

Resumo

Neste trabalho deduzimos o sistema de Equações de Águas Rasas na forma Lagrangeana e obtemos a sua solução analítica. Aplicamos o Método Espectral na análise numérica deste sistema e mostramos que a propagação das ondas de águas rasas não depende do meio em que ela se propaga.

Abstract

In this work we deduce the system of Shallow Water Equations in the Lagrangian form and we obtain its analytical solution. We have applied the spectral method in the numerical analysis of this system and we have shown that the propagation of the shallow water waves doesn't depend on the medium in which it spreads.

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Teconologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Uma Aplicação do Método Espectral no estudo das Equações de Águas Rasas em Meio Heterogêneo

por

Hallyson Gustavo Guedes de Moraes Lima

sob orientação do

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB

Março/2007

Uma Aplicação do Método Espectral no estudo das Equações de Águas Rasas em Meio Heterogêneo

por

Hallyson Gustavo Guedes de Morais Lima

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Lenimar Nunes de Andrade

Prof. Dr. Aparecido Jesuíno de Sousa

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes

Orientador

**Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática**

Março/2007

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por todas as graças a mim concedidas.

A meus pais Lima e Tânia por incontável número de fatos.

A meus irmãos Leonardo e Anna pela compreensão e apoio.

A meus avôs maternos Absalão (*in memorium*) e Erinete e minha avó paterna Adeides (*in memorium*), por todo o apoio dado a mim em todos os momentos.

Aos professores Aparecido e Lenimar por aceitarem me avaliar, fazendo parte da minha banca.

Ao professor José de Arimatéia pela paciência, amizade, apoio e compreensão durante todo o período que me orientou e onde tenho o maior orgulho de ser o primeiro mestre formado por ele.

A todos os professores do DME/UFCEG, pela contribuição em minha formação, mas em especial aos professores Marco Aurélio, pela amizade, apoio, compreensão e Claudianor, pela motivação e confiança.

A todos os funcionários do DME, Valdir, Dona Argentina, Valdiza, Vanda, Sóstenes e Salete, que fizeram o possível para me ajudar.

A todos os colegas do departamento de Matemática. Aos de graduação Jesualdo, Enivaldo, Tatiana, Jacqueline. Aos de mestrado Areli, Romero, Flank, Marta, Lya Raquel, Marco Antônio (Peruano), Joselma, Rosangela, Alannion, Leopoldo e Jefferson. E ainda aos colegas de todos os dias Dysterro, Thiciany, Daniel, Pablo, Fabio, Junior (Braz), Juliana e Lauriclécio. Também a todos os colegas que infelizmente não foram aqui citados, mas que também tiveram uma importância enorme neste processo.

Ao CNP'q, pelo apoio financeiro.

Por fim, agradeço a todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Dedicatória

Aos meus pais Lima e Tânia e a
meus irmãos Leonardo e Anna.

Conteúdo

Introdução	6
1 As Equações de Águas Rasas	8
1.1 Derivada Material	8
1.2 Princípio de conservação de massa	10
1.3 Princípio de conservação de quantidade de movimento	12
1.4 Equações de Águas Rasas	13
2 As ondas de Águas Rasas	17
3 Análise Espectral do Modelo de Águas Rasas	21
3.1 As Equações de Águas Rasas Discretizadas	21
3.2 O Método Numérico Espectral em Grades Heterogêneas	25
3.3 Caso Unidimensional	27
3.4 O Uso de Diferenças Finitas	32
4 Resultados Numéricos	35
4.1 Unidimensional	35
4.2 Bidimensional	37
A Método das Diferenças Finitas	47
A.1 Aproximação por Diferenças Finitas	47
A.2 Consistência, Convergência e Estabilidade	51
A.2.1 Consistência	51
A.2.2 Convergência	52
A.2.3 Estabilidade	52

B	Introdução às Transformadas Discretas de Fourier	54
B.1	Um pouco de História	54
B.2	Introdução	57
B.3	Aproximação da Transformada de Fourier pela DFT	58
B.4	A DFT e a IDFT	61
B.4.1	Transformada Discreta de Fourier	62
B.4.2	Transformada Discreta Inversa de Fourier	62
B.5	Aproximação da DFT para os Coeficientes de Séries de Fourier	63
B.6	Transformada Discreta de Fourier em Duas Dimensões	64
B.6.1	Transformada Discreta de Fourier Bidimensional	66
B.6.2	Transformada Discreta Inversa de Fourier Bidimensional	66
C	Lista de Programas	67
C.1	Equações de Águas Rasas Unidimensional	68
C.1.1	Funções	68
C.1.2	Entrada de Dados	68
C.1.3	Grade Espacial	71
C.1.4	Discretização do método numérico	72
C.1.5	Programa Fonte	73
C.2	Equações de Águas Rasas Bidimensional	75
C.2.1	Funções	75
C.2.2	Entrada de Dados	77
C.2.3	Discretização do método numérico	80
C.2.4	Programas	81
C.3	Implementação Gráfica	87
C.3.1	Unidimensional	88
C.3.2	Bidimensional	90
	Bibliografia	96

Introdução

Os fenômenos ligados ao escoamento de fluidos são estudados pela Mecânica dos Fluidos, cujas equações governantes são modeladas matematicamente por meio de leis de conservação, as quais consistem de um sistema de equações diferenciais parciais. A dificuldade em se encontrar soluções analíticas para estas equações, se deve ao domínio irregular, à não linearidade das equações, entre outros fatos. Por isso, há a necessidade do tratamento numérico destas equações.

A dinâmica de um fluido incompressível é descrita pela lei de conservação de massa e pela lei de conservação do momento (veja [2]).

As Equações de Águas Rasas formam um sistema de equações diferenciais parciais deduzidos a partir das leis de conservação de massa e de momento de um fluido. Elas constituem as conhecidas Equações de Euler da Dinâmica dos Fluidos, as quais são um caso particular das clássicas Equações de Navier-Stokes. Estas equações surgiram pela primeira vez no século XVIII deduzidas por Laplace e ficaram conhecidas como as Equações das Marés de Laplace. É importante deixar claro que apesar do nome as equações de águas rasas modelam fenômenos meteorológicos e oceanográficos de uma onda cuja altura é pequena comparada com o seu comprimento, ou seja, aquelas ondas cujos números de Rossby são muito pequenos (para mais detalhes veja [5]), isto não significa que as ondas tenham pequenas alturas.

Neste trabalho deduziremos no Capítulo 1 a forma Lagrangeana das Equações de Águas Rasas, as quais serão linearizadas e estudadas num domínio periódico. A solução analítica destas Equações serão obtidas no Capítulo 2.

No trabalho de Elvius e Sündstrom [4] é feito um estudo das ondas de águas usando-se o Método de Diferenças Finitas e é mostrado que a velocidade de propa-

gação destas ondas depende da grade que é usada para modelar o meio em que elas se propagam.

No Capítulo 3 aplicamos o Método Espectral na análise numérica das Equações de Águas Rasas e mostramos que a velocidade de propagação das ondas não depende da grade que é usada para modelar o meio em que elas se propagam. Este estudo mostra uma vantagem do Método Espectral em relação ao Método de Diferenças Finitas no estudo das Equações de Águas Rasas, pois se não há interferência da grade quando se usa o método numérico espectral na análise da propagação de ondas de águas rasas, diferentemente do método de diferenças finitas, então ao se usar o método espectral qualquer interferência na propagação da onda se deve a algum outro fator.

No Capítulo 4 comprovaremos os resultados numéricos por meio da implementação gráfica de algumas ondas.

Capítulo 1

As Equações de Águas Rasas

1.1 Derivada Material

Ao estudarmos as equações do movimento de um fluido em uma dada região do espaço, existem duas maneiras de descrever o seu movimento. Uma chamada Formulação Euleriana e a outra chamada Formulação Lagrangeana. Em nosso estudo trabalharemos com a formulação lagrangeana. Nesta formulação definimos uma região material, ou seja, formada por um conjunto de partículas de fluido que depende do tempo.

Denotaremos a região por Ω , a qual depende do tempo, ou seja, $\Omega = \Omega(t)$. O domínio Ω se deforma à medida que suas partículas se movimentam.

Assim sendo, as grandezas de escoamento são especificadas como funções do tempo e da partícula de fluido identificada por um parâmetro:

$$\vec{x}(\vec{a}, t).$$

Esta representação nos dá a posição da partícula de fluido que no instante t se encontra em \vec{x} , mas no instante inicial se encontrava em \vec{a} . Logo $\vec{x}(\vec{a}, t)$, para $t \in [0, T]$, descreve a órbita (ou movimento) da partícula, localizada inicialmente em \vec{a} , durante o intervalo de tempo de duração T .

Traduzindo os dados anteriores de forma a usarmos conceitos/objetos matemáti-

cos, definimos a aplicação de escoamento φ_t :

$$\begin{aligned}\varphi_t : \Omega(t_0) &\longrightarrow \Omega(t) \\ \vec{a} &\longmapsto \varphi_t(\vec{a}) = \vec{x}(\vec{a}, t)\end{aligned}$$

Esta aplicação φ_t descreve o movimento das partículas de fluido, partindo da configuração inicial da região definida até a sua configuração final. Se fixarmos o parâmetro \vec{a} , temos uma representação matemática para a órbita descrita pela partícula, que no instante inicial $t = t_0$, residia em $\vec{x} = \vec{a}$. Observe que estamos pressupondo o conhecimento desta função φ_t , que na maioria dos casos não é fácil de ser obtida.

Para a complementação de nosso estudo, precisaremos do conceito de Derivada Material (veja [11]).

Assim, considere no instante t a partícula de fluido representada por:

$$\vec{x}(\vec{a}, t) = (x(\vec{a}, t), y(\vec{a}, t), z(\vec{a}, t)).$$

Aplicando a derivada com relação ao tempo na mesma obtemos,

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(\vec{a}, t) = \left(\frac{d}{dt} x(\vec{a}, t), \frac{d}{dt} y(\vec{a}, t), \frac{d}{dt} z(\vec{a}, t) \right) = (u(\vec{a}, t), v(\vec{a}, t), w(\vec{a}, t)) = \vec{U}(\vec{x}(\vec{a}, t), t),$$

onde $\vec{U}(\vec{x}(\vec{a}, t), t)$ é o campo de velocidades de deslocamento das partículas, o qual depende da posição das partículas e do tempo.

Considere agora uma grandeza qualquer (escalar ou vetorial) associada ao escoamento. Denotaremos esta grandeza por $\Psi = \Psi(x(\vec{a}, t), y(\vec{a}, t), z(\vec{a}, t), t)$. Aplicando-se a derivada com relação ao tempo em Ψ e utilizando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{d\Psi}{dt}(\vec{x}(\vec{a}, t), t) = \frac{\partial\Psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

mas,

$$\frac{dx}{dt} \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial\Psi}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial\Psi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial t} = u \frac{\partial\Psi}{\partial x} + v \frac{\partial\Psi}{\partial y} + w \frac{\partial\Psi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

Logo,

$$\frac{d\Psi}{dt}(\vec{x}(\vec{a}, t), t) = u \frac{\partial\Psi}{\partial x} + v \frac{\partial\Psi}{\partial y} + w \frac{\partial\Psi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial t} = (\vec{U} \cdot \nabla)\Psi + \frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

Deste modo, obtemos o chamado operador da Derivada Material. O qual é denotada por,

$$\frac{D}{Dt} \equiv (\vec{U} \cdot \nabla) + \frac{\partial}{\partial t},$$

Portanto, para um campo Ψ qualquer

$$\frac{D\Psi}{Dt} = (\vec{U} \cdot \nabla)\Psi + \frac{\partial\Psi}{\partial t}. \quad (1.1)$$

Nas próximas seções obteremos duas equações de balanço do movimento que nos permite trabalhar em um domínio material, conforme descrito em [2].

1.2 Princípio de conservação de massa

Considere um domínio material representado por $\Omega(t)$. A massa total é denotada por $m(\Omega(t))$. O princípio de conservação de massa nos dá

$$\frac{D}{Dt}m(\Omega(t)) = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} \rho(\vec{x}, t) d\Omega = 0,$$

onde $\rho(\vec{x}, t)$ é a densidade do fluido num tempo t qualquer.

Não podemos passar a derivada temporal para dentro da integral, pois o domínio é variável no tempo. Fazemos uma mudança de coordenadas, de forma a manter o domínio de integração fixo no tempo. Seja $\varphi = \varphi_t$ a aplicação de escoamento definida na seção (1.1) tal que $\varphi_t(\vec{x}_0) = \vec{x}(\vec{x}_0, t) = \vec{x}$ e $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0) = \vec{a}$. Então:

$$\frac{D}{Dt}m(\Omega(t)) = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t_0)} \rho(\varphi_t(\vec{x}_0), t) J(t) d\Omega_0,$$

onde $J(t)$ é o Jacobiano da mudança de variáveis (veja [12]). Considerando $\rho(\varphi_t(\vec{x}_0), t) = \rho$ (pois é a densidade em \vec{a}) e $J = J(t)$, segue que,

$$\frac{D}{Dt}m(\Omega(t)) = \int_{\Omega(t_0)} \frac{D}{Dt}(\rho J) d\Omega_0 = \int_{\Omega(t_0)} \left(\frac{D\rho}{Dt} J + \rho \frac{DJ}{Dt} \right) d\Omega_0,$$

onde J é dado por

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix},$$

com $\vec{x} = (x, y, z)$ e $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Temos,

$$d\Omega = J(t) d\Omega_0 = J(t) d\Omega(t_0),$$

assim integrando a primeira igualdade acima obtemos o volume de Ω

$$\text{Volume} = \int_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega(t_0)} J d\Omega_0.$$

Note que se

$$J(t) = \text{constante} = 1$$

então,

$$\int_{\Omega(t)} d\Omega = \int_{\Omega(t_0)} J d\Omega_0 = \int_{\Omega(t_0)} d\Omega_0.$$

Assim, $\text{volume}(\Omega(t)) = \text{volume}(\Omega(t_0))$, $\forall t$. Portanto, como o volume não se altera com relação ao tempo, o fluido é dito incompressível. Um bom exemplo disso seria uma bexiga cheia de água, mesmo sofrendo deformação em sua superfície, o volume de água não se altera.

Relacionando o Jacobiano ao divergente da velocidade, temos o seguinte lema:

Lema 1.1 *Dado um campo de velocidades $\vec{U}(\vec{x}, t)$ o Jacobiano J correspondente à mudança de coordenadas dada pela aplicação φ_t satisfaz,*

$$\frac{DJ}{Dt} = (\text{div} \vec{U})J.$$

Demonstração do Lema 1.1:

Calculemos a derivada material do Jacobiano. Usaremos para isso a propriedade de multilinearidade do determinante e a seguinte notação $\frac{\partial p}{\partial q} = p_q$, desse modo,

$$\frac{DJ}{Dt} = \begin{vmatrix} \frac{D}{Dt}(\frac{\partial x}{\partial x_0}) & \frac{D}{Dt}(\frac{\partial x}{\partial y_0}) & \frac{D}{Dt}(\frac{\partial x}{\partial z_0}) \\ y_{x_0} & y_{y_0} & y_{z_0} \\ z_{x_0} & z_{y_0} & z_{z_0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{x_0} & x_{y_0} & x_{z_0} \\ \frac{D}{Dt}(\frac{\partial y}{\partial x_0}) & \frac{D}{Dt}(\frac{\partial y}{\partial y_0}) & \frac{D}{Dt}(\frac{\partial y}{\partial z_0}) \\ z_{x_0} & z_{y_0} & z_{z_0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{x_0} & x_{y_0} & x_{z_0} \\ y_{x_0} & y_{y_0} & y_{z_0} \\ \frac{D}{Dt}(\frac{\partial z}{\partial x_0}) & \frac{D}{Dt}(\frac{\partial z}{\partial y_0}) & \frac{D}{Dt}(\frac{\partial z}{\partial z_0}) \end{vmatrix}.$$

Observemos o fato de que, as variáveis x, y e z dependem das coordenadas iniciais (x_0, y_0, z_0) (estas invariantes com o tempo) e da variável tempo t , ou seja, $p = p((x_0, y_0, z_0), t)$, com $p = x, y$ e z . Assim $\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial p}{\partial q} \right) = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{Dp}{Dt} \right)$, com $q = x_0, y_0$ e z_0 . Logo a derivada material (neste caso), é igual a derivada parcial com relação ao tempo.

Temos,

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right) = \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{Dx}{Dt} \right) = \frac{\partial u}{\partial x_0} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_0}.$$

Usando um raciocínio análogo para as outras derivadas obtemos:

$$\frac{DJ}{Dt} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ y_{x_0} & y_{y_0} & y_{z_0} \\ z_{x_0} & z_{y_0} & z_{z_0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{x_0} & x_{y_0} & x_{z_0} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z_0} \\ z_{x_0} & z_{y_0} & z_{z_0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{x_0} & x_{y_0} & x_{z_0} \\ y_{x_0} & y_{y_0} & y_{z_0} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix}.$$

Podemos então concluir que,

$$\frac{DJ}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial x} J + \frac{\partial v}{\partial y} J + \frac{\partial w}{\partial z} J = (\nabla \cdot \vec{U})J. \quad \blacksquare$$

Voltando ao princípio da conservação de massa, temos pelo Lema 1.1 que,

$$\frac{D}{Dt}m(\Omega(t)) = \int_{\Omega(t_0)} \left(\frac{D\rho}{Dt}J + \rho \frac{DJ}{Dt} \right) d\Omega_0 = \int_{\Omega(t_0)} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\operatorname{div}\vec{U}) \right) Jd\Omega_0 = 0.$$

Logo, usando novamente o teorema de mudança de variáveis em integrais múltiplas obtemos,

$$0 = \int_{\Omega(t_0)} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\operatorname{div}\vec{U}) \right) Jd\Omega_0 = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\operatorname{div}\vec{U}) \right) d\Omega,$$

para um domínio $\Omega(t)$ arbitrário, suficientemente regular. Obtemos então a forma diferencial da Lei de conservação de massa,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\operatorname{div}\vec{U}) = 0. \quad (1.2)$$

Observação 1.1 *Temos então duas formas equivalentes de caracterizar o regime de incompressibilidade de um fluido:*

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{div}\vec{U} = 0. \quad (1.3)$$

1.3 Princípio de conservação de quantidade de movimento

A definição de quantidade de movimento para um domínio material é (ver [2])

$$\vec{P} = \int_{\Omega(t)} \rho \vec{U} d\Omega.$$

A segunda Lei de Newton se escreve na forma

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \vec{F}.$$

Então, obtemos

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} \rho \vec{U} d\Omega = \vec{F}.$$

Onde,

$$\vec{F} = \int_{\Omega(t)} \vec{f} d\Omega,$$

sendo \vec{f} é a força por unidade de massa.

Usando a aplicação de escoamento para fixar o domínio de integração, obtemos

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} \rho \vec{U} d\Omega = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t_0)} (\rho \vec{U}) Jd\Omega_0 = \vec{F}.$$

Daí,

$$\int_{\Omega(t_0)} \frac{D}{Dt} [(\rho \vec{U})J] d\Omega_0 = \int_{\Omega(t_0)} \left[\left(\frac{D\rho}{Dt} \vec{U} + \rho \frac{D\vec{U}}{Dt} \right) J + (\rho \vec{U}) \frac{DJ}{Dt} \right] d\Omega_0 = \vec{F}.$$

Utilizando o Lema 1.1 obtemos

$$\int_{\Omega(t_0)} \left[\left(\frac{D\rho}{Dt} \vec{U} + \rho \frac{D\vec{U}}{Dt} \right) J + (\rho \vec{U})(div \vec{U})J \right] d\Omega_0 = \vec{F}$$

ou ainda,

$$\int_{\Omega(t_0)} \left[\frac{D\rho}{Dt} \vec{U} + \rho \frac{D\vec{U}}{Dt} + (\rho \vec{U})(div \vec{U}) \right] J d\Omega_0 = \int_{\Omega(t)} \vec{f} d\Omega, \quad (1.4)$$

onde $\vec{f} = -\nabla p$, e p é a pressão resultante das forças atuantes na região material considerada (veja [11]).

Multiplicando a Lei de Conservação de Massa (dada pela expressão (1.2)) por \vec{U} temos,

$$\vec{U} \frac{D\rho}{Dt} + (\rho \vec{U})(div \vec{U}) = 0. \quad (1.5)$$

Deste modo aplicando (1.5) em (1.4) obtemos,

$$\int_{\Omega(t_0)} \rho \frac{D\vec{U}}{Dt} J d\Omega_0 = \int_{\Omega(t)} \rho \frac{D\vec{U}}{Dt} d\Omega = \int_{\Omega(t)} -\nabla p d\Omega,$$

daí, concluímos que,

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\nabla p, \quad (1.6)$$

que é a expressão da conservação de quantidade de movimento.

1.4 Equações de Águas Rasas

Consideramos agora para qualquer movimento do fluido que a única força exercida sobre sua superfície é a pressão. Sendo o geopotencial dado por $\phi = gh$, com g o valor da gravidade e $h = h(x, y)$ a altura do fluido, a força exercida sobre o movimento do fluido vai ser dada por meio do gradiente do mesmo. No modelo de águas rasas, consideramos um fluido incompressível homogêneo com uma fronteira horizontal inferior rígida e superior uma superfície livre. O campo de velocidades considerado aqui será o da velocidade horizontal o qual é invariante com relação a altura, isto é, $\vec{v}_H = (u(x, y, t), v(x, y, t), 0)$. No sistema de águas rasas, usamos as equações de conservação de momento e de massa (continuidade). Da observação (1.1) a equação de

continuidade para um fluido incompressível qualquer, cujo campo de velocidades é \vec{U} é dada por,

$$\text{div}\vec{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.7)$$

Integrando verticalmente a equação acima, de $z = 0$ até $z = h$, e com uma condição de fronteira de w dado por $w(0) = 0$ e $w(h) = w$, obtemos

$$\int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dz = - \int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz.$$

isto é,

$$w = -h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Rightarrow w = -h(\text{div}\vec{v}_H).$$

Por outro lado, a velocidade da partícula na direção de z é dada por,

$$w = \frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + (\vec{v}_H \cdot \nabla)h,$$

donde

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -(\vec{v}_H \cdot \nabla)h - h(\text{div}\vec{v}_H),$$

que multiplicada por g nos dá a equação de continuidade de um fluido incompressível

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -(\vec{v}_H \cdot \nabla)\phi - \phi(\text{div}\vec{v}_H),$$

de onde segue que

$$\frac{D\phi}{Dt} + \phi(\text{div}\vec{v}_H) = 0. \quad (1.8)$$

Pelo que vimos na Seção 1.3, o balanço do momento horizontal dado na equação de conservação de momento com $\vec{f} = -\rho\nabla\phi$ é

$$\frac{D\vec{v}_H}{Dt} + \nabla\phi = 0. \quad (1.9)$$

Assim obtemos o seguinte sistema de equações de águas rasas

$$\begin{cases} \frac{D\vec{v}_H}{Dt} + \nabla\phi = 0 \\ \frac{D\phi}{Dt} + \phi(\text{div}\vec{v}_H) = 0, \end{cases} \quad (1.10)$$

deste modo, a primeira equação de (1.10) pode ser escrita na forma

$$\frac{D\vec{v}_H}{Dt} + \nabla\phi = \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}, u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = (0, 0),$$

isto nos fornece

$$\frac{D\vec{v}_H}{Dt} + \nabla\phi = \left(\frac{Du}{Dt}, \frac{Dv}{Dt} \right) + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) = (0, 0)$$

e a segunda equação do sistema (1.10) é

$$\frac{D\phi}{Dt} + \phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0.$$

Introduzido artificialmente o vetor de onda $\vec{c} = (c_x, c_y)$, para analisar o efeito da grade heterogênea na propagação de ondas de águas rasas no sistema (1.10), e rearrumando o sistema, obtemos

$$\begin{cases} \frac{Du}{Dt} + c_x^2 \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \\ \frac{Dv}{Dt} + c_y^2 \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \\ \frac{D\phi}{Dt} + \phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Desenvolvendo a primeira equação do sistema (1.11), temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + c_x^2 \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0. \quad (1.12)$$

Antes de darmos prosseguimento em nosso estudo iremos definir um importante fato para este trabalho, que é o estado estacionário. Assim, dados um conjunto de dados, chamaremos de estado estacionário como sendo a média destes dados. Logo, linearizando o sistema (1.11) em torno de um estado estacionário de $u = U$, $v = V$, e $\phi = \Phi$, estes constantes, iremos escrever $u = U + u'$, $v = V + v'$ e $\phi = \Phi + \phi'$, onde u' , v' e ϕ' são desvios de $O(\epsilon)$ com $\epsilon \ll 1$, do estado estacionário. Logo por (1.12)

$$\frac{\partial(U + u')}{\partial t} + (U + u') \frac{\partial(U + u')}{\partial x} + (V + v') \frac{\partial(U + u')}{\partial y} + c_x^2 \frac{\partial(\Phi + \phi')}{\partial x} = 0.$$

Como (U, V, Φ) é constante então suas derivadas são nulas. Logo a equação acima fica

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + V \frac{\partial u'}{\partial y} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} + c_x^2 \frac{\partial\phi'}{\partial x} = 0.$$

Temos também que $\frac{\partial u'}{\partial x}$, u' , $\frac{\partial u'}{\partial y}$ e v' são $O(\epsilon)$, então o produto entre eles é de ordem $O(\epsilon^2)$, ou seja, desprezíveis. Assim obtemos a seguinte equação com os termos $O(\epsilon)$,

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + V \frac{\partial u'}{\partial y} + c_x^2 \frac{\partial\phi'}{\partial x} = 0.$$

De forma análoga, faremos para a segunda e terceira equações do sistema (1.11), e voltando a denotar os termos u, v e ϕ , obtemos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} + c_x^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + V \frac{\partial v}{\partial y} + c_y^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} + V \frac{\partial \phi}{\partial y} + \Phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (1.13)$$

Capítulo 2

As ondas de Águas Rasas

Neste capítulo usamos o modelo de águas rasas no plano, para analisarmos o efeito do uso de grade heterogênea na evolução de ondas planares, que são soluções do sistema de equações de águas rasas.

Com a motivação de estudar o uso de grades não uniformes ou não isotrópicas, utilizamos inicialmente como modelo para os métodos numéricos, as equações de águas rasas com ondas possuindo velocidades distintas nas direções x e y.

Consideramos o sistema de equações de águas rasas planar, linearizado em torno do estado estacionário (U, V, Φ) constante, com vetor de onda $\vec{c} = (c_x, c_y)$, o qual possui componentes distintas nas direções x e y, dado por (1.13), que por conveniência repetimos aqui:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} + c_x^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + V \frac{\partial v}{\partial y} + c_y^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} & = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} + V \frac{\partial \phi}{\partial y} + \Phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) & = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $0 \leq x \leq L_x$ e $0 \leq y \leq L_y$. As condições de contorno que serão consideradas são periódicas tanto na direção x como na direção y.

Procuramos solução de (2.1) da forma

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix} (x, y, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha(k, l) e^{i(w_x kx + w_y ly - wt)} \begin{pmatrix} u_{k,l}^0 \\ v_{k,l}^0 \\ \phi_{k,l}^0 \end{pmatrix},$$

onde denotamos a frequência temporal por w , as frequências espaciais por

$$w_x = \frac{2\pi}{L_x} \quad \text{e} \quad w_y = \frac{2\pi}{L_y}.$$

e sendo $u_{k,l}^0$, $v_{k,l}^0$ e $\phi_{k,l}^0$ as condições iniciais que são dadas.

Substituindo esta solução em (2.1) e abandonando os índices k, l em $u_{k,l}^0$, $v_{k,l}^0$, $\phi_{k,l}^0$ obtemos (fazendo as devidas simplificações),

$$\begin{pmatrix} -w + Uw_xk + Vw_y l & 0 & c_x^2 w_x k \\ 0 & -w + Uw_xk + Vw_y l & c_y^2 w_y l \\ \Phi w_x k & \Phi w_y l & -w + Uw_xk + Vw_y l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Introduzimos a notação

$$G_{k,l} = \sqrt{\Phi[c_x^2(w_xk)^2 + c_y^2(w_y l)^2]}. \quad (2.3)$$

Nosso intuito aqui é procurar soluções não triviais para o nosso sistema de águas rasas. Deste modo, anulando o determinante da matriz (2.2) resulta na seguinte equação cúbica

$$(-w + Uw_xk + Vw_y l)[(-w + Uw_xk + Vw_y l)^2 - G_{k,l}^2] = 0. \quad (2.4)$$

Uma das raízes da equação (2.4) é

$$w_0 = Uw_xk + Vw_y l. \quad (2.5)$$

Para $w \neq Uw_xk + Vw_y l$ obtemos ao extrair o valor de w na equação (2.4)

$$w_+ = Uw_xk + Vw_y l + G_{k,l} \quad (2.6)$$

e

$$w_- = Uw_xk + Vw_y l - G_{k,l}. \quad (2.7)$$

O autovetor correspondente ao autovalor w_0 dado em (2.5) é solução de

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c_x^2 w_x k \\ 0 & 0 & c_y^2 w_y l \\ \Phi w_x k & \Phi w_y l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Se $k \neq 0$ ou $l \neq 0$ então, sem perda de generalidade, supomos $k \neq 0$, pois o caso em que $l \neq 0$ é análogo, logo obtemos

$$\begin{cases} \phi^0 & = & 0 \\ w_x k u^0 + w_y l v^0 & = & 0 \Rightarrow u^0 = -\frac{w_y l}{w_x k} v^0, \quad k \neq 0. \end{cases}$$

Assim, obtemos o autovetor

$$R_0(k, l) = (-w_y l, w_x k, 0)^T. \quad (2.9)$$

O autovetor para o autovalor w_+ dado em (2.6) é solução de

$$\begin{pmatrix} -G_{k,l} & 0 & c_x^2 w_x k \\ 0 & -G_{k,l} & c_y^2 w_y l \\ \Phi w_x k & \Phi w_y l & -G_{k,l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Logo,

$$\begin{cases} G_{k,l} u^0 - c_x^2 w_x k \phi^0 & = & 0 \\ G_{k,l} v^0 - c_y^2 w_y l \phi^0 & = & 0 \\ -w_x k \Phi u^0 - w_y l \Phi v^0 + G_{k,l} \Phi^0 & = & 0 \end{cases}$$

e as duas primeiras equações acima nos dão

$$\begin{cases} u^0 & = & \frac{c_x^2 w_x k}{G_{k,l}} \phi^0 \\ v^0 & = & \frac{c_y^2 w_y l}{G_{k,l}} \phi^0 \end{cases}$$

que nos dá o autovetor

$$R_+(k, l) = (c_x^2 w_x k, c_y^2 w_y l, G_{k,l})^T. \quad (2.11)$$

De modo análogo, para o autovalor w_- dado em (2.7) obtemos o autovetor

$$R_-(k, l) = (c_x^2 w_x k, c_y^2 w_y l, -G_{k,l})^T. \quad (2.12)$$

Agora se $kl = 0$, por exemplo, supondo $k = 0$ e $l \neq 0$, pois o caso $k \neq 0$ e $l = 0$ é análogo, então por (2.9) obtemos que $R_0 = (1, 0, 0)^T$ e por (2.11), segue que $R_+(0, l) = (0, c_y^2 w_y l, G_{0,l})^T$ e analogamente $R_-(0, l) = (0, c_y^2 w_y l, -G_{0,l})^T$.

Notemos que se $k = l = 0$ em (2.9), (2.11) e (2.12), então os autovalores w_0, w_+, w_- e autovetores R_0, R_+ e R_- são nulos. Assim não há interesse físico pois eles não dependem dos números de ondas.

Portanto, demonstramos o seguinte

Teorema 2.1 *A solução geral não estacionária do sistema (2.1) pode ser escrita na forma,*

$$S(x, y, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{l=-\infty \\ (k,l) \neq (0,0)}}^{\infty} \left[\alpha_+(k, l) e^{i(w_x k x + w_y l y - w_+ t)} R_+ + \alpha_-(k, l) e^{i(w_x k x + w_y l y - w_- t)} R_- + \alpha_0(k, l) e^{i(w_x k x + w_y l y - w_0 t)} R_0 \right]$$

onde w_+ , w_- e w_0 são os autovalores e $R_+(k, l)$, $R_-(k, l)$ e $R_0(k, l)$ são os respectivos autovetores do sistema matricial (2.2) e $S = (u, v, \phi)^T$.

A solução do sistema (2.1) correspondente aos índices $k = 0$, $l = 0$ é nula, sendo assim estacionária, logo não sofre interferência do meio e não tem interesse físico. Portanto não será analisada, também porque agora estamos interessados na solução da perturbação do sistema (1.10) em torno do estado estacionário (U, V, Φ) .

Os autovetores R_+ e R_- correspondem às ondas de gravidade (ondas rápidas) e R_0 corresponde à onda de Rossby (onda lenta), conforme [3].

O problema agora é encontrar os coeficientes α_+ , α_- e α_0 . Eles podem ser determinados a partir de alguma condição inicial dada. Pela solução geral dada no Teorema 2.1, temos

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix} (x, y, 0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{l=-\infty \\ (k,l) \neq (0,0)}}^{\infty} e^{i(w_x k x + w_y l y)} \left[\alpha_+(k, l) R_+ + \alpha_-(k, l) R_- + \alpha_0(k, l) R_0 \right].$$

Pelas séries de Fourier podemos escrever as condições iniciais como,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix} (x, y, 0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{l=-\infty \\ (k,l) \neq (0,0)}}^{\infty} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} (x, y, 0) e^{i(w_x k x + w_y l y)}.$$

Deste modo, segue a seguinte observação,

Observação 2.1 *A solução do sistema (2.1) fica completamente determinada, quando é dada uma condição inicial $(u(x, y, 0), v(x, y, 0), \phi(x, y, 0))^T$. De fato, para $t = 0$, mas $(k, l) \neq (0, 0)$ na solução geral dada no Teorema 2.1, obtemos o sistema*

$$\begin{cases} [\alpha_+(k, l) + \alpha_-(k, l)] c_x^2 w_x k - \alpha_0(k, l) w_y l & = \hat{u}_0 \\ [\alpha_+(k, l) + \alpha_-(k, l)] c_y^2 w_y l + \alpha_0(k, l) w_x k & = \hat{v}_0 \\ [\alpha_+(k, l) - \alpha_-(k, l)] G_{k,l} & = \hat{\phi}_0 \end{cases}$$

onde os segundos membros acima são os coeficientes de Fourier dos dados iniciais. Logo a solução deste sistema nos fornece os coeficientes de Fourier α_+ , α_- e α_0

Capítulo 3

Análise Espectral do Modelo de Águas Rasas

Neste capítulo analisaremos o efeito do uso de grades heterogêneas na evolução de ondas de águas rasas planares linearizadas utilizando o método espectral, que consiste em expandir as variáveis do sistema em séries de Fourier. Nosso objetivo é mostrar que a propagação dessas ondas não sofre interferência, por uso de grades heterogêneas, diferentemente do método de diferenças finitas, conforme é mostrado no artigo [4].

3.1 As Equações de Águas Rasas Discretizadas

Consideramos o sistema (2.1) no caso $U = V = 0$, porque o termo de advecção de onde eles se originam não são tratados espectralmente, mas sim pela parte lagrangeana. Quando as variáveis U, V são diferentes de zero, o método é conhecido como Semi-Lagrangeano, e não será estudado neste trabalho. Para uma aplicação deste método veja por exemplo, o trabalho [9]. Então discretizemos o sistema (2.1) usando diferença finita progressiva na derivada temporal

$$\frac{\partial(\)}{\partial t} = \frac{(\)^+ - (\)^-}{\Delta t}, \quad (3.1)$$

onde Δt é o passo de tempo, $(\)^+$ denota a avaliação num ponto de grade no tempo $t + \Delta t$ e $(\)^-$ denota a avaliação num ponto de grade no tempo t .

Nas derivadas espaciais u_x, v_y, ϕ_x e ϕ_y , fazemos um tratamento implícito dos

termos lineares que produzem as ondas de gravidade (ondas rápidas), usando o operador de média temporal, que resulta na seguinte discretização do sistema (2.1)

$$\begin{cases} \frac{u^+ - u^-}{\Delta t} + c_x^2 \frac{\phi_x^+ + \phi_x^-}{2} = 0, \\ \frac{v^+ - v^-}{\Delta t} + c_y^2 \frac{\phi_y^+ + \phi_y^-}{2} = 0, \\ \frac{\phi^+ - \phi^-}{\Delta t} + \Phi \left(\frac{u_x^+ + u_x^-}{2} + \frac{v_y^+ + v_y^-}{2} \right) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Procuramos solução numérica do esquema (3.2) da forma

$$\begin{pmatrix} u^- \\ v^- \\ \phi^- \end{pmatrix} (x, y, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha(k, l) e^{i(w_x kx + w_y ly - wt)} \begin{pmatrix} u_{k,l}^0 \\ v_{k,l}^0 \\ \phi_{k,l}^0 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

e

$$\begin{pmatrix} u^+ \\ v^+ \\ \phi^+ \end{pmatrix} (x, y, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha(k, l) e^{i(w_x kx + w_y ly - w(t+\Delta t))} \begin{pmatrix} u_{k,l}^0 \\ v_{k,l}^0 \\ \phi_{k,l}^0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Substituindo (3.3) e (3.4) em (3.2), cancelando o termo $e^{i(w_x kx + w_y ly - wt)}$ e abandonando os índices k, l em $u_{k,l}^0, v_{k,l}^0$ e $\phi_{k,l}^0$, obtemos

$$\begin{cases} \frac{e^{-iw\Delta t} - 1}{\Delta t} u^0 + \frac{e^{-iw\Delta t} + 1}{2} i c_x^2 w_x k \phi^0 = 0, \\ \frac{e^{-iw\Delta t} - 1}{\Delta t} v^0 + \frac{e^{-iw\Delta t} + 1}{2} i c_y^2 w_y l \phi^0 = 0, \\ \frac{e^{-iw\Delta t} - 1}{\Delta t} \phi^0 + \Phi \frac{e^{-iw\Delta t} + 1}{2} (i w_x k u^0 + i w_y l v^0) = 0. \end{cases}$$

Multiplicando cada equação acima por $e^{\frac{i}{2}w\Delta t}$ obtemos

$$\begin{cases} \frac{e^{-\frac{i}{2}w\Delta t} - e^{\frac{i}{2}w\Delta t}}{\Delta t} u^0 + \frac{e^{-\frac{i}{2}w\Delta t} + e^{\frac{i}{2}w\Delta t}}{2} i c_x^2 w_x k \phi^0 = 0, \\ \frac{e^{-\frac{i}{2}w\Delta t} - e^{\frac{i}{2}w\Delta t}}{\Delta t} v^0 + \frac{e^{-\frac{i}{2}w\Delta t} + e^{\frac{i}{2}w\Delta t}}{2} i c_y^2 w_y l \phi^0 = 0, \\ \frac{e^{-\frac{i}{2}w\Delta t} - e^{\frac{i}{2}w\Delta t}}{\Delta t} \phi^0 + \Phi \frac{e^{-\frac{i}{2}w\Delta t} + e^{\frac{i}{2}w\Delta t}}{2} (i w_x k u^0 + i w_y l v^0) = 0. \end{cases}$$

Assim, utilizando as definições do seno e cosseno complexos, obtemos a seguinte forma para o sistema anterior,

$$\begin{cases} \frac{2iS}{\Delta t} u^0 + C i c_x^2 w_x k \phi^0 = 0, \\ \frac{2iS}{\Delta t} v^0 + C i c_y^2 w_y l \phi^0 = 0, \\ \frac{2iS}{\Delta t} \phi^0 + \Phi C (i w_x k u^0 + i w_y l v^0) = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

onde

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \text{sen}\left(-w\frac{\Delta t}{2}\right)$$

e

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \text{cos}\left(-w\frac{\Delta t}{2}\right),$$

ou na forma matricial, denotando $T = S/C$, obtemos

$$\begin{pmatrix} \frac{2T}{\Delta t} & 0 & c_x^2 w_x k \\ 0 & \frac{2T}{\Delta t} & c_y^2 w_y l \\ \Phi w_x k & \Phi w_y l & \frac{2T}{\Delta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Assim como foi feito na Seção 2, o nosso objetivo é encontrar soluções não triviais para o sistema de equações de águas rasas discretizadas. Deste modo, ao zerar o determinante do sistema (3.6), obtemos

$$\left(\frac{2T}{\Delta t}\right)^3 - \left(\frac{2T}{\Delta t}\right) [\Phi(c_x^2(w_x k)^2 + c_y^2(w_y l)^2)] = 0.$$

Seja $z = \frac{2T}{\Delta t}$, então usando a notação dada em (2.3) para $G_{k,l}$, tem-se

$$z^3 - G_{k,l}^2 z = 0. \quad (3.7)$$

Esta equação cúbica possui as seguintes raízes:

$$z_0 = 0 \quad (3.8)$$

$$z_+ = G_{k,l} \quad (3.9)$$

$$z_- = -G_{k,l}. \quad (3.10)$$

Observando o fato que

$$z = \frac{2T}{\Delta t} = 2 \frac{\text{tg}\left(-w\frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t}$$

temos $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} z \rightarrow -w$ quando $U = V = 0$. Deste modo a matriz (3.6) converge para a matriz (2.2), com $U = V = 0$. Isto mostra que o esquema (3.2) é consistente. Também as matrizes (3.6) e (2.2) têm os mesmo autovalores. Assim, os autovetores do sistema discretizado (3.2) são iguais aos autovetores R_+ , R_- e R_0 do sistema analítico (2.1), quando $U = V = 0$.

Denotemos $S^+ = (u^+, v^+, \phi^+)^T$. Então demonstramos o seguinte resultado

Teorema 3.1 *O esquema numérico (3.2) é consistente. Além disso, a sua solução geral não estacionária é dada por*

$$S^+(x, y, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{l=-\infty \\ (k,l) \neq (0,0)}}^{\infty} \left[\alpha_+(k, l) e^{i(w_x k x + w_y l y - z_+ t)} R_+ + \alpha_-(k, l) e^{i(w_x k x + w_y l y - z_- t)} R_- + \alpha_0(k, l) e^{i(w_x k x + w_y l y - z_0 t)} R_0 \right],$$

onde z_0 , z_+ e z_- são os autovalores dados por (3.8), (3.9), (3.10) e $R_0(k, l)$, $R_+(k, l)$ e $R_-(k, l)$ são os respectivos autovetores do sistema matricial (3.6), dados por (2.9), (2.11) e (2.12). Os coeficientes $\alpha_+(k, l)$, $\alpha_-(k, l)$ e $\alpha_0(k, l)$ podem ser determinados a partir da condição inicial dada.

Portanto, os autovalores dados em (3.8), (3.9) e (3.10) convergem para os autovalores dados em (2.5), (2.6) e (2.7), respectivamente, quando $\Delta t \rightarrow 0$ e $U = V = 0$. Notemos que os autovalores (3.8), (3.9) e (3.10) não dependem de Δx e Δy ; eles dependem apenas de Δt .

As frequências (espacial e temporal) de onda são dadas pelo autovalores do sistema, conforme [3]. Desse modo, mostramos que o método espectral aplicado ao sistema de equações de águas rasas tem uma relação de dispersão em que a frequência da onda não depende da posição espacial, ou seja, de Δx e Δy . Logo a velocidade de propagação também não depende. Os modos $R_+(k, l)$, $R_-(k, l)$ e $R_0(k, l)$ também não dependem de Δx e Δy . Assim no método espectral, grades diferentes não interferem na velocidade de propagação da onda.

Podemos facilmente ver que o sistema de Equações de Águas Rasas discretizado converge para a sua forma analítica, pois

$$\frac{\beta^+ - \beta^-}{\Delta t} = \frac{\beta(x, y, t + \Delta t) - \beta(x, y, t)}{\Delta t}; \quad (3.11)$$

$$\frac{\beta_x^+ - \beta_x^-}{2} = \frac{\beta_x(x, y, t + \Delta t) - \beta_x(x, y, t)}{2}; \quad (3.12)$$

$$\frac{\beta_y^+ - \beta_y^-}{2} = \frac{\beta_y(x, y, t + \Delta t) - \beta_y(x, y, t)}{2}. \quad (3.13)$$

onde $\beta = u, v$ e ϕ . Deste modo, quando $\Delta t \rightarrow 0$ as expressões (3.11), (3.12) e (3.13), convergem para,

$$\frac{\beta^+ - \beta^-}{\Delta t} \rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial t}(x, y, t); \quad (3.14)$$

$$\frac{\beta_x^+ - \beta_x^-}{2} \rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial x}(x, y, t); \quad (3.15)$$

$$\frac{\beta_y^+ - \beta_y^-}{2} \rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y, t). \quad (3.16)$$

onde $\beta = u, v$ e ϕ .

Logo, utilizando (3.14), (3.15) e (3.16) no sistema de equações de águas rasas discretizada, vemos que este é convergente.

3.2 O Método Numérico Espectral em Grades Heterogêneas

Para analisar em detalhes o efeito da grade heterogênea (observe a Figura (3.1)) sobre a propagação de uma onda de água rasa, que é solução do sistema (2.1), fazemos a análise do tratamento numérico utilizado no método espectral, onde as derivadas $\partial/\partial x$ e $\partial/\partial y$ são tratadas espectralmente.

Segue das duas primeiras equações de (3.2) após derivação em x e y , respectivamente que

$$\begin{cases} u_x^+ = u_x^- - c_x^2 \frac{\Delta t}{2} (\phi_{xx}^+ + \phi_{xx}^-) \\ v_y^+ = v_y^- - c_y^2 \frac{\Delta t}{2} (\phi_{yy}^+ + \phi_{yy}^-). \end{cases} \quad (3.17)$$

assim aplicando (3.17) em (3.2) e fazendo as devidas operações matemáticas, obtemos,

$$\begin{cases} u^+ + \frac{\Delta t}{2} c_x^2 \phi_x^+ = u^- - c_x^2 \frac{\Delta t}{2} \phi_x^- \\ v^+ + \frac{\Delta t}{2} c_y^2 \phi_y^+ = v^- - c_y^2 \frac{\Delta t}{2} \phi_y^- \\ \phi^+ - \Phi \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 (c_x^2 \phi_{xx}^+ + c_y^2 \phi_{yy}^+) = \phi^- - \Phi \Delta t (u_x^- + v_y^-) + \Phi \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 (c_x^2 \phi_{xx}^- + c_y^2 \phi_{yy}^-). \end{cases} \quad (3.18)$$

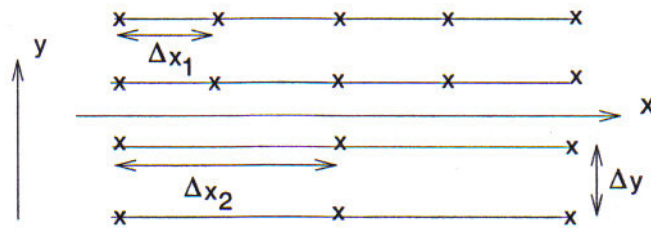


Figura 3.1: Grade plana reduzida. Δy é fixo, Δx é fixo apenas em cada linha horizontal

Como supomos que $(x, y) \in [0, L_x] \times [0, L_y]$, definimos a grade heterogênea por

$$\begin{aligned} x_n(m) &= (n-1)\Delta x(m) \quad , \quad n = 1, \dots, N(m), \\ y_m &= (m-1)\Delta y \quad , \quad m = 1, \dots, M, \end{aligned}$$

onde $\Delta x(m) = \frac{L_x}{N(m)}$ e $\Delta y = \frac{L_y}{M}$.

O número de pontos $N(m)$ na direção x é variável, enquanto que o número de pontos M na direção y é fixo (observe a figura 3.1).

Com o auxílio das propriedades da transformada discreta de Fourier (DFT) (ver Apêndice B), podemos definir as seguintes expansões discretas de Fourier

$$\delta^+(x_n(m), y_m) = \sum_{l=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \sum_{k=-\frac{N(m)}{2}}^{\frac{N(m)}{2}-1} \hat{\delta}^+(k, l) e^{i(w_x k x_n(m) + w_y l y_m)} \quad (3.19)$$

com $\delta^+ = u^+, v^+$ e ϕ^+ ,

$$\delta^-(x_n(m), y_m) = \sum_{l=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \sum_{k=-\frac{N(m)}{2}}^{\frac{N(m)}{2}-1} \hat{\delta}^-(k, l) e^{i(w_x k x_n(m) + w_y l y_m)} \quad (3.20)$$

com $\delta^- = u^-, v^-$ e ϕ^- .

Então, substituindo as expansões de Fourier (3.19) e (3.20) em (3.18), resulta que

$$\begin{cases} \hat{u}^+ + c_x^2 \frac{\Delta t}{2} w_x i k \hat{\phi}^+ &= \hat{u}^- - c_x^2 \frac{\Delta t}{2} w_x i k \hat{\phi}^- \\ \hat{v}^+ + c_y^2 \frac{\Delta t}{2} w_y i l \hat{\phi}^+ &= \hat{v}^- - c_y^2 \frac{\Delta t}{2} w_y i l \hat{\phi}^- \\ \left(1 + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 G_{k,l}^2\right) \hat{\phi}^+ &= \left(1 - \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 G_{k,l}^2\right) \hat{\phi}^- - \Phi \Delta t (w_x i k \hat{u}^- + w_y i l \hat{v}^-) \end{cases} \quad (3.21)$$

ou na forma matricial, denotando $W_x = \Phi i w_x k \Delta t$ e $W_y = \Phi i w_y l \Delta t$, obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c_x^2 \frac{\Delta t}{2} i w_x k \\ 0 & 1 & c_y^2 \frac{\Delta t}{2} i w_y l \\ 0 & 0 & \left(1 + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 G_{k,l}^2\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}^+ \\ \hat{v}^+ \\ \hat{\phi}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c_x^2 \frac{\Delta t}{2} i w_x k \\ 0 & 1 & -c_y^2 \frac{\Delta t}{2} i w_y l \\ -W_x & -W_y & \left(1 - \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 G_{k,l}^2\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}^- \\ \hat{v}^- \\ \hat{\phi}^- \end{pmatrix}.$$

Desta forma atualizamos os coeficientes espectrais \hat{u}^+, \hat{v}^+ e $\hat{\phi}^+$ a partir dos coeficientes espectrais \hat{u}^-, \hat{v}^- e $\hat{\phi}^-$. Mas como é usado a DFT nas direções x e y , o número de pontos de malha no espaço físico deve ser suficiente para usar uma transformada

rápida de Fourier (FFT) nos coeficientes espectrais (espaço espectral). A redução de pontos na grade física é feita ao longo de cada linha horizontal, assim no espaço espectral devemos completar com zeros aqueles números de ondas mais altos para efetuar a FFT, uma vez que a FFT exige uma distribuição uniforme dos números de onda. Então para obter os valores atualizados de u^+ , v^+ e ϕ^+ no domínio físico, basta usar as expansões (3.19) e (3.20).

3.3 Caso Unidimensional

Vamos tratar agora do sistema de equações de águas rasas considerando $v=c_{te}$, e considerando u e ϕ como funções apenas das variáveis x e t , mas sob as mesmas condições impostas no Capítulo 2. Assim obtemos de (2.1) o seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + c_x^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} + \Phi \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

no domínio $0 \leq x \leq L_x$, onde a condição de contorno em x é periódica.

Procuramos solução de (3.22) da forma

$$\begin{pmatrix} u \\ \phi \end{pmatrix} (x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha(k) e^{i(w_x k x - w t)} \begin{pmatrix} u_k^0 \\ \phi_k^0 \end{pmatrix},$$

onde denotamos

$$w_x = \frac{2\pi}{L_x}.$$

Substituindo esta solução em (3.22) e abandonando os índices k, l obtemos

$$\begin{pmatrix} -w + U w_x k & c_x^2 w_x k \\ \Phi w_x k & -w + U w_x k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Introduzindo a notação

$$G_k = \sqrt{\Phi c_x^2 (w_x k)^2}. \quad (3.24)$$

Anulando o determinante da matriz (3.23) resulta na seguinte equação quadrática

$$(-w + U w_x k)^2 - G_k^2 = 0. \quad (3.25)$$

Logo podemos extrair os valores de w da equação (3.25)

$$w_+ = Uw_x k + G_k \quad (3.26)$$

ou

$$w_- = Uw_x k - G_k. \quad (3.27)$$

O autovetor para o autovalor w_+ dado em (3.26) é solução de

$$\begin{pmatrix} -G_k & c_x^2 w_x k \\ \Phi w_x k & -G_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Logo,

$$\begin{cases} G_k u^0 - c_x^2 w_x k \phi^0 = 0 \\ -\Phi w_x k u^0 + G_k \phi^0 = 0. \end{cases}$$

Assim,

$$u^0 = \frac{c_x^2 w_x k}{G_k} \phi^0$$

que nos dá o autovetor

$$R_+(k) = (c_x^2 w_x k, G_k)^T. \quad (3.29)$$

De modo análogo, para o autovalor w_- dado em (3.27) obtemos o autovetor

$$R_-(k) = (c_x^2 w_x k, -G_k)^T. \quad (3.30)$$

Portanto, demonstramos o seguinte resultado

Teorema 3.2 *A solução geral não estacionária do sistema (3.22) pode ser escrita na forma,*

$$S(x, t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left[\alpha_+(k) e^{i(w_x k x - w_+ t)} R_+ + \alpha_-(k) e^{i(w_x k x - w_- t)} R_- \right]$$

onde w_+ e w_- são os autovalores e $R_+(k)$ e $R_-(k)$ são os respectivos autovetores do sistema matricial (3.23) e $S = (u, \phi)^T$.

A solução do sistema (3.22) correspondente ao índice $k = 0$ é constante, sendo assim estacionária, logo não sofre interferência do meio e não tem interesse físico, portanto não será analisada.

Os autovetores R_+ , R_- correspondem às ondas de gravidade (ondas rápidas), conforme [3].

Os coeficientes α_+ e α_- são determinados a partir de alguma condição inicial dada, conforme a observação seguinte

Observação 3.1 A solução do sistema (3.22) fica completamente determinada, quando é dada uma condição inicial $(u(x, 0), \phi(x, 0))^T$. De fato, para $t=0$, mas $k \neq 0$ na solução geral dada no Teorema 3.2, obtemos o sistema

$$\begin{cases} [\alpha_+(k) + \alpha_-(k)] c_x^2 w_x k &= \hat{u}_0 \\ [\alpha_+(k) - \alpha_-(k)] G_k &= \hat{\phi}_0 \end{cases}$$

onde os segundos membros acima são os coeficientes de Fourier dos dados iniciais. Logo a solução deste sistema nos fornece os coeficientes de Fourier α_+ e α_- .

Nas derivadas temporais do sistema (3.22) usamos a discretização dada em (3.1) e nas derivadas espaciais u_x e ϕ_x , fazemos um tratamento implícito dos termos que produzem as ondas de gravidade (ondas rápidas), usando o operador de média temporal, que resulta na seguinte discretização do sistema (3.22) com $U = 0$

$$\begin{cases} \frac{u^+ - u^-}{\Delta t} + c_x^2 \frac{\phi_x^+ + \phi_x^-}{2} &= 0, \\ \frac{\phi^+ - \phi^-}{\Delta t} + \Phi \left(\frac{u_x^+ + u_x^-}{2} \right) &= 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

Procuramos solução numérica do esquema (3.31) da forma

$$\begin{pmatrix} u^- \\ \phi^- \end{pmatrix} (x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha(k) e^{i(w_x k x - w t)} \begin{pmatrix} u_k^0 \\ \phi_k^0 \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

e

$$\begin{pmatrix} u^+ \\ \phi^+ \end{pmatrix} (x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha(k) e^{i(w_x k x - w(t + \Delta t))} \begin{pmatrix} u_k^0 \\ \phi_k^0 \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Substituindo (3.32) e (3.33) em (3.31), cancelando o termo $e^{-i(w_x k x - w t)}$ e abandonando o índice k , obtemos

$$\begin{cases} \frac{e^{-iw\Delta t} - 1}{\Delta t} u^0 + \frac{e^{-iw\Delta t} + 1}{2} i c_x^2 w_x k \phi^0 &= 0, \\ \frac{e^{-iw\Delta t} - 1}{\Delta t} \phi^0 + \Phi \frac{e^{-iw\Delta t} + 1}{2} (i w_x k u^0) &= 0. \end{cases}$$

Multiplicando cada equação acima por $e^{\frac{i}{2}w\Delta t}$ obtemos

$$\begin{cases} \frac{e^{-\frac{i}{2}w\Delta t} - e^{\frac{i}{2}w\Delta t}}{\Delta t} u^0 + \frac{e^{-\frac{i}{2}w\Delta t} + e^{\frac{i}{2}w\Delta t}}{2} i c_x^2 w_x k \phi^0 &= 0, \\ \frac{e^{-\frac{i}{2}w\Delta t} - e^{\frac{i}{2}w\Delta t}}{\Delta t} \phi^0 + \frac{e^{-\frac{i}{2}w\Delta t} + e^{\frac{i}{2}w\Delta t}}{2} i \Phi w_x k u^0 &= 0. \end{cases}$$

Assim, utilizando propriedades de senos e cossenos, obtemos a seguinte forma para o sistema anterior,

$$\begin{cases} \frac{2iS}{\Delta t}u^0 + C i c_x^2 w_x k \phi^0 = 0, \\ \frac{2iS}{\Delta t}\phi^0 + \Phi C i w_x k u^0 = 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

onde

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \text{sen}\left(-w\frac{\Delta t}{2}\right)$$

e

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \text{cos}\left(-w\frac{\Delta t}{2}\right),$$

ou na forma matricial, denotando $T = S/C$, obtemos

$$\begin{pmatrix} \frac{2T}{\Delta t} & c_x^2 w_x k \\ \Phi w_x k & \frac{2T}{\Delta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Ao zerar o determinante do sistema (3.35), obtemos a seguinte relação de dispersão

$$\left(\frac{2T}{\Delta t}\right)^2 - \Phi c_x^2 (w_x k)^2 = 0.$$

Seja $z = \frac{2T}{\Delta t}$, então usando a notação (3.24), a relação de dispersão fica

$$z^2 - G_k^2 = 0. \quad (3.36)$$

Donde obtemos

$$z_+ = G_k \quad (3.37)$$

e

$$z_- = -G_k. \quad (3.38)$$

Temos que

$$z = \frac{2T}{\Delta t} = 2 \frac{\text{tg}\left(-w\frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} \rightarrow -w$$

quando $\Delta t \rightarrow 0$. Deste modo a matriz (3.35) converge para a matriz (3.23), com $U = 0$. Isto mostra que o esquema (3.31) é consistente. Também as matrizes (3.35) e (3.23) têm os mesmo autovalores. Assim, os autovetores do sistema discretizado (3.31) são iguais aos autovetores R_+ e R_- do sistema analítico (3.22), com $U = 0$.

Os autovalores dados em (3.37) e (3.38) convergem para os autovalores dados em (3.26) e (3.27), respectivamente, quando $\Delta t \rightarrow 0$. Notemos que os autovalores (3.37) e (3.38) não dependem de Δx , apenas de Δt .

Para o método numérico espectral em grades heterogêneas, trataremos de modo análogo ao caso bidimensional, considerando ainda $v=\text{cte}$ e tomando $U = 0$.

Segue então da primeira equação de (3.31) que

$$u_x^+ = u_x^- - \frac{c_x^2 \Delta t}{2} (\phi_{xx}^+ + \phi_{xx}^-). \quad (3.39)$$

Aplicando (3.39) em (3.31) e fazendo as devidas operações matemáticas, obtemos,

$$\begin{cases} u^+ + c_x^2 \frac{\Delta t}{2} \phi_x^+ & = u^- - c_x^2 \frac{\Delta t}{2} \phi_x^- \\ \phi^+ - \Phi c_x^2 \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \phi_{xx}^+ & = \phi^- - \Delta t \Phi u_x^- + \Phi c_x^2 \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \phi_{xx}^- \end{cases} \quad (3.40)$$

Supondo que $x \in [0, L_x]$. Então definimos a grade heterogênea

$$x_n = \begin{cases} (n-1)\Delta x_1, & 1 \leq n \leq N_1 \\ (n-1)\Delta x_2, & N - N_2 + 1 \leq n \leq N, \end{cases}$$

onde $N = N_1 + N_2$, $L_x = L_1 + L_2$, $\Delta x_1 = \frac{L_1}{N_1}$ e $\Delta x_2 = \frac{L_2}{N_2}$.

Com o auxílio das propriedades da transformada discreta de Fourier (DFT) (ver Apêndice B), podemos definir as seguintes expansões discretas de Fourier

$$\delta^+(x_n) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \hat{\delta}^+(k, l) e^{i(w_x k x_n(m))} \quad (3.41)$$

com $\delta^+ = u^+$ e ϕ^+ ,

$$\delta^-(x_n) = \sum_{k=-\frac{N(m)}{2}}^{\frac{N(m)}{2}-1} \hat{\delta}^-(k, l) e^{i(w_x k x_n(m))} \quad (3.42)$$

com $\delta^- = u^-$ e ϕ^- .

Então, substituindo as expansões de Fourier (3.41) e (3.42) em (3.40), resulta que

$$\begin{cases} \hat{u}^+ + c_x^2 \frac{\Delta t}{2} w_x i k \hat{\phi}^+ & = \hat{u}^- - c_x^2 \frac{\Delta t}{2} w_x i k \hat{\phi}^- \\ \left(1 + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 G_k^2\right) \hat{\phi}^+ & = \left(1 - \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 G_k^2\right) \hat{\phi}^- - \Phi \Delta t w_x i k \hat{u}^- \end{cases}$$

ou na forma matricial, denotando $W_x = \Phi i w_x k \Delta t$, obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & c_x^2 \frac{\Delta t}{2} w_x i k \\ 0 & \left(1 + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 G_k^2\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}^+ \\ \hat{\phi}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -c_x^2 \frac{\Delta t}{2} w_x i k \\ -W_x & \left(1 - \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 G_k^2\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}^- \\ \hat{\phi}^- \end{pmatrix}.$$

Desta forma atualizamos os coeficientes espectrais \hat{u} e $\hat{\phi}$. Mas como é usado a DFT na direção x , o número de pontos de malha no espaço físico deve ser suficiente para usar uma transformada rápida de Fourier (FFT) nos coeficientes espectrais (espaço espectral). Então para obter os valores atualizados de u e ϕ no domínio físico, basta usar as expressões (3.41) e (3.42).

3.4 O Uso de Diferenças Finitas

O resultado a seguir pode ser encontrado em [4] e é usado para mostrar, que no método de diferenças finitas, a velocidade de propagação da onda de água rasa depende da grade, que é usada para modelar o meio em que a onda se propaga.

Proposição 3.3 *Consideremos o sistema (2.1) discretizado pelo seguinte método de diferenças finitas semi-implícito*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{m,n}^{j+1} - u_{m,n}^{j-1}}{2\Delta t} + Uu_x^j + Vv_y^j + c_x^2 \frac{\phi_x^{j+1} + \phi_x^{j-1}}{2} = 0 \\ \frac{v_{m,n}^{j+1} - v_{m,n}^{j-1}}{2\Delta t} + Uv_x^j + Vv_y^j + c_y^2 \frac{\phi_y^{j+1} + \phi_y^{j-1}}{2} = 0 \\ \frac{\phi_{m,n}^{j+1} - \phi_{m,n}^{j-1}}{2\Delta t} + U\phi_x^j + V\phi_y^j + \Phi \left(\frac{u_x^{j+1} + u_x^{j-1}}{2} + \frac{v_y^{j+1} + v_y^{j-1}}{2} \right) = 0, \end{array} \right. \quad (3.43)$$

onde usamos as aproximações

$$F_x \approx \frac{F_{m+1,n} - F_{m-1,n}}{2\Delta x}, F_y \approx \frac{F_{m,n+1} - F_{m,n-1}}{2\Delta y}, F_{m,n}^j = F(m\Delta x, n\Delta y, j\Delta t).$$

Então obtemos uma relação de dispersão onde a velocidade de propagação da onda depende da malha, ou seja, de Δx e Δy , além de Δt .

Demonstração:

De fato procuremos soluções de (3.43) da forma

$$\begin{pmatrix} u_{m,n}^j \\ v_{m,n}^j \\ \phi_{m,n}^j \end{pmatrix} = e^{i(w_x km\Delta x + w_y ln\Delta y - wj\Delta t)} \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

onde foi usado o fato que $x = m\Delta x$, $y = n\Delta y$ e $t = j\Delta t$.

Denotando

$$S_t = \frac{e^{-iw\Delta t} - e^{iw\Delta t}}{2\Delta t} = \frac{-2i\text{sen}(w\Delta t)}{2\Delta t}, \quad (3.45)$$

$$C_t = \frac{e^{-i\Delta t w} + e^{i\Delta t w}}{2\Delta t} = \frac{2\cos(w\Delta t)}{2\Delta t}, \quad (3.46)$$

$$S_x = \frac{e^{-ik\Delta x} - e^{ik\Delta x}}{2\Delta x} = \frac{-2i\text{sen}(k\Delta x)}{2\Delta x}, \quad (3.47)$$

$$S_y = \frac{e^{-il\Delta y} - e^{il\Delta y}}{2\Delta y} = \frac{-2i\text{sen}(l\Delta y)}{2\Delta y}, \quad (3.48)$$

e substituindo (3.44) em (3.43), obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} S_t u^0 + US_x u^0 + VS_y u^0 + \frac{c_x^2}{2} (e^{-iw\Delta t} S_x + e^{iw\Delta t} S_x) \phi^0 = 0 \\ S_t v^0 + US_x v^0 + VS_y v^0 + \frac{c_y^2}{2} (e^{-iw\Delta t} S_y + e^{iw\Delta t} S_y) \phi^0 = 0 \\ S_t \phi^0 + US_x \phi^0 + VS_y \phi^0 + \frac{\Phi}{2} (e^{-iw\Delta t} S_x u^0 + e^{i\Delta t w} S_x u^0 + e^{-i\Delta t w} S_y v^0 + e^{i\Delta t w} S_y v^0) \phi^0 = 0. \end{array} \right.$$

Donde segue que

$$\left\{ \begin{array}{l} (S_t + US_x + VS_y) u^0 + c_x^2 \Delta t C_t S_x \phi^0 = 0 \\ (S_t + US_x + VS_y) v^0 + c_y^2 \Delta t C_t S_y \phi^0 = 0 \\ (S_t + US_x + VS_y) \phi^0 + \Phi \Delta t (C_t S_x u^0 + C_t S_y v^0) = 0, \end{array} \right.$$

ou na forma matricial, denotando $S_t + US_x + VS_y$ por $\lambda = \lambda(\Delta x, \Delta y, \Delta t)$, obtemos

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & c_x^2 \Delta t C_t S_x \\ 0 & \lambda & c_y^2 \Delta t C_t S_y \\ \Phi \Delta t C_t S_x & \Phi \Delta t C_t S_y & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \\ \phi^0 \end{pmatrix} = 0. \quad (3.49)$$

Ao zerar o determinante da matriz do sistema, obtemos a seguinte relação de dispersão

$$\lambda^3 - \lambda \Phi \Delta t (c_x^2 S_x^2 C_t^2 + c_y^2 S_y^2 C_t^2) = 0. \quad (3.50)$$

As soluções de λ são $\lambda = 0$ ou $\lambda = \pm \sqrt{\Phi \Delta t (c_x^2 S_x^2 C_t^2 + c_y^2 S_y^2 C_t^2)}$. Para $\lambda \neq 0$, temos que λ depende de Δt , Δx e Δy , pois C_t , S_x e S_y dependem de Δt , Δx e Δy , de acordo com as equações (3.46), (3.47) e (3.48). Por outro lado, se $\lambda = 0$ então $S_t + US_x + VS_y = 0$, ou seja, $S_t = -(US_x + VS_y)$, logo pelas expressões (3.45), (3.47) e (3.48), segue que

$$-\text{sen}(w\Delta t) = \Delta t \left[U \left(\frac{\text{sen}(k\Delta x)}{\Delta x} \right) + V \left(\frac{\text{sen}(l\Delta y)}{\Delta y} \right) \right],$$

donde segue que,

$$w = \frac{1}{\Delta t} \arcsen \left\{ -\Delta t \left[U \left(\frac{\text{sen}(k\Delta x)}{\Delta x} \right) + V \left(\frac{\text{sen}(l\Delta y)}{\Delta y} \right) \right] \right\}.$$

Logo, w depende de Δt , Δx e Δy , ou seja, depende da grade. Portanto a relação de dispersão de todas as ondas depende de Δt , Δx e Δy .

Capítulo 4

Resultados Numéricos

Vimos na Seção 3.1 que o uso do Método Espectral no sistema de equações de águas rasas resulta na propagação de onda que não depende da grade, porque sua velocidade de propagação independe da grade utilizada. Nosso objetivo neste capítulo é ilustrar este resultado, por meio de exemplos numéricos. Para isto o esquema numérico (3.21) foi implementado usando-se o MatLab (ver Apêndice C).

Os exemplos aqui utilizados foram implementados apenas com dados hipotéticos.

No caso bidimensional trataremos o esquema (3.21) variando a grade de pontos e as funções de velocidade e geopotencial (físico), dentre outros dados. Serão feitas as manipulações utilizando-se apenas o método numérico vetorizado (o que proporciona um ganho computacional). Com os resultados desejados faremos a implementação gráfica.

Para o caso unidimensional veja maiores detalhes em [10].

4.1 Unidimensional

1° Caso Unidimensional Tomaremos a função de velocidade e o geopotencial, grade não-uniforme e os parâmetros conforme a Tabela 4.1. O resultado está ilustrado nas Figuras 4.1 e 4.2

2° Caso Unidimensional Tomaremos a função de velocidade e o geopotencial, grade não-uniforme e os parâmetros conforme a Tabela 4.2. O resultado está ilustrado nas Figuras 4.3 e 4.4

Variáveis	Dados
Comprimento do domínio em x	20
Número de pontos no 1° intervalo de partições de x	600
Número de pontos na 2° intervalo de partições de x	1400
Vetor de onda domínio de x c_x	1
Valor de Δt	100
Tempo final	5000
Valor de Φ	1
Velocidade de u	5
Velocidade de ϕ	1

Tabela 4.1: Dados para o 1° caso Unidimensional

Variáveis	Dados
Comprimento do domínio em x	20
Número de pontos no 1° intervalo de partições de x	600
Número de pontos na 2° intervalo de partições de x	1400
Vetor de onda domínio de x c_x	1
Valor de Δt	100
Tempo final	5000
Valor de Φ	1
Velocidade de u	$\text{sen}(x)$
Velocidade de ϕ	$-\text{sen}(x)$

Tabela 4.2: Dados para o 2° caso Unidimensional

4.2 Bidimensional

1° Caso Bidimensional Tomaremos as funções de velocidade e geopotencial constantes, grade uniforme e os parâmetros conforme a Tabela 4.3. Os gráficos estão ilustradas nas Figuras 4.5 - 4.10.

2° Caso Bidimensional Tomaremos as funções de velocidade e geopotencial distintas, grade uniforme e os parâmetros conforme a Tabela 4.4. Os gráficos estão ilustradas nas Figuras 4.11 - 4.16.

3° Caso Bidimensional Tomaremos as funções de velocidade e geopotencial distintas, grade uniforme e os parâmetros conforme a Tabela 4.5. Os gráficos estão ilustradas nas Figuras 4.17 - 4.22.

4° Caso Bidimensional Tomaremos as funções de velocidade e geopotencial distintas, grade uniforme e os parâmetros conforme a Tabela 4.6. Os gráficos estão ilustradas nas Figuras 4.23 - 4.28.

5° Caso Bidimensional Tomaremos as funções de velocidade e geopotencial distintas, grade uniforme e os parâmetros conforme a Tabela 4.7. Os gráficos estão ilustradas nas Figuras 4.29 - 4.34.

Variáveis	Dados
Comprimento do domínio em x	2π
Comprimento do domínio em y	2π
Número de partições do domínio em x	32
Número de partições do domínio em y	32
Componente c_x do vetor de onda	1
Componente c_y do vetor de onda	1
Valor de Δt	10
Tempo Final	500
Valor de Φ	1
Componente de velocidade u	3
Componente de velocidade v	2
Geopotencial ϕ	1

Tabela 4.3: Dados para o 1° caso Bidimensional

Variáveis	Dados
Comprimento do domínio em x	2π
Comprimento do domínio em y	2π
Número de partições do domínio em x	32
Número de partições do domínio em y	32
Componente c_x do vetor de onda	1
Componente c_y do vetor de onda	1
Valor de Δt	10
Tempo Final	500
Valor de Φ	1
Componente de velocidade u	$\cos(y)$
Componente de velocidade v	$\text{sen}(x)$
Geopotencial ϕ	1

Tabela 4.4: Dados para o 2° caso Bidimensional

Variáveis	Dados
Comprimento do domínio em x	2π
Comprimento do domínio em y	2π
Número de partições do domínio em x	32
Número de partições do domínio em y	32
Componente c_x do vetor de onda	1
Componente c_y do vetor de onda	1
Valor de Δt	10
Tempo Final	500
Valor de Φ	1
Componente de velocidade u	$\text{sen}(x)*\cos(y)$
Componente de velocidade v	$-\text{sen}(y)*\cos(x)$
Geopotencial ϕ	1

Tabela 4.5: Dados para o 3° caso Bidimensional

Variáveis	Dados
Comprimento do domínio em x	2π
Comprimento do domínio em y	2π
Número de partições do domínio em x	32
Número de partições do domínio em y	32
Componente c_x do vetor de onda	1
Componente c_y do vetor de onda	1
Valor de Δt	100
Tempo Final	5000
Valor de Φ	0.5
Componente de velocidade u	$\text{sen}(x + y)$
Componente de velocidade v	$\text{sen}(x + y)$
Geopotencial ϕ	$\text{sen}(x + y)$

Tabela 4.6: Dados para o 4° caso Bidimensional

Variáveis	Dados
Comprimento do domínio em x	2π
Comprimento do domínio em y	2π
Número de partições do domínio em x	32
Número de partições do domínio em y	32
Componente c_x do vetor de onda	1
Componente c_y do vetor de onda	1
Valor de Δt	100
Tempo Final	5000
Valor de Φ	2
Componente de velocidade u	$\cos(x + y) - \text{sen}(x + y)$
Componente de velocidade v	$\cos(x + y) - \text{sen}(x + y)$
Geopotencial ϕ	$\cos(x + y) - \text{sen}(x + y)$

Tabela 4.7: Dados para o 5° caso Bidimensional

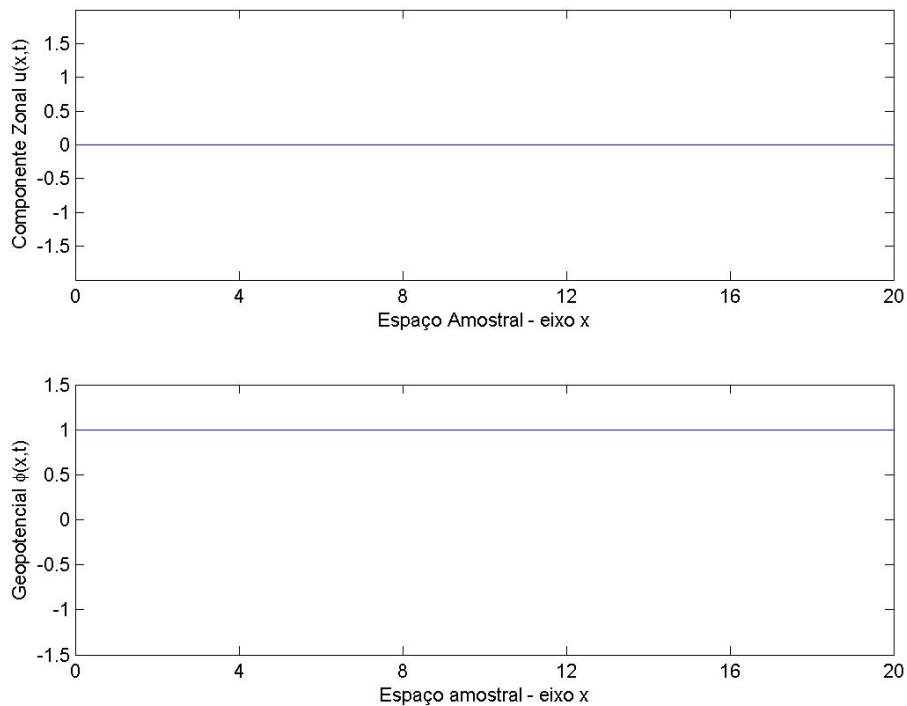


Figura 4.1: Valores iniciais de velocidade e geopotencial

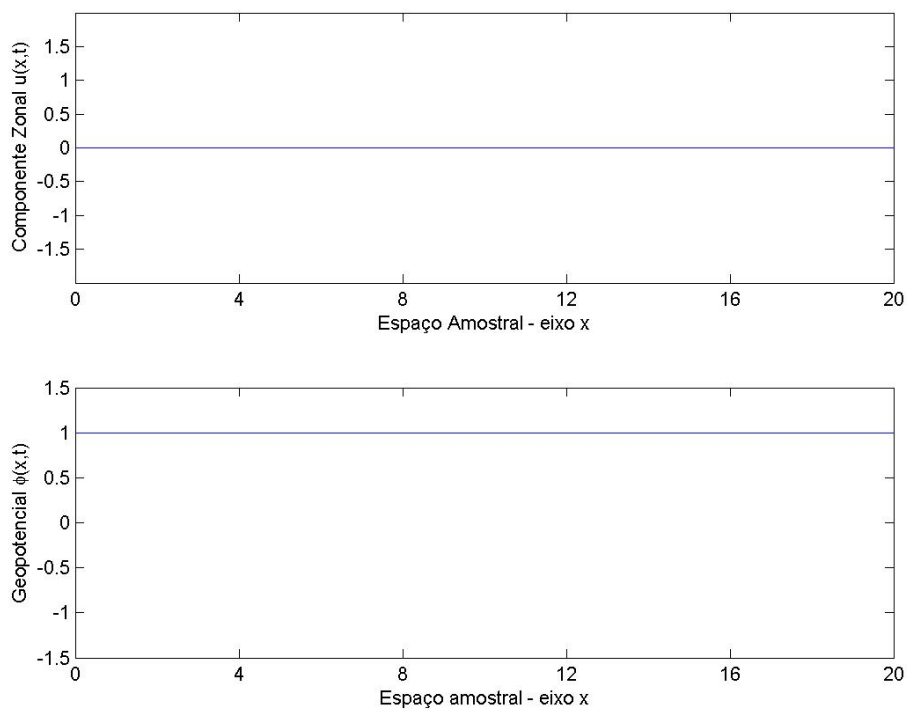


Figura 4.2: Valores finais de velocidade e geopotencial

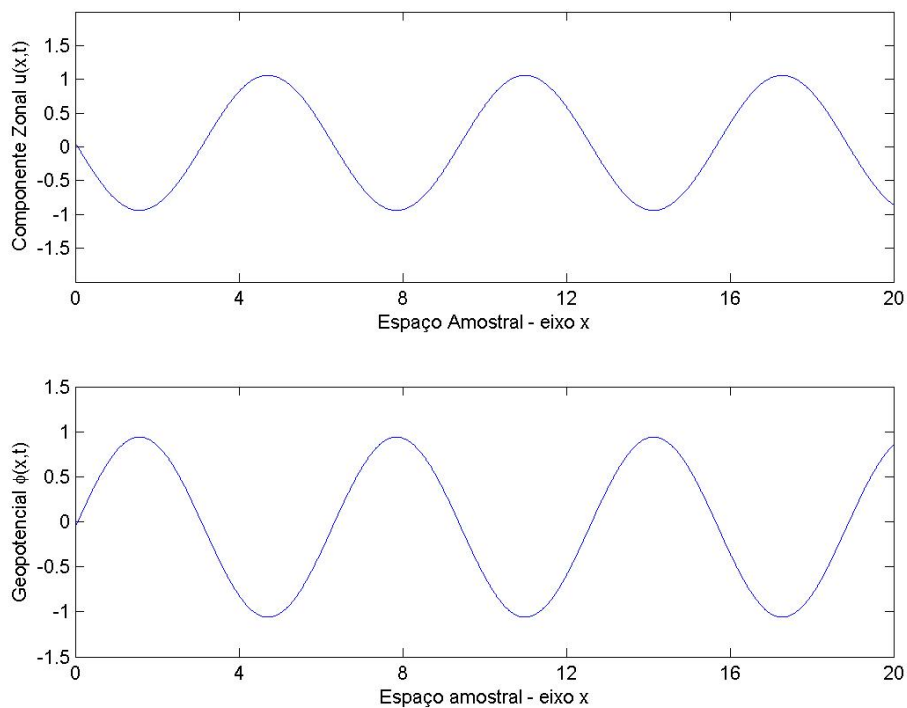


Figura 4.3: Valores iniciais de velocidade e geopotencial

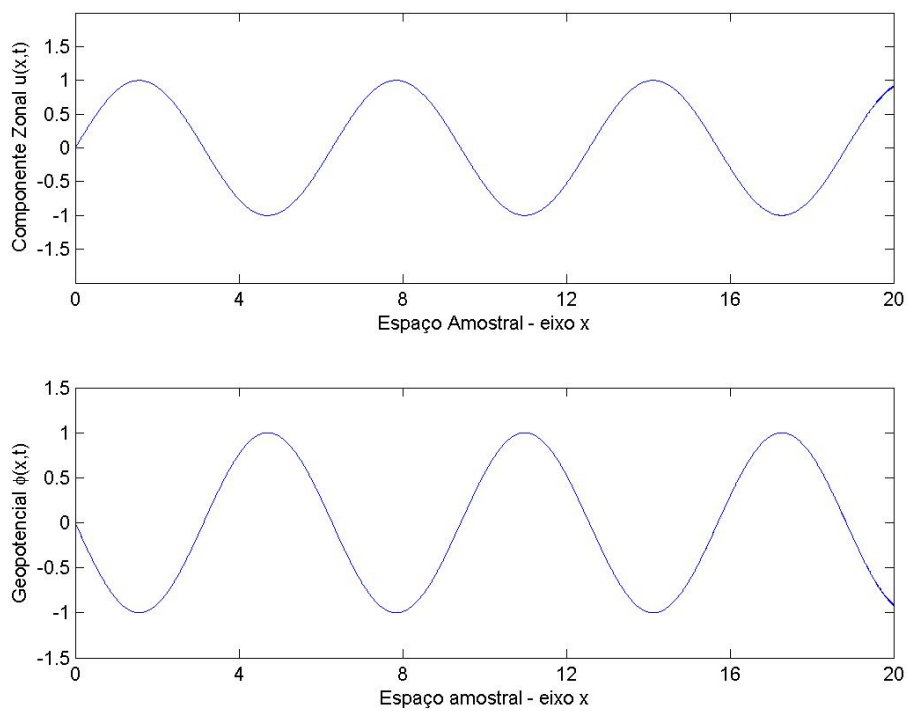


Figura 4.4: Valores finais de velocidade e geopotencial

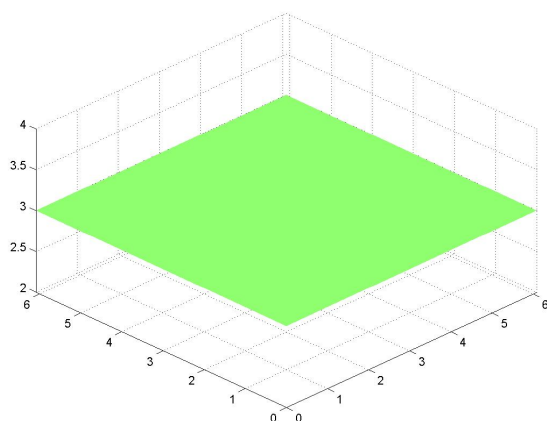


Figura 4.5: Função u no tempo inicial

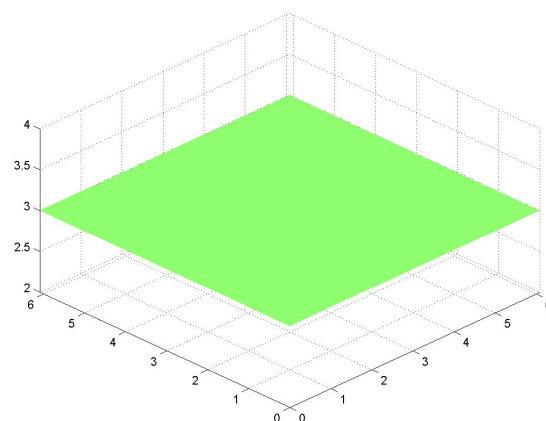


Figura 4.6: Função u no tempo final

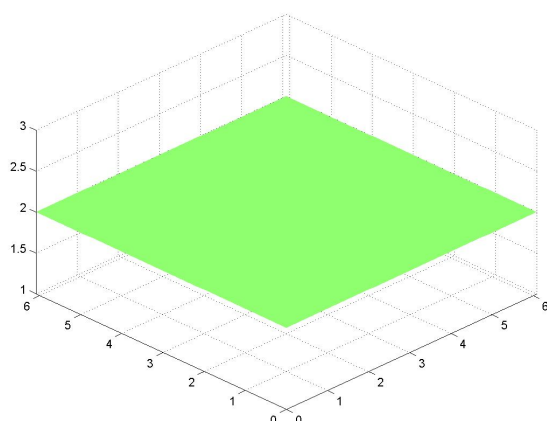


Figura 4.7: Função v no tempo inicial

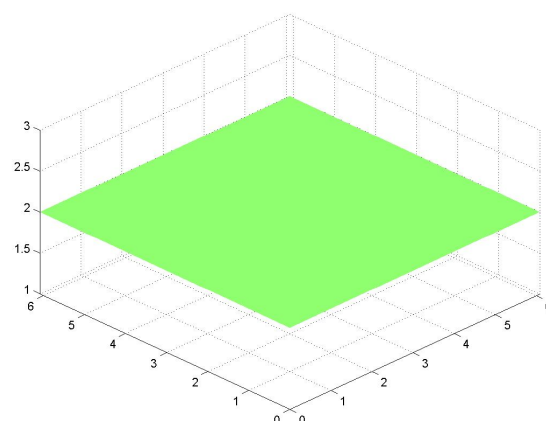


Figura 4.8: Função v no tempo final

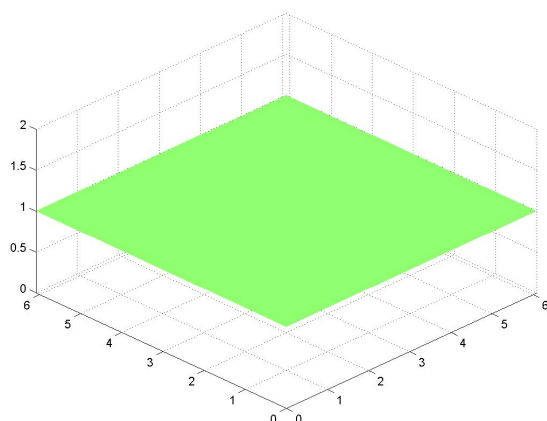


Figura 4.9: Função ϕ no tempo inicial

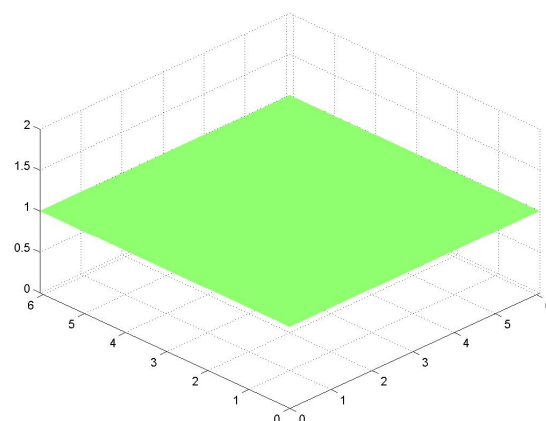


Figura 4.10: Função ϕ no tempo final

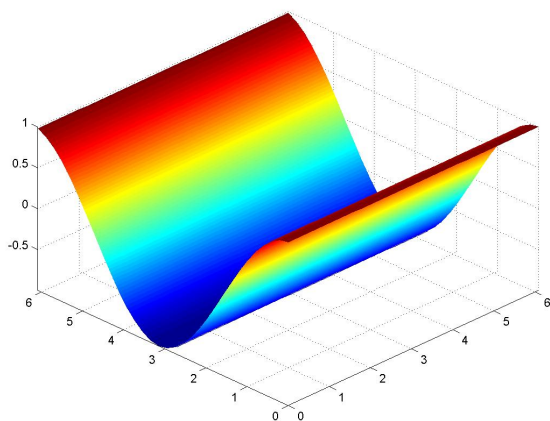


Figura 4.11: Função u no tempo inicial

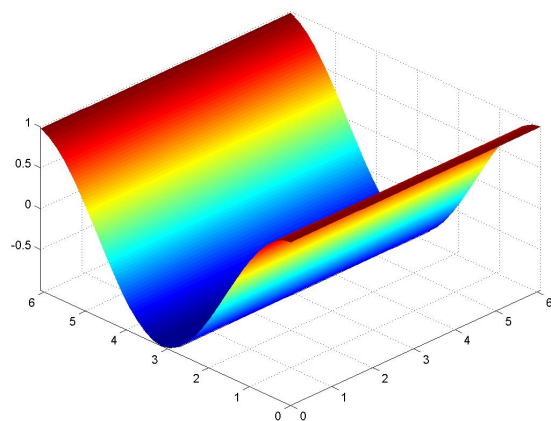


Figura 4.12: Função u no tempo final

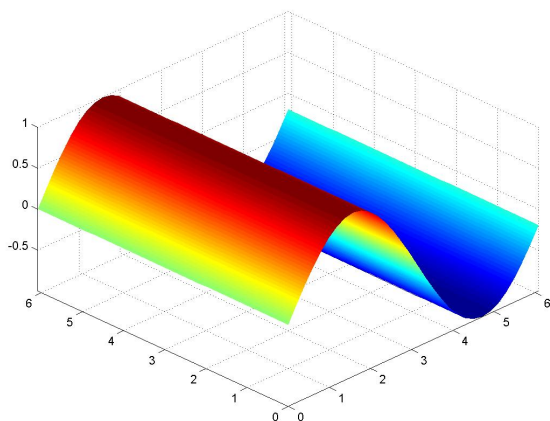


Figura 4.13: Função v no tempo inicial

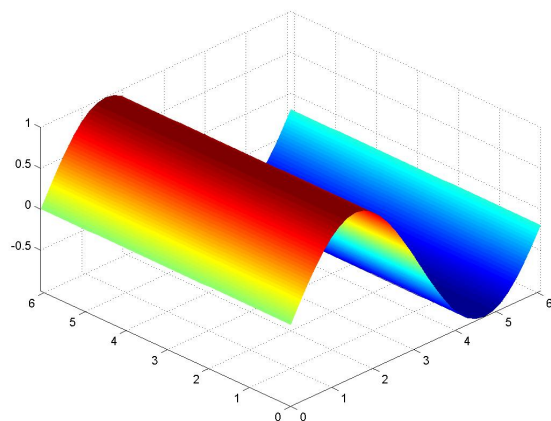


Figura 4.14: Função v no tempo final

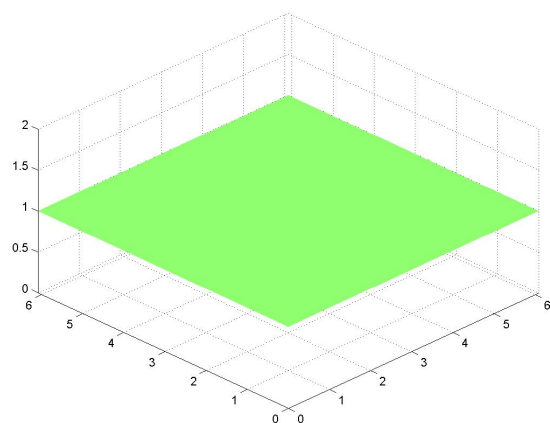


Figura 4.15: Função ϕ no tempo inicial

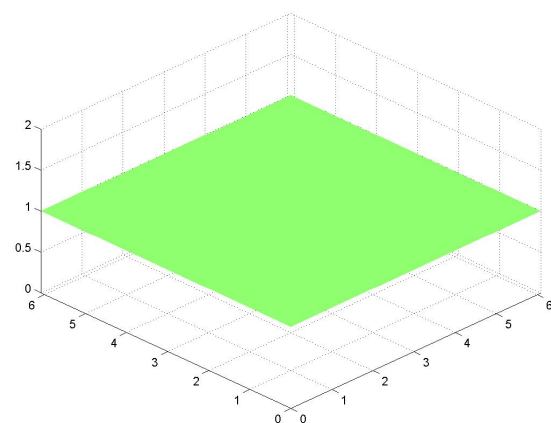


Figura 4.16: Função ϕ no tempo final

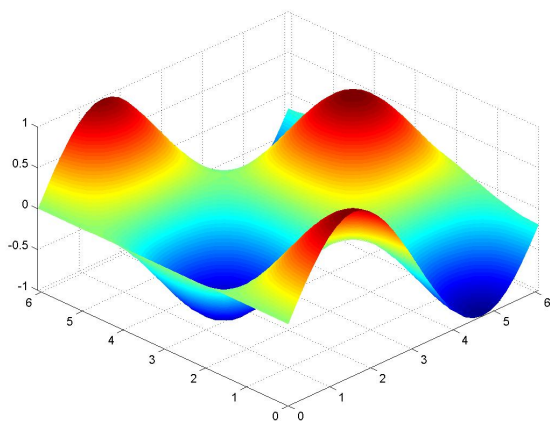


Figura 4.17: Função u no tempo inicial

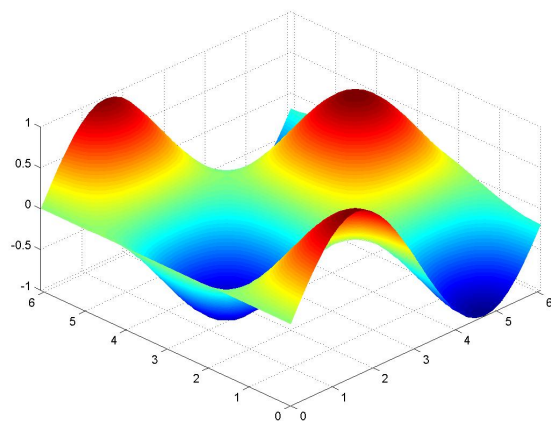


Figura 4.18: Função u no tempo final

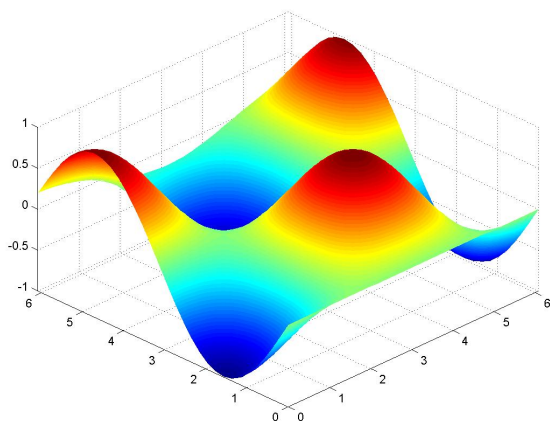


Figura 4.19: Função v no tempo inicial

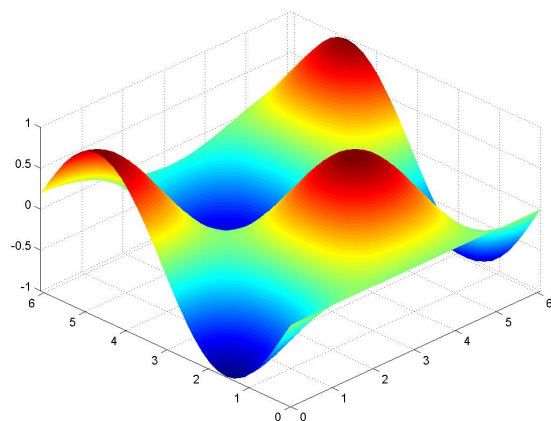


Figura 4.20: Função v no tempo final

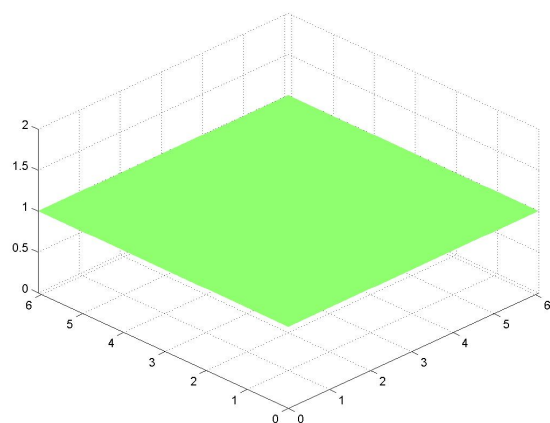


Figura 4.21: Função ϕ no tempo inicial

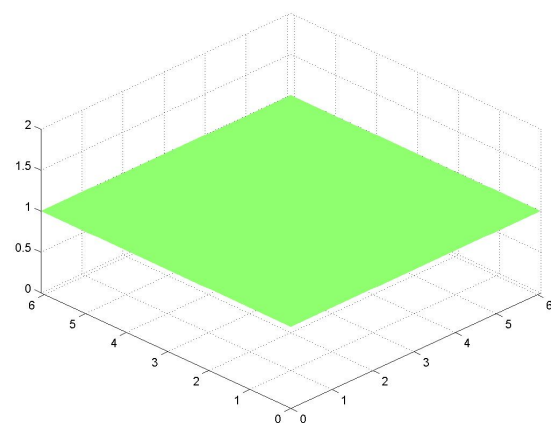


Figura 4.22: Função ϕ no tempo final

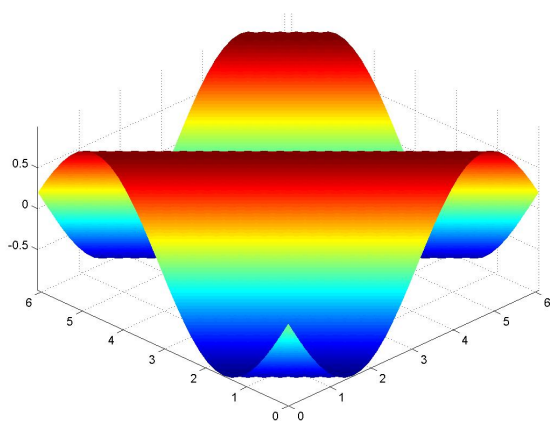


Figura 4.23: Função u no tempo inicial

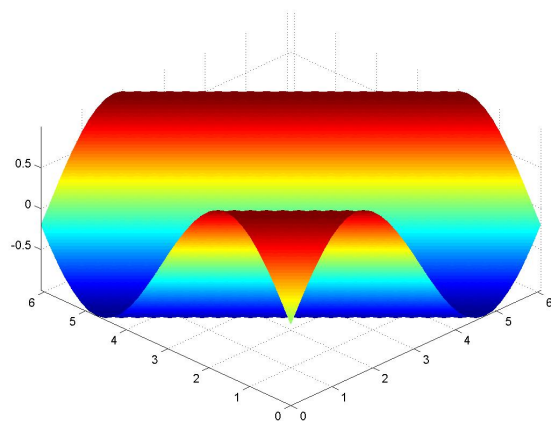


Figura 4.24: Função u no tempo final

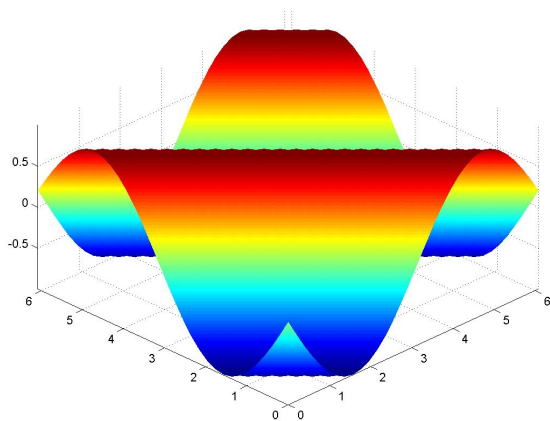


Figura 4.25: Função v no tempo inicial

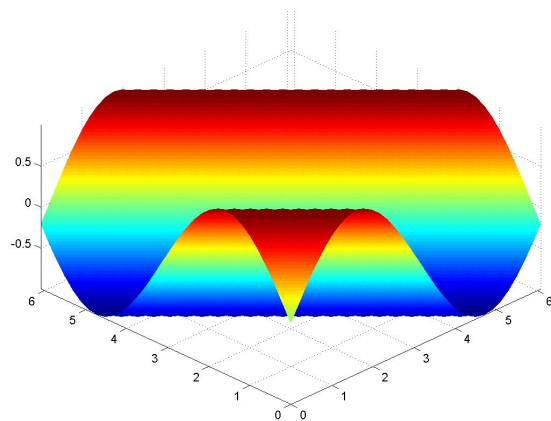


Figura 4.26: Função v no tempo final

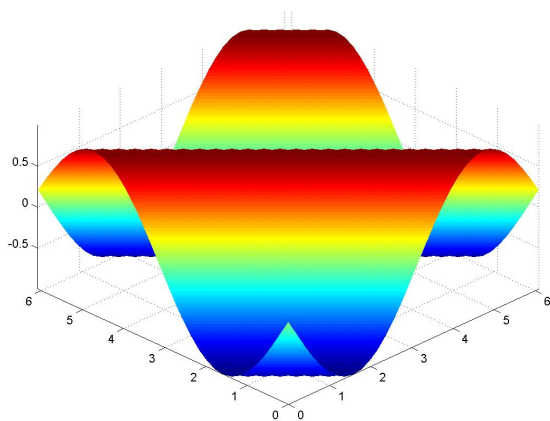


Figura 4.27: Função ϕ no tempo inicial

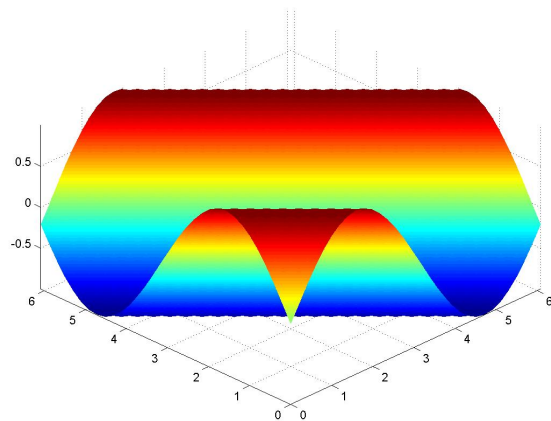


Figura 4.28: Função ϕ no tempo final

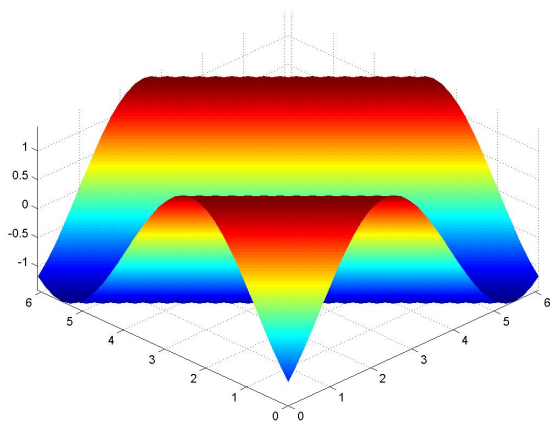


Figura 4.29: Função u no tempo inicial

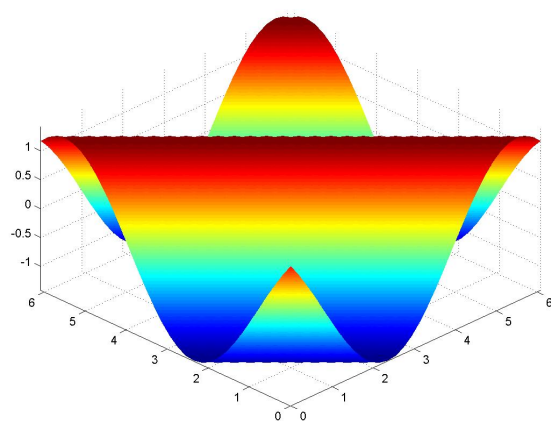


Figura 4.30: Função u no tempo final

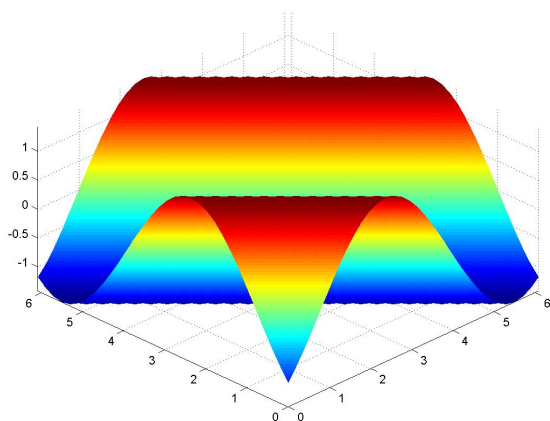


Figura 4.31: Função v no tempo inicial

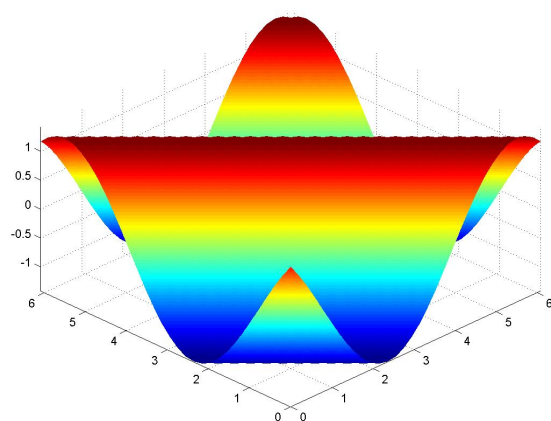


Figura 4.32: Função v no tempo final

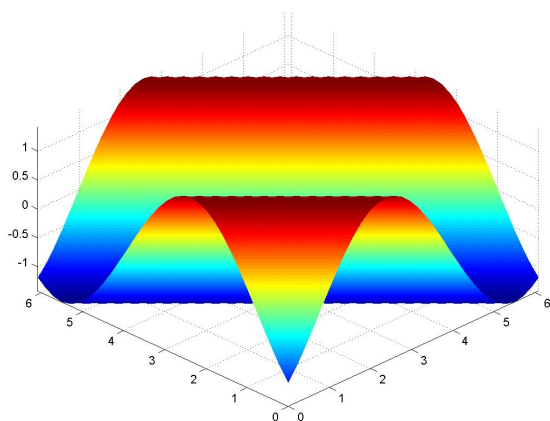


Figura 4.33: Função ϕ no tempo inicial

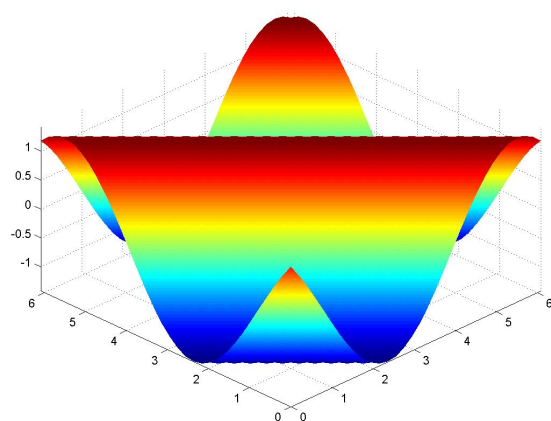


Figura 4.34: Função ϕ no tempo final

Apêndice A

Método das Diferenças Finitas

Neste Apêndice faremos uma breve introdução ao Método das Diferenças Finitas, e estudaremos os conceitos de convergência, consistência e estabilidade de um esquema numérico (para maiores detalhes veja [8], [11], [13] e [14]).

O método das diferenças finitas foi utilizado no trabalho de [4] para avaliar a propagação de ondas de águas rasas, conforme vimos na Seção 3.4.

A importância no estudo da consistência, convergência e estabilidade de um esquema numérico é encontrar a melhor discretização de uma equação diferencial parcial. Esta discretização quando adequada, aproxima as soluções do método numérico as soluções da equação diferencial parcial estudada.

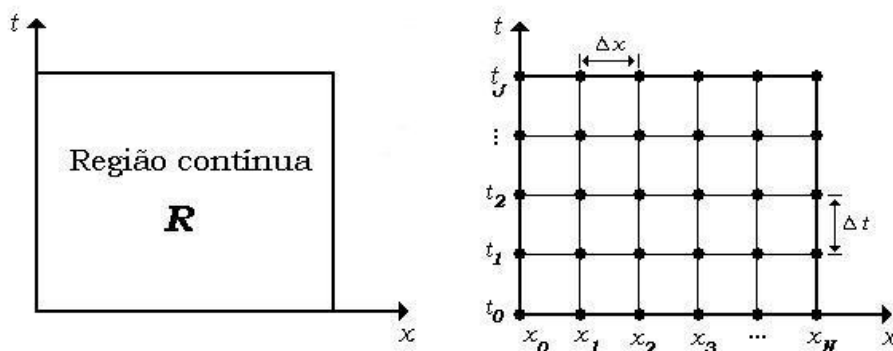
A.1 Aproximação por Diferenças Finitas

A solução de uma EDP em uma região R implica na obtenção dos valores para a variável dependente em cada ponto de R . Mas quando trabalhamos com um método numérico obtemos a solução da EDP em determinados pontos da região R ((x, t) , por exemplo), por cálculos como adição e multiplicação. Isso se dá, pois não podemos obter soluções numéricas sobre uma região contínua, devido aos infinitos pontos da mesma. Nada nós impede de encontrarmos as soluções da EDP em determinados pontos de R . Deste modo, vamos reduzir o problema referente a EDP à um problema discretizado o qual nós somos capazes de resolver. Mas, para que seja possível tratar numericamente as EDPs, elas devem ser expressas na forma de operações aritméticas que o computador

seja capaz de resolver.

Para o nosso estudo das diferenças finitas devemos definir uma grade de pontos, sobre a região R considerada (veja a figura A.1). Essa grade será formada discretizando-se o domínio, isto é, dividindo-o em pontos. A região que iremos considerar será da forma (x, t) , onde $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. A grade será composta de pontos da forma $(x_n, t_j) = (n\Delta x, j\Delta t)$, onde n e j são inteiros arbitrários com $n = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, J$, (não necessariamente N e J são iguais) e onde Δx e Δt são as distâncias que separam os pontos x_n e t_j , respectivamente (Δx e Δt também não são necessariamente iguais). As expressões calculadas sobre os pontos de grade, formam uma *equação algébrica*, denominada *equação de diferenças finitas* (EDF). Logo resolvendo-se as EDF's, encontra-se a solução aproximada da EDP. A solução no entanto não é exata devido a erros

- inerentes ao processo de discretização das equações;
- de arredondamento nos cálculos feitos no computador;
- na aproximação numérica das condições auxiliares (condições iniciais e de contorno).



Podemos observar pela figura que os pontos x_n e t_j são da forma,

- $x_n = x_0 + n\Delta x$ e $x_{n+1} = x_n + \Delta x$;
- $t_j = t_0 + j\Delta t$ e $t_{j+1} = t_j + \Delta t$.

No intuito de melhorar a notação, vamos escrever uma função $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ aplicada sobre os pontos da grade da seguinte forma

$$f(x_n, t_j) = f_n^j. \quad (\text{A.1})$$

Pode-se pensar nas aproximações de diferenças finitas com o inverso do processo de determinação do limite, utilizado para obter a derivada de uma função f . Considere-se a definição da derivada de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua:

$$\frac{df}{dt}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

A ferramenta matemática básica no cálculo de aproximações para as derivadas é a Série de Taylor que relaciona valores da função e suas derivadas, num ponto x , com valores dessa mesma função numa vizinhança de x , ou seja, com $f(x + \Delta x)$. Se $f(x)$ tem derivadas até a ordem $p + 1$ em x podemos escrever,

$$f(x + \Delta x) = f(x) + (\Delta x) \frac{df}{dx}(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(x) + \dots + \frac{(\Delta x)^p}{p!} \frac{d^p f}{dx^p}(x) + R_{p+1}, \quad (\text{A.2})$$

em que R_{p+1} é o resto, definido como

$$R_{p+1} = \frac{(\Delta x)^{p+1}}{(p+1)!} \frac{d^{p+1} f}{dx^{p+1}}(\xi), \quad x < \xi < x + \Delta x.$$

Deste modo, como estamos trabalhando com os pontos da grade, então estamos considerando os pontos x_n . Assim,

$$f(x_n + \Delta x) = f(x_n) + (\Delta x) \frac{df}{dx}(x_n) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(x_n) + \dots + \frac{(\Delta x)^p}{p!} \frac{d^p f}{dx^p}(x_n) + R_{p+1}, \quad (\text{A.3})$$

em que R_{p+1} é o resto, definido como

$$R_{p+1} = \frac{(\Delta x)^{p+1}}{(p+1)!} \frac{d^{p+1} f}{dx^{p+1}}(\xi_n), \quad x_n < \xi_n < x_n + \Delta x.$$

Se $n = 1$ em (A.2) obtemos uma aproximação para a derivada $\frac{df}{dx}(x)$, conhecida como *diferença progressiva*, que é dada por,

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(\xi). \quad (\text{A.4})$$

onde o termo $\frac{(\Delta x)}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(\xi)$ representa o erro dessa aproximação.

De modo semelhante, tomando $-\Delta x$ em (A.2), ainda com $n = 1$, obtemos a *fórmula regressiva* que utiliza a *diferença regressiva* e seu erro, ou seja,

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(\xi). \quad (\text{A.5})$$

Tomando $n = 2$ em (A.2), e reescrevendo (A.2) para Δx e $-\Delta x$, respectivamente, obtemos

$$f(x + \Delta x) = f(x) + (\Delta x) \frac{df}{dx}(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(x) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3}(\xi_1), \quad (\text{A.6})$$

e

$$f(x - \Delta x) = f(x) - (\Delta x) \frac{df}{dx}(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(x) - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3}(\xi_2), \quad (\text{A.7})$$

onde $x < \xi_1, \xi_2 < x + \Delta x$.

Fazendo a subtração de (A.6) por (A.7) obtemos a *diferença centrada* ou *fórmula de diferenças centrais*

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3}(\xi), \quad (\text{A.8})$$

onde $x - \Delta x < \xi < x + \Delta x$ e foi utilizado o teorema do valor intermediário válido para funções contínuas,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d^3 f}{dx^3}(\xi_1) + \frac{d^3 f}{dx^3}(\xi_2) \right), \quad \text{para algum } \xi \in [\min\{\xi_1, \xi_2\}, \max\{\xi_1, \xi_2\}].$$

Assim, aplicando os pontos de grade nas expressões (A.4), (A.5) e (A.8) obtemos,

- $\frac{df}{dx}(x_n) = \frac{f(x_n + \Delta x) - f(x_n)}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(\xi_n)$ (diferença progressiva);
- $\frac{df}{dx}(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_n - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(\xi_n)$ (diferença regressiva);
- $\frac{df}{dx}(x_n) = \frac{f(x_n + \Delta x) - f(x_n - \Delta x)}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3}(\xi_n)$ (diferença central)

Portanto, pelas expressões (A.1) e (A.4) temos que, dado uma função $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua aplicada na grade de pontos (x_n, y_m, t_j) , têm sua diferença progressiva com relação a variável t da forma,

$$\frac{dv}{dt}(x_n, y_m, t_j) = \frac{v_{n,m}^{j+1} - v_{n,m}^j}{\Delta t} \quad (\text{A.9})$$

A.2 Consistência, Convergência e Estabilidade

Quando se resolve uma EDP numericamente, é natural questionarmos se a solução calculada se aproxima, de alguma forma, da solução real da EDP, pois como sabemos o erro na discretização influencia na qualidade numérica da aproximação numérica de derivadas parciais.

Estamos querendo determinar, fundamentalmente, quando e sob que condições a solução discretizada é a representação da solução real da EDP. A resposta a essa questão depende da consistência das equações de diferenças finitas e da estabilidade e convergência do método numérico empregado.

A.2.1 Consistência

A propriedade mais básica que um método numérico tem, no sentido de ser útil, é que suas soluções devem se aproximar da solução analítica correspondente a equação diferencial parcial, a que a mesma representa. Essas aproximações devem melhorar quando as distâncias entre os pontos da grade tenderem a zero. Assim, para que uma discretização seja consistente com a EDP, seu erro deve tender para zero quando as distâncias entre os pontos da grade tenderem para zero. Para verificar a consistência de uma discretização, devemos substituir as expansões em séries de Taylor na equação de diferenças, e faremos $\Delta x, \Delta y$ e $\Delta t \rightarrow 0$. Caso o erro vá para zero, a discretização é *consistente* com a EDP. Esse é, essencialmente, o caminho inverso do processo de discretização.

Embora possa parecer óbvio que todas as discretizações são consistentes com a EDP original, algumas delas não o são, ou o são em alguns casos. Por isso, deve-se sempre verificar a consistência da discretização antes de trabalharmos com ela numericamente.

Em resumo, quando uma EDP é discretizada procura-se obter uma Aproximação por diferenças finitas, a qual, quando a distância entre os pontos que compõem a grade tende pra zero, tem seu erro tendendo a zero. Logo a aproximação volta a ser a EDP.

A.2.2 Convergência

Sabemos que, se a discretização for consistente, então, quando a distância entre os pontos da grade tenderem para zero, o erro se anula e recuperamos a EDP original. E como isso afeta a solução da EDP após um número arbitrário de passos de tempo? Caso a solução numérica no domínio de interesse $v_{n,m}^j$ se aproxime da solução exata $v(x_n, y_m, t_j)$ da EDP, conforme a distância entre os pontos da grade diminui, então o método numérico é dito *convergente*, isto é, a solução numérica aproximada converge para a solução exata da EDP.

Observação A.1 *A consistência é uma condição necessária para convergência, mas não suficiente.*

A.2.3 Estabilidade

Um método numérico *estável* é aquele no qual quaisquer erros ou perturbações na solução não são amplificados sem limite. Essa amplificação, quando presente, faz com que o módulo dos valores da solução numérica cresça a cada etapa dos cálculos. Eventualmente, essa solução "explode". Como esse crescimento é puramente relativo ao método numérico, e não à física do problema, ele deve ser evitado. Portanto, o conceito de estabilidade está relacionado ao crescimento, ou diminuição dos erros introduzidos nos cálculos.

Uma solução numérica para ser estável, ela deve também satisfazer o seguinte teorema,

Definição A.1 *Um método de diferenças finitas $P_{\Delta x, \Delta y, \Delta t} v_{n,m}^j = 0$ de uma equação de primeira-ordem é estável em uma região de estabilidade Λ se existir um inteiro J tal que para algum tempo positivo T , existe uma constante C_T tal que*

$$h \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_{n,m}^j|^2 \leq C_T h \sum_{p=0}^J \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_{n,m}^p|^2 \quad (\text{A.10})$$

para $0 \leq j\Delta t \leq T$, com $(\Delta x, \Delta y, \Delta t) \in \Lambda$.

A importância dos conceitos de consistência e estabilidade é visto no Teorema de Equivalência de Lax-Richtmyer, o qual é o teorema fundamental na teoria do método das diferenças finitas para problemas de valor inicial.

Teorema A.2 (*O Teorema de Equivalência de Lax-Richtmyer*). *Um método de diferenças finitas consistente para uma equação diferencial parcial cujo problema de valor inicial está bem definido é convergente se, e somente se, ele é estável.*

Apêndice B

Introdução às Transformadas Discretas de Fourier

Neste Apêndice, iremos tratar de uma importante ferramenta usada neste trabalho chamada Transformada Discreta de Fourier (DFT) e de sua inversa chamada Transformada Discreta Inversa de Fourier (IDFT). Para maiores detalhes veja [1].

B.1 Um pouco de História

Antes de começarmos com a definição da Transformação Discreta de Fourier, vamos explicar um pouco sobre sua história, para observarmos a sua importância no contexto matemático de hoje em dia, pois algumas valiosas perspectivas não vêm com a descoberta da DFT a dez anos atrás, nem foi inventada com a FFT trinta anos atrás (chamamos de FFT a DFT que será aplicada computacionalmente). Ela tem uma fascinante história, atravessando mais de dois séculos que estão associados com o desenvolvimento da matemática aplicada e da análise numérica.

A Análise de Fourier tem aproximadamente 200 anos e sua história está cheia de controvérsias e feitos prodigiosos. Para apreciar a história completa, temos de voltar uns 60 anos antes de 1807, quando Jean Baptiste Joseph Fourier apresentou a primeira versão da teoria de condução de calor para a Academia de Ciência de Paris. O ano de 1750 é um bom ponto de partida pois, o cálculo de Newton e Leibnitz, publicado 75 anos antes, estava habilitando a criação de poderosas novas teorias da mecânica celeste

e mecânica do contínuo.

Existiam dois problemas excelentes que focalizaram consideravelmente a energia dos matemáticos, e formaram as sementes que no final das contas se tornaram a análise de Fourier. O primeiro problema era descrever a vibração de um fio esticado com extremidades fixas (ou equivalentemente a propagação de som em um meio elástico). Notavelmente, a equação de onda como conhecemos hoje, já tinha sido formulada, e os matemáticos Jean d'Alembert, Leonhard Euler, Daniel Bernoulli, e Joseph-Louis Lagrange tinham propostos métodos de solução por volta de 1750. A solução de Bernoulli levou à forma de série trigonométrica

$$y = A \sin x \cos at + B \sin 2x \cos 2at + \dots$$

na qual x é a variável espacial e t é a variável temporal. Esta solução já antecipava a forma contínua de uma série de Fourier. É aparente que ambos Euler e Lagrange realmente discretizaram o problema da vibração no fio, imaginando o fio consistindo de um número finito de partículas conectadas. A solução deste problema discreto exigiu encontrar o modelo da função que descreve o deslocamento do fio, e o trabalho de Lagrange sobre este problema, publicado em 1759, contém ingredientes do que chamamos hoje de Série de Senos Discreta de Fourier.

O segundo problema que nutriu as raízes da análise de Fourier, particularmente em sua forma discreta, era determinar as órbitas de corpos celestiais. Euler, Lagrange, e Alexis Claude Clairaut, fizeram contribuições fundamentais, propondo que os dados retirados das observações fossem aproximados por combinações lineares de funções periódicas. O cálculo dos coeficientes nestas expansões trigonométricas conduziu a um cálculo que hoje chamaríamos uma Transformada Discreta de Fourier. Na realidade, um documento publicado em 1754 por Clairaut, contém o que teria sido descrito como a primeira fórmula explícita da DFT.

A história segue dois caminhos no começo do século XIX. Não surpreendentemente, poderíamos chamar um caminho contínuo e o outro discreto. Na parte contínua em 1807, Fourier apresentou um trabalho na Academia de Paris, na qual ele afirmou, que uma função arbitrária poderia ser representada como uma série infinita de senos e cossenos. O trabalho inspirou apenas entusiasmo moderado da Academia e a sugestão de que Fourier melhorasse o seu trabalho submetendo isto para o prêmio principal em

1812. Apesar do fato que Euler e Bernoulli introduziram representações trigonométricas de funções, e de que Lagrange já tinha produzido o que chamamos de uma solução em séries de Fourier para a equação da onda, a reivindicação mais geral de Fourier de que uma função arbitrária pudesse ser dada por tal representação despertou ceticismo, se não afronta na Academia.

Historicamente os matemáticos estão divididos sobre quanto de crédito é atribuído a Lagrange pela descoberta das Séries de Fourier.

Sem levar em conta a originalidade e o rigor do trabalho de Fourier quando foi apresentado pela primeira vez, a análise de Fourier mudou a paisagem inteira da matemática e suas aplicações.

Mas a parte contínua não termina com o trabalho de Fourier. O restante do século XIX foi uma incubadora do pensamento matemático na Europa. Alguns dos maiores matemáticos do período tais como Poisson, Dirichlet e Riemann avançaram na teoria das séries trigonométricas e enfrentaram o desafio das questões de convergência das séries. A batalha continuou no século XX quando Lebesgue, armado com sua nova teoria da integração, foi capaz de produzir proposições mais gerais sobre a convergência de séries trigonométricas.

Retornemos novamente para o início do século XIX e sigamos para a segunda parte de todo este enredo. Como mencionado anteriormente, Clairaut e Lagrange tinham considerado o problema de ajuste astronômico de dados, e por causa destes dados terem padrões periódicos, seria natural utilizar funções aproximadas que consistiam de senos e cossenos. Então estes dados representariam amostras discretas de uma função desconhecida, e então a função de aproximação seria uma soma finita de funções trigonométricas; este trabalho guiou algumas das tendências que antecederam a transformada discreta de Fourier.

O trabalho de Lagrange em interpolação era evidentemente conhecido pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss, o qual originou uma corrente prolífica de matemáticos originários em Göttingen. Quase uma nota de rodapé para a vasta produção de Gauss, foi sua própria contribuição para a interpolação trigonométrica, a qual também continha a transformada discreta de Fourier. Igualmente significativo é um pequeno cálculo enterrado no seu tratado de interpolação que apareceu postumamente em 1866 como um trabalho inédito. Este trabalho tinha sido datado em 1805, e continha o

primeiro uso claro e indisputável da Transformada Rápida de Fourier (FFT), a qual é atribuída geralmente a Cooley e Tukey em 1965. Ironicamente o cálculo de Gauss foi citado em 1904 na enciclopédia de Burkhardt e novamente em 1977 por Goldstine. A história inteira da FFT foi lembrada novamente em 1985 na fascinante investigação matemática de Heideman, Johnson e Burrus, o qual observou que "o trabalho de Burkhardt e Goldstine foi quase tão desadvertido quanto o trabalho de Gauss".

B.2 Introdução

Em nosso tópico anterior falamos sobre a história das séries de Fourier. Mas, afinal de contas, no que estas séries podem nos ajudar em nossa questão de apresentar as DFT's e o que, exatamente, é a DFT? Uma resposta simples é considerar uma fórmula, tal como

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} f_n e^{-i2\pi nk/N} \quad (\text{B.1})$$

e a condição de que esta soma é tomada para um k igual a alguns N inteiros consecutivos. A equação (B.1) é, de fato, uma definição que usaremos, mas a resposta lançada não responde a questão original. O que, então, é a DFT? Com este nome, podemos deduzir que ela é uma transformada de Fourier? Se ela não for uma transformada de Fourier, seria possível aproximá-la por uma? O adjetivo discreto sugere que esta pode ser mais rigorosamente relacionada por uma série de Fourier que a Transformada contínua de Fourier? É este o caso? Na verdade não existem respostas simples para estas questões. Examinada por certas perspectivas, a DFT é cada uma destas coisas. Nosso trabalho aqui, não é dá uma resposta para todas estas questões. Portanto, a título de conhecimento, vamos mostrar como podemos aproximar uma DFT pela Transformada de Fourier e pelos coeficientes de uma série de Fourier. Após isso estenderemos a DFT do caso unidimensional para o caso bidimensional.

B.3 Aproximação da Transformada de Fourier pela DFT

Um problema natural para examinarmos primeiro seria a aproximação da transformada de Fourier de uma função f (possivelmente com valores complexos) de uma variável real x . Reconhecemos que na prática, f pode não aparecer explicitamente como uma função, mas pode ser dada como um conjunto de valores de dados discretizados. Entretanto, para este momento, vamos assumir que f é definida em um intervalo $(-\infty, \infty)$ e possui algumas propriedades conhecidas, uma das quais é que seja absolutamente integrável na reta, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Então podemos definir a função $\hat{f}(\omega)$ por

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\omega x} dx, \quad (\text{B.2})$$

onde $-\infty < \omega < \infty$. A função \hat{f} é dita a **Transformada de Fourier** de f e é unicamente determinada por (B.2). A transformada \hat{f} é dita ser definida no domínio de frequência ou domínio da transformada, e a função f é dita ser definida no domínio espacial se x é uma coordenada espacial, ou no domínio temporal se f é uma função dependente do tempo. De extrema importância é o fato que também existe uma relação inversa entre f e \hat{f} , dada por

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i2\pi\omega x} d\omega. \quad (\text{B.3})$$

Esta relação é chamada a Transformada Inversa de Fourier de $\hat{f}(\omega)$.

Agora vamos ver como a DFT surge como uma aproximação natural. Mas antes disso uma observação prática é necessária: quando a função é determinada ou já é limitada nos extremos (por exemplo, f pode representar um conjunto imagem que tem fronteira bem definida), ou por causa de métodos computacionais, f vai assumir valor zero fora de um intervalo finito. Para este momento, vamos assumir que $f(x) = 0$ para $|x| > A/2$. A transformada de Fourier com as extremidades limitadas é dada por

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\omega x} dx = \int_{-A/2}^{A/2} f(x) e^{-i2\pi\omega x} dx. \quad (\text{B.4})$$

Esta é a integral que desejamos aproximar numericamente.

Para criarmos um método de aproximações, o intervalo $[-A/2, A/2]$ de integração será dividido em N subintervalos de comprimento $\Delta x = A/N$. Assumiremos que N é par, e uma grade de $N + 1$ pontos de distâncias iguais será definida pelos pontos $x_n = n\Delta x$ para $n = -N/2:N/2$. Então o conjunto de pontos da grade será

$$x_{-\frac{N}{2}} = -\frac{A}{2}, \dots, x(0) = 0, \dots, x_{\frac{N}{2}} = \frac{A}{2}.$$

Assumiremos agora que a função f é conhecida para os pontos da grade (de fato, f só pode ser conhecida para estes pontos). Denotemos o integrando por

$$g(x) = f(x)e^{-i2\pi\omega x},$$

podemos aplicar a regra do trapézio, para integral (B.4). Isto nos fornece a aproximação,

$$\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} g(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2} \left(g\left(-\frac{A}{2}\right) + 2 \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} g(x_n) + g\left(\frac{A}{2}\right) \right).$$

Agora iremos acrescentar a hipótese que $g(-A/2) = g(A/2)$. Com esta consideração, a aproximação dada pela regra do trapézio pode ser escrita

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} g(x)dx \approx \Delta x \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} g(x_n) = \frac{A}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} f(x_n)e^{-i2\pi\omega x_n}.$$

No momento, estas aproximações podem ser avaliadas para um valor qualquer de ω . Antecipamos que a aproximação é feita somente para valores selecionados de ω . Portanto, determinaremos quantos e quais valores de ω podemos usar. Com o propósito de obter a DFT, precisamos de uma amostra de valores de $f(x_n)$ para determinar a unicidade das aproximações para $\hat{f}(\omega)$ e vice-versa. Então N valores de $f(x_n)$ são usados na aproximação da regra do trapézio, isto é posto pela razão que escolheremos N valores de ω para obter a aproximação de \hat{f} .

A questão de quais valores de frequência usar requer uma discussão de fundamental importância para a DFT, porque isto direciona para as relações recíprocas. Elas são um passo fundamental para encontrarmos a DFT.

Já apresentamos neste contexto, o intervalo $[-A/2, A/2]$ como sendo o domínio espacial (ou temporal), com espaçamento na grade de tamanho Δx e a grade de pontos

dada por $x_n = n\Delta x$. Associado com este domínio está um domínio de frequência que denotamos por $[-\Omega/2, \Omega/2]$. Este domínio de frequência, logo será munido de uma grade que consistirá igualmente de N pontos igualmente espaçados, separados por uma distância $\Delta\omega$. Denotaremos estes pontos da grade por $\omega_k = k\Delta\Omega$, onde $k = -N/2 : N/2 - 1$.

Imagine que todas as ondas (senos e cossenos) têm um número inteiro de períodos em $[-A/2, A/2]$ e que se ajustem exatamente no intervalo. Destas ondas, considere a onda com o maior número possível de períodos. Esta onda é geralmente chamada primeiro-modo, ou modo fundamental. Claramente esta onda tem um período completo no intervalo $[-A/2, A/2]$ ou um período de unidade A . O que é a frequência desta onda? Esta onda, têm uma frequência de $1/A$ períodos por unidade de comprimento. Esta frequência será a *menor* frequência associada com o intervalo $[-A/2, A/2]$. Portanto, denotaremos esta unidade fundamental de frequência

$$\Delta\omega = \frac{1}{A}$$

e este será o espaçamento na grade do domínio de frequência. Todas as outras frequências reconhecidas pela DFT serão múltiplos inteiros de $\Delta\omega$ de forma correspondente com um número inteiro de períodos em $[-A/2, A/2]$. Então existem N pontos de grade no intervalo de frequência $[-\Omega/2, \Omega/2]$, e os pontos de grade serão separados por $\Delta\omega$, de onde segue que $\Omega = N\Delta\omega$. Combinando estas duas expressões, teremos a primeira relação recíproca:

$$\Omega = N\Delta\omega = \frac{N}{A} \quad \text{ou} \quad A\Omega = N.$$

Observe que esta relação afirma que o comprimento do domínio espacial (ou temporal) e do domínio de frequência variam inversamente um com o outro.

A segunda relação de reciprocidade é obtida mais facilmente. Sendo o intervalo $[-A/2, A/2]$ coberto por N pontos de grade separados por Δx , então $N\Delta x = A$. Combinando isto com o fato que $\Delta\omega = 1/A$, obtemos

$$\frac{1}{\Delta\omega} = A = N\Delta x \quad \text{ou} \quad \Delta x\Delta\omega = \frac{1}{N}.$$

Como na primeira relação recíproca, concluímos que o espaçamento nas grades são relativamente inversos.

A partir de agora sabemos que,

$$A\Omega = N \quad \text{e} \quad \Delta x \Delta \omega = \frac{1}{N}.$$

Então com estas relações de equivalência em mãos podemos voltar para a questão de aproximação da regra do trapézio e extrair a DFT. Primeiramente usaremos f_n para denotar os valores de $f(x_n)$ para $n = -N/2 : N/2 - 1$. Então, para aproximar \hat{f} nos pontos de grade de frequência $\omega_k = k\Delta\omega = k/A$, notamos que

$$x_n \omega_k = (n\Delta x)(k\Delta\omega) = \frac{nA}{N} \frac{k}{A} = \frac{nk}{N}.$$

A soma na regra do trapézio se torna

$$\hat{f}(\omega_k) \approx \frac{A}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} f(x_n) e^{-i2\pi\omega_k x_n} = \frac{A}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} f_n e^{-i2\pi nk/N}.$$

Portanto, nossa aproximação para a transformada de Fourier \hat{f} para a grade de pontos de frequência $\omega_k = k/A$ é dada por

$$\hat{f}(\omega_k) = \hat{f}\left(\frac{k}{A}\right) = \int_{-A/2}^{A/2} f(x) e^{-i2\pi\omega_k x} dx \approx A \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} f_n e^{-i2\pi nk/N}.$$

para $k = -N/2 : N/2 - 1$. A expressão à direita é a nossa definição escolhida para a DFT. Deste modo dado um conjunto com N valores amostrais f_n , a DFT consistirá dos N coeficientes

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} f_n e^{-i2\pi nk/N}$$

para $k = -N/2 : N/2 - 1$. Podemos concluir que aproximamos a Transformada de Fourier $\hat{f}(\omega_k)$ por $\hat{f}(\omega_k) \approx AF_k$. Vamos agora introduzir oficialmente a DFT.

B.4 A DFT e a IDFT

Vamos agora escrever as DFT's com um número de partições pares, ímpares e depois generalizaremos para o caso de uma partição qualquer. Procederemos de forma análoga para as IDFT's (Transformada Discreta Inversa de Fourier).

B.4.1 Transformada Discreta de Fourier

Seja N um inteiro positivo par e seja f_n uma sequência de N números complexos onde $n = -N/2 : N/2 - 1$. Então a transformada discreta de Fourier é uma outra sequência de N números complexos dada por

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} f_n e^{-i2\pi nk/N} \quad (\text{B.5})$$

para $k = -N/2 : N/2 - 1$.

Podemos também tomar a DFT quando N é ímpar. Assim, seja N um inteiro positivo ímpar e seja f_n uma sequência de N números complexos onde $n = -(N-1)/2 : (N-1)/2$. Então a transformada discreta de Fourier é uma outra sequência de N números complexos dada por

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} f_n e^{-i2\pi nk/N} \quad (\text{B.6})$$

para $k = -(N-1)/2 : (N-1)/2$.

Vamos agora escrever a expressão da DFT para uma partição qualquer, (esta é a sua forma alternativa).

Seja N um inteiro positivo e seja f_n uma sequência de N números complexos onde $n = 0 : N - 1$. Então a transformada discreta de Fourier é uma outra sequência de N números complexos dada por

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i2\pi nk/N} \quad (\text{B.7})$$

para $k = 0 : N - 1$.

B.4.2 Transformada Discreta Inversa de Fourier

Assim como fomos capazes de chegar a DFT através de algumas manipulações matemáticas, também podemos chegar a sua inversa, mas estas operações não são relevantes para este trabalho e sim a expressão para a IDFT. Logo, iremos apenas apresentar a expressão para a IDFT.

De modo análogo ao que escrevemos para os casos anteriores (da DFT), vamos descrever a inversa das DFT's.

Seja N um inteiro positivo par e seja F_k uma sequência de N números complexos onde $k = -N/2 : N/2 - 1$. Então a transformada discreta inversa de Fourier é uma outra sequência de N números complexos dada por

$$f_n = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} F_k e^{i2\pi nk/N} \quad (\text{B.8})$$

para $n = -N/2 : N/2 - 1$.

Para o caso de N ímpar. Seja N um inteiro positivo ímpar e seja F_k uma sequência de N números complexos onde $k = -(N-1)/2 : (N-1)/2$. Então a transformada discreta inversa de Fourier é uma outra sequência de N números complexos dada por

$$f_n = \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} F_k e^{i2\pi nk/N} \quad (\text{B.9})$$

para $n = -(N-1)/2 : (N-1)/2$.

Vamos agora escrever a expressão da IDFT para uma partição qualquer (esta é a sua forma alternativa).

Seja N um inteiro positivo e seja F_k uma sequência de N números complexos onde $k = 0 : N-1$. Então a transformada discreta inversa de Fourier é uma outra sequência de N números complexos dada por

$$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i2\pi nk/N} \quad (\text{B.10})$$

para $n = 0 : N-1$.

B.5 Aproximação da DFT para os Coeficientes de Séries de Fourier

Nesta seção vamos mostrar como podemos utilizar a DFT para obter uma aproximação para os coeficientes de uma série de Fourier. Pensando nisto vamos escrever a definição de uma série de Fourier.

Definição B.1 *Seja f uma função que é periódica com período A (também chamada A -periódica). Então a Série de Fourier de f é a série trigonométrica*

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi xk/A}, \quad (\text{B.11})$$

onde os coeficientes de Fourier c_k são dados por

$$c_k = \frac{1}{A} \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} f(x) e^{-i2\pi kx/A} dx. \quad (\text{B.12})$$

O símbolo \sim mostra que a série de Fourier está associada com a função f .

Consideremos a expressão (B.12) e nos lembremos de todas as operações feitas na Seção (B.3). Deste modo teremos,

$$c_k = \frac{1}{A} \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} f(x) e^{-i2\pi kx/A} dx \approx \frac{1}{A} \frac{A}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} f_n e^{-i2\pi nk/N}.$$

Portanto temos,

$$c_k \approx \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} f_n e^{-i2\pi nk/N} = F_k.$$

para $k = -N/2 : N/2 - 1$.

Mostrando assim que a DFT se aproxima dos coeficientes da série de Fourier.

B.6 Transformada Discreta de Fourier em Duas Dimensões

Como na DFT unidimensional, DFT's multidimensionais começam com implementações. Dependendo da origem do problema particular, a implementação pode ser dada como uma forma discreta (no caso de dados amostrais) ou em forma contínua (no caso de uma função de duas variáveis). Neste momento assumamos que consideramos uma função f definida em uma região retangular

$$\left\{ (x, y) : -\frac{A}{2} \leq x \leq \frac{A}{2}, -\frac{B}{2} \leq y \leq \frac{B}{2} \right\}.$$

Como no caso unidimensional esta função será amostrada no sentido de avaliá-la numericamente. Para obter esta amostragem uma grade é estabelecida na região com espaçamento uniforme $\Delta x = A/N$ na direção x e $\Delta y = B/M$ na direção y . A grade de pontos é dado por

$$(x_n, y_m) = (n\Delta x, m\Delta y)$$

para $n = -N/2 : N/2 - 1$ e $m = -M/2 : M/2 - 1$. A função de entrada f pode agora ser amostrada para estes valores da grade de pontos, produzindo a sequência de

números $f_{nm} = f(x_n, y_m)$. Em antecipação ao uso de f_{nm} como entrada para a DFT, já começamos a pensar nisto como sendo f duplamente periódica, significando que

$$f_{n\pm N, m} = f_{nm} \quad \text{e} \quad f_{n, m\pm M} = f_{nm}.$$

Para motivar a DFT bidimensional, começamos considerando um caso ligeiramente especial que será generalizado imediatamente. Assuma que a sequência de entrada f_{nm} é separável, isto é, temos a seguinte forma $f_{nm} = g_n h_m$, o produto de um termo n -dependente (ou x -dependente) e um termo m -dependente (ou y -dependente). Com esta pequena suposição, representaremos a entrada f_{nm} por meio de senos e cossenos em cada uma das coordenadas direcionais. Neste caso separado, sabemos que as sequências g_n e h_m têm representações para IDFT's unidimensionais,

$$g_n = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} G_k e^{i2\pi nk/N} \quad \text{e} \quad h_m = \sum_{j=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} H_j e^{i2\pi mj/M}.$$

Nestas representações, $n = -N/2 : N/2 - 1$ e $m = -M/2 : M/2 - 1$. Reconhecemos G_k e H_j como os coeficientes da DFT de g_n e h_m , respectivamente, dados por,

$$G_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} g_n e^{-i2\pi nk/N} \quad \text{e} \quad H_j = \frac{1}{M} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} h_m e^{-i2\pi mj/M},$$

onde $k = -N/2 : N/2 - 1$ e $j = -M/2 : M/2 - 1$. Agora está mais simples construir uma representação para a sequência bidimensional $f_{nm} = g_n h_m$. Multiplicando as duas representações de g_n e h_m , temos

$$\begin{aligned} f_{nm} = g_n h_m &= \left(\sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} G_k e^{i2\pi nk/N} \right) \left(\sum_{j=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} H_j e^{i2\pi mj/M} \right) = \\ &= \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{j=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} G_k H_j e^{i2\pi nk/N} e^{i2\pi mj/M}. \end{aligned}$$

Se agora tomarmos o produto $G_k H_j$ como sendo o novo coeficiente F_{kj} da DFT, temos a seguinte representação para a entrada da sequência f_{nm}

$$f_{nm} = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{j=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} F_{kj} e^{i2\pi nk/N} e^{i2\pi mj/M}.$$

onde $n = -N/2 : N/2 - 1$ e $m = -M/2 : M/2 - 1$. Assim sendo, podemos combinar as expressões para os coeficientes G_k e H_j da DFT para escrever que

$$\begin{aligned} F_{kj} = G_k H_j &= \left(\frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} g_n e^{-i2\pi nk/N} \right) \left(\frac{1}{M} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} h_m e^{-i2\pi mj/M} \right) = \\ &= \frac{1}{NM} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} g_n h_m e^{-i2\pi nk/N} e^{-i2\pi mj/M}, \end{aligned}$$

onde $f_{nm} = g_n h_m$, $k = -N/2 : N/2 - 1$ e $j = -M/2 : M/2 - 1$.

B.6.1 Transformada Discreta de Fourier Bidimensional

Dada uma entrada f_{nm} de ordem $N \times M$, a DFT bidimensional é dada pela seguinte fórmula

$$F_{kj} = \frac{1}{NM} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} f_{nm} e^{-i2\pi nk/N} e^{-i2\pi mj/M},$$

para $k = -N/2 : N/2 - 1$ e $j = -M/2 : M/2 - 1$.

B.6.2 Transformada Discreta Inversa de Fourier Bidimensional

A inversa da DFT bidimensional é dada pela seguinte fórmula

$$f_{nm} = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{j=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} F_{kj} e^{i2\pi nk/N} e^{i2\pi mj/M},$$

para $n = -N/2 : N/2 - 1$ e $m = -M/2 : M/2 - 1$.

Apêndice C

Lista de Programas

Encontram-se aqui, todos os códigos com os diretórios e arquivos utilizados no programa MatLab (ver [6] e [7]), para obtermos os resultados referentes a este trabalho tanto para o caso Unidimensional, quanto para o caso Bidimensional.

Os casos Unidimensional e Bidimensional que são tratados neste trabalho, foram manipulados de forma análoga. A apresentação aqui dos modelos Unidimensional e Bidimensional têm o intuito de mostrar, que independente da grade, a onda de água rasa se propaga sem sofrer alterações em sua estrutura. Devemos lembrar, que deve-se tomar um número suficiente de pontos na grade, de modo a se evitar os chamados "bicos". Esta implementação fora feita somente na forma Unidimensional, por causa da facilidade de manipulação das partições em apenas um eixo. O caso Bidimensional possui aqui duas formas para ser implementada. Na primeira forma todos os dados presentes no programa só podem ser alterados em seus respectivos diretórios, já a segunda forma permite que alguns dados, tais como, comprimento dos domínios de x e y , número de partições em cada domínio, dentre outros, sejam implementados durante a execução do programa, sem a necessidade de se procurar os diretórios.

Outro fato importante é a vetorização do método numérico, o que causa um ganho computacional na execução dos programas em questão.

C.1 Equações de Águas Rasas Unidimensional

C.1.1 Funções

As funções aqui apresentadas dependem da variável x . Estas funções possuem ou não, operações na forma escalar, isto é, $f(x,y)$ é igual a $a \odot b$ ou $a \odot b$, onde \odot é uma operação matemática. Exemplos:

$$f(x, y) = cte; \quad g(x, y) = \text{sen}(x).$$

Assim,

Início

```

1 function c = u(x)
2
3
4 c = 0;
5
6 % c = sin(x);
```

Fim

Início

```

7 function c = phi(x)
8
9
10 c = 1;
11
12 % c = -sin(x);
```

Fim

C.1.2 Entrada de Dados

Este arquivo é composto pelos diretórios,

- **Dados:** Diretório contendo parametros;
- **Dados2:** Diretório processador de parametros;
- **Unigeo:** Diretório processador de parametros;
- **Endereco Uni:** Diretório que cria pastas onde serão salvos os dados de nome *analise*, necessários no programa uniagra.

Dados

Início

```

13 %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$ %
14 %%                                     Parametros utilizados no programa                                %%
15 %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$ %
16
17
18 % Definindo o comprimento do domínio de x
19
20 L = xf;
21
22 % Escrevendo os valores da variáveis do vetor de onda c_x (velocidade da
23 % onda)
24
25 c_x = 1;
26
27 % Escrevendo os valores da variáveis w_{x}
28
29 w_x = (2*pi)/L; % Numero de ondas
30
31 % Escrevendo o valor da variável geopotencial
32
33 PHI = 1;
```

Fim

Dados2

Início

```

34 %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$ %
35 %%                                     Parametros utilizados no programa                                %%
36 %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$ %
37
38
39
40 %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$ %
41 %%                                     Parametros de tempo                                        %%
42 %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$ %
43
44 per = 0;
45
46 to = 0;
47
48 tf = 5000;
49
50 deltata = 100; %Variável delta t
```



```

51
52 t = to:deltat:tf;
53
54 M = length(t);
55
56 name = [fullfile('\resultados\unidimensional','malha'),...
57         int2str(per),'.mat'];
58
59 save(name,'x','t','M')
60
61 %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$ %
62 %%      Parametros necessários no arquivo      %%
63 %%              uniagra              %%
64 %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$ %
65
66 mtemp = (deltat./2).^2;
67
68 mphi = deltat.*w_x.*PHI*i;
69
70 mcx = (deltat.*w_x.*(c_x.^2).*i)./2;
71
72 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
73
74 Uo = 5;

```

Fim

Unigeo

Início

```

75 function c = unigeo(k)
76
77 global w_x c_x PHI
78
79 c = w_x.*c_x.*k.*sqrt(PHI);

```

Fim

Endereco Uni

Início

```

80 diretorio = cd;
81
82 pasta = input('Digite o nome da pasta =');
83
84 caminho = 'resultados\unidimensional';
85

```



```

201
202 % Vetor memoria dos pontos discretos de velocidade e geopotencial
203 % respectivamente
204
205     uo = zeros(1,N);
206     phio = zeros(1,N);
207
208 %% ----- %%
209 %% Distribuição inicial dos perfies da componente da velocidade %%
210 %%                meridional e Geopotencial                %%
211 %% ----- %%
212
213     uo(1:N) = u(x(1:N));% Valores da variável u{-}
214     phio(1:N) = phi(x(1:N));% Valores da variável phi{-}
215
216 %% ----- %%
217 %%                Calculo da                %%
218 %%                Transformada discreta de Fourier (FFT).                %%
219 %% ----- %%
220
221 %% Vetor memoria dos pontos discretos de u_pas = u{-} e es_phi = phi{-};%%
222
223         es_u = zeros(2,N);
224         es_phi = zeros(2,N);
225
226     es_u(1,1:N) = fft(uo);% Coeficientes espectrais û{-}
227     es_phi(1,1:N) = fft(phio);% Coeficientes espectrais phi{-}
228
229 %% ----- %%
230 %%                Janela gráfica de tempo                %%
231 %% ----- %%
232
233     H = waitbar(0,'Em execução, por favor, aguarde...');
234
235     per = 0;
236     for n = 1:(M-1)% Evolução temporal
237
238         tempo = t(n+1);
239
240         set(H,'Name', ['Resolução Espectral - tempo ',...
241             int2str(tempo), 'u.t.']);
242
243 %% ----- %%
244 %%                Condições de Contorno                %%
245 %% ----- %%
246
247         es_u(2,1) = es_u(1,1);

```

```
248     es_phi(2,1) = es_phi(1,1);
249
250 %% ----- %%
251 %% Calculo Dos Valores u{+} e phi{+} em grade Heterogênea %%
252 %%              ou Homogênea                               %%
253 %% ----- %%
254
255 %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$ %%
256 %%              Método Espectral                            %%
257 %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$ %%
258
259     [es_u,es_phi] = uniagra(es_u,es_phi);
260
261     es_u(1,:) = es_u(2,:);
262     es_phi(1,:) = es_phi(2,:);
263
264     if rem(tempo,1) == 0% setor de salvaga3o dos dados calculado no
265 % respectivo tempo desejado
266
267         U = real(ifft(es_u(1,:)));
268
269         V = real(ifft(es_phi(1,:)));
270
271         per = per + 1;
272
273         name = [fullfile(LOCAL,'analise'),int2str(per),'.mat'];
274
275         save(name,'U','V','x','M','N')
276
277     end
278
279     waitbar(n/(M-1),H);% Evolucao da barra de execucao
280 end
281 close(H);% Fecha a barra de execucao
```

Fim

C.2 Equa3o3es de guas Rasas Bidimensional

C.2.1 Fun3o3es

As fun3o3es aqui apresentadas dependem somente das variáveis \mathbf{x} e \mathbf{y} . Estas fun3o3es possuem ou não, opera3o3es na forma escalar, isto , $f(x,y)$  igual a $a \odot b$ ou $a \ominus b$, onde \odot  uma opera3o3o matemática. Exemplos:

$$f(x,y) = \cos(x) .* \sin(y); \quad g(x,y) = x.^2; \quad h(x,y) = x + y.$$

Assim,

Inicio

```
282 function c=u(x,y)
283
284 c = 3; %1° Grupo
285
286 c = cos(y); %2° Grupo
287
288 c = sin(x).*cos(y); %3° Grupo
289
290 c = sin(x+y); %4° Grupo
291
292 c = cos(x+y) - sin(x+y); %5° Grupo
293
```

Fim

Inicio

```
294 function c=v(x,y)
295
296 c = 2; %1° Grupo
297
298 c = sin(x); %2° Grupo
299
300 c = -sin(y).*cos(x); %3° Grupo
301
302 c = sin(x+y); %4° Grupo
303
304 c = cos(x+y) - sin(x+y); %5° Grupo
```

Fim

Inicio

```
305 function c=phi(x,y)
306
307 c = 1; %1°, 2° e 3° Grupo
308
309 c = sin(x+y); %4° Grupo
310
311 c = cos(x+y) - sin(x+y); %5° Grupo
```

Fim

C.2.2 Entrada de Dados

Este arquivo é composto pelos diretórios,

- **Parametros:** Diretório contendo parametros e criador de grade (arquivo bidimensional);
- **Parametros2:** Diretório contendo parametros (arquivo bidimensional);
- **Parametros3:** Diretório criador de grade (arquivo bidimensional2);
- **Parametros4:** Diretório que processa parametros, necessários no programa bidimensional.

Parametros

Início

```

312 %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$%%
313 %%                                     Calculo de Parametros                                %%
314 %%                                     necessários no para criação da grade                %%
315 %%                                     e para implementação dos pontos discretizados      %%
316 %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$%%
317
318
319 %Escrevendo os valores da variáveis L_{x} e L_{y}
320
321 L_x = 2*pi; %Comprimento do dominio x
322 L_y = 2*pi; %Comprimento do dominio y
323
324 %Escrevendo o valor do número de partições de x, valor N(m)
325
326 N = 2^5; %Numero de partições de x
327
328 %Escrevendo o valor da variavel deltax_n
329
330 deltax = (L_x)/N;
331
332 %Valores discretizados de x_n(m)
333 x = zeros(1,N);
334
335 for k=2:N
336
337     x(k) = (k-1)*deltax;
338
339 end

```



```

340
341 %Escrevendo o valor do número de partições de y, valor M
342
343 M = 2^5; %Numero de partições de y
344
345 %Escrevendo o valor da variavel deltay
346
347 deltay = (L_y)/M;
348
349
350 %Valores discretizados de y_m
351 y = zeros(1,M);
352
353 for l=2:M
354
355     y(l) = (l-1)*deltay;
356
357 end
358
359 [X,Y] = meshgrid(x,y);

```

Fim

Parametros2

Início

```

360 %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$%%
361 %%                                     Parametros necessários no programa                                     %%
362 %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$%%
363
364
365 %   Escrevendo os valores da variáveis do vetor de onda
366 %definido por c = (c_x ,c_y)
367
368 c_x = 1; %Variável de onda c_{x}
369 c_y = 1; %Variável de onda c_{y}
370
371 %   Escrevendo os valores da variáveis w_{x} e w_{y}, chamado
372 % comprimento de onda
373
374 w_x = (2*pi)/L_x;% Na direcao x
375 w_y = (2*pi)/L_y;% Na direcao y
376
377 %Escrevendo os valores da variáveis phi e delta t
378
379 PHI = 1; %Variável geopotencial Constante

```

Fim


```

418
419 l = 1:M;
420 k = 1:N;
421
422 [k,l] = meshgrid(k,l);
423
424 GK = c_x.*w_x.*(k - N/2 - 1);
425
426 GL = c_y.*w_y.*(l - M/2 - 1);
427
428 G = sqrt(PHI.*(GK.^2 + GL.^2));
429
430 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
431 a = (deltat./2).^2 .*G.^2;
432
433 zz1 = (deltat./2).*w_x.*(c_x.^2).*i;
434
435 zz2 = (deltat./2).*w_y.*(c_y.^2).*i;
436
437 b = i.*deltat.*PHI;
438
439 rsi1 = (1 - a)./(1 + a);
440
441 rsi2 = b./(1 + a);

```

Fim

C.2.3 Discretização do método numérico

bidagra

Início

```

442 function [U_1,U_2,U_3] = bidagra(U1,U2,U3)
443
444 global rsi1 rsi2 zz1 zz2 k l M N w_x w_y
445
446 U_3(2:M,2:N) = rsi1(2:M,2:N).*U3(2:M,2:N) - ...
447                 rsi2(2:M,2:N).*(w_x.*(k(2:M,2:N) - N/2 - 1).*U1(2:M,2:N) + ...
448                 w_y.*(l(2:M,2:N) - M/2 - 1).*U2(2:M,2:N));
449
450 R(2:M,2:N) = (U3(2:M,2:N) + U_3(2:M,2:N));
451
452 U_1(2:M,2:N) = U1(2:M,2:N) - (k(2:M,2:N) - N/2 - 1).*R(2:M,2:N).*zz1;
453
454 U_2(2:M,2:N) = U2(2:M,2:N) - (l(2:M,2:N) - M/2 - 1).*R(2:M,2:N).*zz2;
455
456

```

```

457 %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$ %
458 %%                               Condições de contorno                               %%
459 %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$ %
460
461 %   Foram implementadas aqui condições de contorno que satisfazem as
462 % condições de Dirichelt, no intuito de uma primeira manipulação de dados.
463
464 U_3(1,1:N) = U3(1,1:N);
465
466 U_3(1:M,1) = U3(1:M,1);
467
468
469 U_2(1,1:N) = U2(1,1:N);
470
471 U_2(1:M,1) = U2(1:M,1);
472
473
474 U_1(1,1:N) = U1(1,1:N);
475
476 U_1(1:M,1) = U1(1:M,1);

```

Fim

C.2.4 Programas

Bidimensional

Início

```

477 clear %Limpa a tela do Workspace
478
479 clc %Limpa os dados do Command Window
480
481 %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$ %
482 %%                               BIBLIOTECA MATEMATICA PARA O MODELO DE AGUAS RASAS          %%
483 %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$ %
484
485 dir1 = '\simulador_numerico\entrada_dados\bidimensional';
486 dir2 = '\simulador_numerico\funcoes\bidimensional';
487 dir3 = '\simulador_numerico\discretizacao_do_modelo\bidimensional';
488
489 addpath(dir1,dir2,dir3); % Registra todos os diretorios a serem utilizados
490 % no programa
491
492 global w_x w_y c_x c_y PHI M N deltat rsi1 rsi2 zz1 zz2 k l
493
494 %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$ %
495 %%                               Este programa ira trata as equações de águas rasas          %%

```



```

678 name = [fullfile('\resultados\bidimensional\variaveis','malha'),...
679         int2str(per),'.mat'];
680
681 save(name,'X','Y','t','theta','M','N') %Armazenagem de dados
682
683 %% ----- %%
684 %%                               Tratamento de dados                               %%
685 %% ----- %%
686
687 parametros4 %Dados necessários para o calculo do arquivo bidagra
688
689 %Matriz de memoria para as componentes de velocidade e geopotencial
690
691 U = zeros(M,N);
692 V = U;
693 Phi = U;
694
695 %Definição dos campos iniciais das respectivos variáveis U, V e Phi
696
697 U(1:M,1:N) = u(X,Y); % Velocidade zonal
698 V(1:M,1:N) = v(X,Y); % Velocidade meridional
699 Phi(1:M,1:N) = phi(X,Y); % Geopotencial
700
701 name = [fullfile('\resultados\bidimensional\variaveis','analise'),...
702         int2str(per),'.mat'];
703
704 save(name,'U','V','Phi')
705
706 %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$%%
707 %%                               Discretizações das Transformadas Discreta                               %%
708 %%                               de Fourier bidimensional (FFT)                               %%
709 %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$%%
710
711 %% ----- %%
712 %%                               Calculo da                               %%
713 %%                               Transformada discreta de Fourier bidimensional (FFT2)       %%
714 %% ----- %%
715
716 U1(1:M,1:N) = fft2(U(1:M,1:N));% Velocidade zonal
717 U2(1:M,1:N) = fft2(V(1:M,1:N));% Velocidade meridional
718 U3(1:M,1:N) = fft2(Phi(1:M,1:N));% Geopotencial
719
720 %% ----- %%
721 %%                               Janela gráfica de tempo                               %%
722 %% ----- %%
723 H = waitbar(0,'Em execução, por favor, aguarde...');
724

```

```

725 for j = 1:(theta-1)
726
727     set(H,'Name',['Resolução Espectral - tempo ',...
728         int2str(j),' u.t.']);
729
730 %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$%%
731 %%                               Método Numérico                               %%
732 %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$%%
733
734     [U_1,U_2,U_3] = bidagra(U1,U2,U3);
735
736     U1 = U_1;% Velocidade zonal
737     U2 = U_2;% Velocidade meridional
738     U3 = U_3;% Geopotencial
739
740     if rem(j,1) == 0
741
742 %% ----- %%
743 %%                               Calculo da                               %%
744 %% Transformada discreta inversa de Fourier bidimensional (IFFT2) %%
745 %% ----- %%
746
747 % Calculo dos valores  $u^{\{+\}}$ ,  $v^{\{+\}}$  e  $\phi^{\{+\}}$ , respectivamente:
748
749     Uf = real(ifft2(U_1));
750     Vf = real(ifft2(U_2));
751     Phif = real(ifft2(U_3));
752
753     per = per + 1;
754
755     name = [fullfile('.\resultados\bidimensional\variaveis','analise'),...
756         int2str(per),'.mat'];
757
758     save(name,'Uf','Vf','Phif')
759 end
760
761     waitbar(j/(theta-1),H);% Evolucao da barra de execucao
762
763 end
764 close(H);% Fecha a barra de execucao

```

Fim

C.3 Implementação Gráfica

Diretórios encontrados nos arquivos,

- **Endereco Uni2:** Diretório que cria pastas onde serão salvas as figuras do arquivo Unidimensional;
- **Endereco Bidi:** Diretório que cria pastas onde serão salvas as figuras do arquivo Bidimensional.

C.3.1 Unidimensional

Início

```

765 dec = questdlg('Deseja salva a(as) figura(as)?',...
766     'Plotagem dos Graficos',...
767     'Sim', 'Não', 'Cancela',...
768     'Sim');
769
770 if strcmp(dec,'Sim')|strcmp(dec,'Não')
771
772     switch dec
773         case{'Sim'}
774             nomfig = input('Digite o nome da figura: ');
775             resp = 1;
776         otherwise
777             resp = 0;
778     end
779
780     endereco_uni2 % Pasta onde seram guardadas as figuras
781
782     figNumber=figure( ...
783         'Visible','on',...%'Position', [50 50 680 550], ...
784         'NumberTitle','off',...
785         'Name','Perfil de onda');
786
787     load('resul','LOCAL');
788
789     for j = 1:M-1% Loop evolucao da variavel temporal
790
791         set(figNumber,'Name',['Perfil de onda no Tempo = ',int2str(j)]);
792
793         local = [fullfile(LOCAL,'analise'),int2str(j),'.mat'];
794
795         load(local,'U','V');% Leitura das variaveis dependentes
796
797         u = U;
798
799         phi = V;
800
801         subplot(2,1,1)% Janela grafica a ser plotada a velocidade

```

```
802
803     LVX = linspace(min(x),max(x),6);
804
805     LVY = linspace(-1.5,1.5,7);
806
807     plot(x,u);
808
809     box on% Moldura na janela grafica
810
811     set(gca,...
812         'XTick',LVX,'YTick',LVY,...
813         'XLim',[min(x) max(x)],'YLim',[-2 2]);
814
815     ylabel('Componente Zonal u(x,t)')
816
817     xlabel('Espaço Amostral - eixo x')
818
819     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
820
821     subplot(2,1,2)% Janela grafica a ser plotada a altura do fluido
822
823     LVX = linspace(min(x),max(x),6);
824
825     LVY = linspace(-1.5,1.5,7);
826
827     plot(x,phi);
828
829     box on% Moldura na janela grafica
830
831     set(gca,...
832         'XTick',LVX,'YTick',LVY,...
833         'XLim',[min(x) max(x)],'YLim',[-1.5 1.5]);
834
835     ylabel('Geopotencial \phi(x,t)')
836
837     xlabel('Espaço amostral - eixo x')
838
839     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
840
841     %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$ $$$$ %%
842     %%                                Criação de Figuras                                %%
843     %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$ $$$$ %%
844
845     if resp == 1% Impressao dos graficos no formato "EPS" e "JPEG"
846
847         fig = [fullfile(LOCAL2,nomfig),int2str(j)];
848
```

```
849 %           print('-depsc','-tiff','-r300',fig) % Salva as figuras
850 %no formato EPS
851
852           print('-djpeg',fig) % Salva as figuras no formato JPEG
853
854       end
855
856
857           pause(0.5)% Espaco de tempo a ser plotada dando o efeito a animacao
858
859       end
860
861 end
```

Fim

Endereco Uni2

Inicio

```
862 diretorio = cd;
863
864 pasta = input('Digite o nome da pasta =');
865
866 caminho = 'graficos\unidimensional';
867
868 arquivo = fullfile(diretorio,caminho,pasta);
869
870 existencia = exist(arquivo,'dir');
871
872 if existencia == 0
873
874     mkdir(arquivo)
875
876     LOCAL2 = fullfile(diretorio,caminho,pasta);
877
878     save('resul','LOCAL2')
879
880 end
881
```

Fim

C.3.2 Bidimensional

Inicio

```
882 clear
```

```

883 clc
884
885 dec = questdlg('Deseja salva a(as) figura(as)?',...
886     'Plotagem dos Graficos',...
887     'Sim', 'Não', 'Cancela',...
888     'Sim');
889
890 if strcmp(dec,'Sim')|strcmp(dec,'Não')
891
892     switch dec
893         case{'Sim'}
894             nomfig = input('Digite o nome da figura: ');
895             resp = 1;
896         otherwise
897             resp = 0;
898     end
899
900     endereco_bidi % Pasta onde seram guardadas as figuras
901
902     figNumber=figure( ...
903         'Visible','on',...
904         'NumberTitle','off',...
905         'Name','Perfil de onda');
906
907     name = [fullfile('.\resultados\bidimensional\variaveis','malha'),...
908         int2str(0),'.mat'];
909
910     load(name,'X','Y','theta');
911
912     for j = 1:(theta-1);
913
914         set(figNumber,'Name',['Perfil de onda no Tempo = ',int2str(j)]);
915
916         name = [fullfile('.\resultados\bidimensional\variaveis','analise'),...
917             int2str(j),'.mat'];
918
919         load(name,'Uf','Vf','Phif');% Leitura das variaveis dependentes
920
921         figura = 'figura-2';% Escolha um tipo de grafico o valor vai de 1 a 4
922
923         switch figura
924             case{'figura-1'}
925
926                 surf(X,Y,Uf,'FaceColor','interp',...
927                     'EdgeColor','none',...
928                     'FaceLighting','phong')
929

```

```

930         axis tight
931
932         hold on
933
934         [c ch] = contour3(X,Y,Uf,20);
935
936         hold off
937
938         xlabel('Espaço amostral do eixo x')
939
940         ylabel('Espaço amostral do eixo y')
941
942         zlabel('Componente de velocidade u')
943
944         az = -45;
945
946         el = 45;
947
948         view([az,el]);
949
950         pause(0.5)
951
952
953         %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$%%
954         %%                               Criação de Figuras                               %%
955         %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$%%
956
957         if resp == 1% Impressao dos graficos no formato "EPS" e "JPEG"
958
959             fig = [fullfile(LOCAL,nomfig),int2str(j)];
960
961             %           print('-depsc','-tiff','-r300',fig) % Salva as figuras
962             %           %no formato EPS
963
964             print('-djpeg',fig) % Salva as figuras no formato JPEG
965
966         end
967
968
969         case{'figura-2'}
970
971             surf(X,Y,Vf,'FaceColor','interp',...
972                 'EdgeColor','none',...
973                 'FaceLighting','phong')
974
975             axis tight
976

```

```

977         hold on
978
979         [c ch] = contour3(X,Y,Vf,20);
980
981         hold off
982
983         xlabel('Espaço amostral do eixo x')
984
985         ylabel('Espaço amostral do eixo y')
986
987         zlabel('Componente de velocidade v')
988
989         az = -45;
990
991         el = 45;
992
993         view([az,el]);
994
995         pause(0.5)
996
997
998         %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$%%
999         %%                                                                    Criação de Figuras                                                                    %%
1000        %% $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$%%
1001
1002        if resp == 1% Impressao dos graficos no formato "EPS" e "JPEG"
1003
1004                fig = [fullfile(LOCAL,nomfig),int2str(j)];
1005
1006        %                print('-depsc','-tiff','-r300',fig) % Salva as figuras
1007        %no formato EPS
1008
1009                print('-djpeg',fig) % Salva as figuras no formato JPEG
1010
1011        end
1012
1013
1014
1015
1016        case{'figura-3'}
1017
1018                surf(X,Y,Phif,'FaceColor','interp',...
1019                        'EdgeColor','none',...
1020                        'FaceLighting','phong')
1021
1022                axis tight
1023

```

Fim

Endereco Bidi

Inicio

```
1071 diretorio = cd;
1072
1073 pasta = input('Digite o nome da pasta =');
1074
1075 caminho = 'graficos\bidimensional';
1076
1077 arquivo = fullfile(diretorio,caminho,pasta);
1078
1079 existencia = exist(arquivo,'dir');
1080
1081 if existencia == 0
1082
1083 mkdir(arquivo)
1084
1085 LOCAL = fullfile(diretorio,caminho,pasta);
1086
1087 save('resul','LOCAL')
1088
1089 end
1090
```

Fim

Bibliografia

- [1] W. L. Briggs, V. E. Henson, *The DFT, An Owner's Manual For the Discrete Fourier Transform*, Springer-Verlag, (1995).
- [2] A. J. Chorin, J. E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, (1992).
- [3] M. S. Longuet-Higgins, *The Eigenfunctions of Laplace's Tidal equations over a Sphere*, Phil. Trans. Royal Society, A262, pp. 511-601, (1968)
- [4] T. Elvius, A. Sundström, *Computationally effective schemes and boundary conditions for a fine barotropic model based on shallow-water equations*, Tellus XXV (1973),2, pp. 132-155.
- [5] J. Pedlosky, *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, (1987).
- [6] R. Darren, e C. Colin, *The Matlab[®] 5 Handbook*, Springer-Verlag, Nova York, (1998), pp. 328-367.
- [7] M. Élia Yathie, *Matlab[®] 6 Fundamentos de Programação*, Ed. Érica Ltda, 2^o edição, São Paulo, (2001).
- [8] S. John C., *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton - Florida, pp. 13-30, (2000).
- [9] Ritchie H., *Application of the Semi-Lagrangian Method to a Spectral Model of the Shallow Water Equations*, Monthly Weather Review, Vol.116, N^o 8, (1998).
- [10] Lima, H. G. G. M., Barros, L. M., Fernandes, J. A., Barbosa, E. S., *Propagação de Ondas de Águas Rasas em Meio Heterogêneos Constituído por Óleo e Água*,

VI Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional (ERMAC), (2006).

- [11] Fortuna, Armando de Oliveira, *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações*, Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, (2000).
- [12] Swokowski, E. W., *Cálculo com Geometria Analítica*, Volume 2, 2ª Edição, Editora McGraw-Hill Ltda, São Paulo, (1994).
- [13] Smith, G. D., *Numerical Solution of Partial Differential Equation: Finite Difference Methods*, 3ª Edição, Oxford University Press, New York, (1985).
- [14] Thomas, J. W., *Numerical Partial Differential Equation: Finite Difference Methods*, Springer-Verlag, New York, (1995).