Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma introdução à Teoria de semigrupos analíticos de operadores lineares não limitados, sendo desenvolvidas algumas aplicações desta Teoria na análise da existência de solução para as equações Diferenciais Ordinárias em espaços de Banach da forma

$$u'(t) - Au(t) = f(t, u(t)) + K(u)(t),$$

onde f e K são funções dadas e A é um operador linear não limitado.

Abstract

In this work we present an introduction to the Theory of analytical semigroups of unbounded linear operators, with some applications of this theory to the existence of solutions for Ordinary Differential equations in Banach spaces of form:

$$u'(t) - Au(t) = f(t, u(t)) + K(u)(t),$$

where f e K are given functions and A is an unbounded operator.

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Teconologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência de Solução para algumas Equações de evolução via Teoria de semigrupo analítico

por

Fernanda Clara de França Silva †

sob orientação do

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

Existência de Solução para algumas Equações de evolução via Teoria de semigrupo analítico

por

Fernanda Clara de França Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

____

Prof. Dr. Aparecido Jesuíno de Souza

____

Prof. Dr. Silvano Dias Bezerra de Menezes

____

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Dezembro/2007

Agradecimentos

Ao Amor, concedido a mim por DEUS, inspirando-me a todo instante.

Às pessoas que amo, aos sonhos que sonhei e à pessoa na qual me transformei através do amor quando tive coragem.

Ao companheirismo e apoio por parte da minha família, que não mediu esforços para que eu concluísse esta fase importante da minha vida. De modo especial a minha mãe e, *in memorian*, a minha irmã Ivânia Cléa, exemplos de garra.

À coragem, à inteligência e aos anseios de todos àqueles que confiaram em mim e depositaram esperanças em meu trabalho. De modo especial ao meu orientador Prof. Claudianor Oliveira Alves, pelas conversas bastante produtivas, pelas direções apontadas, pela paciência e dedicação, e pelo exemplo de trabalho que ele significa. Muito Obrigada!

Obrigada também, aos professores do Departamento de Matemática da UFCG, com os quais convivi. Especialmente aos professores Marco Aurélio ("dono das sacadas geniais" e uma das minhas grandes admirações), Daniel Cordeiro, Jaime e Daniel Pellegrino, dos quais fui aluna desde a época de graduação até o mestrado e à professora Rosana Marquez, minha querida orientadora de Iniciação Ciêntifica. Também à minha querida amiga Marisa. Obrigada a todos pelos conhecimentos transmitidos e momentos compartilhados.

Aos professores Aparecido e Silvano por se disporem a participar da banca avaliadora deste trabalho. Bem como, aos professores Eduardo Hernández, Marta Cilene Gadotti e Marcelo Moreira Cavalcanti, pois, mesmo distantes, auxiliaram-me prontamente com dicas e materiais, o que foi sigificativo para o trabalho.

Não poderia e nem deveria esquecer os amigos do Bacharelado em Matemática e os do Mestrado, com os quais compartilhei muitas alegrias e horas de estudo.

Finalmente, agradeço a CAPES pelo auxílio financeiro, como também, ao projeto Casadinho/CNPq e ao Instituto do Milênio em Matemática IM/AGIMB.

Sinceramente, Obrigada!

Dedicatória

A Dona Iraci.

A tentativa mais importante

(O homem sem qualidades\Robert Musil. Tradução de: Der Mann ohne Eigenschaften ISBN 85-209-1862-X; por Lya Lufty e Carlos Abbenseth)

Pensando naquele tempo, Urlich poderia hoje sacudir a cabeça, como se lhe falassem da transmigração de sua alma; sua terceira tentativa era diferente. Entende-se que um engenheiro se deixe absorver por sua especialidade, em vez de entregar-se à liberdade e amplidão do mundo dos pensamentos, embora suas máquinas sejam entregues até nos confins do mundo; pois precisa tão pouco ser capaz de transportar para sua alma particular o que há de audacioso e novo na alma de sua técnica, quanto uma máquina é capaz de aplicar a si mesmo as equações infinitesimais que serviram para sua criação. Mas da matemática não se pode dizer isso; nela reside a nova lógica, o próprio espírito, nela estão as fontes do tempo e da origem de uma extraordinária transformação.

Se for a concretização de sonhos ancestrais voar e viajar com os peixes, atravessar montanhas gigantescas, enviar mensagens com velocidades de deuses, ver o invisível a distância e ouvi-lo falar, ouvir falarem os mortos, deixar-se mergulhar em miraculosos sonhos terapêuticos, poder ver como pareceremos vinte anos após nossa morte, saber em noites estreladas que há milhares de coisas acima e debaixo dessa terra, das quais ninguém outrora tinha conhecimento; se luz, calor, força, prazer, conforto forem sonhos ancestrais do homem - então a pesquisa atual não é apenas ciência mas magia, uma cerimônia de altíssima força emocional e cerebral diante da qual Deus desdobra uma a uma as pregas do seu manto, uma religião, cujo dogma é repassado e impelido pela dura, corajosa e flexível lógica matemática, fria e afiada como um bisturi.

Na verdade, não se pode negar que esses sonhos ancestrais, na opinião dos não-matemáticos, se concretizaram de repente de um modo bem diverso do que se imaginara. A corneta do postilhão de Münchhausen era mais bela que a voz em conserva, industrial; a bota de sete léguas, mais bela que um caminhão; o reino de Larino, mais belo que um túnel de ferrovia; a mandrágora, mais bela que um fototelegrama; comer o coração da própria mãe para compreender os pássaros era mais belo que estudar psicologoia animal sobre a expressividade dos pios. Ganhou-se em realidade, perdeu-se em sonho. Não nos deitamos mais sob a árvore, espiando o céu entre o dedo grande do pé e o dedo médio, mas trabalhamos; também não devemos pasar fome nem sonhar demais se quisermos ser eficientes mas comer bifes e fazer exercício. É exatamente como se a velha humanidade ineficiente tivesse adormecido sobre um formigueiro; quando despertou a humanidade nova, as formigas tinham entrado no seu sangue, e desde então ela precisa fazer movimentos incessantes, sem conseguir se livrar desse chatíssimo ímpeto de fanatismo pelo trabalho. Realmente não é preciso falar muito a respeito; a maioria das pessoas sabe perfeitamente, hoje, que a matemática entrou em todos os campos de nossa vida, como um demônio. Talvez nem todas essas pessoas acreditem na história do Diabo a quem se pode vender alma; mas todas as pessoas que entendem alguma coisa de alma, por serem sacerdotes, historiadores e artistas, e tirarem boas vantagens disso, testemunham que foi a matemática que arruinou a alma, que a matemática é a fonte de uma inteligência perversa que faz o homem senhor da terra mais escravo da máquina. A secura interior, a monstruosa mistura de sensibilidade para os detalhes e indiferença para o todo, o enorme desamparo do ser humano num deserto de minúcias, sua inquietação, maldade, a incrível frieza do coração, cobiça, crueldade e violência que caracterizam nossa era, seriam, segundo esses relatos, resultado dos prejuízos que um aguçado pensamento lógico traz à alma! E assim, já no tempo em que Urlich se tornou matemático, havia pessoas que profetizavam a derrocada da cultura européia, por que nenhuma crença, nenhum amor, nenhuma candura restavam no ser humano e significativamente todos foram maus matemáticos na juventude e nos anos escolares. Isso provou para eles, mais tarde, que a matemática, mãe da ciência natural exata, avó da técnica, também é mãe ancestral daquele espírito do qual finalmente brotaram os gases venenosos e os pilotos de guerra.

Só os próprios matemáticos e seus discípulos, os cientistas naturais, que sentiam em suas almas tão pouco disso tudo quanto os corredores de bicicleta, que pisa no pedal e nada vêem do mundo senão a roda traseira do concorrente diante deles, viviam na ignorância desses perigos. Ulrich, porém, com certeza amava a matemática, por causa das pessoas que não a suportavam. Era menos um cientista do que alguém humanamente apaixonado pela ciência. Via que em todas as questões que esta julga de sua competência, cultiva um pensamento diverso do das pessoas comuns. Se colocássemos, em lugar de idéias científicas, idéias filosóficas, em vez de hipóteses, experiência, e em vez de verdade, ação, não haveria obra de cientista natural ou matemático respeitável que, por sua coragem e força revolucionária, não superasse em muito as maiores façanhas da história. Ainda não nasceu homem capaz de dizer a seus discípulos: roubem, matem, sejam lascivos... nossa doutrina é tão forte que transforma o estrume desses pecados em claros espumantes riachos de montanha; mas na ciência acontece periodicamente que algo que até então é considerado erro, de repente inverte todas as idéias, ou que um pensamento insignificante e desprezado começa a dominar todo um novo reino de idéias; e esses fatos não são apenas revoluções, mas constituem um caminho ascendente, como uma escada para o céu. Na ciência as coisas são tão fortes, superiores e magníficas como num conto de fadas. E Ulrich sentia: as pessoas apenas não sabem disso; não tem idéia de como se pode pensar; se pudéssemos ensiná-las a pensar diferente, também viveriam de modo diferente.

Certamente a de se perguntar se o mundo é tão errado que se precisa mudá-lo a toda hora. Mas o próprio mundo já deu duas respostas. Pois desde que Ele existe a maior parte da pessoas foi favorável a mudança da juventude. Acharam ridículo que os mais velhos se prendessem às coisas permanentes e pensassem com seu coração, aquele pedacinho de carne, em vez de pensarem com o cérebro. Esses jovens sempre perceberam que a ignorância moral dos mais velhos é uma falta de capacidade para estabelecer novas ligações, como a habitual ignorância intelectual, e que a sua própria moral natural é uma moral de realizações, heroísmo e transformação. Contudo, assim que chegavam à idade de concretizar, não sabiam mais nada de tudo aquilo, nem queriam saber. Por isso, muitas pessoas para quem a matemática ou a ciência natural ou profissões julgariam abusivo decidir-se pela ciência por motivos como o de Ulrich.

Apesar disso, na opinião dos especialistas não foi pouco o que ele fez nessa terceira profissão, desde que a abraçou há anos.

Conteúdo

Notação

- $\mathbb{N}$: espaço dos números naturais.
- $\mathbb{C}$: espaço dos números complexos.
- $\mathbb{R}$: espaço dos números reais.
- $\mathbb{R}^N$: espaço euclidiano $N-$ dimencional, $N \in \mathbb{N}$.

- X é um espaço de Banach.
- $X^m = \underbrace{X \times \cdots \times X}_{\text{m vezes}}$.
- $\chi_{_{[t_0,t]}}$ é a função característica definida por

$$\chi_{_{[t_0,t]}}(s) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad s \in [t_0, t] \\ 0, & \text{se} \quad s \notin [t_0, t]. \end{cases}$$

Quando $t_0 = 0$, denotamos $\chi_{_t}$.

- $L(X, Y)$ ou $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço dos operadores lineares limitados de X em Y.
- $L(X)$ o espaço $L(X, X)$.
- X' o espaço dual algébrico de X.
- $x'(x) = \langle x, x' \rangle$, para cada $x \in X,\ x' \in X'$.
- $X \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} Y$ se $X \subset Y$ e a imersão é contínua.
- Ω é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$.
- $\overline{\Omega}$ é o fecho de Ω em $\mathbb{R}^N$.
- $\partial\Omega$ a fronteira de Ω, isto é $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$.
- $u' = u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{du}{dt}$.
- $\partial_i u = u_{x_i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

• $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_1^{\alpha_2} \cdot \cdot \cdot D_1^{\alpha_N} = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial_{x_1^{\alpha_1}}} \dfrac{\partial^{\alpha_2}}{\partial_{x_2^{\alpha_2}}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_N}}{\partial_{x_N^{\alpha_N}}}$ é o operador de derivação de ordem α, com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdot \cdot \cdot, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$.

• $\nabla u = (\partial_1 u, ..., \partial_N u)$.

• $\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

• $C(I; X)$ o espaço vetorial das funções contínuas $u : I \to X$, onde I é um intervalo em $\mathbb{R}$.

• $B(I; X)$ o espaço da funções limitadas, munidos com a norma do supremo

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in I} \|u(t)\|.$$

• $C^\nu(\overline{\Omega})$ consiste de todas as funções $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), tal que

$$H_{o,\, \nu}(u) = \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in \Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\nu} < \infty;$$

munido da norma,

$$\|u\|_{C^\nu(\overline{\Omega})} = \|u\|_{\max} + H_{o,\, \nu}(u).$$

• $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \displaystyle\int_\Omega |u|^p < \infty \right\}$.

• $spp(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}$.

• $C^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} / D^\alpha u \in C(\Omega),\ \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^N\}$, onde $D^\alpha u$ é a derivada no sentido das distribuições.

• $C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) / spp(u) \subset\subset \Omega\}$,

• $W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^N, 0 \leq |\alpha| \leq m\}$.

• $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

• $W_0^{m,\,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\,\|\cdot\|_{m,p}}$.

• $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,\,2}(\Omega)$.

• $\gamma = \{h(t); h : [a, b] \to \Omega\}$ é uma curva de classe C^1 por partes, onde Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$. (Entendemos curva como um conjunto de pontos .)

• $D(A)$ o domínio do operador A.

• $\| x\|_{D(A)} = \| x\|_X + \|Ax\|_Y$ é a norma do gráfico para o operador fechado

$$A : D(A) \subset X \to Y.$$

• I_d ou I o operador identidade.

- $\Gamma(\cdot)$ é a função gama real, dada por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx \qquad (\alpha > 0).$$

- $A^{-\alpha}$ é o operador dado por $\begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^\infty s^{\alpha-1}T(s)ds, & \alpha > 0, \\ I_d, & \alpha = 0. \end{cases}$
- $R(A^{-\alpha}) = \{A^{-\alpha}x : x \in X\}$: imagem de X por $A^{-\alpha}$.
- $A^\alpha : R(A^{-\alpha}) \to X$ é o operador potência fracionária de A; quando $\alpha = 0$, $A^\alpha = I$.
- X^α é o espaço de Banach $D(A^\alpha) = R(A^{-\alpha})$ munido da norma $\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|$; quando $\alpha = 0, X^0 = X$.
- $G(A) = \{(x, y) \in X \times X : x \in D(A), y = Ax\}$ é o gráfico do operador A.
- $\rho(A) = \big\{\lambda \in \mathbb{C} : \exists\,(\lambda I - A)^{-1} \in L(X)\big\}$ é o conjunto resolvente de A.
- $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$ é o conjunto espectro de A.
- $R(\lambda : A) := (\lambda I - A)^{-1}$ é o operador resolvente de A.
- $A_\mu = \mu AR(\mu : A)$ é a aproximação de Yosida de A.

Introdução

A teoria de semigrupos de operadores lineares surgiu na primeira metade do século XX, adquirin-do sua "essência"em 1948 com a demonstração do famoso teorema de Hille-Yosida e atingiu seu primeiro destaque em 1957 com a edição do livro Semigroups and Functional Analysis by E. Hille and R.S. Phillips (Veja Klaus [13]). Nos anos 70, graças aos esforços de muitas diferentes escolas a teoria chegou a um certo estado de perfeição que é bem representada, por exemplo, em Goldstein [16] e no excelente livro do Pazy [26], onde os mesmos concentraram suas atenções para semigrupos fortemente contínuos (C_0-semigrupos), evidenciando que isto é a chave para uma profunda e bonita teoria. A participação posterior de pesquisadores importantes; assim, como o avanço de outras áreas da matemática permitiu consolidar a teoria dando para ela autonomia e inúmeras aplicações em diversas áreas tanto na matemática aplicada como na pura.

Seja X um espaço de Banach. Entende-se por um semigrupo, em X, uma família $T(t)$, $t \geq 0$ de operadores de $L(X)$, onde $L(X)$ é a álgebra dos operadores lineares limitados de X em X que satisfaz:

(i) T(0) = I . (I é o operador identidade em X).

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$ (a propriedade de semigrupo).

Um semigrupo de operadores lineares limitados será chamado fortemente contínuo ou C_0- semigrupo se

$$\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x, \quad \text{para todo } x \in X.$$

Um exemplo de semigrupo é obtido pela função exponencial $E : \mathbb{R}^+ \to L(X)$, definida por

$$E(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}, \quad \text{com } A \in L(X).$$

A família, $E(t)$, $t \geq 0$, satisfaz as condições da definição de semigrupo de classe C_0. Neste sentido, a definição de semigrupo generaliza a definição da função exponencial. A importância disto, é que a função $u : \mathbb{R} \to X$ dada por $u(t) = e^{tA}u_0$ é a única solução do seguinte problema de valor inicial :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) \qquad t \geq t_0 \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

para um operador $A \in L(X)$ e u_0 dado em X.

A idéia da teoria de semigrupos é que a solução de um problema de valor inicial, como o problema (1), para um operador linear **não limitado** A sobre um espaço de Banach X, possa ser dada por $T(t)u_0$ se o operador A gerar o semigrupo.

Esta teoria, é portanto, uma ferramenta poderosa no estudo de solução para o seguinte

problema:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) \qquad t \geq t_0 \\ u(t_0) = u_0 \in D(A), \end{cases} \tag{2}$$

com A sendo um operador linear não limitado. Aplicando o Teorema de Hille-Yosida o estudo do problema (2) se reduz ao estudo da existência de solução da equação

$$\lambda u - Au = v,$$

para algum $\lambda > 0$, aliada de uma estimativa adequada da mesma. Tal estudo encontra-se em Pazy[26]. Um ponto importante aqui que devemos frisar é que o dado inicial pertence ao domínio do operador. Também esta teoria pode ser utilizada para tratar problemas **não-homogêneos** da forma:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t) \qquad t \geq t_0 \\ u(t_0) = u_0 \in D(A), \end{cases} \tag{3}$$

e

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) + Fu(t) \qquad t \geq t_0 \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{4}$$

onde, respectivamente, a não-homogeniedade é linear e não-linear. Resultados sobre a existência, unicidade e regularidade para os problemas acima podem ser encontrados em de Melo [24]. Apenas, evidenciamos que para o problema (4) podem ser estabelecidas situações onde há a garantia da existência e unicidade de soluções generalizadas para o dado inicial em X, sendo que quando o mesmo pertence a $D(A)$, é possível mostrar que a solução generalizada é uma solução clássica.

No intuito de encontrar soluções clássicas para os problemas de valor inicial dos tipos (3) e (4), agora, com dados menos regulares (no sentido do dado inicial pertencer a $D(A^\alpha)$; um subconjunto de X que contém o domínio do operador D(A)), estuda-se uma nova classe de semigrupos, chamada **SEMIGRUPO ANALÍTICO**. Com o estudo desta classe, estudá-se **POTÊNCIAS FRACIONÁRIAS DE OPERADORES E ESPAÇOS DE POTÊNCIAS FRACIONÁRIAS $\mathbf{X}^\alpha$**, espaços estes que verificam a seguinte inclusão $D(A) \subset X^\alpha$, para $\alpha \in [0,1]$. Outro ponto, relevante é que se o dado inicial pertencer a X^α, para $\alpha \in [0,1]$, mas não à $D(A)$, não se pode usar o raciocínio utilizado com relação aos problemas (3) e (4). Para maiores detalhes do raciocínio que se pode usar veja também Pazy [26].

O presente trabalho, trata especialmente de semigrupos analíticos que são tipos particulares de C_0-semigrupos. Comparando à C_0-semigrupos, os semigrupos analíticos provêem uma melhor regularidade de soluções para problemas de valor inicial, bem como resultados melhores relativos a "perturbação" do gerador infinitesimal e uma relação entre o semigrupo e o resolvente do gerador infinitesimal. Além disso, os semigrupos analíticos possibilitam estender o domínio do parâmetro (antes, quando C_0-semigrupos, era o eixo real não-negativo) para as regiões do plano complexo.

Estrutura do trabalho: Nosso trabalho, é escrito no espírito de Análise Funcional. Isto significa, que utilizamos contruções abstratas e argumentos gerais voltados para a matemática pura.

No **Capítulo 1**, inicialmente, apresentamos alguns resultados referentes a Transformada Inversa de Laplace. A condição da Proposição 1.6, implica que A é o gerador de um semigrupo analítico (veja Seção 1.2). Apresentamos um resultado que caracteriza tal classe de semigrupos. Em seguida introduzimos Potências Fracionárias associadas a um operador $A : D(A) \subset X \to X$ tal que $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $T(t)$ em X. Esse estudo possibilita garantir uma condição para que a "pertubação" $-A+\delta I$, δ suficientemente pequeno, seja um gerador infinitesimal de um semigrupo analítico limitado; com isto, permitindo boas estimativas para os operadores $T(t), AT(t), ..., A^nT(t)$, (veja Lema 1.10). Estudamos também os Espaços de Potências X^α, $0 \leq \alpha \leq 1$, os quais, são menos regulares do que o domínio do operador em questão. Este Capítulo, tem como base o livro do Pazy [26]. Também utilizamos, [12], [13], [18],[19] e [23].

Nos **Capítulos 2, 3** e **4** mostramos como a Teoria de semigrupos analíticos permite o tratamento de algumas equações de evolução, das quais, inicialmente, não tem a forma do Problema abstrato de Cauchy (homogêneo). Equações de evolução tem um papel central da análise matemática, não somente pelo interesse teórico em si, mas também, pelas incontáveis aplicações em diferentes áreas da ciência e tecnologia.

No **Capítulo 2**, tratamos do problema não-local:

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f\big(t, u(t), u(b_1(t)), u(b_2(t)), ..., u(b_m(t))\big), \quad t \in (0, T] \\ h(u) = \phi_0 \quad \text{em } [-\tau, 0], , \end{cases}$$

onde f, $b_1, \cdots, b_m, h, \phi_0$ são baseados em Bahuguna [3].

No **Capítulo 3**, estudamos o problema Integrodiferential:

$$\begin{cases} u' + Au(t) = f\big(t, u(t)\big) + K(u)(t), \qquad t > t_0 \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

onde

$$K(u)(t) = \int_{t_0}^{t} h(t-s)g\big(s, u(s)\big)\, ds$$

representa o termo efeito memória. Neste capítulo, utilizamos Bahuguna [4] como referência principal.

No **Capítulo 4**, consideramos as seguintes equações fortemente amortecidas

$$u_{tt} + \big(aL + b\big)u_t + \big(cL + d\big)u = f(t, u, u_t), \text{ em } \Omega \times (t_0, T),$$

$$u(x, t_0) = x_0,\ u_t(x, t_0) = x_1, \quad \text{para } x \in \Omega$$

$$D^\alpha u = 0 \text{ para } (x, t) \in \partial\Omega \times [t_0, T), |\,\alpha| \leq m - 1,$$

onde $a > 0$, Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ com fronteira suficientemente suave e

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u$$

é um operador diferential fortemente elíptico de ordem $2m$ em Ω. Mais, especificadamente nesse último, estudamos o problema

$$\begin{cases} u''(t) + Au'(t) = f\big(t, u(t), u'(t)\big), \\ \quad u(t_0) = x_0 \quad u'(t_0) = x_1. \end{cases},$$

onde os termos $bu'(t)$ e $\big(cA+dI\big)u(t)$ estão absorvidos pela função f. Assumimos hipóteses especificas para as funções envolvidas, tendo como base o trabalho de Bahuguna [5].

No **Apêndice A**, colecionamos alguns resultados sobre operadores lineares em espaços de Banach X e sobre cálculos para funções definidas em um intervalo real (ou, de um conjunto aberto em $\mathbb{C}$) com valores em X, resultados estes relacionados à integrais em espaços de Banach. Também no Apêndice A apresentamos algumas propriedades que foram usadas no decorrer desta dissertação, noções para funções analíticas $f : \Omega \to X$, onde Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ e uma versão do Teorema de Cauchy para espaços de Banach. Este apêndice é baseado, quase toda sua totalidade em Lorenzi [23], por acreditamos que esta referência condiz com nossos propósitos.

No **Apêndice B**, reunimos resultados referentes a Teoria Espectral baseados em Lorenzi [23] e em [13]. A importância destes resultados ficará evidente no Capítulo 1, onde os aplicamos.

No **Apêndice C**, apresentamos um resumo da Teoria de Semigrupo de operadores lineares limitados baseado em Pazy [Pazy].

No **Apêndice D**, resumimos alguns resultados complementares que foram utilizados na dissertação.

No **Apêndice E**, introduzimos os espaços $L^p(\Omega), W^{m,p}(\Omega), W_0^{m,p}$ e $C^\nu(\overline{\Omega})$, baseados em Brézis [6] e Medeiros [28].

No **Apêndice F**, tratamos de alguns resultados envolvendo os espaços $L^p(\Omega)$ e $W^{m,p}(\Omega)$, relacionados ao problema de Dirichlet e a operadores fortementes Elípticos, baseados em de Melo [24].

Concluimos nossa dissertação, com o **Apêndice G**, que reune alguns resultados referentes ao Problema de Cauchy não homogêneo e que também foram usadas no decorrer desta dissertação.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, temos como objetivo estabelecer uma relação entre um semigrupo $T(t)$ e seu resolvente $R(\lambda : A)$, chamada Transformada Inversa de Laplace; bem como, introduzir noções de Semigrupos Analíticos, Potências Fracionárias e Espaços de Potências Fracionárias.

1.1 A Transformada Inversa de Laplace

Lema 1.1 *Sejam B um operador linear limitado e $\gamma \in \mathbb{R}$ com $\gamma > \|B\|$. Então*

$$e^{tB} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : B)\, d\lambda, \tag{1.1}$$

onde a integral é calculada ao longo do segmento de reta $Re\lambda = \gamma$. Além disto, a convergência da integral é uniforme em qualquer intervalo limitado com relação a t.

Demonstração. Sendo $\gamma > \|B\|$, escolha r tal que $\gamma > r > \|B\|$ e seja C_r o círculo de raio r centrado na origem (Veja Figura 1.1). Se $\lambda \neq 0$ e $|\lambda| > r$ então

$$\left|\frac{1}{\lambda}\right| = \frac{1}{|\lambda|} < \frac{1}{r};$$

assim, aplicando a Proposição B.7 para $z = \dfrac{1}{\lambda}$ e $T = B$,

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^j B^j = \left(I - \frac{1}{\lambda}B\right)^{-1}, \tag{1.2}$$

logo, multiplicando ambos os lados de (1.2) por λ^{-1},

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-1}\lambda^{-j}B^{j} = (\lambda I - B)^{-1}, \tag{1.3}$$

ou seja,

$$R(\lambda : B) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^{j}}{\lambda^{j+1}}, \tag{1.4}$$

para $|\lambda| > r$. Também, pela Proposição B.7,

$$\left\| \left(I - \frac{1}{\lambda} B \right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \dfrac{1}{|\lambda|}\|B\|},$$

já que, $|\lambda| > r > \|B\|$; o que implica,

$$\left\| \lambda^{-1} \left(I - \frac{1}{\lambda} B \right)^{-1} \right\| \leq |\lambda|^{-1} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{|\lambda|}\|B\|} \leq |\lambda|^{-1} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{r}\|B\|} = |\lambda|^{-1}C, \tag{1.5}$$

onde C é uma constante positiva, ou seja,

$$\|R(\lambda : B)\| \leq C|\lambda|^{-1}, \qquad \text{para } |\lambda| > r > \|B\|. \tag{1.6}$$

Multiplicando $R(\lambda : B)$ em (1.4) por $(1/2\pi\, i)e^{\lambda t}$ e integrando sobre C_r, obtemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{t\lambda} R(\lambda : B)\, d\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^{j}}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{j+1}}\, d\lambda, \tag{1.7}$$

onde a "troca da integral com o somatório" é justificada por (1.6), que garante a convergência uniforme da série em (1.4), para $|\lambda| \geq r$. Assim, pela fórmula dos coeficientes da série de Taylor

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{j+1}}\, d\lambda = \frac{t^{j}}{j!}, \quad \text{para } j = 0, 1, 2, ...,$$

obtemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{t\lambda} R(\lambda : B)\, d\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^{j}t^{j}}{j!} = e^{tB}. \tag{1.8}$$

Considere agora a região Ω exterior à C_r e interior à curva C^1 por partes Λ_k dada por

$$\Lambda_k = \bigcup_{l=1}^{4} \Lambda_k^l,$$

onde,

$$\Lambda_k^1 = \{\lambda : \lambda = \gamma + is, \quad -k \leq s \leq k\},$$

$$\Lambda_k^2 = \{\lambda : \lambda = s - ik, \quad -k \leq s \leq \gamma\},$$

$$\Lambda_k^3 = \{\lambda : \lambda = -k + is, \quad -k \leq s \leq k\},$$

$$\Lambda_k^4 = \{\lambda : \lambda = s + ik, \quad -k \leq s \leq \gamma\},$$

curva esta orientada em sentido anti-horário (Veja Figura 1.1.)

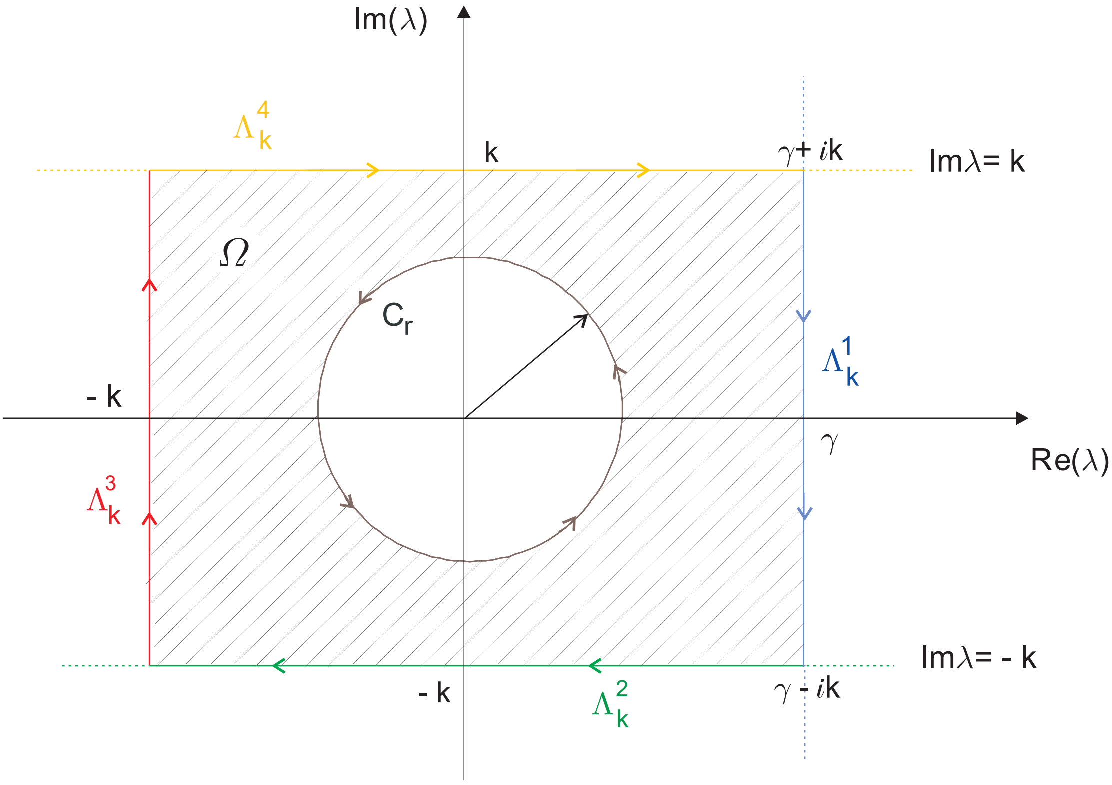

Figura 1.1: A região Ω.

Como o integrando em (1.8) é analítico em Ω segue pelo TEOREMA DE CAUCHY(Teorema A.10), que podemos trocar o caminho de integração C_r por Λ_k, i.e.,

$$\int_{\Lambda_k} e^{\lambda t} R(\lambda : B)\, d\lambda = \int_{C_r} e^{\lambda t} R(\lambda : B)\, d\lambda. \tag{1.9}$$

Denotemos,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Lambda_k^1} e^{\lambda t} R(\lambda : B)\, d\lambda = \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : B)\, d\lambda. \tag{1.10}$$

Observe que:

$$\int_{\Lambda_k^j} e^{\lambda t} R(\lambda : B)\, d\lambda \xrightarrow[k\to\infty]{} 0; \qquad j = 2, 3, 4. \tag{1.11}$$

De fato,

$$\left\| \int_{\Lambda_k^3} e^{\lambda t} R(\lambda : B)\, d\lambda \right\| \le \int_{-k}^{k} e^{-kt} \frac{C}{\sqrt{k^2+s^2}}\, ds$$

$$\le C e^{-kt} \int_{-k}^{k} \frac{ds}{k}$$

$$= 2Ce^{-kt} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,.$$

Para a curva Λ_k^4,

$$\left\| \int_{\Lambda_k^4} e^{\lambda t} R(\lambda : B)\, d\lambda \right\| \le \int_{-k}^{\gamma} e^{st} \frac{C}{\sqrt{k^2+s^2}}\, ds. \tag{1.12}$$

Fixando $M > 0$ e $-k < -M$ temos

$$C\int_{-k}^{\gamma} \frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}\, ds = C\int_{-k}^{-M} \frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}\, ds + C\int_{-M}^{\gamma} \frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}\, ds.$$

Escolhendo $M > 0$, suficientemente grande, de maneira que

$$e^{st} < \frac{\epsilon}{C}, \qquad \forall\ s \in [-k, -M]; \tag{1.13}$$

obtemos,

$$C\int_{-k}^{\gamma} \frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}\, ds \le C\frac{\epsilon}{C}\int_{-k}^{-M} \frac{ds}{\sqrt{k^2+s^2}} + C\int_{-M}^{\gamma} \frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}\, ds$$

$$\le \epsilon \int_{-k}^{-M} \frac{1}{k}\, ds + C\int_{-M}^{\gamma} \frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}\, ds$$

$$\le \frac{\epsilon}{k}\,(-M+k) + C\int_{-M}^{\gamma} \frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}\, ds$$

$$\le \frac{\epsilon}{k}\, k + C\int_{-M}^{\gamma} \frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}\, ds;$$

ou seja,

$$C\int_{-k}^{\gamma} \frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}\, ds \le \epsilon + C\int_{-M}^{\gamma} \frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}\, ds.$$

Neste caso, dado $\epsilon > 0$, fixamos $M > 0$ tal que (1.13) ocorra; assim,

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left[C\int_{-k}^{\gamma}\frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}\,ds\right] \leq \epsilon + C\overline{\lim_{k\to\infty}}\int_{-M}^{\gamma}\frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}$$

$$\leq \epsilon + C\overline{\lim_{k\to\infty}}\left[\frac{e^{\gamma t}}{k}\,.\,(\gamma+M)\right]$$

$$\leq \epsilon, \qquad \forall\ \epsilon > 0;$$

donde, segue que

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left[C\int_{-k}^{\gamma}\frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}\,ds\right] = 0.$$

Logo,

$$\lim_{k\to\infty}\left[C\int_{-k}^{\gamma}\frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}\,ds\right] = 0. \tag{1.14}$$

De (1.12) e (1.14),

$$\int_{\Lambda_k^4} e^{\lambda t}R(\lambda : B)\,d\lambda \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,. \tag{1.15}$$

Com relação a Λ_k^2, usamos o mesmo raciocínio de Λ_k^4 e, também obtemos

$$\int_{\Lambda_k^2} e^{\lambda t}R(\lambda : B)\,d\lambda \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,.$$

Portanto, passando ao limite em (1.9) com $k \to \infty$ e usando (1.10) e (1.11), deduzimos a igualdade

$$e^{tB} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda : B)\,d\lambda,$$

concluindo a demonstração. ■

Teorema 1.2 *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $T(t)$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ e seja $\gamma > max(0,w)$. Se $x \in D(A)$ então*

$$\int_0^t T(s)x\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda : A)x\frac{d\lambda}{\lambda}$$

e a integral no lado direito converge uniformemente em intervalos limitados com relação a t.

Demonstração. Seja $\mu > 0$ fixado e considere $\delta > \|A_\mu\|$, onde

$$A_\mu = \mu AR(\mu : A) = \mu^2R(\mu : A) - \mu I$$

é a APROXIMAÇÃO DE YOSIDA de A. Fixando, $\gamma >\ w$ e observando que

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{\mu w}{\mu - w} = w,$$

segue que dado $\varepsilon > 0$, pequeno, existe μ_0 tal que

$$\frac{\mu w}{\mu - w} \in (w - \epsilon, w + \epsilon), \quad \text{para } \mu \geq \mu_0.$$

Se $\mu > \mu_0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Re\lambda \geq \gamma$, temos

$$Re\lambda > \varepsilon + \frac{\mu w}{\mu - w};$$

logo, pelo Teorema C.13, $\lambda \in \rho(A_\mu)$, ou seja, faz sentido falar em $R(\lambda : A_\mu)$. Considere, então a função $\rho_k(s)$ com domínio $[0, t]$ definido por:

$$\rho_k(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - ik}^{\delta + ik} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu) x \, d\lambda. \tag{1.16}$$

Integrando ambos os lados de (1.16) de 0 à t e trocando a ordem de integração encontramos

$$\begin{aligned}
\int_0^t \rho_k(s)\, ds &= \int_0^t \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - ik}^{\delta + ik} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu) x \, d\lambda \, ds \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - ik}^{\delta + ik} R(\lambda : A_\mu) x \left(\int_0^t e^{\lambda s}\, ds \right) d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - ik}^{\delta + ik} R(\lambda : A_\mu) x \left[\frac{1}{\lambda} \big(e^{\lambda t} - 1 \big) \right] d\lambda
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^t \rho_k(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - ik}^{\delta + ik} e^{\lambda t} R(\lambda : A_\mu) x \frac{d\lambda}{\lambda} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - ik}^{\delta + ik} R(\lambda : A_\mu) x \, \frac{d\lambda}{\lambda}\,. \tag{1.17}$$

Integrando $\lambda^{-1} R(\lambda : A_\mu) x$ no caminho por partes Γ_k, composto do segmento vertical

$$\Gamma_k^{(1)} = \{\delta + i\eta : -k \leq \eta \leq k\}$$

e do semicírculo

$$\Gamma_k^{(2)} = \{\delta + k e^{i\varphi} : -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2\},$$

como na Figura (1.2).

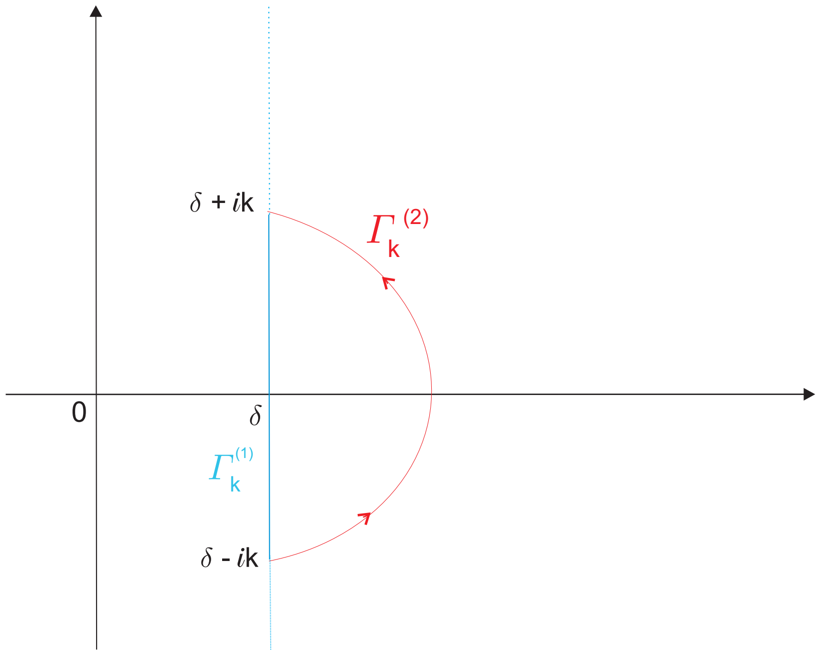

Figura 1.2: o caminho Γ_k.

Segue, pelo TEOREMA DE CAUCHY(Teorema A.10), que

$$\int_{\Gamma_k} \lambda^{-1} R(\lambda : A_\mu) x \, d\lambda = 0;$$

o que implica,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Gamma_k^{(1)}} \lambda^{-1} R(\lambda : A_\mu) x \, d\lambda + \lim_{k\to\infty} \int_{\Gamma_k^{(2)}} \lambda^{-1} R(\lambda : A_\mu) x \, d\lambda = 0. \tag{1.18}$$

Além disso, se $\lambda \in \Gamma_k^{(2)}$ então

$$\begin{aligned} |\lambda| &= \sqrt{(\delta + k\cos\varphi)^2 + k^2 \sin^2\varphi} \\ &= \sqrt{\delta^2 + 2\delta k \cos\varphi + k^2} \\ &= k\sqrt{\frac{\delta^2}{k^2} + \frac{2\delta\cos\varphi}{k} + 1}, \end{aligned}$$

logo, sendo $\|R(\lambda, A_\mu)\| \leq C_\mu |\lambda|^{-1}$, para $|\lambda| \geq \delta$, uma vez que A_μ é um operador limitado $\big($veja demonstração do Lema 1.1$\big)$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Gamma_k^{(2)}} \frac{R(\lambda : A_\mu)}{\lambda} \, x \, d\lambda \right\| &\leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} C_\mu \frac{\left(k\sqrt{\delta^2/k^2 + (2\delta\cos\varphi)/k + 1}\ \right)^{-1}}{k\sqrt{\delta^2/k^2 + (2\delta\cos\varphi)/k + 1}} \, \|x\| k \, d\varphi \\ &\leq \frac{1}{k} C_\mu \|x\| \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\delta^2/k^2 + (2\delta\cos\varphi)/k + 1} \, d\varphi \\ &\leq \frac{1}{k} \pi C_\mu \|x\|, \quad (k \approx \infty); \end{aligned}$$

assim,

$$\int_{\Gamma_k^{(2)}} \lambda^{-1} R(\lambda : A_\mu) x \, d\lambda \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,. \tag{1.19}$$

De (1.18) e (1.19) segue que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\delta-ik}^{\delta+ik} R(\lambda : A_\mu) x \frac{d\lambda}{\lambda} = 0. \tag{1.20}$$

Definindo,

$$h_k(s) = \| \, \rho_k(s) - e^{sA_\mu} \|,$$

temos os seguintes fatos:

- (h_k) é uma seqüência de funções mensuráveis em $[0, t]$; pois, é uma sequência de funções contínuas.

- $h_k(s) \to 0$ quando $k \to \infty$; pois, sendo $R(\mu : A)$ e I lineares limitados, A_μ é um operador linear limitado; donde, pelo Lema 1.1,

$$\rho_k(s) \to e^{sA_\mu} x,$$

quando $k \to \infty$.

- $|\, h_k(s)| \leq g(s)$ e $\displaystyle\int_0^t g(s)\, ds < \infty$. De fato, pela DESIGUALDADE TRIANGULAR,

$$|\, h_k(s)| \leq \| \, \rho_k(s)\| + \| \, e^{sA_\mu} \|.$$

Considere,

$$\Upsilon_1 = \{\lambda : \lambda = m - ik, \quad -k \leq m \leq \delta\},$$

$$\Upsilon_2 = \{\lambda : \lambda = -k + im, \quad -k \leq m \leq k\},$$

$$\Upsilon_3 = \{\lambda : \lambda = m + ik, \quad -k \leq m \leq \delta\},$$

e o círculo, C_r, de raio r e centro na origem (Veja Figura 1.3). Segue, pelo TEOREMA DE CAUCHY (Teorema A.10), que

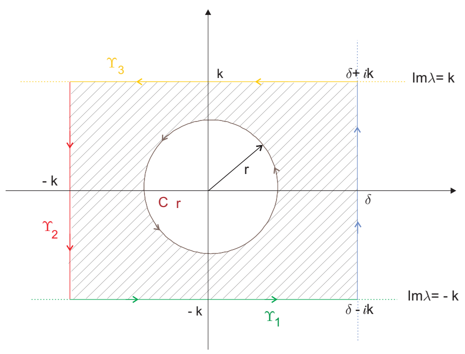

Figura 1.3: $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \Upsilon_3$ e o círculo C_r.

$$\int_{\delta-ik}^{\delta+ik} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu)\, d\lambda \; = \int_{C_r} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu)\, d\lambda - \sum_{i=1}^{3} \int_{\Upsilon_i} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu)\, d\lambda,$$

para $i = 1, 2, 3$; logo,

$$\left\| \int_{\delta - ik}^{\delta + ik} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu)\, d\lambda \right\| \leq \left\| \int_{C_r} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu)\, d\lambda \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{3} \int_{\Upsilon_i} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu)\, d\lambda \right\|, \tag{1.21}$$

para $i = 1, 2, 3$. Além disso,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Upsilon_2} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu)\, d\lambda \right\| &\leq \int_{-k}^{k} e^{-ks} \frac{C}{\sqrt{k^2 + m^2}}\, dm \\ &\leq Ce^{-ks} \int_{-k}^{k} \frac{ds}{k} = 2Ce^{-ks}; \end{aligned}$$

donde,

$$\left\| \int_{\Upsilon_2} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu)\, d\lambda \right\| \leq 2C = C_1. \tag{1.22}$$

Também,

$$\left\| \int_{\Upsilon_3} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu)\, d\lambda \right\| \leq \int_{-k}^{\delta} e^{ms} \frac{C}{\sqrt{k^2 + m^2}}\, dm. \tag{1.23}$$

Fixando $M > 0$ e $-k < -M$ temos

$$C \int_{-k}^{\delta} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}}\, dm = C \int_{-k}^{-M} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}}\, dm + C \int_{-M}^{\delta} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}}\, dm.$$

Escolhendo $M > 0$, suficientemente grande, de maneira que

$$e^{ms} < \frac{\epsilon}{C}, \qquad \forall\, m \in [-k, -M]; \tag{1.24}$$

obtemos,

$$\begin{aligned} C \int_{-k}^{\delta} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}}\, dm &\leq C \frac{\epsilon}{C} \int_{-k}^{-M} \frac{dm}{\sqrt{k^2 + m^2}} + C \int_{-M}^{\delta} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}}\, dm \\ &\leq \epsilon \int_{-k}^{-M} \frac{1}{k}\, dm + C \int_{-M}^{\delta} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}}\, dm \\ &\leq \frac{\epsilon}{k} (-M + k) + C \int_{-M}^{\delta} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}}\, dm \\ &\leq \frac{\epsilon}{k}\, k + C \int_{-M}^{\delta} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}}\, dm; \end{aligned}$$

ou seja,

$$C \int_{-k}^{\delta} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}}\, dm \leq \epsilon + C \int_{-M}^{\delta} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}}\, dm \leq \underbrace{\epsilon + C \left[\frac{e^{m\delta}}{k} (\delta + M) \right]}_{C_2};$$

assim,

$$\left\| \int_{\Upsilon_3} e^{\lambda s} R(\lambda : B)\, d\lambda \right\| \leq C_2. \tag{1.25}$$

Analogamente, obtemos que

$$\left\| \int_{\Upsilon_1} e^{\lambda s} R(\lambda : B)\, d\lambda \right\| \leq C_2. \tag{1.26}$$

Com relação ao círculo C_r,

$$\left\| \int_{C_r} e^{\lambda s} R(\lambda : B)\, d\lambda \right\| \leq e^{s\|B\|} \leq e^{t\|B\|} = C_3. \tag{1.27}$$

De (1.21), (1.22), (1.25), (1.26) e do Lema 1.1,

$$\|\rho_k(s)\| \leq \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\delta-ik}^{\delta+ik} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu) x\, d\lambda \right\| \leq \frac{1}{2\pi}(C_1 + C_2 + C_2 + C_3) = C_4, \tag{1.28}$$

Com relação a $\|e^{sA\mu}\|$ temos

$$\|e^{sA\mu}\| = \|e^{s(\mu^2 R(\mu:A) - \mu I)}\| = \|e^{s\mu^2 R(\mu:A)} e^{-s\mu I}\|; \tag{1.29}$$

além disso, para cada $x \in X$,

$$e^{-s\mu I} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s\mu)^n I^n x}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s\mu)^n x}{n!} = e^{-s\mu} x;$$

assim,

$$e^{s\mu^2 R(\mu:A)} e^{-s\mu I} x = e^{s\mu^2 R(\mu:A)} e^{-s\mu} x = e^{-s\mu} e^{s\mu^2 R(\mu:A)} x,$$

para todo $x \in X$. Logo,

$$\|e^{s\mu^2 R(\mu:A)} e^{-s\mu I} x\| = \|e^{-s\mu} e^{s\mu^2 R(\mu:A)} x\| = e^{-s\mu} \|e^{s\mu^2 R(\mu:A)} x\|,$$

consequêntemente,

$$\|e^{s\mu^2 R(\mu:A)} e^{-s\mu I}\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|e^{-s\mu} e^{s\mu^2 R(\mu:A)} x\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} e^{-s\mu} \|e^{s\mu^2 R(\mu:A)} x\|,$$

implicando que,

$$\|e^{s\mu^2 R(\mu:A)} e^{-s\mu I}\| = e^{-s\mu} \|e^{s\mu^2 R(\mu:A)}\|,$$

ou seja,

$$\|e^{s\mu^2 R(\mu:A)} e^{-s\mu I}\| = e^{-s\mu} \|e^{s\mu^2 R(\mu:A)}\|. \tag{1.30}$$

De (1.29) e (1.30),

$$\|e^{sA_\mu}\| = e^{-s\mu}\|e^{s\mu^2 R(\mu:A)}\|$$

$$\leq e^{-s\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu^{2n}s^n\|R(\mu:A)^n\|}{n!};$$

pelo Corolário C.17, obtemos para $\mu > w$,

$$\|e^{sA_\mu}\| \leq Me^{(\mu w/\mu - w)s} \leq Me^{2ws} = C_5.$$

De (1.27) e (1.28) temos

$$|h_k(s)| \leq C_4 + C_5 = C_6 = h(s) \tag{1.31}$$

e

$$\int_0^t h(s)ds = \int_0^t C_6\, ds < \infty. \tag{1.32}$$

Assim, pelo TEOREMA DA CONVERGÊNCIA DOMINADA DE LEBESGUE(Teorema D.5),

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^t h_k(s)\, ds = \int_0^t \Big(\lim_{k\to\infty} h_k(s)\Big)\, ds = 0,$$

o que implica,

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^t \rho_k(s)\, ds = \int_0^t e^{sA_\mu}\, ds. \tag{1.33}$$

Portanto, fazendo $k \to \infty$ em (1.17), de (1.20) e (1.33), obtemos

$$\int_0^t e^{sA_\mu}x\, ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda : A_\mu)x\frac{d\lambda}{\lambda}\,. \tag{1.34}$$

Pelo Teorema C.13, temos também para $x \in D(A)$,

$$\|R(\lambda : A_\mu)x\| \leq \frac{C}{|\lambda|}\,(\|x\| + \|Ax\|), \tag{1.35}$$

onde C depende somente de M e γ. Para $\mu \geq \mu_0$ podemos trocar a curva de integração do lado direito de (1.34) de $Re\lambda = \delta$ para $Re\lambda = \gamma$ para obter

$$\int_0^t e^{sA_\mu}x\, ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda : A_\mu)x\frac{d\lambda}{\lambda}\,. \tag{1.36}$$

Para justificar esta troca da curva de integração, considere a região Θ delimitada pela curva

$$\Lambda_k = \bigcup_{l=1}^{4}\Lambda_k^l,$$

dado por,

$$\Lambda_k^1 = \{\lambda : \lambda = \gamma + i\eta, \quad -k \leq \eta \leq k\},$$

$$\Lambda_k^2 = \{\lambda : \lambda = \eta - ik, \quad \delta \leq \eta \leq \gamma\},$$

$$\Lambda_k^3 = \{\lambda : \lambda = \delta + i\eta, \quad -k \leq \eta \leq k\},$$

$$\Lambda_k^4 = \{\lambda : \lambda = \eta + ik, \quad \delta \leq \eta \leq \gamma\},$$

(Veja Figura 1.4).

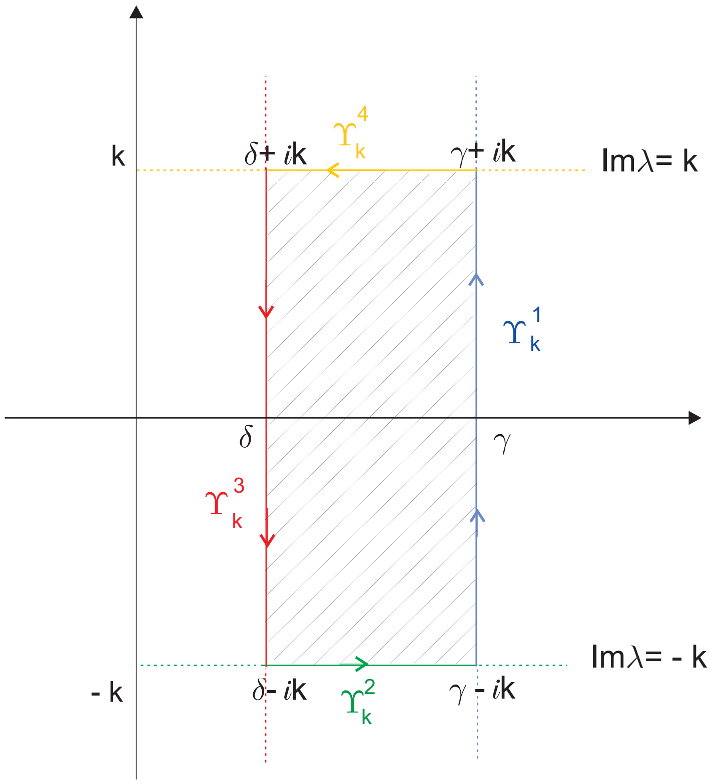

Figura 1.4: a curva Λ_k.

Sendo, $\phi_\mu(\lambda) = \lambda^{-1}e^{\lambda t}R(\lambda : A_\mu)x$ analítica em Θ, pelo TEOREMA DE CAUCHY(Teorema A.10),

$$\int_{\Lambda_k^1} \phi_\mu(\lambda)\, d\lambda + \int_{\Lambda_k^2} \phi_\mu(\lambda)\, d\lambda + \int_{\Lambda_k^3} \phi_\mu(\lambda)\, d\lambda + \int_{\Lambda_k^4} \phi_\mu(\lambda)\, d\lambda = 0 \tag{1.37}$$

e

$$\int_\delta^\gamma e^{\eta t} \frac{d\eta}{\eta^2 + k^2} \leq \frac{e^{\eta t}}{k^2}\,(\delta - \gamma) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

mostra-se "facilmente"que

$$\int_{\Lambda_k^i} \phi_\mu(\lambda)\, d\lambda \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \quad i = 2, 4. \tag{1.38}$$

De (1.37) e (1.38), segue que

$$\int_{\delta-ik}^{\delta+ik} \lambda^{-1} e^{\lambda t} R(\lambda : A_\mu)x\, d\lambda = \int_{\gamma-ik}^{\gamma+ik} \lambda^{-1} e^{\lambda t} R(\lambda : A_\mu)x\, d\lambda \tag{1.39}$$

e, portanto, (1.36) é verificada. Agora, mostraremos que vale a seguinte igualdade

$$\lim_{\mu\to\infty} \int_0^t e^{sA_\mu} x\, ds = \int_0^t T(t)x\, ds. \tag{1.40}$$

Para isso, defina ,

$$g_\mu(s) = \|e^{sA_\mu}x - T(s)x\|.$$

Note,

• (g_μ) é uma seqüência de funções mensuráveis; pois, $g_\mu(\cdot)$ é uma seqüência de funções contínuas.

• $e^{sA_\mu}x \to T(s)x$, quando $\mu \to \infty$ (Pelo Teorema C.14);

• $|g_\mu(s)| \leq k$

Desta forma, pelo TEOREMA DA CONVERGÊNCIA DOMINADA DE LEBESGUE (Teorema D.5), temos (1.40). Agora, mostraremos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A_\mu)x \,\frac{d\lambda}{\lambda} \to \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A)x\,\frac{d\lambda}{\lambda},$$

quando $\mu \to \infty$. Defina

$$f_\mu(\lambda) = \frac{|\, e^{\lambda t}|}{|\lambda|}\, \big\|\big(R(\lambda : A_\mu) - R(\lambda : A)\big)x\big\|.$$

Temos,

• (f_μ) é uma seqüência de funções mensuráveis; pois, $f_\mu(\cdot)$ é contínua.

• $f_\mu(\lambda) \xrightarrow[\mu\to\infty]{} 0$ (Veja Teorema C.14.)

• $|f_\mu(\lambda)| \leq \dfrac{|\, e^{\lambda t}|}{|\lambda|}\big[\|R(\lambda : A_\mu)x\| + \|R(\lambda : A)x\|\big] \leq 2C(\|x\| + \|Ax\|)\dfrac{|\, e^{\lambda t}|}{|\lambda|^2} \equiv g(\lambda);$ para $(\mu \approx \infty)$.

• $\displaystyle\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} g(\lambda)\, d\lambda$ é finita. De fato, para $C_7 = 2C(\|x\| + \|Ax\|)$, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} C_7 \frac{|\,e^{\lambda t}|}{|\lambda|^2}\, d\lambda &= C_7\, e^{\gamma t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{\gamma^2+\eta^2} \\
&= C_7\, e^{\gamma t} \lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} \frac{d\eta}{\gamma^2+\eta^2} \\
&= C_7\, e^{\gamma t} \frac{1}{\gamma^2} \lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} \frac{d\eta}{1+(\eta/\gamma)^2} \\
&= C_7\, e^{\gamma t} \frac{1}{\gamma^2} \lim_{k\to\infty} \int_{-k/\gamma}^{k/\gamma} \frac{\gamma dz}{1+(z)^2}
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} C_7 \frac{|\,e^{\lambda t}|}{|\lambda|^2}\, d\lambda &= \frac{C_7}{\gamma}\, e^{\gamma t} \lim_{k\to\infty} \left[\arctan z \Big|_{-k/\gamma}^{k/\gamma} \right] \\
&= \frac{C_7}{\gamma}\, e^{\gamma t} \lim_{k\to\infty} \Big[\arctan(k/\gamma) - \arctan(-k/\gamma) \Big] \\
&= \frac{C_7}{\gamma}\, e^{\gamma t} \big[\pi/2 - (-\pi/2) \big] \\
&= \frac{C_7}{\gamma}\, e^{\gamma t} \pi < \infty,
\end{aligned}
$$

para t em intervalos limitados. Então, pelo TEOREMA DA CONVERGÊNCIA DOMINADA DE LEBESGUE(Teorema D.5),

$$
\lim_{\mu\to\infty} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{|\,e^{\lambda t}|}{|\lambda|} \left\| \big(R(\lambda : A_\mu) - R(\lambda : A) \big) x \right\| d\lambda = 0;
$$

o que implica,

$$
\lim_{\mu\to\infty} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} \left[\big(R(\lambda : A_\mu) - R(\lambda : A) \big) x \right] d\lambda = 0;
$$

assim,

$$
\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A_\mu) x \,\frac{d\lambda}{\lambda} \to \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A) x \,\frac{d\lambda}{\lambda},
$$

quando $\mu \to \infty$.De (1.40) e (1.36), segue que

$$
\int_0^t T(t) s\, ds = \lim_{\mu\to\infty} \int_0^t e^{sA_\mu} x\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A) x \,\frac{d\lambda}{\lambda},
$$

concluindo a prova do Teorema 1.2. ■

Corolário 1.3 *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0- semigrupo $T(t)$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$. Considere $\gamma > max(0, w)$. Se $x \in D(A^2)$, então*

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda : A)x\, d\lambda \qquad \textit{(Transformada Inversa de Laplace)}$$

e para todo $\delta > 0$, a integral converge uniformemente em t para $t \in [\delta, 1/\delta]$.

Demonstração. Seja $x \in D(A^2)$ então, pela definição de $D(A^2)$,

$$Ax \in D(A).$$

Usando o Teorema 1.2 com a substituição de x por Ax :

$$\int_0^t T(s)Ax\, ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda : A)Ax\frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Pela IDENTIDADE DO RESOLVENTE, $R(\lambda : A)Ax = \lambda R(\lambda : A)x - x$ (Veja Teorema B.2.), obtemos

$$\int_0^t T(s)Ax\, ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}\left(R(\lambda : A)x - \frac{x}{\lambda}\right)d\lambda. \tag{1.41}$$

Vamos mostrar agora que

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\, d\lambda = 2\pi i. \tag{1.42}$$

Para isso, considerando C_r e Λ_k como no Lema 1.1, mostramos que

$$\int_{\Lambda_k} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\, d\lambda = \int_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - 0}\, d\lambda = 2\pi i e^{0t} = 2\pi i; \tag{1.43}$$

onde a penúltima igualdade é válida pela FÓRMULA DA INTEGRAL DE CAUCHY (Fórmula A.2) para a função $f(\lambda) = e^{\lambda t}$. Desta forma, aplicando o limite em (1.43) temos (1.42). Assim,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}x\frac{d\lambda}{\lambda} = x. \tag{1.44}$$

Pelo item **(c)** do Teorema C.10, pelo item **(iv)** do Teorema A.2, e o fato de A comutar com $T(s)$, já que $x \in D(A)$, temos

$$T(t)x - x = A\left(\int_0^t T(s)x\, ds\right) = \int_0^t T(s)Ax\, ds. \tag{1.45}$$

Portanto, de (1.41), (1.44) e (1.45)

$$T(t)x = \int_0^t T(s)Ax\, ds + x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}\left(R(\lambda : A)x - \frac{x}{\lambda}\right) d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}x\frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda : A)x,$$

provando o corolário. ■

Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear fechado com domínio $D(A)$ denso em X [1]. Diremos que A verifica a **Condição** $A_{\delta \cup \{0\}}$, onde $0 < \delta < \dfrac{\pi}{2}$, se a seguinte propriedade for verificada:

$$\sum\nolimits_{\delta} := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\, arg\lambda | < \frac{\pi}{2} + \delta \right\} \cup \left\{ 0 \right\} \subset \rho(A) \tag{1.46}$$

e para cada $0 < \alpha < \delta$ existem $0 < \delta\,' < \delta$ e $M_{\delta\,'} \geq 1$ tal que

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M_{\delta\,'}}{|\lambda|}, \quad \lambda \in \sum\nolimits_{\delta\,'},\ \lambda\ \neq 0. \tag{1.47}$$

Esta **Condição** $A_{\delta \cup \{0\}}$ é uma importante condição suficiente (Ver Proposição 1.6) para um operador A ser o gerador de um C_0-semigrupo limitado. O nosso objetivo a seguir é justificar isto. Para cada $r > 0$, definimos a família de operadores $\big(S(t)\big)_{t \geq 0}$ dada por

$$S(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\gamma(\,r,\,\delta')} e^{t\mu} R(\mu : A)\, d\mu, & t > 0, \\ \qquad I, & t = 0, \end{cases} \tag{1.48}$$

onde $\gamma(\,r,\,\delta') = \gamma_1(\,r,\,\delta') \cup \gamma_2(\,r,\,\delta') \cup \gamma_3(\,r,\,\delta')$ é a curva C^1 por partes definida por

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_1(\,r,\,\delta') = \{\rho e^{i(\pi/2\,+\,\delta')} : \rho \in [r, \infty)\}, \\ \gamma_2(\,r,\,\delta') = \{r e^{i\vartheta} : -\pi/2 - \delta' \leq\ \vartheta \leq \pi/2 + \delta'\}, \\ \gamma_3(\,r,\,\delta') = \{\rho e^{-i(\pi/2\,+\,\delta')} : \rho \in [r, \infty)\}. \end{array} \right\} \tag{1.49}$$

orientada no sentido anti-horário, como na Figura 1.5.

---

[1] A condição de $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ ser um operador linear fechado com domínio $D(A)$ denso em um espaço de Banach X justifica o termo *Equações de Evolução*. **Equações de Evolução** são equações Diferenciais Ordinárias em espaços de Banach da forma $u'(t) - Au(t) = f(t, u(t)) + K(u)(t)$, onde f e K são funções dadas e A é um operador linear não limitado com A satisfazendo tal condição.

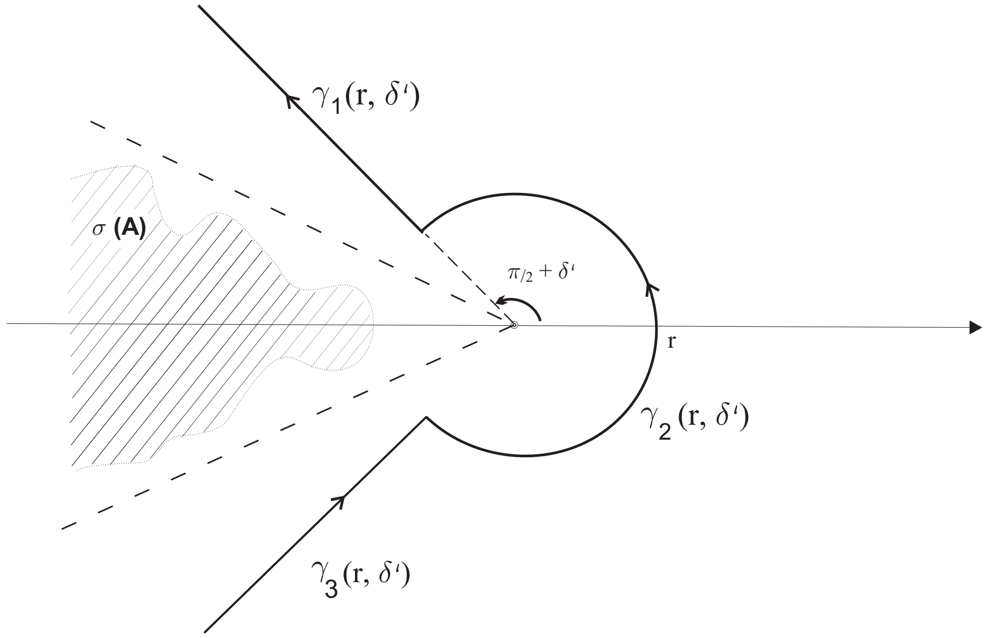

Figura 1.5: a curva $\gamma(r,\, \delta')$.

Lema 1.4 *Se A verifica a* **Condição** $A_{\delta\cup\{0\}}$*, então o operador $S(t)$ está bem definido e é independente de $r > 0$ e de $0 < \delta' < \delta$.*

Demonstração. Seja $t > 0$. Estudemos, inicialmente, a convergência da integral em (1.48) sobre a curva $\gamma(r', m')$ onde $r' = \dfrac{1}{t}$, $m' = \delta - \alpha$, $0 < \alpha < \delta$, $0 < \delta < \dfrac{\pi}{2}$. Se $\mu \in \gamma_1(r',\, m')$ então $\mu = \rho e^{i(\theta-\alpha)}$, com $\theta = \pi/2 + \delta$ e $\rho \in [r', \infty)$. Consideramos $\eta_\alpha = arg\mu$ ($\eta_\alpha = \theta - \alpha$). Definindo $f(\mu) = e^{t\mu}R(\mu : A)$ e fazendo,

$$x = \rho\cos\eta_\alpha = \zeta(\rho) \Rightarrow \zeta'(\rho) = \cos\eta_\alpha,$$
$$y = \rho\sin\eta_\alpha = \xi(\rho) \Rightarrow \xi'(\rho) = \sin\eta_\alpha,$$

temos,

$$\left\| \int_{\gamma_1(r',\, m')} e^{t\mu} R(\mu : A)x\, d\mu \right\| \leq \int_{r'}^{\infty} \| f\big(\zeta(\rho) + i\,\xi(\rho)\big)\big[\zeta'(\rho) + i\,\xi'(\rho)\big] \| \|x\|\, d\rho;$$

então,

$$\left\| \int_{\gamma_1(r',\, m')} e^{t\mu} R(\mu : A)x\, d\mu \right\| \leq \int_{r'}^{\infty} \| e^{t\rho e^{i\eta_\alpha}} R(\rho e^{i\eta_\alpha} : A) e^{i\eta_\alpha} \| \|x\|\, d\rho;$$

implicando, de (1.47), que

$$\left\| \int_{\gamma_1(r',\, m')} e^{t\mu} R(\mu : A)x\, d\mu \right\| \leq \int_{r'}^{\infty} |\, e^{t\rho e^{i\eta_\alpha}} |\, \frac{M_{m'}}{|\rho e^{i\eta_\alpha}|}\, |\, e^{i\eta_\alpha} | \|x\|\, d\rho,$$

ou seja,

$$\left\| \int_{\gamma_1(r',\, m')} e^{t\mu} R(\mu : A)x \, d\mu \right\| \leq \int_{r'}^{\infty} e^{t\rho cos\eta_\alpha} M_{m'} \|x\| \, d\rho \tag{1.50}$$

Sendo,

$$\frac{\pi}{2} < \eta_\alpha < \frac{3\pi}{2},$$

existe uma constante positiva C tal que

$$\cos \eta_\alpha \leq -C.$$

Logo,

$$\int_{r'}^{\infty} \frac{e^{-\rho tC}}{\rho} \, d\rho \leq \frac{1}{r'} \int_{r'}^{\infty} e^{-\rho Ct} d\rho = \frac{1}{r'Ct} e^{-r'Ct}. \tag{1.51}$$

Segue de (1.50) e de (1.51),

$$\left\| \int_{\gamma_1(r',\, m')} e^{t\mu} R(\mu : A)x \, d\mu \right\| \leq M_{m'} \|x\| \int_{r'}^{\infty} \frac{e^{-\rho\, tC}}{\rho} \, d\rho \leq C_1 \,, \tag{1.52}$$

com $C_1 = M_n \|x\| \dfrac{1}{r'Ct} \, e^{-r'Ct}$; logo,

$$\left\| \int_{\gamma_1(r',\, m')} e^{t\mu} R(\mu : A)x \, d\mu \right\| \leq C_1, \tag{1.53}$$

para $t > 0$. Analogamente, se $\mu \in \gamma_3(r', \, m')$ obtemos

$$\left\| \int_{\gamma_3(r',\, m')} e^{t\mu} R(\mu : A)x \, d\mu \right\| \leq C_1, \tag{1.54}$$

para $t > 0$. Para o caso em que $\mu \in \gamma_2(r', \, m')$ observamos que

$$\left\| \int_{\gamma_2(r',\, m')} e^{t\mu} R(\mu : A)x \, d\mu \right\| \leq M_{m'} \int_{-\, m'}^{m'} |\, e^{tr' e^{i\vartheta}} | \frac{1}{|r' e^{i\vartheta}|} \, | \, ir' e^{i\vartheta} | \, \|x\| \, d\vartheta,$$

donde,

$$\left\| \int_{\gamma_2(r',\, m')} e^{t\mu} R(\mu : A)x \, d\mu \right\| \leq M_{m'} \int_0^{2\pi} e^{\,\cos\vartheta} \, \|x\| \, d\vartheta,$$

implicando,

$$\left\| \int_{\gamma_2(r',\, m')} e^{t\mu} R(\mu : A)x \, d\mu \right\| \leq M_{m'} 2\pi e \|x\|. \tag{1.55}$$

Assim, de (1.53), (1.54) e (1.55) a integral definida em (1.48) converge em $L(X)$, para qualquer $t > 0$. Agora, seja D_ρ a região delimitada pelas curvas $\Upsilon, R_\rho, \Lambda, S_\rho$, dados por,

$$\Upsilon = \Upsilon(\rho, r, \delta') = \bigcup_{l=1}^{3} \Upsilon_l(\rho, r, \delta'),$$

$$\Lambda = \Lambda(\rho, r', m') = \bigcup_{l=1}^{3} \Lambda_l(\rho, r', m'),$$

onde,

$$\begin{cases} \Upsilon_1(\rho, r, \delta') = \{se^{i(\pi/2+\delta')} : s \in [r, \rho]\}, \\ \Upsilon_2(\rho, r, \delta') = \{re^{i\nu} : -\pi/2 - \delta' \leq \nu \leq \pi/2 + \delta'\}, \\ \Upsilon_3(\rho, r, \delta') = \{se^{-i(\pi/2+\delta')} : s \in [r, \rho]\}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Lambda_1(\rho, r', m') = \{se^{i(\pi/2+m')} : s \in [r', \rho]\}, \\ \Lambda_2(\rho, r', m') = \{r'e^{i\nu} : -\pi/2 - m' \leq \nu \leq \pi/2 + m'\}, \\ \Lambda_3(\rho, r', m') = \{se^{-i(\pi/2+m')} : s \in [r', \rho]\} \end{cases}$$

$$R_\rho = \left\{\rho e^{i\eta_\beta} : \eta_\beta \in \left(\frac{\pi}{2} + m', \frac{\pi}{2} + \delta'\right)\right\},$$

e

$$S_\rho = \left\{\rho e^{i\eta_\omega} : \eta_\omega \in \left(-\frac{\pi}{2} + m', -\frac{\pi}{2} + \delta'\right)\right\},$$

como na Figura 1.6,

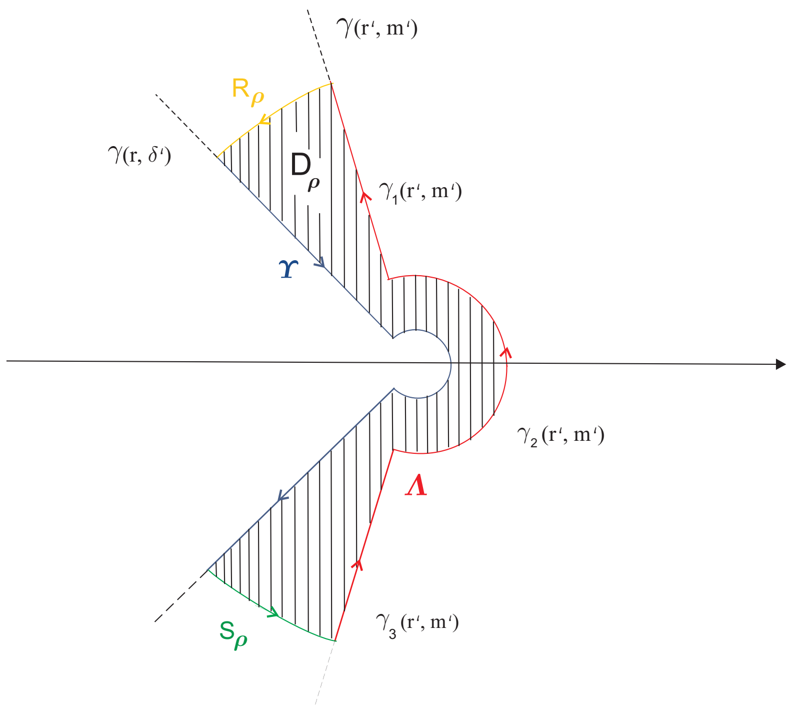

Figura 1.6: a região D_ρ.

cuja fronteira, $\partial D_\rho = \Upsilon \cup R_\rho \cup \Lambda \cup S_\rho$, é orientada no sentido anti-horário. Da analiticidade da função $\mu \to e^{t\mu}R(\mu, A)$ em $\sum_{\delta'}$ (Veja proposição $B.4$) e do TEOREMA DE CAUCHY, Teorema A.10 , temos

$$\int_{\partial D_\rho} e^{t\mu}R(\mu, A)d\mu = 0,$$

ou seja,

$$\int_{\Upsilon} e^{t\mu}R(\mu, A)d\mu + \int_{\Lambda} e^{t\mu}R(\mu, A)d\mu + \int_{R_\rho} e^{t\mu}R(\mu, A)d\mu + \int_{S_\rho} e^{t\mu}R(\mu, A)d\mu = 0. \tag{1.56}$$

Além disso, as integrais sobre os dois arcos R_ρ, S_ρ tendem a zero quando $\rho \to \infty$; pois, se $\mu \in R_\rho$ temos $\mu = \rho e^{i\eta_\beta}$ com

$$\cos\eta_\beta \leq -K,$$

onde K é uma constante positiva; neste caso,

$$\left\| \int_{R_\rho} e^{t\mu}R(\mu : A)d\mu \right\| \leq M_{\delta'} \int_{\pi/2+m'}^{\pi/2+\delta'} e^{-\rho t K}\, d\eta_\beta = K_1 e^{-\rho t K} \xrightarrow[\rho\to\infty]{} 0,$$

com $K_1 = M_{\delta'}(\pi + \delta' + m')$; se $\mu \in S_\rho$ então $\mu = \rho e^{i\eta_\omega}$ com

$$\cos\eta_\omega \leq -L,$$

onde L é uma constante positiva; neste caso,

$$\left\| \int_{S_\rho} e^{t\mu}R(\mu : A)d\mu \right\| \leq M_{\delta'} \int_{-\pi/2+m'}^{-\pi/2+\delta'} e^{-\rho t K}\, d\eta_\omega = L_1 e^{-\rho t L} \xrightarrow[\rho\to\infty]{} 0,$$

com $L_1 = M_{\delta'}(-\pi + \delta' + m')$. Portanto, passando ao limite em (1.56) quando $\rho \to \infty$, concluimos

$$\int_{\gamma(r,\delta')} e^{t\mu}R(\mu, A)d\mu = \int_{\gamma(r',m')} e^{t\mu}R(\mu, A)d\mu$$

e a prova está completa. ■

Teorema 1.5 *Suponha que A verifica a* **Condição** $A_{\delta\cup\{0\}}$. *Se* $(S(t))_{t\geq 0}$ *é a família de operadores definida em (1.48) então as seguintes propriedades são verificadas.*

(i) O operador $S(t), t > 0$ é linear e contínuo em X. E mais, existe um $C > 0$ tal que $\|S(t)\| \leq C$;

(ii) S(0)=I;

(iii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ *para todo* $t, s \geq 0$;

(iv) *Para cada* $x \in X$, $S(t)x \to x$ *quando* $t \downarrow 0$.

Demonstração. Mostraremos cada item de forma separada.

(i) : A linearidade segue da linearidade de $R(\mu : A)$ e da linearidade da integral. A continuidade segue diretamente de (1.53), (1.54) e (1.55) e do fato que para $t > 0$,

$$\|S(t)x\| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{3} \left\| \int_{\gamma_i(r',m')} e^{t\mu} R(\mu : A)x \, d\mu \right\| \leq \tilde{C} \|x\| \, .$$

Com relação a limitação, se $t > 0$, de (1.48) ,

$$S(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r,\,\delta\,')} e^{t\mu} R(\mu : A) \, d\mu. \tag{1.57}$$

As estimativas para $t \geq \delta_1$ são imediatas, mas para $t \approx 0$ é preciso refinar a argumentação. Mudando variáveis para $\xi = \mu t$, em (1.57) e usando o Lema 1.4,

$$S(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(rt,\,\delta\,')} e^{\xi} R\bigg(\frac{\xi}{t} : A\bigg) \frac{d\xi}{t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r,\,\delta\,')} e^{\xi} R\bigg(\frac{\xi}{t} : A\bigg) \frac{d\xi}{t} \, .$$

Seja $\xi \in \gamma_1(r,\, \delta\,')$ e considere $\eta = \arg \xi$. Definindo $f(\xi) = e^{\xi} R\bigg(\dfrac{\xi}{t} : A\bigg) \dfrac{1}{t}$ e fazendo

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \eta = \varphi(\rho) \Rightarrow \varphi\,'(\rho) = \cos \eta, \\ y &= \rho \sin \eta = \phi(\rho) \Rightarrow \varphi\,'(\rho) = \sin \eta, \end{aligned}$$

temos,

$$\left\| \int_{\gamma_1(r,\delta\,')} e^{\xi} R\bigg(\frac{\xi}{t} : A\bigg) \frac{d\xi}{t} \right\| \leq \int_r^{\infty} \|f\big(\varphi(p) + i\phi(p)\big)\big[\varphi\,'(p) + i\phi\,'(p)\big)\big]\| \, d\rho;$$

então,

$$\left\| \int_{\gamma_1(r,\delta\,')} e^{\xi} R\bigg(\frac{\xi}{t} : A\bigg) \frac{d\xi}{t} \right\| \leq \int_r^{\infty} \left\| e^{\rho e^{i\eta}} R\bigg(\frac{\rho e^{i\eta}}{t} : A\bigg) \frac{e^{i\eta}}{t} \right\| d\rho;$$

implicando, de (1.47), que

$$\left\| \int_{\gamma_1(r,\delta\,')} e^{\xi} R\bigg(\frac{\xi}{t} : A\bigg) \frac{d\xi}{t} \right\| \leq \int_r^{\infty} |\, e^{\rho e^{i\eta}} | \, \frac{M_{\delta'} \, t}{|\rho e^{i\eta}|} \, \frac{|\, e^{i\eta}|}{t} \, d\rho;$$

logo,

$$\left\| \int_{\gamma_1(r,\delta\,')} e^{\xi} R\bigg(\frac{\xi}{t} : A\bigg) \frac{d\xi}{t} \right\| \leq M_{\delta'} \int_r^{\infty} e^{\rho \cos \eta} \frac{d\rho}{\rho} < \infty \, . \tag{1.58}$$

Analogamente, se $\xi \in \gamma_3(r,\, \delta\,')$,

$$\left\| \int_{\gamma_3(r,\delta\,')} e^{\xi} R\bigg(\frac{\xi}{t} : A\bigg) \frac{d\xi}{t} \right\| \leq \int_r^{\infty} \left\| e^{\rho e^{-i\eta}} R\bigg(\frac{\rho e^{-i\eta}}{t} : A\bigg) \frac{e^{-i\eta}}{t} \right\| d\rho;$$

logo,
$$\left\| \int_{\gamma_3(r,\delta')} e^{\xi} R\Big(\frac{\xi}{t} : A\Big) \frac{d\xi}{t} \right\| \leq M_{\delta'} \int_r^{\infty} e^{\rho \cos\eta} \frac{d\rho}{\rho} < \infty \, . \tag{1.59}$$
Se $\xi \in \gamma_2(r,\, \delta')$, então $\xi = re^{iv}$ e usando a parametrização

$$\begin{aligned} x &= r\cos\vartheta = \varphi(\vartheta) \Rightarrow \varphi'(\vartheta) = -r\sin\vartheta, \\ y &= r\sin\vartheta = \phi(\vartheta) \Rightarrow \varphi'(\vartheta) = r\cos\vartheta, \end{aligned}$$

temos
$$\left\| \int_{\gamma_2(r,\delta')} e^{\xi} R\Big(\frac{\xi}{t} : A\Big) \frac{d\xi}{t} \right\| \leq \int_{-\delta'}^{\delta'} \left\| e^{re^{i\vartheta}} R\Big(\frac{re^{i\vartheta}}{t} : A\Big) ire^{i\vartheta} \frac{1}{t} \right\| d\vartheta;$$
então,
$$\left\| \int_{\gamma_2(r,\delta')} e^{\xi} R\Big(\frac{\xi}{t} : A\Big) \frac{d\xi}{t} \right\| \leq \int_{-\delta'}^{\delta'} |e^{re^{i\vartheta}}| \, \frac{M_{\delta'}}{|re^{iv}|} \, t \, |ire^{i\vartheta}| \, \frac{1}{t} \Big\| d\vartheta,$$
ou seja,
$$\left\| \int_{\gamma_2(r,\delta')} e^{\xi} R\Big(\frac{\xi}{t} : A\Big) \frac{d\xi}{t} \right\| \leq M_{\delta'} \int_{-\delta'}^{\delta'} e^{r\cos\vartheta} \, d\vartheta < \infty. \tag{1.60}$$
Assim, de (1.58), (1.59) e (1.60),

$$\|S(t)\| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{3} \left\| \int_{\gamma_i(r,\,\delta')} e^{\xi} R\Big(\frac{\xi}{t} : A\Big) \frac{d\xi}{t} \right\| \leq M, \quad \forall t \geq 0.$$

(ii) é imediata da definição.

(iii) Sejam $t_1, t_2 > 0, \gamma(r,\delta'), \gamma(r+c,\delta'),\ c > 0$, curvas de classe C^1 por partes definidas como (1.49). Para $\mu \in \gamma(r,\delta'),\ \lambda \in \gamma(r+c,\delta')$ definamos $f(\mu) = \dfrac{e^{\mu t_1}}{\lambda - \mu}$ e $g(\lambda) = e^{\lambda t_2}$. Consideramos as regiões Ξ e Θ, delimitadas, respectivamente, por $\Gamma \cup \Lambda_r$ e $\Upsilon \cup \Lambda_{r+c}$, com

$$\Gamma = \Gamma(r,\delta') = \bigcup_{l=1}^{3} \Gamma_l(r,\delta'),$$

$$\begin{cases} \Gamma_1(r,\delta') = \{se^{i(\pi/2+\delta')} : s \in [r,\rho]\}, \\ \Gamma_2(r,\delta') = \{re^{i\nu} : -\pi/2 - \delta' \leq \nu \leq \pi/2 + \delta'\}, \\ \Gamma_3(r,\delta') = \{se^{-i(\pi/2+\delta')} : s \in [r,\rho]\}, \end{cases}$$

$$\Lambda_r = \Big\{ re^{i\eta} : \eta \in \Big(-\frac{\pi}{2} + \delta', \frac{\pi}{2} + \delta' \Big) \Big\},$$

$$\Upsilon = \Upsilon(r+c,\delta') = \bigcup_{l=1}^{3} \Gamma_l(r+c,\delta'),$$

$$\begin{cases} \Upsilon_1(r+c,\delta') = \{se^{i(\pi/2+\delta')} : s \in [r+c,\rho]\}, \\ \Upsilon_2(r+c,\delta') = \{(r+c)e^{i\nu} : -\pi/2-\delta' \leq \nu \leq \pi/2+\delta'\}, \\ \Upsilon_3(r+c,\delta') = \{se^{-i(\pi/2+\delta')} : s \in [r+c,\rho]\}, \end{cases}$$

$$\Lambda_{r+c} = \Big\{(r+c)e^{i\theta} : \theta \in \Big(-\frac{\pi}{2}+\delta', \frac{\pi}{2}+\delta'\Big)\Big\},$$

como nas Figuras 1.7 e 1.8 (veja à seguir).

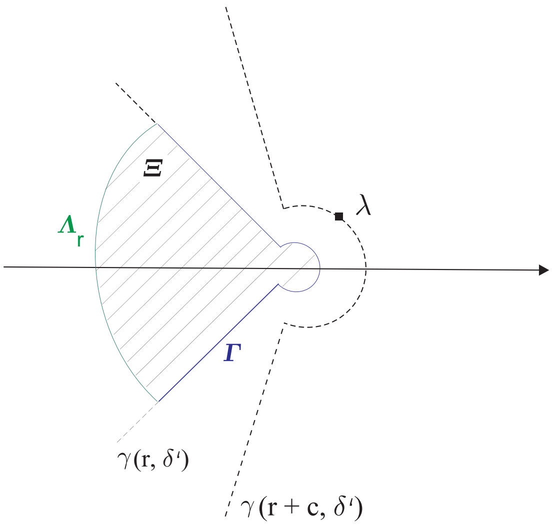

Figura 1.7: a região Ξ.

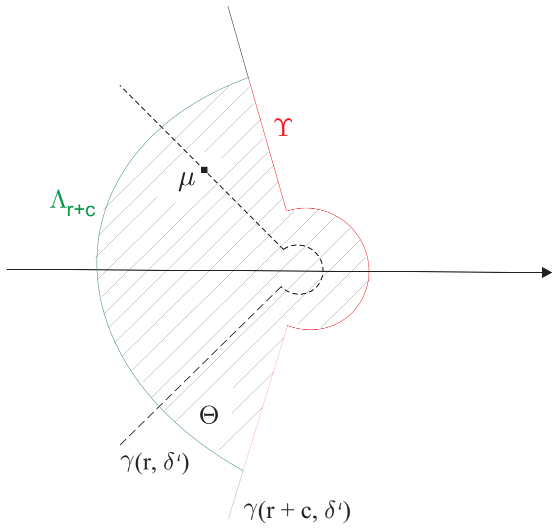

Figura 1.8: a região Θ.

Claramente, a função $f(\cdot)$ é analítica em Ξ e $g(\cdot)$ é analítica em Θ. Assim, pelo TEOREMA DE CAUCHY (Teorema A.10),

$$\int_{\partial\Xi} f(\mu)\,d\mu = 0,$$

ou seja,

$$\int_{\Gamma} f(\mu)\,d\mu + \int_{\Lambda_r} f(\mu)\,d\mu = 0. \tag{1.61}$$

Sendo $|\mu-\lambda| \geq |\mu|-|\lambda| = r-|\lambda| > 0$, para $r \approx \infty$; donde,

$$\frac{r}{r-|\lambda|} = \frac{1}{1-\frac{|\lambda|}{r}} \xrightarrow[r\to\infty]{} 1;$$

temos

$$\left\| \int_{\Lambda_r} f(\mu)\, d\mu \right\| \leq \int_{-\pi/2+\delta\,'}^{\pi/2+\delta\,'} \frac{|e^{t_1 r e^{i\eta}}|}{r - |\lambda|}\, r d\eta$$

$$\leq M \int_{-\pi/2+\delta\,'}^{\pi/2+\delta\,'} e^{r t_1 \cos \eta}\, d\eta, \qquad r \approx \infty$$

$$= M e^{-r t_1 k} \left(2 \left(\frac{\pi}{2} + \delta' \right) \right) \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$$

logo,

$$\int_{\Lambda_r} f(\mu)\, d\mu \to 0 \quad \text{quando } r \to \infty. \tag{1.62}$$

De (1.61) e (1.62) encontramos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r, \delta\,')} \frac{e^{\mu t_1}}{\lambda - \mu}\, d\mu = 0, \qquad \lambda \in \gamma(r + c, \delta'). \tag{1.63}$$

Também, pela FÓRMULA DA INTEGRAL DE CAUCHY(Fórmula A.2), obtemos

$$\int_{\Upsilon} \frac{g(\lambda)}{\lambda - \mu}\, d\lambda + \int_{\Lambda_{r+c}} \frac{g(\lambda)}{\lambda - \mu}\, d\lambda = 2\pi i e^{\mu t_2}. \tag{1.64}$$

Usando o mesmo raciocínio para provar (1.62), temos

$$\int_{\Lambda_{r+c}} \frac{g(\lambda)}{\lambda - \mu}\, d\lambda \to 0, \quad \text{quando } r \to +\infty.$$

Assim,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r+c, \delta\,')} \frac{e^{\lambda t_2}}{\lambda - \mu}\, d\lambda = e^{\mu t_2}, \qquad \mu \in \gamma(r, \delta'); \tag{1.65}$$

Agora,

$$S(t_1) S(t_2) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{\gamma(r,\, \delta\,')} e^{\mu t_1} R(\mu : A) \int_{\gamma(r+c,\, \delta\,')} e^{\lambda t_2} R(\lambda : A) d\lambda d\mu.$$

Usando a IDENTIDADE DO RESOLVENTE, Teorema B.2,

$$R(\mu : A) R(\lambda : A) = \frac{R(\mu : A) - R(\lambda : A)}{\lambda - \mu},$$

segue que

$$S(t_1) S(t_2) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{\gamma(r,\, \delta\,')} \int_{\gamma(r+c, \delta\,')} e^{\mu t_1} e^{\lambda t_2} \left(\frac{R(\mu : A) - R(\lambda : A)}{\lambda - \mu} \right) d\lambda d\mu.$$

Logo, pelo TEOREMA DE FUBINI

$$S(t_1) S(t_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r,\, \delta\,')} e^{\mu t_1} R(\mu : A) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r+c,\, \delta\,')} \frac{e^{\lambda t_2}}{\lambda - \mu} d\lambda \right) d\mu$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r+c,\, \delta\,')} e^{\lambda t_2} R(\lambda : A) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r,\, \delta\,')} \frac{e^{\mu t_1}}{\lambda - \mu} d\mu \right) d\lambda.$$

Portanto,

$$S(t_1)S(t_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\,\delta')} e^{\mu(t_1+t_2)}R(\mu : A)d\mu = S(t_1+t_2),$$

como queríamos demostrar.

(iv) Seja $x \in D(A)$. Da representação de $S(t)$ com

$$S(t)x - x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\delta')} e^{t\mu}R(\mu, A)x - x.$$

Considerando, $\Upsilon = \Gamma \cup \Lambda_r$ e C_r o círculo de raio r centrado na origem, como na Figura 1.9, temos pelo TEOREMA DE CAUCHY (Teorema A.10) que

$$\int_{\Upsilon} \frac{e^{\mu t}}{\mu}\, d\mu = \int_{C_r} \frac{e^{\mu t}}{\mu - 0}\, d\mu = 2\pi i e^{0t},$$

onde a última igualdade é válida pela FÓRMULA DA INTEGRAL DE CAUCHY (Fórmula A.2); assim,

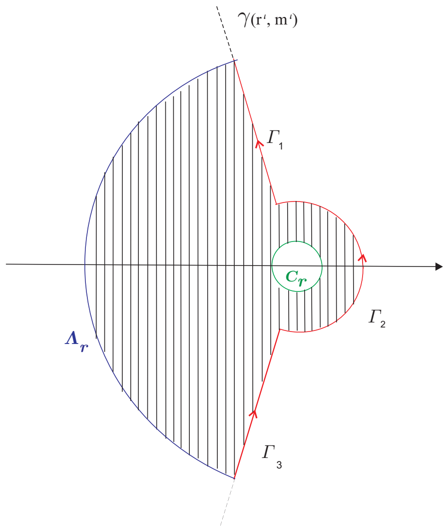

Figura 1.9: Γ e o círculo C_r.

$$\int_{\Upsilon} \frac{e^{\mu t}}{\mu}\, d\mu = 2\pi i;$$

logo,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\delta')} \frac{e^{\mu t}}{\mu}\, d\mu = 1.$$

Usando a IDENTIDADE DO RESOLVENTE, $R(\mu, A)Ax = \mu R(\mu : A)x - x$, (Teorema B.2) obtemos

$$S(t)x - x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\delta')} e^{t\mu}\left(R(\mu, A) - \frac{1}{\mu}\right)x\, d\mu$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\delta')} \frac{e^{t\mu}}{\mu}\, R(\mu, A)Ax\, d\mu.$$

Fazendo a mudança de variáveis $\mu = \dfrac{\xi}{t}$ e usando o Lema 1.4, temos

$$S(t)x - x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(rt,\delta')} \frac{e^{\xi}}{(\xi/t)} R\left(\frac{\xi}{t} : A\right)Ax\frac{d\xi}{t} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\delta')} \frac{e^{\xi}}{\xi} R\left(\frac{\xi}{t} : A\right)Ax\, d\xi.$$

Além disso,

$$\left\|\frac{e^{\xi}}{\xi}R\left(\frac{\xi}{t}:A\right)Ax\right\| \leq \frac{e^{Re\xi}}{|\xi|^2}\,t\,M\,\|Ax\|.$$

Note,

$$f_t(\xi) \to 0, \quad \text{quando } \; t \to 0;$$

$$\|f_t(\xi)\| \leq \frac{e^{Re\xi}}{|\xi|^2}M\|Ax\| \in L^1(\gamma(r,\delta\,'))$$

$$\int_{\gamma(r,\delta')} \frac{e^{Re\xi}}{|\xi|^2}M\|Ax\|\,d\xi < \infty;$$

logo, pelo TEOREMA DA CONVERGÊNCIA DOMINADA DE LEBESGUE (Teorema D.5),

$$\lim_{t\downarrow 0}\big(S(t)x - x\big) = 0, \text{ para } x \in D(A).$$

Então, para $t_n \downarrow 0,\; t_n \in (0,\infty)$

$$S(t_n)x \to S(0)x \quad \text{em } D(A). \tag{1.66}$$

Do Teorema 1.5 (item (i)),

$$\|S(t)\| \leq C,$$

logo,

$$\|S(t_n)\| \leq C. \tag{1.67}$$

De (1.66) e (1.67) segue pelo Lema A.1 que

$$S(t_n)x \to S(0)x \quad \text{em } \overline{D(A)};$$

e, portanto, sendo D(A) denso em X

$$S(t)x \to x \quad \text{em } X.$$

A prova do Teorema 1.5 está completa agora. ■

Proposição 1.6 *Suponha que A verifica a* **Condição** $A_{\delta\cup\{0\}}$. *Então A é um gerador de um C_0-semigrupo $T(t)$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq C$ para alguma constante C. Além disso,*

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\delta\,')} e^{\lambda t}R(\lambda : A)\,d\lambda \tag{1.68}$$

onde $\gamma(r,\delta')$ *definida como em* (1.49).

Demostração. Seja

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\,\delta\,')} e^{\mu t} R(\mu : A)\, d\mu. \tag{1.69}$$

Considere $\rho > r$ e $\Gamma(\rho, r, \delta\,') = \Gamma(\rho,\, r, \delta\,') \cup \Lambda(\rho, \delta\,')$, com $\Lambda(\rho, \delta\,')$ e $\Upsilon(\rho, r, \delta\,')$ curvas de classe C^1 por partes descritas na forma

$$\Lambda(\rho, \delta\,') = \Big\{\rho e^{i\vartheta} : -\tfrac{\pi}{2} - \delta\,' \le \vartheta \le \tfrac{\pi}{2} + \delta\,'\Big\},$$

$$\Upsilon(\rho, r, \delta\,') = \bigcup_{l=1}^{3} \Upsilon_l(\rho, r, \delta\,'),$$

onde

$$\begin{aligned}
\Upsilon_1(\rho, r, \delta\,') &= \{s e^{i(\pi/2 + \delta\,')} : s \in [r, \rho]\},\\
\Upsilon_2(\rho, r, \delta\,') &= \{r e^{i\vartheta} : -\pi/2 - \delta' \le\ \vartheta \le \pi/2 + \delta\,'\},\\
\Upsilon_3(\rho, r, \delta\,') &= \{s e^{-i(\pi/2 + \delta\,')} : s \in [r, \rho]\},
\end{aligned}$$

orientadas de maneira que $\Lambda(\rho, \delta\,')$ seja descrita no sentido anti-horário (Veja Figura 1.10).

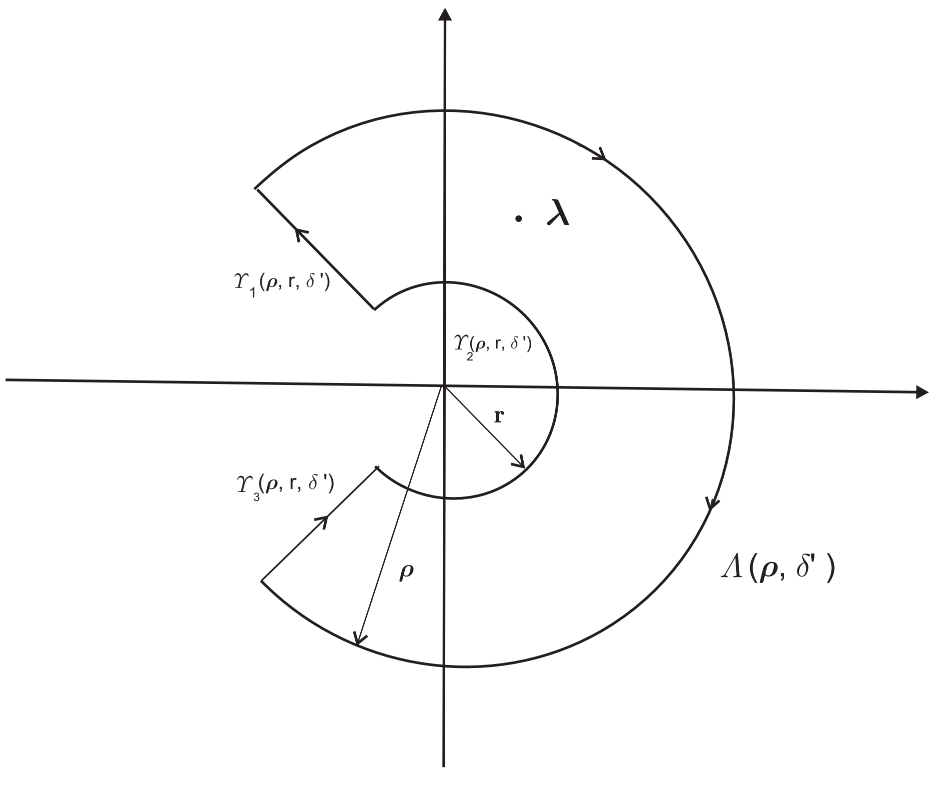

Figura 1.10: a curva $\Gamma(\rho, r, \delta\,')$.

Pela FÓRMULA DA INTEGRAL DE CAUCHY (Fórmula A.2),

$$R(\lambda : A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\rho,\, r, \delta\,')} \frac{R(\mu : A)}{(\mu - \lambda)}\, d\mu,$$

ou seja,

$$R(\lambda : A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Upsilon(\rho,\, r, \delta\,')} \frac{R(\mu : A)}{(\mu - \lambda)}\, d\mu + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda(\rho, \delta\,')} \frac{R(\mu : A)}{(\mu - \lambda)}\, d\mu. \tag{1.70}$$

Ao longo da curva $\Lambda(\rho, \delta\,')$ sendo, $|\,\mu - \lambda| \geq |\mu| - |\lambda| = \rho - |\lambda| > 0$ para $\rho \approx \infty$, temos

$$\left\| \int_{\Lambda(\rho,\delta\,')} \frac{R(\mu : A)}{(\mu - \lambda)}\, d\mu \right\| \leq \int_{-\frac{\pi}{2}-\delta\,'}^{\frac{\pi}{2}+\delta\,'} \frac{M_{\delta\,'}}{|\rho e^{i\vartheta} - \lambda|\,|\rho e^{i\vartheta}|}\, d\vartheta \leq \frac{2}{\rho}\left(\frac{\pi}{2} + \delta\,'\right)\frac{M_{\delta\,'}}{\rho - |\lambda|} \to 0, \tag{1.71}$$

quando $\rho \to \infty$; donde, passando ao limite com $\rho \to \infty$ em (1.70) obtemos

$$R(\lambda : A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\, \delta\,')} \frac{R(\mu : A)}{(\mu - \lambda)}\, d\mu. \tag{1.72}$$

Por outro lado, da representação de $U(t)$ e do TEOREMA DE FUBINI obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t) dt &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\int_{\gamma(r,\delta\,')} e^{\mu t} R(\mu : A) d\mu\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\delta\,')} R(\mu : A)\left(\int_0^\infty e^{(\mu-\lambda)t}\, dt\right) d\mu, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t) dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\delta\,')} \frac{R(\mu : A)}{\mu - \lambda}\, d\mu\,. \tag{1.73}$$

De (1.72) e (1.73),

$$R(\lambda : A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t) dt. \tag{1.74}$$

Do Teorema 1.5, $U(t)$ é um C_0-semigrupo tal que

$$\|U(t)\| \leq C, \qquad t > 0;$$

então,

$$\|e^{-\lambda t} t^{n+1} U(t) x\| \leq C\|x\| t^{n+1} e^{-tRe\lambda}. \tag{1.75}$$

Sendo, a função do segundo membro da desigualdade (1.75) contínua e sua integral em relação a t convergente em $(0, \infty)$, temos

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{n+1} U(t) x\, dt \quad \text{converge uniformemente quando } Re\lambda > 0.$$

Então, segue que

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^n U(t)x\,dt\right) = -\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^{n+1}U(t)x\,dt, \qquad Re\lambda > 0. \tag{1.76}$$

Diferenciando (1.74) e usando (1.76),

$$\frac{d}{d\lambda}\,R(\lambda : A)x = -\int_0^\infty e^{-\lambda t}tU(t)x\,dt, \qquad Re\lambda > 0.$$

Assim,

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}\,R(\lambda : A)x = \int_0^\infty t^2 e^{-\lambda t}U(t)x\,dt \qquad Re\lambda > 0.$$

Por indução,

$$\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}\,R(\lambda : A)x = (-1)^{n-1}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}U(t)x\,dt. \tag{1.77}$$

Além disso, de (1.74), resulta que

$$\lim_{\mu\to\lambda} R(\mu : A) = R(\lambda : A), \qquad \forall x \in X;$$

logo, passando limite quando $\mu \to \lambda$ na IDENTIDADE DO RESOLVENTE (Teorema B.2),

$$\lim_{\mu\to\lambda}\frac{R(\lambda : A) - R(\mu, A)}{(\lambda - \mu)} = -\lim_{\mu\to\lambda}\Big[R(\lambda : A)R(\mu : A)\Big],$$

isto é,

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda : A) = -R(\lambda : A)^2;$$

procedendo por indução, deduzimos

$$\frac{d^{n-1}R(\lambda : A)}{d\lambda^{n-1}} = (-1)^{n-1}(n-1)!R(\lambda : A)^n. \tag{1.78}$$

Comparando (1.77) e (1.78),

$$(-1)^{n-1}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}U(t)x\,dt = (-1)^{n-1}(n-1)!R(\lambda : A)^n x$$

ou seja,

$$R(\lambda : A)^n x = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}U(t)x\,dt;$$

donde,

$$\begin{aligned}\|R(\lambda : A)^n\,x\| &= \left\|\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}U(t)x\,dt\right\| \\ &\leq C\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-Re\lambda t}\|x\|\,dt = \frac{C}{(Re\lambda)^n}\|x\|.\end{aligned}$$

Pela Corolário C.18 A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $T(t)$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq C$. Resta-nos provar (1.68). Seja $x \in D(A^2)$. Pelo Corolário 1.3, segue que

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda : A)x\, d\lambda. \tag{1.79}$$

Seja, agora, o caminho Λ_k dado por

$$\Lambda_k = \bigcup_{l=1}^{4}\Lambda_k^l$$

onde

$$\Lambda_k^1 = \big\{\lambda : \lambda = \gamma + is, -k \leq s \leq k\big\},$$

$$\Lambda_k^2 = \big\{\lambda : \lambda = s - ik, -k \leq s \leq \gamma\big\},$$

$$\Lambda_k^3 = \bigcup_{i=1}^{3}\Upsilon_i\big(k, r, \delta\,'\big)$$

com

$$\Upsilon_1\big(k, r, \delta\,'\big) = \big\{se^{i(\pi/2+\delta\,')} : s \in [r, k]\big\},$$

$$\Upsilon_2\big(k, r, \delta\,'\big) = \left\{re^{iv} : -\frac{\pi}{2} - \delta\,' \leq v \leq \frac{\pi}{2} + \delta\,'\right\},$$

$$\Upsilon_3\big(k, r, \delta\,'\big) = \big\{se^{-i(\pi/2+\delta\,')} : s \in [r, k]\big\},$$

e

$$\Lambda_k^4 = \big\{\lambda : \lambda = s + ik, -k \leq s \leq \gamma\big\},$$

orientado no sentido anti-horário. (Veja Figura 1.11.) Denotemos,

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\Lambda_k^1} e^{\lambda t}R(\lambda : A)\, d\lambda = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda : A)x\, d\lambda.$$

E mais, similarmente ao que fizemos para obter (1.15), temos

$$\int_{\Lambda_k^j} e^{\lambda t}R(\lambda : A)\, d\lambda \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,\ j = 2, 4.$$

Desta forma, podemos trocar o caminho de integração em (1.79) para $\gamma(r, \delta\,')$ e, por conseguinte,

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\delta\,')} e^{\lambda t}R(\lambda : A)x\, d\lambda = U(t)x, \tag{1.80}$$

para todo $x \in D(A^2)$. Sendo $D(A^2)$ denso em X, (Veja C.12.) segue que (1.80) é válida para todo $x \in X$, concluindo a demonstração da Proposição 1.6. ■

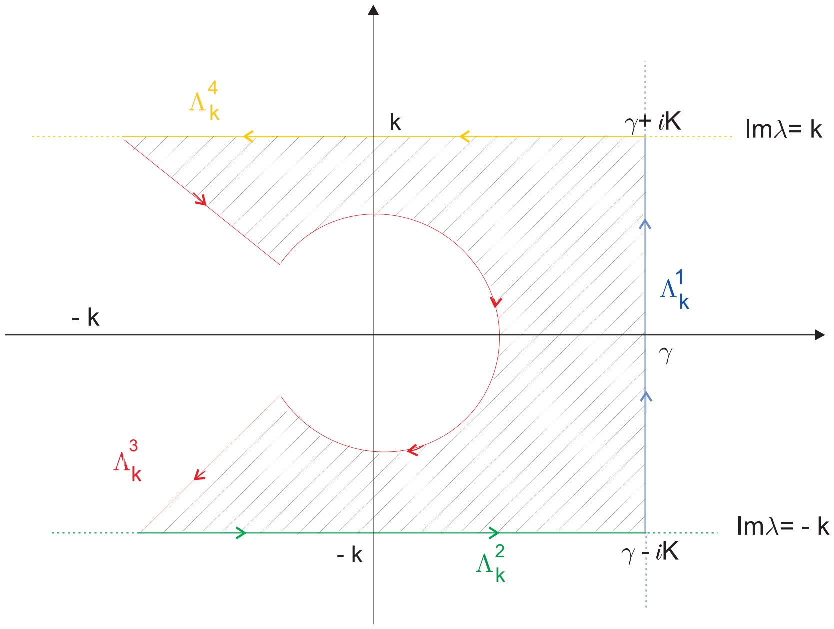

Figura 1.11: o caminho Λ_k.

1.1.1 Diagrama

Para concluir esta seção, colecionamos em um diagrama as informações referentes as relações entre um semigrupo, seu gerador e seu resolvente.

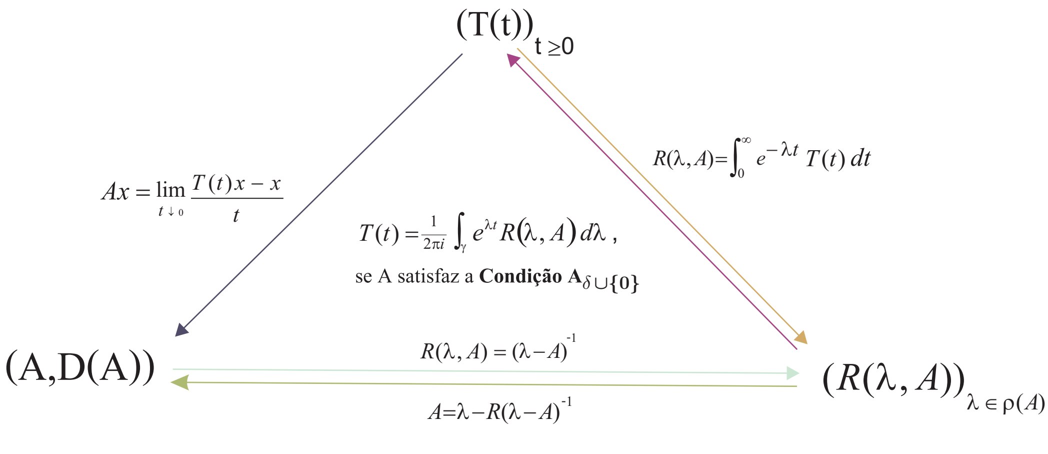

Figura 1.12: relações entre um semigrupo, seu gerador e seu resolvente.

1.2 Semigrupos Analíticos

Na seção anterior, trabalhamos com semigrupos cujo domínio é o eixo real não-negativo. Consideraremos, agora, a possibilidade de extender o domínio em regiões do plano complexo. Restringiremos para o caso de C_0-semigrupos uniformemente limitados. Os resultados para os C_0-semigrupos gerais seguem dos resultados correspondentes para C_0- semigrupos uniformemente limitados sempre multiplicando o semigrupo uniformemente limitado $T(t)$ por e^{-wt} para para alguma constante $w \geq 0$, e para todo $t \geq 0$. Nesta seção estabelecemos as principais propriedades dos semigrupos analíticos. Estamos especialmente interessados em um resultado que caracterize tal classe de semigrupos, ou seja, de um resultado que nos forneça condições suficientes para garantir que um determinado operador é um gerador de um semigrupo analítico.

Definição 1.7 *Seja* $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : \phi_1 < \arg z < \phi_2,\ \phi_1 < 0 < \phi_2\}$. *Uma família de operadores lineares limitados* $\big(T(z)\big)_{z\in\Gamma}$ *em* X *é um semigrupo analítico em* Γ, *se:*

(i) $z \to T(z)$ *é analítica em* Γ;

(ii) $T(0) = I$ *e* $\displaystyle\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \Gamma}} T(z)x = x$, *para todo* $x \in X$;

(iii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ *para* $z_1, z_2 \in \Gamma$.

Um semigrupo $T(t)$ será chamado *analítico* se é analítico em algum setor Γ contendo o eixo real não negativo.

No próximo resultado, são estabelecidas condições nescessárias e suficientes para que um operador fechado A seja o gerador de um semigrupo analítico.

Teorema 1.8 *Sejam* $A : D(A) \subset X \to X$ *o gerador infinitesimal de um* C_0*-semigrupo,* $T(t)$, *uniformente limitado e* $0 \in \rho(A)$. *Então as seguintes condições são equivalentes.*

(a) *O semigrupo* $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ *pode ser extendido à um semigrupo analítico em um setor* $\Gamma_\delta = \{z : |\, argz| < \delta\}$ *e* $\big(T(z)\big)_{z\in\overline{\Gamma}_{\delta'}}$ *é uniformemente limitado em todo subsetor fechado* $\overline{\Gamma}_{\delta'}$, $0 < \delta' < \delta$, *de* Γ_δ.

(b) *Existe* $C > 0$ *tal que para todo* $\sigma > 0$ *e* $\tau \neq 0$,

$$\big\|R(\sigma + i\tau : A)\big\| \leq \frac{C}{|\tau|}\,. \tag{1.81}$$

(c) *Existe* $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ *tal que* A *verifica a* **Condição** $A_{\delta \cup \{0\}}$.

(d) *T(t) é diferenciável e existe um* $C > 0$ *tal que*

$$\|AT(t)\| \leq \frac{C}{t} \qquad \textit{para todo } t > 0. \tag{1.82}$$

Demonstração. Vejamos,

(a) $\Rightarrow$ **(b)**. Sejam $0 < \delta' < \delta$ e $C > 0$ tal que

$$\|T(z)\| \leq C \quad \text{para todo } z \in \overline{\Gamma}_{\delta'}.$$

Para $x \in X$ e $\sigma > 0$ temos

$$R(\sigma + i\tau : A)x = \int_0^\infty e^{-(\sigma+i\tau)t}\, T(t)\, x\, dt. \tag{1.83}$$

Estudemos inicialmente o caso $\lambda = \sigma + i\tau$, $\tau > 0$. Para $r > 0$ definamos a curva C^1 por partes

$$\Lambda_r = \bigcup_{l=1}^{3} \Lambda_r^l$$

onde

$$\begin{aligned} \Lambda_r^1 &= \{\rho e^{-i\delta'} : \rho \in [0, r]\}, \\ \Lambda_r^2 &= \{r e^{-i\vartheta} : \vartheta \in [0, \delta']\}, \\ \Lambda_r^3 &= \{t : t \in [0, r]\}, \end{aligned} \tag{1.84}$$

e cuja orientação é dada no sentido anti-horário. (Veja Figura 1.13).

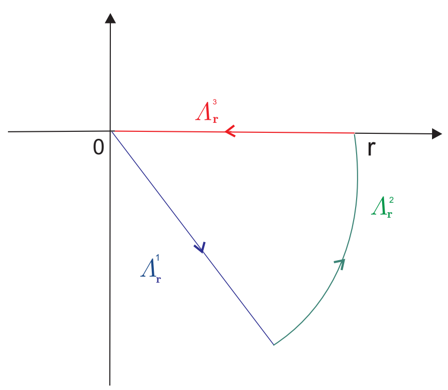

Figura 1.13: a curva Λ_r.

Sendo $\mu \to e^{-\lambda\mu}T(\mu)$ analítica temos pelo TEOREMA DE CAUCHY (Teorema A.10) que

$$\int_{\Lambda_r} e^{-\lambda\mu}T(\mu)\, d\mu = 0.$$

Sendo,

$$\begin{aligned}\left\| \int_{\Lambda_r^2} e^{-\lambda\mu}T(\mu)d\mu \right\| &\leq C\int_0^{\delta\,'} \left| e^{-r(\sigma+i\tau)e^{-i\vartheta}} \right| |d\mu| \\ &\leq C\int_0^{\delta\,'} e^{-r\sigma\cos\vartheta - r\tau\sin\vartheta}\, d\vartheta \leq C\int_0^{\delta\,'} e^{-r\tau\sin\vartheta} d\vartheta.\end{aligned}$$

podemos afirmar que,

$$\left\| \int_{\Lambda_r^2} e^{-(\sigma+i\tau)\mu}T(\mu)d\mu \right\| \to 0, \qquad \text{quando } r \to \infty,$$

o que implica, de (1.83) e do TEOREMA DE CAUCHY(Teorema A.10) que

$$R(\lambda : A) = \int_{\Pi^-_{\delta\,'}} e^{-\lambda\mu}T(\mu)\, d\mu \tag{1.85}$$

onde $\Pi^-_{\delta\,'} = \{\rho e^{-i\delta\,'} : \rho \geq 0\}$.
De (1.85),

$$\begin{aligned}\|R(\lambda : A)\| &= \left\| \int_{\Pi^-_{\delta\,'}} e^{-\lambda\mu}T(\mu)d\mu \right\| \\ &\leq C\int_0^{\infty} e^{-\rho(\sigma\cos(\delta\,') - \tau\sin(\delta\,'))}\, d\rho \\ &= \frac{C}{\sigma\cos(\delta\,') - \tau\sin(\delta\,')},\end{aligned}$$

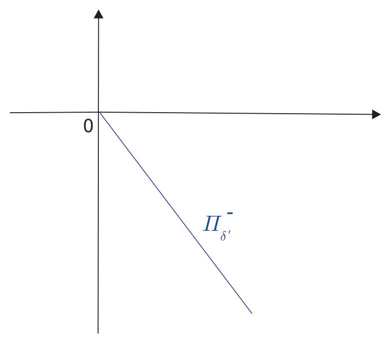

Figura 1.14: a curva $\Pi^-_{\delta\,'}$.

logo,

$$\|R(\sigma + i\tau : A)\| \leq \frac{C}{\tau}, \qquad \sigma > 0, \tau > 0, \tag{1.86}$$

onde C é independente de σ e τ. Usando o mesmo raciocínio anterior, ao considerarmos a curva C^1 por partes $\Upsilon_r = \bigcup_{l=1}^{3} \Upsilon_r^l$ onde

$$\begin{aligned}\Upsilon_r^1 &= \{\rho e^{i\delta\,'} : \rho \in [0, r]\}, \\ \Upsilon_r^2 &= \{re^{i\vartheta} : \vartheta \in [0, \delta\,']\}, \\ \Upsilon_r^3 &= \{t : t \in [0, r]\},\end{aligned} \tag{1.87}$$

a qual, também é orientada de modo que Υ_r^2 seja descrita no sentido anti-horário, (Veja Figura 1.15.)

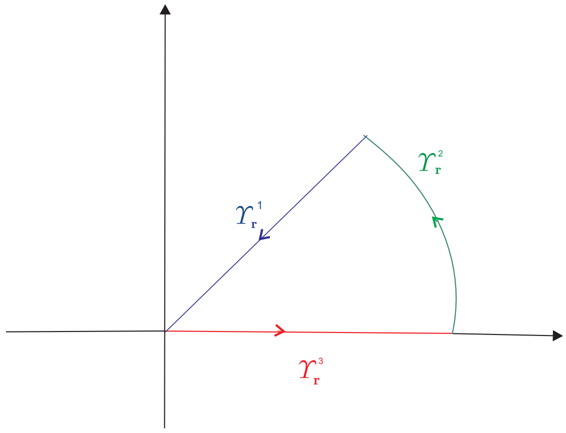

Figura 1.15: a curva Υ_r .

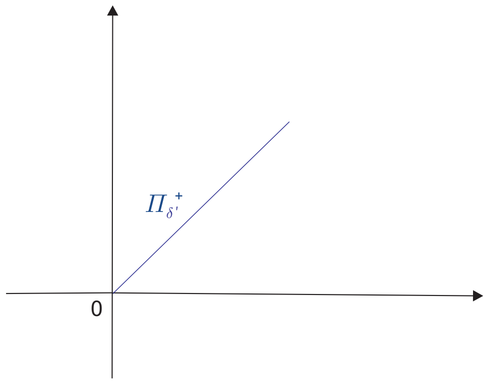

Figura 1.16: a curva $\Pi_{\delta'}^-$.

é possível mostrar que para $\sigma > 0, \tau < 0$

$$R(\lambda : A) = \int_{\Pi_{\delta'}^+} e^{-\lambda\mu} T(\mu)\, d\mu$$

onde $\Pi_{\delta'}^+ = \{\rho e^{i\delta'} : \rho > 0\}$ (Veja Figura 1.16.) o que permite mostrarmos que

$$\|R(\sigma + i\tau : A)\| \leq \frac{C}{-\tau}, \qquad \sigma > 0, \tau > 0 \tag{1.88}$$

sendo C uma constante independente de τ e σ. Provando de (1.86) e (1.88) que ocorre (1.81).

(b)⇒(c). Sabemos pelo Coroláro C.19 que

$$\|R(\sigma + i\tau : A)\| \leq \frac{1}{\sigma}\,; \tag{1.89}$$

pois, $\sigma > 0$. Isto, justamente com **(b)** nos permite afirmar que existe um $M > 0$, independente de τ e σ, tal que

$$\|R(\sigma + i\tau : A)\| \leq \frac{M}{|\,\sigma + i\tau|}\,, \qquad \sigma > 0,\ \tau \neq 0; \tag{1.90}$$

de fato, pela desigualdade triangular $|\,\sigma + i\tau| \leq |\,\sigma| + |\,\tau|$; se $|\,\sigma| \geq |\,\tau|$, de (1.89) temos

$$\frac{1}{|\,\sigma + i\tau|} \geq \frac{1}{2|\,\sigma|} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sigma} \geq \frac{1}{2}\,\|R(\sigma + i\tau : A)\|;$$

o que implica,

$$\|R(\sigma + i\tau : A)\| \leq \frac{2}{|\,\sigma + i\tau|};$$

neste caso, basta considerarmos $M = 2$; se $|\sigma| < |\tau|$,

$$\frac{1}{|\,\sigma + i\tau|} \geq \frac{1}{2|\,\tau|} = \frac{1}{2C}\,\frac{C}{|\,\tau|} \geq \frac{1}{2C}\,\|R(\sigma + i\tau : A)\|,$$

onde a última desigualdade é válida por **(b)**, implicando

$$\|R(\sigma + i\tau : A)\| \leq \frac{2C}{|\,\sigma + i\tau|};$$

neste caso, basta considerarmos $M = 2C$ e concluimos a prova para $\lambda = \sigma + i\tau$ com $\sigma > 0$. Fixamos, agora,

$$\lambda^* = \sigma^* + i\tau^*,$$

como na Figura 1.17.

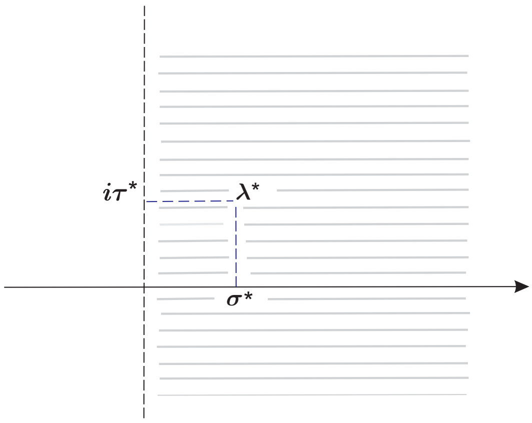

Figura 1.17: o ponto λ^*

Pela Proposição B.4, $R(\lambda : A)$ está bem definido em uma bola de centro em λ^* se

$$\|R(\lambda^* : A)\|\,|\,\sigma^* + i\tau^* - \lambda| < \frac{1}{2}.$$

Considere $\lambda = \sigma + i\tau$, como na Figura 1.18, com

$$\frac{|\,\sigma|}{|\,\tau|} < \frac{1}{2C} \qquad (\sigma \leq 0). \tag{1.91}$$

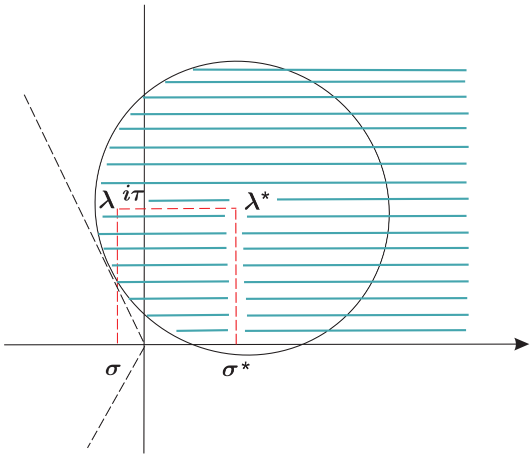

Figura 1.18: os pontos λ e λ^*.

Devemos encontrar λ^* tal que $\lambda = \sigma + i\tau$ verificando (1.91), está dentro da bola com centro em λ^*; a qual $R(\lambda : A)$ vai estar bem definido. Considere

$$\lambda^* = \sigma^* + i\tau \quad \sigma^* > 0$$

tal que

$$\frac{|\,\sigma^* - \sigma|}{|\,\tau|} \leq \frac{1}{2C}.$$

Note,

$$\|R(\lambda^* : A)\|\|\,\sigma^* + i\tau - \sigma - i\tau| = \|R(\lambda^* : A)\|\,|\,\sigma^* - \sigma| \leq \frac{C}{|\,\tau|}\,|\,\sigma^* - \sigma| \leq C\,\frac{1}{2C} < \frac{1}{2}.$$

Portanto, $\lambda \in \rho(A)$. Com relação a (1.47), vemos que

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda : A)\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} R(\sigma^* + i\tau : A)^{n+1} \left(\sigma^* + i\tau - \sigma - i\tau\right)^n \right\| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|R(\sigma^* + i\tau : A)\|^{n+1} |\,\sigma^* - \sigma|^{\,n} \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{C}{|\,\tau|}\right)^{n+1} \left(\frac{|\,\tau|}{2C}\right)^n \\
&\leq \frac{C}{|\,\tau|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&\leq \frac{C}{(1 - 1/2)|\,\tau|}\,.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{\tilde{C}}{|\,\lambda|}\,.$$

Considere

$$\Delta_{2C} = \left\{\lambda : \sigma + i\tau; \sigma < 0 \ \text{ e } \ -\sigma < \frac{|\tau|}{2C}\right\} \cup \left[\left\{\lambda = \sigma + i\tau; \sigma \geq 0\right\} \backslash \left\{0\right\}\right].$$

(Veja Figura 1.19.)

Claramente, o setor Δ_{2C} é da forma

$$\Gamma_\delta = \left\{\lambda \in \mathbb{C}; |arg\lambda| \leq \frac{\pi}{2} + \delta\right\},$$

para algum $0 < \delta < \dfrac{\pi}{2}$. Portanto, para $0 < \delta' < \delta$ existe $M_{\delta'} > 0$ tal que

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M_{\delta'}}{|\,\lambda|}, \lambda \in \textstyle\sum_{\delta'}, \ \lambda \neq 0,$$

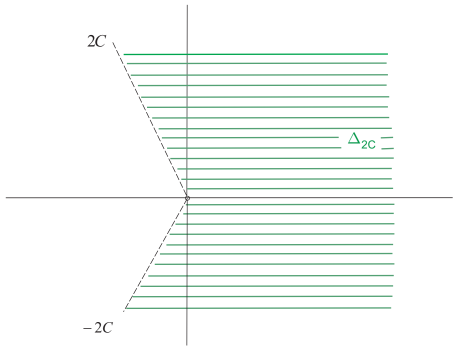

Figura 1.19: O setor Δ_{2C}.

o que completa a prova de **(b)** $\Rightarrow$ **(c)**.

(c) $\Rightarrow$ **(d).** Suponha que A verifica a **Condição** $A_{\delta\cup\{0\}}$ então, pela Proposição 1.6, A é gerador de um C_0-semigrupo limitado $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ tal que

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\mu t} R(\mu : A)\, d\mu, \tag{1.92}$$

onde γ é a curva composta pelos raios $\rho e^{i\vartheta}$ e $\rho e^{-i\vartheta}$, $\ 0 < \rho < \infty\ $ e $\pi/2 < \vartheta < \pi/2 + \delta$; γ é orientada de forma que a $Im\mu$ cresce ao longo de γ. A diferenciabilidade de $T(t)$ é justificada pelo Teorema D.7. Com relação a (1.82), sendo A um operador fechado, usando o Lema A.5 com $f(t) = e^{\mu t}R(\mu, A)$ e a representação (1.92), deduzimos que $T(t)x \in D(A)$ para todo $x \in D(A)$ e que

$$AT(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\mu t} AR(\mu : A)x\, d\mu.$$

Assim, da identidade $AR(\mu, A)x = \mu R(\mu, A)x - x$ e do TEOREMA DE CAUCHY (Teorema A.10), obtemos

$$AT(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\mu t}(\mu R(\mu, A)x - x)\, d\mu = \int_\gamma \mu e^{\mu t} R(\mu, A)x\, d\mu.$$

Além disso, diretamente da definição da curva γ, vemos que

$$\begin{aligned}\left\| \int_\gamma \mu e^{\mu t} R(\mu : A)\, d\mu \right\| &\leq \frac{M_{\delta'}}{2\pi}\left(2\int_0^\infty e^{\rho t \cos\left(\frac{\pi}{2}+\delta'\right)}\, d\rho\right)\\ &\leq \frac{c}{t},\end{aligned}$$

onde $M_{\delta'}$ é a constante em (1.47) e c é independente de $t > 0$. Com isso, obtemos **(d)**.

(d) $\Rightarrow$ **(a).** Sendo $T(t)$ um C_0-semigrupo diferenciável para $t > 0$ e A seu gerador infinitesimal segue, pelo Corolário C.22, que

$$T^{(n)}(t) = \left(AT\left(\tfrac{t}{n}\right)\right)^n = \left(T'\left(\tfrac{t}{n}\right)\right)^n, \tag{1.93}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Combinando isto com **(d)** e a desigualdade $\dfrac{n^n}{n!} \leq e^n$ temos

$$\frac{1}{n!}\,\|T^{(n)}(t)\| \leq \left(\frac{eC}{t}\right)^n, \tag{1.94}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $t > 0$. Em seguida, desenvolvemos $T(t)$ em série de Taylor. Para este fim, escolhemos $t > 0$ e $x \in X$ arbitrário. Pela FÓRMULA DE TAYLOR COM RESTO INTEGRÁL(Veja Elon [14].) temos para $|h| < t$ e para todo $j \in \mathbb{N}$

$$T(t+h)x = \sum_{n=0}^{j} \frac{h^n}{n!} T^{(n)}(t)x + \frac{1}{j!}\int_t^{t+h} (t+h-s)^j T^{(j+1)}(s)x\, ds. \tag{1.95}$$

Denotando o termo da integral do lado direito de (1.95) por $R_{j+1}(t+h)x$, fazendo uma mudança de variáveis com $s = t + wh$, assumindo $|h| \leq \dfrac{kt}{eC}$, $k \in (0,1)$ e (1.94), vemos que

$$\begin{aligned}\|R_{j+1}(t+h)\| &= \left\| \frac{h^{j+1}}{j!}\int_0^1 (1-w)^j\, T^{(j+1)}(t+wh)\, dw \right\|\\ &\leq \frac{|h|^{j+1}}{j!}\int_0^1 |1-w|^j\, \|T^{(j+1)}(t+wh)\|\, dw\\ &\leq \frac{\left(\frac{kt}{eC}\right)^{j+1}}{j!}\int_0^1 |1-w|^j \left(\frac{eC}{t+wh}\right)^{j+1} (j+1)!\, dw\\ &\leq k^{j+1}t^{j+1}(j+1)\int_0^1 \frac{(1-w)^j}{(t+wh)^{j+1}}\, dw\\ &\leq k^{j+1}(j+1)\int_0^1 \frac{(1-w)^j}{(1+\frac{wh}{t})^j}\left(\frac{1}{1+\frac{wh}{t}}\right)\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|R_{j+1}(t+h)\| \leq (j+1)k^j \int_0^1 \left[\frac{1-w}{\left(1+\frac{wh}{t}\right)}\right]^j \frac{1}{\left(1+\frac{wh}{t}\right)}\, dw. \tag{1.96}$$

Sendo,

$$\left|1+\frac{wh}{t}\right| \geq 1-\left|\frac{wh}{t}\right| = 1-w\frac{|h|}{t} \underbrace{>}_{\frac{|h|}{t}<\frac{k}{eC}<1} 1-w,$$

o que implica,

$$\left|\frac{1-w}{1+\frac{w}{t}h}\right| \leq 1;$$

e

$$1+\frac{wh}{t} \geq 1-\frac{w|h|}{t} \geq 1-w\frac{k}{eC} \geq 1-\frac{k}{eC} \equiv D,$$

o que implica,

$$\frac{1}{1+\frac{w}{t}h} \leq \frac{1}{D};$$

segue de (1.96) que

$$\|R_{j+1}(t+h)\| \leq (j+1)k^{j+1}\tilde{C} = jk^{j+1}\tilde{C} + k^{j+1}\tilde{C}$$

logo,

$$\lim_{j\to\infty} \|R_{j+1}(t+h)\| = 0$$

uniformemente para $|h| \leq k\dfrac{t}{eC}$ e para todo $k \in (0,1)$. Além disso,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T^{(n)}(t)}{n!}\right\| |z-t|^n &\leq \frac{1}{n!}\|T'(t/n)\|^n |z-t|^n \\ &\leq \frac{1}{n!}\left(\frac{C}{t}n\right)^n |z-t|^n \\ &\leq \left(\frac{eC}{t}|z-t|\right)^n,\end{aligned}$$

de onde deduzimos, juntamente com a hipótese de $T(t)$ ser uniformemente limitado, que a série

$$T_t(z) = T(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^n(t)}{n!}(z-t)^n \tag{1.97}$$

converge uniformemente para $z \in \mathbb{C}$, tal que

$$|z-t| < \frac{kt}{eC},$$

para algum $k \in (0,1)$. Assim, a família $T(z)$ é bem definida na região

$$\Delta_{\frac{kt}{Ce}} = \left\{ z = t + iy, t > 0 \ \text{ e } \ |y| < \frac{kt}{Ce} \right\} \backslash \{(0,0)\}, \quad k \in (0,1).$$

(Veja Figura 1.20.)

Claramente o setor $\Delta_{\frac{kt}{Ce}}$ é da forma

$$\Gamma_\delta = \{z \in \mathbb{C}, |argz| < \delta\},$$

para algum $0 < \delta < \pi/2$. Assim, podemos definir

$$\begin{aligned} T : \Gamma_\delta &\to L(X) \\ z &\rightsquigarrow T(z) = T_t(z); \qquad z \in B_{\frac{kt}{eC}}(t); \end{aligned}$$

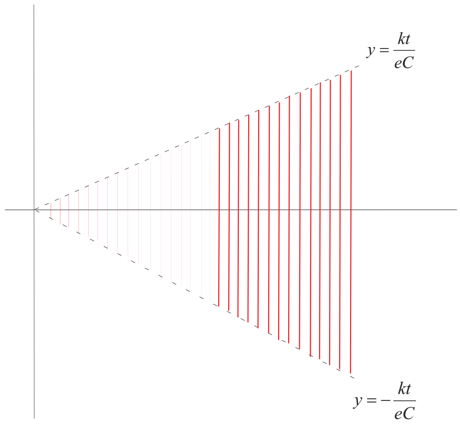

Figura 1.20: O setor $\Delta_{\frac{kt}{eC}}$

pois, definindo a função

$$\begin{aligned} H : B_{\frac{kt_1}{eC}}(t_1) \cap B_{\frac{kt_2}{eC}}(t_2) &\to L(X) \\ z \qquad &\rightsquigarrow \quad H(z) = T_{t_1}(z) - T_{t_2}(z); \end{aligned}$$

claramente, $H(\cdot)$ é analítica e $H \equiv 0$ sobre I $\Big($intervalo onde ocorre a interseção das bolas $B_{\frac{kt_1}{eC}}(t_1)$ e $B_{\frac{kt_2}{eC}}(t_2)\Big)$ o que nos permite concluir que $H \equiv 0$ sobre a interseção $B_{\frac{kt_1}{eC}}(t_1) \cap B_{\frac{kt_2}{eC}}(t_2)$; logo,

$$T_{t_1}(z) = T_{t_2}(z), \quad \forall \ z \ \in B_{\frac{kt_1}{eC}}(t_1) \cap B_{\frac{kt_2}{eC}}(t_2).$$

Além disso, a função

$$\begin{aligned} Z : B_1 \cup B_2 &\to \mathbb{C} \\ w \quad &\rightsquigarrow \quad Z(w) = \begin{cases} T_{t_1}(w), w \in B_1 \\ T_{t_2}(w), w \in B_2 \end{cases} \end{aligned}$$

prolonga, simultaneamente, $T_{t_1}(z)$ e $T_{t_2}(z)$. Desta forma, de (1.97) é evidente que

$$T(z) \ \text{ extende } \ T(t) \ \text{ no setor } \ \Gamma_\delta,$$

uma vez que para valores reais de z, $T(z) = T(t)$. Mostraremos agora que $T(z)$ é um semigrupo analítico em Γ_δ. A analiticidade da função $z \to T(z)$ segue pela sua representação local em séries de potências. Vejamos agora que

$$T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2), \qquad \text{para } \ z_1, z_2 \in \Gamma_\delta.$$

Seja $t > 0$ e definamos a função

$$\begin{aligned} F : \Gamma_\delta &\to L(X) \\ z &\rightsquigarrow F(z) = T(t)T(z) - T(t+z). \end{aligned}$$

Claramente, $F(\cdot)$ é analítica e pela propriedade de semigrupo $F \equiv 0$ sobre $[0, \infty)$, (um conjunto infinito de zeros não izolados) o que nos permite concluir que $F \equiv 0$ sobre Γ_δ. Logo,

$$T(t)T(z) = T(t+z) \quad \text{para todo } t > 0 \text{ e todo } z \in \Gamma_\delta.$$

Usando o mesmo argumento anterior, definimos a função

$$\begin{aligned} G : \Gamma_\delta &\to L(X) \\ z &\rightsquigarrow G(z) = T(z_1)T(z) - T(z_1+z), \end{aligned}$$

onde $z_1 \in \Gamma_\delta$ é fixo. Sabemos que $G \equiv 0$ sobre $[0, \infty)$. Assim, pela analiticidade de G, podemos afirmar que $G \equiv 0$ e, consequentemente,

$$T(z_1 + z_2) = T(z_1) + T(z_2)$$

para todo $z_1, z_2 \in \Gamma_\delta$. Definamos agora,

$$\Delta_{\frac{kt}{Ce}} = \left\{ z = t + iy, t > 0 \text{ e } |y| < \frac{k't}{Ce} \right\} \backslash \{(0,0)\}, \quad k' \in (0, k).$$

(Veja Figura 1.21.)
Claramente o setor $\Delta_{\frac{k't}{Ce}}$ é da forma

$$\Gamma_{\delta'} = \{ z \in \mathbb{C}, |argz| < \delta' \},$$

para algum $0 < \delta' < \delta < \pi/2$. Para verificar que $z \to T(z)$ é uniformemente limitada no setor $\Gamma_\delta{}'$ para todo $0 < \delta' < \delta$, escolha $k' \in (0, k)$ tal que para $z = Rez + iImz$,

$$|z - Rez| = |Imz| < \frac{k' Rez}{Ce}.$$

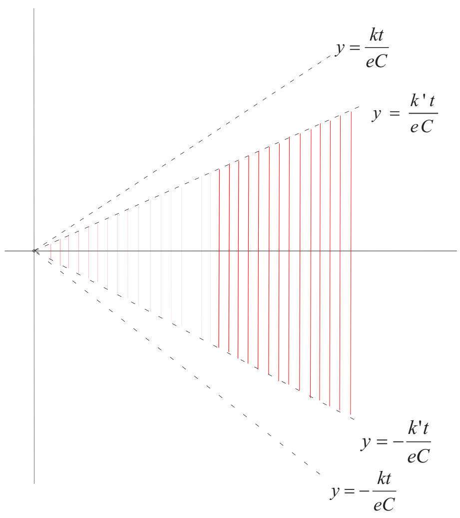

Figura 1.21: O setor $\Delta_{\frac{k't}{eC}}$.

Então, por (1.94)

$$
\begin{aligned}
\| T(z)\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iImz)^n}{n!}\; T^{(n)}(Rez) \right\| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} |Imz|^n \left(\frac{eC}{Rez} \right)^n \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k' Rez}{Ce} \right)^n \left(\frac{eC}{Rez} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (k')^n.
\end{aligned}
$$

donde,

$$\| T(z)\| \leq \frac{1}{1-k'} \; . \tag{1.98}$$

Resta-nos provarmos que a função

$$\textstyle\sum_{\delta'} \cup \{0\} \ni z \rightarrow T(z) \in L(X)$$

é fortemente contínua em $z = 0$. Para este fim, escolhemos $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Sendo $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ fortemente contínuo, existe $h_0 > 0$ tal que

$$\|T(h)x - x\| < \varepsilon(1-k),$$

para todo $0 < h < h_0$. Então, usando (1.98),

$$
\begin{aligned}
\|T(z)x - x\| &= \|T(z)x - T(z)T(h)x + T(z+h)x - T(h)x + T(h)x - x\| \\
&\leq \|T(z)(x - T(h)x)\| + \|T(z+h)x - T(h)x\| + \|T(h)x - x\| \\
&< 2\varepsilon + \|T(z+h) - T(h)\|\, \|x\|,
\end{aligned}
$$

para todo $h \in (0, h_0)$. Fixando $h \in (0, h_0)$, a aplicação

$$z \rightarrow T(z+h) \in L(X)$$

é analítica em alguma vizinhança de $z = 0$, logo

$$\lim_{z\rightarrow 0} \|T(z+h) - T(h)\| = 0,$$

o qual completa a prova para **(d)** $\Rightarrow$ **(a)**.

1.3 Potências Fracionárias de Operadores Lineares Fechados

Nesta seção, introduzimos potências fracionárias associadas a um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ tal que $-A$ seja o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico de operadores em X. Com este objetivo, em toda esta seção, sempre assumiremos que a seguinte condição técnica seja verificada.

Condição $A_{\pi,\,\omega\,\cup V}$. *$A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear fechado com domínio denso em X tal que*

$$\rho(A) \supset \sum\nolimits_{\pi,\omega} \;\; := \;\; \{\lambda \in \mathbb{C} : \omega < |\arg(\lambda)| \leq \pi\} \cup V$$

e

$$\| R(\lambda : A) \| \;\; \leq \;\; \frac{M}{1+|\lambda|}, \qquad \lambda \in \sum\nolimits_{\pi,\omega},$$

onde V é uma vizinhança da origem e $0 < \omega < \dfrac{\pi}{2}$.

Lema 1.9 *Se a* **Condição** $A_{\pi,\,\omega\,\cup V}$ *for satisfeita, então $-A$ será o gerador infinitesimal de um semigrupo, $T(t)$, analítico limitado. Mais ainda, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno $-A+\delta I$ será o gerador infinitesimal de um semigrupo, $S_1(t) = e^{\delta t}T(t)$, analítico limitado.*

Demonstração. Inicialmente, observamos que

1. $\lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow -\lambda \in \rho(-A)$;

2. $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1} = -\big(-\lambda I - (-A)\big)^{-1} = -R(-\lambda : -A)$;

3. $\lambda \in \sum_{\pi,\,\omega} \Leftrightarrow -\lambda \in \sum_{\delta}$.

Suponha que a **Condição** $A_{\pi,\,\omega\,\cup V}$ é satisfeita. Claramente,

$$\rho(-A) \supset \sum\nolimits_{\delta} \tag{1.99}$$

uma vez que $\rho(A) \supset \sum_{\pi,\,\omega}$. Também, para $\lambda \in \sum_{\pi,\,\omega}$ e $z - -\lambda$ temos

$$\|R(z, -A)\| = \|R(-\lambda : -A)\| = \|R(\lambda : A)\| \leq M\frac{|\lambda|}{|\lambda|+1}\,\frac{1}{|\lambda|} \leq \frac{M}{|\lambda|} = \frac{M}{|z|}. \tag{1.100}$$

De (1.99) e (1.100) segue pela Proposição 1.6 que $-A$ será o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $T(t)$ limitado. Seja, agora, $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Consideramos os seguintes conjuntos:

$$\widehat{\sum}_{\delta} := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta \right\} \cup V,$$

$$\widehat{\sum}_{\delta^*} := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta^* \right\} \cup V^*,$$

$$\widehat{\sum}_{\pi,\,\omega^*} := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \omega^* < |\arg \lambda| < \pi \right\} \cup V^*, \;,$$

onde $\delta^* < \delta$, $\omega^* > \omega$ e V^* uma vizinhança de zero tal que $V^* \subset V$. (Veja Figura 1.22.)

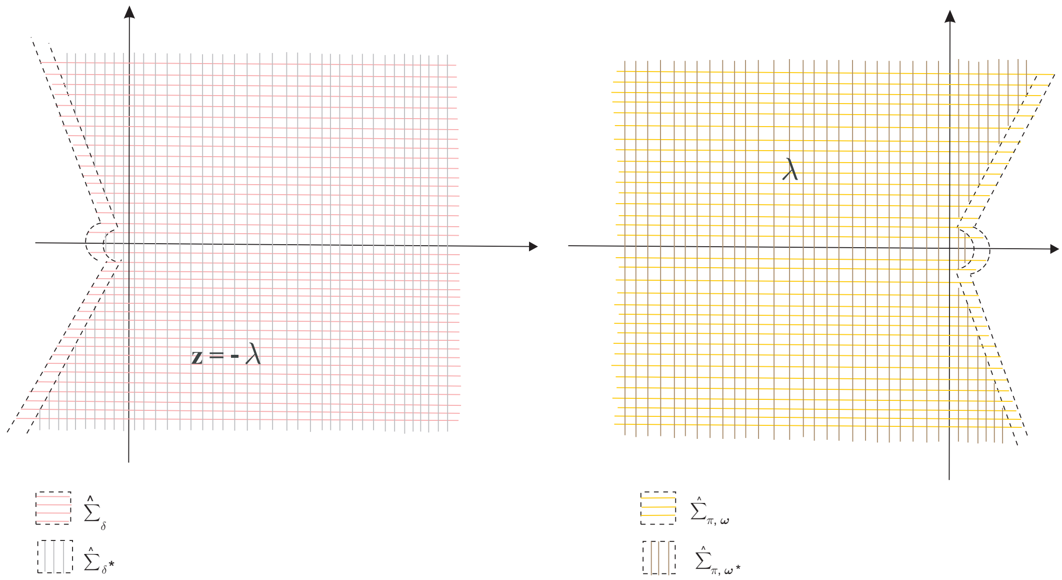

Figura 1.22: os conjuntos $\widehat{\sum}_{\delta}$, $\widehat{\sum}_{\delta^*}$ $\widehat{\sum}_{\pi,\,\omega^*}$ e $\widehat{\sum}_{\pi,\,w} := \sum_{\pi,\,w}$.

Temos,

I. $z \in \rho(A - \delta I) \Leftrightarrow z - \delta \in \rho(A) \Leftrightarrow z \in \rho(-A + \delta I)$;

II. $R(z : -A + \delta I) = -R(-z + \delta, A)$. Pois,

$$\big(zI - (-A + \delta I)\big)^{-1} = (zI - \delta I + A)^{-1} = \big((z - \delta)I + A\big)^{-1} = -\big(-(z - \delta)I - A\big)^{-1}.$$

III. $-z \in \widehat{\sum}_{\pi,w^*} \Leftrightarrow z \in \widehat{\sum}_{\delta^*}$.

Também,

$$\rho(-A + \delta I) \supset \widehat{\sum}_{\delta^*} \supset \sum_{\delta^*} \tag{1.101}$$

Além disso,

$$\|R(z : -A + \delta I)\| = \|R(-z + \delta : A)\| \leq \frac{M}{|-z + \delta| + 1} = \frac{M}{|z - \delta| + 1}\,. \tag{1.102}$$

Ora,

$$|z-\delta|+1 \geq |\,z|-|\,\delta|+1 = |z|+(1-\delta) = |z|+\alpha,$$

com $\alpha = 1-\delta > 0$; donde,

$$\frac{1}{|z-\delta|+1} \leq \frac{1}{|z|+\alpha}\,;$$

logo, de (1.102) ,

$$\|R(z:-A+\delta I)\| \leq \frac{M}{|z|+\alpha} \leq \frac{M}{|z|}, \quad \forall\, z \in \widehat{\sum}_{\delta^*} \supset \sum_{\delta^*}. \tag{1.103}$$

Por outro lado, considerando $S_1(t) = e^{\delta t}T(t), t > 0$ temos

$$\begin{aligned}\frac{S_1(t)x-x}{t} = \frac{e^{\delta t}T(t)x-x}{t} &= \frac{e^{\delta t}T(t)x-e^{\delta t}x+e^{\delta t}x-x}{t}\\ &= e^{\delta t}\left(\frac{T(t)x-x}{t}\right)+\left(\frac{e^{\delta t}-1}{t}\right)x,\ x \in D(-A+\delta I);\end{aligned}$$

logo, passando ao limite com $t \downarrow 0$, obtemos

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{S_1(t)x-x}{t} = -Ax+\delta x = (-A+\delta I)x,\ x \in D(-A+\delta I);$$

uma vez que,

$$\lim_{t\downarrow 0} e^{\delta t} = 1,$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{e^{\delta t}-1}{t} = \lim_{t\downarrow 0}\delta e^{\delta t} = \delta,$$

e, sendo -A o gerador infinitesimal do semigrupo $T(t)$),

$$-Ax = \lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)x-x}{t}\,. \tag{1.104}$$

De (1.101), (1.103), e (1.104) e da Proposição 1.6 segue que $-A+\delta I$ será o gerador infinitesilmal de um C_0-semigrupo $S_1(t) = e^{\delta}T(t)$ limitado. O Lema segue pelo Teorema 1.8. ∎

Lema 1.10 *Com as condições do Lema 1.9 temos as seguintes estimativas:*

$$\| \ T(t) \ \| \leq Me^{-\delta t} \tag{1.105}$$

$$\| \ AT(t) \ \| \leq \frac{M_1}{t}e^{-\delta t} \tag{1.106}$$

$$\| \ A^nT(t) \ \| \leq \frac{M_n}{t^n}e^{-\delta t}. \tag{1.107}$$

Demonstração. Para a justificativa de (1.105), (1.106) e (1.107) basta observarmos que sendo $0 \in \rho(A)$, o operador identidade limitado, $(-A+\delta I)$ o gerador infinitesimal de $S_1(t)$ e a estimativa $\|(-A+\delta I)^{-1}\| \leq \tilde{M}/\delta$ válida pelo TEOREMA DE HILLE YOSIDA (Teorema C.16), segue pelo Teorema 1.8 que

$$\begin{aligned}\|S_1(t)\| &= \|(-A+\delta I)^{-1}(-A+\delta I)S_1(t)\| \\ &\leq \|(-A+\delta I)^{-1}\| \, \|(-A+\delta I)S_1(t)\| \\ &\leq \frac{\tilde{M}}{\delta} C = M;\end{aligned}$$

logo,

$$e^{\delta t}\| T(t)\| \leq \frac{M}{t}.$$

o que implica,

$$\| T(t)\| \leq M e^{-\delta t}.$$

Também,

$$\begin{aligned}\|AT(t)\| &= \|A(A-\delta I)^{-1}(A-\delta I)T(t)\| \\ &\leq \|A(A-\delta I)^{-1}\| \, \|(A-\delta I)T(t)\| \\ &\leq \|(A-\delta I+\delta I)(A-\delta I)^{-1}\| \, \|(A-\delta I)T(t)\| \\ &\leq \left[\|I\| + \|\delta I(A-\delta I)^{-1}\|\right] \frac{1}{e^{\delta t}} \|(A-\delta I)S_1(t)\|;\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|AT(t)\| \leq \frac{M_1}{t}\, e^{-\delta t} \quad t > 0.$$

Usando o Corolário C.22, obtemos

$$\|A^n T(t)\| = \left\| \left(AT\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \right\| \leq \left\| AT\left(\frac{t}{n}\right)\right\|^n \leq \left[M_1\, \frac{n}{t}\; e^{-\delta t/n}\right]^n \leq \frac{M_n}{t^n}\, e^{-\delta t}.$$

A demonstração do Lema 1.10 está completa. ■

No que segue apresentaremos a definição de $A^{-\alpha}$.

Definição 1.11 *Para $\alpha \geq 0$ definimos o operador $A^{-\alpha}$ por*

$$A^{-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^\infty s^{\alpha-1} T(s) ds, & \alpha > 0, \\ I_d, & \alpha = 0. \end{cases}$$

onde $\Gamma(\cdot)$ *é a "FUNÇÃO GAMA"real , dada por*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx \qquad (\alpha > 0).$$

O próximo teorema resume algumas propriedades importantes dos operadores $A^{-\alpha}$, $\alpha \geq 0$, as quais serão importantes nos Capítulos 3 e 4.

Teorema 1.12 *As seguintes propriedades são válidas.*

(a) *Se* $\alpha, \beta \geq 0$ *então* $A^{-(\alpha+\beta)} = A^{-\alpha}A^{-\beta}$.

(b) $A^{-\alpha}$ *é linear e o conjunto* $\{A^{-\alpha} : \alpha \in (0,1)\}$ *é limitado em* $\mathcal{L}(X)$.

(c) $A^{-\alpha}$ *é injetor para cada* $\alpha \geq 0$.

Demonstração.

(a) Da definição dos operadores $A^{-\beta}$ e $A^{-\alpha}$ segue que

$$\begin{aligned}
(A^{-\alpha}A^{-\beta})(x) &= A^{-\alpha}(A^{-\beta}x) \\
&= A^{-\alpha}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty s^{\beta-1} T(s)x\, ds\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T(t) \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty s^{\beta-1} T(s)x\, ds\right) dt.
\end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}
\|s^{\beta-1}T(s)x - t^{\beta-1}T(t)x\| &= \|(s^{\beta-1} - t^{\beta-1})T(s)x + t^{\beta-1}\big(T(s) - T(t)\big)x\| \\
&\leq |s^{\beta-1} - t^{\beta-1}|\, \|T(s)x\| + |t|^{\beta-1}\, \|\big(T(s) - T(t)\big)x\| \\
&\leq \tilde{M}|s^{\beta-1} - t^{\beta-1}| + \tilde{N}\|\big(T(s) - T(t)\big)x\| \xrightarrow[s\to t]{} 0;
\end{aligned}$$

donde, concluimos que a função

$$s \to s^{\beta-1}T(s)x \text{ é contínua.} \tag{1.108}$$

Então, de (1.108), de $\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}$ ser uma constante com relação a t, da propriedade de semigrupo e do item (iv) da Proposição A.2,

$$(A^{-\alpha}A^{-\beta})(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \left(\int_0^\infty s^{\beta-1} T(t+s)x\, ds\right) dt;$$

uma vez que, $T(t)$ é linear contínuo. Fazendo uma mudança de variável com $r = t + s$ em $\int_0^\infty s^{\beta-1}T(t+s)x\,ds$, obtemos

$$\begin{aligned}(A^{-\alpha}A^{-\beta})(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\left(\int_t^\infty (r-t)^{\beta-1}T(r)x\,dr\right)dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty\int_t^\infty t^{\alpha-1}(r-t)^{\beta-1}T(r)x\,dr\,dt.\end{aligned}$$

Mudando a ordem de integração

$$(A^{-\alpha}A^{-\beta})(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty\int_0^r t^{\alpha-1}(r-t)^{\beta-1}T(r)x\,dt\,dr$$

ou seja,

$$(A^{-\alpha}A^{-\beta})(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty\left(\int_0^r t^{\alpha-1}(r-t)^{\beta-1}\,dt\right)T(r)x\,dr. \tag{1.109}$$

Pelo Teorema D.4 temos

$$\int_0^r t^{\alpha-1}(r-t)^{\beta-1}\,dt = r^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,. \tag{1.110}$$

Por (1.109) e (1.110),

$$(A^{-\alpha}A^{-\beta})(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^\infty r^{\alpha+\beta-1}T(r)x\,dr,$$

donde,

$$(A^{-\alpha}A^{-\beta})(x) = A^{-(\alpha+\beta)}(x), \qquad x \in X,$$

ou seja, $A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}$. ■

(b) Claramente, $A^{-\alpha}$ é linear. Agora,

$$\| A^{-\alpha}x \| = \left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{\alpha-1}T(s)x\,ds\right\|.$$

Então, pelo item (iii) do Teorema A.2,

$$\| A^{-\alpha}x \| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{\alpha-1}\|T(s)\|\,\|x\|\,ds.$$

Assim, por (1.105),

$$\| A^{-\alpha}x \| \le \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\,\|x\|\int_0^\infty s^{\alpha-1}e^{-\delta s}\,ds. \tag{1.111}$$

Fazendo uma mudança de variável $r = \delta s$ temos

$$\int_0^\infty s^{\alpha-1}e^{-\delta s}\,ds = \int_0^\infty \left(\frac{r}{\delta}\right)^{\alpha-1}e^{-r}\frac{1}{\delta}\,dr = \delta^{-\alpha}\int_0^\infty r^{\alpha-1}e^{-r}\,dr = \delta^{-\alpha}\Gamma(\alpha) \tag{1.112}$$

De (1.111) e (1.112),

$$\| A^{-\alpha}x \| \leq \frac{M\delta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \|x\| \, \Gamma(\alpha).$$

Conseqüentemente,

$$\| A^{-\alpha}x \| \leq K\|x\|,$$

com $K = M\delta^{-\alpha}\|x\|$. A prova de (**b**) está completa. ■

(**c**) Como pelas hipoteses, A^{-1} é injetor (pois, A é invertível, já que estamos supondo que existe A^{-1}), cada

$$A^{-n} = (A^{-1})^n, \; n \in \mathbb{N}$$

também é injetor. Se

$$A^{-\alpha}x = 0, \qquad x \in X$$

e $n \in \mathbb{N}$ é fixado tal que $n \geq \alpha$, então

$$A^{-n}x = A^{-n+\alpha-\alpha}x = A^{-n+\alpha}(A^{-\alpha}x) = A^{-n+\alpha}(0) = 0$$

o que implica, $x = 0$, já que A^{-n} é injetivo. Portanto, $A^{-\alpha}$ é injetor. A prova do Teorema 1.12 esta agora completa. ■

Pelo item (**c**) do teorema anterior, $A^{-\alpha}$ é bijetivo sobre sua imagem; logo, faz sentido falar na inversa do operador $A^{-\alpha}$. Diante disso, é possivel introduzir a seguinte definição.

Definição 1.13 *Para $\alpha > 0$ definimos $A^{\alpha} = (A^{-\alpha})^{-1} : D(A^{\alpha}) \subset X \to X$ com domínio $D(A^{\alpha}) = R(A^{-\alpha})$ onde $R(A^{-\alpha}) = \{A^{-\alpha}x : x \in X\}$. Para $\alpha = 0$, $A^{\alpha} = I$. O operador $A^{\alpha}, \alpha \geq 0$ é chamado* **OPERADOR POTÊNCIA FRACIONÁRIA** *associado a A.*

Teorema 1.14 *Nas condições anteriores, as seguintes propriedades são verificadas.*

(a) *A^{α} é um operador fechado.*

(b) *Se $\alpha \geq \beta > 0$ então $D(A^{\alpha}) \subset D(A^{\beta})$.*

(c) *$\overline{D(A^{\alpha})} = X$ para todo $\alpha \geq 0$.*

(d) *Se $\alpha, \beta \geq 0$ então $A^{\alpha+\beta} = A^{\alpha}A^{\beta}x$ para $x \in D(A^{\gamma})$ e $\gamma = \max(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$.*

Demonstração.

(a) Seja $\{u_n\} \subset X$ com $u_n \to u$ e $A^\alpha u_n \to v$. Devemos mostrar que

$$u \in D(A^\alpha) \qquad e \qquad A^\alpha u = v;$$

o que implica, $(u, v) \in G(A^\alpha)$; donde $G(A^\alpha)$ é fechado e, assim, A^α é fechado. Observe que,

$$w_n = A^\alpha u_n \Leftrightarrow A^{-\alpha} w_n = u_n;$$

assim,

$$A^{-\alpha} v = u,$$

o que implica,

$$u \in R(A^{-\alpha}) = D(A^\alpha)$$

e, mais,

$$v = A^{-\alpha} u.$$

Isto prova **(a)**. ■

(b) Seja $a \in D(A^\alpha)$ então $a = A^{-\alpha} x, \quad x \in X$. Ora, se $-\alpha = -(\beta + \alpha - \beta)$ então $A^{-\alpha} = A^{-\beta} A^{-(\alpha-\beta)}$; assim,

$$a = A^{-\alpha} x = A^{-\beta} A^{-(\alpha-\beta)} x = A^{-\beta} \underbrace{\left(A^{-\overbrace{(\alpha-\beta)}^{>0}} x\right)}_{\in X};$$

logo, $a \in D(A^\beta)$ e a propriedade é evidente.

(c) Veja Pazy [26], p. 72.)■

(d) A prova é obtida, facilmente, usando os resultados anteriores. (Veja detalhes em Pazy [26], p. 72.) ■

Finalizamos esta seção com um resultado que resume algumas propriedades dos operadores $A^\alpha T(t)$ onde $(T(t))_{\geq 0}$ é o semigrupo analítico gerado por $-A$.

Teorema 1.15 *Nas condições e notações anteriores as seguintes propriedades são verificadas.*

(a) $T(t)(X) \subset D(A^\alpha)$ *para todo* $t > 0, \alpha \geq 0$.

(b) $T(t) A^\alpha x = A^\alpha T(t) x$ *para todo* $t \geq 0$ *e todo* $x \in D(A^\alpha)$.

(c) *Para $t > 0$ e $\alpha > 0$, $A^\alpha T(t)$ é limitado e existe $M_\alpha > 0$ tal que*

$$\| A^\alpha T(t) \| \leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}. \tag{1.113}$$

(d) *Para cada $\alpha \in (0,1]$ existe $C_\alpha > 0$ tal que*

$$\| T(t)x - x \| \leq C_\alpha t^\alpha \| A^\alpha x \|,$$

para todo $x \in D(A^\alpha)$ e todo $t > 0$.

Demonstração de (a). Como $T(t)$ é um semigrupo analítico sabemos que para $t > 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$,

$$T(t)(X) \subset D(A^n).$$

Por outro lado, dado $\alpha \geq 0$, considere $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq \alpha$ então, do item **(b)** do Teorema 1.14,

$$D(A^n) \subset D(A^\alpha).$$

Portanto,

$$T(t)(X) \subset D(A^n) \subset D(A^\alpha),$$

para todo $\alpha \geq 0$ e $t > 0$, mostrando **(a)**. ■

Demonstração de (b). Seja $x \in D(A^\alpha)$. Uma vez que, A^α é invertível, existe $y \in X$ tal que $x = A^{-\alpha} y$ (donde, $y = A^\alpha x$). Da definição de $A^{-\alpha}$, para $x \in D(A^\alpha)$ e $x = A^{-\alpha} y$ e do item (iv) do Teorema A.2 temos

$$\begin{aligned} T(t)x &= T(t)A^{-\alpha}y \\ &= T(t)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{\alpha-1}T(s)yds\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{\alpha-1}T(s)T(t)yds \\ &= A^{-\alpha}T(t)y \\ &= A^{-\alpha}T(t)A^\alpha x. \end{aligned}$$

Portanto $A^\alpha T(t)x = T(t)A^\alpha x$. Isto prova **(b)**. ■

Demonstração de (c). Temos $A^\alpha T(t)$ um operador fechado; pois, considerando $\{u_n\} \subset X$ com

$$u_n \to u_0,$$

$$A^\alpha T(t)u_n \to v_0,$$

usando o fato que $T(t)$ é contínuo e A^α é fechado, segue facilmente que

$$A^\alpha T(t)u_0 = v_0.$$

Pelo item **(a)**, $D(A^\alpha T(t)) = X$. Ou seja, $A^\alpha T(t)$ é um operador fechado e definido em todo X. Logo, $A^\alpha T(t)$ é limitado, como conseqüência do TEOREMA DO GRÁFICO FECHADO(Teorema D.17). Mais ainda, se $\alpha > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ são tais que $n > \alpha + 1$ do item **(a)** do Teorema 1.12, da definição de $A^{\alpha-n} = A^{-(n-\alpha)}$, da propriedade de semigrupo e dos itens (iii) e (iv) do Teorema A.2 e de (1.107) temos

$$\begin{aligned}
\|A^\alpha T(t)\| &= \|A^{\alpha-n+n}T(t)\| \\
&= \|\, A^{\alpha-n}A^nT(t)\| \\
&\le \left\|\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^\infty s^{n-\alpha-1}T(s)\,ds\right)A^nT(t)\right\| \\
&\le \left\|\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^\infty s^{n-\alpha-1}A^nT(t+s)\,ds\right\| \\
&\le \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^\infty s^{n-\alpha-1}\,\|\, A^nT(t+s)\,\|\,ds \\
&\le \frac{M_n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^\infty s^{n-\alpha-1}(t+s)^{-n}e^{-\delta(t+s)}ds \\
&\le \frac{M_ne^{-\delta t}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^\infty s^{n-\alpha-1}\left[t\left(1+\frac{s}{t}\right)\right]^{-n}ds
\end{aligned}$$

uma vez que, a exponencial é uma função crescente e $-\delta s < 0$. Por outro lado, fazendo a mudança $s = rt$ temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty s^{n-\alpha-1}\left[t\left(1+\frac{s}{t}\right)\right]^{-n}ds &= \int_0^\infty (rt)^{n-\alpha-1}t^{-n}(1+r)^{-n}\,dr \\
&= \int_0^\infty r^{n-\alpha-1}t^nt^{-\alpha}t^{-1}t^{-n}(1+r)^{-n}t\,dr
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{M_ne^{-\delta t}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^\infty s^{n-\alpha-1}\left[t\left(1+\frac{s}{t}\right)\right]^{-n}ds = \frac{M_ne^{-\delta t}t}{\Gamma(n-\alpha)t^\alpha t}\int_0^\infty r^{n-\alpha-1}(1+r)^{-n}\,dr.$$

Portanto, sendo

$$\int_0^\infty \frac{r^{n-\alpha-1}}{(1+r)^n}\,dr < \infty,$$

temos

$$\|A^\alpha T(t)\| \le M_\alpha\, t^{-\alpha}e^{-\delta t};$$

demonstrando **(c)**. ■

Demonstração de (d). Usando o item **(c)** do Teorema C.10, para $x \in D(A^{-\alpha})$ temos

$$\|T(t)x - x\| = \left\| A\left(\int_0^t T(s)x\, ds \right) \right\|.$$

Sendo, $T(\cdot)x : [0,t] \to D(A)$ e $A : D(A) \to X$ operadores lineares contínuos, visto com relação a norma do gráfico, pelo item (iv) do Teorema A.2,

$$A\left(\int_0^t T(s)x\, ds \right) = \int_0^t AT(s)x\, ds.$$

Assim, do item **(b)**, do item (iii) do Teorema A.2 e de (1.107), obtemos

$$\begin{aligned}
\| T(t)x - x \| &= \left\| \int_0^t AT(s)xds \right\| \\
&\leq \int_0^t \| A^{1-\alpha}T(s) \| \| A^{\alpha}x \| \, ds \\
&\leq C_{1-\alpha} \| A^{\alpha}x \| \int_0^t s^{\alpha-1}ds \\
&\leq \frac{C_{1-\alpha} \| A^{\alpha}x \| \, t^{\alpha}}{\alpha}, \qquad \text{para } \alpha \in (0,1];
\end{aligned}$$

o que demonstra **(d)**, completando a demonstração do Teorema 1.14. ■

1.4 Espaços de Potências Fracionárias

Se A for um operador linear, tal que $-A$ seja o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico em X e $0 \in \rho(A)$, segue da seção 1.3 que podemos falar em Potências Fracionárias do operador A. Vimos no item **(a)** do Teorema 1.14 que se $0 \leq \alpha \leq 1$ então A^{α} é um operador fechado. Este fechamento implica que $D(A^{\alpha})$, munido com a norma do gráfico (i.e., $\|u\|_{D(A^{\alpha})} = \|u\| + \|A^{\alpha}u\|$), é um espaço de Banach. Com efeito, seja $\{u_n\} \subset D(A^{\alpha})$ uma seqüência de Cauchy; então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n - u_m\|_{D(A^{\alpha})} < \varepsilon, \qquad \text{para } n, m \geq n_0;$$

o que implica,

$$\|u_n - u_m\| < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad \|A^{\alpha}u_n - A^{\alpha}u_m\| < \varepsilon, \qquad n, m \geq n_0;$$

logo, $\{u_n\}$ e $\{A^\alpha u_n\}$ são seqüências de Cauchy em X. Sendo X um espaço de Banach, existem $u, v \in X$, tais que

$$u_n \to u \qquad \text{em } X \qquad \text{e} \qquad A^\alpha u_n \to v \qquad \text{em } X.$$

Sendo A^α fechado, temos

$$(u,v) \in G(A^\alpha) \qquad \text{e} \qquad A^\alpha u = v;$$

assim,

$$u_n \to u \qquad \text{em } D(A^\alpha);$$

pois,

$$\|u_n - u\|_{D(A^\alpha)} = \|u_n - u\| + \|A^\alpha u_n - A^\alpha u\|.$$

Portanto, $(D(A^\alpha); \|\cdot\|_{D(A^\alpha)})$ é um espaço de Banach. Em $D(A^\alpha)$ podemos definir uma outra norma, que denotaremos por $\|\cdot\|_\alpha$, que é equivalente a norma do gráfico, tal norma é dada por

$$\|u\|_\alpha = \|A^\alpha u\| \quad \text{com} \quad u \in D(A^\alpha).$$

O próximo lema trata destas últimas afirmações.

Lema 1.16 *A função $\|\cdot\|_\alpha$ é uma norma em $D(A^\alpha)$; a qual é equivalente a norma do gráfico.*

Demonstração. Vejamos,

N1. $\|u\|_\alpha = \|A^\alpha u\| \geq 0$; pois, $\|\cdot\|$ é uma norma em X; também,

$$\|u\|_\alpha = 0 \Leftrightarrow \|A^\alpha u\| = 0 \Leftrightarrow A^\alpha u = 0 \Leftrightarrow u = 0;$$

N2. $\|au\|_\alpha = \|aA^\alpha u\| = |a|\|A^\alpha u\| = |a|\|u\|_\alpha$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

N3. $\|u+v\|_\alpha = \|A^\alpha(u+v)\| = \|A^\alpha u + A^\alpha v\| \leq \|A^\alpha u\| + \|A^\alpha v\| = \|u\|_\alpha + \|v\|_\alpha$; conseqüentemente, $\|\cdot\|_\alpha$ é uma norma em $D(A^\alpha)$. Agora,

$$\|u\|_\alpha = \|A^\alpha u\| \leq \|u\| + \|A^\alpha u\| = \|u\|_{D(A^\alpha)}; \tag{1.114}$$

sendo, $A^{-\alpha}$ limitado temos

$$\|A^{-\alpha} v\| \leq c\|v\|, \qquad \forall\ v \in D(A^{-\alpha});$$

logo, para $v = A^\alpha u\,(\Rightarrow A^{-\alpha}v = u)$ com $u \in D(A^\alpha)$, obtemos

$$\|u\| \leq c\|A^\alpha u\|,\ \forall\ u \in D(A^\alpha);$$

assim,

$$\|u\|_{D(A^\alpha)} = \|u\| + \|A^\alpha u\| \leq c\|A^\alpha u\| + \|A^\alpha u\| = (c+1)\|A^\alpha u\|;$$

isto é,

$$\|u\|_{D(A^\alpha)} \leq (c+1)\|u\|_\alpha; \tag{1.115}$$

de (1.114) e de (1.115) segue a equivalência das normas. ■

No que segue, denotaremos por X^α a seguinte estrutura $X^\alpha = (D(A^\alpha); \|\cdot\|_\alpha)$. Quando $\alpha = 0$, definimos $X^0 = X$. Usando a equivalência das normas, mostrada no Lema 1.16, X^α é um espaço de Banach. Para concluir esta seção, enunciamos sem demonstrar, o seguinte Teorema de Imersão envolvendo o espaço X^α. Indicamos o livro do Klaus [13] para maiores detalhes.

Teorema 1.17 *Para $\alpha \geq \beta \geq 0$, temos X^α imerso continuamente em X^β.*

Demonstração. Veja Klaus [13].

Capítulo 2

Existência de Solução para uma classe de Problemas não-locais

Neste capítulo, consideramos o problema

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f\big(t, u(t), u(b_1(t)), u(b_2(t)), ..., u(b_m(t))\big), \quad t \in (0, T] \\ h(u) = \phi_0 \quad \text{em } [-\tau, 0], \end{cases} \tag{2.1}$$

onde assumimos as seguintes hipóteses:

($\mathbf{A_0}$) $0 < \tau$, $T < \infty$, $\phi_0 \in Y_0 := C\big([-\tau, 0]; X)$;

($\mathbf{A_1}$) O operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é tal que $-A$ é o gerador infinitesimal de um C_0- semigrupo, $\{T(t), t \geq 0\}$, de operadores lineares limitados em X;

($\mathbf{A_2}$) A aplicação não-linear $f : [0, T] \times X^{m+1} \to X$ satisfaz a condição **Tipo Lipschitz**:

$$\|f(t, u_1, u_2, ..., u_{m+1}) - f(s, v_1, v_2, ..., v_{m+1})\| \leq L_f(R)\left[|t - s| + \sum_{i=1}^{m+1} \|u_i - v_i\|\right] ,$$

para todo $(u_1, u_2, ..., u_{m+1})$ e $(v_1, v_2, ..., v_{m+1})$ em $B_R(X^{m+1})$ e $t \in [0, T]$; onde,

$$L_f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \quad \text{é uma função não-decrescente}$$

e para $R > 0$,

$$B_R(X^{m+1}) = \left\{(u_1, u_2, ..., u_{m+1}) \in X^{m+1} : \sum_{i=1}^{m+1} \|u_i\| \leq R\right\}.$$

($\mathbf{A_3}$) A aplicação não linear $h : Y_T \to Y_T$, $Y_T := C([-\tau, T]; X)$, é tal que para quaisquer ψ_1 e ψ_2 em Y_T com $\psi_1 = \psi_2$ em $[-\tau, 0]$, $h(\psi_1) = h(\psi_2)$ em $[-\tau, 0]$;

($\mathbf{A_4}$) Para $i = 1, 2, ..., m$, as aplicações $b_i : [0, T] \to [-\tau, T]$ são não-decrescentes, não expansivas (i.e., Lipschitz contínuas com constantes de Lipschitz $0 \leq L_{b_i} \leq 1$) e satisfazem a propriedade de retardamento $b_i(t) \leq t$, para $t \in [0, T]$.

Aqui,

$$Y_t := C([-\tau, t]; X) = \{\phi; \phi : [-\tau, t] \to X \text{ é contínua}\},$$

para $t \in [0, T]$, é um espaço de Banach, munido da norma do supremo

$$\|\phi\|_t := \sup_{-\tau \leq \eta \leq t} \|\phi(\eta)\|, \quad \phi \in Y_t\,,$$

onde $\|\cdot\|$ é norma em X.

No geral, o problema funcional (2.1) pode modelar vários fenômenos naturais onde deve levar em conta um lapso de tempo (tempo de incubação ou gestação) entre causa e efeito. (Ver [27].) Na realidade, a idéia física do problema depende dos dados de estudo. Por exemplo, em modelos populacionais esse tempo de gestação pode ser considerado um retardo, em modelos econômicos, tempo de investimento.

O termo não-local é empregado devido ao fato de que o dado inicial é para todo um intervalo.

Provaremos a existência de soluções generalizadas de (2.1) em $[-\tau, t_0]$ para algum $0 < t_0 \leq T$; em seguida, provaremos que esta solução generalizada pode ser extendida unicamente para uma solução generalizada de (2.1) em qualquer intervalo $[-\tau, T]$ ou no intervalo maximal $[-\tau, T_{max})$ de existência. Neste último caso, desde que $T_{max} < T$ mostraremos que $\lim_{t \to T_{max}} \|u(t)\| = \infty$. Também mostraremos que u é única se, e somente se, $\psi_0 \in Y_{\tilde{T}}$, $0 < \tilde{T} \leq T$, satisfaz $h(\psi_0) = \phi_0$ em $[-\tau, 0]$ e é única em $[-\tau, 0]$. Estabelecemos a regularidade destas soluções sob diferentes hipóteses adicionais. Finalizamos o capítulo, com algumas aplicações dos resultados encontrados.

2.1 Definição de solução generalizada, forte e clássica

Nesta seção, iremos definir soluções: generalizadas, fortes e clássicas para o problema (2.1).

Considere $\tilde{T} \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \tilde{T} \leq T$. Seja, $W(\psi_0, \tilde{T}) := \big\{\psi \in Y_{\tilde{T}} : \psi = \psi_0 \text{ em } [-\tau, 0]\big\}$ e a aplicação,

$$\begin{aligned} F: \; Y_{\tilde{T}} &\rightarrow Y_{\tilde{T}} \\ \psi &\rightsquigarrow F(\psi) \end{aligned}$$

com

$$(F\psi)(t) = \begin{cases} h\big(\psi(t)\big), \; t \in [-\tau, 0] \\ T(t)\psi(0) + \displaystyle\int_0^t T(t-s) f\big(s, \psi(s), \psi(b_1(s)), \psi(b_2(s)), ..., \psi(b_m(s))\big)\, ds, \; t \in [0, \tilde{T}]. \end{cases}$$

Assuma as seguintes definições.

Definição 2.1 *Uma função $u \in W(\psi_0, \tilde{T})$ tal que $Fu = u$ em $[-\tau, \tilde{T}]$ é chamada solução generalizada de (2.1) em $[-\tau, \tilde{T}]$.*

Definição 2.2 *Uma função $u \in Y_{\tilde{T}}$ é solução forte de (2.1) em $[-\tau, \tilde{T}]$ se $u(t) \in D(A)$, para quase todo ponto $t \in (0, \tilde{T}]$, $h(u(t)) = \phi_0(t)$ em $[-\tau, 0]$ e a equação*

$$u'(t) + Au(t) = f\big(t, u(t), u(b_1(t)), u(b_2(t)), ..., u(b_m(t))\big)$$

é satisfeita em quase todo ponto $t \in (0, \tilde{T}]$.

Definição 2.3 *Uma solução clássica u de (2.1) em $[-\tau, \tilde{T}]$ é uma função $u \in Y_{\tilde{T}}$ tal que $u \in C^1((0, \tilde{T}]; X)$, $u(t) \in D(A)$, para $t \in (0, \tilde{T}]$ e u satisfaz (2.1) em $[-\tau, \tilde{T}]$.*

2.2 Existência, unicidade e regularidade de soluções

Teorema 2.4 *Suponha que as condições $(\mathbf{A_0}) - (\mathbf{A_4})$ sejam satisfeitas e que exista um $\psi_0 \in Y_T$ tal que $h(\psi_0) = \phi_0$ em $[-\tau, 0]$. Então o problema (2.1) terá uma solução generalizada em $[-\tau, T]$ ou no intervalo maximal $[-\tau, T_{max})$, $0 < T_{max} \leq T$, de existência e, neste último caso, $\lim\limits_{t \to T_{max}} \|u(t)\| = \infty$. Se ψ_0 for Lipschitz contínua em $[-\tau, 0]$ e $\psi_0(0) \in D(A)$ então u for Lipschitz contínua em todo subintervalo compacto de existência. Se X for reflexivo então u será uma solução forte de (2.1) no intervalo de existência. Se, além disso, $T(t)$ for um semigrupo analítico em X então u será uma solução clássica de (2.1) no intervalo de existência. A solução u será única se, e somente se, ψ_0 for única em $[-\tau, 0]$.*

Demonstração. A nossa demonstração será ser dividida em alguns passos, envolvendo: existência, unicidade, prolongamento, existência de um intervalo maximal, blow up, continuidade Lipschitz da u, solução forte, solução clássica. Depois, finalmente, mostraremos que a solução é única se, e somente se, ψ_0 é única em $[-\tau, 0]$.

Existência: Queremos estabelecer a existência de uma solução generalizada u em $[-\tau, t_0]$ para $0 < t_0 \leq T$. Para isso, consideramos Z_0 o subconjunto do espaço de Banach $Y_{t_0} := C([-\tau, t_0]; X)$ dado por

$$Z_0 = W(\psi_0, t_0)_1 = \{\psi \in W(\psi_0, t_0); \|\psi\|_{t_0} \leq 1 + K\|\psi_0\|_{t_0} + \|h\big(\psi_0\big)\|_{t_0}\},$$

com $K = \max\{Me^{wT}, 1\}$ e t_0 escolhidos tal que para $0 \leq t \leq t_0$, temos

$$t_0.M_0 \leq \frac{1}{3}, \tag{2.2}$$

onde

$$M_0 = Me^{wT}\Big[L_f(r)\{T + r\} + \big\|f(0, 0, 0, ..., 0)\big\|\Big],$$

com

$$r := (m + 1)(1 + K\|\psi_0\|_{T} + \|h(\psi_0)\|_{T}), \;\; M \geq 1, \, w \geq 0$$

e

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}, \quad t \geq 0; \tag{2.3}$$

cuja garantia das existências de w e M é dada pelo Teorema C.6.

De acordo com as definições acima, temos:

(i) $Z_0 \neq \emptyset$, pois $\psi_0 \in Z_0$,

(ii) Z_0 é fechado, já que é uma bola fechada em $W(\psi_0, t_0)$.

Assim, pelo Teorema D.15, $(Z_0, \|\cdot\|_{t_0})$ é um espaço métrico completo.

Definamos,

$$\begin{aligned} \tilde{F} : W(\psi_0, t_0)_R &\to \tilde{E} = \big\{\psi : \psi : [-\tau, t_0] \to X \text{ é uma função}\big\} \\ \psi \quad &\rightsquigarrow \quad \tilde{F}\psi : [-\tau, t_0] \to X \\ & \qquad\qquad t \quad \rightsquigarrow \quad (\tilde{F}\psi)(t) \end{aligned}$$

com

$$(\tilde{F}\psi)(t) = \begin{cases} h\big(\psi(t)\big), \; t \in [-\tau, 0] \\ T(t)\psi(0) + \displaystyle\int_0^t T(t-s) f\big(s, \psi(s), \psi(b_1(s)), \psi(b_2(s)), ..., \psi(b_m(s))\big)\, ds, \; t \in [0, t_0]. \end{cases}$$

Mostraremos, agora que $\tilde{F}(Z_0) \subset Z_0$, ou equivalentemente, que

(1)$\tilde{F}\psi \in W(\psi_0, t_0)$, para $\psi \in Z_0$,

(2) $\|\tilde{F}\psi\|_{t_0} \leq 1 + K\|\psi_0\|_{t_0} + \|h(\psi_0)\|_{t_0}$.

Análise de (1): Para justificar que $\tilde{F}\psi \in Y_{t_0}$, devemos mostrar que $\tilde{F}\psi$ é contínua, para tanto, analizemos:

∘ **Continuidade em** $[-\tau, 0)$ **.** Imediato, pois ψ é contínua e $\big(\tilde{F}\psi\big)(t) = h\big(\psi(t)\big)$, para todo $t \in [-\tau, 0)$.

∘ **Continuidade em** $(0, t_0]$ **.** Pelo Corolário C.7, $T(\cdot)\psi(0)$ é contínua. Resta-nos, neste caso, justificarmos que a função g, dada por

$$g(t) = \underbrace{\int_0^t T(t-s) f\big(s, \psi(s), \psi(b_1(s)), \psi(b_2(s)), ..., \psi(b_m(s))\big)\, ds}_{\tilde{I}_0}$$

é contínua em $(0, t_0]$. Fazendo a mudança de variável $x = t - s$ em $\tilde{I}_0$ temos

$$\tilde{I}_0 = \int_0^t T(x) f\big(t-x, \psi(t-x), \psi(b_1(t-x)), \psi(b_2(t-x)), ..., \psi(b_m(t-x))\big)\, dx,$$

ou seja,

$$g(t) = \int_0^t T(s) f\big(t-s, \psi(t-s), \psi(b_1(t-s)), \psi(b_2(t-s)), ..., \psi(b_m(t-s))\big)\, ds.$$

Considerando, $t, k \in (0, t_0]$ com $t \downarrow k$,

$$\|g(t) - g(k)\| = \left\| \int_0^t T(s)\tilde{g}(t,s)\, ds - \int_0^k T(s)\tilde{g}(k,s)\, ds \right\|, \tag{2.4}$$

com

$$\tilde{g}(t,s) = f\big(t-s, \psi(t-s), \psi(b_1(t-s)), \psi(b_2(t-s)), ..., \psi(b_m(t-s))\big)$$

e

$$\tilde{g}(k,s) = f\big(k-s, \psi(k-s), \psi(b_1(k-s)), \psi(b_2(k-s)), ..., \psi(b_m(k-s))\big).$$

De (2.4),

$$\|g(t) - g(k)\| = \left\| \int_0^k T(s)\big[\tilde{g}(t,s) - \tilde{g}(k,s)\big]\, ds + \int_k^t T(s)\tilde{g}(t,s)\, ds \right\|. \tag{2.5}$$

Pelo item (iii) da Proposição A.2,

$$\|g(t) - g(k)\| \leq \int_0^k \|T(s)\|\, \|\tilde{g}(t,s) - \tilde{g}(k,s)\|\, ds + \int_k^t \|T(s)\|\, \|\tilde{g}(t,s)\|\, ds.$$

Sendo $\psi \in Z_0$,

$$\|\psi(t)\| \leq 1 + K\|\psi_0\|_{t_0} + \|h(\psi_0)\|_T, \quad \forall\, t \in [-\tau, t_0];$$

então,

$$\|\psi(t-s)\| \leq 1 + K\|\psi_0\|_{t_0} + \|h(\psi_0)\|_T, \quad \forall\, s \in [0, t];$$

e

$$\|\psi\big(b_i(t-s)\big)\| \leq 1 + K\|\psi_0\|_{t_0} + \|h(\psi_0)\|_T, \quad \forall\, s \in [0,t],\, i = 1, ..., m;$$

logo,

$$\sum_{i=1}^{m+1} \|\psi(b_i(t-s))\| \leq (m+1)\big(1 + K\|\psi_0\|_T + \|h(\psi_0)\|_T\big),$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{m+1} \|\psi(b_i(t-s))\| \leq r$$

e, analogamente,

$$\sum_{i=1}^{m+1} \|\psi(b_i(k-s))\| \leq r,$$

com $b_{m+1} :=$ identidade. Assim,

$$\big(\psi(t-s), \psi(b_1(t-s)), \ldots, \psi(b_m(t-s)))\big) \quad \text{e} \quad \big(\psi(k-s), \psi(b_1(k-s)), \ldots, \psi(b_m(k-s))\big)$$

pertencem a $B_r(X^{m+1})$; donde, de $(\mathbf{A_2})$, existe uma função não-decrescente $L_f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\begin{aligned} \|\tilde{g}(t,s) - \tilde{g}(k,s)\| \leq L_f(r) \Bigg[&|\, t - s - (k-s)| + \|\psi(t-s) - \psi(k-s)\| \\ &+ \sum_{i=1}^{m} \|\psi(b_i(t-s)) - \psi(b_i(k-s))\| \Bigg]. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Por (2.3), (2.5) e (2.6) , segue que

$$\begin{aligned} \|g(t) - g(k)\| \leq Me^{wT} L_f(r) \int_0^k \Bigg[|\, t-k| + \sum_{i=1}^{m+1} \|\psi\big(b_i(t-s)\big) - \psi(b_i(k-s))\| \Bigg] ds \\ + Me^{wT} \int_k^t \|\tilde{g}(t,s)\|\, ds; \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \|g(t) - g(k)\| &\leq Me^{wT} L_f(r) |\, t-k|\, T \\ &+ Me^{wT} L_f(r) \int_0^k \Bigg[\sum_{i=1}^{m+1} \|\psi\big(b_i(t-s)\big) - \psi(b_i(k-s))\| \Bigg] ds \\ &+ Me^{wT} \int_k^T \chi_{_{[\mathrm{k},\mathrm{t}]}}(s)\, \|\tilde{g}(t,s)\|\, ds; \end{aligned} \tag{2.7}$$

Afirmação 1: Quando $t \downarrow k$ temos

$(\mathbf{1a})$ $Me^{wT} \displaystyle\int_k^T \chi_{_{[k,t]}}(s)\, \|\tilde{g}(t,s)\|\, ds \to 0;$

$(\mathbf{1b})$ $Me^{wT} L_f(r) \displaystyle\int_0^k \left[\sum_{i=1}^{m+1} \|\psi\big(b_i(t-s)\big) - \psi\big(b_i(k-s)\big)\| \right] ds \to 0.$

Justificativa de $(\mathbf{1a})$: Considerando,

$$\hat{g}_t(s) = \chi_{_{[k,t]}}(s)\, \|\tilde{g}(t,s)\|,$$

note que,

- $\hat{g}_t(s) \to 0,$ quando $t \downarrow k$.
- $|\hat{g}_t(s)| \leq \|\tilde{g}(t,s)\| \in L^1\big([0,T]\big)$;

Assim, pelo TEOREMA DA CONVERGÊNCIA DOMINADA DE LEBESGUE (Teorema D.5),

$$\lim_{t\downarrow k} \int_k^T \chi_{_{[k,t]}}(s)\, \|\tilde{g}(t,s)\|\, ds = 0.$$

Logo,

$$\lim_{t\downarrow k} \left(Me^{wT} \int_k^T \chi_{_{[k,t]}}(s)\, \|\tilde{g}(t,s)\|\, ds \right) = Me^{wT} \lim_{t\downarrow k} \left(\int_k^T \chi_{_{[k,t]}}(s)\, \|\tilde{g}(t,s)\|\, ds \right);$$

o que justifica $(\mathbf{1a})$.

Justificativa de $(\mathbf{1b})$: Sendo $\psi_{|[0,T]}$ contínua (num compacto), pois $\psi : [-\tau, t_0] \to X$ é contínua; segue que $\psi_{|[0,T]}$ é uniformemente contínua; então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$0 < |\, x - y| < \delta \Rightarrow \|\psi(x) - \psi(y)\| < \epsilon,$$

para todo $x, y \in [0,T]$. Em particular, considerando $x = b_i(t-s)$ e $y = b_i(t-s)$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$0 < |\, b_i(t-s) - b_i(t-k)| < \delta \Rightarrow \|\psi\big(b_i(t-s)\big) - \psi\big(b_i(k-s)\big)\| < \epsilon.$$

Logo,

$$\int_0^k \left(\sum_{i=1}^{m+1} \|\big(b_i(t-s)\big) - \psi\big(b_i(k-s)\big)\| \right) ds < \int_0^k \epsilon ds = \epsilon k < \epsilon T.$$

Além disso, sendo $b_i : [0,T] \to [-\tau, T]$ Lipschitiziana com constante de Lipschitz L_{b_1}, $0 \leq L_{b_i} \leq 1$, segue que

$$|\, b_i(t-s) - b_i(k-s)| \leq |\, t-s-k+s| = |\, t-k|;$$

então,

$$|\, t-k| < \delta \Rightarrow |\, b_i(t-s) - b_i(k-s)| < \delta.$$

Portanto,

$$\lim_{t\to k} \left[Me^{wT} L_f(r) \int_0^k \left(\sum_{i=1}^{m+1} \| \big(b_i(t-s)\big) - \psi\big(b_i(k-s)\big) \| \right) ds \right] = 0.$$

Das Afirmações **(1a) e (1b)** e sabendo que

$$Me^{wT} L_f(r) |t-k|\, T \xrightarrow[t\to k]{} 0,$$

segue a continuidade à direita de g em $(0, t_0]$. A continuidade, à esquerda, é feita de maneira semelhante. Mostrando, a continuidade de $\tilde{F}\psi$ em $(0, t_0]$.

○ **Continuidade em $t = 0$.** Seja $t_n \in [-\tau, t_0]$.

Afirmação 2: Temos,

(2a) $\tilde{F}\psi(t_n) \xrightarrow[t_n \downarrow 0]{} \tilde{F}\psi(0) = \psi(0)$;

(2b) $\tilde{F}\psi(t_n) \xrightarrow[t_n \uparrow 0]{} \tilde{F}\psi(0) = \psi(0)$.

A justificativa de **(2a)** é semelhante a justificativa que fizemos para o intervalo $(0, t_0]$, trocando t por t_n e k por 0. A justificativa de **(2b)** é imediata, pois

$$\tilde{F}\psi(t_n) = \psi(t_n) \to \psi(0) = \tilde{F}\psi(0).$$

Donde, $\tilde{F}\psi$ também é contínua em $t = 0$.

Portanto, $\tilde{\psi} \in Y_0$. Agora, sendo $\psi \in Z_0$ então $\psi \in W(\psi_0, t)$ e $\psi = \psi_0$ em $[-\tau, 0]$, o que implica, $\psi(t) = \psi_0(t)$, para $t \in [-\tau, 0]$; logo, $\tilde{F}\psi = \psi_0$ em $[-\tau, 0]$; o que completa a prova de (1).

Análise de (2):

• **Se $t \in [-\tau, 0]$.** Note que,

$$\|\tilde{F}\psi(t)\| = \|h\big(\psi(t)\big)\| = \|h\big(\psi_0(t)\big)\| \leq \|h\big(\psi_0\big)\|_{t_0} \leq 1 + K\|\psi_0\|_{t_0} + \|h\big(\psi_0\big)\|_{t_0}.$$

• **Se $t \in [0, t_0]$.** Notemos,

$$\|\tilde{F}\psi(t)\| \leq \|T(t)\|\, \|\psi(0)\| + \int_0^t \|T(t-s)\|\, \big\| f\big(s, \psi(s), \psi\big(b_1(s)\big), \psi\big(b_2(s)\big), ..., \psi\big(b_m(s)\big)\big) \big\|\, ds.$$

Por (2.3),

$$\|\tilde{F}\psi(t)\| \leq K\|\psi_0(0)\| + Me^{wT}\int_0^t \Big[\big\|f\big(s,\psi(s),\psi\big(b_1(s)\big),\psi\big(b_2(s)\big),...,\psi\big(b_m(s)\big)\big)$$

$$-f(0,0,0,...,0)\big\|\Big]\,ds + Me^{wT}t\big\|f(0,0,0,...,0)\big\|.$$

Usando ($\mathbf{A_2}$),

$$\|\tilde{F}\psi(t)\| \leq K\|\psi_0\|_{t_0} + Me^{wT}L_f(r)\int_0^t \big[|s| + \|\psi(s)\| + \sum_{i=1}^{m}\|\psi(b_i(s))\|\big]\,ds$$

$$+Me^{wT}t\big\|f(0,0,0,...,0)\big\|;$$

Sendo, $\psi \in Z_0$,

$$\|\tilde{F}\psi(t)\| \leq K\|\psi_0\|_{t_0} + Me^{wT}L_f(r)\int_0^t \big[s + r\big]\,ds + Me^{wT}t\big\|f(0,0,0,...,0)\big\|;$$

logo,

$$\|\tilde{F}\psi(t)\| \leq K\|\psi_0\|_{t_0} + Me^{wT}L_f(r)\left[\frac{t^2}{2} + tr\right] + Me^{wT}t\big\|f(0,0,0,...,0)\big\|.$$

Sendo, $0 < t \leq t_0$,

$$\|\tilde{F}\psi(t)\| \leq K\|\psi_0\|_{t_0} + Me^{wT}L_f(r)\big[t_0T + t_0r\big] + Me^{wT}t_0\big\|f(0,0,0,...,0)\big\|.$$

Assim,

$$\|\tilde{F}\psi(t)\| \leq K\|\psi_0\|_{t_0} + t_0\underbrace{Me^{wT}\Big[L_f(r)\{T + r\} + \big\|f(0,0,0,...,0)\big\|\Big]}_{M_0};$$

ou seja,

$$\|\tilde{F}\psi(t)\| \leq K\|\psi_0\|_{t_0} + t_0M_0. \tag{2.8}$$

De (2.2) e (2.8) ,

$$\|\tilde{F}\psi(t)\| \leq K\|\psi_0\|_{t_0} + 1.$$

donde,

$$\|\tilde{F}\psi(t)\| \leq K\|\psi_0\|_{t_0} + \|h(\psi_0)\|_{t_0} + 1.$$

mostrando (2). Portanto, $\tilde{F}(Z_0) \subset Z_0$. No que segue, estaremos considerando, $\tilde{F} : Z_0 \to Z_0$ com o objetivo de mostrar que $\tilde{F}$ é uma contração em Z_0. Sejam

$\psi_1, \psi_2 \in W(\psi_0, t_0)_1$. Vejamos.

$*$ **Caso** $t \in [-\tau, 0]$ **.** Neste caso,

$$(\tilde{F}\psi_1)(t) - (\tilde{F}\psi_2)(t) = h\big(\psi_1(t)\big) - h\big(\psi_2(t)\big) = h\big(\psi_0(t)\big) - h\big(\psi_0(t)\big) = 0.$$

$*$ **Caso** $t \in [0, t_0]$ **.** Neste caso, usando a linearidade de $T(t)$, a DESIGUALDADE TRIANGULAR, $(\mathbf{A_2})$ e (2.3) temos

$$\begin{aligned}\|(\tilde{F}\psi_1)(t) - (\tilde{F}\psi_2)(t)\| \leq \|T(t)\| \overbrace{\|\psi_1(0) - \psi_2(0)\|}^{\psi_0(0)-\psi_0(0)=0} \\ + L_f(r) \int_0^t M e^{w(t-s)} \Big[|s - s| + \|\psi_1(s) - \psi_2(s)\| \\ + \sum_{i=1}^{m} \|\psi_1\big(b_i(s)\big) - \psi_2\big(b_i(s)\big)\| \Big] \, ds,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\|(\tilde{F}\psi_1)(t) - (\tilde{F}\psi_2)(t)\| \leq L_f(r) M e^{wT} \int_0^t \Big[\|\psi_1(s) - \psi_2(s)\| \\ + \sum_{i=1}^{m} \|\psi_1\big(b_i(s)\big) - \psi_2\big(b_i(s)\big)\| \Big] \, ds;\end{aligned}$$

o que implica,

$$\|(\tilde{F}\psi_1)(t) - (\tilde{F}\psi_2)(t)\| \leq L_f(r) M e^{wT} \int_0^t (m+1) \|\psi_1 - \psi_2\|_{t_0} \, ds;$$

donde,

$$\|(\tilde{F}\psi_1)(t) - (\tilde{F}\psi_2)(t)\| \leq t_0 M e^{wT} L_f(r)(m+1) \|\psi_1 - \psi_2\|_{t_0};$$

consequentemente,

$$\|(\tilde{F}\psi_1)(t) - (\tilde{F}\psi_2)(t)\| \leq t_0 M_0 \|\psi_1 - \psi_2\|_{t_0}, \quad \forall t \in [-\tau, t_0]. \tag{2.9}$$

De (2.2), $t_0 M_0 < 1$; logo, por (2.9), $\tilde{F} : Z_0 \to Z_0$ é uma contração em Z_0. Assim, aplicando o TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH (Teorema D.16), existe uma única $u \in W(\psi_0, t_0)_R$ tal que $u = \tilde{F}u$ em $[-\tau, t_0]$, isto é,

$$u(t) = \begin{cases} h(u(t)) = \phi_0(t), & t \in [-\tau, 0] \\ T(t)u(0) + \displaystyle\int_0^t T(t-s) f\big(s, u(s), u\big(b_1(s)\big), ..., u(b_m(s))\big) \, ds, & t \in [0, t_0], \end{cases} \tag{2.10}$$

ou seja, existe u é uma solução generalizada em $[-\tau, t_0]$.

Unicidade: Vamos mostrar agora, a unicidade da solução generalizada u de (2.1) em $[-\tau, t_0]$ em $W(\psi_0, t_0)$. Note que, o Teorema do ponto fixo de Banach garantiu a unicidade, anteriormente, apenas para $u_1, u_2 \in W(\psi_0, t_0)_1$. Sejam, $u_1, u_2 \in W(\psi_0, t_0)$ duas soluções generalizadas de (2.1) em $[-\tau, t_0]$. Para $t \in [-\tau, 0]$, a unicidade em $W(\psi_0, t_0)$ é imediata uma vez que,

$$u_1(t) - u_2(t) = \psi_0(0) - \psi_0(0) = 0.$$

Para $t \in (0, t_0]$,

$$\begin{aligned}\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \big\|T(t)\big\| &\overbrace{\big\|u_1(0) - u_2(0)\big\|}^{\|\psi_0(0)-\psi_0(0)\|=0} \\ &+ \int_0^t \big\|T(t-s)\big\| \, \big\|\big[f\big(s, u_1(s), u_1\big(b_1(s)\big), ..., u_1(b_m(s))\big) \\ &-f\big(s, u_2(s), u_2\big(b_1(s)\big), ..., u_2(b_m(s))\big)\big]\big\| \, ds;\end{aligned}$$

além disso, da continuidade de u_1 e u_2 no compacto $[-\tau, t_0]$ e de $(\mathbf{A_4})$, temos

$$\|u_j(b_i(s))\| \leq r_0,$$

para algum $r_0 > 0$, $j = 1, 2$ e $i = 1, ..., m$; o que implica,

$$\|u_1(s)\| + \sum_{j=1}^{m} \|u_j\big(b_i(s)\big)\| \leq (m+1)r_0;$$

logo,

$$\big(u_1(s), u_1(b_1(s)), ..., u_1(b_m(s))\big), \big(u_2(s), u_2(b_1(s)), ..., u_2(b_m(s))\big) \in B_{R_0}(X^m), R_0 = (m+1)r_0;$$

assim, por (2.3) e $(\mathbf{A_2})$,

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq mMe^{wT}L_f(R_0) \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\| \, ds;$$

para $t \in (0, t_0]$; então, pela Desigualdade de Gronwall na Forma Integrável (Teorema D.2), temos

$$0 \leq \|u_1(s) - u_2(s)\| \leq 0\Big[1 + \big(mMe^{wT}L_f(R_0)\big)te^{\left(mMe^{wT}L_f(R_0)\right)t}\Big] = 0;$$

donde, $u_1(s) = u_2(s)$, $\forall s \in (0, t_0]$. Assim, $u_1 \equiv u_2$ em $[-\tau, t_0]$, com u_1 e u_2 em $W(\psi_0, t_0)$.

Prolongamento: Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} w'(t) + Aw(t) = f^1\big(t, w(t), w\big(b_1^1(t)\big), w\big(b_2^1(t)\big), ..., w\big(b_m^1(t)\big)\big), & t \in (0, T - t_0] \\ h^1(w)(t) := w(t) = \phi_0^1(t), \quad t \in [-\tau - t_0, 0], \end{cases} \tag{2.11}$$

onde,

$$f^1\big(t, u_1, u_2, ..., u_{m+1}\big) = f\big(t + t_0, u_1, u_2, ..., u_{m+1}\big), \quad t \in [0, T - t_0], \tag{2.12}$$

$${b_i}^1(t) = b_i(t + t_0) - t_0, \quad t \in [-\tau - t_0, T - t_0], i = 1, 2, .., m \tag{2.13}$$

e

$$\phi_0^1(t) = u(t + t_0), \quad t \in [-\tau - t_0, 0]\,. \tag{2.14}$$

Das definições acima é imediato verificar que:

(**i**) A aplicação

$$\begin{aligned} f^1 : [0, T - t_0] \times X^{m+1} &\to X \\ \big(t, (u_1, ..., u_{m+1})\big) &\rightsquigarrow f^1(t, u_1, u_2, \dots, u_{m+1}) = f(t + t_0, u_1, u_2, \dots, u_{m+1}) \end{aligned}$$

satisfaz $(\mathbf{A_2})$;

(**ii**) A aplicação b_i^1 satisfaz $(\mathbf{A_4})$;

(iii) A aplicação $h^1 : Y^1_{T-t_0} \to Y^1_{T-t_0}, Y^1_{T-t_0} =: C\big([-\tau - t_0, T - t_0]; X\big)$ é tal que para quaisquer ψ_1^1 e ψ_2^1 em $Y^1_{T-t_0}$ com $\psi_1^1 = \psi_2^1$ em $[-\tau - t_0, 0]$,

$$h^1(\psi_1^1) = h^1(\psi_2^1) \quad \text{em } [-\tau - t_0, 0]$$

e $\psi_0^1 \in Y^1_{T-t_0}$ e, mais, considerando

$$\psi_0^1(t) = \begin{cases} u(t + t_0), & t \in [-\tau - t_0, 0] \\ u(t_0), & 0 \le t \le T - t_0, \end{cases}$$

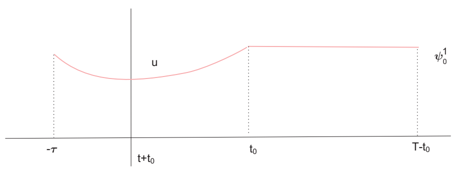

Figura 2.1: Representação de ψ_0^1.

temos

$$h^1(\psi_0^1) = \phi_0^1 \quad \text{em } [-\tau - t_0, 0];$$

Seja

$$Z_1 = W\big(\psi_0^1, t_1\big)_1 = \{\psi \in W\big(\psi_0^1, t_1\big); \|\psi\|_{t_0} \leq 1 + K^1\|\psi_0^1\|_{t_1} + \|h(\psi_0^1)\|_{t_1}\},$$

para $0 \leq t_1 \leq T - t_0$, com

$$t_1 M_0^1 \leq \frac{1}{3},$$

onde

$$M_0^1 = Me^{w(T-t_0)}\Big\{L_f(r_1)\big[(T - t_0) + r_1\big] + \|f(0,0,...,0)\|\Big\},$$

com

$$r_1 := (m+1)\Big[1 + K^1\big\|\psi_0^1\big\|_{T-t_0} + \big\|h^1(\psi_0^1)\big\|_{T-t_0}\Big].$$

Logo, podemos proceder como antes e obtemos uma função

$$w \in C\big([-\tau - t_0, T - t_0]; X\big)$$

tal que w é uma solução generalizada de (2.11) em $[-\tau - t_0, t_1]$, para algum $0 < t_1 \leq T - t_0$.

Nosso objetivo à seguir, é mostrar que

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), \ t \in [-\tau, t_0] \\ \omega(t - t_0), \ t \in [t_0, t_0 + t_1]; \end{cases}$$

é uma solução generalizada de (2.1) em $[-\tau, t_0 + t_1]$. Devemos mostrar, então, que

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} h\big(\tilde{u}(t)\big) = \phi_0(t), \ t \in [-\tau, 0] \\ T(t)\tilde{u}(0) + \displaystyle\int_0^t T(t-s)\tilde{u}\big(s, \tilde{u}(s), \tilde{u}(b_1^1(s)), \tilde{u}(b_2^1(s)), ..., \tilde{u}(b_m^1(s))\big)\, ds, \ t \in [0, t_0 + t_1]. \end{cases}$$

Para isso, vamos analizar cada sentença separadamente:

$\star$ **Se** $\underline{t \in [-\tau, t_0]}$, temos $\tilde{u}(t) = u(t)$ e u é uma solução generalizada de (2.1); logo, $h\big(\tilde{u}(t)\big) = h\big(u(t)\big) = \phi_0$.

$\star$ **Se** $\underline{t \in [t_0, t_0 + t_1]}$, tendo em vista que w é solução generalizada de (2.11), tem-se

$$\tilde{u}(t) = \omega(t - t_0) = T(t - t_0)\omega(0) + \int_0^{t-t_0} T(t - t_0 - s) f^1\big(s, \omega(s), \omega(b_1^1(s)), ..., \omega(b_m^1(s))\big)\, ds.$$

Usando (2.11), (2.12) e (2.14),

$$\tilde{u}(t) = T(t - t_0)u(t_0) + \int_0^{t-t_0} T(t - t_0 - s) f\big(s + t_0, \omega(s), \omega(b_1^1(s)), ..., \omega(b_m^1(s))\big)\, ds.$$

Assim, de (2.10),

$$\tilde{u}(t) = T(t-t_0)\Big[T(t_0)u(0) + \int_0^{t_0} T(t_0 - s) f\big(s, u(s), u\big(b_1(s)\big), ..., u(b_m(s))\big)\, ds\Big]$$

$$+ \int_0^{t-t_0} T(t - t_0 - s) f\big(s + t_0, \omega(s), \omega(b_1^1(s)), ..., \omega(b_m^1(s))\big)\, ds,$$

ou seja, por propriedade de semigrupo e pelo item (iv) da Proposição A.2, temos

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) = T(t)u(0) &+ \int_0^{t_0} T(t - t_0 + t_0 - s) f\big(s, u(s), u\big(b_1(s)\big), ..., u(b_m(s))\big)\, ds \\ &+ \int_0^{t-t_0} T(t - t_0 - s) f\big(s + t_0, \omega(s), \omega(b_1^1(s)), ..., \omega(b_m^1(s))\big)\, ds. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Fazendo uma mudança de variáveis, encontramos

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) = T(t)u(0) &+ \int_0^{t_0} T(t - s) f\big(s, u(s), u\big(b_1(s)\big), ..., u(b_m(s))\big)\, ds \\ &+ \int_{t_0}^{t} T(t - s) f\big(s, \omega(s - t_0), \omega(b_1^1(s - t_0)), ..., \omega(b_m^1(s - t_0))\big)\, ds. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Afirmação 3:

(3a) $u(0) = \tilde{u}(0)$; pois, $0 \in [-\tau, t_0]$;

(3b) $u(s) = \tilde{u}(s)$, para $s \in (0, t_0]$;

(3c) $u(b_i(s)) = \tilde{u}(b_i(s))$, para $-\tau \leq b_i(s) \leq s \leq t_0$;

(3d) $w(s - t_0) = \tilde{u}(s)$, para $t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + t_1$.

(3e) $w(b_i^1(s-t_0)) = w\big(b_1(s) - t_0\big) = \tilde{u}\big(b_i(s)\big)$, para $b_i(s) \in [t_0, t_0+1]$ ou $b_i(s) \in [-\tau, t_0]$.

As justificativas para **(3a)-(3d)** são imediatas. Para (**3e**) observamos que dado $s \in [-\tau, t_0 + t_1]$ podemos ter

$$b_i(s) \geq t_0 \quad \text{ou} \quad b_i(s) < t_0.$$

Assim, para $b_i(s) \leq s \leq t \leq t_0 + t_1$, segue que:

- Se $b_i(s) \geq t_0$ então $t_0 \leq b_i(s) \leq t_0 + t_1$; e, neste caso, $w\big(b_i(s) - t_0\big) = \tilde{u}\big(b_i(s)\big)$.
- Se $-\tau < b_i(s) < t_0$, então,

$$w\big(b_i(s) - t_0\big) = \phi_0^1\big(b_i(s) - t_0\big) = u\big(b_i(s) - t_0 + t_0\big) = u\big(b_i(s)\big) = \tilde{u}\big(b_i(s)\big);$$

e, neste caso, $w\big(b_i(s) - t_0\big) = \tilde{u}\big(b_i(s)\big)$; o que completa a justificativa para **(3e)**.

Diante da Afirmação 3 e de (2.16), obtemos

$$\tilde{u}(t) = T(t)\tilde{u}(0) + \int_0^{t} T(t - s) f\big(s, \tilde{u}(s), \tilde{u}\big(b_1(s)\big), ..., \tilde{u}(b_m(s))\big)\, ds;$$

mostrando que, $\tilde{u}$ é solução generalizada de (2.1) em $[-\tau, t_0 + t_1]$.

Conforme o que fizemos até agora, primeiro, mostramos que existe uma solução generalizada

$$u_1 = u \text{ de (2.1) em } [-\tau, T_1], \text{ com } T_1 = t_0.$$

Em seguida, obtemos uma solução generalizada

$$u_2 = \tilde{u} \text{ de (2.1) em } [-\tau, T_2], \; T_2 = t_0 + t_1 = T_1 + t_1, \, t_1 > 0.$$

Partindo, da existência de u_2, deduzimos, com o mesmo raciocínio, que existe uma solução generalizada

$$u_3 \;\text{ de (2.1) no intervalo } [-\tau, T_3], \; T_3 = T_2 + t_2, t_2 > 0.$$

Por indução, deduzimos uma seqüência crescente $\big(T_n\big)$ e soluções generalizadas u_n em $[-\tau, T_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Existência de um Intervalo Maximal: Sejam agora, $T_k < T_l$ e u_k e u_l soluções generalizadas de (2.1) em $[-\tau, T_k]$ e $[-\tau, T_l]$, respectivamente. Da unicidade da solução segue que

$$u_k = u_l \text{ em } [-\tau, T_k].$$

Seja I um conjunto de índices qualquer. Consideremos a família $\big(u_i\big)_{i\in I}$ de todas as soluções generalizadas de (2.1) definidas em uma família de intervalos $\big([-\tau, T_i]\big)_{i\in I}$. Seja

$$T_{max} = \sup_{i\in I} T_i.$$

Assim, T_{max} pode ser T. Vamos definir a função

$$u \in C([-\tau; T_m); X)$$

tal que

$$u(t) = u_i(t), \text{ se } t \in [-\tau, T_i], i \in I.$$

Da unicidade, resulta que $u(t)$ está bem definida. Também podemos observar que u satisfaz

$$\tilde{F}u = u \text{ para todo } t \in [-\tau; T_m).$$

Esta solução é chamada **solução maximal** de (2.1). O intervalo $[-\tau, T_{\max})$ é chamado o **intervalo maximal**.

Blow up: Diante do que fizemos, ou obtemos uma única função $u \in W(\psi_0, T)$ a qual é uma solução generalizada de (2.1) em $[-\tau, T]$ ou uma única função u tal que $u \in W(\psi_0, \tilde{T})$, para todo $0 < \tilde{T} < T_{\max} \leq T$ e u é uma solução generalizada de (2.1) em $[-\tau, \tilde{T}]$ Neste, último caso, se

$$T_{\max} < T \text{ tem-se } \lim_{t \to T_{\max}} \|u(t)\| = \infty. \tag{2.17}$$

De fato, sendo $[-\tau, T_{\max})$ o intervalo maximal, no qual a solução generalizada u de (2.1) pode ser estendida e supondo, por contradição que,

$$T_{\max} < T \text{ e } \lim_{t \to T_{\max}} \|u(t)\| < \infty;$$

devem existir $M_1 > 0$ e $\eta > 0$ tais que

$$\|u(t)\| \leq M_1, \quad \forall\, t \in (T_{\max} - \eta, T_{\max}); \tag{2.18}$$

logo, sendo u limitada em $[-\tau, T_{\max} - \eta]$, existe $M_2 > 0$ tal que

$$\|u(t)\| \leq M_2, \forall\, t \in [-\tau, T_{\max} - \eta] \tag{2.19}$$

De (2.18) e (2.19),

$$\|u(t)\| \leq C^* = \max\{M_1, M_2\}, \forall\, t \in [-\tau, T_{\max}).$$

Assim, existe uma sequência $t_n \uparrow T_{\max}$ tal que

$$\|u(t_n)\| \leq C^*.$$

Agora, vamos fixar $\delta > 0$ satisfazendo

$$\delta \tilde{M}_0 < \frac{1}{3}$$

com

$$\tilde{M}_0 = Me^{wT}\Big[L_f(\tilde{r})\{T + \tilde{r}\} + \|f(0, 0, ..., 0)\|\Big]$$

com

$$\tilde{r} : (m+1)(1 + Me^{wT}C^* + C^*),$$

ou seja,

$$\tilde{r} : (m+1)\big[1 + (1 + Me^{wT})C^*\big].$$

Sabemos que existe, uma solução generalizada u do problema (2.1) definida em $[-\tau, \delta]$. Conforme o que fizemos consideraríamos

$$u^n(t) = \begin{cases} u(t), & \text{se } t \in [-\tau, t_n] \\ w^n(t - t_n), & \text{se } t \in [t_n, t_n + \delta], \end{cases} \tag{2.20}$$

e, obteríamos uma solução generalizada do problema (2.1) definida em $[-\tau, t_n + \delta]$. Assim, considerando n suficientemente grande, segue que $t_n + \delta > T_{\max}$; pois, $t_n \uparrow T_{\max}$. Então, u^n é uma solução definida no intervalo $[-\tau, t_n + \delta]$. Isto contradiz o fato que u é solução maximal. Mostrando (2.17).

Continuidade Lipschitz da u : À seguir, mostraremos se ψ_0 é Lipschitz contínua em $[-\tau, 0]$ e $\psi_0(0) \in D(A)$ então u é Lipschitz contínua em todo subintervalo compacto de exitência. Fixado $h \geq 0$ para todo $t \in [0, \tilde{T}]$, $\tilde{T} < T$, temos

$$u(t+h) = T(t+h)u(0) + \int_0^{t+h} T(t+h-s) f\big(s, u(s), u\big(b_1(s)\big), ..., u(b_m(s))\big)\, ds. \tag{2.21}$$

Por outro lado,

$$T(t)u(h) + \int_0^t T(t-s) f\big(s+h, u(s+h), u\big(b_1(s+h)\big), ..., u(b_m(s+h))\big)\, ds = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 \tag{2.22}$$

com

$$\tilde{I}_1 = T(t)\Big[T(h)u(0) + \int_0^h T(h-s) f\big(s, u(s), u\big(b_1(s)\big), ..., u(b_m(s))\big)\, ds\Big]$$

e

$$\tilde{I}_2 = \int_0^t T(t-s) f\big(s+h, u(s+h), u\big(b_1(s+h)\big), ..., u(b_m(s+h))\big)\, ds.$$

Além disso, fazendo a mudança de variáveis $x = s + h$ para $\tilde{I}_2$ temos

$$\tilde{I}_2 = \int_h^{t+h} T(t-x+h) f\big(x, u(x), u\big(b_1(x)\big), ..., u(b_m(x))\big)\, dx;$$

assim,

$$\tilde{I}_2 = \int_h^{t+h} T(t-s+h) f\big(s, u(s), u\big(b_1(s)\big), ..., u(b_m(s))\big)\, ds. \tag{2.23}$$

De (2.21), (2.22) e (2.23)

$$u(t+h) = T(t)u(h) + \int_0^t T(t-s) f\big(s+h, u(s+h), u\big(b_1(s+h)\big), ..., u(b_m(s+h))\big)\, ds.$$

Assim,

$$\|u(t+h)-u(t)\| \leq \|T(t)\|\,\|u(h)-u(0)\|$$
$$+\int_0^t \big\|T(t-s)\big\|\,\Big\|f\big(s+h,u(s+h),u\big(b_1(s+h)\big),...,u(b_m(s+h))\big)$$
$$-f\big(s,u(s),u\big(b_1(s)\big),...,u(b_m(s))\big)\,ds\Big\|$$

Por (2.3) e ($\mathbf{A_2}$),

$$\|u(t+h)-u(t)\| \leq Me^{wT}\,\|u(h)-u(0)\|$$
$$+ML_f(R_0)e^{wT}\int_0^t \Big[|h|+\|u(s+h)-u(s)\|$$
$$+\sum_{i=1}^m \big\|u(b_i(s+h))-u(b_i(s))\big\|\Big]\,ds;$$

ou seja,

$$\|u(t+h)-u(t)\| \leq Me^{wT}\,\|u(h)-u(0)\|$$
$$+ML_f(R_0)e^{wT}\int_0^t h\,ds+ML_f(R_0)e^{wT}\int_0^t \Big[\|u(s+h)-u(s)\|$$
$$+\sum_{i=1}^m \big\|u(b_i(s+h))-u(b_i(s))\big\|\Big]\,ds;$$

logo,

$$\|u(t+h)-u(t)\| \leq Me^{wT}\,\|u(h)-u(0)\|$$
$$+ML_f(R_0)e^{wT}Th+ML_f(R_0)e^{wT}\int_0^t \Big[\|u(s+h)-u(s)\| \tag{2.24}$$
$$+\sum_{i=1}^m \big\|u(b_i(s+h))-u(b_i(s))\big\|\Big]\,ds.$$

Notemos,

$$\|u(h)-u(0)\| \leq \underbrace{\|T(h)u(0)-u(0)\|}_{\tilde{I}_3}+\underbrace{\int_0^h \|T(h-s)\|\|f\big(s,u(s),u(b_1(s)),...,u(b_m(s))\big)\|ds}_{\tilde{I}_4}.$$

À seguir, vamos estimar os termos $\tilde{I}_3$ e $\tilde{I}_4$ acima.

Estimativa para $\tilde{I}_3$: Pelo Teorema C.10 ,

$$\|T(h)u(0) - u(0)\| = \|T(h)u_0 - u_0\| = \left\| A\left(\int_0^h T(s)u_0\, ds \right) \right\|.$$

Pelo Corolário C.7 e sabendo que A é limitado, com seu domínio na norma do gráfico, bem como, por hipótese, A é linear, segue pelo item (iv) da Proposição A.2 que

$$\|T(h)u(0) - u(0)\| = \left\| \int_0^h AT(s)u_0\, ds \right\| = \left\| \int_0^h T(s)Au_0\, ds \right\|.$$

Uma vez que, A e T(t) comutam quando o dado inicial está em $D(A)$. Assim, pelo item (iii) da Proposição A.2 e de $\|B_1 B_2\| \leq \|B_1\|\,\|B_2\|$ para operadores lineares limitados B_1 e B_2, obtemos

$$\|T(h)u(0) - u(0)\| \leq \int_0^h \|T(s)\|\,\|Au_0\|\, ds = \|Au_0\| \int_0^h \|T(s)\|\, ds.$$

De (2.3),

$$\|T(h)u(0) - u(0)\| \leq M\|Au_0\| \int_0^h e^{ws}\, ds,$$

ou seja,

$$\|T(h)u(0) - u(0)\| \leq hM\|Au_0\| \left[\frac{1}{w}\left(\frac{e^{wh} - 1}{h} \right) \right]. \tag{2.25}$$

Sendo,

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{w}\left(\frac{e^{wh} - 1}{h} \right) \right] = 1,$$

obtemos, de (2.25),

$$\tilde{I}_3 = \|T(h)u(0) - u(0)\| \leq K_1 h\,. \tag{2.26}$$

onde K_1 é uma constante positiva que depende da norma $\|Au_0\|$.

Estimativa para $\tilde{I}_4$: Temos,

$$\tilde{I}_4 = \int_0^h \|T(h-s)\|\|f\big(s, u(s), u(b_1(s)), ..., u(b_m(s))\big) - f(0,0,0,...,0) + f(0,0,0,...,0)\|ds.$$

Por (2.3) e ($\mathbf{A_2}$),

$$\tilde{I}_4 \leq Me^{wT}\left\{ L_f(R_0) \int_0^h \left[|s| + \|u(s)\| + \sum_{i=1}^{m} \|u(b_i(s))\| \right] ds + \int_0^h \|f(0,0,0,...,0)\|\, ds \right\}.$$

Sendo u contínua num compacto, obtemos

$$\tilde{I}_4 \leq K_2 h, \tag{2.27}$$

onde K_2 é uma constante que depende de $L_f(R_0)$.

Com as estimativas (2.26) e (2.27),

$$\|u(h) - u(0)\| \leq K_3 h, \tag{2.28}$$

com $K_3 = K_1 + K_2$. Assim, por (2.24) e (2.28),

$$\big\|u(t+h) - u(t)\big\| \leq C_1\Big\{h + \int_0^t \Big[\|u(s+h) - u(s)\| + \sum_{i=1}^{m} \big\|u(b_i(s+h)) - u(b_i(s))\big\|\Big]\, ds\Big\}. \tag{2.29}$$

Se $b_i(t) \leq b_i(t+h) \leq 0$, então

$$\|u\big(b_i(t+h)\big) - u\big(b_i(t)\big)\| = \|\psi_0\big(b_i(t+h)\big) - \psi_0\big(b_i(t)\big)\|,$$

e, portanto,

$$\|u\big(b_i(t+h)\big) - u\big(b_i(t)\big)\| \leq L_{\psi_0}\|b_i(t+h) - b_i(t)\| \leq L_{\psi_0} L_{b_i} h \leq C_2 h,$$

onde L_{ψ_0} e L_{b_i} são as constantes de Lipschitz em $[-\tau, 0]$, referentes, respectivamente, a ψ_0 e b_i. (veja hipótese e $(\mathbf{A_4})$).
Se $b_i(t) < 0 < b_i(t+h)$ então, neste caso,

$$b_i(t) \leq h \quad \text{e} \quad b_i(t+h) \leq h,$$

pois $h > 0$ e $b_i(t)$ é negativo; para a segunda desigualdade, observamos que

$$b_i(t+h) - b_i(t) \leq |\, b_i(t+h) - b_i(t)| \leq L_{b_i} h, \quad \text{com } 0 \leq L_{b_i} \leq 1,$$

o que implica,

$$b_i(t+h) \leq L_{b_i} h + b_i(t) \leq L_{b_i} h < h,$$

já que $b_i(t)$ é um número negativo. Também, neste caso,

$$\|u\big(b_i(t+h)\big) - u\big(b_i(t)\big)\| \leq \tilde{I}_5 + \tilde{I}_6 \tag{2.30}$$

com

$$\tilde{I}_5 = \big\|T(b_i(t+h))\psi_0(0) - \psi_0(b_i(t))\big\|$$

e

$$\tilde{I}_6 = \int_0^{b_i(t+h)} \|T\big(b_i(t+h) - s\big)\|\, \|f\big(s, u(s), u\big(b_1(s)\big), ..., u(b_m(s))\big)\big\|\, ds.$$

À seguir, vamos estimar cada um dos $\tilde{I}_j$, $j = 5, 6$.

Estimativa para $\tilde{I}_5$: Temos,

$$\tilde{I}_5 \leq \big\| T(b_i(t+h))\psi_0(0) - \psi_0(0) \big\| + \big\| \psi_0(0) - \psi_0(b_i(t)) \big\|. \tag{2.31}$$

Pelo Teorema C.10 ,

$$\| T(b_i(t+h))\psi_0(0) - \psi_0(0) \big\| = \left\| A \bigg(\int_0^{b_i(t+h)} T(s)\psi_0(0)\, ds \bigg) \right\|.$$

Do Corolário C.7 e sabendo que A é limitado, com seu domínio na norma do gráfico, bem como, por hipótese, A é linear, segue pelo item (iv) da Proposição A.2 que

$$\| T(b_i(t+h))\psi_0(0) - \psi_0(0) \big\| = \left\| \int_0^{b_i(t+h)} AT(s)\psi_0(0)\, ds \right\| = \left\| \int_0^{b_i(t+h)} T(s)A\psi_0(0)\, ds \right\|;$$

uma vez que, A e T(t) comutam quando o dado inicial está em $D(A)$. Assim, pelo item (iii) da Proposição A.2 e de $\|B_1 B_2\| \leq \|B_1\|\,\|B_2\|$ para operadores lineares limitados B_1 e B_2, obtemos

$$\| T(b_i(t+h))\psi_0(0) - \psi_0(0) \big\| \leq \int_0^{b_i(t+h)} \|T(s)\|\,\|A\psi_0(0)\|\, ds = \|A\psi_0(0)\| \int_0^{b_i(t+h)} \|T(s)\|\, ds.$$

De (2.3),

$$\| T(b_i(t+h))\psi_0(0) - \psi_0(0) \big\| \leq M\|A\psi_0(0)\| \int_0^{b_i(t+h)} e^{ws}\, ds,$$

ou seja, sendo $b_i(t+h) \leq h$,

$$\| T(b_i(t+h))\psi_0(0) - \psi_0(0) \big\| \leq M\|A\psi_0(0)\| \int_0^{h} e^{ws}\, ds.$$

Assim,

$$\| T(b_i(t+h))\psi_0(0) - \psi_0(0) \| \leq hM\|A\psi_0(0)\| \left[\frac{1}{w} \bigg(\frac{e^{wh}-1}{h} \bigg) \right]. \tag{2.32}$$

Sendo,

$$\lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{w} \bigg(\frac{e^{wh}-1}{h} \bigg) \right] = 1,$$

de (2.32),

$$\| T(b_i(t+h))\psi_0(0) - \psi_0(0) \| \leq \tilde{K}_1 h\,. \tag{2.33}$$

onde $\tilde{K}_1$ é uma constante positiva que depende da norma $\|A\psi_0(0)\|$.

Sendo ψ_0 Lipschitziana,

$$\|\psi_0(0) - \psi_0\big(b_i(t)\big)\| = \|\psi_0(b_i(t)) - \psi_0(0)\| \leq L_{\psi_0}|b_i(t)|. \tag{2.34}$$

Além disso,

$$b_i(t+h) \geq 0 \Rightarrow b_i(t+h) \geq -b_i(t) + b_i(t) \Rightarrow -b_i(t) \leq b_i(t+h) - b_i(t);$$

donde, sendo $b_i(t) < 0$ e usando a da definição de módulo,

$$|b_i(t)| = -b_i(t) \leq b_i(t+h) - b_i(t) \leq |b_i(t+h) - b_i(t)|,$$

ou seja,

$$|b_i(t)| \leq |b_i(t+h) - b_i(t)|. \tag{2.35}$$

De (2.34) e (2.35),

$$\|\psi_0(0) - \psi_0\big(b_i(t)\big)\| \leq L_{\psi_0}|b_i(t+h) - b_i(t)| \ .$$

Uma vez que b_i é Lipschitziana,

$$\|\psi_0(0) - \psi_0\big(b_i(t)\big)\| \leq \tilde{K}_2|t+h-t| = \tilde{K}_2 h. \ . \tag{2.36}$$

Por (2.31), (2.33) e (2.36) concluimos que

$$\tilde{I}_5 \leq \tilde{K}_3 h. \tag{2.37}$$

Estimativa para $\tilde{I}_6$: Temos $b_i(t+h) \leq h$, então sendo $s, h \geq 0$ segue que $b_i(t+h) - s \leq h - s$. Logo, de (2.3), temos

$$\tilde{I}_6 \leq \int_0^h Me^{wh}\Big[\|f\big(s, u(s), u\big(b_1(s)\big), ..., u\big(b_m(s)\big)\big) - f(0,0,0,...,0)\| + \|f(0,0,0,...,0)\|\Big]\, ds.$$

Por ($\mathbf{A_2}$),

$$\tilde{I}_6 \leq Me^{wT}\bigg\{\int_0^h L_f(R_0)\Big[|s| + \|u(s)\| + \sum_{i=1}^{m}\|u\big(b_m(s)\big)\|\Big]ds + \int_0^h \|f(0,0,0,...,0)\|ds\bigg\};$$

donde, sendo u contínua no compacto (e, por conseqüinte limitada),

$$\tilde{I}_6 \leq \tilde{K}_4 h. \tag{2.38}$$

De (2.30), (2.37) e (2.38) obtemos

$$\|u\big(b_i(t+h)\big) - u\big(b_i(t)\big)\| \leq M_2 h;$$

logo, de (2.29),

$$\big\|u(t+h) - u(t)\big\| \leq M_2 h + C_1 \int_0^t \|u(s+h) - u(s)\|\, ds.$$

Finalmente, vamos analizar o caso $b_i(t+h) \geq b_i(t) \geq 0$. Vejamos,

$$\begin{aligned} u\big(b_i(t+h)\big) - u\big(b_i(t)\big) &= \big(T(b_i(t+h)) - T(b_i(t))\big)\psi_0(0) \\ &\quad + \int_0^{b_i(t+h)} T\big(b_i(t+h)-s\big)\bar{f}(s)\,ds \\ &\quad - \int_0^{b_i(t)} T\big(b_i(t)-s\big)\bar{f}(s)\,ds. \end{aligned} \tag{2.39}$$

onde $\bar{f}(s) = f\big(s, u(s), u\big(b_1(s)\big), ..., u(b_m(s))\big)$. Seja $b_i(t+h) = b_i(t) + \tilde{h}$. Então, sendo b_i Lipschitziana e $0 \leq L_{b_i} \leq 1$,

$$\tilde{h} = b_i(t+h) - b_i(t) \leq |\,b_i(t+h) - b_i(t)| \leq L_{b_i}|t+h-t| = L_{b_i}h \leq h;$$

ou seja, $\tilde{h} \leq h$. Fazendo a mudança de variável $x = s - \tilde{h}$, obtemos

$$\int_0^{b_i(t+h)} T\big(b_i(t+h)-s\big)\bar{f}(s)\,ds = \int_{-\tilde{h}}^{b_i(t)} T\big(b_i(t)-s\big)\bar{f}\big(s+\tilde{h}\big)\,ds. \tag{2.40}$$

De (2.39) e (2.40),

$$\begin{aligned} \big\|u\big(b_i(t+h)\big) - u\big(b_i(t)\big)\big\| &\leq \underbrace{\big\|T(\,b_i(t+h))\psi_0(0) - T(b_i(t))\psi_0(0)\big\|}_{\tilde{I}_7} \\ &\quad + \underbrace{\int_{-\tilde{h}}^{0} \big\|T\big(b_i(t)-s\big)\bar{f}(s+\tilde{h})\big\|\,ds}_{\tilde{I}_8} \\ &\quad + \underbrace{\int_0^{b_i(t)} \big\|T\big(b_i(t)-s\big)\big[\bar{f}(s+\tilde{h}) - \bar{f}(s)\big]\big\|\,ds}_{\tilde{I}_9}. \end{aligned}$$

À seguir, vamos fazer um estudo em cada um dos termos $\tilde{I}_j, j = 7, 8, 9$ acima.

Estimativa para $\tilde{I}_7$: Pelo item **(c)** do Teorema C.10

$$\tilde{I}_7 = \left\|A\bigg(\int_0^{b_i(t+h)} T(s)\psi_0(0)\,ds\bigg) - A\bigg(\int_0^{b_i(t)} T(s)\psi_0(0)\,ds\bigg)\right\|;$$

ou seja,

$$\tilde{I}_7 = \left\|A\bigg(\int_{b_i(t)}^{b_i(t+h)} T(s)\psi_0(0)\,ds\bigg)\right\|;$$

assim, do item (iv) da Proposição A.2 e usando o fato que A e $T(t)$ comutam quando o dado inicial está em $D(A)$.

$$\tilde{I}_7 = \left\|\int_{b_i(t)}^{b_i(t+h)} AT(s)\psi_0(0)\,ds\right\| = \left\|\int_{b_i(t)}^{b_i(t+h)} T(s)A\psi_0(0)\,ds\right\|;$$

então, pelo item (iii) da proposição A.2 e de $\|B_1B_2\| \leq \|B_1\|\,\|B_2\|$ para operadores lineares limitados B_1 e B_2, obtemos

$$\tilde{I}_7 \leq \int_{b_i(t)}^{b_i(t+h)} \|T(s)\|\,\|A\psi_0(0)\|\,ds$$

De (2.3),

$$\tilde{I}_7 \leq M\|A\psi_0(0)\| \int_{b_i(t)}^{b_i(t+h)} e^{ws}\;ds. \tag{2.41}$$

Sendo,

$$\tfrac{1}{w}\,e^{wb_i(t+h)} - \tfrac{1}{w}\,e^{wb_i(t)} \leq \tfrac{1}{w}\;e^{wt}\,\underbrace{\left[\frac{e^{wh}-1}{h}\right]}_{\text{limitado}} h,\;\; b_i(t) \leq t;$$

logo, de (2.41) segue que

$$\tilde{I}_7 \leq \tilde{K}_5 h \tag{2.42}$$

Estimativa para $\tilde{I}_8$: Por (2.3) e $b_i(t) \leq t$, para todo $t \in [0,T]$, temos

$$\begin{aligned}\tilde{I}_8 &\leq \int_{-\tilde{h}}^{0} Me^{w(b_i(t)-s)}\big\|\bar{f}(s+\tilde{h})\big\|\,ds \\ &\leq Me^{wT}\int_{-\tilde{h}}^{0} e^{-ws}\big[\|\bar{f}(s+\tilde{h}) - f(0,0,0,...,0)\| + \|f(0,0,0,...,0)\|\big]\,ds.\end{aligned}$$

Então por $(\mathbf{A_2})$,

$$\tilde{I}_8 \leq L_f(R_0)Me^{wT}\int_{-\tilde{h}}^{0} e^{-ws}\left\{\left[\|u(s+h)\| + \sum_{i=1}^{m}\|u\big(b_i(s+h)\big)\|\right] + \|f(0,0,0,...,0)\|\right\} ds. \tag{2.43}$$

Sendo

$$\int_{-\tilde{h}}^{0} e^{ws}\,ds = -\frac{1}{w}\left(1 - e^{w\tilde{h}}\right) = \left[\frac{1}{w}\left(\frac{e^{w\tilde{h}}-1}{\tilde{h}}\right)\right]\tilde{h} \leq \underbrace{\left[\frac{1}{w}\left(\frac{e^{w\tilde{h}}-1}{\tilde{h}}\right)\right]}_{limitado} h,$$

segue, de (2.43), que

$$\tilde{I}_8 \leq \tilde{K}_6 h \tag{2.44}$$

uma vez que u é contínua num compacto.

Estimativa para $\tilde{I}_9$: De (2.3), $b_i(t) \leq t$, para todo $t \in [0,T]$ e $(\mathbf{A_2})$,

$$\tilde{I}_9 \leq \int_0^{b_i(t)} \big\|T\big(b_i(t)-s\big)\big\| \, \big\|\big[\bar{f}(s+\tilde{h}) - \bar{f}(s)\big]\big\| \, ds$$

$$\leq ML_f(R_0)e^{wT} \int_0^{b_i(t)} e^{-ws} \Bigg[|\, s+\tilde{h}-s| + \|u(s+\tilde{h})-u(s)\|$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \big\|u\big(b_i(s+\tilde{h})\big) - u\big(b_i(s)\big)\big\| \Bigg] \, ds;$$

ou seja,

$$\tilde{I}_9 \leq ML_f(R_0)e^{wT} \Bigg\{ \bigg(\int_0^t e^{-ws}\, ds \bigg) \tilde{h} + \int_0^t e^{-ws} \Big[\|u(s+\tilde{h})-u(s)\|$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \big\|u\big(b_i(s+\tilde{h})\big) - u\big(b_i(s)\big)\big\| \Big] \, ds \Bigg\};$$

donde,

$$\begin{aligned} \tilde{I}_9 \leq L_f(R_0)\frac{M}{w}\, e^{wT} \Bigg\{ \big(-e^{-wt}+1 \big)\, h + \int_0^t e^{-ws} \Big[\|u(s+\tilde{h})-u(s)\| \\ + \sum_{i=1}^{m} \big\|u\big(b_i(s+\tilde{h})\big) - u\big(b_i(s)\big)\big\| \Big] \, ds \Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Assim, de (2.45),

$$\tilde{I}_9 \leq C_4 \Bigg\{ h + \int_0^t \Big[\|u(s+\tilde{h})-u(s)\| + \sum_{i=1}^{m} \big\|u\big(b_i(s+\tilde{h})\big) - u\big(b_i(s)\big)\big\| \Big] \, ds \Bigg\}.$$

Logo,

$$\tilde{I}_{13} \leq C_4 \Bigg\{ h + \int_0^t \sup_{0 \leq \tilde{h} \leq h} \Big[\|u(s+\tilde{h})-u(s)\| + \sum_{i=1}^{m} \big\|u\big(b_i(s+\tilde{h})\big) - u\big(b_i(s)\big)\big\| \Big] \, ds \Bigg\}. \tag{2.46}$$

Combinando (2.29) e (2.46), para qualquer $0 \leq \bar{h} \leq h$, obtemos

$$\big\|u(t+\bar{h})-u(t)\big\| + \sum_{i=1}^{m} \|u\big(b_i(t+\bar{h})\big) - u\big(b_i(t)\big)\|$$

$$\leq \Bigg\{ C_1 \Bigg[\bar{h} + \int_0^t \bigg(\|u(s+\bar{h})-u(s)\| + \sum_{i=1}^{m} \big\|u(b_i(s+\bar{h})) - u(b_i(s))\big\| \bigg) \, ds \Bigg] \Bigg\}$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \Bigg\{ C_4 \Bigg[\bar{h} + \int_0^t \sup_{0 \leq \tilde{h} \leq \bar{h}} \bigg(\|u(s+\tilde{h})-u(s)\| + \sum_{i=1}^{m} \big\|u\big(b_i(s+\tilde{h})\big) - u\big(b_i(s)\big)\big\| \bigg) \, ds \Bigg] \Bigg\};$$

ou seja,

$$\big\|u(t+\bar{h})-u(t)\big\|+\sum_{i=1}^{m}\|u\big(b_i(t+\bar{h})\big)-u\big(b_i(t)\big)\|$$

$$\leq\left\{C_1\left[\bar{h}+\int_0^t\sup_{0\leq\tilde{h}\leq\bar{h}}\left(\|u(s+\tilde{h})-u(s)\|+\sum_{i=1}^{m}\big\|u(b_i(s+\tilde{h}))-u(b_i(s))\big\|\right)ds\right]\right\}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left\{C_4\left[\bar{h}+\int_0^t\sup_{0\leq\tilde{h}\leq\bar{h}}\left(\|u(s+\tilde{h})-u(s)\|+\sum_{i=1}^{m}\big\|u\big(b_i(s+\tilde{h})\big)-u\big(b_i(s)\big)\big\|\right)ds\right]\right\}.$$

Assim,

$$\big\|u(t+\bar{h})-u(t)\big\|+\sum_{i=1}^{m}\|u\big(b_i(t+\bar{h})\big)-u\big(b_i(t)\big)\|$$

$$\leq\left\{C_5\left[\bar{h}+\int_0^t\sup_{0\leq\tilde{h}\leq\bar{h}}\left(\|u(s+\tilde{h})-u(s)\|+\sum_{i=1}^{m}\big\|u(b_i(s+\tilde{h}))-u(b_i(s))\big\|\right)ds\right]\right\}.$$

Logo, sendo $0\leq\bar{h}\leq h$,

$$\big\|u(t+\bar{h})-u(t)\big\|+\sum_{i=1}^{m}\|u\big(b_i(t+\bar{h})\big)-u\big(b_i(t)\big)\|$$

$$\leq\left\{C_5\left[h+\int_0^t\sup_{0\leq\tilde{h}\leq\bar{h}}\left(\|u(s+\tilde{h})-u(s)\|+\sum_{i=1}^{m}\big\|u(b_i(s+\tilde{h}))-u(b_i(s))\big\|\right)ds\right]\right\}. \tag{2.47}$$

Aplicando o supremo em $\bar{h}$ sobre $[0,h]$,

$$\sup_{0\leq\bar{h}\leq h}\left(\big\|u(t+\bar{h})-u(t)\big\|+\sum_{i=1}^{m}\|u\big(b_i(t+\bar{h})\big)-u\big(b_i(t)\big)\|\right)$$

$$\leq\left\{C_5\left[h+\int_0^t\sup_{0\leq\tilde{h}\leq h}\left(\|u(s+\tilde{h})-u(s)\|+\sum_{i=1}^{m}\big\|u(b_i(s+\tilde{h}))-u(b_i(s))\big\|\right)ds\right]\right\}.$$

Considerando

$$\xi(t)=\sup_{0\leq\bar{h}\leq h}\left(\big\|u(t+\bar{h})-u(t)\big\|+\sum_{i=1}^{m}\|u\big(b_i(t+\bar{h})\big)-u\big(b_i(t)\big)\|\right)$$

e aplicando a DESIGUALDADE DE GRONWALL - FORMA INTEGRÁVEL (Teorema D.2), temos

$$\xi(t)\leq C_5h\big(1+C_5te^{C_5t}\big)=\tilde{C}_3h;$$

donde,

$$\|u(t+h)-u(t)\|\leq\tilde{C}_3h,\quad t\in[0,T],\ h\geq0. \tag{2.48}$$

onde $\tilde{C}_3$ é uma constante positiva. Agora, para $x, y \in [0,T]$, com $y > x$, existe $h \in [0,T]$ tal que $y = x + h$; daí,

$$\|u(x) - u(y)\| = \|u(x) - u(x+h)\| \leq \tilde{C}h = \tilde{C}(y - x).$$

Logo, para todo $x, y \in [0,T]$ temos

$$\|u(x) - u(y)\| \leq \tilde{C}|x - y|;$$

mostrando que u é Lipschitziana em $[0,T]$.

Solução Forte: Adicionando, agora, a hipótese que X é reflexivo iremos mostrar que u é uma solução forte de (2.1) no intervalo $[0,T]$. Sendo u Lipschitziana, a função $\bar{f} : [0,T] \to X$ dada por

$$\bar{f} = f\big(t, u(t), u\big(b_1(t)\big), \dots, u\big(b_m(t)\big)\big)$$

é Lipschitziana. De fato, sendo u e b_i Lipschitzianas,

$$\|\bar{f}(x) - \bar{f}(y)\| \leq L_f(R_0)\left[|x - y| + \|u(x) - u(y)\| + \sum_{i=1}^{m} \|u\big(b_i(x)\big) - u\big(b_i(y)\big)\|\right]$$

$$\leq L_f(R_0)\Big[|x - y| + k_1|x - y| + k_2|x - y|\Big] \leq k_3|x - y|,$$

para todo $x, y \in [0,T]$ e $k_3 \geq 0$, $k_3 = \max\{L_f(R_0), L_f K_1, mLf(R_0)\}$. Sendo X reflexivo e $\bar{f}$ Lipschitziana, segue do Corolário G.4 que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} v'(t) + Av(t) = \bar{f}(t), & t \in (0,T] \\ v(0) = u(0), \end{cases} \tag{2.49}$$

tem uma única solução v forte em $[0,T]$. Definindo

$$\tilde{v}(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [-\tau, 0] \\ v(t), & t \in [0,T], \end{cases} \tag{2.50}$$

temos:

(a) $\tilde{v} \in Y_T$; segue do fato que u é solução generalizada de (2.1) e v é solução forte de (2.1);

(b) $\tilde{v}(t) \in D(A)$ $q.t.p.$ para $t \in [0,T]$; já que, sendo v uma solução forte, $v(t)$ pertence $D(A)$ $q.t.p.$, para $t \in [0,T]$.

(c) $h(\tilde{v}) = \phi_0$ em $[-\tau, 0]$. Com efeito, $\tilde{v}(t) = u(t)$ em $[-\tau, 0]$; donde, $\tilde{v} \equiv u$; o que implica, $h(\tilde{v}) = h(u) = \phi_0$ em $[-\tau, 0]$, onde a última igualdade é válida por hipótese.

(d) $\tilde{v}'(t) + A\tilde{v}(t) = f\big(t, \tilde{v}(t), \tilde{v}\big(b_1(t)\big), \tilde{v}\big(b_2(t)\big), ..., \tilde{v}\big(b_m(t)\big)\big)$ $q.t.p$ em $[0,T]$. De fato, sendo v solução forte de (2.1) segue que

$$v'(t) + Av(t) = f\big(t, v(t), v\big(b_1(t)\big), v\big(b_2(t)\big), ..., v\big(b_m(t)\big)\big) \ q.t.p. \text{ em } [0,T];$$

donde, $\tilde{v}'(t) + A\tilde{v}(t) = f\big(t, \tilde{v}(t), \tilde{v}\big(b_1(t)\big), \tilde{v}\big(b_2(t)\big), ..., \tilde{v}\big(b_m(t)\big)\big)$ $q.t.p$ em $[0,T]$.

Ou seja, $\tilde{v}$ é uma solução forte de (2.1) em $[-\tau, T]$. Mas, esta solução forte $\tilde{v}$ de (2.1) é também uma solução generalizada de (2.1)(Veja Proposição G.2 e Definição G.3). Da unicidade de tal função $\tilde{v}$ em $W(\psi_0, T)$, obtemos $v(t) = u(t)$ em $[-\tau, T]$. Portanto, u é uma solução forte de (2.1).

Solução Clássica: Afirmamos que se $T(t)$ é um semigrupo analítico em X então u é solução clássica de (2.1): Basta utilizarmos o Teorema G.5; uma vez que, $\bar{f} \in L^1\big((0,T) : X\big)$ e $\bar{f}$ é localmente Hölder contínua.

A solução u é única se, e somente se, ψ_0 é única em $[-\tau, 0]$: Suponhamos que existam

$$\hat{\psi}_0, \tilde{\psi}_0 \text{ em } Y_T; h(\hat{\psi}_0) = h(\tilde{\psi}_0) = \phi_0 \quad \text{em} \quad [-\tau, 0],$$

com

$$\hat{\psi}_0 \neq \tilde{\psi}_0 \quad \text{em} \quad [-\tau, 0];$$

então,

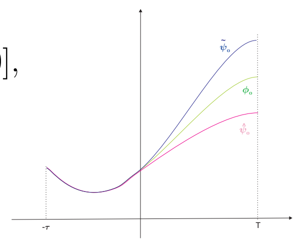

Figura 2.2: $\tilde{\psi} \equiv \phi_0$ em $[-\tau, 0]$, $\hat{\psi} \equiv \phi_0$ em $[-\tau, 0]$; $\tilde{\psi} \neq \hat{\psi}$ em $(0, T]$.

$$W(\hat{\psi}_0, T) \cap W(\tilde{\psi}_0, T) = \emptyset$$

$\big($pois, se $W(\hat{\psi}_0, T) \cap W(\tilde{\psi}_0, T) \neq \emptyset$ existiria ψ_1 tal que $\psi_1 = \hat{\psi}_0$ em $[-\tau, 0]$ e $\psi_1 = \tilde{\psi}_0$ em $[-\tau, 0]$; donde, $\hat{\psi}_0 = \psi_1 = \tilde{\psi}_0$; i.e., $\hat{\psi}_0 = \tilde{\psi}_0$ $\big)$; logo, as soluções u e $\tilde{u}$ de (2.1), pertencentes a $W(\hat{\psi}_0, T)$ e $W(\tilde{\psi}_0, T)$, respectivamentes, são diferentes. Assim, se u é única então ψ_0 é única em $[-\tau, 0]$. Reciprocamente, se $\psi_0 \in Y_T$ satisfazendo $h(\psi_0) = \phi_0$ em $[-\tau, 0]$ é única em $[-\tau, 0]$ então

$$h(u_1) = h(u_2) = \phi_0 \text{ em } [-\tau, 0]$$

donde, $u_1 = u_2$; donde, u é única. Portanto, u é única se, e somente se, ψ_0 é única. Isto completa a prova do Teorema 2.4. ■

2.3 Aplicações

O Teorema 2.4 pode ser aplicado para obter a existência, unicidade e resultados de regularidade para (2.1) no caso em que o operador A, com domínio

$$D(A) = W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$$

em $X = L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, é associado com o operador elíptico

$$Au = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u \tag{2.51}$$

em um domínio limitado Ω em $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ suficientemente suave. Para isto, vamos identificar as condições $(A_0 - A_4)$ e a função $\psi_0 \in Y_T$ das hipóteses do Teorema 2.4 e do problema (2.1). Em (2.1) considere

$$f : [0, T] \times X^{m+1} \to X$$

dada por

$$f\big(t, u_1, u_2, ..., u_{m+1}\big) = f_0(t) + a(t) \sum_{i=1}^{m+1} \|u_i\| u_i,$$

onde $f_0 : [0, T] \to X$ e $a : [0, T] \to \mathbb{R}$ são funções lipschitz contínuas em $[0, T]$ e $\| \cdot \|$ denota a norma em X. Para as funções $b_i, i = 1, 2, ..., m$ podemos ter quaisquer umas das seguintes situações:

(**b1**) Sejam $\tau_i \geq 0$. Para $i = 1, 2, ..., m$; seja $b_i(t) = t - \tau_i,\ t \in [0, T]$.

(**b2**) Sejam $\tau_i, i = 1, 2, ..., m$; tal que $0 < \tau_i < T$. Para $t \in [0, T]$ sejam

$$b_i(t) = \begin{cases} 0, & t \leq \tau_i \\ t - \tau_i, & t > \tau_i\,, i = 1, 2, \cdots, m. \end{cases}$$

(**b3**) Para $i = 1, 2, ..., m$, seja $b_i(t) = k_i t, t \in [0, T], 0 < k_i \leq 1$.
(**b4**) Sejam $N \in \mathbb{N}$ e $0 < k_i \leq \dfrac{1}{(NT^N)}$, $i = 1, 2, ..., m$, Para $i = 1, 2, ..., m$, seja

$$b_i(t) = k_i t^N, \quad t \in [0, T].$$

Para a função h sejam

$$a_i, i = 1, 2, \cdots, r \quad \text{tal que} - \tau \leq a_i \leq 0 \quad \text{e} \quad a_i < a_{i+1},$$

e sejam

$$c_i, i = 1, 2, \cdots, r \text{tal que} C_* := \sum_{i=1}^{r} c_i \neq 0 \quad \text{e } \varepsilon_i > 0.$$

Considere as condições:

(h1) $g_1(\chi) := \displaystyle\int_{-\tau}^{0} k(\theta)\chi(\theta)\, d\theta$ onde $k \in L^1((-\tau, 0))$ com $k := \displaystyle\int_{-\tau}^{0} k(s)\, ds \neq 0$;

(h2) $g_2(\chi) := \displaystyle\sum_{i=1}^{r} c_i \chi(a_i)$

(h3) $g_3(\chi) := \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{c_i}{\varepsilon_i} \int_{a_i - \varepsilon_i}^{a_i} \chi(s)\, ds$,

para $\chi \in C\big([-\tau, 0]; X\big)$.

Claramente,

$$g_i : C\big([-\tau, 0]; X\big) \to X, \ i = 1, 2, 3, .$$

Para $i = 1, 2, 3$ defina

$$h_i(\psi)(t) \equiv g_i\left(\psi\Big|_{[-\tau,\, 0]}\right) \quad \text{em } [-\tau, T],$$

para $\psi \in C\big([-\tau, T]; X\big)$ onde $\psi\Big|_{[-\tau,\, 0]}$ é a restrição de ψ em $[-\tau, 0]$.

Com relação a **(h1)**,**(h2)** e **(h3)** seja $\phi_0 \in Y_T$ dada por

$$\phi_0(t) \equiv x \quad \text{(função constante)} \quad \text{para} \quad t \in [-\tau,\, 0]. \tag{2.52}$$

Então as condições **(h1)-(h3)** são equivalentes para $h_i(\psi) = \phi_0$ em $[-\tau, 0]$, $i = 1, 2, 3$, respectivamente. Para **(h1)**, podemos fazer $\psi_0(t) \equiv \dfrac{x}{k}$ e para **(h2)** e **(h3)**, podemos fazer $\psi_0(t) \equiv \dfrac{x}{C_*}$ em $[-\tau, T]$.

Análise para (h1): Se **(h1)** é verificada então

$$h_1(\psi)(t) := g_1\left(\psi\Big|_{[-\tau,\,0]}\right) = \int_{-\tau}^{0} k(\theta)\left(\psi\Big|_{[-\tau,\,0]}\right)(\theta)\,d\theta. \tag{2.53}$$

Fazendo $\psi_0(t) \equiv \dfrac{x}{k}$, temos

$$\left(\psi\Big|_{[-\tau,\,0]}\right)(\theta) = \psi_0(\theta) \equiv \frac{x}{k}\,. \tag{2.54}$$

Além disso,

$$\int_{-\tau}^{0} k(\theta)\,\frac{x}{k}\,d\theta = \frac{x}{k}\underbrace{\int_{-\tau}^{0} k(\theta)\,d\theta}_{:=k} = \frac{x}{k}\,k = x. \tag{2.55}$$

Combinando (2.53), (2.54) e (2.55) segue que

$$h_1(\psi)(t) = x = \phi_0(t) \quad \text{em } [-\tau, 0],$$

uma vez que vale (2.52).

Análise para (h2): Se **(h2)** é verificada então

$$h_2(\psi)(t) := g_2\left(\psi\Big|_{[-\tau,\,0]}\right) := \sum_{i=1}^{r} c_i\left(\psi\Big|_{[-\tau,\,0]}\right)(a_i) \tag{2.56}$$

Fazendo $\psi_0(t) \equiv \dfrac{x}{C_*}$, com $C_* := \displaystyle\sum_{i=1}^{r} c_i \neq 0$ temos

$$\left(\psi\Big|_{[-\tau,\,0]}\right)(a_i) = \psi_0(a_i) \equiv \frac{x}{C_*}\,. \tag{2.57}$$

Além disso,

$$\sum_{i=1}^{r} c_i\left(\psi\Big|_{[-\tau,\,0]}\right)(a_i) = \sum_{i=1}^{r} c_i\,\frac{x}{C_*} = \frac{x}{C_*}\sum_{i=1}^{r} c_i = \frac{x}{C_*}\,C_* = x \tag{2.58}$$

De (2.56), (2.57) e (2.58) segue que

$$h_2(\psi)(t) = x = \phi_0(t) \quad \text{em } [-\tau, 0],$$

uma vez que vale (2.52).

Análise para (h3): Se **(h3)** é verificada então

$$h_3(\psi)(t) := g_3\left(\psi\Big|_{[-\tau,\,0]}\right) := \sum_{i=1}^{r} \frac{c_i}{\varepsilon_i} \int_{a_i-\varepsilon_i}^{a_i} \left(\psi\Big|_{[-\tau,\,0]}\right)(s)\, ds. \tag{2.59}$$

Fazendo $\psi_0(t) \equiv \dfrac{x}{C_*}$,

$$\left(\psi\Big|_{[-\tau,\,0]}\right)(s) = \psi_0(s) \equiv \frac{x}{C_*}\,. \tag{2.60}$$

Além disso,

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{c_i}{\varepsilon_i} \int_{a_i-\varepsilon_i}^{a_i} \frac{x}{C_*}\, ds = \frac{x}{C_*} \sum_{i=1}^{r} \frac{c_i}{\varepsilon_i}(a_i - a_i + \varepsilon_i) = \frac{x}{C_*} \sum_{i=1}^{r} c_i = x. \tag{2.61}$$

Combinado, (2.59), (2.60) e (2.61) obtemos

$$h_3(\psi)(t) = x = \phi_0(t) \quad \text{em } [-\tau, 0],$$

uma vez que vale (2.52).

Concluindo mostrando que existe $\psi_0 \in Y_T$ tal que $h(\psi_0) = \phi_0$ em $[-\tau, 0]$ e, portanto em vista do Teorema 2.4 temos existência, unicidade e regularidade de solução para o problema (2.1) com A sendo o operador elíptico em (2.51).

Capítulo 3

Existência de Soluções para Equações com Efeito Memória

Neste capítulo, tratamos da existência, unicidade e a regularidade de soluções para a seguinte classe de problemas de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = f\big(t, u(t)\big) + K(u)(t), & t > t_0 \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde

$$K(u)(t) = \int_{t_0}^{t} h(t-s) g\big(s, u(s)\big)\, ds. \tag{3.2}$$

Assumimos que X um espaço de Banach arbitrário , $f, g : [0, \infty) \times X \longrightarrow X$ são aplicações não lineares e h uma função à valores reais localmente integrável em $[0, \infty)$. Assumimos também que -A gera um semigrupo analítico, $T(t),\ t \geq 0$ em X com $\|T(t)\| \leq M$ para $t \geq 0$ e $0 \in \rho(-A)$ onde $\rho(-A)$ é o conjunto resolvente de $-A$. O termo "efeito memória " é referente a (3.2). Para maiores detalhes referentes a este termo, indicamos [8], [9] e [10]. Do Capítulo 1, sabemos que, com essas condições, faz sentido falar no operador de potência fracionária A^α, com $0 \leq \alpha \leq 1$ o qual, é um operador linear, fechado, inversível cujo domínio $D(A^\alpha)$ é denso em X. Mais ainda, X^α é o espaço de Banach $D(A^\alpha)$ munido da norma $\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|$; a qual, é equivalente a norma do gráfico de A^α. Vimos também que X^α está imerso X^β, para

$\alpha \geq \beta \geq 0$, continuamente. Lembramos que no Capítulo 1, deste trabalho, é feito um estudo detalhado a respeito de potências fracionárias; onde para maiores detalhes citamos o livro do Pazy [26].

3.1 Existência Local de Soluções Generalizadas

Uma *solução generalizada* para (3.1) em $J = [t_0, T]$ é uma função contínua $u : J \to X$ satisfazendo a seguinte equação integrál

$$u(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)\Big[f\big(s, u(s)\big) + K(u)(s)\Big]\, ds, t \in J. \tag{3.3}$$

Para a existência de uma *solução local generalizada* para (3.1), necessitamos da seguinte hipótese para as aplicações f e g.

Seja U um subconjunto aberto de $[0, \infty) \times X^{\alpha}$. Para cada $(t, x) \in U$, existem uma vizinhança $V \subset U$ de (t, x) e uma constante $L_0 > 0$ tais que

$$\|f(s,u) - f(s,v)\| \leq L_0 \|u - v\|_{\alpha}, \tag{\textbf{F0}}$$

para todo (s, u) e (s, v) em V.

Suponhamos que $-A$ seja invertível e o semigrupo analítico gerado por $-A$ seja limitado. Além disso, para estabelecer a existência local assumimos $0 < T < \infty$. Com estas simplificações temos o seguinte teorema.

Teorema 3.1.1 *Suponha que o operador -A gere o semigrupo analítico T(t) com*

$$\|T(t)\| \leq M, \quad t \geq 0 \tag{3.4}$$

e que $0 \in \rho(-A)$. *Se* f *e* g *satisfizerem* **(F0)** *e a aplicação* h *for integrável em J, o problema (3.1) terá uma única solução local generalizada para todo* $u_0 \in X^{\alpha}$.

Demostração. Fixamos um ponto (t_0, u_0) em um subconjunto aberto U de $[0, \infty) \times X^{\alpha}$ e escolhemos $t_1' > t_0$ e $\delta > 0$ tais que f e g verifiquem **(F0)** com

$$V = \{(t, x) \in U : t_0 \leq t \leq t_1', \|x\| < \|u_0\| + 1\}. \tag{3.5}$$

Sejam

$$B_1 = \sup_{t_0 \leq t \leq t_1'} \|f(t, u_0)\|$$

e

$$B_2 = \sup_{t_0 \le t \le t_1'} \|g(t,u_0)\|.$$

Escolha um $t_1 > t_0$ tal que

$$t_1 - t_0 < min\left\{t_1' - t_0, \left[C_\alpha^{-1}(1-\alpha)\left\{(L_0\delta + B_1) + h_T(L_0\delta + B_2)\right\}^{-1}\right]^{\dfrac{1}{1-\alpha}}\right\} \tag{3.6}$$

onde C_α é uma constante positiva dependente de α e satisfazendo

$$\|A^\alpha T(t)\| \le C_\alpha t^{-\alpha}, \qquad \text{para} \qquad t > t_0, \tag{3.7}$$

$$h_T =: \int_0^T |\, h(s)| ds, \tag{3.8}$$

com $T > t_1$ e $\delta := 1 + (M+2)\|A^\alpha u_0\|$. Seja Y o espaço de Banach $C([t_0,t_1];X)$ munido da norma do supremo

$$\|\, y \,\|_Y = \sup_{t_0 \le t \le t_1} \|\, y(t)\|$$

(Veja Teorema D.13). Definamos a aplicação

$$\begin{array}{lllll} F & : & Y & \rightarrow & E = \{u : [t_0,t_1] \rightarrow X \;;\; u \quad \text{é uma função}\} \\ & & y & \rightsquigarrow & F(y) : [t_0,t_1] \quad \rightarrow \quad \text{X} \\ & & & & \qquad\qquad \text{t} \quad \rightsquigarrow \quad F_y(t), \end{array}$$

onde $F_y(t)$ é dado por

$$F_y(t) = T(t-t_0)A^\alpha u_0 + \int_{t_0}^t A^\alpha T(t-s)W(s)ds,$$

com

$$W(s) = f\big(s, A^{-\alpha}y(s)\big) + \int_{t_0}^s h(s-\tau)g\big(\tau, A^{-\alpha}y(\tau)\big)d\tau.$$

Claramente, para cada $y \in Y$,

$$F_y(t_0) = A^\alpha u_0.$$

Mostraremos que $F(Y) \subset Y$. Já sabemos que $T(\,.\,-t_0)A^\alpha u_0$ é contínua, assim basta mostrar que a função dada por

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t A^\alpha T(t-s)W(s)\, ds$$

é contínua em $[t_0, t_1]$ .Vejamos,

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t_1} \chi_t(s) A^\alpha T(t-s) W(s)\, ds\,;$$

logo, do item (iii) da Proposição A.2,

$$\|\varphi(t_n) - \varphi(t)\| \leq \int_{t_0}^{t_1} \Big\| \chi_{t_n}(s) A^\alpha T(t_n - s) W(s) - \chi_t(s) A^\alpha T(t-s) W(s) \Big\|\, ds,$$

para $t_n \in [t_0, t_1]$ e $t_n \longrightarrow t \in [t_0, t_1]$. Definamos,

$$\psi_n(s) = \Big\| \chi_{t_n}(s) A^\alpha T(t_n - s) W(s) - \chi_t(s) A^\alpha T(t-s) W(s) \Big\|.$$

Afirmação 1: (ψ_n) é uma seqüência de funções integráveis em $[t_0, t_1]$. De fato, considerando

$$v_n(x) = \chi_{[0,\, t_n - t_0]}(x) h(x) g\big(t_n - x, A^{-\alpha} y(t_n - x)\big),$$

temos

- (v_n) é uma seqüência de funções mensuráveis em $[0, T]$. Com efeito, sendo $g(\cdot - x, A^{-\alpha} y(\cdot - x))$ contínua em $[0, T]$, pelo Teorema D.8, $g(\cdot - x, A^{-\alpha} y(\cdot - x))$ é mensurável em $[0, T]$ e sendo h localmente integrável (donde, h é localmente mensurável); bem como, a função característica de um conjunto mensurável é mensurável; segue pelo Teorema D.11 que (v_n) é uma seqüência de funções mensuráveis.

- $v_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \chi_{[0,\, t - t_0]}(x) h(x) g\big(t - x, A^{-\alpha} y(t - x)\big) = v(x) \quad q.t.p.$; pois,

$$\chi_{[0,\, t_n - t_0]}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \chi_{[0,\, t - t_0]}(x) \ q.t.p.$$

e

$$h(x) g\big(t_n - x, A^{-\alpha} y(t_n - x)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} h(x) g\big(t - x, A^{-\alpha} y(t - x)\big)\ .$$

- $\|v_n(x)\| \leq |h(x)|\, \big\|g(t_n - x, A^{-\alpha} y(t_n - x))\big\| \leq |h(x)| \tilde{C} \in L^1([0, T])$.

Logo, pelo TEOREMA DA CONVERGÊNCIA DOMINADA DE LEBESGUE (Teorema D.5), segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T v_n(x) dx = \int_0^T \lim_{n\to\infty} v_n(x) dx = \int_0^T v(x) dx. \tag{3.9}$$

Fazendo uma mudança de variáveis com $x = s - \tau$, observamos que

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{s} h(s-\tau)g\big(\tau, A^{-\alpha}y(\tau)\big)\, d\tau &= \int_{s-t_0}^{0} -h(x)g\big(s-x, A^{-\alpha}y(s-x)\big)\, dx \\
&= \int_{0}^{s-t_0} h(x)g\big(s-x, A^{-\alpha}y(s-x)\big)\, dx.
\end{aligned}
$$

ou seja, para $T > t_1$,

$$
\int_{t_0}^{s} h(s-\tau)g\big(\tau, A^{-\alpha}y(\tau)\big)\, d\tau = \int_{0}^{T} \chi_{[0,\, s-t_0]}(x)h(x)g\big(s-x, A^{-\alpha}y(s-x)\big)\, dx. \qquad (3.10)
$$

Assim, de (3.9) e (3.10),

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t_n} h(t_n-\tau)g\big(\tau, A^{-\alpha}y(\tau)\big)\, d\tau &= \lim_{n\to\infty} \int_0^T v_n(x)\, dx \\
&= \int_0^T v(x)dx \\
&= \int_{t_0}^{t} h(t-\tau)g\big(\tau, A^{-\alpha}y(\tau)\big)\, d\tau;
\end{aligned}
$$

donde,

$$
s \to \int_{t_0}^{s} h(s-\tau)g\big(\tau, A^{-\alpha}y(\tau)\big)\, d\tau
$$

é contínua em $[t_0, t_1]$. Sendo $f\big(\,.\,, A^{-\alpha}y(s)\big)$ também contínua em $[t_0, t_1]$ e a soma de funções contínuas sendo contínua, obtemos que

$$
s \to f\big(s\,, A^{-\alpha}y(s)\big) + \int_{t_0}^{s} h(s-\tau)g\big(\tau, A^{-\alpha}y(\tau)\big)\, d\tau = W(s),
$$

é contínua em $[t_0, t_1]$. Devemos mostrar que

$$
\xi(\cdot) = A^{\alpha}T(t_n - \cdot)W(\cdot) \text{ é contínua em } [t_0, t_1],
$$

ou seja,

$$
A^{\alpha}T(t_n - s)W(s) \to A^{\alpha}T(t_n - j)W(j), \quad \text{quando } s \to j.
$$

∘ **Caso** $\underline{s < j}$**.** Neste caso, $j = s + w$ com $w \to 0^+$ e $w \geq 0$; logo, por propriedade de semigrupo e pelo item (**b**) do Teorema 1.15,

$$
\begin{aligned}
\xi(s) - \xi(j) &= A^{\alpha}T(t_n - j + w)W(j-w) - A^{\alpha}T(t_n - j)W(j) \\
&= A^{\alpha}T(w)T(t_n - j)W(j-w) - A^{\alpha}T(t_n - j)W(j) \\
&= T(w)A^{\alpha}T(t_n - j)W(j-w) - A^{\alpha}T(t_n - j)W(j);
\end{aligned}
$$

logo, somando e subtraindo $T(w)A^\alpha T(t_n-j)W(j)$,

$$\xi(s)-\xi(j)=T(w)\big[A^\alpha T(t_n-j)W(j-w)-A^\alpha T(t_n-j)W(j)\big]$$

$$+T(w)A^\alpha T(t_n-j)W(j)-A^\alpha T(t_n-j)W(j);$$

ou seja,

$$\xi(s)-\xi(j)=T(w)\big[A^\alpha T(t_n-j)\big(W(j-w)-W(j)\big)\big]$$

$$+T(w)A^\alpha T(t_n-j)W(j)-A^\alpha T(t_n-j)W(j).$$

Se $s\to j$ então $w=j-s\to 0$; logo,

$$W(j-w)-W(j)\to 0, \qquad \text{quando } s\to j;$$

uma vez que $W(\cdot)$ é contínua.Consequentemente,

$$T(w)\big[A^\alpha T(t_n-j)\big(W(j-w)-W(j)\big)\big]\to 0, \qquad \text{quando } s\to j. \tag{3.11}$$

Além disso, do item **(b)** do Teorema 1.15 e por propriedade de semigrupo,

$$T(w)A^\alpha T(t_n-j)W(j)-A^\alpha T(t_n-j)W(j)=A^\alpha T(t_n-j)\big[T(w)W(j)-W(j)\big];$$

donde,

$$T(w)A^\alpha T(t_n-j)W(j)-A^\alpha T(t_n-j)W(j)\xrightarrow[s\to j]{}0;$$

onde, a convergência é justificada pelo item **(c)** do Teorema 1.15 e por propriedade de semigrupo. Portanto, obtivemos que

$$\xi(s)\to\xi(j), \quad \text{quando } s\uparrow j. \tag{3.12}$$

∘ **Caso** $s>j$**.** Neste caso, $s=j+w$ com $w\to 0^+$ e $w\geq 0$; logo, por propriedade de semigrupo,

$$\begin{aligned}\xi(s)-\xi(j)&=A^\alpha T(t_n-s)W(s)-A^\alpha T(t_n-s+w)W(s-w)\\&=A^\alpha T(t_n-s)\big[W(s)-T(w)W(s-w)\big]\\&=A^\alpha T(t_n-s)\big[W(s)-T(w)W(s)+T(w)W(s)-T(w)W(s-w)\big]\\&=A^\alpha T(t_n-s)\big\{\big(W(s)-T(w)W(s)\big)+\big[T(w)\big(W(s)-W(s-w)\big)\big]\big\};\end{aligned}$$

então, pelo item **(c)** do Teorema 1.15, pela limitação de $T(w)$ e pela continuidade da $W(\cdot)$, temos

$$\xi(s) \to \xi(j), \quad \text{quando } s \downarrow j. \tag{3.13}$$

De (3.12) e (3.13), concluimos que ξ é contínua em $[t_0, t_1]$.

Portanto,

$$s \to A^{\alpha}T(t_n - s)W(s) \text{ é contínua em } [t_0, t_1];$$

e, por conseguinte integrável (Veja Teorema 1). Asim, sendo $\chi_{t_n}(s)$ mensurável limitada, a **Afirmação 1** segue do Teorema D.11.

Afirmação 2: $\psi_n(s) \to 0$ $q.t.p$; pois,

(i) $A^{\alpha}T(t_n - s)W(s) \xrightarrow[n\to\infty]{} A^{\alpha}T(t-s)W(s)$;

(ii) $\chi_{t_n}(s) \xrightarrow[n\to\infty]{} \chi_t(s)$ $q.t.p.$.

Justificativa de (i) :

∘ **Caso** $t < t_n$ **.** Neste caso, $t_n = t + w_n$, com $w_n \to 0^+$ e $w_n \geq 0$; logo por propriedade de semigrupo e pelo item **(b)** do Teorema 1.15,

$$\begin{aligned} A^{\alpha}T(t_n - s)W(s) - A^{\alpha}T(t-s)W(s) &= A^{\alpha}T(t + w_n - s)W(s) - A^{\alpha}T(t-s)W(s) \\ &= A^{\alpha}T(w_n)T(t-s)W(s) - A^{\alpha}S(t-s)W(s) \\ &= T(w_n)\big(A^{\alpha}T(t-s)W(s)\big) - \big(A^{\alpha}T(t-s)W(s)\big) \end{aligned}$$

então, pelo item (iii) da definição de semigrupo,

$$A^{\alpha}T(t_n - s)W(s) - A^{\alpha}T(t-s)W(s) \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Neste caso, **(i)** está justificado.

∘ **Caso** $t > t_n$ **.** Neste caso, $t = t_n + w_n$, com $w_n \to 0^+$ e $w_n \geq 0$; logo por propriedade de semigrupo,

$$\begin{aligned} A^{\alpha}T(t_n - s)W(s) - A^{\alpha}T(t-s)W(s) &= A^{\alpha}T(t_n - s)W(s) - A^{\alpha}T(t_n + w_n - s)W(s) \\ &= A^{\alpha}T(t_n - s)W(s) - A^{\alpha}S(t_n - s)T(w_n)W(s) \\ &= A^{\alpha}T(t_n - s)\big(W(s) - T(w_n)W(s)\big); \end{aligned}$$

assim, pelo item **(c)** do Teorema 1.15 e pelo item (iii) da propriedade de semigrupo;

$$A^\alpha T(t_n - s)W(s) - A^\alpha T(t-s)W(s) \to 0,$$

quando $n \to \infty$. O que completa a **Justificativa de (i)**.

Afirmação 3: $|\,\psi_n\,| \leq \xi_n\,, \forall\, n$; (ξ_n) é uma seqüência de funções integráveis com

$$\xi_n(s) \to \xi(s) \quad q.t.p\,,$$

$$\xi \in L^1([t_0, t_1])\,,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \xi_n(s)ds \to \int_{t_0}^{t_1} \xi(s)ds,$$

$$\text{e} \int_{t_0}^{t_1} \xi_n(s)ds, \int_{t_0}^{t_1} \xi(s)ds < \infty.$$

Com efeito,

$$|\,\psi_n(s)\,| \leq \|\,\chi_{_{t_n}}(x)(s)A^\alpha T(t_n - s)W(s)\,\| + \|\,\chi_{_t}(x)(s)A^\alpha T(t-s)W(s)\|,$$

com

$$W(s) = f\big(s, A^{-\alpha}y(s)\big)\int_{t_0}^{s} h(s-\tau)g\big(\tau, A^{-\alpha}y(\tau)\big)\,d\tau;$$

usando (3.7),(3.8) e o fato das funções $s \to \Big\|f\big(s, A^{-\alpha}y(s)\big)\Big\|$ e $\tau \to \Big\|g\big(\tau, A^{-\alpha}y(\tau)\big)\Big\|$ serem contínuas sobre o compacto $[t_0, t_1]$ (e, por conseguinte, limitadas), temos

$$\begin{aligned}\|\chi_{_t}(s)A^\alpha T(t-s)W(s)\| &\leq \chi_{_t}(s)\,\|A^\alpha T(t-s)\|\,\|W(s)\| \\ &\leq \frac{\chi_{_t}(s)}{(t-s)^\alpha}\,C_\alpha\|W(s)\|,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\chi_{_t}(s)A^\alpha T(t-s)W(s)\| \leq \frac{\chi_{_t}(s)}{(t-s)^\alpha}\,C_\alpha\tilde{M}; \tag{3.14}$$

analogamente,

$$\|\,\chi_{_{t_n}}(s)A^\alpha T(t_n - s)W(s)\| \leq \frac{\chi_{_{t_n}}(s)}{(t_n - s)^\alpha}\,C_\alpha\tilde{M}\,; \tag{3.15}$$

de (3.14) e (3.15) ,

$$|\psi_n(s)| \leq \left(\frac{X_t(s)}{(t-s)^\alpha} + \frac{X_{t_n}(s)}{(t_n - s)^\alpha}\right)C_\alpha M \equiv \xi_n(s)\,;$$

claramente,

$$\xi_n(s) \to 2C_\alpha M \frac{X_t(s)}{(t-s)^\alpha} \equiv \xi(s) \qquad q.t.p\,,$$

e

$$\int_{t_0}^{t_1} \xi_n(s)ds \to \int_{t_0}^{t_1} \xi(s)ds;$$

também,

$$\int_{t_0}^{t_1} |\,\xi_n(s)|ds, \int_{t_0}^{t_1} |\,\xi(s)|ds < +\infty \qquad (\,\text{donde}\,, \xi \in L^1([t_0, t_1]));$$

assim, das **Afirmações 1, 2, 3** e aplicando o TEOREMA DA CONVERGÊNCIA DOMINADA GENERALIZADO DE LEBESGUE (Teorema D.6), temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} \psi_n(s)\,ds = 0;$$

o que implica

$$\|\varphi(t_n) - \varphi(t)\| \to 0;$$

mostrando a continuidade de φ em $[t_0, t_1]$ e consequentemente a inclusão

$$F(Y) \subset Y.$$

Considerando o subconjunto de Y dado por

$$Z = \{y \in Y : y(t_0) = A^\alpha u_0,\ \|y(t)\| \le 1 + (M+1)\|A^\alpha u_0\|;\} \tag{3.16}$$

temos

(i) $Z \neq \emptyset$; pois, $A^\alpha u_0 \in Z$.

(ii) Z é fechado. Com efeito, seja $\{y_n\} \subset Z$ tal que $y_n \to y$ em Y. Para cada $n \in \mathbb{N}$

$$y_n(t_0) = A^\alpha u_0 \tag{3.17}$$

e

$$\|y_n(t)\| \le 1 + (M+1)\|A^\alpha u_0\|. \tag{3.18}$$

Da convergência $y_n \to y$ em Y, temos

$$y_n(t) \to y(t) \text{ em } X, \qquad \text{para cada } t \in [t_0, t_1];$$

em particular,

$$y_n(t_0) \to y(t_0).$$

Daí, passando ao limite em (3.17) obtemos

$$y(t_0) = A^\alpha u_0$$

e passando ao limite em (3.18) obtemos

$$\|y(t)\| \leq 1 + (M+1)\|A^\alpha u_0\|.$$

Donde segue que $y \in Z$. Logo, Z é fechado em Y. Assim, pelo Teorema D.15 $(Z, \|\cdot\|_Y)$ é um espaço métrico completo. Agora, mostraremos que $F(Z) \subset Z$. De fato, para $y \in Z$ temos

$$\|F_y(t)\| = \left\|T(t-t_0)A^\alpha u_0 + \int_{t_0}^t A^\alpha T(t-s)\left[f\big(s, A^{-\alpha}y(s)\big) + \int_{t_0}^s h(s-\tau)g\big(\tau, A^{-\alpha}y(\tau)\big)\, d\tau\right] ds\right\|.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|F_y(t)\| = \Bigg\| & T(t-t_0)A^\alpha u_0 + \int_{t_0}^t A^\alpha T(t-s) f\big(s, A^{-\alpha}y(s)\big)\, ds \\ & - \int_{t_0}^t A^\alpha T(t-s) f(s, u_0) ds \\ & + \int_{t_0}^t A^\alpha T(t-s)\left(\int_{t_0}^s h(s-\tau)g\big(\tau, A^{-\alpha}y(\tau)\big)\, d\tau\right) ds \\ & - \int_{t_0}^t A^\alpha T(t-s)\left(\int_{t_0}^s h(s-\tau)g(\tau, u_0)\, d\tau\right) ds \\ & + \int_{t_0}^t A^\alpha T(t-s) f(s, u_0) ds \\ & + \int_{t_0}^t A^\alpha T(t-s)\left(\int_{t_0}^s h(s-\tau)g(\tau, u_0)\, d\tau\right) ds \Bigg\|,\end{aligned}$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\|F_y(t)\| \leq & \underbrace{\|T(t-t_0)A^{\alpha}u_0\|}_{I_1} \\
& + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \|A^{\alpha}T(t-s)\|\, \|f\big(s, A^{-\alpha}y(s)\big) - f(s,u_0)\|\, ds}_{I_2} \\
& + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \left\| A^{\alpha}T(t-s)\left\{ \int_{t_0}^{s} h(s-\tau)\big[g\big(\tau, A^{-\alpha}y(\tau)\big) - g(\tau,u_0)\big]\, d\tau \right\} \right\| ds}_{I_3} \\
& + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \|A^{\alpha}T(t-s)\|\, \|f(s,u_0)\| ds}_{I_4} \\
& + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \left\| A^{\alpha}T(t-s)\bigg(\int_{t_0}^{s} h(s-\tau)g(\tau,u_0)\, d\tau \bigg) \right\| ds}_{I_5}.
\end{aligned}
$$

Iremos à seguir fazer um estudo de cada termo $I_j, j = \{1,2,3,4,5\}$ apresentado acima:
Estimativa para (I_1)**:** Por (3.6) e (3.4),

$$
I_1 \leq M\|A^{\alpha}u_0\|. \tag{3.19}
$$

Estimativa para (I_2)**:** Usando (3.7), a **Hipótese (F0)** e a definição de $\|\cdot\|_{\alpha}$, temos

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leq \int_{t_0}^{t} C_{\alpha}(t-s)^{-\alpha} L_0\, \|A^{-\alpha}y(s) - u_0\|_{\alpha}\, ds \\
&= C_{\alpha}L_0 \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} \|A^{\alpha}(A^{-\alpha}y(s) - u_0)\|\, ds \\
&= C_{\alpha}L_0 \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} \|y(s) - A^{\alpha}u_0\|\, ds
\end{aligned}
$$

ou seja, pela desigualdade triangular,

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leq C_{\alpha}L_0\delta \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha}\, ds \\
&= C_{\alpha}L_0\delta \Big[(1-\alpha)^{-1}(t-t_0)^{1-\alpha} \Big] \\
&\leq C_{\alpha}L_0\delta \Big[(1-\alpha)^{-1}(t_1-t_0)^{1-\alpha} \Big], \quad t < t_1.
\end{aligned}
$$

Estimativa para (I_3)**:** Neste caso, vamos fazer, primeiramente, um estudo da integral

$$\tilde{H}_1 = \int_{t_0}^{s} h(s-\tau)[g(\tau, A^{-\alpha}y(t)) - g(\tau, u_0)]\, d\tau$$

Considere então $x = s - \tau$ ($\Rightarrow \tau = s - x$); logo,

$$\begin{aligned}\tilde{H}_1 &= \int_{s-t_0}^{0} -h(x)[g(s-x, A^{-\alpha}y(s-x)) - g(s-x, u_0)]\, dx \\ &= \int_{0}^{s-t_0} h(x)[g(s-x, A^{-\alpha}y(s-x)) - g(s-x, u_0)]\, dx.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{t_0}^{t} \left\| A^{\alpha}T(t-s)\left\{ \int_0^{s-t_0} h(\tau)\big[g\big(s-\tau, A^{-\alpha}y(s-\tau)\big) - g(s-\tau, u_0)\big]d\tau\right\}\right\| ds \\ &\le \int_{t_0}^{t} \|A^{\alpha}T(t-s)\| \left\{ \int_0^{s-t_0} |\, h(\tau)|\, \big\|g\big(s-\tau, A^{-\alpha}y(s-\tau)\big) - g(s-\tau, u_0)\big\| d\tau\right\} ds. \end{aligned}$$

Usando novamente, (3.7), a **Hipótese (F0)**, e a definição de $\|\cdot\|_\alpha$ e a desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} I_3 &\le C_\alpha L_0 \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha}\left\{ \int_0^{s-t_0} |\, h(\tau)|\, \big\|A^{-\alpha}y(s-\tau) - u_0\big\|_\alpha d\tau\right\} ds \\ &= C_\alpha L_0 \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha}\left\{ \int_0^{s-t_0} |\, h(\tau)|\, \big\|y(s-\tau) - A^{\alpha}u_0\big\| d\tau\right\} ds \\ &\le C_\alpha L_0 \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha}\left\{ \int_0^{s-t_0} |\, h(\tau)|\, \big[\big\|y(s-\tau)\| + \|A^{\alpha}u_0\big\|\big] \right. \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} I_3 &\le C_\alpha L_0 \delta \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha}\left\{ \int_0^{s-t_0} |\, h(\tau)|\, d\tau \right\} ds \\ &\le C_\alpha L_0 \delta \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha}\left\{ \int_0^{T} |\, h(\tau)|\, d\tau \right\} ds, \\ &\le C_\alpha L_0 \delta\, h_T \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha}\, ds \\ &\le C_\alpha L_0 \delta\, h_T \big[(1-\alpha)^{-1}(t-t_0)^{1-\alpha}\big] \\ &\le C_\alpha L_0 \delta\, h_T \big[(1-\alpha)^{-1}(t_1-t_0)^{1-\alpha}\big], \qquad t < t_1. \end{aligned}$$

Estimativa para (I_4)**:** Por (3.7) e sabendo que $\|f(s,u_0)\| \leq B_1$, temos

$$\begin{aligned} I_4 &\leq B_1\, C_\alpha \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} ds \\ &\leq B_1\, C_\alpha \big[(1-\alpha)^{-1}(t-t_0)^{1-\alpha}\big] \\ &\leq B_1\, C_\alpha \big[(1-\alpha)^{-1}(t_1-t_0)^{1-\alpha}\big], \qquad t < t_1. \end{aligned}$$

Estimativa para (I_5)**:** Inicialmente fazemos uma mudança de variáveis na

$$\tilde{H}_2 = \int_{t_0}^{s} h(s-\tau) g(\tau,u_0)\, d\tau.$$

Considerando $x = s-\tau$, temos

$$\tilde{H}_2 = \int_{s-t_0}^{0} -h(x) g(s-x,u_0)\, dx = \int_{0}^{s-t_0} h(x) g(s-x,u_0)\, dx.$$

Logo,

$$\tilde{H}_2 = \int_{0}^{s-t_0} h(\tau) g(s-\tau,u_0)\, d\tau.$$

Por (3.7) e sabendo que $\|g(s-\tau,u_0)\| \leq B_2$ temos

$$\begin{aligned} I_5 &\leq \int_{t_0}^{t} \|A^\alpha T(t-s)\| \int_{0}^{s-t_0} |\, h(\tau)| \|\, g(s-\tau,u_0)\|\, d\tau \\ &\leq C_\alpha B_2 \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} \bigg(\int_{0}^{s-t_0} |\, h(\tau)|\, d\tau \bigg)\, ds \\ &\leq C_\alpha B_2\, h_T \bigg(\int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha}\, ds \bigg), \qquad T \geq t_1 - t_0 \\ &\leq C_\alpha B_2\, h_T \big[(1-\alpha)^{-1}(t_1-t_0)^{1-\alpha}\big], \qquad t < t_1. \end{aligned}$$

Assim, diante das estimativas para $I_j, j = 1, ..., 5$, temos

$$\|F_y(t)\| \leq M\|A^\alpha u_0\| + C_\alpha (1-\alpha)^{-1} \big[(L_0\delta + B_1) + h_T(L_0\delta + B_2)\big](t_1-t_0)^{1-\alpha};$$

i.e.,

$$\|F_y(t)\| \leq 1 + (M+1)\|A^\alpha u_0\|$$

onde a última desigualdade é válida por (3.6). Conseqüentemente, $F_y \in Z$ e, portanto, $F(Z) \subset Z$. No que segue, vamos estar considerando $F : Z \to Z$ e iremos mostrar que F é uma contração em Z. Dados $y, z \in Z$ e fixando

$$\tilde{H}_3 = \int_{t_0}^{s} h(s-\tau)\big[g(\tau, A^{-\alpha}y(\tau)) -\, g(\tau, A^{-\alpha}z(\tau))\big]\, d\tau$$

temos

$$\|F_y(t) - F_z(t)\| \leq \underbrace{\int_{t_0}^{t} \|A^\alpha T(t-s)\| \left\| f\big(s, A^{-\alpha}y(s)\big) - f\big(s, A^{-\alpha}z(s)\big)\right\| ds}_{I_6}$$

$$+ \underbrace{\int_{t_0}^{t} \left\| A^\alpha T(t-s)\tilde{H}_3 \right\| ds}_{I_7}.$$

Estimativa para (I_6)**:** Por (3.7), pela **Hipótese (F0)** e pela definição de $\|\cdot\|_\alpha$,

$$\begin{aligned}
I_6 &\leq L_0 \int_{t_0}^{t} \|A^\alpha T(t-s)\| \, \|A^{-\alpha}y(s) - A^{-\alpha}z(s)\|_\alpha \, ds \\
&\leq L_0 \int_{t_0}^{t} C_\alpha (t-s)^{-\alpha} \, \|A^\alpha\big(A^{-\alpha}y(s) - A^{-\alpha}z(s)\big)\| \, ds \\
&\leq L_0 \int_{t_0}^{t} C_\alpha (t-s)^{-\alpha} \, \|y(s) - z(s)\| \, ds \\
&\leq C_\alpha L_0 \|y - z\|_Y \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} \, ds \\
&\leq C_\alpha L_0 \big[(1-\alpha)^{-1}(t_1 - t_0)^{1-\alpha}\big] \|y - z\|_Y.
\end{aligned}$$

Estimativa para (I_7)**:** Por (3.7), (3.20) e da **Hipótese (F0)**, obtemos

$$\begin{aligned}
I_7 &\leq \int_{t_0}^{t} \|A^\alpha T(t-s)\| \, \|\tilde{H}_3\| \, ds \\
&\leq C_\alpha L_0 \, h_T \big[(1-\alpha)^{-1}(t_1 - t_0)^{1-\alpha}\big] \|y - z\|_Y,
\end{aligned}$$

onde fizemos uma mudança de variáveis em

$$\tilde{H}_4 = \int_{t_0}^{s} |h(s-\tau)| \, d\tau$$

para encontrarmos,

$$\tilde{H}_4 = -\int_{s-t_0}^{0} |h(x)| \, dx = \int_{0}^{s-t_0} |h(x)| \, dx \leq \int_{0}^{T} |h(x)| \, dx. \tag{3.20}$$

Assim, diante das estimativas acima,

$$
\begin{aligned}
\|F_y(t) - F_z(t)\| &\leq L_0(1 + h_T)C_\alpha(1-\alpha)^{-1}(t_1 - t_0)^{1-\alpha}\|y - z\|_Y \\
&\leq \frac{1}{\delta} L_0\delta\,(1 + h_T)C_\alpha(1-\alpha)^{-1}(t_1 - t_0)^{1-\alpha}\|y - z\|_Y \\
&\leq \underbrace{\frac{1}{\delta}\,[L_0\delta + B_1 + h_T(L_0\delta + B_2)]C_\alpha(1-\alpha)^{-1}(t_1 - t_0)^{1-\alpha}}_{<1}\,\|y - z\|_Y;
\end{aligned}
$$

donde, por (3.6),

$$
\|F_y(t) - F_z(t)\| < \|y - z\|_Y, \qquad \forall\, t \in\, [t_0, t_1];
$$

o que implica,

$$
\|F_y - F_z\|_Y < \|y - z\|_Y, \qquad \forall y, z \in Z,
$$

mostrando que $F : Z \to Z$ é uma contração. Portanto pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach (Teorema D.16), F possui um único ponto fixo $y \in Z$, isto é, existe um único $y \in Z$ tal que

$$
F_y = y.
$$

Seja $u = A^{-\alpha}y$. Então para $t \in [t_0, t_1]$, temos

$$
\begin{aligned}
u(t) &= A^{-\alpha}y(t) \\
&= T(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t - s)[f(s, u(s)) + k(u)(s)]\, ds.
\end{aligned}
$$

Consequentemente, u é uma solução local generalizada para (3.1). ■

3.2 Regularidade de Soluções Generalizadas

Nesta seção, estabelecemos a regularidade de soluções generalizadas para (3.1). Consideremos $J = [t_0, T)$ com $t_0 < T \leq \infty$. Uma *solução clássica* local para (3.1) em J é uma função $u \in C(J; X) \cap C^1(J \backslash \{t_0\}; X)$ satisfazendo (3.1) em J.

Para estabelecer a existência de uma única *solução clássica* para (3.1), precisamos da seguinte hipótese para as funções f, g e h.

Seja U um subconjunto aberto de $[0, \infty) \times X_\alpha$. Para cada $(t, x) \in U$, existem uma vizinhança $V \subset U$ de (t, x) e constantes $L > 0$, $0 < \theta < 1$ tal que

$$
\|f(s_1, u) - f(s_2, v)\| \leq L\big[|s_1 - s_2|^\theta + \|u - v\|_\alpha\big], \tag{\textbf{F}}
$$

para todo (s_1, u) e (s_2, v) em V.

Com relação a função h, existem constantes $C_0 \geq 0$ e $0 < \beta \leq 1$ tal que

$$|h(t) - h(s)| \leq C_0 |t - s|^{\beta}, \tag{$\mathbf{H}$}$$

para todo $t, s \in J$.

Teorema 3.2.1 *Suponha que $-A$ gere o semigrupo analítico $T(t)$ com $\|T(t)\| \leq M$ para $t \geq 0$ e $0 \in \rho(-A)$. Além disso, suponha que f e g satisfação* **(F)** *e a função h verifique* **(H)**. *Então o problema (3.1) tem uma única solução local clássica para cada $u_0 \in X^{\alpha}$ em $[t_0, T_0)$.*

Demostração. Do Teorema 3.1.1 existe $T_0 \in (t_0, T)$ e uma função u solução generalizada do problema (3.1) em $J_0 = [t_0, T_0]$ dada por

$$u(t) = T(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t - s)\big[f(s, u(s)) + K(u)(s)\big]ds, \qquad t \in J_0, \tag{3.21}$$

onde

$$K(u)(t) = \int_{t_0}^{t} h(t - s) g\big(s, u(s)\big)\, ds.$$

Seja

$$v(t) = A^{\alpha} u(t). \tag{3.22}$$

Usando o fato que $T(t)$ comuta com A^{α}, o Teorema A.2, e considerando

$$\tilde{\mathrm{f}}(t) = f\big(t, A^{-\alpha} v(t)\big) \quad e \quad \tilde{\mathrm{g}}(t) = g\big(t, A^{-\alpha} v(t)\big)$$

obtemos

$$v(t) = T(t - t_0)A^{\alpha} u_0 + \int_{t_0}^{t} A^{\alpha} T(t - s)\left[\tilde{\mathrm{f}}(s) + \int_{t_0}^{s} h(s - \tau)\tilde{\mathrm{g}}(\tau)\, d\tau\right] ds. \tag{3.23}$$

Sabendo que u é contínua em J_0 e que as funções f e g satisfazem a condição **(F)**, segue que $\tilde{\mathrm{f}}$ e $\tilde{\mathrm{g}}$ são contínuas e, consequentemente limitadas em J_0. Seja

$$N_1 = \sup_{t \in J_0} \|\tilde{\mathrm{f}}(t)\| \quad \text{e} \quad N_2 = \sup_{t \in J_0} \|\tilde{\mathrm{g}}(t)\|. \tag{3.24}$$

Mostraremos que $\tilde{\mathrm{f}}$ e $\tilde{\mathrm{g}}$ são localmente Hölder contínua em J_0. Para isso, mostraremos inicialmente que $v(t)$ é localmente Hölder contínua em J_0. Pelo Teorema 1.14 (item **(b)**)

$$A^{\alpha} T(t - s) \in D(A^{\alpha}) \subset D(A^{\beta}), \qquad \text{para } \alpha \geq \beta\,;$$

então, pelo item **(d)** do Teorema 1.15, para cada $0 < \beta < 1-\alpha$ e para todo $0 < w < 1$ temos

$$\|T(w)A^\alpha T(t-s) - A^\alpha T(t-s)\| \leq C_\beta w^\beta \|A^\beta A^\alpha T(t-s)\|. \tag{3.25}$$

Assim, pelo Teorema 1.14 (item **(d)**) e de (3.25) temos

$$\|T(w)A^\alpha T(t-s) - A^\alpha T(t-s)\| \leq C_\beta w^\beta \|A^{\beta+\alpha} T(t-s)\|, \tag{3.26}$$

para cada $T(t-s) \in D(A^\gamma)$ onde $\gamma = max\{\alpha, \beta, \alpha+\beta\}$. De (3.26), $-A$ ser o gerador infinitesimal de $T(t)$, $0 \in \rho(-A)$(donde, $0 \in \rho(A)$) e do Teorema (1.15-(item (c)) segue que para cada $t > s$ existe $C_\beta > 0$ tal que

$$\|T(w)A^\alpha T(t-s) - A^\alpha T(t-s)\| \leq C_\beta w^\beta C_{\beta+\alpha}(t-s)^{-(\alpha+\beta)};$$

assim,

$$\|T(w)A^\alpha T(t-s) - A^\alpha T(t-s)\| \leq C w^\beta (t-s)^{-(\alpha+\beta)}, \quad \text{com } C = C_\beta C_{\beta+\alpha}. \tag{3.27}$$

Note que, se $t_0 < t < t+w < T_0$,

$$\begin{aligned}
\|v(t+w) - v(t)\| = \Bigg\| & T(w+t-t_0)A^\alpha u_0 - T(t-t_0)A^\alpha u_0 \\
& + \int_{t_0}^{t} A^\alpha T(t+w-s)\left[\tilde{\mathrm{f}}(s) + \int_{t_0}^{s} h(s-\tau)\tilde{\mathrm{g}}(\tau)\,d\tau\right] ds \\
& + \int_{t}^{t+w} A^\alpha T(t+w-s)\left[\tilde{\mathrm{f}}(s) + \int_{t_0}^{s} h(s-\tau)\tilde{\mathrm{g}}(\tau)\,d\tau\right] ds \\
& - \int_{t_0}^{t} A^\alpha T(t-s)\left[\tilde{\mathrm{f}}(s) + \int_{t_0}^{s} h(s-\tau)\tilde{\mathrm{g}}(\tau)\,d\tau\right] ds \Bigg\|.
\end{aligned}$$

Logo, aplicando a desigualdade triangular e propriedade de semigrupo,

$$\begin{aligned}
\|v(t+w) - v(t)\| = & \underbrace{\|T(w)T(t-t_0)A^\alpha u_0 - T(t-t_0)A^\alpha u_0\|}_{I_8} \\
& + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \|A^\alpha T(t+w-s) - A^\alpha T(t-s)\| \, \|\tilde{\mathrm{f}}(s) + \int_{t_0}^{s} h(s-\tau)\tilde{\mathrm{g}}(\tau)\,d\tau\| ds}_{I_9} \\
& + \underbrace{\int_{t}^{t+w} \|A^\alpha T(t+w-s)\| \, \|\tilde{\mathrm{f}}(s) + \int_{t_0}^{s} h(s-\tau)\tilde{\mathrm{g}}(\tau)\,d\tau\| ds}_{I_{10}} .
\end{aligned}$$

Estimativa para (I_8): Do Teorema 1.15-(item (b)) e (3.27),

$$I_8 \leq \|T(w)A^\alpha T(t-t_0) - A^\alpha T(t-t_0)\| \, \|u_0\| \leq \underbrace{C(t-t_0)^{-(\alpha+\beta)}\|u_0\|}_{M_1=M_1(t)} w^\beta,$$

ou seja,

$$I_8 \leq M_1 w^\beta. \tag{3.28}$$

Agora, se $t \to t_0$ então $M_1 \to \infty$. Considerando $t_0 < t_0' \leq t \leq T_0$ temos $M_1 < \infty$. **Estimativa para (I_9):** De (3.27) e fazendo uma mudança de variável com $x = s - \tau$ em $\displaystyle\int_{t_0}^{s} h(s-\tau)\tilde{\mathrm{g}}(\tau)\,d\tau$ temos,

$$\begin{aligned} I_9 &= \int_{t_0}^{t} \|T(w)A^\alpha T(t-s) - A^\alpha T(t-s)\| \, \|\tilde{\mathrm{f}}(s) + \int_{t_0}^{s} h(s-\tau)\tilde{\mathrm{g}}(\tau)\,d\tau\|ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} Cw^\beta (t-s)^{-(\alpha+\beta)} \big(\|\tilde{\mathrm{f}}(s) + \int_{s-x}^{0} -h(x)\tilde{\mathrm{g}}(s-x)dx\|\big)ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} Cw^\beta (t-s)^{-(\alpha+\beta)} \big(\|\tilde{\mathrm{f}}(s) + \int_{0}^{s-x} h(x)\tilde{\mathrm{g}}(s-x)dx\|\big)ds, \end{aligned}$$

donde,

$$I_9 \leq \int_{t_0}^{t} Cw^\beta (t-s)^{-(\alpha+\beta)} \big(\|\tilde{\mathrm{f}}(s) + \int_{0}^{s-x} |h(x)|\|\tilde{\mathrm{g}}(s-x)\|dx\big)ds;$$

de (3.24),

$$\begin{aligned} I_9 &\leq \int_{t_0}^{t} Cw^\beta (t-s)^{-(\alpha+\beta)} (N_1 + N_2 \int_{0}^{s-x} |h(x)|dx\big)ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} Cw^\beta (t-s)^{-(\alpha+\beta)} (N_1 + N_2 \int_{0}^{T} |h(x)|dx\big)ds \\ &= Cw^\beta (N_1 + N_2 h_T) \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-(\alpha+\beta)}ds; \end{aligned}$$

calculando a integral $\displaystyle\int_{t_0}^{t} (t-s)^{-(\alpha+\beta)}ds$ obtemos,

$$I_9 \leq Cw^\beta (N_1 + N_2 h_T) \big[1 - (\alpha+\beta)\big]^{-1} (t-t_0)^{1-(\alpha+\beta)};$$

sendo $\alpha + \beta < 1$ e $t < T_0$,

$$I_9 \leq \underbrace{C(N_1 + N_2 h_T) \big[1 - (\alpha+\beta)\big]^{-1} (T_0-t_0)^{1-(\alpha+\beta)}}_{M_2} w^\beta,$$

com M_2 independente de t; logo

$$I_9 \leq M_2 w^\beta, \tag{3.29}$$

com M_2 independente de t.

Estimativa para (I_{10}): De (3.24) e do Teorema 1.15 (item (c))

$$\begin{aligned} I_{10} &\leq \int_t^{t+w} C_\alpha (t+w-s)^{-\alpha} \big(N_1 + N_2 \int_0^T |\, h(x)|\, dx\big) ds \\ &= C_\alpha (N_1 + N_2 h_T) \int_t^{t+w} (t+w-s)^{-\alpha} ds \\ &= \underbrace{C_\alpha (N_1 + N_2 h_T)(1-\alpha)^{-1}}_{M_3}\, w^{-\alpha+1}; \end{aligned}$$

sendo $0 < w < 1$ e $\beta < 1 - \alpha$ temos

$$I_{10} \leq M_3 w^\beta, \tag{3.30}$$

com M_3 independente de t.

Fazendo uso das estimativas (3.28), (3.29) e (3.30) temos

$$\|v(t+w) - v(t)\| \leq \underbrace{M_1 + M_2 + M_3}_{M_4}\, w^\beta. \tag{3.31}$$

Daí, fazendo $s = t + w$ em (3.31) com $t_0 < t_0' < t,\ s \leq T_0$, obtemos que

$$\|v(s) - v(t)\| \leq M_4 |s-t|^\beta, \tag{3.32}$$

para todo $t_0 < t_0' < t, s \leq T_0$; concluindo então que a função v é localmente Hölder contínua em $(t_0, T_0]$. Agora, por **(F)**

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathrm{f}}(s) - \tilde{\mathrm{f}}(t)\| &= \|f\big(s, A^{-\alpha} v(s)\big) - f\big(t, A^{-\alpha} v(t)\big)\| \\ &\leq L[|s-t|^\theta + \|A^{-\alpha} v(s) - A^{-\alpha} v(t)\|_\alpha] \\ &\leq L[|s-t|^\theta + \|v(s) - v(t)\|]. \end{aligned} \tag{3.33}$$

De (3.32) e (3.33), para todo $t_0 < t_0' < t, s < T_0$,

$$\|\tilde{\mathrm{f}}(s) - \tilde{\mathrm{f}}(t)\| \leq L[|s-t|^\theta + M_4 |s-t|^\beta]$$

Considerando, $\nu = min\{\alpha, \beta\}$,

$$\|\tilde{\mathrm{f}}(s) - \tilde{\mathrm{f}}(t)\| \leq L_1 |s-t|^\nu, \tag{3.34}$$

localmente em $(t_0, T_0]$. Analogamente, considerando, $\eta = min\{\alpha, \beta\}$,

$$\|\tilde{\mathrm{g}}(s) - \tilde{\mathrm{g}}(t)\| \leq L_2 |s-t|^\eta, \tag{3.35}$$

em $(t_0, T_0]$. Seja

$$\tilde{\mathrm{h}}(t) = \tilde{\mathrm{f}}(t) + \int_{t_0}^{t} h(t-\tau)\tilde{\mathrm{g}}(\tau)\, d\tau.$$

Agora, mostraremos que $\tilde{\mathrm{h}}$ é localmente Hölder contínua em J_0. Para $s \leq t$ temos,

$$\begin{aligned}\|\tilde{\mathrm{h}}(t) - \tilde{\mathrm{h}}(s)\| &\leq \|\tilde{\mathrm{f}}(t) - \tilde{\mathrm{f}}(s)\| + \int_{t_0}^{t} |h(t-\tau) - h(s-\tau)|\| \, \|\tilde{\mathrm{g}}(\tau)\|\, d\tau \\ &+ \int_{s}^{t} |h(t-\tau)| \, \|\tilde{\mathrm{g}}(\tau)\|\, d\tau.\end{aligned}$$

De (3.34) e do fato que h verifica a condição **(H)**, segue que

$$\|\tilde{\mathrm{h}}(t) - \tilde{\mathrm{h}}(s)\| \leq L_1|t-s|^{\nu} + \int_{t_0}^{t} C_0|t-s|^{\beta}\|\tilde{\mathrm{g}}(\tau)\|\, d\tau + \int_{s}^{t} |h(s-\tau)|\|\tilde{\mathrm{g}}(\tau)\|\, d\tau.$$

Daí, de (3.24),

$$\|\tilde{\mathrm{h}}(t) - \tilde{\mathrm{h}}(s)\| \leq L_1|t-s|^{\nu} + N_2(t-t_0)\, C_0|t-s|^{\beta} + N_2\int_{s}^{t} |h(s-\tau)|\, d\tau.$$

Observando que

$$t - T_0,\ s - \tau < T_0,$$

$$|t-s| = |t-s|^{\beta}|t-s|^{1-\beta} \leq (|t| + |s|)^{1-\beta}|t-s|^{\beta} \leq (2T_0)^{1-\beta}|t-s|^{\beta}$$

e

$$\int_{s}^{t} |h(s-\tau)|\, d\tau \leq M|t-s|,$$

obtemos

$$\begin{aligned}\|\tilde{\mathrm{h}}(t) - \tilde{\mathrm{h}}(s)\| &\leq L_1|t-s|^{\nu} + N_2(t-t_0)\, C_0|t-s|^{\beta} + N_2 \\ &\leq L_1|t-s|^{\nu} + N_2T_0C_0|t-s|^{\beta} + \tilde{N}_2|t-s| \\ &\leq L_1|t-s|^{\nu} + N_2T_0C_0|t-s|^{\beta} + N_2h_{T_0}(2T_0)^{1-\beta}|t-s|^{\beta}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\|\tilde{\mathrm{h}}(t) - \tilde{\mathrm{h}}(s)\| \leq L_2|t-s|^{\delta} \tag{3.36}$$

para alguma constante $L_2 \geq 0$ e $\delta = min\{\nu, 1-\beta, \beta\}$; mostrando que $\tilde{\mathrm{h}}$ é localmente Hölder contínua em $(t_0, T_0]$. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{\mathrm{v}}}{dt}(t) + A\tilde{\mathrm{v}}(t) = \tilde{\mathrm{h}}(t), & t > t_0 \\ \tilde{\mathrm{v}}(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{3.37}$$

Desde que $\tilde{\mathrm{h}} \in L^1\big((t_0, T_0]; X\big)$, pelo Corolário (G.6) o problema (3.37) tem uma única solução clássica $\tilde{\mathrm{v}}$ dada por

$$\tilde{\mathrm{v}}(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)\tilde{\mathrm{h}}(s)ds. \tag{3.38}$$

Para $t > t_0$, cada termo do lado direito de (3.38) pertence a $D(A)$ e, conseqüentemente, pertence $D(A^\alpha)$. Aplicando A^α em ambos os lados de (3.38) temos

$$A^\alpha \tilde{\mathrm{v}}(t) = A^\alpha T(t-t_0)u_0 + A^\alpha \int_{t_0}^{t} T(t-s)\tilde{\mathrm{h}}(s)ds. \tag{3.39}$$

Usando novamente o item **(b)** do Teorema 1.15, a continuidade da função

$$s \to T(t-s)\tilde{\mathrm{h}}(s);$$

o fato de $A^\alpha : X_\alpha \to X$ ser linear contínua obtemos

$$A^\alpha \tilde{\mathrm{v}}(t) = T(t-t_0)A^\alpha u_0 + \int_{t_0}^{t} A^\alpha T(t-s)\tilde{\mathrm{h}}(s)ds,$$

isto é,

$$A^\alpha \tilde{\mathrm{v}}(t) = v(t) = A^\alpha \mathrm{u}(t);$$

donde, da injetividade A^α,

$$\tilde{\mathrm{v}}(t) = u(t).$$

Portanto,

$$u(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)\tilde{\mathrm{h}}(s)ds$$

é a única *solução clássica* para (3.1) em J_0. ■

3.3 Existência Global

Análogo ao que fizemos no Capítulo 2, segue que existe uma única solução generalizada u em $J_0 = [t_0, T_{max})$. E ainda, se

$$T_{\max} < \infty \text{ então } \|u(t)\| \to \infty \text{ quando } t \to T_{max}. \tag{3.40}$$

Desejamos mostrar que tal solução é uma solução clássica global, o que é estabelecido na página seguinte.

Teorema 3.3.1 *Seja $-A$ o gerador de um semigrupo analítico $T(t)$ com $\|T(t)\| \leq M$ para $t \geq t_0$, $0 \in \rho(-A)$, $f, g : [t_0, \infty) \times X_\alpha \to X$ satisfazendo a condição* **(F)** *e h verificando a condição* **(H)**. *Se existirem funções à valores reais contínuas não-decrescentes $k_1, k_2 : [t_0, \infty) \to [0, \infty)$ tais que:*

$$\|f(t,x)\| \leq k_1(t)(1 + \|x\|_\alpha), \quad \text{para } t \geq t_0,\ x \in X^\alpha, \tag{3.41}$$

$$\|g\big(t,x)\| \leq k_2(t)(1 + \|x\|_\alpha), \quad \text{para } t \geq t_0,\ x \in X^\alpha, \tag{3.42}$$

então o problema de valor inicial (3.1) *terá uma única solução clássica em* $[t_0, \infty)$ *para todo* $u_0 \in X^\alpha$.

Demostração. Notemos inicialmente, que de (3.40) é suficiente mostrarmos que esta solução é limitada em X_α quando $t \to T_{max}$. Do Teorema 3.2.1,

$$u(t) = T(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)\left[f(s,u(s)) + \int_{t_0}^{s} h(s-\tau)g\big(\tau, u(\tau)\big)\, d\tau\right] ds; \tag{3.43}$$

o que implica,

$$A^\alpha u(t) = A^\alpha T(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} A^\alpha T(t-s)\left[f(s,u(s)) + \int_{t_0}^{s} h(s-\tau)g\big(\tau, u(\tau)\big)\, d\tau\right] ds. \tag{3.44}$$

Fazendo uso do fato que $T(t)$ comuta com A^α e das desigualdades

$$\|T(t)\| \leq M,$$
$$\|A^\alpha T(t)\| \leq C_\alpha t^{-\alpha}$$

segue de (3.44)

$$\|A^\alpha u(t)\| \leq M\|A^\alpha u_0\| + C_\alpha \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} \Big\| f(s,u(s)) + \int_{t_0}^{s} h(s-\tau)g\big(\tau, u(\tau)\big)\, d\tau \Big\|\, ds.$$

Assim,

$$\|u(t)\|_\alpha \leq M\|A^\alpha u_0\| + C_\alpha \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha}\left[\|f(s,u(s))\| + \Big\|\int_{t_0}^{s} h(s-\tau)g\big(\tau, u(\tau)\big)\, d\tau\Big\|\right] ds. \tag{3.45}$$

Ora,

$$\int_{t_0}^{s} |\, h(s-\tau)|\, \|g\big(\tau, u(\tau)\big)\|\, d\tau \leq k_2(T) \int_{t_0}^{s} \tilde{H}\big(1 + \|u(\tau)\|_\alpha\big) d\tau; \tag{3.46}$$

pois, por hipótese g satisfaz (3.42), k_2 é não decrescente e h verifica a condição **(H)** (donde, h é contínua em J_0 e, por conseguinte, $|\,h(s-\tau)|\leq \tilde{H}$ para alguma constante $\tilde{H}\geq 0$). Sendo k_1 não decrescente, de (3.41), (3.45) e (3.46) obtemos

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_\alpha &\leq M\|A^\alpha u_0\| \\ &+ C_\alpha\left[k_1(T)+\tilde{H}k_2(T)\right]\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\alpha}\Big[1+\|u(s)\|_\alpha+\int_{t_0}^{s}\big(1+\|u(\tau)\|_\alpha\big)d\tau\Big]ds.\end{aligned}\tag{3.47}$$

Observando que:

$$\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\alpha}ds=\frac{(t-t_0)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}<\frac{T^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$$

e

$$\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\alpha}(s-t_0)\,ds\leq\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\alpha}T\,ds<\frac{TT^{-\alpha+1}}{-\alpha+1};$$

depois, fazendo uma simples modificação em (3.47) temos

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_\alpha \leq &\underbrace{M\|A^\alpha u_0\|}_{C_1} \\ &+\underbrace{C_\alpha\,(1+T)\Big[k_1(T)+\tilde{H}k_2(T)\Big]\frac{T^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}}_{C_2} \\ &+\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\alpha}\Big[\|u(s)\|_\alpha+\int_{t_0}^{s}\|u(\tau)\|_\alpha d\tau\Big]ds.\end{aligned}\tag{3.48}$$

A estiva em (3.48) é do tipo

$$\|u(t)\|_\alpha\leq C_1+C_2\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\alpha}\Big[\|u(s)\|_\alpha+\int_{t_0}^{s}\|u(\tau)\|_\alpha d\tau\Big]ds,\tag{3.49}$$

para algumas constantes positivas C_1 e C_2 dependendo apenas de α e T. Integrando (3.49) sobre (t_0,t), obtemos

$$\int_{t_0}^{t}\|u(\xi)\|_\alpha\,d\xi\leq C_1T+C_2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\xi}(\xi-s)^{-\alpha}\Big[\|u(s)\|_\alpha+\int_{t_0}^{s}\|u(\tau)\|_\alpha d\tau\Big]dsd\xi.\tag{3.50}$$

Mudando a ordem de integração em (3.50),

$$\int_{t_0}^{t}\|u(\xi)\|_\alpha\,d\xi\leq C_1T+C_2\int_{t_0}^{t}\int_{s}^{t}(\xi-s)^{-\alpha}\Big[\|u(s)\|_\alpha+\int_{t_0}^{s}\|u(\tau)\|_\alpha d\tau\Big]d\xi ds.\tag{3.51}$$

Reescrevendo (3.51)

$$\int_{t_0}^{t}\|u(\xi)\|_\alpha\,d\xi\leq C_1T+C_2\int_{t_0}^{t}\Big(\int_{s}^{t}(\xi-s)^{-\alpha}d\xi\Big)\Big[\|u(s)\|_\alpha+\int_{t_0}^{s}\|u(\tau)\|_\alpha d\tau\Big]ds,$$

ou seja,

$$\int_{t_0}^{t} \|u(\xi)\|_\alpha \, d\xi \leq \underbrace{C_1 T}_{C_3} + \underbrace{\frac{C_2 T}{1-\alpha}}_{C_4} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} \Big[\|u(s)\|_\alpha + \int_{t_0}^{s} \|u(\tau)\|_\alpha d\tau \Big] ds. \tag{3.52}$$

A estimativa (3.52) é da forma

$$\int_{t_0}^{t} \|u(\xi)\|_\alpha \, d\xi \leq C_3 + C_4 \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} \Big[\|u(s)\|_\alpha + \int_{t_0}^{s} \|u(\tau)\|_\alpha d\tau \Big] ds, \tag{3.53}$$

para algumas constantes C_3 e C_4, dependendo apenas de α e T. Somando (3.49) e (3.53) obtemos

$$\|u(t)\|_\alpha + \int_{t_0}^{t} \|u(\xi)\|_\alpha d\xi \leq C_5 + C_6 \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} \Big[\|u(s)\|_\alpha + \int_{t_0}^{s} \|u(\tau)\|_\alpha d\tau \Big] ds, \tag{3.54}$$

onde C_5 e C_6 são constantes positivas, dependendo de α e de T apenas. Aplicando o Lema D.1 à função contínua $\phi(t, t_0) \geq 0$ dada por

$$\phi(t, t_0) = \|u(t)\|_\alpha + \int_{t_0}^{t} \|u(\xi)\|_\alpha d\xi$$

obtemos

$$\phi(t, t_0) \leq C,$$

ou seja,

$$\|u(t)\|_\alpha + \int_{t_0}^{t} \|u(\xi)\|_\alpha d\xi \leq C.$$

Portanto,

$$\|u(t)\|_\alpha \leq C \quad em \ [t_0, T_{max}),$$

o que conclui a demonstração do Teorema 3.3.1. ■

3.4 Aplicações

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado com fronteira suave e $p, q > 1$. Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \big(|u(t)|^{p-1} u(t)\big) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \arctan(t-s)\big(|u(s)|^{q-1} u(s)\big)\, ds, \ \ x \in \Omega, \ t > 0, \\ u(0) = u_0 \\ u(x,t) = 0, \ \ x \in \partial\Omega, t \in [0, T), \end{cases} \tag{3.55}$$

Definindo

$$A_2 : D(A_2) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$$
$$u \quad \rightsquigarrow \quad A_2\,(u) = -\Delta u,$$

note que:

(i) $-A_2$ é gerador de um semigrupo analítico $T(t)$ com $\|T(t)\| \leq M\,, t \geq 0$;

(ii) $0 \in \rho(-A_2)$;

(iii) $f(u) = |u|^{p-1}u$ e $g(u) = |u|^{q-1}u$ satisfazem **(F0)**;

(iv) $h(t) = \arctan t$ é integrável,

(v) $f(u) = |u|^{p-1}u$ e $g(u) = |u|^{q-1}u$ satisfazem **(F)**;

(vi) h satisfaz **(H)**;

Justificativa de (ii): Devemos justificar que

$$(-A)^{-1} : L^2(\Omega) \to H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

existe, sendo linear e contínuo, ou equivalentemente, para todo $f \in L^2(\Omega)$, existe uma única $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$-A_2 u = f,$$

ou seja,

$$\Delta u = f \;\text{ com }\; u \in H_0^1(\Omega),$$

i.e., existe uma única u que satisfaz o seguinde problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \tilde{f}, \;\; \Omega \\ u = 0, \;\; \partial\Omega \end{cases} \tag{3.56}$$

com $\tilde{f} = -f$. Para isso, mostrar-se a existência e unicidade de solução fraca para o problema (3.56), ou seja, mostra-se que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega \tilde{f} v, \;\; \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

(Veja Brézis [6], para maiores detalhes.) Agora, considere

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \tilde{f} + u, \;\; \Omega \\ u = 0, \;\; \partial\Omega \end{cases} \tag{3.57}$$

e denote

$$g(x) = \tilde{f}(x) + u(x), \;\; x \in \Omega,$$

temos

$$\begin{cases} -\Delta u + u = g(x) \\ \quad u = 0, \;\; \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.58}$$

Desde que $g \in L^2(\Omega)$ $(f, u \in L^2(\Omega))$, segue do TEOREMA DA REGULARIDADE (Teorema F.2) que

$$u \in H^2(\Omega)$$

e

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Sendo

$$\|u\|_{D(-A_2)} = \|u\|_L^2(\Omega) + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$
$$\nabla u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

temos

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{N} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)};$$

logo,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{N} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \|u\|_{H^2(\Omega)};$$

assim,

$$\|u\|_{D(-A_2)} \leq \|u\|_{H^2(\Omega)};$$

donde,

$$\|u\|_{D(-A_2)} \leq c\big[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\big]. \tag{3.59}$$

Por outro lado,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega \tilde{f} u \overbrace{\leq}^{Hlder} \|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_L^2(\Omega),$$

o que implica,

$$\|u\|^2 \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|,$$

logo,

$$\|u\| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Mas,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|u\| \leq c^2\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.60}$$

Desta maneira, de (3.59) e (3.60),

$$\|u\|_{D(-A_2)} \leq \tilde{C}\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Portanto, o operador $-A_2 : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ tem um operador inverso

$$(-A_2)^{-1} : L^2(\Omega) \to H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

definido da seguinte maneira,

$$u = (-A_2)^{-1}f \Longleftrightarrow \begin{cases} -\Delta u = \tilde{f}, \ \ \Omega \\ u = 0, \ \ \partial\Omega \end{cases}$$

com

$$\|u\|_{D(-A_2)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \Rightarrow \|(-A_2)^{-1}f\|_{D(-A_2)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

justificando (ii).

Justificativa de (iii): Verificar **(F0)** para $f : X^\alpha \to L^2(\Omega)$ (f não depende explicitamente de t) é equivalente a verificar que f é localmente Lipschitziana, isto é, para cada $u_0 \in X^\alpha$, existem $r > 0$ e $L_0 > 0$ verificando

$$\|f(u) - f(v)\|_2 \leq L_0\|u - v\|_\alpha, \qquad \forall\, u, v \in B_r(u_0) \in X^\alpha. \tag{3.61}$$

Vejamos ,

$$\|f(u)-f(v)\|_2^2 = \|\, |\, u|^{p-1}u - |\, v|^{p-1}v\, \|_2^2 = \int_\Omega \Big| |u(x)|^{p-1}u(x) - |v(x)|^{p-1}v(x)\Big|^2 dx. \tag{3.62}$$

Supondo sem perda de generalidade, $u(x) \leq v(x)$ encontramos pelo Teorema do Valor Médio $w(x) \in (u(x), v(x))$ tal que

$$p\,|w(x)|^{p-1}\big(v(x) - u(x)\big) = |v(x)|^{p-1}v(x) - |u(x)|^{p-1}u(x);$$

o que implica,

$$\Big|\, |v(x)|^{p-1}v(x) - |u(x)|^{p-1}u(x)\Big|^{\,2} \leq c\big(|v(x)|^{p-1} + |u(x)|^{p-1}\big)^{\,2} |\, v(x) - u(x)|^{\,2}, \tag{3.63}$$

com $c = p^2(2^{p-1})^2$. De (3.62) e (3.63)

$$\|f(u) - f(v)\|_2^2 \leq c \int_\Omega \big(|v(x)|^{p-1} + |u(x)|^{p-1}\big)^2 |v(x) - u(x)|^{\,2}\, dx. \tag{3.64}$$

Do item (ii) do Teorema F.5 temos a imersão contínua,

$$X^\alpha \hookrightarrow C^\nu(\overline{\Omega}), \qquad \text{para } 0<\nu\le \underbrace{2\alpha-\frac{3}{2}}_{>0}, \text{ou seja, para } \alpha>\frac{3}{4}. \tag{3.65}$$

Do Teorema $E.7$ temos a imersão contínua,

$$C^\nu(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^s(\Omega), \qquad \text{para todo } s\in[1,+\infty). \tag{3.66}$$

De (3.65) e (3.66),

$$\big(|v(x)|^{p-1}+|u(x)|^{p-1}\big)^2 \quad \text{e} \quad |v(x)-u(x)|^2$$

pertencem a $L^2(\Omega)$; pois $u,v\in X^\alpha\subset L^s(\Omega),\ \forall s\in[1,\infty)$.
Usando a desigualdade de Hölder (Teorema D.12) em (3.64), temos

$$\|f(u)-f(v)\|_2^2 \le c\big\|\big(|v|^{p-1}+|u|^{p-1}\big)^2\|_2\,\||v-u|^{\,2}\|_2. \tag{3.67}$$

Afirmações :

(1) $\||u-v|^2\|_2=\|u-v\|_4^2$.

(2) $\|(|u|^{p-1}+|v|^{p-1})^2\|_2 \le \big(\|\,u\|_{4(p-1)}^{p-1}+\|\,v\|_{4(p-1)}^{p-1}\big)^2$.

Justificativa de (1) : Claramente,

$$\||u-v|^2\|_2=\left(\int_\Omega |u-v|^{\,4}\right)^{1/2}=\left[\left(\int_\Omega |u-v|^4\right)^{\frac{1}{4}}\,\right]^{\,2}=\|u-v\|_4^2$$

Justificativa de (2) : Temos,

$$\begin{aligned}\|(|u|^{p-1}+|v|^{p-1})^2\|_2 &= \left(\int_\Omega \big|(|u|^{p-1}+|v|^{p-1})^2\big|^2\right)^{1/2}\\ &= \left(\int_\Omega \big|(|u|^{p-1}+|v|^{p-1})\big|^4\right)^{2/4}\\ &= \||u|^{p-1}+|v|^{p-1}\|_4^2\end{aligned}$$

ou seja, pela desigualdade triangular,

$$\|(|u|^{p-1}+|v|^{p-1})^2\|_2 \le \big(\||\,u|^{p-1}\|_4+\||v|^{p-1}\|_4\big)^2. \tag{3.68}$$

Sendo,

$$\||\,u|^{p-1}\|_4=\left[\int_\Omega |\,|\,u|^{p-1}|^4\right]^{\frac{1}{4}}=\left[\int_\Omega |u|^{4(p-1)}\right]^{\frac{1}{4}}=\left[\left(\int_\Omega |\,u|^{4(p-1)}\right)^{\frac{1}{4(p-1)}}\right]^{p-1}=\|\,u\|_{4(p-1)}^{p-1}$$

e, analogamente,

$$\|\,|\,v|^{p-1}\|_4 = \|\,v\|_{4(p-1)}^{p-1}$$

segue, de (3.68), que

$$\|(|u|^{p-1} + |v|^{p-1})^2\|_2 \leq \left(\|\,u\|_{4(p-1)}^{p-1} + \|\,v\|_{4(p-1)}^{p-1}\right)^2,$$

mostrando a **Afirmação** (2). De (3.67) e das **Afirmações** (1) e (2),

$$\|f(u) - f(v)\|_2^2 \leq c\big(\|\,u\|_{4(p-1)}^{p-1} + \|\,v\|_{4(p-1)}^{p-1}\big)^2 \, \|u - v\|_4^2.$$

Assim, pela imersão (3.66),

$$\|f(u) - f(v)\|_2^2 \leq c_1 \left(\|\,u\|_{C^\nu(\overline{\Omega})}^{p-1} + \|\,v\|_{C^\nu(\overline{\Omega})}^{p-1}\right)^2 \|u - v\|_{C^\nu(\overline{\Omega})}^2.$$

Donde, pela imersão (3.65)

$$\|f(u) - f(v)\|_2^2 \leq c_2 \left(\|\,u\|_\alpha^{p-1} + \|\,v\|_\alpha^{p-1}\right)^2 \|u - v\|_\alpha^2.$$

Portanto,

$$\|f(u) - f(v)\|_2 \leq c_3 \, \|u - v\|_\alpha,$$

onde c_3 é uma constante que depende de r e $\|u_0\|_\alpha$. Mostrando a **(F0)** para $f(u) = |u|^{p-1}u$, $p > 1$. Analogamente, fixado u_1, existe uma constante $c_4 > 0$, com $c_4 = c_4(r_1, \|u_1\|_\alpha)$, tal que

$$\|g(u) - g(v)\| \leq c_4 \|v - u\|_\alpha.$$

para todo $u, v \in B_{r_1}(u_1) \in X^\alpha$.

Justificativa de (iv): Imediato do Teorema 1, uma vez que $\arctan(\cdot)$ é contínua.

Justificativa de (v): Ver **Justificativa (iii)**.

Justificativa de (vi): Para $h(t) = \arctan t$ temos

$$f'(t) = \frac{1}{1 + t^2} \Rightarrow |f'(t)| < 1 \qquad \forall\, t \in [0, \infty)$$

e pelo Teorema do Valor Médio para quaisquer $t_1, t_2 \in [0, \infty)$, existe $t_0 \in (t_1,\, t_2)$ tal que

$$|h(t_1) - h(t_2)| = |h'(t_0)||t_1 - t_2| \leq |t_1 - t_2|;$$

logo, existe $C_0 = 1$ e $\beta = 1$ tal que

$$|h(t_1) - h(t_2)| \leq C_0 \, |t_1 - t_2|^\beta;$$

mostrando que h satisfaz **(H)**.

De (i) - (vi) segue pelos Teoremas 3.1.1 e 3.2.1 que o problema (3.1) tem uma única solução clássica para $u_0 \in X^\alpha$ em $[0, T_0)$.

Se trocarmos o problema (3.55) pelo problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \arctan(u(t)) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \sin(t-s)\big(\arctan(u(s))\, ds, \;\; x \in \Omega, \qquad t > 0, \\ u(0) = u_0 \\ u(x,t) = 0, \quad\; x \in \partial\Omega, t \in [0, T) \end{cases} \tag{3.69}$$

obtemos um problema que possui uma solução clássica para para $u_0 \in X^\alpha$. De fato, a solução local clássica para $u_0 \in X^\alpha$ é imediata. Com relação, a solução clássica para $u_0 \in X^\alpha$ apenas evidenciamos que a função $f(s) = \arctan(s)$, satisfaz $|f(s)| \leq s$, para todo s real. Então,

$$\|f(u)\|_2 \leq \|u\|_2 \leq 1 + \|u\|_2 \leq 1 + C\|u\|_\alpha \leq \tilde{C}(1 + \|u\|_\alpha).$$

Assim, basta considerarmos, $k_1(t) = \tilde{C}$ que teremos pelo Teorema 3.3.1 a existência de uma solução clássica para $u_0 \in X^\alpha$.

Capítulo 4

Equações Semilineares Fortemente Amortecidas

Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ com fronteira suficientemente suave e seja

$$Lu = \sum_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u$$

um operador diferential fortemente elíptico de ordem $2m$ em Ω. Sejam $x_0 \in \Omega, x_1 \in \Omega$, $0 < t_0 < T$ e consideremos o seguinte problema de contorno e de valores iniciais para a equação fortemente amortecida

$$u_{tt} + \big(aL + b\big)u_t + \big(cL + d\big)u = f(t, u, u_t), \text{ em } \Omega \times (t_0, T), \tag{4.1}$$

$$u(x, t_0) = x_0,\ u_t(x, t_0) = x_1, \quad \text{para } x \in \Omega$$

$$D^\alpha u = 0 \text{ para } (x,t) \in \partial\Omega \times [t_0, T), |\,\alpha| \leq m - 1,$$

onde $a > 0, b$ e c são constantes.

O termo "amortecida" descrito acima, também conhecido como **Amortecimento** [1] acima está ligado a um efeito dissipativo (perda de energia). No caso da onda, por exemplo, esta energia é denominada energia mecânica e é dada pela soma das energias cinética e potencial. Por exemplo, na equação da onda $u_{tt} - \Delta u + u_t = 0$ o termo u_t é um termo dissipativo que está relacionado com o Amortecimento. Por exemplo, uma

[1] Este termo é também conhecido na literatura com **Damping**.

fricção (ou atrito) que "consome" energia do sistema. Quando temos uma equação da onda com um termo de memória, por exemlo, $u_{tt} - \Delta u + g * \Delta u = 0$, o termo dado pela convolução $g * \Delta u$, que é um termo viscoelástico, indicando que o material tem uma memória, também dissipa, por si só, a energia do sistema. Se supusermos, por exemplo, que o núcleo g decai exponencialmente, consegue-se provar que a energia mecânica também decai exponencialmente. O grande problema é quando temos uma equação completa: $u_{tt} - \Delta u + g * \Delta u + u_t = 0$. Neste caso, são dois termos dissipando energia do sistema, fricção e o efeito memória. Por incrível que pareça eles disputam entre si quem rouba mais energia do sitema. Neste caso, dependendo do núcleo da memória, ou seja da função arbitre ser o núcleo, a energia $E(t)$ pode nunca decair. (Veja Aassila [1] e para maiores detalhes sobre este contraste veja Cavalcanti [11].)

Na realidade, Damping é qualquer efeito deliberadamente gerado ou inerente a um sistema que tende a reduzir a amplitude de oscilações de um sistema oscilatório. Em física e engenharia, Damping pode ser um modelo matemático como uma força síncrona com a velocidade do objeto; mas, em direção oposta. Para um exemplo simples de Damping em mecânica, a força F pode ser relacionada à velocidade V por $F = -cV$, onde c é o coeficiente damping de viscosidade dada em unidades de Newton-segundo por metro. Outro exemplo, ilustrativo: tocando instrumentos de corda como violão ou violino, Damping é o aquietamento ou silenciamento abrupto das cordas depois que elas foram soadas, apertando com a extremidade da palma, ou outras partes da mão como os dedos. (Veja *http://en.wikipedia.org/wiki/Damping* .)

Neste capítulo, assim, como no Capítulo 3, suponhamos que $-A$ seja o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico. Então, como vimos no Capítulo 1, o operador $-A + \delta I$ gerará um semigrupo analítico limitado, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Isto nos permite reduzir o caso geral, no qual $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico, para o caso onde o semigrupo é limitado e o gerador é invertível. Portanto, por conveniência e, sem perda de generalidade, assumimos que $T(t),\ t \geq 0$ é limitado em X e $0 \in \rho(-A)$. Desta forma, como vimos no Capítulo 1, para $0 \leq \alpha \leq 1$, A^α pode ser definido como um operador fechado com domínio denso em X. Lembramos também do Capítulo 1 que X^α o espaço de Banach $D(A^\alpha)$ munido com a norma $\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|$; a qual, é equivalente a norma do gráfico de A^α. Além disso, para $\alpha \geq \beta \geq 0$ $X^\alpha \hookrightarrow X^\beta$ e a imersão é contínua.

Consideramos (4.1), como um caso especial da seguinte equação em um espaço de Banach X :

$$u''(t) + (aA + bI)u'(t) + (cA + dI)u(t) = f(t, u(t), u'(t)), \ t > t_0, \tag{4.2}$$

$$u(t_0) = x_0 \text{ e } u'(t_0) = x_1.$$

Estudaremos o problema

$$\begin{cases} u''(t) + Au'(t) = f\big(t, u(t), u'(t)\big), \\ \quad u(t_0) = x_0 \quad u'(t_0) = x_1. \end{cases}, \tag{4.3}$$

onde os termos $bu'(t)$ e $\big(cA + dI\big)u(t)$ estão absorvidos pela função f, a qual, possui a seguinte hipótese: Se U for um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times X^1 \times X^\alpha$, então para cada $(t, x, \tilde{x}) \in U$, existirão uma vizinhança $V \subset U$ de $(t, x, \tilde{x})$ e constantes $L \geq 0$, $0 < \vartheta \leq 1$, tais que

$$\|f(t_1, x_1, \tilde{x}_1) - f(t_2, x_2, \tilde{x}_2)\| \leq L\Big[| t_1 - t_2|^\vartheta + \| x_1 - x_2\|_1 + \| \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2\|_\alpha,\Big] \tag{$\mathcal{F}$}$$

para todo $(t_i, x_i, \tilde{x}_i)$ em V.

Neste capítulo, estudamos a existência, unicidade e regularidade de soluções para o problema (4.3).

4.1 Definição de solução generalizada e clássica

Para motivar a nossa definição de solução generalizada, consideramos

$$v = u',$$

de onde segue que o problema (4.3) é equivalente ao seguinte sistema (acoplado)

$$\begin{cases} v'(t) + Av(t) = f\big(t, u(t), v(t)\big), \\ \qquad u'(t) = v(t), \\ \qquad v(t_0) = x_1, \\ \qquad u(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Pelas definições de solução generalizada para os problemas de valor inicial

$$\begin{cases} v'(t) + Av(t) = g(t), \\ v(t_0) = x_1; \end{cases} \tag{4.5}$$

com $g(t) := f\big(t, u(t), v(t)\big)$.

$$\begin{cases} u'(t) = v(t), \\ u(t_0) = x_0; \end{cases} \tag{4.6}$$

tem-se

$$\begin{cases} v(t) = T(t-t_0)x_1 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} T(t-s)g(s)ds \\ \\ u(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau. \end{cases} \tag{4.7}$$

Portanto,

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \left[T(\tau - t_0)x_1 + \int_{t_0}^{\tau} T(\tau - s)g(s)ds \right] d\tau;$$

i.e.,

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} T(\tau - t_0)x_1 \, d\tau + \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\tau} T(\tau - s)g(s)ds \, d\tau. \tag{4.8}$$

Sendo $-A$ o gerador infinitesimal de $T(t)$, segue pelo item **(c)** do Teorema C.10 que

$$-A\bigg(\int_{t_0}^{t} T(\tau - t_0)x_1 \, d\tau \bigg) = T(t-t_0)x_1 - x_1,$$

o que implica,

$$\int_{t_0}^{t} T(\tau - t_0)x_1 \, d\tau = (-A)^{-1}\big(T(t-t_0) - I\big)x_1. \tag{4.9}$$

Além disso, mudando a ordem de integração,

$$\int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\tau} T(\tau - s)g(s)dsd\tau = \int_{t_0}^{t} \bigg(\int_{s}^{t} T(\tau - s)d\tau \bigg) g(s) \, ds;$$

assim, fazendo a mudança de variáveis $x = \tau - s$ em $\displaystyle\int_{s}^{t} T(\tau - s)d\tau$, obtemos

$$\int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\tau} T(\tau - s)g(s)dsd\tau = \int_{t_0}^{t} \bigg(\int_{0}^{t-s} T(\tau)d\tau \bigg) g(s) \, ds = \int_{t_0}^{t} \bigg(\int_{0}^{t-s} T(\tau)g(s)d\tau \bigg) \, ds. \tag{4.10}$$

Novamente, pelo item **(c)** do Teorema C.10, segue que

$$-A\bigg(\int_{0}^{t-s} T(\tau)g(s) \, d\tau \bigg) = T(t-s)g(s) - g(s)$$

logo,

$$\int_0^{t-s} T(\tau)g(s)\,d\tau = (-A)^{-1}\big(T(t-s)-I\big)g(s);$$

assim, de (4.10),

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau} T(\tau-s)g(s)dsd\tau = \int_{t_0}^{t}(-A)^{-1}\big(T(t-s)-I\big)g(s)\,ds. \tag{4.11}$$

De (4.8), (4.9) e (4.11),

$$u(t) = x_0 + (-A)^{-1}\big(T(t-t_0)-I\big)x_1 + \int_{t_0}^{t}(-A)^{-1}\big(T(t-s)-I\big)g(s)\,ds.$$

Motivados pelo comentário acima, apresentamos, à seguir, a seguinte definição de solução generalizada para o problema (4.3).

Definição 4.1 *Uma solução local generalizada para* (4.3) *é uma função u que verifica*

$$u(t) = x_0 + \big(T(t-t_0)-I\big)\big(-A\big)^{-1}x_1 + \int_{t_0}^{t}\big(T(t-s)-I\big)\big(-A\big)^{-1}f\big(s,u(s),v(s)\big)\,ds$$

com

$$v(t) = T(t-t_0)x_1 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f\big(s,u(s),v(s)\big)\,ds$$

em $[t_0,t_1)$, *para algum* $t_1 > t_0$.

Apresentamos, à seguir, a definição de solução clássica para o problema (4.3).

Definição 4.2 *Uma solução local clássica de* (4.3) *é uma função*

$$u \in C^1\big([t_0,t_1):X\big)\cap C^2((t_0,t_1):X)$$

satisfazendo (4.3) *em* $[t_0,t_1)$ *para algum* $t_1 > t_0$, $u(t)\in D(A)$ *e* $u'\in D(A)$.

4.2 Existência Local

Sob as condições impostas na seção anterior apresentamos o seguinte teorema de existência e unicidade.

Teorema 4.3 *Suponha que o operador $-A$ gere um semigrupo analítico $T(t)$ com $\|T(t)\|\leq M$ e $0\in\rho(-A)$. Se a aplicação f satisfazer a condição $(\mathcal{F})$, o problema* (4.3) *terá uma única solução local clássica.*

Demonstração. Fixamos um ponto (t_0, x_0, x_1) em um subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^+ \times X^1 \times X^\alpha$ e escolhemos $t_1' > t_0$ e $\delta > 0$ tal que f verifique a condição $(\mathcal{F})$ com

$$V = \{(t, x, \tilde{x}) \in U : t_0 \leq t \leq t_1', \|x\|_1 + \|\tilde{x}\|_\alpha \leq 1 + \|x_0\|_1 + \|x_1\|_\alpha\}. \tag{4.12}$$

Seja

$$B = \sup_{t_0 \leq t \leq t_1'} \|f(t, x_0, x_1)\|$$

e $t_1 > t_0$ tal que

$$t_1 - t_0 < min\Big\{t_1' - t_0, \frac{1}{2}\{L\big[\delta + \xi(M+1)\big] + B\}^{-1}(M+1)^{-1}, \frac{1}{2}\big[C_\alpha^{-1}(1-\alpha)\{\big[\delta + \xi(M+1)\big]L + B\}^{-1}\big]^{\frac{1}{1-\alpha}}\Big\} \tag{4.13}$$

onde

$$\delta := 1 + 2(\|Ax_0\| + \|A^\alpha x_1\|)$$

$$\xi := \|x_1\| + \|A^\alpha x_1\|$$

e C_α é uma constante positiva dependente de α satisfazendo

$$\|A^\alpha T(t)\| \leq C_\alpha t^{-\alpha}, \qquad \text{para} \qquad t > 0. \tag{4.14}$$

Seja $\mathcal{Y}$ o espaço de Banach $C([t_0, t_1]; X \times X)$ munido da norma do supremo

$$\|\,(y_1, y_2)\,\|_{\mathcal{Y}} = \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \big[\|\,y_1(t)\| + \|\,y_2(t)\|\big]\,,$$

com $y_i \in C([t_0, t_1]; X), i = 1, 2$. (Veja Teorema D.14.) Definamos a aplicação

$$\begin{array}{cccccc} F & : & \mathcal{Y} & \rightarrow & \mathcal{E} = \{u : [t_0, t_1] \rightarrow X \times X \ ; \ u \quad \text{é uma função}\} & \\ & & (y_1, y_2) & \rightsquigarrow & F(y) : [t_0, t_1] \quad \rightarrow \quad X \times X & \\ & & & & \text{t} \quad \rightsquigarrow \quad (\hat{y}_1(t), \hat{y}_2(t)), & \end{array}$$

com $\hat{y}_1(t)$ e $\hat{y}_2(t)$ dadas por

$$\hat{y}_1(t) = Ax_0 - \big(T(t - t_0) - I\big)x_1 - \int_{t_0}^{t} \big(T(t - s) - I\big)f_y(s)\,ds$$

$$\hat{y}_2(t) = T(t - t_0)A^\alpha x_1 + \int_{t_0}^{t} T(t - s)A^\alpha f_y(s)\,ds$$

onde $f_(y)(t) = f\big(t, A^{-1}y_1(t), A^{-\alpha}y_2(t)\big)$. Claramente, para cada $y \in \mathcal{Y}$,

$$F_y(t_0) = (Ax_0, A^\alpha x_1).$$

Agora, $F(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}$; pois, $\hat{y}_1(\cdot)$ e $\hat{y}_2(\cdot)$ são contínuas. A justificativa de $\hat{y}_1(\cdot)$ e $\hat{y}_2(\cdot)$ serem contínuas é imediata, tendo em vista que as funções

$$g_1(t) = Ax_0 - \big(T(t-t_0) - I\big)x_1,$$

$$g_2(t) = \int_{t_0}^{t} \big(T(t-s) - I\big) f_y(s)\, ds,$$

$$g_3(t) = T(t-t_0)A^\alpha x_1,$$

$$g_4(t) = \int_{t_0}^{t} T(t-s)A^\alpha f_y(s)\, ds.$$

são contínuas para cada $g_i(\cdot), i = 1,2,3,4,$. Evidenciamos, apenas, que a continuidade de $g_i(\cdot), i = 1,3,$ segue pela propriedade (iii) da definição de semigrupo e pela limitação de $T(t)$; para a continuidade de $g_2(\cdot)$ faz-se uso do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e para a de $g_3(\cdot)$ usamos o Teorema da Convergência Dominada Generalizado de Lebesgue. Seja, agora,

$$\mathcal{Z} = \Big\{ y \in \mathcal{Y};\ y = (y_1, y_2),\ y_1(t_0) = Ax_0,\ y_2(t_0) = A^\alpha x_1,\ \|(y_1,y_2)\|_{\mathcal{Y}} \leq \tilde{K} \Big\}$$

com

$$\tilde{K} = 1 + \|Ax_0\| + (1+M)\|x_1\| + (1+M)\|A^\alpha x_1\|$$

Notemos,

(i) $\mathcal{Z} \neq \emptyset$; pois, $\tilde{y}(t) = \big(\tilde{y}_1(t), \tilde{y}_2(t)\big)$ com

$$\tilde{y}_1(t) = Ax_0 \quad \text{e} \quad \tilde{y}_2(t) = A^\alpha x_1$$

pertence a $\mathcal{Z}$.

(ii) $\mathcal{Z}$ é fechado. Com efeito, seja $\{y_n\} \subset \mathcal{Z}$ tal que $y_n \to y$ em $\mathcal{Y}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n(t_0) = (y_{n_1}(t_0), y_{n_2}(t_0)) = (Ax_0, A^\alpha x_1) \tag{4.15}$$

e

$$\|y_{n_1}(t)\| + \|y_{n_2}(t)\| \leq \tilde{K}. \tag{4.16}$$

Da convergência $y_n \to y$ em $\mathcal{Y}$, temos

$$y_n(t) \to y(t) \text{ em } X \times X, \quad \text{para cada } t \in [t_0, t_1];$$

em particular,

$$y_n(t_0) \to y(t_0).$$

Logo, passando ao limite em (4.15), obtemos

$$y(t_0) = \big(Ax_0, A^{\alpha}x_1\big)$$

e passando ao limite em (4.16) obtemos

$$\|y_1(t)\| + \|y_2(t)\| \leq \tilde{K}.$$

Donde segue que $y \in \mathcal{Z}$. Logo, $\mathcal{Z}$ é fechado em $\mathcal{Y}$. Assim, pelo Teorema (D.15), $(\mathcal{Z}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ é um espaço métrico completo. Agora, mostraremos que $F(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{Z}$. De fato, para $y \in \mathcal{Z}$ temos

$$\|\tilde{y_1}(t)\| \leq \underbrace{\|Ax_0\| + \|x_1\| + \|T(t-t_0)x_1\|}_{I_1} + \underbrace{\left\| \int_{t_0}^{t} \big(T(t-s) - I\big) f_y(s)\, ds \right\|}_{I_2}$$

e

$$\|\tilde{y_2}(t)\| \leq \underbrace{\|A^{\alpha}x_1\| + \|T(t-t_0)A^{\alpha}x_1\|}_{I_3} + \underbrace{\left\| \int_{t_0}^{t} T(t-s)A^{\alpha} f_y(s)\, ds \right\|}_{I_4}.$$

Iremos à seguir fazer um estudo em cada um dos termos $I_j, j = 1, 2, 3, 4$, apresentado acima.

Estudo para I_1: Temos

$$I_1 \leq \|Ax_0\| + \|x_1\| + \|T(t-t_0)\|\|x_1\| \ \leq \|Ax_0\| + \|x_1\| + M\|x_1\|;$$

i.e.,

$$I_1 \leq \|Ax_0\| + \big(1 + M\big)\|x_1\|. \tag{4.17}$$

Estudo para I_2: Temos,

$$I_2 \leq \int_{t_0}^{t_1} \big\| \big(T(t-s) - I\big) f\big(s, A^{-1}y_1(t), A^{-\alpha}y_2(t)\big) \big\|\, ds.$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_2 \leq & \int_{t_0}^{t_1} \big\| T(t-s)\big(f\big(s, A^{-1}y_1(t), A^{-\alpha}y_2(t)\big) - f(s, x_0, x_1)\big) ds \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \big\| - f\big(s, A^{-1}y_1(t), A^{-\alpha}y_2(t)\big) + f(s, x_0, x_1) \big\|\, ds \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \big\| T(t-s) f(s, x_0, x_1) - f(s, x_0, x_1) \big\|\, ds; \end{aligned}$$

logo, usando usando a condição $(\mathcal{F})$ e a limitação do semigrupo, obtemos

$$I_2 \leq LM\int_{t_0}^{t_1}\Big[\big\|A^{-1}y_1(t)-x_0\big\|_1+\|A^{-\alpha}y_2(t)-x_1\|_\alpha\Big]\,ds$$

$$+L\int_{t_0}^{t_1}\Big[\big\|A^{-1}y_1(t)-x_0\big\|_1+\|A^{-\alpha}y_2(t)-x_1\|_\alpha\Big]\,ds$$

$$+B\big(M+1\big)(t_1-t_0);$$

ou seja,

$$I_2 \leq LM\int_{t_0}^{t_1}\Big[\big\|A\big(A^{-1}y_1(t)-x_0\big)\big\|+\|A^{\alpha}\big(A^{-\alpha}y_2(t)-x_1\big)\|\Big]$$

$$+L\int_{t_0}^{t_1}\Big[\big\|A\big(A^{-1}y_1(t)-x_0\big)\big\|+\|A^{\alpha}\big(A^{-\alpha}y_2(t)-x_1\big)\|\Big]$$

$$+B\big(M+1\big)(t_1-t_0);$$

assim,

$$I_2 \leq LM\int_{t_0}^{t_1}\Big[\big\|y_1(t)-Ax_0\big\|+\|y_2(t)-A^{\alpha}x_1\|\Big]$$

$$+L\int_{t_0}^{t_1}\Big[\big\|y_1(t)-Ax_0\big\|+\|y_2(t)-A^{\alpha}x_1\|\Big](t_1-t_0)$$

$$+B\big(M+1\big)(t_1-t_0);$$

pela desigualdade triangular,

$$I_2 \leq LM\Big[\big\|(y_1,y_2)\big\|_Y+\big\|Ax_0\big\|+\|A^{\alpha}x_1\|\Big](t_1-t_0)$$

$$+L\Big[\big\|(y_1,y_2)\big\|_Y+\big\|Ax_0\big\|+\|A^{\alpha}x_1\|\Big](t_1-t_0)$$

$$+B\big(M+1\big)(t_1-t_0);$$

logo,

$$I_2 \leq LM\big[\tilde{K}+\|Ax_0\|+\|A^{\alpha}x_1\|\big](t_1-t_0)+L\big[\tilde{K}+\|Ax_0\|+\|A^{\alpha}x_1\|\big](t_1-t_0)+(M+1)B(t_1-t_0)$$

então

$$I_2 \leq LM\big[\delta+(1+M)(\|x_1\|+\|A^{\alpha}x_1\|)\big](t_1-t_0)$$

$$+L\big[\delta+(1+M)(\|x_1\|+\|A^{\alpha}x_1\|)\big](t_1-t_0)+$$

$$+B(M+1)(t_1-t_0)$$

donde,

$$I_2 \leq (t_1 - t_0)\big\{L\big[1 + 2\big(\|Ax_0\| + \|A^\alpha x_1\|\big) + \big(\|x_1\| + \|A^\alpha x_1\|\big)(M+1)\big] + B\big\}(M+1); \tag{4.18}$$

i.e.,

$$I_2 \leq (t_1 - t_0)\big\{L\big[\delta + \xi(M+1)\big] + B\big\}(M+1).$$

Estudo para I_3:

$$I_3 \leq \|A^\alpha x_1\| + M\|A^\alpha x_1\| \leq (M+1)\|A^\alpha x_1\|. \tag{4.19}$$

Estudo para I_4: Temos,

$$I_4 \leq \int_{t_0}^{t} \|A^\alpha T(t-s)\|\, \|f(s, A^{-1}y_1(t), A^{-\alpha}y_2(t)) - f(s, x_0, x_1)\|\, ds$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \|A^\alpha T(t-s)\|\|f(s, x_0, x_1)\|\, ds$$

Usando que A^α comuta com T, (4.14) e a condição $(\mathcal{F})$,

$$I_4 \leq C_\alpha L \int_{t_0}^{t_1} (t-s)^{-\alpha}\Bigg[\|y_1(t) - Ax_0\| + \|y_2(t) - A^\alpha x_1\|\Bigg]\, ds + BC_\alpha \int_{t_0}^{t_1} (t-s)^{-\alpha}\, ds$$

donde,

$$I_4 \leq \big[\delta + (M+1)\xi\big]C_\alpha L\big[(1-\alpha)^{-1}(t_1 - t_0)^{1-\alpha}\big] + BC_\alpha\big[(1-\alpha)^{-1}(t_1-t_0)^{1-\alpha}\big] \tag{4.20}$$

Com os estudos feitos para $I_j, j = 1, 2, 3, 4$, obtemos de (4.17), (4.18),(4.19) e de (4.20) que

$$\begin{aligned}\|\tilde{y}_1(t)\| + \|\tilde{y}_2(t)\| \leq\ & \|Ax_0\| + (1+M)\|x_1\| + (M+1)\|A^\alpha x_1\| \\ & + (t_1 - t_0)\big\{L\big[\delta + \xi(M+1)\big] + B\big\}(M+1) \\ & + C_\alpha(1-\alpha)^{-1}\big\{\big[\delta + (M+1)\xi\big]L + B\big\}(t_1 - t_0)^{1-\alpha}.\end{aligned}$$

donde, de (4.13),

$$\|\tilde{y}_1(t)\| + \|\tilde{y}_2(t)\| \leq \|Ax_0\| + (1+M)\|x_1\| + (M+1)\|A^\alpha x_1\| = \tilde{K};$$

logo, $F(y)(t) \in \mathcal{Z}$ e, portanto, $F(Z) \subset \mathcal{Z}$. No que segue vamos estar considerando $F : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ e iremos mostrar que F é uma contração. Dados $y = (y_1, y_2)$ e $z = (z_1, z_2)$ dois elementos de $\mathcal{Z}$, temos

$$\|(\hat{y}_1, \hat{y}_2) - (\hat{z}_1, \hat{z}_2)\|_{\mathcal{Y}} = \|(\hat{y}_1 - \hat{z}_1, \hat{y}_2 - \hat{z}_2)\|_{\mathcal{Y}} = \sup_{t_0 \le t \le t_1} \Big[\|(\hat{y}_1 - \hat{z}_1)(t)\| + \|(\hat{y}_2 - \hat{z}_2)(t)\| \Big];$$

ou seja,

$$\|F(y) - F_(z)\|_{\mathcal{Z}} = \sup_{t_0 \le t \le t_1} \Big[\|\hat{y}_1(t) - \hat{z}_1(t)\| + \|\hat{y}_2(t) - \hat{z}_2(t)\| \Big]. \tag{4.21}$$

Agora,

$$\|\hat{y}_1(t) - \hat{z}_1(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \big(T(t-s) - I\big) f_z(s)\, ds - \int_{t_0}^{t} \big(T(t-s) - I\big) f_y(s)\, ds \right\|;$$

logo,

$$\|\hat{y}_1(t) - \hat{z}_1(t)\| \le \int_{t_0}^{t} \|T(t-s) - I\|\, \|f_z(s) - f_y(s)\|\, ds. \tag{4.22}$$

Sendo,

$$\|f_z(s) - f_y(s)\| = \|f\big(s, A^{-1}z_1(s), A^{-\alpha}z_2(s)\big) - f\big(s, A^{-1}y_1(s), A^{-\alpha}y_2(s)\big)\|$$

e usando a condição $(\mathcal{F})$ e a limitação do semigrupo, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\hat{y}_1(t) - \hat{z}_1(t)\| &\le (M+1)L \int_{t_0}^{t} \Big[\|z_1(s) - y_1(s)\| + \|z_2(s) - y_2(s)\| \Big]\, ds \\
&\le (M+1)L \int_{t_0}^{t} \sup_{t_0 \le s \le t_1} \Big[\|z_1(s) - y_1(s)\| + \|z_2(s) - y_2(s)\| \Big]\, ds \\
&\le (M+1)L \int_{t_0}^{t} \|(z_1 - y_1, z_2 - y_2)\|_{\mathcal{Y}}\, ds;
\end{aligned}$$

assim,

$$\|\hat{y}_1(t) - \hat{z}_1(t)\| \le L(M+1)(t_1 - t_0)\|(z_1, z_2) - (y_1, y_2)\|_{\mathcal{Y}} \tag{4.23}$$

Também, usando (4.14) e a condição $(\mathcal{F})$, obtemos

$$\|\hat{y}_2(t) - \hat{z}_2(t)\| \le C_\alpha L \big[(1-\alpha)^{-1}(t_1 - t_0)^{1-\alpha}\big]\, \|(z_1, z_2) - (y_1, y_2)\|_{\mathcal{Z}}. \tag{4.24}$$

De (4.23),(4.24) e (4.13),

$$\|\hat{y}_1(t) - \hat{z}_1(t)\| + \|\hat{y}_2(t) - \hat{z}_2(t)\| < \|(z_1, z_2) - (y_1, y_2)\|_{\mathcal{Z}};$$

e, consequentemente, de (4.21), $F : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ é uma contração. Portanto, pelo TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH (Teorema D.16), existe um único

$$\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in \mathcal{Z} \quad \text{tal que} \quad F(\bar{y}) = \bar{y}$$

(isto é, $F(\bar{y}_1, \bar{y}_1) = (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$). Assim,

$$\bar{y}_1(t) = Ax_0 - \big(T(t-t_0) - I\big)x_1 - \int_{t_0}^{t} \big(T(t-s) - I\big) f_{\bar{y}}(s)\, ds$$

e

$$\bar{y}_2(t) = T(t-t_0)A^{\alpha}x_1 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)A^{\alpha} f_{\bar{y}}(s)\, ds,$$

onde, $f_{\bar{y}}(t) = f\big(t, A^{-1}\bar{y}_1(t), A^{-\alpha}\bar{y}_2(t)\big)$. Definindo

$$(\bar{u}, \bar{v}) = (A^{-1}\bar{y}_1, A^{-\alpha}\bar{y}_2),$$

temos,

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) &= A^{-1}\bar{y}_1(t) \\ &= A^{-1}\Big(Ax_0 - \big(T(t-t_0) - I\big)x_1 - \int_{t_0}^{t} \big(T(t-s) - I\big) f_{\bar{y}}(s)\, ds\Big). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{v}(t) &= A^{-\alpha}\bar{y}_2(t) \\ &= A^{-\alpha}\Big(T(t-t_0)A^{\alpha}x_1 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)A^{\alpha} f_{\bar{y}}(s)\, ds\Big); \end{aligned}$$

logo, usando o fato que $T(t)$ comuta com A^{α} (item (b) do Teorema 1.15) e o item (iv) do Teorema (A.2) temos

$$\bar{u}(t) = x_0 - \big(T(t-t_0) - I\big)A^{-1}x_1 - \int_{t_0}^{t} \big(T(t-s) - I\big)A^{-1} f_{\bar{y}}(s)\, ds;$$

i.e.,

$$\bar{u}(t) = x_0 + \big(T(t-t_0) - I\big)(-A)^{-1}x_1 + \int_{t_0}^{t} \big(T(t-s) - I\big)(-A)^{-1} f\big(s, \bar{u}(s), \bar{v}(s)\big)\, ds; \quad (4.25)$$

com

$$\bar{v}(t) = T(t-t_0)x_1 + \int_{t_0}^{t} T(t-s) f\big(s, \bar{u}(s), \bar{v}(s)\big)\, ds \quad (4.26)$$

Assim, (4.25) é a solução generalizada de (4.3). Sabendo que f satisfaz a condição $(\mathcal{F})$ e que $\bar{y}_1$ e $\bar{y}_2$ são contínuas em $[t_0, t_1]$, segue que a função

$$t \to f_{\bar{y}}(t) \quad \text{é contínua em } [t_0, t_1]$$

e, por conseguinte, limitada em $[t_0, t_1]$; o que implica, na existência de um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_{\bar{y}}(t)\| = \|f\big(t, A^{-1}\bar{y}_1(t), A^{-\alpha}\bar{y}_2(t)\big)\| \leq N, \quad \forall\, t \in [t_0, t_1]. \tag{4.27}$$

Neste momento, mostraremos que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{v}}{dt}(t) + A\tilde{v}(t) = f_{\bar{y}}(t), & t > t_0 \\ \tilde{v}(t_0) = x_1, \end{cases} \tag{4.28}$$

possui uma única solução clássica. Para isto, usaremos o Teorema G.6 (Observação G.7.). Precisamos mostrar apenas que $t \to f_{\bar{y}}(t)$ é localmente Hölder contínua em $(t_0, t_1]$. Primeiro mostraremos que $\bar{y}_1$ e $\bar{y}_2$ são localmente Hölder contínuas em $(t_0, t_1]$. Pelo Teorema 1.14,

$$A^\alpha T(t-s) \in D(A^\alpha) \subset D(A^\beta), \quad \text{para } \alpha \geq \beta;$$

então, pelo Teorema 1.15 (item **(d)**), para cada $0 < \beta < 1 - \alpha$ e para todo $0 < w < 1$, temos

$$\|T(w)A^\alpha T(t-s) - A^\alpha T(t-s)\| \leq C_\beta w^\beta \|A^\beta A^\alpha T(t-s)\|$$

então pelo Teorema 1.14 (item **(d)**),

$$\|T(w)A^\alpha T(t-s) - A^\alpha T(t-s)\| \leq C_\beta w^\beta \|A^{\beta+\alpha} T(t-s)\|,$$

para cada $T(t-s) \in D(A^\gamma)$, onde $\gamma = max\{\alpha, \beta, \alpha+\beta\}$. Logo, do item **(c)** do Teorema 1.15, para cada $t > s$ existe $C_{\beta+\alpha} > 0$ tal que

$$\|T(w)A^\alpha T(t-s) - A^\alpha T(t-s)\| \leq C_\beta w^\beta C_{\beta+\alpha}(t-s)^{-(\alpha+\beta)};$$

assim,

$$\|T(w)A^\alpha T(t-s) - A^\alpha T(t-s)\| \leq \tilde{C} w^\beta (t-s)^{-(\alpha+\beta)}, \tag{4.29}$$

com $\tilde{C} = C_\beta C_{\beta+\alpha}$. Notemos, se $t_0 < t < t + w \leq t_1$,

$$\begin{aligned} \|\bar{y}_2(t+w) - \bar{y}_2(t)\| \leq{}& \underbrace{\|T(w)T(t-t_0)A^\alpha x_1 - T(t-t_0)A^\alpha x_1\|}_{I_5} \\ &+ \underbrace{\int_{t_0}^{t} \|T(w)T(t-s)A^\alpha f_{\bar{y}}(s) - T(t-s)A^\alpha f_{\bar{y}}(s)\|\, ds}_{I_6} \\ &+ \underbrace{\int_{t}^{t+w} \|T(t+w-s)A^\alpha f_{\bar{y}}(s)\|\, ds}_{I_7} \end{aligned}$$

À seguir vamos fazer um estudo para os termos $I_j, j = 5, 6, 7$, apresentados acima.

Estudo para I_5: Temos,

$$I_5 \leq \|T(w)A^\alpha T(t-t_0) - T(t-t_0)A^\alpha\| \, \|x_1\| \overbrace{\leq}^{4.29} \underbrace{\tilde{C}(t-t_0)^{-(\alpha+\beta)}\|x_1\|}_{M_1=M_1(t)} w^\beta,$$

ou seja,

$$I_5 \leq M_1 w^\beta. \tag{4.30}$$

Agora, se $t \to t_0$ temos $M_1 \to \infty$. Considerando, $t_0 < t_1{}' \leq t \leq T_0$ temos $M_1 < \infty$.

Estudo para I_6: Vejamos,

$$I_6 \leq \int_{t_0}^{t} \|T(w)A^\alpha T(t-s) - A^\alpha T(t-s)\| \, \|f_{\bar{y}}(s)\| \overbrace{\leq}^{(4.27) \text{ e } (4.29)} \tilde{C}Nw^\beta \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-(\alpha+\beta)} \, ds.$$

Resolvendo a integral o segundo membro da desigualdade acima, obtemos

$$I_6 \leq \tilde{C}Nw^\beta (1-(\alpha+\beta))^{-1}(t-t_0)^{1-(\alpha+\beta)}.$$

Sendo $\alpha + \beta < 1$ temos

$$I_6 \leq \underbrace{\tilde{C}N(1-(\alpha+\beta))^{-1}(t_1-t_0)^{1-(\alpha+\beta)}}_{M_2} w^\beta.$$

Logo,

$$I_6 \leq M_2 w^\beta \tag{4.31}$$

onde M_2 independe de t.

Estudo para I_7: Temos

$$I_7 \leq \int_{t}^{t+w} \|A^\alpha T(t+w-s)\| \, \|f_{\bar{y}}(s)\| \, ds$$

Pelo Teorema (1.15) (item **(c)**) e de (4.27) segue que

$$I_7 \leq C_\alpha N \int_{t}^{t+w} (t+w-s)^{-\alpha} \, ds.$$

ou ainda,

$$I_7 \leq \underbrace{\frac{C_\alpha M}{1-\alpha}}_{M_3} w^{1-\alpha}.$$

Sendo $0 < w < 1$ e $\beta < 1 - \alpha$ concluímos

$$I_7 \leq M_3 w^\beta \tag{4.32}$$

com M_3 independente de t.

Fazendo uso dos estudos para $I_j, j = 5, 6, 7$, temos das estimativas (4.30), (4.31) e (4.32) que

$$\|\bar{y}_2(t+w) - \bar{y}_2(t)\| \leq \underbrace{(M_1 + M_2 + M_3)}_{\hat{C}} w^{\beta} \tag{4.33}$$

Daí, fazendo $s = t + h$ em (4.33) com $t_0 < {t_0}' \leq t, s \leq t_1$, obtemos

$$\|\bar{y}_2(s) - \bar{y}_2(t)\| \leq \hat{C}|s-t|^{\beta}$$

mostrando que a função $\bar{y}_2$ é localmente Hölder contínua em $(t_0, t_1]$. Similarmente, segue que $\bar{y}_1$ é localmente Hölder contínua em $(t_0, t_1]$(basta fazermos $\alpha = 0$ em considerações anteriores). Consequêntemente, por $(\mathcal{F})$,

$$\|f_{\bar{y}}(s) - f_{\bar{y}}(t)\| = \|f(s, A^{-1}\bar{y}_1(s), A^{-\alpha}\bar{y}_2(s)) - f(t, A^{-1}\bar{y}_1(t), A^{-\alpha}\bar{y}_2(t))\|$$

$$\leq L\Big[|\,s-t|^{\vartheta} + \|\,\bar{y}_1(s) - \bar{y}_1(t)\| + \|\,\bar{y}_2(s) - \bar{y}_2(t)\|\Big]$$

$$\leq \hat{L}\Big[|\,s-t|^{\vartheta} + |\,s-t|^{\beta} + |\,s-t|^{\beta}\Big].$$

Considerando $\gamma = \min\{\vartheta, \beta\}$, obtemos

$$\|f_{\bar{y}}(s) - f_{\bar{y}}(t)\| \leq \tilde{L}|s-t|^{\gamma};$$

mostrando que $t \to f_{\bar{y}}(t)$ é localmente Hölder contínua em $(t_0, t_1]$. Assim, pelo Teorema G.6 o problema (4.28) tem uma única solução clássica $\tilde{v}$, dada por

$$\tilde{v}(t) = T(t-t_0)x_1 + \int_{t_0}^{t} T(t-s) f_{\bar{y}}(s)\, ds \tag{4.34}$$

Para cada $t > t_0$, cada termo do lado direito de (4.34) pertence a $D(A)$ e, conseqüentemente, pertence a $D(A^{\alpha})$. Aplicando A^{α} em ambos os lados de (4.34), usando o fato de A^{α} comutar com $T(t)$, para todo $t \geq 0$, (item **(b)** do Teorema 1.15), a continuidade da função $s \to T(t-s)f_{\bar{y}}(s)$, o fato de $A^{\alpha} : X^{\alpha} \to X$ ser linear contínua e o Teorema A.2 (item (iv)), obtemos

$$A^{\alpha}\tilde{v}(t) = T(t-t_0)A^{\alpha}x_1 + \int_{t_0}^{t} A^{\alpha}T(t-s) f_{\bar{y}}(s)\, ds,$$

isto é,

$$A^{\alpha}\tilde{v}(t) = \bar{y}_2(t) = A^{\alpha}\bar{v}(t); \qquad \text{(Ver página 147.)}$$

donde, da injetividade de A^{α},

$$\tilde{v}(t) = \bar{v}(t); \tag{4.35}$$

Além disso, o problema

$$\begin{cases} \tilde{u}\,'(t) = \bar{v}(t) \\ \tilde{u}(t_0) = x_0, \end{cases}$$

possui uma solução clássica dada por

$$\tilde{u}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \bar{v}(\tau)\, d\tau. \tag{4.36}$$

Para cada $t > t_0$, o lado direito de (4.36) pertence a $D(A)$. Aplicando A em ambos os lados de (4.36) temos,

$$A\tilde{u}(t) = Ax_0 + A\bigg(\int_{t_0}^{t} \bar{v}(\tau)d\tau\bigg),$$

logo, de (4.35) e (4.34),

$$A\tilde{u}(t) = Ax_0 + A\bigg(\int_{t_0}^{t} \bigg[T(\tau - t_0)x_1 + \int_{t_0}^{\tau} T(\tau - s)f_{\bar{y}}(s)\, ds\bigg] d\tau\bigg);$$

ou seja,

$$A\tilde{u}(t) = Ax_0 + A\bigg(\int_{t_0}^{t} T(\tau - t_0)x_1 d\tau\bigg) + A\bigg(\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau} T(\tau - s)f_{\bar{y}}(s)\, ds d\tau\bigg). \tag{4.37}$$

Pelo item **(c)** do Teorema (C.10),

$$\int_{t_0}^{t} T(\tau - t_0)x_1\, d\tau = \int_{0}^{t-t_0} T(x)x_1\, dx = (-A)^{-1}(T(t-t_0) - I)x_1;$$

logo,

$$A\bigg(\int_{t_0}^{t} T(\tau - t_0)x_1\, d\tau\bigg) = (T(t-t_0) - I)x_1. \tag{4.38}$$

Novamente, pelo item **(c)** do Teorema (C.10), com a mesma idéia usada para obter (4.11), temos

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau} T(\tau - s)g(s)ds d\tau = \int_{t_0}^{t} (-A)^{-1}\big(T(t-s) - I\big)f_{\bar{y}}(s)\, ds. \tag{4.39}$$

Assim, de (4.37), (4.38) e (4.39),

$$A\tilde{u}(t) = \bar{y}_1(t) = A\bar{u}(t);$$

logo, da injetividade de A,

$$\tilde{u}(t) = \bar{u}(t). \tag{4.40}$$

Portanto, de (4.39) e (4.35), $\bar{u}$ dada por

$$\bar{u}(t) = x_0 + \big(T(t-t_0) - I\big)(-A)^{-1}x_1 + \int_{t_0}^{t} \big(T(t-s) - I\big)(-A)^{-1}x_1 f_{\bar{y}} ds$$

com

$$\bar{v}(t) = T(t-t_0)x_1 + \int_{t_0}^{t} T(t-s) f_{\bar{y}}(s)\, ds$$

é uma solução clássica para (4.3). Isto completa a prova do Teorema 4.3. ■

4.3 Existência Global

Estabelecemos a existência global do Problema (4.3) com o seguinte Teorema.

Teorema 4.3.1 *Seja $-A$ o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $T(t)$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq M$ para $t \geq t_0$, $0 \in \rho(-A)$, e $f : [t_0, \infty) \times X_1 \times X_\alpha \to X$ verificando a condição $(\mathcal{F})$. Se existir uma função contínua não-decrescentes $k : [t_0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que:*

$$\|f(t, x, \tilde{x})\| \leq k(t)(1 + \|x\|_1 + \|\tilde{x}\|_\alpha) \text{ para } t \geq t_0,\ (x, \tilde{x}) \in X_1 \times X_\alpha, \tag{4.41}$$

então o problema de valor inicial (4.3) *terá uma única solução clássica em* $[t_0, \infty)$ *para todo* $(x_0, x_1) \in X_\alpha \times X_\alpha$.

Demonstração. Observamos inicialmente, que podemos transformar o problema (4.4) no seguinte sistema

$$\begin{cases} U + \hat{A}U'(t) = F(t, U) \\ U(0) = (x_1, x_0), \end{cases} \tag{4.42}$$

com

$$U = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}, \hat{A}U = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } F(t, u, v) = \begin{pmatrix} f(t, u, v) \\ v \end{pmatrix}.$$

Assim, análogo a teoria já estudada no Capítulo 2, segue que (4.42) admite única solução local definida em um intervalo maximal $[0; T_{max})$ e ainda, se $T_{max} < \infty$ então

$$\lim_{t \to T_{max}} \|U(t)\|_{X_1 \times X_\alpha} = \infty.$$

ou seja,

$$\lim_{t \to T_{max}} \big[\|u\|_1 + \|v\|_\alpha\big] = \infty.$$

Seja $[t_0, T_{max})$ o intervalo maximal de existência para a solução clássica u de (4.3), garantida pelo Teorema 4.3. Mostraremos que tal solução é global, para isto, diante do que observamos acima, é suficiente mostrar que esta solução é limitada em $X_1 \times X_\alpha$, i.e., existe $C > 0$ tal que

$$\big[\|u(t)\|_1 + \|v(t)\|_\alpha\big] \leq C \quad \text{em } [t_0, T_{max}). \tag{4.43}$$

Seja $\bar{f}(t) = f\big(t, u(t), u'(t)\big)$ para $t \in [t_0, T_{max})$. Pelo Teorema 4.3, temos

$$Au(t) = Ax_0 + A\big(T(t-t_0) - I\big)(-A)^{-1}x_1 - A\int_{t_0}^{t} \big(T(t-s) - I\big)(-A)^{-1}\bar{f}(s)\, ds$$

e

$$A^\alpha u'(t) = A^\alpha T(t-t_0)x_1 + A^\alpha \int_{t_0}^{t} T(t-s)\bar{f}(s)\, ds;$$

ou seja,

$$Au(t) = Ax_0 - \big(T(t-t_0) - I\big)x_1 - \int_{t_0}^{t} \big(T(t-s) - I\big)\bar{f}(s)\, ds$$

e

$$A^\alpha u'(t) = T(t-t_0)A^\alpha x_1 + \int_{t_0}^{t} A^\alpha T(t-s)\bar{f}(s)\, ds. \tag{4.44}$$

Fazendo uso do fato que $T(t)$ comuta com A^α e que

$$\|T(t)\| \leq M,$$

$$\|A^\alpha T(t)\| \leq C_\alpha t^{-\alpha}, \quad \forall\, t \geq t_0,$$

segue de (4.44) que

$$\|u'(t)\|_\alpha = \|A^\alpha u'(t)\| \leq M\|A^\alpha x_1\| + C_\alpha \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} k(s)\, \big[1 + \|u(s)\|_1 + \|u'(s)\|_\alpha\big]\, ds;$$

logo, sendo k não decrescente,

$$\|u'(t)\|_\alpha \leq \underbrace{M\|A^\alpha x_1\|}_{c_1} + \underbrace{C_\alpha k(T)}_{c_2} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha}\big[1 + \|u(s)\|_1\, ds + \|u'(s)\|_\alpha\big]\, ds. \tag{4.45}$$

Por outro lado,

$$\|u(t)\|_1 = \|Au(t)\| \leq \|Ax_0\| + \|\big(T(t-t_0) - I\big)x_1\| + \int_{t_0}^{t} \|T(t-s) - I\|\, \|\bar{f}(s)\|;$$

logo, usando o fato que os operadores $T(t)$, $t \geq 0$ e o operador identidade são limitados e (4.41),

$$\|u(t)\|_1 \leq c_3 + c_4 \int_{t_0}^{t} \big[1 + \|u(s)\|_1 + \|u'(s)\|_\alpha\big]\, ds. \tag{4.46}$$

Considerando $\beta < 1$ de tal forma que $\beta - 1 = -\alpha$ de (4.45) e (4.46) segue que

$$\begin{aligned}\left[1 + \|u(t)\|_1 + \|u'(t)\|_\alpha\right] \leq c_5 + c_4 \int_{t_0}^{t} \left[1 + \|u'(s)\|_1 + \|u'(s)\|_\alpha\right] ds \\ + c_2 \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\beta - 1} \left[1 + \|u(s)\|_1 + \|u'(s)\|_\alpha\right] ds.\end{aligned}$$

Aplicando o Lema D.1 temos

$$\left[1 + \|u(s)\|_1 + \|u'(s)\|_\alpha\right] \leq c_6;$$

e, portanto,

$$\|u(s)\|_1 + \|u'(s)\|_\alpha \leq 1 + c_6 = C,$$

mostrando (4.43). ∎

Apêndice A

Operadores Lineares e Cálculo de Funções Vetoriais

Neste apêndice, colecionamos alguns resultados básicos sobre operadores lineares em espaços de Banach X e sobre cálculos para funções definidas em um intervalo real (ou, em um conjunto aberto em $\mathbb{C}$) com valores em X. Esses resultados são assumidos conhecidos pelo leitor, ou ao menos não supreendido de todo, pois eles seguem totalmente semelhante a teoria em dimensão finita.

Seja Xum espaço de Banach com norma $\| \cdot \|$. Denotamos por $L(X)$ a álgebra de Banach de operadores lineares limitados $T : X \to X$, munida com a norma

$$\| T\|_{L(X)} = \sup_{x \in X \,:\, \| x \| = 1} \| Tx\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\| Tx\|}{\| x\|}.$$

Não havendo dúvidas, pode-se escrever $\| T\|$ ao invés de $\| T\|_{L(X)}$.

Similarmente, se Y é um outro espaço de Banach, denotamos por $L(X, Y)$ o espaço de Banach de operadores lineares limitados $T : X \to Y$, munido com a norma

$$\| T\|_{L(X,Y)} = \sup_{x \in X \,:\, \| x \| = 1} \| Tx\|_Y.$$

Se $D(A)$ é um subespaço vetorial de X e $A : D(A) \to X$ é linear, dizemos que A é fechado se o gráfico de A, dado por

$$G(A) = \{(x, y) \in X \times X : x \in D(A), y = Ax\}$$

é um subespaço fechado de $X \times X$. De modo equivalente, A é fechado se, e somente se, a seguinte implicação acontece:

$$x_n \subset D(A), x_n \to x, Ax_n \to y \Rightarrow x \in D(A), y = Ax.$$

Se $A : D(A) \subset X \to Y$ é um operador fechado, munimos $D(A)$ com a norma do gráfico

$$\| x\|_{D(A)} = \| x\|_X + \|Ax\|_Y.$$

Lema A.1 *Sejam X, Y dois espaços de Banach. Seja D um subespaço de X, e seja $\{A_n\}_{n\geq 0}$ uma sequência de operadores lineares limitados de X em Y tal que*

$$\|A_n\| \leq M, n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} A_n x = A_0 x, \quad x \in D.$$

Então,

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = A_0 x, \quad x \in \overline{D}, \tag{A.1}$$

onde $\overline{D}$ é o fecho de D em X.

Demonstração. Sejam $x \in \overline{D}$ e $\varepsilon > 0$ dado. Para $y \in D$ com $\|x - y\| \leq \varepsilon$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\|A_n x - A_0 x\| \leq \|A_n(x - y)\| + \|A_n y - A_0 y\| + \|A_0(y - x)\|.$$

Se n_0 é tal que $\|A_n y - A_0 y\| \leq \varepsilon$ para todo $n > n_0$, temos

$$\|A_n x - A_0 x\| \leq M\varepsilon + \varepsilon + \|A_0\|\varepsilon, \quad \forall\ n \geq n_0;$$

de onde segue o limite (A.1). ■

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Denotamos por $C(I; X)$ o espaço vetorial das funções contínuas $u : I \to X$, e por $B(I; X)$ o espaço da funções limitadas, munidos com a norma do supremo

$$\|u\|_\infty = \sup_{t\in I} \|u(t)\|.$$

Também consideramos $C_b(I; X) = C(I; X) \cap B(I; X)$. A definição de derivada é extendida para a presente situação: uma função $f \in C(I; X)$ é diferenciável em um ponto interior $t_0 \in I$ se existe o seguinte limite,

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Como usual, o limite é denotado por $f'(t_0)$ e é chamado derivada de f em t_0. Em análogia à teoria em dimensão finita, podemos definir derivadas à direita e à esquerda.

Para todo $k \in \mathbb{N}$ (resp., $k = \infty$), $C^k(I; X)$ denota o espaço das funções definidas em I com valores em X, com derivada contínua em I até a ordem k (resp., de qualquer ordem). Escrevemos $C_b^k(I; X)$ para denotar o espaço de todas as funções $f \in C^k(I; X)$, as quais são limitadas em I junto com suas derivadas até ordem k.

Vamos definir a integral de Riemann para uma função de variável real com valores em X.

Seja $f : [a, b] \to X$ uma função limitada. Dizemos que f é integrável em $[a, b]$ se existir um $x \in X$ com a seguinte propriedade: dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para toda partição

$$P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\} \quad \text{de } [a, b]$$

com $t_i - t_{i-1} < \delta$ para todo i, e para qualquer escolha de pontos $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ temos

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \right\| < \varepsilon.$$

Neste caso, escrevemos

$$x = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Exemplo 1 *Seja $f : [a, b] \to X$ uma função contínua, então f é integrável em $[a, b]$. (Veja Lang [21].)*

Proposição A.2 *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $f, g \in B([a, b], X)$ integráveis. Então*

(i) $\displaystyle\int_a^b \big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big)\, dt = \alpha\bigg(\int_a^b f(t)\, dt\bigg) + \beta\bigg(\int_a^b g(t)\, dt\bigg);$

(ii) $\displaystyle\left\| \int_a^b f(t)\, dt \right\| \leq \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|(b - a);$

(iii) $\displaystyle\left\| \int_a^b f(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\, dt;$

(iv) se $A \in L(X, Y)$, então

Af é integrável com valores em Y

e

$$\int_a^b Af(t)\, dt = A\bigg(\int_a^b f(t)\, dt\bigg);$$

(v) se (f_n) for uma sequência de funções contínuas e existir uma função f tal que

$$\lim_{n \to \infty} \max_{t \in [a,b]} \|f_n(t) - f(t)\| = 0,$$

então

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Demonstração. Segue imediata da definição anterior. Para maiores detalhes, quando f for contínua, veja [24] e [29].

Também é fácil de generalizar à situação presente o Teorema Fundamental de Cálculo. A demonstração é análoga para o caso de funções à valores reais. Maiores detalhes para esta demonstração e para a demonstração do Corolário A.4, à seguir, podem ser encontrados em Lang [21].

Teorema A.3 *(TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO) Sejam $f : [a,b] \to X$ uma função contínua e $F : [a,b] \to X$ uma função diferenciável em $[a,b]$ com $F' = f$. Então*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Corolário A.4 *Seja $f : [a,b] \to X$ contínua. Então a função integrável*

$$F(t) = \int_a^t f(s)\, ds$$

é diferenciável, e $F'(t) = f(t)$, para todo $t \in [a,b]$.

Integrais impróprias de funções não limitadas, ou em intervalos não limitados são definidas como no caso de funções à valores reais. Mais precisamente, se $I = (a,b)$ é um intervalo (possivelmente ilimitado) e $f : I \to X$ é integrável em cada intervalo compacto contido em I, então a integral imprópria de f em (a,b) é definida como

$$\int_a^b f(t)\, dt := \lim_{r \to a^+,\ s \to b^-} \int_r^s f(t)\, dt,$$

contanto que o limite exista em X. As afirmações (i) e (iv) de Proposição A.2 ainda seguem para integrais impróprias. A afirmação (iv) também pode ser vista para operadores fechados, como segue.

Lema A.5 *Sejam* $A : D(A) \subset X \to X$ *um operador fechado e* I *um intervalo real com* $\inf I = a$, $\sup I = b\,(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$. *Seja* $f : I \to D(A)$ *tal que as funções* $t \to f(t)$, $t \to Af(t)$ *sejam integráveis em* I. *Então,*

$$\int_a^b f(t)\,dt \in D(A) \quad e \quad A\Big(\int_a^b f(t)\,dt\Big) = \int_a^b Af(t)\,dt.$$

Demonstração. Inicialmente, assumimos que I é compacto. Seja

$$x = \int_a^b f(t)\,dt$$

e escolha a seqüência

$$P_k = \{a = t_0^k < ... < t_{n_k}^k = b\}$$

de partições em $[a, b]$ tal que

$$\max_{i=1,\dots,n_k} (t_i^k - t_{i-1}^k) < 1/k.$$

Seja $\xi_i^k \in [t_i^k, t_{i-1}^k]$ para $i = 0, ..., n_k$ e considere a soma

$$S_k = \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Assim,

$$S_k \in D(A)$$

e

$$AS_k = \sum_{i=1}^{n_k} Af(\xi_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Sendo, ambos, f e Af integráveis,

$$S_k \text{ tende para } x = \int_a^b f(t)\,dt$$

e

$$AS_k \text{ tende para } y := \int_a^b Af(t)\,dt.$$

Sendo A fechado,

$$x \in D(A) \text{ e } Ax = y.$$

Agora, se I é ilimitado , digamos $I = [a, \infty)$; então, para todo $b > a$ segue a igualdade

$$A\Big(\int_a^b f(t)\,dt\Big) = \int_a^b Af(t)\,dt.$$

Por hipótese,

$$\int_a^b Af(t)\,dt \to \int_a^\infty Af(t)\,dt$$

e

$$\int_a^b f(t)\,dt \to \int_a^\infty f(t)\,dt$$

quando $b \to \infty$; conseqüentemente,

$$A\Big(\int_a^b f(t)\,dt\Big) \to \int_a^\infty Af(t)\,dt$$

e o resultado segue, já que A é fechado. ■

Agora, revisamos alguns fatos básicos que nos interessam sobre funções à valores vetoriais de uma variável complexa.

Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to X$ uma função contínua e $\gamma = \{h(t); h : [a,b] \to \Omega\}$ uma curva de classe C^1 por partes. A integral de f ao longo de γ é definida por

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f\big(h(t)\big)h'(t)\,dt.$$

Consideramos Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to X$ uma função contínua. Como usual, denotamos por X' o espaço dual de X, consistindo de todos os operadores lineares de X em $\mathbb{C}$. Para cada $x \in X$, $x' \in X'$, fixamos $x'(x) = \langle x, x' \rangle$.

Definição A.6 *Dizemos que f é* **holomorfa** *(ou analítica) em Ω se para cada $z_0 \in \Omega$ o limite*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} := f'(z_0)$$

existe em X. Dizemos que f é **fracamente holomorfa** *se f é contínua em Ω e a função à valores complexos $z \to \langle f(z), x' \rangle$ é holomorfa em Ω, para todo $x' \in X'$.*

Claramente, uma função holomorfa é fracamente holomorfa. O Teorema a seguir mostra que a recíproca também é verdade.

Teorema A.7 *Seja $f : \Omega \to X$ uma função fracamente holomorfa. Então f é holomorfa.*

Demonstração. Seja $\overline{B(z_0, r)}$ uma bola fechada contida em Ω. Mostraremos que para todo $z \in B(z_0, r)$, vale a seguinte *Fórmula da integral de Cauchy*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi. \tag{A.2}$$

Em primeiro lugar, observamos que o lado direito de (A.2) está bem definido, porque f é contínua. Sendo f fracamente holomorfa em Ω a função à valores complexos

$$z \to \langle f(z), x' \rangle \quad \text{é holomorfa em } \Omega, \quad \text{para todo } x' \in X'$$

e, conseqüentemente

$$\langle f(z), x' \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{\langle f(\xi), x' \rangle}{\xi - z} \, d\xi = \left\langle \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi, x' \right\rangle.$$

Sendo $x' \in X'$ arbitrário , obtemos (A.2). Podemos diferenciar com respeito a z sobre o sinal de integração, de forma que f é holomorfa e

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, d\xi \tag{A.3}$$

para todo $z \in B(z_0, r)$ e $n \in N$. ■

Definição A.8 *Considere uma função $f : \Omega \to X$ uma função à valores vetoriais. Dizemos que f admite uma* **expansão em série de potências** *em torno de um ponto $z_0 \in \Omega$ se existir uma seqüência (a_n) de elementos de X e um número real $r > 0$ tal que*

$$B(z_0, r) \subset \Omega$$

e

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B(z_0, r).$$

Teorema A.9 *Seja $f : \Omega \to X$ uma função contínua. Então f será holomorfa se, e somente se, f possuir uma expansão em série de potênciaa em torno de todo ponto de Ω.*

Demonstração. Assuma que f é holomorfa em Ω. Então, se $z_0 \in \Omega$ e $B(z_0, r) \subset \Omega$, a fórmula da integral de Cauchy (A.2) vale para todo $z \in B(z_0, r)$. Fixe $z \in B(z_0, r)$ e observe que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} = \frac{1}{\xi - z}$$

converge uniformemente para ξ em $\partial B(z_0, r)$, já que $\big|(z-z_0)/(\xi-z_0)\big| = r^{-1}|z-z_0|$. Conseqüentemente, por (A.2) e pela Proposição A.2(v), obtemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,r)} f(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,\,r)}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi\right](z-z_0)^n, \end{aligned}$$

a qual é convergente em X. Reciprocamente, suponha que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z \in B(z_0,\, r),$$

onde (a_n) é uma seqüência com valores em X. Então f é contínua, e para cada $x' \in X'$,

$$\big\langle f(z), x'\big\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\big\langle a_n, x'\big\rangle (z-z_0)^n, \quad z \in B(z_0,\, r).$$

Isto implica, que a função a valores complexos $z \to \big\langle f(z), x'\big\rangle$ é holomorfa em $B(z_0,\, r)$ para todo $x' \in X'$ e, por conseguinte, f é holomorfa pelo Teorema A.7. ■

Agora, extendemos alguns teoremas de análise complexa para o caso de funções holomorfas com valores num espaço de Banach X.

Teorema A.10 *(TEOREMA DE CAUCHY) Seja $f : \Omega \to X$ holomorfa em Ω e seja D um domínio regular contido em Ω. Então*

$$\int_{\partial D} f(z)\, dz = 0.$$

Demonstração. Para cada $x' \in X'$ a função a valores complexos $z \to \big\langle f(z),\, x'\big\rangle$ é holomorfa em Ω e, portanto,

$$0 = \int_{\partial D}\big\langle f(z), x'\big\rangle\, dz = \left\langle \int_{\partial D} f(z) dz, x'\right\rangle.$$

■

Observação A.11 (Integrais Impróprias Complexas) *Como no caso de funções definidas em um intervalo real, é possível definir integrais impróprias de funções definidas num domínio complexo de um modo óbvio. Seja $f : \Omega \to X$, holomorfa, com $\Omega \subset \mathbb{C}$,* *possivelmente ilimitada. Se $I = (a,b)$ é um intervalo (possivelmente ilimitado) e $\gamma : I \to \mathbb{C}$ é a curva C^1 por partes em Ω, definimos*

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \lim_{s\to a^+,\, t\to b^-} \int_s^t f\big(\gamma(\tau)\big)\gamma'(\tau)\,d\tau,$$

contanto que o limite exista em X.

Teorema A.12 *(EXPANSÃO DE LAURENT) Sejam $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$ e*

$$f : D := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\} \to X$$

holomorfa. Então, para todo $x \in D$ vale a expansão

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,\,\varrho)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$

e $r < \varrho < R$.

Demonstração. Sendo para cada $x' \in X'$ a função $z \to \big\langle f(z), x'\big\rangle$ holomorfa em D a usual expansão de Laurent é válida, isto é,

$$\big\langle f(z), x'\big\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(x')(z - z_0)^n$$

onde os coeficientes $a_n(x')$ são dados por

$$a_n(x') = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,\,\varrho)} \frac{\big\langle f(z), x'\big\rangle}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz, \quad n \in Z.$$

Pela Proposição A.2(iv), segue que

$$a_n(x') = \big\langle a_n, x'\big\rangle, n \in \mathbb{Z},$$

onde $a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial B(z_0,\,\varrho)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz, \quad n \in \mathbb{Z}$, e $r < \varrho < R$. ■

Apêndice B

Teoria Espectral Básica

Neste apêndice, colecionamos alguns resultados básicos da teoria espectral elementar. Para começar, introduzimos as noções de resolvente e espectro de um operador linear. Aqui, nosso objeto de interesse é um operador linear fechado,

$$A : D(A) \subset X \to X$$

em algum espaço de Banach. Note que, não assumimos um domínio denso, enquanto que o fechamento é necessário para tal teoria.

Definição B.1 *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear, não necessariamente limitado em X. O conjunto resolvente $\rho(A)$ e o espectro $\sigma(A)$ de A são definidos por*

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \exists\, (\lambda I - A)^{-1} \in L(X) \right\}, \quad \sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A). \tag{B.1}$$

Se $\lambda \in \rho(A)$, o operador $R(\lambda : A) := (\lambda I - A)^{-1}$ é dito o operador resolvente[1] *de A, associado a λ.*

Apresentamos, à seguir, algumas propriedades importantes dos conjuntos resolvente e espectro.

[1] Alguns autores definem o resolvente por $(A - \lambda I)^{-1}$. Na literatura mais antiga o resolvente é definido por $(I - \mu A)^{-1}$. A teoria para estes é "análoga". Porém, é aconselhado observar este ponto antes de fazer comparações entre publicações diferentes em teoria espectral.

A próxima identidade, argumenta propriedades do conjunto resolvente $\rho(A)$ e da função resolvente

$$\begin{aligned} R_A : \rho(A) &\to L(X) \\ \lambda &\to R_A(\lambda) = R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1} \end{aligned}$$

Teorema B.2 *(IDENTIDADE DO RESOLVENTE) Seja X um espaço de Banach e A um operador fechado em X. Então para $\mu, \lambda \in \rho(A)$ tem-se que*

$$R(\lambda : A) - R(\mu : A) = (\mu - \lambda) R(\lambda : A) R(\mu : A),$$

e $R(\mu : A)$ comuta com $R(\lambda : A)$.

Demonstração. Note primeiramente que,

$$(\mu I - A) - (\lambda I - A) = (\mu - \lambda). \tag{B.2}$$

Multiplicando à direita de (B.2) por $R(\mu : A)$ temos

$$\big[(\mu I - A) - (\lambda I - A)\big] R(\mu : A) = (\mu - \lambda) R(\mu : A),$$

o que implica,

$$I - (\lambda I - A) R(\mu : A) = (\mu - \lambda) R(\mu : A) \tag{B.3}$$

Multiplicando à esquerda de (B.3) por $R(\lambda : A)$, obtemos

$$R(\lambda : A) - R(\mu : A) = (\mu - \lambda) R(\lambda : A) R(\mu : A), \quad \forall\ \lambda, \mu \in \rho(A). \tag{B.4}$$

Com relação a comutatividade, note que trocando μ por λ,

$$R(\mu : A) - R(\lambda : A) = (\lambda - \mu) R(\mu : A) R(\lambda : A), \quad \forall\ \mu, \lambda \in \rho(A). \tag{B.5}$$

Multiplicando (B.5) por (-1),

$$R(\lambda : A) - R(\mu : A) = (\mu - \lambda) R(\mu : A) R(\lambda : A).$$

Se $\mu \neq \lambda$, segue que

$$R(\mu : A) R(\lambda : A) = \frac{R(\lambda : A) - R(\mu : A)}{(\mu - \lambda)},. \tag{B.6}$$

Logo, de (B.4) e de (B.6),

$$R(\mu : A) R(\lambda : A) = \frac{(\mu - \lambda)\big(R(\lambda : A) R(\mu : A)\big)}{(\mu - \lambda)}, \quad \mu \neq \lambda.$$

ou seja,

$$R(\mu : A)R(\lambda : A) = R(\lambda : A)R(\mu : A), \quad \mu \neq \lambda.$$

Com relação a prova da comutatividade para o caso $\mu = \lambda$ é evidente. A demonstração do Teorema B.2 está completa agora. ■

A Identidade do Resolvente caracteriza os operadores resolventes, como especificado na seguinte Proposição.

Proposição B.3 *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e considere uma família de operadores $\{F(\lambda) : \lambda \in \Omega\} \subset L(X)$ com*

$$F(\lambda) - F(\mu) = (\mu - \lambda)F(\lambda)F(\mu), \quad \lambda, \mu \in \Omega.$$

Se para algum $\lambda_0 \in \Omega$, o operador $F(\lambda_0)$ for invertível, então existe um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ tal que $\rho(A)$ contém Ω, e $R(\lambda : A) = F(\lambda)$ para todo $\lambda \in \Omega$.

Demonstração. Fixe $\lambda_0 \in \Omega$, e seja

$$D(A) = ImF(\lambda_0), \quad Ax = \lambda_0 x - F(\lambda_0)^{-1}x, \quad x \in D(A).$$

Para $\lambda \in \Omega$ e $y \in X$ a equação

$$\lambda x - Ax = y, \tag{B.7}$$

conhecida na literatura como equação do resolvente, é equivalente a

$$(\lambda - \lambda_0)x + F(\lambda_0)^{-1}x = y.$$

Aplicando $F(\lambda)$ obtemos

$$(\lambda - \lambda_0)F(\lambda)x + F(\lambda)F(\lambda_0)^{-1}x = F(\lambda)y,$$

e usando a identidade do resolvente obtemos

$$F(\lambda)F(\lambda_0)^{-1} = F(\lambda_0)^{-1}F(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)F(\lambda) + I.$$

Assim, se x é uma solução da equação resolvente, então

$$x = F(\lambda)y.$$

Além disso,

$$(\lambda - \lambda_0)F(\lambda)y + F(\lambda_0)^{-1}F(\lambda)y = y,$$

e, portanto, $\lambda \in \rho(A)$ e vale a igualdade $R(\lambda : A) = F(\lambda)$. ■

Agora, vamos mostrar que $\rho(A)$ um conjunto aberto e, consequentemente, o espectro $\sigma(A)$, é fechado.

Proposição B.4 *Seja λ_0 em $\rho(A)$. Então, $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{\|R(\lambda_0, A)\|}$ implica que λ pertence a $\rho(A)$ e vale a igualdade*

$$R(\lambda : A) = R(\lambda_0 : A)\big(I + (\lambda - \lambda_0))R(\lambda_0 : A)\big)^{-1}, \quad \forall \lambda_0 \in \rho(A). \tag{B.8}$$

Como uma conseqüência, $\rho(A)$ é um aberto e $\sigma(A)$ é fechado.

Demonstração. Claramente,

$$\lambda I - A = \lambda_0 I - A + \lambda I - \lambda_0 I = \big[I - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - A)^{-1}\big](\lambda_0 I - A),$$

em D(A); ou seja,

$$\lambda I - A = \big[I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0 : A)\big](\lambda_0 - A),$$

em $D(A)$. Denotando

$$V = I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0 : A),$$

$$A^{\lambda} = \lambda I - A,$$

$$A^{\lambda_0} = \lambda_0 I - A,$$

podemos escrever,

$$A^{\lambda} = VA^{\lambda_0}. \tag{B.9}$$

Sendo $\lambda_0 \in \rho(A)$ e A limitado então $R(\lambda : A) = (A^{\lambda_0})^{-1} \in L(X)$. Além disso, V tem uma inversa

$$V^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \big[(-1)(\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, A)\big]^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0, A)^n$$

em $L(X)$, para todo λ tal que $\|(\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0 : A)\| < 1$, isto é,

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0 : A)\|}\,. \tag{B.10}$$

Sendo $R(\lambda_0 : A) \in L(X)$, vemos de (B.9) que para todo λ satisfazendo (B.10) o operador A^λ tem uma inversa

$$R(\lambda : A) = (A^\lambda)^{-1} = (VA^{\lambda_0}) = (A^{\lambda_0})^{-1}V^{-1}.$$

Assim, $\lambda \in \rho(A)$. E mais, (B.10) representa a vizinhança de λ_0 procurada. Sendo $\lambda_0 \in \rho(A)$ arbitrário, $\rho(A)$ é aberto e, consequentemente, $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$ é fechado. ■

Na Proposição seguinte são listadas algumas propriedades do operador resolvente.

Proposição B.5 *A função $R(\cdot : A)$ é holomorfa em $\rho(A)$ e satisfaz as igualdades:*

$$R(\lambda : A) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n R^{n+1}(\lambda_0 : A), \tag{B.11}$$

$$\left. \frac{d^n R(\lambda : A)}{d\lambda^n} \right|_{\lambda=\lambda_0} = (-1)^n n! R^{n+1}(\lambda : A). \tag{B.12}$$

Demonstração. Se $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{\|R(\lambda_0 : A)\|}$, por (B.8) deduzimos

$$R(\lambda : A) = R(\lambda_0 : A) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0 : A)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0 : A)^{n+1},$$

mostrando (B.11). Desta forma, existe uma sequência à valores em $L(X)$, $(a_n) = \big((-1)^n R(\lambda_0 : A)^{n+1}\big)$ e $r = \dfrac{1}{\|R(\lambda_0 : A)\|} > 0$ tal que

$$B(\lambda_0, r) \subset \rho(A)$$

e

$$R(\lambda : A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lambda - \lambda_0)^n \quad \text{em } B(\lambda_0, r);$$

donde $R(\cdot, A)$ admite uma expansão em séries de potências ao redor do ponto $\lambda_0 \in \rho(A)$, e, portanto $R(\cdot : A)$ é holomorfa em $\rho(A)$. Com relação a (B.12), esta segue imediato por (B.11) e argumento de indução. ■

A Proposição B.4 também sugere que o conjunto resolvente é o domínio de analiticidade da função $\lambda \to R(\lambda : A)$. Como enunciamos no Corolário abaixo.

Corolário B.6 *O domínio de analiticidade da função $\lambda \to R(\lambda : A)$ é $\rho(A)$, e vale a estimativa*

$$\|R(\lambda : A)\|_{L(X)} \geq \frac{1}{dist(\lambda, \sigma(A))}. \tag{B.13}$$

Demonstração. Veja [23].

Vamos apresentar abaixo uma propriedade espectral de operadores limitados.

Proposição B.7 *Se* $T \in L(X)$, *então a série de potências*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k T^k, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{B.14}$$

(chamada série de Newman de $(I - zT)^{-1}$*) é convergente no disco* $B(0, 1/r(T))$, *onde*

$$r(T) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

Além disso, $|z| < 1/r(T)$ *implica* $F(z) = (I - zT)^{-1}$, *e* $|z| < 1/\|T\|$ *implica*

$$\|(I - zT)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - |z|\|T\|}\,. \tag{B.15}$$

Demonstração. Sabemos que uma série de potências $\sum c_n x^n$ converge absolutamente se $|\,x| < r$, com r o raio de convergência dado pela FÓRMULA DE HADAMARD [2]

$$\frac{1}{r} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Desta forma, sendo

$$\|F(z)\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} z^n T^n \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T^n\| |\,z|^n;$$

e escrevendo $|\,c_n| = \|T^n\|$ e $x = |z|$, a convergência de $F(z)$ no disco B(0 , 1/r(T)) é imediata. Agora, observamos que se $A \in L(X)$ e $\|A\| < 1$ então $I + A$ é invertível, e

$$(I + A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k.$$

De fato, a série $\sum \|A\|^k$ converge; pois, $\|A^n\| \leq \|A\|^k < 1$; logo,

$$\left\| \sum A^k \right\| \leq \sum \|A^k\| \leq \sum \|A\|^k \to 0,$$

quando $k \to \infty$. Agora,

$$(I + A) \sum_{k=0}^{N} (-1)^k A^k = (I + A)\big(I - A + A^2 - A^3 + ... - A^{N-1} + A^N\big)$$

$$= I - A + A^2 - ... - A^{N-1} + A^N + A - A^2 - ... + A^{N-1} - A^N + A^{N+1},$$

[2]Esta fórmula é incluida e provada em muitos livros de análise complexa, por exemplo, in E. Hille(1973) [17], p.118 ou em Kreyszig [20] p.392.

o que implica,

$$(I+A)\sum_{k=0}^{N}(-1)^k A^k = I + A^{N+1};$$

então,

$$\left[(I+A)\sum_{k=0}^{N}(-1)^k A^k\right] - I = A^{N+1};$$

logo,

$$\left\|\left[(I+A)\sum_{k=0}^{N}(-1)^k A^k\right] - I\right\|_{L(X)} \leq \|A\|^{N+1} \to 0;$$

quando $N \to \infty$; donde,

$$(I+A)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k A^k = I. \tag{B.16}$$

Analogamente,

$$\left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k A^N\right)(I+A) = I. \tag{B.17}$$

De (B.16) e (B.17) $I + A$ é invertível, e

$$(I+A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k A^k,$$

e a demonstração segue facilmente considerando $A = zT$. ■

Apêndice C

Semigrupos de Operadores Lineares

Neste apêndice introduzimos conceitos e propriedades básicas da teoria de semigrupos de operadores lineares limitados em espaços de Banach. Tais conceitos e propriedades são encontrados em Klaus [13], Menoncini [25] e Pazy [26]. Os principais resultados do apêndice são o Teorema C.10 e o clássico Teorema de Hille-Yosida(Teorema C.16).

C.1 Semigrupos de Operadores Lineares

Como comentado na introdução temos a seguinte definição.

Definição C.1 *Seja X um espaço de Banach. Uma família de operadores $T(t), t \geq 0$ em $L(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados em X se*

(i) $T(0) = I$, *onde I é o operador identidade em X,*

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s), \quad$ *para todo $t, s \geq 0$. (propriedade de semigrupo)*

Definição C.2 *Um semigrupo de operadores lineares limitados, $T(t)$, é chamado uniformemente contínuo se*

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T(t) - I\| = 0.$$

Definição C.3 *Um semigrupo de operadores lineares limitados em* X, $T(t)$, *é chamado semigrupo fortemente contínuo se*

$$\lim_{t\downarrow 0} T(t)x = x \quad \textit{para todo } x \in X.$$

Observação C.4 *Um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em* X *será chamado semigrupo de classe* C_0, *ou simplesmente,* C_0*-semigrupo.*

Exemplo 2 *Um exemplo de* C_0*-semigrupo é obtido através da função exponencial*

$$E : R^+ \to L(X)$$

definida por

$$E(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!},$$

com $A \in L(X)$.

Com efeito,

1. $E(0) = e^{0A} = I$;
2. $E(t+s) = e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} = E(t)E(s)$, para todo $t, s \geq 0$;
3. Para cada $x \in X$, $E(t)x = e^{tA}x$; logo,

$$\|E(t)x - x\| = \|e^{tA}x - x\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k A^k x}{k!} \right\| = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{j+1} A^{j+1} x}{(j+1)!} \right\| \leq |t| \, \|A\| \, \|x\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|t|^j \|A\|^j}{j!}$$

isto é,

$$\|E(t)x - x\| \leq |t| \, \|A\| \, \|x\| e^{\|tA\|};$$

o que implica,

$$\|E(t)x - x\| \to 0, \quad \text{quando } t \downarrow 0;$$

isto é,

$$E(t)x \to x, \quad \text{quando } t \downarrow 0.$$

Lema C.5 *Seja* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0-*semigrupo em* X, *onde* X *é um espaço de Banach. Então existem* $M \geq 1$ *e* $\delta > 0$ *tais que, para* $0 \leq t \leq \delta$, $\|T(t)\| \leq M$.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que dados $\delta > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ existe t_δ, com $0 \leq t_\delta \leq \delta$ tal que

$$\|T(t_n)\| > n.$$

Considerando $\delta = \dfrac{1}{n}$, temos a existência de uma seqüência $\{t_n\}$, com $t_n \to 0$, quando $n \to \infty$ e

$$\|T(t_n)\| \to \infty, \quad \text{quando } n \to \infty,$$

isto é, a seqüência

$$\{\, \|T(t_n)\|\} \quad \text{é ilimitada.} \tag{C.1}$$

Por outro lado, sendo $T(t)$ um C_0- semigrupo, temos

$$T(t_n)x \xrightarrow[n\to\infty]{} x, \quad \text{para cada } \ u \in X;$$

logo,

$$\|T(t_n)x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x\|, \quad \text{para cada } \ x \in X;$$

e, assim,

$$\{\|T(t_n)x\|\} \quad \text{é uma sequência limitada para cada } \ x \in X;$$

usando o TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS (Teorema D.18), concluimos que

$$\{\, \|T(t_n)\|\} \quad \text{é limitada,}$$

contradizendo o resultado encontrado em (C.1). Portanto, a tese do Lema é válida. ■

Os semigrupos fortemente contínuos possuem a importante propriedade de serem exponencialmente limitados como mostra o seguinte resultado.

Teorema C.6 *Seja* $(T(t))_{t\geq 0}$ *um* C_0*-semigrupo de operadores lineares em* X, *onde* X *é um espaço de Banach. Então existem constantes* $\omega \geq 0$ *e* $M > 1$ *tais que*

$$\| \ T(t) \ \| \leq Me^{\omega t}, \ \textit{para todo } t \geq 0.$$

Demonstração: Pelo Lema C.5 existem $M \geq 1$ e $\delta > 0$ tais que, para $0 \leq t \leq \delta$,

$$\|T(t)\| \leq M.$$

Sendo a exponencial uma função crescente, para todo $\omega \geq 0$ temos

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad t \in [0, \delta]. \tag{C.2}$$

Para $t > \delta$, considere $\omega = \delta^{-1}\log M$. Note, $\omega \geq 0$, pois $M \geq 1$. Sendo $t > \delta$, pelo ALGORÍTMO DE EUCLIDES [1], existem $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \eta < \delta$ tal que $t = n\delta + \eta$. Assim,

$$T(t) = T(n\delta + \eta) = T(\eta\delta)T(\eta) = \big(T(\delta)\big)^n T(\eta);$$

logo,

$$\|T(t)\| = \|T(n\delta + \eta)\| = \|\big(T(\delta)\big)\|^n \|T(\eta)\|;$$

o que implica,

$$\|T(t)\| \leq M^n M. \tag{C.3}$$

Sendo $\omega = \delta^{-1}\log M$ então $\omega\delta = \log M$, assim $n\omega\delta = n\log M = \log M^n$, logo,

$$\omega t = \omega(n\delta + \eta) \geq n\omega\delta = \log M^n;$$

o que implica,

$$e^{\omega t} \geq M^n. \tag{C.4}$$

De (C.3) e (C.4) obtemos

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad \forall\, t > \delta \tag{C.5}$$

De (C.2) e (C.5), concluimos a demonstração do Teorema. ■

Corolário C.7 *Para cada $x \in X$, a aplicação*

$$\begin{aligned} f : [0,\infty) &\to X \\ t &\rightsquigarrow f(t) = T(t)x \end{aligned}$$

é contínua. Mais precisamente, para cada $x \in X$,

$$T(\cdot)x \in C([0,\infty); X).$$

Demonstração. Dado $t \geq 0$, seja $h \geq 0$ com $t \geq h$. Temos,

$$\|f(t+h) - f(t)\| = \|T(t+h)x - T(t)x\| = \|T(t)T(h)x - T(t)x\| = \|T(t)\big(T(h)x - x\big)\|.$$

Sendo $T(t)$ limitado e, usando o Teorema C.6 obtemos

$$\|f(t+h) - f(t)\| \leq M e^{\omega t}\|T(h)x - x\|.$$

[1] O ALGORÍTMO DE EUCLIDES é bastante conhecido e, pode encontrado em livros de álgebra, por exemplo, em Garcia [2].

Consequentemente, pela definição de C_0-semigrupo, segue que

$$\|f(t+h) - f(t)\| \to 0, \quad \text{quando } h \downarrow 0;$$

logo,

$$\lim_{s \to t^+} f(s) = f(t). \tag{C.6}$$

Por outro lado,

$$\|f(t)-f(t-h)\| = \|T(t)x - T(t-h)x\| = \|T(t-h+h)x - T(t-h)x\| = \|T(t-h)\big(T(h)x - x\big)\|;$$

dai,

$$\|f(t) - f(t-h)\| \leq Me^{\omega(t-h)}\|T(h)x - x\| \leq Me^{\omega t}\|T(h)x - x\|;$$

donde segue que,

$$\|f(t) - f(t-h)\| \to 0, \quad \text{quando } h \downarrow 0,$$

isto é,

$$\lim_{s \to t^-} f(s) = f(t). \tag{C.7}$$

De (C.6) e (C.7) segue que f é contínua, pois os limites laterais existem e são iguais. ■

Definição C.8 *Um C_0-semigrupo é dito* **uniformemente limitado** *se $\|T(t)\| \leq M$, e, se $\|T(t)\| \leq 1$, dizemos que é um* **semigrupo de contração** *.*

Agora, introduziremos um importante conceito na teoria de semigrupos.

Definição C.9 *Sejam $T(t)$ um semigrupo de operadores lineares limitados em X e $D(A)$ o conjunto*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \textit{existe} \right\}.$$

O operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ definido por

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad x \in D(A),$$

é chamado o **gerador infinitesimal do semigrupo** *$T(t)$.*

Exemplo 3 *Seja X o espaço das funções limitadas $f : \mathbb{R} \to Y$ limitadas e uniformemente contínuas, onde Y é um espaço de Banach. Considere em X a norma do supremo. Definindo $T(t)f(s) = f(t+s)$, afirmamos que a família $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0- semigrupo em X. Além disto, seja $D(A) = \{f \in X; f' \text{existe em todo ponto}\} \subset X$. Definindo $A : D(A) \subset X \to X$ por $Af = f'$, segue que A é o gerador infinitesimal de $T(t)$.*

Com efeito, para cada $f \in X$,

(1) $T(0) = I$; pois, $T(0)f(s) = f(0+s) = f(s)$.

(2) $T(t_1+t_2) = T(t_1)T(t_2)$, para todo $t_1, t_2 \geq 0$. De fato, basta observarmos que, dados $t_1, t_2 \geq 0$,

$$T(t_1+t_2)f(s) = f(t_1+t_2+s)$$

e

$$T(t_1)T(t_2)f(s) = T(t_1)f(t_2+s) = f(t_1+t_2+s);$$

donde,

$$T(t_1+t_2)f(s) = T(t_1)T(t_2)f(s).$$

(3) $T(t)f(s) \to f(s)$, quando $t \downarrow 0$. Vejamos,

$$\|T(t)f(s) - f(s)\| = \|f(t+s) - f(s)\|.$$

Sendo $|t+s-s| = |t|$ e, sabendo que f é uniformemente contínua, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t+s-s| = |t| < \delta \Rightarrow \|f(t+s) - f(s)\| < \epsilon,$$

i.e.,

$$|t| < \delta \Rightarrow \|T(t)f(s) - f(s)\| < \epsilon;$$

consequentemente,

$$T(t)f(s) \to f(s), \quad \text{quando } t \downarrow 0.$$

De (1), (2) e (3), $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo. Agora, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)f(s) - f(s)}{t} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(t+s) - f(s)}{t} = D^+f(s)$$

onde D^+f é a derivada à direita de f, quando tal limite existe. Deste modo, para que $f \in D(A)$, devemos ter $D^+f \in X$, o que implica em D^+f ser limitada e uniformemente contínua. Notamos, também que

$$f(x+t) - f(x) = D^+f(x)t + r(t), \text{com } \frac{r(t)}{t} \xrightarrow[t\downarrow 0]{} 0.$$

assim, para $s = x + t$, temos

$$f(s) - f(s-t) = D^+f(s-t)t + r(t), \text{com } \frac{r(t)}{t} \xrightarrow[t\downarrow 0]{} 0;$$

e, pela continuidade de D^+f obtemos

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{f(s) - f(s-t)}{t} = D^+f(s),$$

o que implica, que a derivada à esquerda D^-f existe em todo ponto e

$$D^-f = D^+f,$$

donde f é derivável em todo ponto. Assim,

$$D(A) = \{f \in X; f' \text{existe em todo ponto e } f' \in X\}$$

e

$$Af = f', \;\; f \in D(A).$$

No seguinte resultado são resumidas algumas propriedades básicas relativas a semigrupos fortemente contínuos

Teorema C.10 *Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em X e A seu gerador infinitesimal. Então as seguintes propriedades são verificadas.*

(a) *Para todo $t \geq 0$ e todo $x \in X$, $\lim\limits_{s\to t} T(s)x = T(t)x$. Mais ainda, se o semigrupo é uniformemente continuo então $\lim\limits_{s\to t} T(s) = T(t)$ em $L(X)$.*

(b) *Para todo $x \in X$ e todo $t \geq 0$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_t^{t+h} T(s)x\; ds = T(t)x$.*

(c) *Para todo $x \in X$ e todo $t \geq 0$,*

$$\int_0^t T(s)x\; ds \in D(A)$$

e

$$A\bigg(\int_0^t T(s)x\; ds\bigg) = T(t)x - x.$$

(d) *Para todo $x \in D(A)$ e todo $t > 0$, $T(t)x \in D(A)$ e $\dfrac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$.*

(e) *Para todo $x \in D(A)$, $T(t)x - T(s)x = \displaystyle\int_s^t T(r)Axdr = \int_s^t AT(r)x\; dr$.*

Demonstração: Mostraremos apenas a propriedade (c). Para as demais veja Pazy [26]. Seja $h > 0$. Temos,

$$\left(\frac{T(h) - I}{h}\right) \int_0^t T(\tau)x\, d\tau = \frac{1}{h}\bigg[T(h) \int_0^t T(\tau)x\, d\tau - \int_0^t T(\tau)x\, d\tau\bigg]$$

logo,

$$\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)\int_0^t T(\tau)x\,d\tau = \frac{1}{h}\left[\int_0^t T(h)T(\tau)x\,d\tau - \int_0^t T(\tau)x\,d\tau\right].$$

Por propriedade de semigrupo,

$$\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)\int_0^t T(\tau)x\,d\tau = \frac{1}{h}\int_0^t T(\tau+h)x\,d\tau - \frac{1}{h}\int_0^t T(\tau)x\,d\tau.$$

isto é,

$$\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)\int_0^t T(\tau)x\,d\tau = \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(\tau)x\,d\tau - \frac{1}{h}\int_0^t T(\tau)x\,d\tau.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor $h < t$ e, assim,

$$\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)\int_0^t T(\tau)x\,d\tau = \frac{1}{h}\left[\int_h^t T(\tau)x\,d\tau + \int_t^{t+h} T(\tau)x\,d\tau - \int_0^h T(\tau)x\,d\tau - \int_h^t T(\tau)x\,d\tau\right];$$

donde,

$$\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)\int_0^t T(\tau)x\,d\tau = \frac{1}{h}\left[\int_t^{t+h} T(\tau)x\,d\tau - \frac{1}{h}\int_0^h T(\tau)x\,d\tau\right];$$

logo, pela letra **(b)**

$$\lim_{h\downarrow 0}\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)\int_0^t T(\tau)x\,d\tau = T(t)x - x;$$

mostrando que **(c)**. ■

Definição C.11 *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo, definimos*

$$D(A^2) = \{x \in D(A); Ax \in D(A)\}$$

e de forma geral, para $k \geq 2$

$$D(A^k) = x \in D(A^{k-1}); Ax \in D(A^{k-1}).$$

Teorema C.12 *Seja A um gerador infinitesimal de um C_0- semigrupo $T(t)$. Seja $D(A^n)$ o domínio de A^n, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ é denso em X. Em particular $D(A^2)$ é denso em X.*

Teorema C.13 *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 semigroup $T(t)$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$. Seja μ um número real tal que $\mu > w \geq 0$, e*

$$A_\mu = \mu A R(\mu : A) = \mu^2 R(\mu : A) - \mu I$$

a aproximação de Yosida de A. Então para $Re\lambda > w\mu/(\mu - w)$ *temos*

$$R(\lambda : A_\mu) = (\lambda + \mu)^{-1}(\mu I - A)R\left(\frac{\mu\lambda}{\mu + \lambda} : A\right)$$

e

$$\|R(\lambda : A_\mu)\| \leq M\left(Re\lambda - \frac{w\mu}{\mu - w}\right)^{-1}.$$

Para $Re\lambda > \varepsilon + w\mu/(\mu - w)$ *e* $\mu > 2w$, *existe uma constante* C, *dependendo somente de* M *e* ε *tal que para todo* $x \in D(A)$,

$$\|R(\lambda : A_\mu)x\| \leq \frac{C}{|\lambda|}(\|x\| + \|Ax\|).$$

Teorema C.14 *Seja* A *o gerador infinitesimal de um* C_0 *semigrupo* $T(t)$ *em* X. *Se* A_μ *for a aproximação de Yosida de* A, *i.e.,* $A_\mu = \mu AR(\mu : A)$ *então*

$$T(t)x = \lim_{\mu \to \infty} e^{tA_\mu}x.$$

Teorema C.15 *Seja* A *como no Teorema C.13. Considere* $\lambda = \gamma + i\eta$ *onde* $\gamma > w + \varepsilon$ *é fixado. Para todo* $x \in X$, *temos*

$$\lim_{\mu \to \infty} R(\lambda : A_\mu)x = R(\lambda : A)x$$

e para todo $Y > 0$, *o limite é uniforme com relação a* η *para* $|\eta| \leq Y$.

C.2 O Teorema de Hille-Yosida e a Caracterização dos Geradores de C_0-Semigrupos

Apresentamos, à seguir, o famoso teorema de Hille-Yosida. Este resultado caracteriza quando um operador linear fechado é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente continuo de operadores lineares em um espaço de Banach. Mencionamos que o Pazy [26], mostra uma versão mas restrita do resultado, a qual é válida para semigrupos de contrações.

Teorema C.16 *(Hille-Yosida). Seja* X *um espaço de Banach. Para que um operador linear* A, *definido em* $D(A) \subset X$ *e com valores em* X *seja o gerador de um semigrupo de classe* C_0, *é necessário e suficiente que:*

(i) A seja operador fechado com domínio denso em X;

ii)Existam M e w reais tais que, para cada real $\lambda > w$ se tenha $\lambda \in \rho(A)$ e para cada $n \in N$

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}. \tag{C.8}$$

Neste caso, o semigrupo $T(t)$ satisfaz a condição $\|T(t)\| \leq Me^{wt}, t > 0$.

Corolário C.17 *Um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ verificando $\| T(t) \| \leq M$ $(M \geq 1)$ se, e somente se,*

(a) *A é um operador fechado e $\overline{D(A)} = X$,*

(b) *$\rho(A) \supset \mathbb{R}^+$ e $\| R(\lambda : A)^n \| \leq \dfrac{M}{\lambda^n}$, para $\lambda > 0, n = 1, 2, ...$*

Corolário C.18 *Um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ verificando $\| T(t) \| \leq M$ $(M \geq 1)$ se, e somente se,*

(a) *A é um operador fechado e $\overline{D(A)} = X$,*

(b) *$\rho(A) \supset U = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) > 0\}$ e $\| R(\lambda : A)^n \| \leq \dfrac{M}{(Re\lambda)^n}$,*

para $Re\lambda > 0, n = 1, 2, ...$

Corolário C.19 *Uma condição necessária e suficiente para que $A : D(A) \subset X \to X$ seja o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contração $(T(t))_{t\geq 0}$ em X, é que A seja fechado, seu domínio denso em X, $\rho(A) \supset U = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) > 0\}$ e para todo $\lambda \in U$,*

$$\| R(\lambda : A) \| \leq \frac{1}{Re(\lambda)}.$$

Este corolário caracteriza geradores de semigrupos de contrações de classe C_0 e sua demonstração segue de um caso particular do corolário anterior, tomando o semigrupo de contração.

C.3 Semigrupos Diferenciáveis

Definição C.20 *Seja $t_0 > 0$. Um C_0-semigrupo, $(T(t))_{t\geq 0}$, de operadores lineares limitados em X é diferenciável para $t > t_0$, se para cada $x \in X$ a função $s \to T(s)x$ é diferenciável em cada $t > t_0$. O semigrupo é chamado diferenciável se é diferenciável para todo $t_0 > 0$.*

Observação C.21 *Se X for de dimensão finita então todo C_0-semigrupo de operadores lineares será diferenciável, mais ainda, de classe C^∞. Por outro lado, se A for limitado, é claro que o semigrupo gerado por A, à saber, $T(t) = e^{tA}$, será diferenciável.*

Teorema C.22 *Suponha que A seja o gerador infinitesimal de um semigrupo $T(t)$ em X. Se $T(t)$ for diferenciável então*

$$T^{(n)}(t) = \left(AT\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(T'\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n, \tag{C.9}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ e todo $t > 0$.

Demostração. Temos para todo $x \in X$ que $T(t)x \in D(A)$, então faz sentido falar em $AT(t)x$ e, mais, por propriedade de semigrupo,

$$AT(t)x = A\left[\left(T\left(\frac{t}{2}\right)T\left(\frac{t}{2}\right)\right)x\right] = A\left[T\left(\frac{t}{2}\right)\left(\underbrace{T\left(\frac{t}{2}\right)x}_{\in D(A)}\right)\right].$$

Sabendo que A e $T\left(\frac{t}{2}\right)$ comutam

$$AT(t)x = T\left(\frac{t}{2}\right)\left(\underbrace{AT\left(\frac{t}{2}\right)x}_{\in X}\right) \in D(A);$$

donde,

$$T(t)x \in D(A^2);$$

logo, faz sentido falar em $A^2T(t)x$ e, mais,

$$A^2T(t)x = A \circ A\left(T\left(\frac{t}{3}\right)T\left(\frac{t}{3}\right)T\left(\frac{t}{3}\right)x\right) = T\left(\frac{t}{3}\right)\left(AT\left(\frac{t}{3}\right)AT\left(\frac{t}{3}\right)x\right) \in D(A),$$

donde,

$$T(t)x \in D(A^3);$$

seguindo este raciocínio, temos

$$T(t)x \in D(A^n).$$

Note também que,

$$\underbrace{T\left(\frac{t}{n}\right)A \circ \ldots \circ AT\left(\frac{t}{n}\right)}_{n\text{vezes}} = \underbrace{A \circ \ldots \circ A}_{n\text{vezes}}\left(\underbrace{T\left(\frac{t}{n}\right)\ldots T\left(\frac{t}{n}\right)}_{n\text{vezes}}\right) = A^nT\left(\frac{nt}{n}\right);$$

o que implica,

$$\left(AT\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = A^nT(t). \tag{C.10}$$

Vamos mostrar agora que

$$A^nT(t)x = \frac{d^n}{dt^n}T(t)x, \forall x \in X \tag{C.11}$$

e, escrever

$$T^{(n)}(t) := \frac{d^n}{dt^n}T(t);$$

desta forma,

$$\left(AT\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = A^nT(t) = T^{(n)}(t).$$

Vejamos. Claramente, sendo o semigrupo diferenciavel para $t > 0$, a função

$$\begin{aligned} (0, \infty) &\to X \\ s &\rightsquigarrow T(s)x \end{aligned}$$

é de clase C^1 e

$$T'(t)x = AT(t)x,$$

donde (C.11) ocorre para $n = 1$. Suponha que

$$T^{(n)}(t) = \left(AT\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(T'\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n. \tag{C.12}$$

vale para cada $0 \leq k \leq n$, onde $n \in \mathbb{N}$ é fixo. Sabemos pela hipotese de indução que para $t > s$

$$T^{(n)}(t) = \left(AT\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = T(t-s)\left(AT\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n,$$

pelo que diferenciando respeito de t teremos que

$$T^{(n+1)}(t) = AT(t-s)\left(AT(\frac{s}{n})\right)^n.$$

Finalmente, usando $s = \dfrac{nt}{n+1}$ na ultima igualdade, temos que

$$\begin{aligned} T^{(n+1)}(t) &= AT\left(t - \frac{nt}{n+1}\right)\left(AT\left(\frac{\frac{nt}{n+1}}{n}\right)\right)^n \\ &= AT\left(\frac{t}{n+1}\right)\left(AT\left(\frac{t}{n+1}\right)\right)^n, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração do resultado. ■

Apêndice D

Resultados Complementares

Colecionamos neste apêndice alguns resultados complementares utilizados no decorrer da dissertação.

D.1 Desigualdade de Grownall

À seguir, mostraremos a desigualdade de Gronwall, a qual foi utilizada no decorrer desta dissertação, porém, existem versões com menos regularidade das funçõs envolvidas, veja por exemplo, o livro do Evans [15].

Teorema D.1 *(DESIGUALDADE DE GRONWALL - FORMA DIFERENCIÁVEL) Seja* $\eta(\cdot)$ *uma função de classe* $C^1([0,T])$ *não-negativa, satisfazendo para quase todo* t *a desigualdade*

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t), \tag{D.1}$$

onde $\phi(t)$ *e* $\psi(t)$ *são funções integráveis, não-negativas em* $[0,T]$*. Então,*

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)\,ds}\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,ds\right],$$

para todo $0 \leq t \leq T$*. Em particular, se* $\eta' \leq \phi\eta$ *em* $[0,T]$ *e* $\eta(0) = 0$*, então,*

$$\eta \equiv 0 \;\; em \;\;\; [0,T].$$

Demonstração. Multiplicando (D.1) por $e^{-\int_0^s \phi(\tau)\,d\tau}$, obtemos

$$\eta'(s)\,e^{-\int_0^s \phi(\tau)\,d\tau} - \phi(s)\,\eta(s)\,e^{-\int_0^s \phi(\tau)\,d\tau} \leq e^{-\int_0^s \phi(\tau)\,d\tau}\,\psi(s),$$

isto é,

$$\frac{d}{ds}\big(\eta(s)e^{-\int_0^s \phi(\tau)\,d\tau}\big) \leq e^{-\int_0^s \phi(\tau)\,d\tau}\psi(s) \quad q.t.p. \quad \text{em} \quad [0,T].$$

Integrando em $[0,t]$, com $0 \leq t \leq T$, obtemos pelo TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO (Teorema A.3.),

$$\left(\eta(s)e^{-\int_0^s \phi(\tau)\,d\tau}\right)\Bigg|_0^t \leq \int_0^t \underbrace{e^{-\int_0^s \phi(\tau)\,d\tau}}_{\leq 1}\psi(s)\,ds;$$

o que implica,

$$\eta(t)e^{-\int_0^s \phi(\tau)\,d\tau} - \eta(0) \leq \int_0^t \psi(s)\,ds,$$

donde,

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^s \phi(\tau)\,d\tau}\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,ds\right],$$

demonstrando a primeira parte da desigualdade de Gronwall. Agora, se

$$\eta' \leq \phi\eta \quad \text{em} \quad [0,T] \quad \text{e} \quad \eta(0) = 0,$$

temos,

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^s \phi(\tau)\,d\tau}\eta(0) = 0;$$

logo,

$$\eta \equiv 0 \quad \text{em} \quad [0,T].$$

■

Teorema D.2 *(DESIGUALDADE DE GRONWALL - FORMA INTEGRÁVEL) Seja $\xi(t)$ uma função contínua, não-negativa em $[0,T]$, satisfazendo para quase todo t a desigualdade integral*

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)\,ds + C_2, \tag{D.2}$$

para constantes $C_1, C_2 \geq 0$. Então,

$$\xi(t) \leq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t}),$$

para quase todo $0 \leq t \leq T$. Em particular, se

$$\xi(t) = C_1 \int_0^t \xi(s)\,ds,$$

para quase todo $0 \leq t \leq T$, *então*

$$\xi(t) = 0 \quad q.t.p. \quad em \quad [0, T].$$

Demonstração. Defina

$$\eta(t) = \int_0^t \xi(s)\, ds.$$

Temos, $\eta(\cdot)$ é não negativa e de classe C^1, então pelo TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO (Teorema A.3.),

$$\eta'(t) = \xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)\, ds + C_2 = C_1\, \eta(t) + C_2,$$

isto é,

$$\eta'(t) \leq C_1\, \eta(t) + C_2 \quad q.t.p. \quad \text{em } [0, T].$$

Logo, pela DESIGUALDADE DE GRONWALL- FORMA DIFERENCIÁVEL (Teorema D.1.), obtemos

$$\int_0^t \xi(s)\, ds \leq C_2 t e^{C_1 t},$$

donde, multiplicando por C_1 e somando com C_2 e usando (D.2) concluimos que

$$\xi(t) \leq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t}) \quad q.t.p. \quad \text{em} \quad [0, T].$$

Além disso,

$$\xi(t) = C_1 \int_0^t \xi(s)\, ds, \quad \text{para quase todo } 0 \leq t \leq T,$$

logo,

$$0 \leq \xi(t) \leq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t}) \quad \text{em } [0, T];$$

o que implica,

$$\xi(t) = 0 \quad q.t.p. \quad \text{em } [0, T].$$

■

D.2 A Função Beta

O objetivo desta seção é apresentar um resultado (Lema D.1) resultado importante para os Capítulos 3 e 4.

Definição D.3 *Definimos por* **função Beta** *a função dada por*

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\,\alpha-1}(1-t)^{\,\beta-1}\,dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Teorema D.4 *Para $0 \le s < t \le T$, fixos, temos*

$$\int_s^t (t-\tau)^{\,\alpha-1}(\tau-s)^{\,\beta-1}\,d\tau = (t-s)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha)}. \tag{D.3}$$

Demonstração. Considere

$$\begin{aligned} g : (s,t) &\longrightarrow (0,1) \\ \tau\ &\mapsto g(\tau) = \frac{\tau-s}{t-s} \equiv r. \end{aligned}$$

Temos,

$$\tau = r(t-s)+s \qquad \text{e} \qquad d\tau = (t-s)dr;$$

daí,

$$t-\tau = (t-s)(t-r) \qquad \text{e} \qquad \tau-s = r(t-s);$$

assim,

$$\int_s^t (t-\tau)^{\,\alpha-1}(\tau-s)^{\,\beta-1}\,d\tau = \int_0^1 \big[(t-s)(1-r)\big]^{\alpha-1}\big[r(t-s)\big]^{\beta-1}(t-s)\,dr;$$

o que implica,

$$\begin{aligned} \int_s^t (t-\tau)^{\,\alpha-1}(\tau-s)^{\beta-1}\,d\tau &= (t-s)^{\,\alpha+\beta-1}\left(\int_0^1 (1-r)^{\,\alpha-1}\,r^{\,\beta-1}\,dr\right) \\ &= (t-s)^{\,\alpha+\beta-1}B(\beta,\alpha); \end{aligned}$$

consequentemente,

$$\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-s)^{\beta-1}\,d\tau = (t-s)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha)}\,.$$

■

Lema D.1 *Seja $\varphi(t,s) \ge 0$ contínua em $0 \le s < t \le T$. Se existem constantes positivas A, B_1, B_2 e α tais que*

$$\varphi(t,s) \le A + B_1\int_s^t \varphi(\sigma,s)\,d\sigma + B_2\int_s^t (t-\sigma)^{\alpha-1}\varphi(\sigma,s)\,d\sigma \tag{D.4}$$

para $0 \le s < t \le T$, então existe uma constante C tal que

$$\varphi(t,s) \le C, \quad 0 \le s < t \le T.$$

Demonstração. Assumindo (D.4), mostraremos inicialmente que

$$\varphi(t,s) \leq C_1 + C_2 \int_s^t \varphi(\sigma,s)\,d\sigma, \tag{D.5}$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas independentes de s.

- Se $\alpha = 1$, por (D.4)

$$\varphi(t,s) \leq A + (B_1 + B_2) \int_s^t \varphi(\sigma,s)\,d\sigma. \tag{D.6}$$

- Se $\alpha > 1$, por (D.4)

$$\varphi(t,s) \leq A + (B_1 + B_2 T^{\alpha-1}) \int_s^t \varphi(\sigma,s)\,d\sigma, \tag{D.7}$$

onde a última desigualdade é válida pois, $0 \leq s < \sigma < t \leq T$, donde $t - \sigma \leq T$.

- Se $\alpha < 1$, aplicando (D.4) para $\varphi(\sigma,s)$ encontramos

$$\varphi(t,s) \leq A + B_1 \int_s^t \Big[A + B_1 \int_s^\sigma \varphi(\xi,s)\,d\xi + B_2 \int_s^\sigma (\sigma-\xi)^{\alpha-1}\varphi(\xi,s)\,d\xi\Big] d\sigma$$
$$+ B_2 \int_s^t (t-\sigma)^{\alpha-1}\Big[A + B_1 \int_s^\sigma \varphi(\xi,s)\,d\xi + B_2 \int_s^\sigma (\sigma-\xi)^{\alpha-1}\varphi(\xi,s)\,d\xi\Big]\,d\sigma;$$

para $0 \leq s < \sigma < t \leq T$; ou seja,

$$\begin{aligned}\varphi(t,s) \leq{}& A + B_1 \int_s^t A\,d\sigma + B_1^2 \int_s^t \int_s^\sigma \varphi(\xi,s)\,d\xi\,d\sigma + B_1 B_2 \int_s^t \int_s^\sigma (\sigma-\xi)^{\alpha-1}\varphi(\xi,s)\,d\xi d\sigma \\ &+ B_2 A \int_s^t (t-\sigma)^{\alpha-1}\,d\sigma + B_2 B_1 \int_s^t \int_s^\sigma (t-\sigma)^{\alpha-1}\varphi(\xi,s)\,d\xi\,d\sigma \\ &+ B_2^2 \int_s^t \int_s^\sigma (t-\sigma)^{\alpha-1}(\sigma-\xi)^{\alpha-1}\varphi(\xi,s)\,d\xi\,d\sigma.\end{aligned} \tag{D.8}$$

Sendo $\varphi(t,s)$ contínua para $0 \leq s < t \leq T$ temos

$$\int_s^t \int_s^\sigma \varphi(\xi,s)\,d\xi d\sigma = \int_s^t \int_\xi^t \varphi(\xi,s)\,d\sigma d\xi;$$
$$\int_s^t \int_s^\sigma (\sigma-\xi)^{\alpha-1}\varphi(\xi,s)\,d\xi d\sigma = \int_s^t \int_\xi^t (\sigma-\xi)^{\alpha-1}\varphi(\xi,s)\,d\sigma d\xi;$$
$$\int_s^t \int_s^\sigma (t-\sigma)^{\alpha-1}\varphi(\xi,s)\,d\xi d\sigma = \int_s^t \int_\xi^t (t-\sigma)^{\alpha-1}\varphi(\xi,s)\,d\sigma d\xi$$

e do Teorema D.4,

$$\int_s^t \int_s^\sigma (t-\sigma)^{\alpha-1}(\sigma-\xi)^{\alpha-1}\varphi(\xi,s)\,d\xi\,d\sigma = \frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \int_s^t (t-\xi)^{2\alpha-1}\varphi(\xi,s)\,d\xi;$$

logo, de (D.8) que,

$$\varphi(t,s) \leq A + B_1 A(t-s) + B_1^2 \int_s^t \varphi(\xi,s)(t-\xi)\, d\xi + B_1 B_2 \int_s^t \varphi(\xi,s) \frac{(t-\xi)^\alpha}{\alpha}\, d\xi$$

$$+ B_2 A \frac{(t-s)^\alpha}{\alpha} + B_1 B_2 \int_s^t \varphi(\xi,s) \frac{(t-s)^\alpha}{\alpha}\, d\xi + \ B_2^2 \frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \int_s^t (t-\xi)^{2\alpha-1} \varphi(\xi,s)\, d\xi.$$

Majorando $(t-s)$ e $(t-\xi)$ por T temos

$$\varphi(t,s) \leq A + B_1 AT + B_1^2 T \int_s^t \varphi(\xi,s)\, d\xi + B_1 B_2 \frac{T^\alpha}{\alpha} \int_s^t \varphi(\xi,s)\, d\xi$$

$$+ B_2 A \frac{T^\alpha}{\alpha} + B_1 B_2 \frac{T^\alpha}{\alpha} \int_s^t \varphi(\xi,s)\, d\xi + \ B_2^2 \frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \int_s^t (t-\xi)^{2\alpha-1} \varphi(\xi,s)\, d\xi.$$

ou seja,

$$\varphi(t,s) \leq \left(A + B_1 AT + B_2 \frac{AT^\alpha}{\alpha} \right) + \left(B_1^2 + 2B_1 B_2 \frac{T^\alpha}{\alpha} \right) \int_s^t \varphi(\xi,s)\, d\xi$$

$$+ B_2^2 \frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \int_s^t (t-\xi)^{2\alpha-1} \varphi(\xi,s)\, d\xi.$$

$*$ Se $2\alpha - 1 > 0$, então

$$\varphi(t,s) \leq \underbrace{\left(A + B_1 AT + B_2 \frac{AT^\alpha}{\alpha} \right)}_{c_1} + \underbrace{\left(B_1^2 + 2B_1 B_2 \frac{T^\alpha}{\alpha} \right)}_{c_2} \int_s^t \varphi(\xi,s)\, d\xi$$

$$+ \underbrace{B_2^2 \frac{\Gamma^2(\alpha) T^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}}_{c_3} \int_s^t \varphi(\xi,s)\, d\xi;$$

assim,

$$\varphi(t,s) \leq c_1 + c_4 \int_s^t \varphi(\xi,s)\, d\xi \tag{D.9}$$

com

$$c_1 = A + B_1 AT + B_2 \frac{AT^\alpha}{\alpha} \quad \text{e} \quad c_4 = c_2 + c_3 = B_1^2 + 2B_1 B_2 \frac{T^\alpha}{\alpha} + B_2^2 \frac{\Gamma^2(\alpha) T^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}.$$

$*$ Se $2\alpha - 1 < 0$, então

$$\varphi(t,s) \leq \left(A + B_1 AT + B_2 \frac{AT^\alpha}{\alpha} \right) + \left(B_1^2 + 2B_1 B_2 \frac{T^\alpha}{\alpha} \right) \int_s^t \varphi(\xi,s)\, d\xi$$

$$+ B_2^2 \frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \int_s^t (t-\xi)^{2\alpha-1} \varphi(\xi,s)\, d\xi.$$

Considerando

$$\tilde{A} = A + B_1 AT + B_2 \frac{AT^\alpha}{\alpha}, \ \tilde{B}_1 = B_1^2 + 2B_1 B_2 \frac{T^\alpha}{\alpha}, \ \tilde{B}_2 = B_2^2 \frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \quad \text{e} \quad \alpha_1 = 2\alpha,$$

temos

$$\varphi(t,s) \leq \tilde{A} + \tilde{B}_1 \int_s^t \varphi(\xi,s)\,d\xi + \tilde{B}_2 \int_s^t (t-\xi)^{\alpha_1 - 1}\,\varphi(\xi,s)\,d\xi; \tag{D.10}$$

então, repetindo o raciocínio,

•• se $\alpha_1 = 1$, então por (D.6)

$$\varphi(t,s) \leq \tilde{A} + \left(\tilde{B}_1 + \tilde{B}_2\right) \int_s^t \varphi(\sigma,s)\,d\sigma;$$

•• se $\alpha_1 > 1$, então por (D.7)

$$\varphi(t,s) \leq \tilde{A} + \left(\tilde{B}_1 + \tilde{B}_2 T^{\alpha-1}\right) \int_s^t \varphi(\sigma,s)\,d\sigma$$

•• se $\alpha_1 < 1$, segue que :

$\star$ se $2\alpha_1 - 1 > 0$, por (D.9)

$$\varphi(t,s) \leq \tilde{c}_1 + \tilde{c}_4 \int_s^t \varphi(\varrho,s)\,d\varrho$$

com

$$\tilde{c}_1 = \tilde{A} + \tilde{B}_1 \tilde{A} T + \tilde{B}_2 \frac{\tilde{A}T^\alpha}{\alpha} \quad \text{e} \quad \tilde{c}_4 = \tilde{c}_2 + \tilde{c}_3 = \tilde{B}_1^2 + 2\tilde{B}_1\tilde{B}_2 \frac{T^\alpha}{\alpha} + \tilde{B}_2^2 \frac{\Gamma^2(\alpha_1) T^{\alpha_1 - 1}}{\Gamma(\alpha_1)} ;$$

$\star$ se $2\alpha_1 - 1 < 0$, por (D.10)

$$\varphi(t,s) \leq \hat{A} + \hat{B}_1 \int_s^t \varphi(\varrho,s)\,d\varrho + \hat{B}_2 \int_s^t (t-\varrho)^{2\alpha_2 - 1} \varphi(\varrho,s)\,d\varrho.$$

De um modo geral interando (D.4) $n-1$ vezes, usando o Teorema D.4 e estimando $(t-s)$ e $(t-\xi)$ por T obtemos

$$\varphi(t,s) \leq A \sum_{j=0}^{n-1} \left(B_2 \frac{T^\alpha}{\alpha}\right)^j + B_1 \sum_{j=0}^{n-1} \left(B_2 \frac{T^\alpha}{\alpha}\right)^j \int_s^t \varphi(\sigma,s)\,d\sigma$$

$$+ \frac{(B_2 \Gamma(\alpha))^n}{\Gamma(n\alpha)} \int_s^t (t-\sigma)^{2^n \alpha - 1} \varphi(\sigma,s)\,d\sigma.$$

Escolhendo n suficientemente grande tal que $2^n\alpha > 1$ e majorando $(t-\sigma)^{2^n\alpha - 1}$ por $T^{2^n\alpha - 1}$ obtemos

$$\varphi(t,s) \leq C_1 + C_2 \int_s^t \varphi(\sigma,s)\,d\sigma,$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas independentes de s. Pela desigualdade de Gronwall, (D.2), temos

$$\varphi(t,s) \leq C_1(1 + C_2te^{C_2t}) = C_1 + C_1C_2te^{C_2t} \leq C_1 + C_1C_2Te^{C_2T} \equiv C. \qquad \text{(D.11)}$$

Uma vez que C_1 e C_2 não depende de s a estimativa (D.11) vale para $0 \leq s < t \leq T$, de onde concluimos o Lema D.1. ■

D.3 O Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e alguns Resultados de Teoria de Medida

Nesta seção reunimos alguns resultados da Teoria de Medida que foram utilizados no decorrer da dissertação.

Teorema D.5 *(TEOREMA DA CONVERGÊNCIA DOMINADA DE LEBESGUE) Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis de I em X, $f : I \to X$ e seja $g \in L^1(I)$. Se*

$$\|f_n(x)\| \leq g(x), \quad q.t.p \quad x \in I \ \ e \ \forall \ n \in \mathbb{N},$$

onde g é uma função integrável e

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad q.t.p. \ x \in I$$

Então,

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx.$$

Demonstração. Veja Brézis/Cazenave[7].

Apresentamos, à seguir, uma versão mais geral para o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que é a seguinte:

Teorema D.6 *(TEOREMA DA CONVERGÊNCIA DOMINADA GENERALIZADO DE LEBESGUE) Seja $(f_n)_{n\in N}$ uma sequência de funções mensuráveis e $f : I \to X$ com*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad q.t.p. \quad em \ I.$$

Suponha que exista uma sequência de funções integráveis $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *verificando*

$$\|f_n\| \leq g_n, \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \ \ e\ q.t.p.\ \ em\ \ I;$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x), \quad q.t.p. \quad em\ \ I;$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_I g_n(x)\, dx = \int_I g(x)\, dx < \infty.$$

Então, f *será integrável e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\, dx = \int_I f(x)\, dx.$$

O Teorema seguinte é uma aplicação do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Tal teorema pode ser encontrado em Lorenzi[23].

Teorema D.7 *Sejam* I_1 *e* I_2 *conjuntos abertos em* $\mathbb{R}$*(ou em* $\mathbb{C}$*) e um intervalo real. Além disso, considere* $g : I_1 \times I_2 \to X$ *uma função contínua e*

$$G(\lambda) = \int_{I_2} g(\lambda, t)\, d\lambda, \quad \lambda \in I_1.$$

(a) Se $\|g(\lambda, t)\| \leq \varphi(t)$*, para todo* $(\lambda, t) \in I_1 \times I_2$ *e alguma função* $\varphi \in L^1(I_2)$*, então* G *será contínua em* I_1*.*

(b) Se g *for diferenciável com respeito a* λ*,* g_λ *for contínua e* $\|g_\lambda(\lambda, t)\| \leq \psi(t)$ *para todo* $(\lambda, t) \in I_1 \times I_2$ *e alguma função* $\psi \in L^1(I_2)$*, então* G *será diferenciável em* I_1 *e*

$$G'(\lambda) = \int_{I_2} g_\lambda(\lambda, t)\, dt, \quad \lambda \in I_1.$$

Demonstração de (a). Fixado $\lambda_0 \in I_1$, temos:

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} g(\lambda, t) = g(\lambda_0, t), \quad \forall\ t \in I_2;$$

pois, $\lambda \to g(\lambda, t)$ é contínua em I_1, uma vez que $g : I_1 \times I_2 \to X$ é uma função contínua. Além disso, por hipótese, existe φ em I_2 integrável com

$$\|g(\lambda, t)\| \leq \varphi(t), \quad \forall\ \lambda \in I_1 \text{ e } \forall\ t \in I_2.$$

Consideremos $\{\lambda_n\} \subset I_1$ com $\lambda_n \to \lambda_0$, quando $n \to \infty$. Vamos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{I_2} g(\lambda_n, t)\, dt = \int_{I_2} g(\lambda_0, t) dt. \tag{D.12}$$

Com esse objetivo, para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$h_n(t) = g(\lambda_n, t), \quad \forall\ t \in I_2$$

e observamos que:

- $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(t) = \lim\limits_{n\to\infty} g(\lambda_n, t) = g(\lambda_0, t), \quad \forall\ t \in I_2;$

- $\|h_n(t)\| = \|g(\lambda_n, t)\| \leq \varphi(t), \quad \forall\ t \in I_1, \forall n \in \mathbb{N}$. Aplicando o TEOREMA DA CONVERGÊNCIA DOMINADA DE LEBESGUE (Teorema D.5), temos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{I_2} h_n(x)\, dt = \int_{I_2} \lim_{n\to\infty} h_n(x)\, dt;$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{I_2} g(\lambda_n, t)\, dt = \int_{I_2} g(\lambda_0, t)\, dt,$$

mostrando (D.12). Assim, de (D.12),

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_{I_2} g(\lambda, t)\, dt = \int_{I_2} g(\lambda_0, t)\, dt.$$

Logo,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} G(\lambda) = G(\lambda_0),$$

mostrando a continuidade de G em $\lambda_0 \in I_1$. Portanto, desde que λ_0 é arbitrário, segue que G é contínua em I_1. A prova de (a) está completa.

Demonstração de (b). Seja $\lambda_1 \in I_1$ fixado e considere $\{\lambda_n\} \subset I_1 \backslash \{\lambda_1\}$ com $\lambda_n \to \lambda_1$. Devemos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G(\lambda_n) - G(\lambda_1)}{\lambda_n - \lambda_1} = \int_{I_2} g_\lambda(\lambda, t)\, dt;$$

logo, podemos concluir que

$$G'(\lambda_1) = \int_{I_2} g_\lambda(\lambda, t)\, dt.$$

Com esse objetivo, para cada $n \in \mathbb{N}$ defina

$$\xi_n(t) = \frac{g(\lambda_n, t) - g(\lambda_1, t)}{\lambda_n - \lambda_1}, \quad \forall\ t \in I_2.$$

Aplicando o TEOREMA DA CONVERGÊNCIA DOMINADA DE LEBESGUE;

$$\lim_{n\to\infty} \int_{I_2} \xi_n(t)\, dt = \int_{I_2} \lim_{n\to\infty} \xi_n(t) dt,$$

o que implica,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{I_2}\left[\frac{g(\lambda_n,t)-g(\lambda_1,t)}{\lambda_n-\lambda_1}\right]dt=\int_{I_2}\frac{\partial g}{\partial\lambda}(\lambda_1,t)\,dt. \tag{D.13}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{G(\lambda_n)-G(\lambda_1)}{\lambda_n-\lambda_1}&=\frac{1}{\lambda_n-\lambda_1}\left\{\int_{I_2}g(\lambda_n,t)\,dt-\int_{I_2}g(\lambda_1,t)\,dt\right\}\\&=\frac{1}{\lambda_n-\lambda_1}\left\{\int_{I_2}\big[g(\lambda_n,t)-g(\lambda_1,t)\big]\,dt\right\};\end{aligned}$$

logo,

$$\frac{G(\lambda_n)-G(\lambda_1)}{\lambda_n-\lambda_1}=\left\{\int_{I_2}\frac{\big[g(\lambda_n,t)-g(\lambda_1,t)\big]}{\lambda_n-\lambda_1}\,dt\right\}; \tag{D.14}$$

Segue de (D.13) e (D.14),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{G(\lambda_n)-G(\lambda_1)}{\lambda_n-\lambda_1}=\int_{I_2}\frac{\partial g}{\partial\lambda}(\lambda_1,t)\,dt;$$

implicando,

$$G'(\lambda)=\int_{I_2}\frac{\partial g}{\partial\lambda}(\lambda,t)\,dt;$$

i.e.,

$$G'(\lambda)=\int_{I_2}g_\lambda(\lambda,t)dt.$$

Os resultados, à seguir, podem ser encontrados em Brézis\Casenave [7], e Lang [21].

Teorema D.8 *Toda função contínua é mensurável.*

Teorema D.9 *A soma de funções integráveis é integrável.*

Teorema D.10 *Uma função f é integrável se, e somente se $\|f\|$ é integrável.*

Teorema D.11 *Se f for integrável e g for uma função mensurável limitada, então o produto $f.g$ também será integrável.*

Teorema D.12 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $p, q \in [1, +\infty]$ com p e q conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então*

$$fg \in L^1(\Omega)$$

e

$$\|fg\|_1 = \int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

D.4 Alguns Resultados de Análise Funcional

Os resultados desta subseção são clássicos e podem ser encontrados em qualquer livro de Análise Funcional elementar (veja por exemplo, Kreyszig[20] e Brézis[6]).

Teorema D.13 *Seja $Y = C([t_0, t_1]; X) = \{\phi : [t_0, t_1] \to X, \textit{contínua}\}$. Então, Y é o espaço de Banach munido da norma do supremo*

$$\| \, y \, \|_Y = \sup_{t_0 \, \leq \, t \, \leq \, t_1} \| \, y(t) \| \, .$$

Demonstração. Claramente, Y é um espaço vetorial; pois, $\phi \equiv 0 \in Y$; donde, $Y \neq \emptyset$; e evidentemente, a função dada por produto de um escalar por uma função contínua, ainda é contínua; bem como, soma de funções contínuas é contínua; logo, Y é um espaço vetorial. A demonstração que a função

$$\begin{aligned} \| \cdot \|_Y : Y &\to \mathbb{R} \\ \phi &\rightsquigarrow \| \cdot \|_Y = \sup_{t_0 \leq \eta \leq t_1} \|\phi(\eta)\| \end{aligned}$$

é uma norma em Y é imediata, usando propriedades de supremo e propriedades de norma. Devemos mostrar que toda sequência de Cauchy em Y é convergente em Y. Seja $\phi_n \subset Y$ uma sequência de Cauchy, então dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq n_0$ implica

$$\|\phi_n - \phi_m\|_{_Y} < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\sup_{t_0 \leq \eta \leq t_1} \|\phi_n(\eta) - \phi_m(\eta)\| = \sup_{t_0 \leq \eta \leq t_1} \|(\phi_n - \phi_m)(\eta)\| = \|\phi_n - \phi_m\|_{_Y} < \varepsilon;$$

o que implica,

$$\|\phi_n(\eta) - \phi_m(\eta)\| < \varepsilon, \quad \text{para } n, m \geq n_0 \tag{D.15}$$

para $t_0 \leq \eta \leq t_1$, fixado. Fixado $t_0 \leq \eta \leq t_1$, temos $\{\phi_n(\eta)\}$ uma sequência de Cauchy em X. Sendo X um espaço de Banach, $\{\phi_n(\eta)\}$ é convergente em X; logo, existe $\phi(\eta) \in X$ tal que

$$\phi_n(\eta) \to \phi(\eta), \quad \text{quando } \eta \to \infty.$$

Claramente, o limite $\phi(\eta)$ depende de $\eta \in [t_0, t_1]$. Então,

$$\begin{aligned} \phi : [t_0, t_1] &\to X \\ \eta \rightsquigarrow \phi(\eta) &= \lim_{n\to\infty} \phi_n(\eta). \end{aligned}$$

Observe, que ϕ está bem definida, fato que decorre imediato da unicidade do limite $\left(\phi(t) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \lim_{n\to\infty} (\phi_n(t_1)) = \phi(t_1) \right)$. Devemos justificar que,

(a) $\phi \in Y$;

(b) $\phi_n \to \phi \quad$ em Y.

Justificativa de (a): De (D.15) $\phi_n \to \phi$ uniformemente em $[t_0, t_1]$, então, ϕ é limite uniforme de uma sequência de funções contínuas; logo, ϕ é contínua.

Justificativa de (b): Passando o limite em (D.15) com $m \to \infty$, obtemos para todo $\eta \in [t_0, t_1]$ fixado,

$$\|\phi_n(\eta) - \phi(\eta)\| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_0;$$

logo, por propriedade de supremo,

$$\sup_{t_0 \leq \eta \leq t_1} \|\phi_n(\eta) - \phi(\eta)\| < \varepsilon, \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Daí,

$$\|\phi_n - \phi\|_Y \to 0, \quad n \to \infty;$$

donde,

$$\phi_n \to \phi \quad \text{em } Y, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Sendo $\{\phi_n\}$ uma sequência arbitrária, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ é um espaço de Banach. ■

Com o mesmo raciocínio, mostra-se, facilmente, o seguinte Teorema.

Teorema D.14 *Seja $\mathcal{Y}$ o espaço $C([t_0, t_1]; X \times X)$. Então $\mathcal{Y}$ munido da norma do supremo*

$$\| (y_1, y_2) \|_{\mathcal{Y}} = \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \left[\| y_1(t) \| + \| y_2(t) \| \right],$$

com $y_i \in C([t_0, t_1]; X), i = 1, 2$ é um espaço de Banach.

Teorema D.15 *Seja Y um espaço de Banach e $Z \subset Y$ fechado em Y então Z é completo.*

Teorema D.16 *(TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH) Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $F : X \to X$ uma contração, ou seja,*

$$d\big(F(x), F(y)\big) \leq kd(x, y) \quad 0 \leq k < 1.$$

Então existe um único ponto fixo p, por F, isto é, existe um único ponto $p \in X$ tal que

$$F(p) = p.$$

(A demonstração deste Teorema também pode ser encontrada no livro do Sotomayor [30].)

Teorema D.17 *(TEOREMA DO GRÁFICO FECHADO) Sejam X e Y dois espaços de Banach. Seja $T : X \to Y$ um operador linear. Suponha que o gráfico de T, $G(T)$, é fechado em $X \times Y$. Então, T é contínuo.*

Teorema D.18 *(TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS) Sejam E e F dois espaços de Banach. Seja $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de operadores limitados de E em F. Suponha que*

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|T_\lambda x\| < \infty, \quad \forall\, x \in E.$$

Então,

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|T_\lambda\| < \infty.$$

Definição D.19 *Sejam X e Y espaços vetoriais com $X \subset Y$ munidos das normas $\| \cdot \|_X$ e $\| \cdot \|_Y$. Diremos que $(X, \| \cdot \|_X)$ está imerso continuamente em $(Y, \| \cdot \|_Y)$, se a aplicação identidade*

$$I : (X, \| \cdot \|_X) \to (Y, \| \cdot \|_Y)$$

é contínua; isto é, existe $M > 0$ tal que

$$\|I(x)\|_Y \leq M\|x\|_X, \qquad \forall\, x \in X,$$

ou seja,

$$\|x\|_Y \leq M\|x\|_X \qquad \forall\, x \in X.$$

Notação:

$$(X, \|\cdot\|_X) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} (Y, \|\cdot\|_Y);$$

ou

$$X \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} Y;$$

quando não houver confusão entre as normas.

Apêndice E

Espaços de Funções

Nesta seção, com o intuito de definir os espaços $H^2(Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ introduzimos os espaços $L^p(\Omega), W^{m,p}(\Omega)$ e $W_0^{m,p}$. Além disso, tratamos nesta seção do espaço $C^\nu(\overline{\Omega})$. Baseados em Brézis [6] e Medeiros [28].

No que segue $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto.

E.1 O Espaço $L^p(\Omega)$

Definição E.1 *Definimos $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ o espaço de Banach das funções reais u, definidas em Ω, mensuráveis cuja potência p, $|u|^p$, é integrável em Ω; isto é,*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e} \int_\Omega |u|^p < \infty \right\};$$

munido com a norma,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_I |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar,

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\overline{v}(x) \, dx$$

onde $\overline{v}$ é o complexo conjugado de v.

E.2 O Espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ e o Subespaço $W_0^{m,p}(\Omega)$

Com o intuito de definir espaços de Sobolev vamos apresentar, inicialmente, algumas definições

Definição E.2 *Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua, definimos o* **suporte de** *u, denotado por* **spp(u)**, *como sendo o seguinte conjunto,*

$$spp(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}.$$

Definição E.3 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é o subespaço de $C^\infty(\Omega)$, onde as funções tem suporte compacto contido em Ω, i.e.,*

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega)/spp(u) \subset\subset \Omega\},$$

com

$$C^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}/D^\alpha u \in C(\Omega),\ \forall\ \alpha\},$$

onde $D^\alpha u$ é a derivada no sentido das distribuições. O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é conhecido na literatura como o **espaço das funções testes**.

Agora vamos definir o Subespaço $W^{m,p}(\Omega)$.

Definição E.4 *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$, $m \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$. O* **espaço de Sobolev**, $\mathbf{W^{m,p}(\Omega)}$, *é definido por*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^N, 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

sendo D^α no sentido das distribuições. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Quando $p = 2$, denotamos o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ por $\mathbf{H^m(\Omega)}$. Este espaço $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

onde $(\cdot, \cdot)$ denota o produto interno usual em $L^2(\Omega)$.

Definição E.5 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. O espaço $\mathbf{W_0^{m,p}(\Omega)}$ é definido como o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, i.e.,*

$$W_0^{m,\,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\,\|\cdot\|_{m,p}}.$$

Analogamente, $\mathbf{H_0^m(\Omega)}$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$, ou seja,

$$H_0^m(\Omega) = W_0^{m,\,2}(\Omega).$$

E.3 Espaço $C^\nu(\overline{\Omega})$;

Definição E.6 *Para qualquer conjunto aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e qualquer $\nu \in (0,1)$ o espaço $C^\nu(\overline{\Omega})$ consiste de todas as funções $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), tal que*

$$H_{o,\,\nu}(u) = \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in \Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\nu} < \infty;$$

munido da norma,

$$\|u\|_{C^\nu(\overline{\Omega})} = \|u\|_{\max} + H_{o,\,\nu}(u).$$

Teorema E.7 *Temos*

$$C^\nu(\overline{\Omega}) \underset{cont}{\hookrightarrow} L^s(\Omega), \qquad \forall\ s \in [1,\infty). \tag{E.1}$$

Demonstração. Se $u \in C^\nu(\overline{\Omega})$ então

$$\|u\|_{L^s(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^s\right)^{1/s} \leq \left(\int_\Omega \|u\|_{\max}^s\right)^{1/s} \leq \|u\|_{\max}|\Omega|^{1/s} \leq |\Omega|^{1/s}\|u\|_{C^\nu(\overline{\Omega})}.$$

ou seja,

$$\|u\|_{L^s(\Omega)} = C\|u\|_{C^\nu(\overline{\Omega})};$$

mostrando (E.1). ■

Apêndice F

Resultados envolvendo os espaços $L^p(\Omega)$ e $W^{m,p}(\Omega)$

Neste Apêndice, enunciaremos alguns resultados clássicos envolvendo os espaços de funções $L^p(\Omega)$ e $W^{m,p}(\Omega)$.

F.1 O Problema de Dirichlet

Consideremos o seguinte **Problema de Dirichlet** :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, \quad \text{em } \Omega \\ u = 0 \quad \text{em } \Gamma = \partial\Omega., \end{cases} \tag{F.1}$$

Definição F.1 *Uma solução clássica de (F.1) é uma função* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *que verifica (F.1). Uma solução fraca de (F.1) é uma função* $u \in H_0^1(\Omega)$ *que verifica*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv, \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega). \tag{F.2}$$

Com relação ao problema (F.1) temos o seguinte resultado de regularidade.

Teorema F.2 *(TEOREMA DE REGULARIDADE) Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto de classe* C^2 *com fronteira limitada. Seja* $f \in L^2(\Omega)$ *e seja* $u \in H_0^1(\Omega)$ *que verifica (F.2). Então,*

$u \in H^2(\Omega)$ e

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_2,$$

onde c é uma constante que só depende de Ω. Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e $f \in H^m(\Omega)$ então

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \quad com \quad \|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c\|f\|_{H^m(\Omega)};$$

em particular, se $m > \frac{N}{2}$ então $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Por último, se Ω é de classe C^∞ e se $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, então $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Ver Brézis [6].

F.2 Operadores Fortementes Elípticos

No que segue $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, com fronteira suave. Considere um operador diferenciável da forma

$$A(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

com $a_\alpha(x)$ funções à valores complexos definidos em $\overline{\Omega}$ para cada *multi - índice* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, $|\,\alpha\,| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N$; $2m$ é conhecido como a ordem de A e

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_1^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot D_1^{\alpha_N} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial_{x_1^{\alpha_1}}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial_{x_2^{\alpha_2}}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial_{x_N^{\alpha_N}}}$$

é o *operador de derivação* de ordem α.

Definição F.3 *Dizemos que A é um* **operador elíptico** *(ou do tipo elíptico) no ponto $x_0 \in \Omega$ se*

$$\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x_0)\xi^\alpha \neq 0, \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

O operador A é **fortemente elíptico** *em x_0 se*

$$(-1)^m Re\left(\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x_0)\xi^\alpha \right) > 0, \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Exemplo 4 *O operador Laplaciano, $\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, é um operador elíptico. E o operador $-\Delta$ é fortemente elíptico.(Veja Pazy [26].)*

Definição F.4 *Seja $A = A(x, D)$, um operador fortemente elíptico de ordem $2m$ em um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ e, considere $1 < p < \infty$. Definimos*

$$D(A_p) = W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$$

e

$$A_p u = A(x, D)u, \qquad \text{para } u \in D(A_p).$$

Teorema F.5 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domíneo limitado com fronteira suave $\partial\Omega$ e seja A_p o operador definido como acima. Se $0 \leq \alpha \leq 1$ então temos as seguintes imersões contínuas:*

(i) $X^\alpha \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega)$ *para* $k - \dfrac{N}{q} < 2m\alpha - \dfrac{N}{p}$, $q \geq p$ *com* $k \in \mathbb{N}$;

(ii) $X^\alpha \hookrightarrow C^\nu(\overline{\Omega})$ *para* $0 \leq \nu < 2m\alpha - \dfrac{N}{p}$;

(iii) $X^\alpha \hookrightarrow L^r(\Omega)$ *para* $r \leq \dfrac{Np}{N - 2m\alpha p}, 0 \leq \alpha < \dfrac{N}{2p}$.

Demonstração. Veja Friedman [19].

Teorema F.6 *Seja $A(x, D)$ um operador fortemente elíptico de ordem $2m$ em um domínio limitado com fronteira, $\partial\Omega$, suave em $\mathbb{R}^N$ e seja $1 < p < \infty$. Se A_p for o operador associado com A pela definição F.4, então $-A_p$ será o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico em $L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Veja Pazy [26], p. 214.

Teorema F.7 *Seja $1 < p < \infty$, o operador $-A_p$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico de contração em $L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Veja Pazy [26], p. 215-216.

Observação F.8 *Pelos Teoremas F.6 e F.7 segue que, o operador Laplaciano Δ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico; uma vez que, $-\Delta$ é um operador fortemente elíptico.*

Apêndice G

Resultados relacionados ao Problema de Cauchy

Neste apêndice, consideraremos o modelo diferencial

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t), & 0 < t < T \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{G.1}$$

onde $f : [0,T) \to X$ e $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $T(t)$ com $t > 0$, de forma que, a *equação homogênea* correspondente, isto é, a equação com $f \equiv 0$, tem uma única solução para todo valor inicial $u_0 \in D(A)$.

Definição G.1 *Uma função $u \in C\big([0,T] : X\big)$ é uma solução forte de (G.1) se*

$$\begin{aligned}
&u(t) \in D(A) \ q.t.p \ em \ [0,T],\\
&u \ \ é \ diferenciável \ q.t.p \ em \ (0,T),\\
&\frac{du}{dt} \in L^1\big([0,T] : X\big),\\
&u(0) = u_0,\\
&\frac{du}{dt} = Au(t) + f(t) \ q.t.p \ em \ [0,T].
\end{aligned}$$

Proposição G.2 *Se $f \in L^1([0,T] : X)$ então o problema (G.1) tem no máximo uma solução forte. Além disso, se $u(\cdot)$ é uma solução forte então*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \quad t \in [0,T].$$

Motivados pela proposição (G.2), consideremos a seguinte efinição:

Definição G.3 *Uma função $u \in C([0,T]:X)$ é uma solução generalizada do problema (G.1) se*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0,T].$$

Pela proposição G.2 solução forte é sempre uma solução generalizada, quando $f \in L^1([0,T]:X)$. É importante observarmos que em geral a solução generalizada de (G.1) não é uma solução forte de (G.1).

Corolário G.4 *Seja X um espaço de Banach reflexivo e A o gerador infinitesimal de um C_0- semigrupo $T(t)$. Se f for Lipschitz contínua em $[0,T)$ então para todo $x \in D(A)$, o problema de valor inicial (G.1) terá uma única solução forte u em $[0,T]$ dado por*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^T T(t-s)f(s)\,ds.$$

Teorema G.5 *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $T(t)$. Se $f \in L^1\big((0,T):X\big)$ for localmente hölder contínua em $(0,T]$, então para todo $x \in X$ o problema de valor inicial (G.1) terá uma única solução clássica.*

Teorema G.6 *Se A for o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico. Se $f \in L^1([0,T];X)$ for Hölder contínua então o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}(t) = Av(t) + f(t), & t > t_0 \\ \qquad\qquad v(t_0) = u_0\,. \end{cases} \tag{G.2}$$

possuirá uma única solução u.

Observação G.7 *Note que na demostração do Teorema G.6, todo o raciocínio foi feito estimando t por um T fixo, assim temos uma versão do Teorema G.6 para a função f definida em intervalo limitado da semireta não-negativa.*

Bibliografia

[1] Aassila, M., Cavalcanti,M. M., Domingos Cavalcanti, V. N, *Existence and uniform decay of the wave equation with nonlinear boundary damping and boundary memory source term.*, published online: 29 april 2002, Calc. Var. 15, 155 - 180 (2002).

[2] Garcia A.; Lequain, Y. *Elementos de Algebra.* Rio de Janeiro: Projeto Euclides-IMPA, (2002).

[3] Bahuguna, D., *Existence, uniqueness and regularity of solutions to semilinear* non-local functional defferential problems. Journal of, Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 57 (2004) 1021 - 1028.

[4] Bahuguna, D., *Integrodifferential equations with analytic semigroups.* Journal of, Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 16:2 (2003), 177 - 189.

[5] Bahuguna, D., *Strongly damped semilinear equations.*, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis 8, number 4 (1995), 397 - 404.

[6] Brézis, Haim, *Analyse fonctionelle.*, 2ª ed. Masson, (1987).

[7] Brézis, H., Cazenave, T., *Nonlinear evolution equations.* Notas de aula, UFRJ (1994).

[8] Cavalcanti,M. M., Domingos Cavalcanti, V. N., Martinez, P., *Existence and decay rate estimates for the wave equation with nonlinear boundary damping and source term.*, Elsevier, 203, (2004) 119 - 158.

[9] Cavalcanti,M. M., Domingos Cavalcanti, V. N., Prates Filho, J. S., Soriano, J. A., *Existence and uniform decay of solutions of a parabolic-hyperbolic equation*

with nonlinear boundary damping and boundary source term., vol. 10, number 3, 451 - 466, (2002)

[10] Cavalcanti,M. M., Domingos Cavalcanti, V. N., Soriano, J. A., *Global solvability and asymptotic stability for the wave equation with nonlinear boundary damping and source term.*, Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland, vol. 66, 161 - 184, (2005).

[11] Cavalcanti,M. M. An International Multidisciplinary Journal EDITOR-IN-CHIEF: V. LAKSHMIKANTHAN. Instituto Florida. The author's personal copy, (2008).

[12] de Carvalho, Alexandre Nolasco. *Equações Parabólicas Semilineares* Notas de aula, (2001)- icmc-USP. São Carlos.

[13] Klaus, E., Nagel, R., *One- parameter Semigroups for Linear Evolution Equations.* Graduate texts in Mathematics 194. Editorial Board. S. Axler F.W. Gehring K. A Ribet(2000) Springer-Verlag New York.

[14] Elon, L. L., 1929 - *Curso de Análise,* Volume 2. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq (1981) 557 p.p. (Projeto Euclides).

[15] Evans, L. C., *Partial Differential Equations.* Vol. 19, American Mathematical Society, U. S. A., (1949).

[16] Goldstein, J. A., *Semigroups of operators and abstract cauchy problems,* New Orleans (1970).

[17] Hille, E. *Analytic Function Theory.* Vol.I.2nd ed. New York: Chelsea (1973).

[18] Hernández M.*Teoria de Semigrupos e Aplicações a Equações Funcionais Impulsivas.* Notas de Aula. São Carlos, (2003).

[19] Friedman, Avner, *Partial differential equations,* Robert E. Kriger Publishing Company, Inc (1969).

[20] Kreyszig, E., *Introductory functional analysis with applications.*, John Wiley, New York (1989).

[21] Lang, Serg, *Analysis I,* Addison-Wesley (1969).

[22] Lang, Serg, *Analysis II,* Addison-Wesley (1969).

[23] *Lorenzi, L., Lunard, A., Metafune, G., Pallara, D.. Analytic Semigroups and Reaction-Diffusion.Problems Internet,* Seminar 2004–2005.

[24] de Melo, R. A. *A Teoria de Semigrupo Aplicada às Equações Diferenciais Parciais.* Dissertação de Mestrado. CCT - UFCG (2007).

[25] Menoncini, L., *Existência e unicidade de soluções globais de quações de evolução semilineares via teoria de semigrupos.* Dissertação de Mestrado. CCT - UFCG (2005).

[26] Pazy, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential* Equations. Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo (1983).

[27] do J. D. Murray- *Mathematical Biology* . Leah Edelstein - Keshet. Mathematical Models in Biology. Random House, Inc., New York (1988).

[28] L.A. Medeiros, M. Milla Miranda. *Iniciação aos Problemas não Homogêneos.* Espaços de Sobolev. Notas de Aula. Instituto de Matemática - UFRJ (2000).

[29] dos Santos, M. D., *Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos via métodos variacionais.* Dissertação de Mestrado. CCT PPGMat - UFCG (2005).

[30] Sotomayor, Jorge,*Lições de equações diferenciais ordinárias,* projeto Euclides IMPA (1979).

Índice