, T, Y)$ temos, por definição, que existe uma sequência (φ_n) de funções simples tal que (φ_n) converge fortemente para u quase sempre e tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|\varphi_n - u(s)\|_Y ds = 0.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} |r(t+h) - r(t)| - u(t) \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \left[\int_0^{t+h} u(s) ds - \int_0^t u(s) ds \right] - u(t) \right\| \leq \\ &\leq \left\| \frac{1}{h} \left[\int_0^{t+h} (u(s) - \varphi_n(s)) ds - \int_0^t (u(s) - \varphi_n(s)) ds \right] \right\| + \\ &+ \left\| \frac{1}{h} \int_0^{t+h} \varphi_n(s) ds - \int_0^t \varphi_n(s) ds \right\| - \varphi_n(t) \right\| \leq \\ &\leq \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|u(s) - \varphi_n(s)\| ds \right| + \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\varphi_n(s) - \varphi_n(t)\| ds \right| + \|\varphi_n(t) - u(t)\|. \end{aligned}$$

Observe que para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se $(u - \varphi_n) \in L^p(0, T, Y)$, logo, a função

$$s \mapsto \|u(s) - \varphi_n(s)\| \in L^p(0, T, \mathbb{R}),$$

e daí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|u(s) - \varphi_n(s)\| ds \right\| = \|u(t) - \varphi_n(t)\|$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\varphi_n(s) - \varphi_n(t)\| ds \right\| = 0,$$

quase sempre em $[0, S]$. Agora

$$\left\| \frac{1}{h} \left[r(t+h) - r(t) \right] - u(t) \right\| \leq 2\|u(t) - \varphi_n(t)\| + o(h)$$

onde $o(h) \rightarrow 0$ e como o membro esquerdo não depende de n e pelo fato de $\varphi_n \rightarrow u$ fortemente, temos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tal que se } n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \|u'(t) - \varphi_n(t)\| < \varepsilon$$

para quase todo t . Assim, tomando o limite quando $h \rightarrow 0$, resulta que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} \left[v(t+h) - v(t) \right] - u(t) \right\| = 0,$$

para quase todo $t \in [0, T]$ e, pela continuidade da norma, temos que existe $r'(t) = u(t)$ para quase todo $t \in [0, T]$.

Seja agora P uma partição qualquer do intervalo $[0, T]$. Então, pela desigualdade de Hölder

$$\|r(t_{v+1}) - u(t_v)\| = \left\| \int_{t_v}^{t_{v+1}} u(s) ds \right\| \leq \left(\int_{t_v}^{t_{v+1}} \|u(s)\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{t_v}^{t_{v+1}} 1 ds \right)^{1-\frac{1}{p}}$$

Logo,

$$\frac{\|r(t_{v+1}) - r(t_v)\|}{|t_{v+1} - t_v|^{\frac{p-1}{p}}} \leq \left(\int_{t_v}^{t_{v+1}} \|u(s)\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Assim,

$$\sum_{v=1}^{n_P} \frac{\|r(t_{v+1}) - r(t_v)\|^p}{|t_{v+1} - t_v|^{p-1}} \leq \int_0^T \|u(s)\|^p ds,$$

e como P é qualquer partição de $[0, T]$ temos,

$$\sup \sum_{v=1}^{n_P} \frac{\|r(t_{v+1}) - r(t_v)\|^p}{|t_{v+1} - t_v|^{p-1}} \leq \|u\|_{L^p(0, T, Y)}^p.$$

Portanto, $r \in V_0^p(0, T, Y)$, pois $v(0) = 0$ e $L(v) = u$. Por (1), (2), (3), (4), obtemos que $V_0^p(0, T, Y)$ é equivalente a $L^p(0, T, Y)$.

Tomando $Y = X'$ e $p = q$, temos $V_0^q(0, T, X') \approx L^q(0, T, X')$. Mas foi provado anteriormente que $(L^p(0, T, X))' \approx V_0^q(0, T, X')$, e dessa forma podemos concluir que

$$(L^p(0, T, X))' = L^q(0, T, X').$$

Observação A.4.1 *A condição imposta ao dual de que toda função de variação limitada possui uma derivada quase sempre é satisfeita pelos espaços de Sobolev $H^m(\Omega)$.*

Observação A.4.2 *Seja H um espaço de Hilbert com produto interno denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então, a função*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : L^2(0, T, H) \times L^2(0, T, H) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_H dt \end{aligned}$$

define um produto interno em $L^2(0, T; H)$ que nos fornece a norma

$$\|u\|_{L^2(0, T, H)}^2 = \int_0^T \|u(t)\|_H^2 dt.$$

Assim, $L^2(0, T; H)$ é um espaço de Hilbert, logo reflexivo. Desde que H é reflexivo, H satisfaz a condição de que toda função de variação limitada possui derivada quase sempre. Daí, teremos por exemplo para os espaços de Sobolev $H_0^m(\Omega)$, onde Ω é um aberto limitado do \mathbb{R}^n que

$$(L^p(0, T; H_0^m(\Omega)))' = L^q(0, T; H^{-m}(\Omega))$$

Seja $V^\infty(0, T; X)$ o conjunto de todas as funções $f : [0, T] \rightarrow X$ Lipschitziana, ou seja, $f \in V^\infty(0, T, X)$ se, e somente se,

$$L(f) = \sup_{x_1, x_2} \frac{\|f(x_1) - f(x_2)\|}{|x_1 - x_2|} < \infty.$$

Observação A.4.3 O conjunto $V^\infty(0, T; X)$ é um espaço vetorial munido da norma

$$\|f\|_{V^\infty(0, T, X)} = \|f(0)\| + L(f).$$

Observação A.4.4 No caso $p = 1$, mostra-se de forma análoga ao feito anteriormente que $L^1(0, T; X) = L^\infty(0, T; X)$.

Agora, vamos enunciar e demonstrar um resultado que foi usado de forma significativa neste trabalho.

Proposição A.4.1 Sejam X' o dual de um espaço de Banach reflexivo X e $1 \leq p \leq \infty$. Se (f_k) é uma sequência limitada de $L_{loc}^p(0, \infty; X')$, então existe uma subsequência de (f_k) que converge fraco para uma função de $L_{loc}^p(0, \infty; X')$ (fraca estrela no caso $p = \infty$).

Demonstração: Por hipótese, (f_k) é uma sequência limitada de $L^p(0, T; X')$ para todo $T > 0$ e $T \in \mathbb{R}$. Em particular, (f_k) é uma sequência limitada de $L^p(0, 1; X')$. Pela compacidade fraca de $L^p(0, 1; X')$ (fraca estrela no caso $p = \infty$), temos que existe uma subsequência (f_k^1) tais que

i) $f_k^1 \rightharpoonup f^1$ (fraca estrela no caso $p = \infty$)

Ora, (f_k^1) é limitada em $L^p(0, 1, X')$, então seguindo raciocínio anterior, existe uma subsequência (f_k^2) de (f_k^1) e uma função f^2 tais que

ii) $f_k^2 \rightharpoonup f^2$ (fraca estrela no caso $p = \infty$).

De forma indutiva, define-se uma subsequência (f_k^T) de (f_k) e uma função f^T tais que

iii) $f_k^T \rightharpoonup f^T$ (fraca estrela no caso $p = \infty$)

Por unicidade do limite fraco (fraca estrela no caso $p = \infty$), temos

$$f_k^T = f_k^{T-1}, \forall t \in [0, T - 1] \quad (\text{A.11})$$

Seja a sequência diagonal (f_k^k) . Dado $T \in \mathbb{R}$, observamos que

$$(f_k^k) \text{ é uma subsequência de } (f_k^T). \quad (\text{A.12})$$

Assim, de (A.12) podemos concluir que

$$f_k^k \rightharpoonup f^T \text{ (fraca estrela no caso } p = \infty) \quad (\text{A.13})$$

Por (A.11), podemos definir a função $f(t) = f^T$, se $t \in [0, T]$. Logo, de (A.13) concluímos que

$$f_k^k \rightharpoonup f \text{ em } L_{loc}^p(0, \infty, X') \text{ (fraco estrela no caso } p = \infty).$$

■

Apêndice B

Resultados utilizados

No que segue, apresentaremos algumas definições e resultados que usamos na dissertação. Alguns destes resultados serão demonstrados.

B.1 Teorema de Carathéodory

Nesta seção enunciaremos o Teorema de Carathéodory que será utilizado no Capítulo 2. O teorema fornece a existência de solução para um problema de Cauchy em um intervalo $[0, t_m]$, para cada $m \in \mathbb{N}$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto cujos elementos são denotados por (t, x) , onde $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função.

Consideremos o problema de valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. \quad (\text{B.1})$$

Dizemos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições do teorema de Carathéodory sobre Ω se:

- (i) $f(t, x)$ é mensurável em t para cada x fixo
- (ii) $f(t, x)$ é contínua em x para cada t fixo
- (iii) Para cada compacto $K \subset \Omega$, existe uma função real $m_K(t)$, integrável, tal que

$$\|f(t, x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq m_K(t), \forall (t, x) \in K$$

Teorema B.1.1 (Teorema de Carathéodory) *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre Ω . Então, existe uma solução $x(t)$ de (B.1) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$, onde $\beta > 0$ é uma constante positiva.*

Observação B.1.1 *A demonstração desse teorema será feita quando f estiver definida em $R : |t - t_0| \leq a$ em $|x - \xi| \leq b$.*

Demonstração: A prova do teorema será obtida por limites de soluções aproximadas. Vamos construir a solução para $t \geq t_0$, e a construção no caso de $t \leq t_0$ é análoga. Defina $M(t)$ da seguinte forma:

$$M(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq t_0 \\ \int_{t_0}^t m(s)ds, & \text{se } t \in [t_0, t_0 + a]. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Note que M é contínua, não-decrescente e $M(t_0) = 0$. Por continuidade de M existe $\beta > 0$ tal que $(t, x_0 \pm M(t)) \in R$, para algum intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + \beta \leq t_0 + a$, onde β é uma constante positiva. Escolhendo β para que isto seja verdade, definiremos a sequência de soluções aproximadas como:

$$u_j(t) = \begin{cases} \xi, & \text{se } t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{\beta}{j} \\ \xi + \int_{t_0}^{t - \frac{\beta}{j}} f(s, u_j(s))ds, & \text{se } t_0 + \frac{\beta}{j} < t < t_0 + \beta. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Temos que u_1 está definida em $t_0 \leq t \leq t_0 + \beta$, para qualquer constante ξ . Fixemos $j \in \mathbb{N}$ qualquer. Daí, a primeira fórmula de (B.3) define u_j no intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{\beta}{j}$. Sendo $(t, \xi) \in R$ para $t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{\beta}{j}$, a segunda fórmula de (B.3) define u_j como uma função contínua no intervalo $t_0 + \frac{\beta}{j} \leq t \leq t_0 + \frac{2\beta}{j}$. Por outro lado, desde que $|f(t, x)| \leq m_K$ e pela definição de M , obtemos

$$|u_j(t) - \xi| \leq M\left(t - \frac{\beta}{j}\right). \quad (\text{B.4})$$

Suponhamos que u_j está definida para $t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{k\beta}{j}$ para $1 < k < j$. Então, a segunda fórmula de (B.3) define u_j para o intervalo $t_0 + \frac{k\beta}{j} < t \leq t_0 + \frac{(k+1)\beta}{j}$, sendo apenas necessário o integrando mensurável no intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{k\beta}{j}$. Temos também que em $t_0 + \frac{k\beta}{j} < t \leq t_0 + \frac{(k+1)\beta}{j}$, a função u_j satisfaz a desigualdade (B.4),

devido a $|f(t, x)| \leq m_K$ e pela definição de M . Portanto, todas as u_j são definidas como funções contínuas em $t_0 \leq t \leq t_0 + \beta$, satisfazendo

$$\begin{aligned} u_j(t) &= \xi \text{ em } t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{\beta}{j} \\ |u_j(t) - \xi| &\leq M \left(t - \frac{\beta}{j} \right) \text{ em } t_0 + \frac{\beta}{j} < t \leq t_0 + \beta \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Seja $\mathcal{N} = \{u_j : j \geq j_0\}$. Mostraremos que \mathcal{N} satisfaz as hipóteses do teorema de Ascoli-Arzelá. Sendo M contínua no intervalo $[t_0, t_0 + \beta]$, segue que M é uniformemente contínua. De fato, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $|t_1 - t_2| < \delta$

$$|u_j(t_1) - u_j(t_2)| \leq \left| M \left(t_1 - \frac{\beta}{j} \right) - M \left(t_2 - \frac{\beta}{j} \right) \right|.$$

Pela desigualdade triangular

$$|u_j(t_1) - u_j(t_2)| \leq M|t_1 - t_2|.$$

Tomando $\delta = \frac{\epsilon}{M}$, obtemos

$$|u_j(t_1) - u_j(t_2)| \leq \epsilon$$

mostrando que $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uniformemente equicontínua em $[t_0, t_0 + \beta]$. Por outro lado, dado $t \in I_a$, tem-se que $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada, pois m é integrável.

Então, pelo teorema de Ascoli-Arzelá, existe uma subsequência de $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$, que ainda denotaremos por $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tal que

$$u_j \rightarrow u \text{ uniformemente em } [t_0, t_0 + \beta]$$

Como f é contínua em x , fixado t , temos que $f(t, u_j(t)) \rightarrow f(t, u(t))$ quando $j \rightarrow \infty$. Além disso, $|f(t, u_j(t))| \leq m$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, u_j(s)) ds = \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds, \forall t \in [t_0, t_0 + \beta].$$

Então, vamos escrever

$$u_j(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_j(s)) ds - \int_{t_0 - \frac{\beta}{j}}^t f(s, u_j(s)) ds.$$

Passando ao limite quando $j \rightarrow \infty$, a última integral se anula e assim

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds.$$

mostrando o resultado. ■

Teorema B.1.2 (Teorema do prolongamento) *Seja $\Omega = [0, T] \times B$ com $T > 0$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq b\}$, onde $b > 0$ é uma constante positiva e $\|\cdot\|$ a norma euclidiana do \mathbb{R}^n . Suponha que f é uma função que satisfaz as duas primeiras condições do teorema de Carathéodory e que exista uma função $m(t)$ integrável tal que*

$$|f(t, x)| \leq m(t), m(t) \in L(0, T), \text{ para todo } (x, t) \in \Omega.$$

Seja $x(t)$ uma solução de (B.1) e suponha que $x(t)$ está definida em I , satisfazendo $|x(t)| \leq M$, M independente de I e $M < b$ para todo $t \in I$. Então, $x(t)$ pode ser prolongada à todo intervalo $[0, T]$

Demonstração: Ver Coddington-Levinson [5]. ■

Teorema B.1.3 (Aubin-Lions) *Sejam X , B e Y espaços de Banach com $X \xrightarrow{\text{comp}} B \xrightarrow{\text{cont}} Y$, X e Y reflexivos. Seja $1 < p_0, p_1 < \infty$, e W o espaço*

$$W = \{u \in L^{p_0}(0, T; B_0); u' \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$$

munido da norma $\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \|u\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)}$. Então, W é um espaço de Banach, e a imersão W em $L^{p_0}(0, T; B)$ é compacta.

Demonstração: Para prova ver Lions [12] ou Temam [22]. ■

Observação B.1.2 *Uma consequência do Teorema de Aubin-Lions é que se $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0, T; B_0)$ tal que $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^p(0, T; B_1)$ para algum $p \geq 1$. Então $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em W , isto é, existe uma subsequência de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge forte em $L^2(0, T; B)$.*

Teorema B.1.4 (Strauss) *Seja Ω um aberto com medida de Lebesgue finita, X e Y espaços de Banach. Seja (u_n) uma sequência de funções fortemente mensuráveis de Ω em X . Seja (F_n) uma sequência de funções de $\Omega \times X$ em Y tal que*

(i) $F_n(x, u_n(x))$ é uniformemente limitada de Y em $\Omega \times B$, para qualquer conjunto B limitado de X ;

(ii) $F_n(x, u_n(x))$ é fortemente mensurável e

$$\int_{\Omega} |u_n(x)|_X |F_n(x, u_n(x))|_Y dx \leq C < \infty;$$

(iii) $|F_n(x, u_n(x)) - v(x)|_Y \rightarrow 0$ quase sempre em Ω ;

Então, $v \in L^1(\Omega; Y)$ e $\int_{\Omega} |F_n(x, u_n(x)) - v(x)|_Y dx \rightarrow 0$.

Demonstração: Ver Strauss [24]. ■

A seguir enunciaremos o teorema de Strauss para funções de uma variável, pois este teorema que usaremos nesta dissertação.

Teorema B.1.5 (Strauss) *Seja Ω um aberto limitado do \mathbb{R}^n e (u_n) uma sequência de funções reais mensuráveis definidas em Ω . Vamos considerar as sequências de funções reais (F_n) e (G_n) tal que $F_n \circ u_n$ e $G_n \circ u_n$ mensuráveis sobre Ω para $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que:*

- (i) $F_n \circ u_n$ converge para v quase sempre em Ω ;
- (ii) $\int_{\Omega} |F_n(u_n(x))G_n(u_n(x))|dx < C$, onde C é uma constante independente de $n \in \mathbb{N}$;
- (iii) $G_n \rightarrow \infty$ quando $F_n \rightarrow \infty$.

Então,

- (iv) A função $v \in L^1(\Omega)$;
- (v) $F_n \circ u_n$ converge para v forte em $L^1(\Omega)$.

Demonstração: Ver L. A. Medeiros [15]. ■

Observação B.1.3 *A notação $F_n \circ u_n$ representa a função $(F_n \circ u_n)(x) = F_n(u_n(x))$, $\forall x \in \Omega$. A hipótese (iii) equivale a dizer que para cada $M > 0$ existe $N > 0$ independente de $n \in \mathbb{N}$, tal que se*

$$|F_n(s)| \geq M \text{ então } |G_n(s)| \geq N, \forall s \in \mathbb{R}.$$

Observação B.1.4 *Suponhamos que $G_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $G_n(s) = s$, $\forall s \in \mathbb{R}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$. As hipóteses do Teorema B.1.5 modificam e são:*

- (i) $F_n \circ u_n$ converge para v quase sempre em Ω ;
- (ii) $\int_{\Omega} |F_n(u_n(x))u_n(x)|dx < C$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- (iii) $s \rightarrow \infty$ quando $F_n(s) \rightarrow \infty$.

Então, segue (iv) e (v) do teorema B.1.5.

Corolário B.1.6 (Lema de Lions) *Seja (u_n) uma sequência de funções mensuráveis, limitada em $L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$ e converge para u quase sempre em Ω . Então,*

- (i) $u_n \rightarrow u$ (forte) em $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < \infty$;
- (ii) $u_n \rightharpoonup u$ (fraco) em $L^q(\Omega)$.

Demonstração: Ver L. A. Medeiros [15] ou Lions [12]. ■

Lema B.1.1 (Sequência de Strauss) *Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real contínua, com $sF(s) \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Então, existe uma sequência (F_n) satisfazendo as condições:*

- (i) $sF_n(s) \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$ e $\forall n$;
- (ii) F_n é lipschitziana para cada n ;
- (iii) F_n converge uniformemente em limitados de \mathbb{R} .

Demonstração: Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina

$$F_k(s) = \begin{cases} A_1 s, & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{n}; \\ k \left(G\left(s + \frac{1}{n}\right) - G(s) \right), & \text{se } \frac{1}{n} \leq s \leq n; \\ A_2, & \text{se } s \geq k; \\ A_3 s, & \text{se } -\frac{1}{n} \leq s \leq 0; \\ -n \left(G\left(s + \frac{1}{n}\right) - G(s) \right), & \text{se } -n \leq s \leq -\frac{1}{n}; \\ A_4, & \text{se } s \leq -n. \end{cases}$$

onde $G(s) = \int_0^s F(\xi) d\xi$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, A_1 , A_2 , A_3 e A_4 são escolhidas de forma a tornar F_n contínua. Então, considere

$$\begin{aligned} A_1 &= n^2 \left(G\left(\frac{2}{n}\right) - G\left(\frac{1}{n}\right) \right); \\ A_2 &= n^2 \left(G\left(n + \frac{1}{n}\right) - G(n) \right); \\ A_3 &= -n^2 \left(G\left(-\frac{2}{n}\right) - G\left(-\frac{1}{n}\right) \right); \\ A_4 &= -n \left(G\left(n - \frac{1}{n}\right) - G(n) \right). \end{aligned}$$

A demonstração será feita em etapas.

Etapa 1

Vamos mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $sF_n(s) \geq 0$

- (i) se $0 \leq s \leq \frac{1}{n}$, temos $F_n(s) = \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{1}{n}} F(\xi) d\xi \geq 0$
- (ii) $\frac{1}{n} \leq s \leq n$, segue como em (i)
- (iii) se $s \geq n$, segue analogamente como em (i)
- (iv) se $-\frac{1}{n} \leq s \leq 0$, temos $F_n(s) = -n^2 \left(-\int_{-\frac{2}{n}}^0 F(\xi) d\xi + \int_{-\frac{1}{n}}^0 F(\xi) d\xi \right) =$
 $= -n^2 \int_{-\frac{2}{n}}^{-\frac{1}{n}} -F(\xi) d\xi \leq 0$

Observação B.1.5 A prova dos itens (v), (vi), (vii) segue como em (iv), provando a Etapa 1

Etapa2

Provaremos que para cada n , F_n é uma função Lipschitziana. Tomando $a_1 = -n$, $a_2 = -\frac{1}{n}$, $a_3 = 0$, $a_4 = -\frac{1}{n}$ e $a_5 = n$ e consideremos os intervalos $I_1 = (-\infty, a_1]$, $I_2 = [a_1, a_2]$, $I_3 = [a_2, a_3]$, $I_4 = [a_3, a_4]$, $I_5 = [a_4, a_5]$ e $I_6 = [a_5, \infty)$. Observe que (F_n) são funções diferenciáveis em cada I_j , $j = 1, \dots, 6$ e pelo teorema de Valor Médio,

$$|F_n(s) - F_n(t)| = F'_n(\xi)|t - s|, \text{ com } \xi \in [t, s].$$

Observe que

$$(i) \text{ se } s \in I_1, \text{ temos } |F_n(s) - F_m(t)| = 0, \forall s, t \in I_1.$$

$$(ii) \text{ se } s \in I_2, \text{ temos } F'_k(s) = -n \left(-F(s) + F\left(s - \frac{1}{n}\right) \right) \leq nC, \forall s, t \in I_2,$$

onde $C = \max |F(s)| < \infty$. Seguindo este raciocínio para I_j , $j = 3, 4, 5, 6$, concluímos que

$$|F_n(s) - F_m(t)| \leq M|s - t|, \forall s, t \in \mathbb{R},$$

onde M é as várias constantes que aparecem. Portanto, F_k é Lipschitziana.

Etapa3

Mostraremos que (F_n) converge uniformemente para F em limitados da reta. Seja I um intervalo limitado e $b \in \mathbb{R}$ tal que $I \subset [-b, b]$. A princípio, provaremos que (F_n) converge uniformemente para F no intervalo $[0, b]$. De forma análoga, prova-se que (F_n) converge uniformemente para F em $[-b, 0]$.

Afirmção: Defina $\varphi_n(s) = n \left[G\left(s + \frac{1}{k}\right) - G(s) \right] = n \int_s^{s+\frac{1}{n}} F(\xi) d\xi$. Então, $\varphi_n(s)$ converge uniformemente.

Notemos que F é contínua no compacto $[0, b]$, logo F é uniformemente contínua. Dado $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que se $|t - s| < \frac{1}{k}$ então

$$|F(s) - F(t)| < \varepsilon.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in [t, s]$ tal que

$$\int_t^{t+\frac{1}{n}} F(\xi) d\xi = \left(t + \frac{1}{n} - t \right) F(c)$$

implicando que

$$F(c) = n \int_t^{t+\frac{1}{n}} F(\xi) d\xi.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |\varphi_n(s) - \varphi_n(t)| &= |F(s) - F(t)| = \left| n \int_t^{t+\frac{1}{n}} F(s) d\xi - n \int_t^{t+\frac{1}{n}} F(s) d\xi \right| \leq \\ &\leq \int_t^{t+\frac{1}{n}} |F(s) - F(t)| < \frac{1}{n} \varepsilon < \varepsilon, \end{aligned}$$

mostrando a afirmação.

Por fim, provaremos que $F_k \rightarrow F$ uniformemente em $[0, b]$, para tanto, usaremos a afirmação acima. De fato, dado $\varepsilon > 0$, seja $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $k_1 > b$. Como F é contínua, existe $\delta > 0$ tal que $|F(s)| < \frac{\varepsilon}{4}$, for all $s \in [0, \delta]$. Seja agora $k_2 > k_1$ e $\frac{1}{k_2} < \delta$. Pela afirmação, existe $k_3 \in \mathbb{N}$ com $k_3 > k_2$ tal que

$$|\varphi_k(s) - F(s)| < \frac{\varepsilon}{4}, \forall s \in [0, b], \forall k > k_3.$$

Observemos que

$$\varphi_k\left(\frac{1}{k}\right) = F_k\left(\frac{1}{k}\right) \text{ e } \varphi_k(s) = F_k(s), \text{ se } \frac{1}{k} \leq s \leq k.$$

Assim, para $k > k_3$, temos

- (i) $\frac{1}{k} \leq s \leq k \Rightarrow |F_k(s) - F(s)| = |\varphi_k(s) - F(s)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$
- (ii) $0 \leq s \leq \frac{1}{k} < \delta \Rightarrow |F_k(s) - F(s)| \leq |F_k(s)| + |F(s)| \leq |F(\frac{1}{k})| + \frac{\varepsilon}{4} = |\varphi_k(\frac{1}{k})| + \frac{\varepsilon}{4} + |F_k(s)| + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$, (F_k é crescente em $(0, \frac{1}{k})$),

o que mostra que (F_k) converge uniformemente para F em limitados da reta. ■

Definição B.1.1 *Seja I um intervalo. Dizemos que uma função u é absolutamente contínua quando $u \in W^{1,1}(I)$.*

Lema B.1.2 (Desigualdade de Gronwall) *Seja $z(t)$ uma função real, absolutamente contínua em $[0, a)$ tal que para todo $t \in [0, a[$ tem-se*

$$z(t) \leq C + \int_0^t z(s) ds, \tag{B.6}$$

onde C é uma constante não negativa. Então,

$$z(t) \leq Ce^t, \forall t \in [0, a[.$$

Conseqüentemente, $z(t)$ é limitada.

Demonstração: Considere

$$w(s) = \int_0^t z(\xi) d\xi.$$

Daí, obtemos que $w'(s) = z(s)$. Observe que por (B.6) temos

$$w'(s) \leq C + w(s).$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade acima por e^{-s} , obtemos

$$e^{-s}w'(s) \leq e^{-s}C + w(s)e^{-s},$$

ou ainda

$$\frac{d}{dt} [e^{-s}w(s)] \leq Ce^{-s}.$$

Integrando de 0 a t, obtém-se

$$e^{-t}w(t) \leq Ce^{-s} \Big|_0^t.$$

Assim,

$$w(t) \leq Ce^t - C. \tag{B.7}$$

Portanto, de (B.6) e (B.7), resulta que

$$z(t) \leq Ce^t.$$

■

B.2 Resultados Auxiliares

No que segue, enunciaremos sem demonstra-los resultados importantes que foram utilizados neste trabalho. Consideramos Ω como um subconjunto aberto limitado bem regular do \mathbb{R}^n .

Teorema B.2.1 *Suponha que X seja um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma sequência limitada em X . Então, existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) que converge na topologia fraca.*

Demonstração: Ver Brezis [3].

■

Teorema B.2.2 *Seja X um espaço de Banach separável e seja (f_n) uma sequência limitada em X' . Então, existe uma subsequência (f_{n_k}) de (f_n) que converge na topologia fraca*.*

Demonstração: Ver Brezis [3]. ■

Lema B.2.1 (Desigualdade de Young) *Sejam $p, q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \forall a \geq 0 \text{ e } \forall b \geq 0.$$

Demonstração: Ver Brezis [3]. ■

Lema B.2.2 (Imersões de Sobolev) *Seja Ω um aberto regular de \mathbb{R}^n , $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então, para qualquer $j \in \mathbb{N}$, as imersões abaixo são contínuas.*

i) Se $m < \frac{n}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $q \in [1, \frac{np}{n-mp})$;

ii) Se $m = \frac{n}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $q \in [1, \infty)$;

iii) Se $m > \frac{n}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\bar{\Omega})$,

onde $C^j(\bar{\Omega})$ é o conjunto das funções contínuas limitadas.

Demonstração: Ver M. Milla Miranda e L. A. Medeiros [13]. ■

Teorema B.2.3 (Rellich-Kondrachov) *Suponha que Ω é um aberto limitado de classe C^1 , $j \in \mathbb{N}$. Então temos que as imersões são compactas:*

i) Se $m < \frac{n}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $q \in [1, \frac{np}{n-mp})$;

ii) Se $m = \frac{n}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $q \in [1, \infty)$.

Demonstração: Ver M. Milla Miranda e L. A. Medeiros [13]. ■

Proposição B.2.1 *Suponha que Ω é um aberto limitado de classe C^1 , $j \in \mathbb{N}$. Então temos as seguintes imersões:*

i) Se Ω é limitado e $p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{\text{cont}} L^q(\Omega)$, para, $1 \leq \frac{np}{n-mp}$;

ii) Se Ω é limitado e $p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{\text{cont}} L^q(\Omega)$, para, $1 \leq \frac{np}{n-p} = p^$*

Demonstração: Ver M. Milla Miranda e L. A. Medeiros [13]. ■

Observação B.2.1 *O número p^* é conhecido como expoente crítico de Sobolev.*

Teorema B.2.4 (Fórmulas de Green) *i) Se $\rho \in H^2(\Omega)$, então*

$$\int_{\Omega} \nabla \rho \nabla u dx = - \int_{\Omega} \Delta \rho dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial \rho}{\partial \nu} u dx, \forall u \in H^1(\Omega).$$

ii) Se $\rho \in H^1(\Omega)$, então

$$(\Delta \rho, u)_{L^2(\Omega)} + ((\rho, u))_V = \langle \gamma_1 \rho, \gamma_0 u \rangle_{H^{-\frac{1}{2}} \times H^{-\frac{1}{2}}}, \forall u \in H^1(\Omega).$$

Demonstração: Ver M. Milla Miranda e L. A. Medeiros [13]. ■

Teorema B.2.5 (Representação de Riesz) *Sejam $1 < p < \infty$ e $\varphi \in (L^p(\Omega))'$. Então, existe um único $u \in L^p(\Omega)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_{\Omega} u f dx, \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

Além disso, se verifica

$$\|u\|_{L^p} = \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver Brezis [3]. ■

Teorema B.2.6 (Agmon-Douglis-Nirenberg) *Suponha que Ω é um aberto de classe C^2 com fronteira Γ limitada. Seja $1 < p < \infty$. Então, para todo $f \in L^p(\Omega)$, existe uma única solução do problema*

$$-\Delta u + u = f \text{ em } \Omega$$

Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e se $f \in W^{m,p}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, então

$$u \in W^{m+2,p}(\Omega) \text{ e } \|u\|_{W^{m+2,p}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver Brezis [3]. ■

Teorema B.2.7 (Lax-Milgran) *Seja $a(u, v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então, para todo $f \in H'$ (espaço dual de H) existe único $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Demonstração: Ver Brezis [3]. ■

Teorema B.2.8 (Gauss-Green) *Se $u \in C^1(\Omega)$, então*

$$\int_{\Omega} \text{div} u_{x_i} dx = \int_{\partial\Omega} \gamma u_{x_i} d\gamma; \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

Demonstração: Ver M.Milla Miranda e L.A. Medeiros [13]. ■

Lema B.2.3 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $1 \leq p \leq +\infty$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver Brezis [3]. ■

Lema B.2.4 (Desigualdade de Poincaré) *Suponhamos que Ω é um aberto e limitado em alguma direção x_i . Então, existe uma constante $C = c(\Omega)$ tal que:*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), (1 \leq p \leq +\infty)$$

Em particular, a expressão $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma equivalente em $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Demonstração: Ver Brezis [3] ou M. Milla Miranda e L. A. Medeiros [13]. ■

Proposição B.2.2 (Regra da Cadeia) *Seja $g \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $g(0) = 0$ e $|g'(s)| \leq M$, $\forall s \in \mathbb{R}$ e para alguma constante M . Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então,*

$$g \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ e } \frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ u) = (g' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Demonstração: Ver Brezis [3]. ■

Proposição B.2.3 *Seja (f_n) uma sequência em X' . Então,*

- i) Se $f_n \xrightarrow{*} f \Leftrightarrow$ se, e somente se, $\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall x \in X$.*
- ii) Se $f_n \xrightarrow{*} f$, então $\|f_n\|$ é limitada e $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.*

Demonstração: Ver Brezis [3]. ■

Teorema B.2.9 *Seja (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tal que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)}^p \rightarrow 0$. Então, existe uma subsequência (f_{n_k}) e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que*

- (a) $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$*
- (b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x), \forall k \in \mathbb{N}$, quase sempre em Ω*

Demonstração: Ver Brezis [3]. ■

Teorema B.2.10 (Teorema da Convergência Dominada) *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ que satisfaz as condições:*

- (i) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ quase sempre em Ω ;*
- (ii) Existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ quase sempre em Ω . Então,*

$$f \in L^1(\Omega) \text{ e } \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Demonstração: Ver Brezis [3]. ■

Lema B.2.5 (Lema de Fatou) *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ que satisfaz as condições*

(i) para todo n , $f_n(x) \geq 0$ quase sempre em Ω ;

(ii) $\sup_n \int_{\Omega} f_n dx < \infty$.

Para quase todo $x \in \Omega$, considere $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \leq \infty$. Então,

$$f \in L^1(\Omega) \text{ e } \int_{\Omega} f dx \leq \liminf_n \int_{\Omega} f_n dx.$$

Demonstração: Ver Brezis [3]. ■

Proposição B.2.4 O espaço $L^p(0, T; X)$ é denso em $\mathcal{D}'(0, T; X)$.

Demonstração: Ver Brezis-Cazenave [4] ■

Observação B.2.2 $C(K)$ denota o espaço das funções contínuas sobre espaços métricos compactos K com valores em \mathbb{R} e $\mathcal{L}(X, Y)$ o conjunto das aplicações lineares de X em Y .

Teorema B.2.11 (Ascoli-Arzelá) Seja K um espaço métrico compacto e \mathcal{H} um subconjunto limitado de $C(K)$. Suponha que \mathcal{H} é uniformemente contínuo, isto é,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \forall f \in \mathcal{H}$$

Então, o fecho de \mathcal{H} é compacto.

Demonstração: Ver Brezis [3] ■

Teorema B.2.12 (Hille) Sejam X, Y espaços de Banach, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $f \in L^1(I, X)$, onde I é um intervalo da reta. Então, $Af \in L^1(I, Y)$ e

$$A \left(\int_I f(s) ds \right) = \int_I (Af)(s) ds.$$

Demonstração: Ver Brezis-Cazenave [4] ■

B.3 Existência de solução para o Problema Aproximado (2.12)

Para cada $k, m \in \mathbb{N}$, denotamos por

$$V_m^k = [w_1^k, \dots, w_m^k]$$

o espaço gerado pelos primeiros m vetores da base especial $\{w_\nu^k\}$ de $V \cap H^2(\Omega)$ definida na seção 1.7.

Definamos

$$u_{km}(t) \in V_m^k \text{ se, e somente se, } u_{km}(t) = \sum_{j=1}^m g_{jkm}(t)w_j^k.$$

$$\begin{cases} (u_{km}''(t), w) + \mu(t)((u_{km}(t), w)) + (h(u_{km}(t)), w) + (\beta u_{km}'(t), v)_{L^2(\Gamma_1)} = (f(t), w), \forall w \in V_m^k \\ u_{km}(x, 0) = u_{0k} \\ u_{km}'(x, 0) = u_{1k} \end{cases}$$

No que segue, obteremos um problema aproximado equivalente ao problema aproximado acima para que o mesmo esteja nas condições do Teorema de Carathéodory.

Consideremos no problema aproximado $w = w_j, j = 1, \dots, m$. Então, obtemos que

$$(u_{km}''(t), w_j) + \mu(t)((u_{km}(t), w_j)) + (h(u_{km}(t)), w_j) + (\beta u_{km}'(t), v)_{L^2(\Gamma_1)} = (f, w_j), j = 1, \dots, m.$$

Substituindo $u_{km}(t)$ na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^m g_{jkm}''(t)w_j^k, w_i^k \right) + \mu(t) \left(\left(\sum_{j=1}^m g_{jkm}(t)w_j^k, w_i^k \right) \right) + \left(h \left(\sum_{j=1}^m g_{jkm}'(t)w_j^k, w_i^k \right) \right) \\ & + \int_{\Gamma_1} \beta(x) \sum_{j=1}^m g_{jkm}'(t)w_j^k w_i^k = (f(t), w_i^k) \end{aligned}$$

Logo, o sistema de equação acima pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} (w_1^k, w_1^k) & (w_2^k, w_1^k) & \dots & (w_m^k, w_1^k) \\ (w_1^k, w_2^k) & (w_2^k, w_2^k) & \dots & (w_m^k, w_2^k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1^k, w_m^k) & (w_2^k, w_m^k) & \dots & (w_m^k, w_m^k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{1km}''(t) \\ g_{2km}''(t) \\ \vdots \\ g_{mkm}''(t) \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} -\mu(t)((w_1^k, w_1^k)) & -\mu(t)((w_2^k, w_1^k)) & \dots & -\mu(t)((w_m^k, w_1^k)) \\ -\mu(t)((w_1^k, w_2^k)) & -\mu(t)((w_2^k, w_2^k)) & \dots & -\mu(t)((w_m^k, w_2^k)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mu(t)((w_1^k, w_m^k)) & -\mu(t)((w_2^k, w_m^k)) & \dots & -\mu(t)((w_m^k, w_m^k)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{1km}(t) \\ g_{2km}(t) \\ \vdots \\ g_{mkm}(t) \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} (h(\sum_{j=1}^m g_{jkm}'(t)w_j^k, w_1^k)) \\ (h(\sum_{j=1}^m g_{jkm}'(t)w_j^k, w_2^k)) \\ \vdots \\ (h(\sum_{j=1}^m g_{jkm}'(t)w_j^k, w_m^k)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_{\Gamma} \beta(x) \sum_{j=1}^m g_{jkm}'(t)w_j^k w_1^k d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \beta(x) \sum_{j=1}^m g_{jkm}'(t)w_j^k w_2^k d\Gamma \\ \vdots \\ \int_{\Gamma} \beta(x) \sum_{j=1}^m g_{jkm}'(t)w_j^k w_m^k d\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f(t), w_1^k) \\ (f(t), w_2^k) \\ \vdots \\ (f(t), w_m^k) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vamos denotar cada matriz acima da seguinte forma:

$$C = \begin{pmatrix} (w_1^k, w_k^1) & (w_2^k, w_k^1) & \dots & (w_m^k, w_k^1) \\ (w_1^k, w_k^2) & (w_2^k, w_k^2) & \dots & (w_m^k, w_k^2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1^k, w_k^m) & (w_2^k, w_k^m) & \dots & (w_m^k, w_k^m) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -\mu(t)((w_1^k, w_1^k)) & -\mu(t)((w_2^k, w_1^k)) & \dots & -\mu(t)((w_m^k, w_1^k)) \\ -\mu(t)((w_1^k, w_2^k)) & -\mu(t)((w_2^k, w_2^k)) & \dots & -\mu(t)((w_m^k, w_2^k)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mu(t)((w_1^k, w_m^k)) & -\mu(t)((w_2^k, w_m^k)) & \dots & -\mu(t)((w_m^k, w_m^k)) \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} (h(\sum_{j=1}^m g'_{jkm}(t)w_j^k, w_1^k)) \\ (h(\sum_{j=1}^m g'_{jkm}(t)w_j^k, w_2^k)) \\ \vdots \\ (h(\sum_{j=1}^m g'_{jkm}(t)w_j^k, w_m^k)) \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \int_{\Gamma} \beta(x) \sum_{j=1}^m g'_{jkm}(t)w_j^k w_1^k d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \beta(x) \sum_{j=1}^m g'_{jkm}(t)w_j^k w_2^k d\Gamma \\ \vdots \\ \int_{\Gamma} \beta(x) \sum_{j=1}^m g'_{jkm}(t)w_j^k w_m^k d\Gamma \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} (f(t), w_1^k) \\ (f(t), w_2^k) \\ \vdots \\ (f(t), w_m^k) \end{pmatrix}, \quad z(t) = \begin{pmatrix} g_{1km}(t) \\ g_{2km}(t) \\ \vdots \\ g_{mkm}(t) \end{pmatrix}, \quad B = (w_1^k \quad w_2^k \quad \dots \quad w_m^k)$$

Sabemos que as condições iniciais são dadas por

$$u_{km}(0) = \sum_{j=1}^m g_{jkm}(0)w_j^k = u_{0k} = \sum_{j=1}^m \alpha_{jkm}w_j^k,$$

de onde podemos concluir que $g_{jkm}(0) = \alpha_{jkm}$, para $j = 1, 2, \dots, m$. De modo análogo, concluimos que $g'_{jkm}(0) = \beta_{jkm}$, para $j = 1, 2, \dots, m$. Assim, tomando

$$z(0) = [\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km}]$$

e

$$z'(0) = [\beta_{k1}, \dots, \beta_{km}],$$

obtemos o sistema de equações ordinárias abaixo

$$\begin{cases} Cz''(t) + Az(t) + Gz'(t) + H(z(t)) = F \\ z(0) = [\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km}], z'(0) = [\beta_{k1}, \dots, \beta_{km}]. \end{cases}$$

Inicialmente, provaremos que a matriz C é invertível.

De fato, sendo C uma matriz real e simétrica então C é auto-adjunta e, portanto, diagonalizável, ou seja, existe uma matriz M inversível tal que

$$D = M^{-1}CM,$$

é uma matriz diagonal.

Logo, para mostrarmos que C é invertível é suficiente provar que D é inversível ou, equivalentemente, que zero não é autovalor de D .

Suponhamos, por absurdo, que zero é um autovalor de D . Então, existe um vetor

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

não nulo do \mathbb{R}^n tal que $Dv=0$. Sendo M inversível e, portanto, $M^{-1}\psi = 0 \Leftrightarrow \psi = 0$, resulta que o vetor CMv é igual a zero. Denotando

$$Mv = \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$$

temos:

$$0 = C\varphi = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m \varphi_j(w_j^k, w_1^k) \\ \sum_{j=1}^m \varphi_j(w_j^k, w_2^k) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \varphi_j(w_j^k, w_m^k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\sum_{j=1}^m \varphi_j w_j^k \cdot w_1^k \right) \\ \left(\sum_{j=1}^m \varphi_j w_j^k \cdot w_2^k \right) \\ \vdots \\ \left(\sum_{j=1}^m \varphi_j w_j^k \cdot w_m^k \right) \end{pmatrix}$$

Logo, $\left(\sum_{j=1}^m \varphi_j w_j^k \cdot w_i^k \right) = 0$, para todo $j = 1, \dots, m$, donde resulta que o vetor $\alpha =$

$\sum_{j=1}^m \varphi_j w_j^k \cdot w_i^k$ é ortogonal à todo vetor de V_m^k . Assim, $(\alpha, \alpha) = 0$, implicando que $\alpha = 0$.

Portanto, $\sum_{j=1}^m \varphi_j w_j^k = 0$. Mas sendo $\{w_j^k\}$ uma base, então $\varphi_j = 0, \forall j = 1, \dots, m$, ou seja, $\varphi = 0$. Desde que M é inversível, a transformação linear definida por M é injetora, o que resulta $v = 0$, contrariando o fato de v ser autovalor de D . Concluimos então que a matriz C é de fato invertível.

Assim, podemos escrever o sistema de equações diferenciais ordinárias da seguinte forma:

$$\begin{cases} z''(t) + C^{-1}Az(t) + C^{-1}Gz'(t) + C^{-1}H(z(t)) = C^{-1}F \\ z(0) = [\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km}], \quad z'(0) = [\beta_{k1}, \dots, \beta_{km}] \end{cases}$$

Definamos

$$Y_1(t) = z(t), \quad Y_2(t) = z'(t) \text{ e}$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix}$$

Então

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} Y_1'(t) \\ Y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ -C^{-1}AY_1(t) - C^{-1}GY_2(t) - C^{-1}H(z(t)) + C^{-1}F \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ C^{-1}F - C^{-1}G(Y_2(t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & -C^{-1}g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix}$$

Assim, temos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ C^{-1}F - C^{-1}GY_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & 0 \end{pmatrix} y(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

onde

$$Y_0 = \begin{pmatrix} z(0) \\ z'(0) \end{pmatrix}$$

Provaremos, a seguir, que o problema acima possui uma solução local utilizando Teorema de Carathéodory. Consideremos a aplicação

$$h : [0, T] \times \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$$

definida por

$$h(t, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ C^{-1}G(Y_2(t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & -C^{-1}G \end{pmatrix} y(t),$$

onde $x = (\xi_1, \dots, \xi_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_{2m})$.

Inicialmente, iremos verificar que a aplicação h está nas condições do teorema de Carathéodory. Com efeito,

- (i) Para cada $y \in \mathbb{R}^{2m}$ fixo, tem-se que $h(t, y)$ é mensurável, pois h não depende de t e $f \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$
- (ii) Para cada t fixo, tem-se que h é contínua com função de y . De fato, $C^{-1}F$ é constante e $C^{-1}H(z(t))$ é contínua, pela continuidade da função h . Note que a aplicação

$$N : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$$

$$y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & -C^{-1}G \end{pmatrix}$$

é linear e, portanto, contínua.

(iii) Seja $K \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{2m}$ um conjunto compacto, então

$$\|h(t, y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq \|C^{-1}H(z(t))\|_{\mathbb{R}^{2m}} + \|Ny\|_{\mathbb{R}^{2m}}.$$

Como H e N são contínuas em \mathbb{R}^{2m} , temos que são contínuas em qualquer compacto K de \mathbb{R}^{2m} . Assim, existe um $M_K > 0$ tal que

$$\|C^{-1}H(z(t))\|_{\mathbb{R}^{2m}}, \|Ny\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq M_K,$$

para todo $(t, y) \in K$. Portanto, podemos concluir que existe uma constante positiva M_K satisfazendo

$$\|h(t, y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq 2M_K.$$

Assim, por (i), (ii), (iii) as condições do Teorema de Carathéodory estão satisfeitas e, como consequência, existe uma solução $Y(t)$ do problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = h(t, y) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

em algum intervalo $[0, t_{km})$, com $t_{km} > 0$.

Bibliografia

- [1] ARARUNA, F.D and MACIEL, A.B., Existence and boundary stabilization of the semilinear wave equation, *Nonlinear Analysis* 67(2007),1288-1305.
- [2] A. KUFNER, *Functions Spaces*, Czechoslovakia, Noordhoff, 1977.
- [3] BREZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, New York, Springer, 2011.
- [4] BREZIS, H and CAZENAVE, T., *Nonlinear Evolution Equations*, IM-UFRJ, Rio, 1994.
- [5] CODDINGTON, E. and LEVINSON, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGrall-Hill, New York, (1955).
- [6] DAUTRAY ROBERT E LIONS, *Functional and Variational methods*, Springer, Berlin, 2000.
- [7] E. HEBEY, *Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalities*, New York, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1999.
- [8] KINDERLEHRER, D. and STAMPACCHIA, G., *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*, Academic Press, New York, (1980)
- [9] KORMONIK, V and ZUAZUA, E., *A direct method for the boundary stabilization of the wave equation*, *J. Math. Pure Appl.* 69(1990),33-54.
- [10] KORMONIK, V., *Exact Controllability and Stabilization, The multiplier Method*, Jonh Willey and Sons and Masson, 1994.
- [11] LIONS, J.L., *Quelques Methods de Resolutions des Problèmes aux Limites Non-Linaires*, Dunod, Paris.1969.

- [12] LIONS, J.L., *Équations aux dérivées partielles interpolation, Volume I* Euvres choisies de Jacques-Louis Lions, SMAI, EDP Sciences, Paris, 2003.
- [13] L.A. MEDEIROS and M. MILLA MIRANDA, *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos Não Homogêneos)*, Editora IM-UFRJ, 5^a edição, 2006.
- [14] LIONS, J.L. and MAGENES., *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications*, Vol.1, Dunod, Paris,1968.
- [15] MEDEIROS, L. A; *Tópicos em Equações Diferenciais Parciais*, Parte I, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (2006).
- [16] M. MILLA MIRANDA and MEDEIROS,L.A., *On a boundary value problem for wave equations: Existence-uniqueness-asymptotic behavior*, Rev. de Mat. Appl.,Univ. de Chile 17(1996), 47-73.
- [17] MATOS, M. P. - Integral de Bochner e Espaços $L^p(0, T, X)$, Notas de Aulas do Curso de Verão, UFPB, João Pessoa, 1998.
- [18] M. MILLA MIRANDA, *Traço para o dual dos espaços de Sobolev*, Bol. Soc. Paran. Matemática (2^a série) 11(2) (1990), p.131-157.
- [19] M.MILLA MIRANDA., *Análise Espectral em Espaços de Hilbert, Textos de Métodos Matemáticos*, vol. 28, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1994).
- [20] M. MILLA MIRANDA and L.A. MEDEIROS; *Hidden regularity for semilinear hyperbolic partial differential equations*, Ann. Fac, Sci. Toulouse 9 (1)(1988), 103-120.
- [21] NEYDE F. MARTINS RIBEIRO; *Dual dos espaços $L^p(0, T, X)$ de funções vetoriais*, Lisboa, 1975.
- [22] R. TEMAM; *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*, Stud. Math. Appl., vol. 2, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1977.
- [23] R.E.EDWARDS., *Functional analysis, Theory and Application*, Holt, Rinehart and Winston, 1965.
- [24] STRAUSS, W.A., *On weak solutions of semilinear hyperbolic equations*, An. Acad. Brasil. Ciênc. 42(1970),645-651.
- [25] S. BOCHNER ANN A.E.TAYLOR, *Annals of Mathematics-2*, Vol. 39,1938.