

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# Teoremas de Rigidez no Espaço Hiperbólico

por

Jamilly Lourêdo Rocha <sup>†</sup>

sob orientação do

Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

---

<sup>†</sup>Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

# Teoremas de Rigidez no Espaço Hiperbólico

por

**Jamilly Lourêdo Rocha**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva - UFC**

---

**Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima - UFCG**

---

**Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez - UFCG**

**Orientador**

**Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática**

**Agosto/2014**

# Resumo

Com uma aplicação adequada do conhecido princípio do máximo generalizado de Omori-Yau, obtemos resultados de rigidez com relação a hipersuperfícies imersas completas com curvatura média delimitada no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$  ( $n+1$ )-dimensional. Em nossa abordagem exploramos a existência de uma dualidade natural entre  $\mathbb{H}^{n+1}$  e a metade  $\mathcal{H}^{n+1}$  do espaço de Sitter  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ , cujo modelo é chamado de steady state space.

**Palavras-chave:** Espaço hiperbólico, hipersuperfícies completas, curvatura média, aplicação de Gauss.

# Abstract

As a suitable application of the well known generalized maximum principle of Omori-Yau, we obtain rigidity results concerning to a complete hypersurface immersed with bounded mean curvature in the  $(n + 1)$ -dimensional hyperbolic space  $\mathbb{H}^{n+1}$ . In our approach, we explore the existence of a natural duality between  $\mathbb{H}^{n+1}$  and the half  $\mathcal{H}^{n+1}$  of the de Sitter space  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ , which models the so-called steady state space.

**Keywords:** Hyperbolic Space, complete hypersurfaces, mean curvature, Gauss map.

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por me permitir ser quem eu sou e sempre ter ao meu lado pessoas das quais me orgulho muito.

Agradeço imensamente aos meus pais, Iêda e Janildo, que sempre com muita dedicação e amor me apoiaram em todas as minhas escolhas. Sempre presentes dia após dia, sem eles não teria conseguido chegar até aqui. Agradeço também a minha irmã por todo o incentivo e por se fazer presente em todos os momentos.

Agradeço ao meu namorado, André, pela ajuda na parte computacional deste trabalho, mas principalmente por toda a sua paciência e por todo o seu amor.

Agradeço aos amigos, Jonas e Keytt, por todo o apoio e pela amizade que vai além da matemática.

Agradeço ao Prof. Dr. Marco Antônio Lázaro Velásquez, que foi meu orientador, por toda a dedicação, ajuda e principalmente por todo o conhecimento que a mim foi transmitido. Agradeço ainda por todos os conselhos e pela excelente orientação.

Agradeço ao Prof. Dr. Henrique Fernandez de Lima, que foi meu co-orientador, por todas as sugestões dadas a este trabalho e por sua intensa dedicação a matemática, sem dúvida, com grandes contribuições.

Agradeço ao Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva, por ter aceito o convite para participar da banca examinadora da minha dissertação, bem como as sugestões dadas a este trabalho.

Não poderia deixar de agradecer a todos os professores aos quais tive o prazer de ser aluna e que sem dúvida já fazem parte desta jornada. Em especial, agradeço aos professores Severino Horácio da Silva e Marco Aurélio Soares Souto, profissionais os quais tenho grande admiração.

Agradeço à CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro e à Coordenação de Pós-Graduação em Matemática da UFCG.

# Dedicatória

Aos meus pais, Iêda e Janildo.

# Conteúdo

<b>Introdução</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>8</b>
1.1 Espaços munidos com um produto escalar . . . . .	8
1.2 Variedades semi-Riemannianas . . . . .	10
1.2.1 Métricas semi-Reimannianas e a conexão de Levi-Civita . . . . .	10
1.2.2 Alguns operadores diferenciáveis . . . . .	12
1.2.3 Geodésicas e a aplicação exponencial . . . . .	15
1.2.4 Curvatura . . . . .	17
1.3 Orientação temporal . . . . .	18
<b>2 Imersões isométricas</b>	<b>20</b>
2.1 A segunda forma fundamental . . . . .	20
2.2 Os espaços de Sitter, Hipebólico e Steady State . . . . .	26
2.3 Hipersuperfícies totalmente umbílicas . . . . .	33
2.3.1 Hipersuperfícies tipo-espaço totalmente umbílicas em $\mathbb{S}_1^{n+1}$ . . . . .	34
2.3.2 Hipersuperfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{H}^{n+1}$ . . . . .	39
2.4 Variedades semi-Riemannianas munidas com um campo conforme . . . . .	44
2.4.1 Produtos warped semi-Riemannianos . . . . .	47
2.4.2 O Laplaciano da função altura . . . . .	49
<b>3 Resultados Principais</b>	<b>53</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>60</b>

# Introdução

Nesta dissertação estudaremos hipersuperfícies não-compactas completas, com curvatura média limitada, imersas no espaço hiperbólico  $(n + 1)$ -dimensional  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Antes de falarmos um pouco mais sobre o nosso trabalho, apresentamos um breve resumo dos principais resultados relacionados ao nosso tema.

Em [3], L. J. Alías e M. Dajczer estudaram superfícies completas imersas em  $\mathbb{H}^3$ , contidas entre duas horoesferas, obtendo um resultado tipo Bernstein para o caso de curvatura média constante  $-1 \leq H \leq 1$ .

Depois, H. F. de Lima e A. Caminha estudaram em [6] gráficos verticais completos de curvatura média constante em  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Sob restrição apropriada no crescimento da função altura, eles obtiveram condições necessárias para a existência de tal gráfico. Além disso, para superfícies completas de curvatura Gaussiana não negativa, eles obtiveram um teorema tipo Bernstein em  $\mathbb{H}^3$ .

Mais recentemente, aplicando a técnica de S.T. Yau [17], H. F. de Lima em conjunto com F. E. C. Camargo e A. Caminha [5] também obtiveram resultados tipo Bernstein em  $\mathbb{H}^{n+1}$ .

Neste trabalho, sob uma restrição apropriada no ângulo normal da hipersuperfície (isto é, o ângulo entre a aplicação de Gauss da hipersuperfície e o campo vetorial unitário que determina a folheação 1-codimensional de  $\mathbb{H}^{n+1}$  por horoesferas), obtemos teoremas de rigidez com relação a uma hipersuperfície completa imersa com curvatura média limitada em  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Em nossa abordagem, exploramos a existência de uma dualidade natural entre as geometrias de  $\mathbb{H}^{n+1}$  e a metade  $\mathcal{H}^{n+1}$  do espaço de Sitter  $\mathbb{S}^{n+1}$ , cujo modelo é chamado *steady state space*.

Mais precisamente, mostramos o seguinte (cf. Teorema 3.2; ver também os Co-



rolários 3.3 e 3.4):

*Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície completa, com segunda forma fundamental  $A$  limitada. Suponha que a curvatura média  $H$  de  $\Sigma^n$  é tal que  $0 \leq H \leq 1$ . Se  $\Sigma^n$  está abaixo de uma horoesfera de  $\mathbb{H}^{n+1}$  e o ângulo normal  $\theta$  satisfaz  $\cos \theta \geq \sup_{\Sigma} H$ , então  $\Sigma^n$  é uma horoesfera e a imagem da sua aplicação de Gauss é exatamente um hiperplano de  $\mathcal{H}^{n+1}$ .*

Queremos salientar que nossa restrição ao ângulo normal da hipersuperfície é motivada por uma estimativa do gradiente devido à R. López e S. Montiel [10] (para mais detalhes veja Observação 2).

Além disso, através da aplicação de um resultado clássico devido à A. Hüber [9] relacionado a superfícies parabólicas, provamos também o seguinte resultado (cf. Teorema 3.7):

*Seja  $\psi : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  uma hipersuperfície completa com curvatura Gaussiana não-negativa e curvatura média  $0 \leq H \leq 1$ . Se o ângulo normal  $\theta$  de  $\Sigma^2$  satisfaz  $\cos \theta \geq H$ , então  $\Sigma^2$  é uma horoesfera e a imagem da aplicação de Gauss é exatamente um plano de  $\mathcal{H}^3$ .*

Este trabalho é baseado no artigo [7], publicado em 2013 por H. F. de Lima, e apresenta-se com a seguinte organização. No Capítulo 1 estabelecemos as notações e fatos preliminares que serão utilizados no decorrer do texto. No Capítulo 2 fazemos um estudo da teoria de hipersuperfícies Riemannianas imersas em ambientes Riemannianos ou Lorentzianos. Destacamos a Seção 2.4, onde usamos a Proposição 2.11 e a Observação 1 para construir campos conformes fechados nos espaços Steady State  $\mathcal{H}^{n+1}$  e hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Este capítulo finaliza com uma seção cujo objetivo é estabelecer uma fórmula para o Laplaciano da função altura da hipersuperfície orientada completa  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R} \times_f M^n$  imersa em um produto warped Riemanniano  $\mathbb{R} \times_f M^n$ . Finalmente, no Capítulo 3 enunciamos e mostramos os resultados principais deste trabalho.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo temos como objetivo estabelecer as notações que serão utilizadas nos demais capítulos deste trabalho, bem como os fatos básicos da teoria de imersões isométricas dos quais faremos uso posteriormente. Para maiores detalhes, indicamos como referências [8] e [15].

Iniciamos com uma exposição sobre formas bilineares simétricas e produto escalar num espaço vetorial de dimensão finita; logo após, definimos o que é uma variedade semi-Riemanniana e, então, apresentamos os conceitos de conexão e curvatura.

No que segue,  $\mathcal{V}$  sempre denotará um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma forma bilinear simétrica  $b$  sobre  $\mathcal{V}$  é uma função bilinear  $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $b(v, w) = b(w, v)$  para quaisquer  $v, w \in \mathcal{V}$

### 1.1 Espaços munidos com um produto escalar

Uma forma bilinear simétrica  $b$  sobre  $\mathcal{V}$  é dita

- (a) *positiva definida*, se  $b(v, v) > 0$  para todo  $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ .
- (b) *negativa definida*, se  $b(v, v) < 0$  para todo  $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ .
- (c) *não-degenerada*, se  $b(v, v) = 0$  para todo  $w \in \mathcal{V}$  implica em  $v = 0$ .

Se  $b$  é uma forma bilinear simétrica sobre  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{W}$  é um subespaço de  $\mathcal{V}$ , então a restrição  $b|_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma forma bilinear simétrica sobre  $\mathcal{W}$ . Definimos o

*índice* de  $b$  como a maior dimensão de um subespaço  $\mathcal{W}$  de  $\mathcal{V}$  tal que  $b|_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}}$  é negativa definida.

**Definição 1.1.** *Um produto escalar sobre um espaço vetorial real de dimensão finita  $\mathcal{V}$  é uma forma bilinear simétrica  $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  que é não-degenerada. Diremos que  $\mathcal{V}$  é um espaço com produto escalar se ele é munido com um produto escalar, e definimos o índice de  $\mathcal{V}$  como sendo o índice de seu produto escalar.*

Se  $\mathcal{V}$  é um espaço com produto escalar  $b$  e  $\mathcal{W}$  é um subespaço de  $\mathcal{V}$ , dizemos que  $\mathcal{W}$  é não-degenerado se a restrição  $b|_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$  for não-degenerada. Definimos o complemento ortogonal  $\mathcal{W}^\perp$  de  $\mathcal{W}$  em  $\mathcal{V}$  por

$$\mathcal{W}^\perp = \{v \in \mathcal{V} ; b(v, w) = 0 \text{ para todo } w \in \mathcal{W}\}.$$

No seguinte resultado colecionamos alguns fatos relevantes sobre espaços vetoriais munidos com um produto escalar (cf. [15], Lemas 2.19, 2.22 e 2.23).

**Lema 1.1.** *Sejam  $\mathcal{V}$  um espaço com produto escalar  $b$  e  $\mathcal{W}$  um subespaço de  $\mathcal{V}$ . Então*

- (a)  *$b$  é não-degenerada se, e somente se, sua matriz com respeito a uma (e então a toda) base de  $\mathcal{V}$  for invertível;*
- (b) *se  $\mathcal{W}$  é não-degenerado então  $\dim(\mathcal{W}) + \dim(\mathcal{W}^\perp) = \dim(\mathcal{V})$  e  $(\mathcal{W}^\perp)^\perp = \mathcal{W}$ ;*
- (c)  *$\mathcal{W}$  é não-degenerado se, e somente se,  $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp$ . Em particular,  $\mathcal{W}$  é não-degenerado se e só se  $\mathcal{W}^\perp$  for não-degenerado.*

No que segue, supomos que  $\mathcal{V}$  é um espaço com produto escalar  $b = \langle, \rangle$ . Em relação a  $\langle, \rangle$ , dizemos que  $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$  é:

- (i) *tipo-tempo*, quando  $\langle v, v \rangle < 0$ ;
- (ii) *tipo-luz*, quando  $\langle v, v \rangle = 0$ ;
- (iii) *tipo-espaço*, quando  $\langle v, v \rangle > 0$ .

Analogamente, define-se o que significa para um subespaço não-degenerado  $\mathcal{W}$  de  $\mathcal{V}$  ser *tipo-tempo*, *tipo-luz* ou *tipo-espaço*. Se  $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$  não for tipo-luz, define-se o sinal  $\epsilon_v \in \{-1, 1\}$  de  $v$  por

$$\epsilon_v = \frac{\langle v, v \rangle}{|\langle v, v \rangle|}.$$

A norma de  $v \in \mathcal{V}$  é  $|v| = \sqrt{\epsilon_v \langle v, v \rangle}$ , e  $v$  é unitário se  $|v| = 1$ . É bem conhecido em Álgebra Linear que todo espaço vetorial real  $\mathcal{V}$  munido com um produto escalar  $\langle, \rangle$  admite uma base ortonormal. Assim, se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma tal base, teremos que  $\langle e_i, e_j \rangle = \epsilon_i \delta_{ij}$ , onde  $\epsilon_i$  denota o sinal de  $e_i$  e

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ se } i = j \\ 0 & , \text{ se } i \neq j. \end{cases}$$

Nesse contexto, é possível estabelecer o seguinte resultado (cf. [15], Lemas 2.25 e 2.26).

**Lema 1.2.** *Sejam  $\mathcal{V}$  um espaço com produto escalar  $\langle, \rangle$  e  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base ortonormal de  $\mathcal{V}$ . Então*

(a) *todo  $v \in \mathcal{V}$  admite uma única representação da forma  $v = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \langle v, e_i \rangle e_i$ ;*

(b) *o número de elementos com sinais negativos em  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  é igual ao índice de  $\mathcal{V}$ .*

## 1.2 Variedades semi-Riemannianas

Voltando nossa atenção a partir de agora as variedades diferenciáveis, passamos a estabelecer a noção de métrica, bem como algumas das suas principais consequências, que serão importantes para entender nosso cenário de trabalho.

### 1.2.1 Métricas semi-Riemannianas e a conexão de Levi-Civita

**Definição 1.2.** *Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade diferenciável. Uma métrica semi-Riemanniana em  $\overline{M}^{n+1}$  é uma correspondência que associa, a cada  $p \in \overline{M}^{n+1}$ , um produto escalar  $\langle, \rangle_p$  no espaço tangente  $T_p \overline{M}$ , com índice constante  $\nu$  (isto é, cada  $T_p \overline{M}$  tem índice  $\nu$ ), e que é diferenciável no seguinte sentido: se  $x_1, \dots, x_{n+1}$  são as funções coordenadas de um sistema de coordenadas de  $\overline{M}^{n+1}$ , definido em um aberto  $\mathcal{U}$ , então as funções*

$$p \mapsto \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right\rangle_p$$

*são diferenciáveis em  $\mathcal{U}$ , para cada  $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$ . Uma variedade semi-Riemanniana é um par  $(\overline{M}^{n+1}, \langle, \rangle)$ , onde  $\overline{M}^{n+1}$  é uma variedade diferenciável e  $\langle, \rangle$  é uma métrica semi-Riemanniana em  $\overline{M}^{n+1}$ .*

No que segue, por simplificação de notação, escreveremos  $\overline{M}^{n+1}$  para o par  $(\overline{M}^{n+1}, \langle, \rangle)$ . Quando o índice  $\nu$  de  $\langle, \rangle$  é zero,  $\overline{M}^{n+1}$  é simplesmente uma *variedade Riemanniana*. Por outro lado, quando  $\nu = 1$ ,  $\overline{M}^{n+1}$  é denominada uma *variedade Lorentziana*.

**Exemplo 1.** Para cada número inteiro  $\nu \in \{0, \dots, n+1\}$ , seja  $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$  o espaço  $\mathbb{R}^{n+1}$  munido com o produto escalar

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n+1-\nu} v_i w_i - \sum_{i=n-\nu+1}^{n+1} v_i w_i,$$

onde  $v = (v_1, \dots, v_{n+1})$  e  $w = (w_1, \dots, w_{n+1})$ . Do item (b) do Lema 1.2 obtemos que  $\langle, \rangle$  tem índice  $\nu$ . Neste contexto,  $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$  é chamado espaço semi-Euclidiano de índice  $\nu$  e de dimensão  $(n+1)$ . Quando  $\nu = 0$ ,  $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$  torna-se simplesmente o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Quando  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{R}_1^{n+1}$  é chamado espaço de Lorentz-Minkowski e é frequentemente denotado por  $\mathbb{L}^{n+1}$ .

Denotemos, a partir de agora, por  $\mathfrak{X}(\overline{M})$  como sendo o conjunto dos campos de vetores de classe  $C^\infty$  em  $\overline{M}^{n+1}$  e por  $C^\infty(\overline{M})$  o anel das funções reais de classe  $C^\infty$  definidas em  $\overline{M}^{n+1}$ .

Dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ , nosso objetivo é agora definir um outro campo de vetores que seja a derivada de  $Y$  na direção de  $X$ . Há um caminho natural para fazer isso em  $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$ .

**Definição 1.3.** Sejam  $x_1, \dots, x_{n+1}$  as coordenadas em  $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$ . Se  $X$  e  $Y = \sum_{i=1}^{n+1} Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  são campos de vetores em  $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$ , o campo de vetores

$$D_X Y = \sum_{i=1}^{n+1} X(Y_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

é chamado derivada covariante de  $Y$  com relação a  $X$ .

Uma vez que esta última definição utiliza as coordenadas de  $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$ , não é óbvio como estendê-lo a uma variedade semi-Riemanniana arbitrária. Começamos, portanto, axiomatizando suas propriedades.

**Definição 1.4.** Uma conexão afim  $\overline{\nabla}$  em uma variedade diferenciável  $\overline{M}^{n+1}$  é uma aplicação

$$\begin{aligned} \overline{\nabla} : \mathfrak{X}(\overline{M}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}) &\rightarrow \mathfrak{X}(\overline{M}) \\ (X, Y) &\mapsto \overline{\nabla}_X Y \end{aligned}$$

tal que

$$(i) \quad \bar{\nabla}_{(fX+gY)}Z = f\bar{\nabla}_XZ + g\bar{\nabla}_YZ,$$

$$(ii) \quad \bar{\nabla}_X(Y + Z) = \bar{\nabla}_XY + \bar{\nabla}_XZ,$$

$$(iii) \quad \bar{\nabla}_X(fY) = f\bar{\nabla}_XY + X(f)Y,$$

para quaisquer  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\bar{M})$  e todos  $f, g \in C^\infty(\bar{M})$ . O campo  $\bar{\nabla}_XY$  é chamado derivada covariante de  $Y$  na direção  $X$  com relação a  $\bar{\nabla}$ .

Uma conexão afim está diretamente ligada a métrica, desde que acrescentemos uma compatibilidade com a métrica e outra propriedade relacionada ao colchete de Lie. Mais precisamente temos o seguinte

**Proposição 1.5** (Levi-Civita). *Dada uma variedade semi-Riemanniana  $\bar{M}^{n+1}$ , existe uma única conexão afim  $\bar{\nabla}$ , chamada conexão de Levi-Civita, verificando*

$$(i) \quad [X, Y] = \bar{\nabla}_XY - \bar{\nabla}_YX \quad (\bar{\nabla} \text{ é simétrica}),$$

$$(ii) \quad X\langle Y, Z \rangle = \langle \bar{\nabla}_XY, Z \rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_XZ \rangle \quad (\bar{\nabla} \text{ é compatível com a métrica}),$$

para quaisquer  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ . A conexão de Levi-Civita é caracterizada pela seguinte equação

$$\begin{aligned} 2\langle \bar{\nabla}_XY, Z \rangle &= X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\ &\quad - \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle, \end{aligned} \quad (1.1)$$

chamada fórmula de Koszul.

*Demonstração.* A fórmula de Koszul mostra que  $\bar{\nabla}$  é unicamente determinada pela métrica  $\langle, \rangle$ . Assim, caso exista, ela será única. Para mostrar a existência, defina  $\bar{\nabla}$  por (1.1). É imediato verificar  $\bar{\nabla}$  que é uma conexão afim, é simétrica e compatível com a métrica.  $\square$

## 1.2.2 Alguns operadores diferenciáveis

A seguir, estenderemos os conceitos de gradiente, divergente, Hessiano e Laplaciano para uma variedade semi-Riemanniana  $\bar{M}^{n+1}$ . Para isso, precisamos da noção de referencial ortonormal.

**Definição 1.6.** *Para um conjunto aberto  $U$  de uma variedade semi-Riemanniana  $\bar{M}^{n+1}$ , dizemos que uma coleção de campos vetoriais  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  em  $U$  é chamado um referencial ortonormal em  $U$  quando  $\langle e_i, e_j \rangle = \epsilon_i \delta_{ij}$  em todo ponto de  $U$  e todos  $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$ , onde  $\epsilon_i$  denota o sinal de  $e_i$ .*

Se  $U$  é o domínio de um sistema de coordenada em  $\overline{M}^{n+1}$ , com campos coordenados  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \right\}$ , então é imediato verificar que a aplicação do processo de ortogonalização de Gramm-Schmidt a tais campos nos fornece um referencial ortonormal em  $U$ .

**Definição 1.7.** *O gradiente de uma função  $f \in C^\infty(\overline{M})$ , o qual denotaremos por  $\overline{\nabla}f$ , é um campo vetorial metricamente equivalente a diferencial  $df$ .*

Assim,  $\langle \overline{\nabla}f, X \rangle = df(X) = X(f)$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ . Em termos de um referencial ortonormal  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  temos

$$\overline{\nabla}f = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i e_i(f) e_i,$$

onde  $e_i(f) = \langle \overline{\nabla}f, e_i \rangle$ .

**Definição 1.8.** *Dado um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$  definimos a divergência de  $X$  como a função  $\text{div}X : \overline{M}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$\text{div}X = \text{tr}\{Y(p) \rightarrow \overline{\nabla}_Y X(p)\}, \quad p \in \overline{M}^{n+1}.$$

Em um referencial ortonormal  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  podemos escrever

$$\text{div}X = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle \overline{\nabla}_{e_i} X, e_i \rangle.$$

**Definição 1.9.** *O Hessiano de uma função  $f \in C^\infty(\overline{M})$ , denotado por  $\text{Hess}f$ , é definido como sendo a aplicação  $C^\infty(\overline{M})$ -bilinear  $\text{Hess} : \mathfrak{X}(\overline{M}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}) \rightarrow C^\infty(\overline{M})$  dada por*

$$(\text{Hess}f)(X, Y) = \langle \overline{\nabla}_X(\overline{\nabla}f), Y \rangle.$$

O próximo resultado, nos fornece algumas propriedades do Hessiano de uma função.

**Proposição 1.10.** *Para toda  $f \in C^\infty(\overline{M})$  e quaisquer  $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$  temos*

$$(a) \quad (\text{Hess}f)(X, Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f,$$

$$(b) \quad (\text{Hess}f)(X, Y) = (\text{Hess}f)(Y, X).$$

*Demonstração.* Para o item (a), como  $\langle \overline{\nabla}f, Y \rangle = Y(f)$  então

$$\begin{aligned} X(Y(f)) &= X\langle \overline{\nabla}f, Y \rangle = \langle \overline{\nabla}_X(\overline{\nabla}f), Y \rangle + \langle \overline{\nabla}f, \overline{\nabla}_X Y \rangle \\ &= (\text{Hess}f)(X, Y) + (\nabla_X Y)f. \end{aligned}$$

Agora para o item (b), lembremos que o colchete dos campos  $X$  e  $Y$  é definido por

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

mas por outro lado, da simetria da conexão de Levi-Civita  $\bar{\nabla}$  temos

$$[X, Y](f) = (\nabla_X Y)f - (\nabla_Y X)f.$$

Logo, do item (a),

$$\begin{aligned} (\text{Hess}f)(X, Y) - (\text{Hess}f)(Y, X) &= X(Y(f)) - Y(X(f)) \\ &\quad - \{(\nabla_X Y)f - (\nabla_Y X)f\} = 0. \end{aligned}$$

□

**Definição 1.11.** *Seja  $\bar{M}^{n+1}$  uma variedade semi-Riemanniana. O operador Laplaciano  $\Delta : C^\infty(\bar{M}) \rightarrow C^\infty(\bar{M})$  de  $\bar{M}^{n+1}$  é definido por  $\Delta f = \text{tr}(\text{Hess}f)$ , para toda  $f \in C^\infty(\bar{M})$ .*

Observemos que o Laplaciano também pode ser visto como um divergente, especificamente, com ajuda de um referencial ortonormal  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ , temos

$$\Delta f = \sum_i^{n+1} \epsilon_i (\text{Hess}f)(e_i, e_i) = \sum_i^{n+1} \epsilon_i \langle \bar{\nabla}_{e_i}(\bar{\nabla}f), e_i \rangle = \text{div}(\bar{\nabla}f). \quad (1.2)$$

**Proposição 1.12.** *Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ ,  $f, g \in C^\infty(\bar{M})$  e  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Então*

- (i)  $\text{div}(X + Y) = \text{div}X + \text{div}Y$ ,
- (ii)  $\text{div}(fX) = f\text{div}X + \langle \bar{\nabla}f, X \rangle$ ,
- (iii)  $\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \bar{\nabla}f, \bar{\nabla}g \rangle$ ,
- (iv)  $\Delta(\phi \circ f) = \phi'(f)\Delta f + \phi''(f)|\bar{\nabla}f|^2$ .

*Demonstração.*

- (i) Seja  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  um referencial ortonormal. Logo,

$$\begin{aligned} \text{div}(X + Y) &= \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle \bar{\nabla}_{e_i}(X + Y), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle \bar{\nabla}_{e_i}X + \bar{\nabla}_{e_i}Y, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle \bar{\nabla}_{e_i}X, e_i \rangle + \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle \bar{\nabla}_{e_i}Y, e_i \rangle = \text{div}X + \text{div}Y. \end{aligned}$$



(ii) Além disso,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(fX) &= \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle \bar{\nabla}_{e_i}(fX), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle e_i(f)X + f\bar{\nabla}_{e_i}(X), e_i \rangle \\ &= \left\langle X, \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i e_i(f)e_i \right\rangle + f \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle \bar{\nabla}_{e_i}(X), e_i \rangle = \langle X, \bar{\nabla}f \rangle + f \operatorname{div}X. \end{aligned}$$

(iii) Por outro lado, dos itens anteriores e de (1.2),

$$\begin{aligned} \Delta(fg) &= \operatorname{div}(\bar{\nabla}(fg)) = \operatorname{div}(g\bar{\nabla}f + f\bar{\nabla}g) \\ &= \operatorname{div}(g\bar{\nabla}f) + \operatorname{div}(f\bar{\nabla}g) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \bar{\nabla}f, \bar{\nabla}g \rangle. \end{aligned}$$

(iv) Finalmente,

$$\begin{aligned} \Delta(\phi \circ f) &= \operatorname{div}(\bar{\nabla}(\phi \circ f)) = \operatorname{div}(\phi'(f)\bar{\nabla}f) \\ &= \phi'(f)\operatorname{div}(\bar{\nabla}f) + \langle \bar{\nabla}(\phi'(f)), \bar{\nabla}f \rangle \\ &= \phi'(f)\operatorname{div}\Delta f + (\phi'(f))\langle \bar{\nabla}f, \bar{\nabla}f \rangle. \end{aligned}$$

□

### 1.2.3 Geodésicas e a aplicação exponencial

Sejam  $\bar{M}^{n+1}$  uma variedade semi-Riemanniana e  $\alpha : I \rightarrow \bar{M}^{n+1}$  uma curva diferenciável definida em um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$ . Dizemos que  $Z$  é um campo vetorial ao longo de  $\alpha$  se a correspondência  $I \ni t \mapsto Z(t) \in T_{\alpha(t)}M$  é diferenciável. O conjunto de todos os campos vetoriais ao longo de  $\alpha$  será denotado por  $\mathfrak{X}(\alpha)$ .

**Proposição 1.13.** *Se  $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ , então existe uma única função  $Z \rightarrow Z' \in \mathfrak{X}(\alpha)$  satisfazendo:*

- (i)  $(aZ_1 + bZ_2)' = aZ_1' + bZ_2'$  para todos  $a, b \in \mathbb{R}$ ;
- (ii)  $(hZ)' = \frac{dh}{dt}Z + hZ'$  para qualquer  $h \in C^\infty(I)$ ;
- (iii)  $(V|_\alpha)'(t) = \bar{\nabla}_{\alpha'(t)}(V)$  para todo  $t \in I$  e qualquer  $V \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ ;
- (iv)  $\frac{d}{dt}\langle Z_1, Z_2 \rangle = \langle Z_1', Z_2 \rangle + \langle Z_1, Z_2' \rangle$ , para quaisquer  $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(\alpha)$

A prova da Proposição 1.13 tem como chave utilizar um sistema de coordenadas  $x_1, \dots, x_{n+1}$  para  $\bar{M}^{n+1}$ . Após alguns cálculos, é possível obter a expressão

$$Z' = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{dZ^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_i Z^i \bar{\nabla}_{\alpha'} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (1.3)$$

obtendo deste modo a unicidade. Para a existência, basta definirmos  $Z'$  de acordo com (1.3). Através de cálculos diretos, mostramos que as quatro propriedades são satisfeitas localmente, e pela unicidade, obtemos a independência do sistema de coordenadas.

**Definição 1.14.** *Uma curva  $\alpha : I \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  é dita geodésica se  $(\alpha')' = 0$ .*

Da equação (1.3) obtemos que  $(\alpha')' = 0$  equivale a

$$\frac{d^2(x_k \circ \alpha)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n+1} \Gamma_{ij}^k(\alpha) \frac{d(x_i \circ \alpha)}{dt} \frac{d(x_j \circ \alpha)}{dt} = 0, \quad k \in \{1, \dots, n+1\}, \quad (1.4)$$

onde  $x_1, \dots, x_{n+1}$  é um sistema de coordenadas de  $\overline{M}^{n+1}$  e  $\Gamma_{ij}^k$  são os símbolos de Christoffel associados a conexão  $\overline{\nabla}$ . Em (1.4) temos um sistema de  $n+1$  equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, o que nos fornece alguns resultados de existência e unicidade, como os seguintes.

**Proposição 1.15.** *Se  $\alpha, \beta : I \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  são geodésicas tais que  $\alpha'(a) = \beta'(a)$ , para algum ponto  $a \in I$ , então  $\alpha = \beta$ .*

**Proposição 1.16.** *Dado  $v \in T_p \overline{M}$ , existe uma única geodésica  $\alpha_v$  tal que*

- (i)  $\alpha'_v(0) = v$ ;
- (ii)  $\alpha_v$  é maximal, i.e., tem domínio maximal.

**Definição 1.17.** *Seja  $v \in U \subset T_p \overline{M}$  tal que a geodésica  $\alpha_v$  é definida ao menos em  $[0, 1]$ . A função*

$$\begin{aligned} \exp_p : U &\rightarrow \overline{M}^{n+1} \\ v &\mapsto \exp_p(v) = \alpha_v(1) \end{aligned}$$

é chamada aplicação exponencial.

A prova do próximo resultado é uma aplicação direta do Teorema da Função Inversa (cf. [8], Proposição 2.9).

**Proposição 1.18.** *Para cada  $p \in \overline{M}^{n+1}$ , existe uma vizinhança  $U_0 \subset T_p \overline{M}$  na qual  $\exp_p$  é um difeomorfismo sobre uma vizinhança  $V_p$  em  $\overline{M}^{n+1}$ .*

O próximo resultado garante localmente a existência de uma referencial ortogonal cujas derivadas covariantes num ponto é zero, o qual será usado no próximo capítulo para obter fórmulas para poder estabelecer e mostrar os resultados principais deste trabalho.

**Lema 1.3** (Referencial Geodésico). *Sejam  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade semi-Riemanniana de dimensão  $n + 1$  e índice  $\nu$ . Então, para cada  $p \in \overline{M}^{n+1}$ , existe um referencial ortonormal  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  ao redor de uma vizinhança de  $p$  satisfazendo  $\overline{\nabla}_{e_i} e_j(p) = 0$ . Este referencial será dito geodésico.*

*Demonstração.* Seja  $B_\delta(0) \subset T_p \overline{M}$  tal que  $\exp_p : B_\delta(0) \rightarrow \exp_p(B_\delta(0))$  é um difeomorfismo. Defina  $\phi = \exp_p \circ J$ , onde  $J : B_\delta(0) \subset \mathbb{R}_\nu^{n+1} \rightarrow B_\delta(0) \subset T_p \overline{M}$  é uma isometria. Sejam  $v \in T_p \overline{M}$  com  $\exp_p(tv) = \alpha_v(t)$  e  $v = \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i$ , para uma base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  de  $T_p \overline{M}$ . Note que

$$x_i(\alpha_v(t)) = (J^{-1})_i(tv) = t(J^{-1})_i(v) = ta_i,$$

onde  $J(a_1, \dots, a_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i$ . Assim,  $v = \alpha'_v(0) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0$  e deste modo  $e_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_0$ , fornecendo-nos que o referencial  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^{n+1}$  é ortonormal em  $p$ . Substituindo  $x_i(\alpha_v(t)) = ta_i$  em (1.4) obtemos

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} \Gamma_{ij}^k(\alpha_v(t)) a_i a_j = 0, \quad k \in \{1, \dots, n+1\}.$$

Sendo  $a_i, a_j$  arbitrários,  $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$  e o resultado segue.  $\square$

No caso de variedades Riemannianas, temos o seguinte conceito de completude.

**Definição 1.19.** *Uma variedade Riemanniana  $\overline{M}^{n+1}$  é (geodesicamente) completa se para todo  $p \in \overline{M}^{n+1}$ , a aplicação exponencial,  $\exp_p$ , está definida para todo  $v \in T_p \overline{M}$ , i.e., se toda geodésica começando em  $p$  está definida para todos os valores do parâmetro  $t \in \mathbb{R}$ .*

## 1.2.4 Curvatura

As propriedades da conexão de Levi-Civita  $\overline{\nabla}$  de uma variedade semi-Riemanniana  $\overline{M}^{n+1}$  garantem o seguinte resultado.

**Proposição 1.20** ([15], Lema 3.35). *Se  $\overline{M}^{n+1}$  é uma variedade semi-Riemanniana com conexão de Levi-Civita  $\overline{\nabla}$ , então a aplicação  $\overline{R} : \mathfrak{X}(\overline{M})^3 \rightarrow \mathfrak{X}(\overline{M})$ , dada para  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$  por*

$$\overline{R}(X, Y)Z = \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_{[X, Y]} Z, \quad (1.5)$$

*é  $C^\infty(\overline{M})$ -trilinear, sendo denominada o tensor de curvatura de  $\overline{M}^{n+1}$ .*

Sempre que  $p \in \overline{M}^{n+1}$  e  $v, w \in T_p \overline{M}$  gerarem um subespaço de dimensão 2 não-degenerado de  $T_p \overline{M}$ , segue do item (a) do Lema 1.1 que  $\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2 \neq 0$ . Faz sentido, portanto, a seguinte

**Definição 1.21.** *Sejam  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade semi-Riemanniana,  $p \in \overline{M}^{n+1}$  e  $\sigma \subset T_p\overline{M}$  um subespaço de 2-dimensional não-degenerado de  $T_p\overline{M}$ . O número*

$$K(\sigma) = \frac{\langle \overline{R}(v, w)v, w \rangle}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}$$

*independe da base escolhida  $\{v, w\}$  de  $\sigma$ , e é denominado curvatura seccional de  $\overline{M}^{n+1}$  em  $p$ , segundo  $\sigma$ .*

Uma variedade semi-Riemanniana  $\overline{M}^{n+1}$  tem *curvatura seccional constante* em  $p \in \overline{M}$  se os números  $K(\sigma)$  da definição acima dependerem do subespaço 2-dimensional não-degenerado  $\sigma \subset T_p\overline{M}$  considerado.

Aproximando subespaços 2-dimensionais degenerados de  $T_p\overline{M}$  através de subespaços 2-dimensionais não-degenerados, pode-se mostrar que o fato de  $\overline{M}^{n+1}$  ter curvatura seccional constante determina seu tensor curvatura  $\overline{R}$ . Mais precisamente (cf. [15], Corolário 3.43), se  $\overline{M}^{n+1}$  tiver curvatura seccional constante  $c$ , então

$$\overline{R}(X, Y)Z = c \{ \langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X \}, \quad (1.6)$$

para todos  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ .

**Definição 1.22.** *Sejam  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade semi-Riemanniana,  $p$  um ponto de  $\overline{M}^{n+1}$ ,  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  um referencial ortonormal definido em uma vizinhança de  $p$  e  $\epsilon_i$  o sinal de  $e_i$ . A aplicação  $C^\infty(\overline{M})$ -bilinear  $\overline{\text{Ric}} : \mathfrak{X}(\overline{M}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}) \rightarrow C^\infty(\overline{M})$ , definida em  $p$  por*

$$\overline{\text{Ric}}(X, Y)(p) = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle \overline{R}(X, e_i)Y, e_i \rangle(p), \quad (1.7)$$

*é chamada curvatura de Ricci de  $\overline{M}^{n+1}$ .*

É imedito verificar que  $\overline{\text{Ric}}$  não depende do referencial ortonormal escolhido.

**Definição 1.23.** *Diremos que a curvatura de Ricci de uma variedade semi-Riemanniana  $\overline{M}^{n+1}$  é limitada inferiormente se existe  $\kappa \in \mathbb{R}$  tal que  $\overline{\text{Ric}}(X, X) \geq \kappa \langle X, X \rangle$  para qualquer  $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ .*

### 1.3 Orientação temporal

Agora, sejam  $\mathcal{V}$  um espaço com produto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de índice 1 e

$$\mathcal{T} = \{u \in \mathcal{V}; \langle u, u \rangle < 0\}$$

o conjunto de todos os vetores tipo tempo de  $\mathcal{V}$ . Para cada  $u \in \mathcal{T}$ , definimos o *cone tipo-tempo* de  $\mathcal{V}$  contendo  $u$  por  $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{T}; \langle u, v \rangle < 0\}$ .

No seguinte resultado colecionamos alguns fatos sobre cones tipo-tempo (cf. Lema 5.26 e Proposição 5.30 de [15]).

**Lema 1.4.** *Nas notações acima, se  $v, w \in \mathcal{T}$ , então*

- (a) *o subespaço  $\{v\}^\perp$  é tipo-espaço e  $\mathcal{V} = \text{span}\{v\} \oplus \text{span}\{v\}^\perp$ . Assim,  $\mathcal{T}$  é a união disjunta de  $\mathcal{C}(v)$  e  $\mathcal{C}(-v)$ ;*
- (b) *(desigualdade de Cauchy-Schwarz)  $|\langle v, w \rangle| \geq |v||w|$ , com igualdade se e só se  $v$  e  $w$  forem colineares;*
- (c) *se  $v \in \mathcal{C}(u)$  para algum  $u \in \mathcal{T}$ , então  $w \in \mathcal{C}(u) \Leftrightarrow \langle v, w \rangle < 0$ . Portanto,  $w \in \mathcal{C}(v) \Leftrightarrow v \in \mathcal{C}(w) \Leftrightarrow \mathcal{C}(v) = \mathcal{C}(w)$ .*

Para o que segue precisaremos também da seguinte

**Definição 1.24.** *Uma variedade de Lorentz  $\overline{M}^{n+1}$  é temporalmente orientável se existir uma aplicação  $\tau$  que associa a cada  $p \in \overline{M}^{n+1}$  um cone tipo-tempo  $\tau_p$  em  $T_p\overline{M}$ , a qual é suave no seguinte sentido: para cada  $p \in \overline{M}^{n+1}$  existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $p$  e um campo  $V \in \mathfrak{X}(U)$  tais que  $V(q) \in \tau_q$  para todo  $q \in U$ .*

O resultado a seguir torna operacional a definição anterior.

**Proposição 1.25** ([15], Lema 5.32). *Uma variedade de Lorentz  $\overline{M}^{n+1}$  é temporalmente orientável se, e somente se, existir um campo vetorial tipo-tempo  $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ .*

Sempre que uma variedade de Lorentz  $\overline{M}^{n+1}$  for temporalmente orientável, a escolha de uma aplicação  $\tau$  como na Definição 1.24, ou de um campo vetorial tipo-tempo  $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$  a ela correspondente, será denominada uma *orientação temporal* para  $\overline{M}^{n+1}$ .

Seja  $\tau$  uma orientação temporal para  $\overline{M}^{n+1}$  e  $Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ . Se  $Y(q) \in \tau_q$  (respectivamente,  $-Y(q) \in \tau_q$ ) para todo  $q \in \overline{M}$ , dizemos que  $Y$  *aponta para o futuro* (respectivamente, *aponta para o passado*). Sendo  $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$  uma orientação temporal para  $\overline{M}^{n+1}$ , segue do item (c) do Lema 1.4 que um campo vetorial tipo-tempo  $Y$  sobre  $\overline{M}^{n+1}$  aponta para o futuro (respectivamente, para o passado) se, e somente se,  $\langle Y, V \rangle < 0$  (respectivamente,  $\langle Y, V \rangle > 0$ ).

# Capítulo 2

## Imersões isométricas

Neste capítulo consideramos a seguinte situação. Seja  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  uma imersão de uma variedade diferenciável  $M^n$  em uma variedade semi-Riemanniana  $\overline{M}^{n+1}$ , isto é  $dx_p : T_p M \rightarrow T_{x_p} \overline{M}$  é injetiva para todo  $p \in M^n$ . A métrica semi-Riemanniana de  $\overline{M}^{n+1}$  induz de maneira natural uma métrica semi-Riemanniana em  $M^n$ : se  $v_1, v_2 \in T_p M$ , definimos  $\langle v_1, v_2 \rangle_p = \langle dx_p(v_1), dx_p(v_2) \rangle_{x(p)}$ . Nesse contexto,  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  passa a ser uma imersão isométrica de  $M^n$  em  $\overline{M}^{n+1}$ . Neste capítulo, o objetivo principal é estudar as relações entre as geometrias de  $M^n$  e  $\overline{M}^{n+1}$ .

### 2.1 A segunda forma fundamental

Seja  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional e orientada  $M^n$  em uma variedade semi-Riemanniana  $(n+1)$ -dimensional  $\overline{M}^{n+1}$  de índice  $\nu \in \{0, 1\}$ . Quando  $\nu = 0$ ,  $\overline{M}^{n+1}$  será sempre assumida orientável, e se  $\nu = 1$  então  $\overline{M}^{n+1}$  será sempre uma variedade de Lorentz temporalmente orientável. Ainda no caso  $\nu = 1$ , se a métrica induzida em  $M^n$  via  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  for Riemanniana, então dizemos que  $M^n$  é uma *hipersuperfície tipo-espaço* de  $\overline{M}^{n+1}$ . Em qualquer caso, existe um campo de vetores normais unitários  $N$  globalmente definido em  $M^n$ . Seja  $\epsilon_N = \langle N, N \rangle$  o sinal de  $N$ . Assim,  $\epsilon_N = 1$  ou  $\epsilon_N = -1$ , dependendo de  $\nu = 0$  ou  $\nu = 1$ , respectivamente.

Denotemos por  $\nabla$  e  $\overline{\nabla}$  as conexões de Levi-Civita de  $M^n$  e  $\overline{M}^{n+1}$ , respectivamente.

A segunda forma fundamental de  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  é dada por

$$\begin{aligned} \text{II} : \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) &\rightarrow \mathfrak{X}(M^n)^\perp \\ (X, Y) &\mapsto \text{II}(X, Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^\perp, \end{aligned}$$

e sua fórmula de Gauss por

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \text{II}(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M^n), \quad (2.1)$$

onde  $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^\top$ . Como  $N$  é campo normal unitário,  $\text{II}(X, Y) = \beta N$ , para algum  $\beta \in C^\infty(M^n)$ . Veja que  $\langle \text{II}(X, Y), N \rangle = \beta \langle N, N \rangle = \beta \epsilon_N$ . Assim,

$$\text{II}(X, Y) = \frac{1}{\epsilon_N} \langle \text{II}(X, Y), N \rangle N, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M^n), \quad (2.2)$$

e (2.1) pode ser escrito como

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{\epsilon_N} \langle \text{II}(X, Y), N \rangle N, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M^n). \quad (2.3)$$

Por outro lado,  $\langle N, Y \rangle = 0$  para todo  $Y \in \mathfrak{X}(M^n)$ , implica que

$$\begin{aligned} 0 = X \langle N, Y \rangle &= \langle \overline{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, \overline{\nabla}_X Y \rangle = \langle \overline{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, \nabla_X Y + \text{II}(X, Y) \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, \text{II}(X, Y) \rangle, \end{aligned}$$

para todo  $Y \in \mathfrak{X}(M^n)$ , onde na penúltima igualdade foi usado (2.1). Assim, obtemos a equação de Weingarten de  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ , dada por

$$\langle \overline{\nabla}_X N, Y \rangle = - \langle N, \text{II}(X, Y) \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M^n). \quad (2.4)$$

O operador de forma  $A : \mathfrak{X}(M^n) \rightarrow \mathfrak{X}(M^n)$  e o vetor curvatura média  $\mathbf{H} \in \mathfrak{X}(M^n)^\perp$  de  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ , na direção do campo normal unitário  $N$ , são definidos por

$$\langle A(X), Y \rangle = \langle \text{II}(X, Y), N \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M^n), \quad (2.5)$$

$$\mathbf{H} = HN, \quad (2.6)$$

respectivamente, onde

$$H = \frac{\epsilon_N}{n} \text{tr}(A) \in C^\infty(M^n) \quad (2.7)$$

é a função curvatura média de  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ .

Logo, de (2.5) e (2.3) obtemos que a fórmula de Gauss de  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ , dada em (2.1), pode ser escrita como

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{\epsilon_N} \langle A(X), Y \rangle N, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M^n). \quad (2.8)$$

Agora, de (2.4) e (2.5) obtemos

$$\langle \overline{\nabla}_X N, Y \rangle = -\langle A(X), Y \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M^n). \quad (2.9)$$

Daí,  $A(X) = -(\overline{\nabla}_X N)^\top$ , para todo  $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ . Mas, observando que

$$0 = X \langle N, N \rangle = 2 \langle \overline{\nabla}_X N, N \rangle,$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ , pois  $\langle N, N \rangle = \epsilon_N$ , obtemos  $\overline{\nabla}_X N = (\overline{\nabla}_X N)^\top$ . Assim, o operador de forma de  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  é dado por

$$A(X) = -\overline{\nabla}_X N, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M^n). \quad (2.10)$$

**Proposição 2.1.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana  $M^n$  em uma variedade semi-Riemanniana  $\overline{M}^{n+1}$  de índice  $\nu \in \{0, 1\}$ . Seja também  $N$  o seu campo de vetores normais unitários e  $A : \mathfrak{X}(M^n) \rightarrow \mathfrak{X}(M^n)$  o seu correspondente operador de forma. Se  $R$  e  $\overline{R}$  denotam os tensores de curvatura de  $M^n$  e  $\overline{M}^{n+1}$ , respectivamente, então*

(a) *(Equação de Gauss)*

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= (\overline{R}(X, Y)Z)^\top \\ &+ \epsilon_N \{ \langle A(X), Z \rangle A(Y) - \langle A(Y), Z \rangle A(X) \}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

(b) *(Equação de Codazzi)*

$$(\overline{R}(X, Y)N)^\top = -(\nabla_X A)(Y) + (\nabla_Y A)(X), \quad (2.12)$$

para quaisquer  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n)$ .

*Demonstração.*

(a) De (2.8),

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \epsilon_N \langle A(X), Y \rangle N, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M^n). \quad (2.13)$$



Logo, de (1.5) e (2.13) obtemos

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z, W \rangle - \langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z, W \rangle + \langle \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z, W \rangle \\
 &= \langle \bar{\nabla}_Y \nabla_X Z, W \rangle + \epsilon_N \langle \bar{\nabla}_Y \langle A(X), Z \rangle N, W \rangle \\
 &\quad - \langle \bar{\nabla}_X \nabla_Y Z, W \rangle - \epsilon_N \langle \bar{\nabla}_X \langle A(Y), Z \rangle N, W \rangle \\
 &\quad + \langle \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z, W \rangle + \epsilon_N \langle A([X, Y], Z) \rangle \underbrace{\langle N, W \rangle}_0 \\
 &= \langle \nabla_Y \nabla_X Z, W \rangle + \epsilon_N \langle A(Y), \nabla_X Z \rangle \underbrace{\langle N, W \rangle}_0 \\
 &\quad + \epsilon_N \langle \bar{\nabla}_Y \langle A(X), Z \rangle N, W \rangle \\
 &\quad - \langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \rangle \\
 &\quad + \epsilon_N \langle A(X), \nabla_Y Z \rangle \underbrace{\langle N, W \rangle}_0 \\
 &\quad - \epsilon_N \langle \bar{\nabla}_X \langle A(Y), Z \rangle N, W \rangle \\
 &\quad + \langle \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z, W \rangle \\
 &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle \\
 &\quad + \epsilon_N \left( Y \langle A(X), Z \rangle \underbrace{\langle N, W \rangle}_0 + \langle A(X), Z \rangle \langle \bar{\nabla}_Y N, W \rangle \right) \\
 &\quad - \epsilon_N \left( X \langle A(Y), Z \rangle \underbrace{\langle N, W \rangle}_0 + \langle A(Y), Z \rangle \langle \bar{\nabla}_X N, W \rangle \right),
 \end{aligned}$$

para todos  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M^n)$ . Agora, de (2.9),

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle \\
 &\quad - \epsilon_N \langle A(X), Z \rangle \langle A(Y), W \rangle \\
 &\quad + \epsilon_N \langle A(Y), Z \rangle \langle A(X), W \rangle \\
 &= \langle R(X, Y)Z - \epsilon_N \{ \langle A(X), Z \rangle A(Y) \\
 &\quad + \langle A(Y), Z \rangle A(X) \}, W \rangle,
 \end{aligned}$$

e a equação (2.11) fica estabelecida.

(b) Por outro lado, de (2.2) e (2.5) segue que

$$\text{II}(X, Y) = \epsilon_N \langle A(X), Y \rangle N, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M^n). \quad (2.14)$$

Logo, de (1.5), (2.1) e (2.14),

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{R}(X, Y)Z, N \rangle &= \langle (\bar{R}(X, Y)Z)^\top + (\bar{R}(X, Y)Z)^\perp, N \rangle = \langle (\bar{R}(X, Y)Z)^\perp, N \rangle \\
 &= \langle (\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z)^\perp - (\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z)^\perp + (\bar{\nabla}_{[X, Y]} Z)^\perp, N \rangle \\
 &= \langle (\bar{\nabla}_Y \nabla_X Z)^\perp + (\bar{\nabla}_Y \text{II}(X, Z))^\perp \\
 &\quad - (\bar{\nabla}_X \nabla_Y Z)^\perp - (\bar{\nabla}_X \text{II}(Y, Z))^\perp + \text{II}([X, Y], Z), N \rangle \\
 &= \langle \text{II}(Y, \nabla_X Z) + (\bar{\nabla}_Y \text{II}(X, Z))^\perp \\
 &\quad - \text{II}(X, \nabla_Y Z) - (\bar{\nabla}_X \text{II}(Y, Z))^\perp + \text{II}([X, Y], Z), N \rangle \\
 &= \langle \text{II}(Y, \nabla_X Z), N \rangle + \langle \bar{\nabla}_Y \text{II}(X, Z), N \rangle \\
 &\quad - \langle \text{II}(X, \nabla_Y Z), N \rangle - \langle \bar{\nabla}_X \text{II}(Y, Z), N \rangle \\
 &\quad + \langle \text{II}([X, Y], Z), N \rangle \\
 &= \epsilon_N \langle A(Y), \nabla_X Z \rangle \underbrace{\langle N, N \rangle}_{\epsilon_N} + \epsilon_N \langle \bar{\nabla}_Y \langle A(X), Z \rangle, N, N \rangle \\
 &\quad - \epsilon_N \langle A(X), \nabla_Y Z \rangle \underbrace{\langle N, N \rangle}_{\epsilon_N} + \epsilon_N \langle \bar{\nabla}_X \langle A(Y), Z \rangle, N, N \rangle \\
 &\quad + \epsilon_N \langle A([X, Y]), Z \rangle \underbrace{\langle N, N \rangle}_{\epsilon_N} \\
 &= \langle A(Y), \nabla_X Z \rangle - \langle A(X), \nabla_Y Z \rangle + \langle A([X, Y]), Z \rangle \\
 &\quad + \epsilon_N \left( Y(\langle A(X), Z \rangle) \underbrace{\langle N, N \rangle}_{\epsilon_N} + \langle A(X), Z \rangle \underbrace{\langle \bar{\nabla}_Y N, N \rangle}_0 \right) \\
 &\quad - \epsilon_N \left( X(\langle A(Y), Z \rangle) \underbrace{\langle N, N \rangle}_{\epsilon_N} + \langle A(Y), Z \rangle \underbrace{\langle \bar{\nabla}_X N, N \rangle}_0 \right) \\
 &= \langle A(Y), \nabla_X Z \rangle - \langle A(X), \nabla_Y Z \rangle + \langle A([X, Y]), Z \rangle \\
 &\quad + Y(\langle A(X), Z \rangle) - X(\langle A(Y), Z \rangle) \\
 &= \langle A(Y), \nabla_X Z \rangle - \langle A(X), \nabla_Y Z \rangle + \langle A([X, Y]), Z \rangle \\
 &\quad + \langle \nabla_Y A(X), Z \rangle + \langle A(X), \nabla_Y Z \rangle \\
 &\quad - \langle \nabla_X A(Y), Z \rangle - \langle A(Y), \nabla_X Z \rangle \\
 &= \langle \{ \nabla_Y A(X) - A(\nabla_Y X) \} - \{ \nabla_X A(Y) - A(\nabla_X Y) \}, Z \rangle \\
 &= \langle (\nabla_Y A)(X) - (\nabla_X A)(Y), Z \rangle,
 \end{aligned}$$

para todos  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n)$ . Assim,

$$\langle (\nabla_Y A)(X) - (\nabla_X A)(Y), Z \rangle = \langle \bar{R}(X, Y)Z, N \rangle = -\langle \bar{R}(X, Y)N, Z \rangle,$$

e a equação (2.12) também fica estabelecida. □

Em particular, quando a variedade ambiente tem curvatura seccional constante, da Proposição 2.1 podemos obter o seguinte resultado.

**Corolário 2.2.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \overline{M}_c^{n+1}$  uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana  $M^n$  em uma variedade semi-Riemanniana  $\overline{M}^{n+1}$ , de índice  $\nu \in \{0, 1\}$  e curvatura seccional constante  $c$ . Seja também  $N$  o seu campo de vetores normais unitários e  $A : \mathfrak{X}(M^n) \rightarrow \mathfrak{X}(M^n)$  o seu correspondente operador de forma. Se  $R$  denota o tensor de curvatura de  $M^n$  então*

(a) *(Equação de Gauss)*

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= c\{\langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle\} \\ &\quad + \epsilon_N \{ \langle A(X), Z \rangle \langle A(Y), W \rangle \\ &\quad - \langle A(Y), Z \rangle \langle A(X), W \rangle \}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

(b) *(Equação de Codazzi)*

$$(\nabla_X A)(Y) = (\nabla_Y A)(X), \quad (2.16)$$

para quaisquer  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n)$ .

*Demonstração.* Como  $\overline{M}_c^{n+1}$  possui curvatura seccional constante  $c$ , então seu tensor de curvatura  $\overline{R}$  é dado por

$$\overline{R}(X, Y)Z = c\{\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X\}, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n), \quad (2.17)$$

como foi estabelecido em (1.6). Substituindo (2.17) em (2.11) obtemos (2.15). Além disso, de (2.12),

$$\langle -(\nabla_X A)(Y) + (\nabla_Y A)(X), N \rangle = \langle \overline{R}(X, Y)Z, N \rangle = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M^n),$$

pois de (2.17) segue que  $\overline{R}(X, Y)Z \in \mathfrak{X}(M^n)$ . Agora, (2.16) segue diretamente.  $\square$

Além da curvatura média  $H$ , uma outra curvatura associada a  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  é a *segunda curvatura média*  $H_2$ , definida por

$$H_2 = \frac{2S_2}{n(n-1)}, \quad (2.18)$$

onde

$$S_2 = \sum_{i < j} k_i k_j$$

é a segunda função simétrica elementar dos autovetores  $k_1, \dots, k_n$  do operador de forma  $A : \mathfrak{X}(M^n) \rightarrow \mathfrak{X}(M^n)$ . A seguir estabelecemos uma relação muito útil entre a norma do operador de forma  $A$  e  $H_2$ .

**Lema 2.1.** *Sejam  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana  $M^n$  em uma variedade semi-Riemanniana  $\overline{M}^{n+1}$  de índice  $\nu \in \{0, 1\}$  e  $A$  seu correspondente operador de forma. Então*

$$|A|^2 = n^2 H^2 - n(n-1)H_2, \quad (2.19)$$

onde  $H$  e  $H_2$  são a curvatura média e segunda curvatura média de  $M^n$ , respectivamente.

*Demonstração.* De (2.18), podemos observar que

$$|A|^2 = n^2 H^2 - 2S_2,$$

ou seja, a equação (2.19) pode ser visualizada, em função dos autovalores  $k_1, \dots, k_n$  de  $A$ , como

$$\sum_{i=1}^n k_i^2 = \left( \sum_{i=1}^n k_i \right)^2 - 2 \sum_{i<j}^n k_i k_j. \quad (2.20)$$

A demonstração de (2.20) será feita por indução. Para  $n = 2$  temos que a equação (2.20) é satisfeita. Agora, suponhamos que (2.20) é válida para  $n \in \mathbb{N}$ . Daí,

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^{n+1} k_i \right)^2 &= \left( \sum_{i=1}^n k_i + k_{n+1} \right)^2 \\ &= \left( \sum_{i=1}^n k_i \right)^2 + 2 \left( \sum_{i=1}^n k_i \right) k_{n+1} + k_{n+1}^2. \end{aligned}$$

Substituindo a hipótese de indução na igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^{n+1} k_i \right)^2 &= \sum_{i=1}^n k_i^2 + 2 \sum_{i<j}^n k_i k_j + 2 \left( \sum_{i=1}^n k_i \right) k_{n+1} + k_{n+1}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} k_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} k_i k_j, \end{aligned}$$

ficando assim mostrado o resultado. □

## 2.2 Os espaços de Sitter, Hipebólico e Steady State

Consideremos o espaço de Lorenzt-Minkowski  $\mathbb{L}^{n+2}$ , com  $n \geq 0$  (vide Exemplo 1), a saber, o espaço  $\mathbb{R}^{n+2}$  munido com o produto escalar

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} v_i w_i - v_{n+2} w_{n+2},$$

onde  $v = (v_1, \dots, v_{n+2})$  e  $w = (w_1, \dots, w_{n+2})$ . No que segue, para cada  $\delta \in \{-1, 1\}$ , consideremos o seguinte subconjunto

$$\mathbb{M}_\delta^{n+1} = \{ p \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle p, p \rangle = \delta \}. \quad (2.21)$$

**Proposição 2.3.**  $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$  é uma subvariedade  $(n+1)$ -dimensional de  $\mathbb{L}^{n+2}$ , cujo espaço tangente em cada ponto  $p \in \mathbb{M}_\delta^{n+1}$  é o conjunto de todos os vetores de  $\mathbb{L}^{n+2}$  que são ortogonais a  $p$ . Além disso,  $\mathbb{M}_{-1}^{n+1}$  tem índice zero e  $\mathbb{M}_1^{n+1}$  tem índice 1.

*Demonstração.* Basta mostrar que  $\delta$  é um valor regular da função

$$\begin{aligned} G : \mathbb{L}^{n+2} &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto G(p) = \langle p, p \rangle, \end{aligned}$$

pois  $\mathbb{M}_\delta^{n+1} = G^{-1}(\{\delta\})$ . Para isso, sejam  $p \in \mathbb{L}^{n+2}$ ,  $v \in T_p(\mathbb{L}^{n+2})$  e considere uma curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{L}^{n+2}$  tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = v$ . Logo,

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } G(p), v \rangle &= dG_p(v) = \left. \frac{d}{dt}(G \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle \right|_{t=0} = 2 \langle \alpha'(0), \alpha(0) \rangle = \langle 2p, v \rangle. \end{aligned}$$

Como  $\langle, \rangle$  é não-degenerado e  $v \in T_p(\mathbb{L}^{n+2})$  é arbitrário,

$$\text{grad } G(p) = 2p, \quad \forall p \in \mathbb{L}^{n+2}. \quad (2.22)$$

Observemos que  $\text{grad } G(p) = 0$  se, e somente se,  $p = 0$ . Porém, isso não acontece para os pontos que pertencem a  $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$ . Assim,  $\delta$  é valor regular de  $G$  e, portanto,  $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$  é subvariedade de  $\mathbb{L}^{n+2}$ , cuja dimensão é

$$\dim(\mathbb{M}_\delta^{n+1}) = \dim(\mathbb{L}^{n+2}) - \dim(\mathbb{R}) = n + 1.$$

Além disso,

$$T_p(\mathbb{M}_\delta^{n+1}) = \ker\{dG_p : T_p(\mathbb{L}^{n+2}) \rightarrow \mathbb{R}\}, \quad \forall p \in \mathbb{M}_\delta^{n+1}. \quad (2.23)$$

Agora, observando de (2.22) que

$$v \in \ker\{dG_p\} \Leftrightarrow 0 = dG_p(v) \Leftrightarrow 0 = \langle \text{grad } G(p), v \rangle = \langle 2p, v \rangle,$$

então obtemos de (2.23) que

$$T_p(\mathbb{M}_\delta^{n+1}) = \{v \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle p, v \rangle = 0\}, \quad \forall p \in \mathbb{M}_\delta^{n+1}, \quad (2.24)$$

como desejado.

Por outro lado, se  $w \in T_p(\mathbb{M}_\delta^{n+1}) \cap \text{Span}\{\text{grad } G(p)\}$  então de (2.22) e (2.24) obtemos respectivamente que  $\langle w, p \rangle = 0$  e  $w = \beta \text{grad } G(p)$ , para algum  $\beta \in \mathbb{R}$ . Daí,

$$0 = \langle w, p \rangle = \beta \langle \text{grad } G(p), p \rangle = 2\beta \langle p, p \rangle = 2\beta\delta.$$

Isso implica que  $\beta = 0$ , pois  $\delta \neq 0$ . Logo,  $w = 0$  e

$$T_p(\mathbb{M}_\delta^{n+1}) \cap \text{Span}\{\text{grad } G(p)\} = \{0\}.$$

Assim,

$$T_p(\mathbb{L}^{n+2}) = T_p(\mathbb{M}_\delta^{n+1}) \oplus \text{Span}\{\text{grad } G(p)\}, \quad \forall p \in \mathbb{M}_\delta^{n+1}. \quad (2.25)$$

Como  $\langle p, p \rangle = \delta \in \{-1, 1\}$  e  $\text{grad } G(p) = 2p$  então  $\text{Span}\{\text{grad } G(p)\}$  tem índice  $\nu$  igual a 1 ou 0, dependendo se  $\delta = 1$  ou  $\delta = -1$ , respectivamente. Em particular,  $\text{Span}\{\text{grad } G(p)\}$  é não-degenerado. Segue que,

$$\text{Span}\{\text{grad } G(p)\}^\perp = T_p(\mathbb{M}_\delta^{n+1})$$

também é não-degenerado. Logo, de (2.25) segue que

$$\begin{aligned} 1 &= \text{ind}(T_p(\mathbb{L}^{n+2})) = \text{ind}(T_p(\mathbb{M}_\delta^{n+1})) + \text{ind}(\text{Span}\{\text{grad } G(p)\}) \\ &= \text{ind}(T_p(\mathbb{M}_\delta^{n+1})) + \nu, \end{aligned} \quad (2.26)$$

para todo  $p \in \mathbb{M}_\delta^{n+1}$ . Portanto, de (2.26) podemos concluir que  $\text{ind}(\mathbb{M}_{-1}^{n+1}) = 0$  e  $\text{ind}(\mathbb{M}_1^{n+1}) = 1$ .  $\square$

No espaço de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^{n+2}$  podemos obter um modelo para o *espaço hiperbólico*  $\mathbb{H}^{n+1}$  que será bastante apropriado aos nossos propósitos. Especificamente,

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{p \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle p, p \rangle = -1, p_{n+2} \geq 1\},$$

ou seja,  $\mathbb{H}^{n+1} = \{p \in \mathbb{M}_{-1}^{n+1}; p_{n+2} \geq 1\}$ . Assim, da Proposição 2.3 obtemos que  $\mathbb{H}^{n+1}$  é uma subvariedade Riemanniana  $(n+1)$ -dimensional de  $\mathbb{L}^{n+2}$ , cujo espaço tangente em cada ponto  $p \in \mathbb{S}_1^{n+1}$  é dado por

$$T_p(\mathbb{H}^{n+1}) = \{v \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle p, v \rangle = 0\}. \quad (2.27)$$

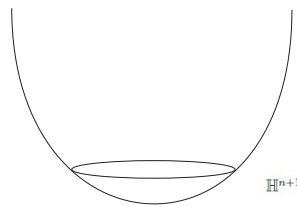


Figura 2.1: Espaço Hiperbólico

Por outro lado, o espaço *de Sitter* é denotado e definido por

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = \{p \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle p, p \rangle = 1\},$$

isto é,  $\mathbb{S}_1^{n+1} = \mathbb{M}_1^{n+1}$ . Logo, usamos novamente a Proposição 2.3 para obter que  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  é uma subvariedade de Lorentz  $(n + 1)$ -dimensional de  $\mathbb{L}^{n+2}$ , cujo espaço tangente em cada ponto  $p \in \mathbb{S}_1^{n+1}$  é dado por

$$T_p(\mathbb{S}_1^{n+1}) = \{v \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle p, v \rangle = 0\}. \quad (2.28)$$

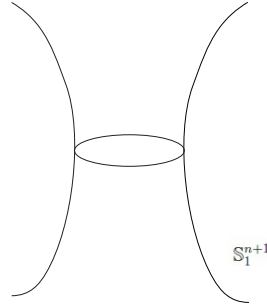


Figura 2.2: Espaço de Sitter

Ao longo desta seção, usaremos  $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$  para denotar indistintamente ou o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$  ou o espaço de Sitter  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  de acordo com  $\delta = -1$  ou  $\delta = 1$ , respectivamente.

Consideremos agora a aplicação inclusão  $\iota : \mathbb{M}_\delta^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ . De (2.22) e (2.25) obtemos que a correspondência

$$\mathbb{M}_\delta^{n+1} \ni p \mapsto \bar{N}_p = \frac{\text{grad } G(p)}{|\text{grad } G(p)|} = \frac{2p}{\sqrt{|\langle 2p, 2p \rangle|}} = p \quad (2.29)$$

define um campo normal unitário globalmente definido em  $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$ . Assim, a aplicação  $\bar{N} : \mathbb{M}_\delta^{n+1} \rightarrow \mathbb{M}_\delta^{n+1}$  definida por (2.29) é chamada *aplicação de Gauss* de  $\iota : \mathbb{M}_\delta^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ .

Sejam  $\nabla^0$  e  $\bar{\nabla}$ , respectivamente, as conexões de Levi-Civita de  $\mathbb{L}^{n+2}$  e  $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$ . A *segunda forma fundamental* de  $\iota : \mathbb{M}_\delta^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$  é dada por

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} : \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1}) \times \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1}) &\rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1})^\perp \\ (X, Y) &\mapsto \bar{\Pi}(X, Y) = (\nabla_X^0 Y)^\perp, \end{aligned}$$

e sua *fórmula de Gauss* por

$$\nabla_X^0 Y = \bar{\nabla}_X Y + \bar{\Pi}(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1}), \quad (2.30)$$

onde  $\bar{\nabla}_X Y = (\nabla_X^0 Y)^\top$ .

Sendo  $\bar{N}$  um campo normal unitário em  $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$  então  $\bar{\Pi}(X, Y) = \beta \bar{N}$ , para alguma função  $\beta \in C^\infty(\mathbb{M}_\delta^{n+1})$ . Veja que  $\langle \bar{\Pi}(X, Y), \bar{N} \rangle = \lambda \langle \bar{N}, \bar{N} \rangle = \beta \delta$ . Assim,

$$\bar{\Pi}(X, Y) = \frac{1}{\delta} \langle \bar{\Pi}(X, Y), \bar{N} \rangle \bar{N}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1}),$$

e (2.30) pode ser escrito como

$$\nabla_X^0 Y = \bar{\nabla}_X Y + \frac{1}{\delta} \langle \bar{\Pi}(X, Y), \bar{N} \rangle \bar{N}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1}). \quad (2.31)$$

Por outro lado,  $\langle \bar{N}, X \rangle = 0$  para todo  $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1})$ , implica que

$$\begin{aligned} 0 = X \langle \bar{N}, Y \rangle &= \langle \nabla_X^0 \bar{N}, Y \rangle + \langle \bar{N}, \nabla_X^0 Y \rangle \\ &= \langle \nabla_X^0 \bar{N}, Y \rangle + \langle \bar{N}, \bar{\nabla}_X Y + \bar{\Pi}(X, Y) \rangle \\ &= \langle \nabla_X^0 \bar{N}, Y \rangle + \langle \bar{N}, \bar{\Pi}(X, Y) \rangle, \end{aligned}$$

para todo  $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1})$ , onde na penúltima igualdade foi usado (2.30). Assim, obtemos a equação de Weingarten de  $\iota : \mathbb{M}_\delta^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ , dada por

$$\langle \nabla_X^0 \bar{N}, Y \rangle = -\langle \bar{N}, \bar{\Pi}(X, Y) \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1}). \quad (2.32)$$

O operador de forma  $\mathcal{A} : \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1})$  e o vetor curvatura média  $\bar{\mathbf{H}} \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1})^\perp$  de  $\iota : \mathbb{M}_\delta^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ , na direção do campo normal unitário  $\bar{N}$ , são definidos por

$$\langle \mathcal{A}(X), Y \rangle = \langle \bar{\Pi}(X, Y), \bar{N} \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1}), \quad (2.33)$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \bar{H} \bar{N}, \quad (2.34)$$

respectivamente, onde

$$\bar{H} = \frac{\delta}{n+1} \text{tr}(\mathcal{A}) \in C^\infty(\mathbb{M}_\delta^{n+1}) \quad (2.35)$$

é a curvatura média de  $\iota : \mathbb{M}_\delta^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ .

Logo, de (2.33) e (2.31) obtemos que a fórmula de Gauss de  $\iota : \mathbb{M}_\delta^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ , dada em (2.30), pode ser escrita como

$$\nabla_X^0 Y = \bar{\nabla}_X Y + \frac{1}{\delta} \langle \mathcal{A}(X), Y \rangle \bar{N}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1}). \quad (2.36)$$

Agora, de (2.32) e (2.33) obtemos

$$\langle \nabla_X^0 \bar{N}, Y \rangle = -\langle \mathcal{A}(X), Y \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1}).$$



Daí,  $\mathcal{A}(X) = -(\nabla_X^0 \bar{N})^\top$ , para todo  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1})$ . Mais observando que

$$0 = X \langle \bar{N}, \bar{N} \rangle = 2 \langle \nabla_X^0 \bar{N}, \bar{N} \rangle,$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1})$ , pois  $\langle \bar{N}, \bar{N} \rangle = \delta$ , obtemos  $\nabla_X^0 \bar{N} = (\nabla_X^0 \bar{N})^\top$ . Assim, o operador de forma de  $\iota : \mathbb{M}_\delta^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$  é dado por

$$\mathcal{A}(X) = -\nabla_X^0 \bar{N}, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1}). \quad (2.37)$$

Para obter uma expressão mais explícita de  $\mathcal{A}$ , substituímos (2.29) em (2.37), obtendo

$$\mathcal{A}(v) = -\nabla_v^0 \bar{N} = -\nabla_v^0 p = -v, \quad \forall v \in T_p(\mathbb{M}_\delta^{n+1}),$$

ou ainda,

$$\mathcal{A}(X) = -X, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1}). \quad (2.38)$$

Se  $R^0$  e  $\bar{R}$  denotam os tensores de curvatura de  $\mathbb{L}^{n+2}$  e  $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$ , respectivamente, então a *equação de Gauss* de  $\iota : \mathbb{M}_\delta^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$  é dada por

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= (R^0(X, Y)Z)^\top \\ &\quad + \delta \langle \mathcal{A}(X), Z \rangle \mathcal{A}(Y) - \delta \langle \mathcal{A}(Y), Z \rangle \mathcal{A}(X), \end{aligned}$$

para todos  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1})$ . Sendo os coeficientes da métrica do espaço  $\mathbb{L}^{n+2}$  constantes então o tensor curvatura  $R^0$  é identicamente nulo. Logo,

$$\bar{R}(X, Y)Z = \delta \langle \mathcal{A}(X), Z \rangle \mathcal{A}(Y) - \delta \langle \mathcal{A}(Y), Z \rangle \mathcal{A}(X), \quad (2.39)$$

para todos  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1})$ .

Com toda essa discussão, estamos em condições de estabelecer e mostrar o seguinte resultado.

**Proposição 2.4.** *Com a métrica induzida de  $\mathbb{L}^{n+2}$ ,*

- (a)  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  tem curvatura seccional constante igual a 1 e curvatura média, na direção do campo normal unitário  $\bar{N}$  definido em (2.29), igual a  $-1$ .
- (b)  $\mathbb{H}^{n+1}$  tem curvatura seccional constante igual a  $-1$  e curvatura média, na direção do campo normal unitário  $\bar{N}$  definido em (2.29), igual a 1.

*Demonstração.* De (2.39) e (2.38) segue que

$$\bar{R}(X, Y)Z = \delta \{ \langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X \},$$

para todos  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1})$ . Assim,  $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$  tem curvatura seccional constante igual a  $\delta$ .

Por outro lado, observando de (2.38) que  $\mathcal{A} = -\text{Id}_{\mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1})}$ , obtemos

$$\text{tr}(\mathcal{A}) = -(n + 1).$$

Logo, de (2.34),  $\bar{\mathbf{H}} = -\delta\bar{\mathbf{N}}$ . Assim, a curvatura média  $\bar{H}$  de  $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$  na direção de  $\bar{\mathbf{N}}$  é constante igual a  $-\delta$ .  $\square$

Agora, seja  $a \in \mathbb{L}^{n+2} \setminus \{0\}$  um vetor fixo tal que  $\langle a, a \rangle = 0$  e  $\langle a, e_{n+2} \rangle > 0$ , onde  $e_{n+2} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{L}^{n+2}$ . Então a região aberta do espaço de Sitter  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  dada por,

$$\mathcal{H}^{n+1} = \{ p \in \mathbb{S}_1^{n+1} ; \langle p, a \rangle > 0 \},$$

é chamada *Steady State space*.

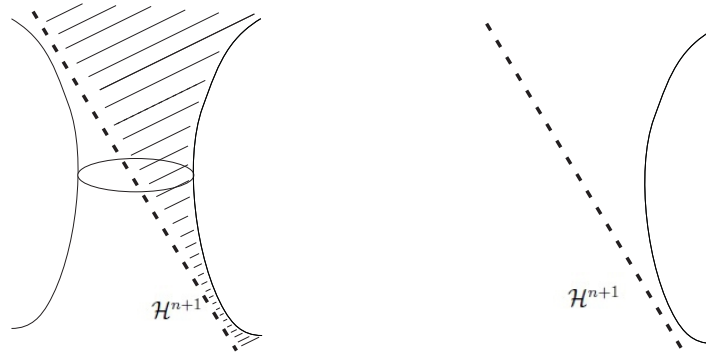


Figura 2.3: Steady State Space

Observe que  $\mathcal{H}^{n+1}$  é estendível, uma vez que  $\mathcal{H}^{n+1}$  é isométrica a um aberto de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  e por isso é não-completo. A sua fronteira, como um subconjunto de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ , é a hipersuperfície nula

$$\{ p \in \mathbb{S}_1^{n+1} ; \langle p, a \rangle = 0 \},$$

cuja topologia é equivalente a de  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$ .

## 2.3 Hipersuperfícies totalmente umbílicas

**Definição 2.5.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana  $M^n$  em uma variedade semi-Riemanniana  $\overline{M}^{n+1}$  de índice  $\nu \in \{0, 1\}$ . Seja também  $N$  o seu campo de vetores normais unitários e  $A : \mathfrak{X}(M^n) \rightarrow \mathfrak{X}(M^n)$  o seu correspondente operador de forma. Um ponto  $p \in M^n$  é chamado umbílico se existe  $\lambda(p) \in \mathbb{R}$  tal que  $A_p = \lambda(p) \text{Id}_{T_p M}$ . Dizemos que  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  é totalmente umbílica se todos os pontos de  $M^n$  são umbílicos, isto é, se existe  $\lambda \in C^\infty(M)$  tal que  $A = \lambda \text{Id}_{\mathfrak{X}(M^n)}$ .*

Em cada  $p \in M^n$ , temos que  $A_p : T_p M \rightarrow T_p M$  é um operador auto-adjunto. Logo,  $A_p$  é diagonalizável. Em particular, existe uma base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $T_p M$  tal que a matriz associada a  $A_p$  é diagonal.

**Definição 2.6.** *A aplicação auto-adjunta*

$$\Phi_p = A_p - \lambda(p) \text{Id}_{T_p M} : T_p M \rightarrow T_p M,$$

onde  $\lambda(p)$  é o único número real tal que  $\text{tr}(\Phi_p) = 0$ , é chamado operador sem traço de  $x : M^n \rightarrow M^{n+1}$ .

Observemos de (2.7) que

$$\text{tr}(\Phi_p) = 0 \Leftrightarrow 0 = \text{tr}(A_p) - n\lambda(p) \Leftrightarrow \lambda(p) = \frac{1}{n} \text{tr}(A_p) = \frac{1}{\epsilon_N} H(p).$$

Assim,  $x : M^n \rightarrow M^{n+1}$  é totalmente umbílica se uma (e portanto todas) das seguintes afirmações é válida em cada ponto  $p \in M^n$ :

$$\begin{aligned} \Phi_p = 0 &\Leftrightarrow \Phi_p(e_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |\Phi_p(e_i)|^2 = 0, \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \langle \Phi_p(e_i), \Phi_p(e_i) \rangle = 0, \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \langle \Phi_p^2(e_i), e_i \rangle = 0, \\ &\Leftrightarrow \text{tr}(\Phi_p^2) = 0. \end{aligned}$$

Em geral,

$$\text{tr}(\Phi^2) = \sum_{i=1}^n \langle \Phi^2(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \Phi(e_i), \Phi(e_i) \rangle = \sum_{i=1}^n |\Phi(e_i)|^2 \geq 0,$$

onde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é qualquer referencial ortonormal local de  $x(M^n)$ . Assim, obtemos o seguinte

**Proposição 2.7.**  $\text{tr}(\Phi^2) \geq 0$ , e a igualdade acontece se, e somente se,  $x : M^n \rightarrow M^{n+1}$  é totalmente umbílica.

Observando que

$$\begin{aligned} \text{tr}(\Phi^2) &= \text{tr} \left( \left( A - \frac{H}{\epsilon_N} \text{Id}_{\mathfrak{X}(M^n)} \right)^2 \right) \\ &= \text{tr}(A^2) - \frac{2H}{\epsilon_N} \text{tr}(A) + H^2 \text{tr}(\text{Id}_{\mathfrak{X}(M^n)}) \\ &= \text{tr}(A^2) - 2nH^2 + nH^2 \\ &= \text{tr}(A^2) - nH^2, \end{aligned}$$

então a última proposição pode ser escrito da seguinte forma.

**Proposição 2.8.**  $\text{tr}(A^2) - nH^2 \geq 0$ , e a igualdade acontece se, e somente se,  $x : M^n \rightarrow M^{n+1}$  é totalmente umbílica.

### 2.3.1 Hipersuperfícies tipo-espaço totalmente umbílicas em $\mathbb{S}_1^{n+1}$

Nosso objetivo agora é estudar alguns exemplos de hipersuperfícies tipo-espaço totalmente umbílicas no espaço de-Sitter  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ .

Para isso, fixemos um vetor  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$  e denotemos  $c = \langle a, a \rangle \in \{-1, 0, 1\}$ .

Observemos que, quando  $\delta = 1$  em (2.25),

$$\mathbb{R}^{n+2} \cong T_p(\mathbb{R}_1^{n+2}) = T_p(\mathbb{S}_1^{n+1}) \oplus \text{Span}\{p\}, \quad \forall p \in \mathbb{S}_1^{n+1}. \quad (2.40)$$

Logo, existem  $a^*(p) \in T_p(\mathbb{S}_1^{n+1})$  e  $\beta(p) \in \mathbb{R}$  de forma que  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$  pode ser escrito como  $a = a^*(p) + \beta(p)p$ . Mas como

$$\langle a, p \rangle = \underbrace{\langle a^*(p), p \rangle}_0 + \beta(p) \underbrace{\langle p, p \rangle}_1 = \beta(p)$$

então

$$a = a^*(p) + \langle a, p \rangle p. \quad (2.41)$$

Agora, consideremos a função

$$\begin{aligned} f_a : \mathbb{S}_1^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto f_a(p) = \langle p, a \rangle, \end{aligned} \quad (2.42)$$

e, dado  $\tau \in \mathbb{R}$ , consideremos

$$\mathcal{M}_{c,\tau}^n = f_a^{-1}(\{\tau\}) = \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle p, a \rangle = \tau\}.$$

Em primeiro lugar, tentemos determinar para que valores de  $\tau$  o conjunto  $\mathcal{M}_{c,\tau}^n$  é uma hipersuperfície tipo-espaço de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ . Para isso, usaremos que se  $\nabla f_a(p) \neq 0$  e  $\langle \nabla f_a(p), \nabla f_a(p) \rangle < 0$  em todo  $p \in f_a^{-1}(\{\tau\})$  então  $\mathcal{M}_{c,\tau}^n$  é uma hipersuperfície tipo-espaço.

Sejam  $p \in \mathbb{S}_1^{n+1}$ ,  $v \in T_p(\mathbb{S}_1^{n+1})$  e considere uma curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$  tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = v$ . Logo, de (2.41),

$$\begin{aligned} \langle \nabla f_a(p), v \rangle &= d(f_a)_p(v) = \left. \frac{d}{dt}(f_a(\alpha(t))) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \langle \alpha(t), a \rangle \right|_{t=0} = \langle \alpha'(0), a \rangle = \langle v, a \rangle \\ &= \langle v, a^*(p) \rangle + \underbrace{\langle a, p \rangle}_{0} \langle v, p \rangle = \langle a^*(p), v \rangle. \end{aligned}$$

Como  $v \in T_p(\mathbb{S}_1^{n+1})$  é arbitrário e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é não-degenerado,  $\nabla f_a(p) = a^*(p)$ , para todo  $p \in \mathbb{S}_1^{n+1}$ . Em particular, se  $p \in f_a^{-1}(\{\tau\})$  então de (2.41) e (2.42) obtemos

$$\nabla f_a(p) = a - \tau p. \quad (2.43)$$

Assim,  $\mathcal{M}_{c,\tau}^n$  será uma hipersuperfície tipo-espaço de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  quando

$$\begin{aligned} 0 > \langle \nabla f_a(p), \nabla f_a(p) \rangle &= \langle a - \tau p, a - \tau p \rangle \\ &= \underbrace{\langle a, a \rangle}_c - 2\tau \underbrace{\langle a, p \rangle}_\tau + \tau^2 \underbrace{\langle p, p \rangle}_1 \\ &= c - \tau^2, \end{aligned} \quad (2.44)$$

ou equivalentemente, quando  $\tau^2 > c$ .

Para o que segue, a desigualdade  $\tau^2 > c$  será considerada sempre válida. Denotemos por  $\varphi : \mathcal{M}_{c,\tau}^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$  a imersão isométrica de  $\mathcal{M}_{c,\tau}^n$  em  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  e, seguindo a mesma notação da última seção, seja  $\iota : \mathbb{S}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$  a aplicação inclusão de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  em  $\mathbb{L}^{n+2}$ . As conexões de Levi-Civita de  $\mathcal{M}_{c,\tau}^n$ ,  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  e  $\mathbb{L}^{n+2}$  serão denotadas por  $\nabla$ ,  $\bar{\nabla}$  e  $\nabla^0$ , respectivamente. Observemos de (2.43) e (2.29) que as correspondentes aplicações de Gauss de  $\varphi : \mathcal{M}_{c,\tau}^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$  e  $\iota : \mathbb{S}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$  são dadas por

$$\begin{aligned} N : \mathcal{M}_{c,\tau}^n &\rightarrow \mathbb{H}^{n+1} \\ p &\mapsto N(p) = \frac{\nabla f_a(p)}{|\nabla f_a(p)|} = \frac{a - \tau p}{\sqrt{\tau^2 - c}} \end{aligned} \quad (2.45)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{N} : \mathbb{S}_1^{n+1} &\rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1} \\ p &\mapsto \bar{N}(x) = p, \end{aligned} \quad (2.46)$$

respectivamente. De (2.56) e (2.45) podemos observar que

$$\langle N, N \rangle = -1 \quad (2.47)$$

Denotemos por  $A : \mathfrak{X}(\mathcal{M}_{c,\tau}^n) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}_{c,\tau}^n)$  e  $\mathcal{A} : \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{n+1}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{n+1})$  os operadores de forma de  $\varphi : \mathcal{M}_{c,\tau}^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$  na direção de  $N$  e  $\iota : \mathbb{S}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$  na direção do campo  $\bar{N}$ , respectivamente. De (2.38),

$$\mathcal{A} = -\text{Id}_{\mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{n+1})}. \quad (2.48)$$

Procuremos agora uma expressão explícita para  $A$ .

De (2.8) obtemos que a fórmula de Gauss para  $\varphi : \mathcal{M}_{c,b}^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$  é dada por

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \langle A(X), Y \rangle N, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}_{c,b}^n). \quad (2.49)$$

Da fórmula de Gauss para  $\iota : \mathbb{S}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ , dada em (2.36), obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_X^0 Y &= \bar{\nabla}_X Y + \langle \mathcal{A}(X), Y \rangle \varphi \\ &= \nabla_X Y - \langle A(X), Y \rangle N - \langle X, Y \rangle \varphi, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}_{c,\tau}^n), \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde na última igualdade foi usado (2.49) e (2.48). De (2.10),

$$A(X) = -\bar{\nabla}_X N, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}_{c,\tau}^n). \quad (2.51)$$

Mas como  $N$  é um campo vetorial tangente a  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ , então de (2.50) obtemos

$$\nabla_X^0 N = \bar{\nabla}_X N - \underbrace{\langle A(X), N \rangle}_0 N - \underbrace{\langle X, N \rangle}_0 \varphi = \bar{\nabla}_X N, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}_{c,\tau}^n).$$

Assim, (2.51) fica da forma

$$A(X) = -\nabla_X^0 N, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}_{c,\tau}^n). \quad (2.52)$$

Substituindo (2.45) em (2.64),

$$\begin{aligned} A(X) &= -\frac{1}{\sqrt{\tau^2 - c}} \nabla_X^0 (a - \tau p) \\ &= \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - c}} \nabla_X^0 p = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - c}} X, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}_{c,\tau}^n). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Portanto, podemos concluir de todo nosso estudo que  $\varphi : \mathcal{M}_{c,\tau}^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ , com  $\tau^2 > c$ , é uma hipersuperfície tipo-espaço totalmente umbílica, com curvatura média  $H$  constante igual a

$$H = -\frac{1}{n} \text{tr}(A) = \frac{-\tau}{\sqrt{\tau^2 - c}}.$$

Passamos agora a fazer um estudo dos valores de  $\tau$  e

$$H^2 = \frac{\tau^2}{\tau^2 - c}$$

em função de  $c = \langle a, a \rangle \in \{-1, 0, 1\}$ .

(i) Se  $c = 0$  (o que corresponde a um corte de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  por um plano degenerado de  $\mathbb{L}^{n+2}$ ) então  $\tau^2 > 0$ . Segue que  $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $H^2 = 1$ . Tomemos por exemplo  $a = (0, \dots, 0, 1, 1) \in \mathbb{L}^{n+2}$ . Então um ponto em  $\mathcal{M}_{c,\tau}^n = \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle p, a \rangle = \tau\}$  verifica

$$\begin{cases} p_1^2 + \dots + p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 = 1, \\ p_{n+1} - p_{n+2} = \tau. \end{cases}$$

Como

$$\begin{aligned} 1 = p_1^2 + \dots + p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 &\geq p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 \\ &= (p_{n+1} - p_{n+2})(p_{n+1} + p_{n+2}) \\ &= \tau(p_{n+1} + p_{n+2}), \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} p_1^2 + \dots + p_n^2 &= 1 - (p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2) \\ &= 1 - \tau(p_{n+1} + p_{n+2}) \geq 1 - 1 = 0, \end{aligned}$$

ou seja,  $p_1^2 + \dots + p_n^2 \in [0, +\infty)$ . Logo, podemos identificar  $\mathcal{M}_{c,\tau}^n$  com  $\mathbb{R}^n$ .

(ii) Se  $c = 1$  (o que corresponde a um corte de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  por um plano tipo-tempo de  $\mathbb{L}^{n+2}$ ) então  $\tau^2 > 1$ . Segue que  $\tau \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  e  $H^2 = \frac{\tau^2}{\tau^2 - 1} \in (1, +\infty)$ . Por exemplo, se consideramos  $a = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{L}^{n+2}$  então qualquer ponto em  $\mathcal{M}_{c,\tau}^n = \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle p, a \rangle = \tau\}$  satisfaz

$$\begin{cases} p_1^2 + \dots + p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 = 1, \\ p_1 = \tau. \end{cases}$$

Logo,

$$p_2^2 + \dots + p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 = 1 - \tau^2 < 0.$$

Assim, podemos identificar  $\mathcal{M}_{c,\tau}^n$  com  $\mathbb{H}^n(\sqrt{\tau^2 - 1}) \subset \mathbb{L}^{n+1}$ .

(iii) Se  $c = -1$  (o que corresponde a um corte de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  por um plano tipo-espaço de  $\mathbb{L}^{n+2}$ ) então  $\tau^2 > -1$ . Neste caso,  $\tau \in \mathbb{R}$  e  $H^2 = \frac{\tau^2}{\tau^2 + 1} \in [0, 1)$ . Por exemplo, se escolhermos  $a = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{L}^{n+2}$  então um ponto  $p \in \mathcal{M}_{c,\tau}^n = \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle p, a \rangle = \tau\}$  verifica

$$\begin{cases} p_1^2 + \dots + p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 = 1, \\ p_{n+2} = -\tau. \end{cases}$$

Logo,

$$p_1^2 + \dots + p_{n+1}^2 = 1 + \tau^2.$$

Assim, podemos identificar  $\mathcal{M}_{c,\tau}^n$  com  $\mathbb{S}^n(\sqrt{1 + \tau^2}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

Pode ser mostrado que tais hipersuperfícies são essencialmente as únicas hipersuperfícies tipo-espaço totalmente umbílicas de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ , como afirma o seguinte resultado.

**Proposição 2.9** ([1], Teorema 1.5.1). *Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ ,  $n \geq 2$ , uma hipersuperfície tipo-espaço conexa e totalmente umbílica. Então*

(a) *sua curvatura média  $H$  é constante.*

(b<sub>1</sub>) *Se  $H^2 \in [0, 1)$  então existem  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$  e  $\tau \in \mathbb{R}$  tais que  $\langle a, a \rangle = -1$  e*

$$x(M^n) \subseteq \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle p, a \rangle = \tau\} = \mathbb{S}^n(\sqrt{1 + \tau^2}).$$

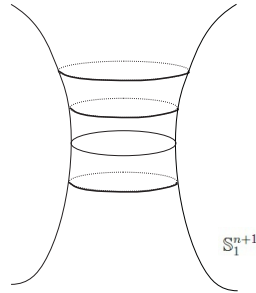


Figura 2.4: Item (b<sub>1</sub>): Esferas geodésicas

(b<sub>2</sub>) *Se  $H^2 = 1$  então existem  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$  e  $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tais que  $\langle a, a \rangle = 0$  e*

$$x(M^n) \subseteq \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle p, a \rangle = \tau\} = \mathbb{R}^n.$$

(b<sub>3</sub>) *Se  $H^2 \in (1, +\infty)$  então existem  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$  e  $\tau \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  tais que  $\langle a, a \rangle = 1$  e*

$$x(M^n) \subseteq \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle p, a \rangle = \tau\} = \mathbb{H}^n(\sqrt{\tau^2 - 1}).$$



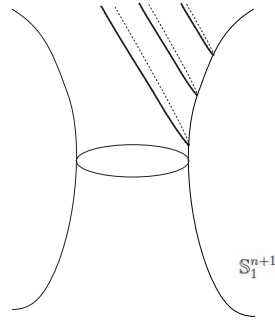


Figura 2.5: Item  $(b_2)$ : Hiperplanos

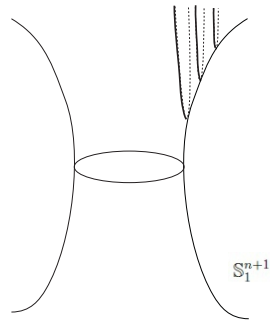


Figura 2.6: Item  $(b_3)$ : Hiperbólicos

### 2.3.2 Hipersuperfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{H}^{n+1}$

Aqui fazemos um estudo análogo ao da última subseção para determinar algumas hipersuperfícies totalmente umbílicas no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$ .

Fixemos um vetor  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$  e seja  $c = \langle a, a \rangle \in \{-1, 0, 1\}$ . Consideremos a função

$$\begin{aligned} g_a : \mathbb{H}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto g_a(p) = \langle p, a \rangle. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Usando a relação

$$\mathbb{L}^{n+2} \cong T_p(\mathbb{L}^{n+2}) = T_p(\mathbb{H}^{n+1}) \oplus \text{Span}\{p\}, \quad \forall p \in \mathbb{H}^{n+1},$$

obtida de (2.25) fazendo  $\delta = -1$ , podemos estabelecer que

$$\nabla g_a(p) = a + \langle p, a \rangle p, \quad \forall p \in \mathbb{H}^{n+1}.$$

Em particular, para  $p \in \mathcal{N}_{c,\varrho}^n = g_a^{-1}(\{\varrho\}) = \{p \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle p, a \rangle = \varrho\}$ , onde  $\varrho \in \mathbb{R}$ , temos

$$\nabla g_a(p) = a + \varrho p. \tag{2.55}$$

Logo,  $\mathcal{N}_{c,\varrho}^n$  será uma hipersuperfície orientada de  $\mathbb{H}^{n+1}$  quando

$$\begin{aligned} 0 < \langle \nabla g_a(p), \nabla g_a(p) \rangle &= \langle a + \varrho p, a + \varrho p \rangle \\ &= \underbrace{\langle a, a \rangle}_c + 2\varrho \underbrace{\langle a, p \rangle}_\varrho + \varrho^2 \underbrace{\langle p, p \rangle}_{-1} \\ &= c + \varrho^2, \end{aligned} \quad (2.56)$$

ou equivalentemente, quando  $\varrho^2 > -c$ .

No que segue,  $\varrho^2 > -c$  sempre será válida. Seja  $\varphi : \mathcal{N}_{c,\varrho}^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  a imersão isométrica de  $\mathcal{N}_{c,\varrho}^n$  em  $\mathbb{H}^{n+1}$  e  $\iota : \mathbb{H}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$  a aplicação inclusão de  $\mathbb{H}^{n+1}$  em  $\mathbb{R}_1^{n+2}$ . Denotemos as conexões de Levi-Civita de  $\mathcal{N}_{c,\varrho}^n$ ,  $\mathbb{H}^{n+1}$  e  $\mathbb{L}^{n+2}$  por  $\nabla$ ,  $\bar{\nabla}$  e  $\nabla^0$ , respectivamente. Observemos de (2.55) e (2.29) que as correspondentes aplicações de Gauss de  $\varphi : \mathcal{N}_{c,\varrho}^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  e  $\iota : \mathbb{H}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$  são dadas por

$$\begin{aligned} N : \mathcal{N}_{c,\varrho}^n &\rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1} \\ p &\mapsto N(p) = \frac{\nabla g_a(p)}{|\nabla g_a(p)|} = \frac{a + \varrho p}{\sqrt{\varrho^2 + c}} \end{aligned} \quad (2.57)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{N} : \mathbb{H}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{H}^{n+1} \\ p &\mapsto \bar{N}(x) = p, \end{aligned} \quad (2.58)$$

respectivamente. De (2.56) e (2.45) podemos observar que

$$\langle N, N \rangle = 1 \quad (2.59)$$

Denotemos por  $A : \mathfrak{X}(\mathcal{N}_{c,\varrho}^n) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{N}_{c,\varrho}^n)$  e  $\mathcal{A} : \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$  os operadores de forma de  $\varphi : \mathcal{N}_{c,\varrho}^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  na direção de  $N$  e  $\iota : \mathbb{H}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$  na direção do campo  $\bar{N}$ , respectivamente. De (2.38),

$$\mathcal{A} = -\text{Id}_{\mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})}. \quad (2.60)$$

Procuremos agora uma expressão explícita para  $A$ .

De (2.8) obtemos que a fórmula de Gauss para  $\varphi : \mathcal{N}_{c,\varrho}^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  é dada por

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \langle A(X), Y \rangle N, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{N}_{c,\varrho}^n). \quad (2.61)$$

Da fórmula de Gauss para  $\iota : \mathbb{H}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ , dada em (2.36), obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_X^0 Y &= \bar{\nabla}_X Y + \langle \mathcal{A}(X), Y \rangle \varphi \\ &= \nabla_X Y + \langle A(X), Y \rangle N + \langle X, Y \rangle \varphi, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{N}_{c,\varrho}^n). \end{aligned} \quad (2.62)$$

onde na última igualdade foi usado (2.61) e (2.60). De (2.10),

$$A(X) = -\bar{\nabla}_X N, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{N}_{c,\varrho}^n). \quad (2.63)$$

Mas como  $N$  é um campo vetorial tangente a  $\mathbb{H}^{n+1}$ , então de (2.62) obtemos

$$\nabla_X^0 N = \bar{\nabla}_X N + \underbrace{\langle A(X), N \rangle}_0 N + \underbrace{\langle X, N \rangle}_0 \varphi = \bar{\nabla}_X N, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{N}_{c,\varrho}^n).$$

Assim, (2.63) fica da forma

$$A(X) = -\nabla_X^0 N, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{N}_{c,\varrho}^n). \quad (2.64)$$

Substituindo (2.57) em (2.64),

$$\begin{aligned} A(X) &= -\frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + c}} \nabla_X^0 (a + \varrho p) \\ &= -\frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + c}} \nabla_X^0 p = -\frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + c}} X, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{N}_{c,\varrho}^n). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Portanto, podemos concluir que  $\varphi : \mathcal{N}_{c,\varrho}^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ , com  $\varrho^2 > -c$ , é uma hipersuperfície totalmente umbílica, com curvatura média  $H$  constante igual a

$$H = \frac{1}{n} \operatorname{tr}(A) = \frac{-\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + c}}.$$

Passamos agora a fazer um estudo dos valores de  $\varrho$  e

$$H^2 = \frac{\varrho^2}{\varrho^2 + c}$$

em função de  $c = \langle a, a \rangle \in \{-1, 0, 1\}$ .

- (i) Se  $c = 0$  (o que corresponde a um corte de  $\mathbb{H}^{n+1}$  por um plano degenerado) então  $\varrho^2 > 0$ . Segue que  $\varrho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $H^2 = 1$ . Tomemos por exemplo  $a = (0, \dots, 0, 1, 1) \in \mathbb{L}^{n+2}$ . Logo, um ponto em  $\mathcal{N}_{c,\varrho}^n = \{p \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle p, a \rangle = \varrho\}$  verifica

$$\begin{cases} p_1^2 + \dots + p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 = -1, \\ p_{n+1} - p_{n+2} = \varrho. \end{cases}$$

Como

$$\begin{aligned} -1 = p_1^2 + \dots + p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 &\geq p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 \\ &= (p_{n+1} - p_{n+2})(p_{n+1} + p_{n+2}) \\ &= \varrho(p_{n+1} + p_{n+2}), \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} p_1^2 + \cdots + p_n^2 &= -1 - (p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2) \\ &= -1 - \varrho(p_{n+1} + p_{n+2}) \geq -1 + 1 = 0, \end{aligned}$$

ou seja,  $p_1^2 + \cdots + p_n^2 \in [0, +\infty)$ . Logo, podemos identificar  $\mathcal{N}_{c,\varrho}^n$  com  $\mathbb{R}^n$ , e neste caso, dentro da nomenclatura que existe na literatura,  $\mathcal{N}_{c,\varrho}^n$  correspondem as chamadas *horoesferas* de  $\mathbb{H}^{n+1}$ .

- (ii) Se  $c = 1$  (o que corresponde a um corte de  $\mathbb{H}^{n+1}$  por um plano tipo-tempo de  $\mathbb{L}^{n+2}$ ) então  $\varrho^2 > -1$ . Segue que  $\varrho \in \mathbb{R}$  e  $H^2 = \frac{\varrho^2}{\varrho^2 + 1} \in [0, 1)$ . Por exemplo, se consideramos  $a = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{L}^{n+2}$  então qualquer ponto em  $\mathcal{N}_{c,\varrho}^n = \{p \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle p, a \rangle = \varrho\}$  satisfaz

$$\begin{cases} p_1^2 + \cdots + p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 = -1, \\ p_1 = \varrho. \end{cases}$$

Logo,

$$p_2^2 + \cdots + p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 = -1 - \varrho^2 < 0.$$

Assim, podemos identificar  $\mathcal{N}_{c,\varrho}^n$  com  $\mathbb{H}^n(\sqrt{\varrho^2 + 1}) \subset \mathbb{L}^{n+1}$ .

- (iii) Se  $c = -1$  (o que corresponde a um corte de  $\mathbb{H}^{n+1}$  por um plano tipo-espaço de  $\mathbb{L}^{n+1}$ ) então  $\varrho^2 > 1$ . Neste caso,  $\tau \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$  e  $H^2 = \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - 1} \in (1, +\infty)$ . Por exemplo, se escolhermos  $a = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{L}^{n+2}$  então um ponto em  $\mathcal{N}_{c,\varrho}^n = \{p \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle p, a \rangle = \varrho\}$  verifica

$$\begin{cases} p_1^2 + \cdots + p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 = -1, \\ p_{n+2} = -\varrho. \end{cases}$$

Logo,

$$p_1^2 + \cdots + p_{n+1}^2 = -1 + \varrho^2 > 0.$$

Assim, podemos identificar  $\mathcal{N}_{c,\varrho}^n$  com  $\mathbb{S}^n(\sqrt{\varrho^2 - 1}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

De forma similar ao que acontece na Proposição 2.9, pode ser mostrado que tais hipersuperfícies são as únicas hipersuperfícies totalmente umbílicas de  $\mathbb{H}^{n+1}$ , como estabelece o seguinte resultado.

**Proposição 2.10.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ ,  $n \geq 2$ , uma hipersuperfície orientada, conexa e totalmente umbílica. Então*

(a) *sua curvatura média  $H$  é constante.*

(b<sub>1</sub>) *Se  $H^2 \in (1, +\infty)$  então existem  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$  e  $\varrho \in \mathbb{R}$  tais que  $\langle a, a \rangle = -1$  e*

$$x(M^n) \subseteq \{p \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle p, a \rangle = \varrho\} = \mathbb{S}^n(\sqrt{\varrho^2 - 1}).$$

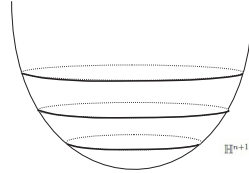


Figura 2.7: Item (b<sub>1</sub>): Esferas geodésicas

(b<sub>2</sub>) *Se  $H^2 = 1$  então existem  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$  e  $\varrho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tais que  $\langle a, a \rangle = 0$  e*

$$x(M^n) \subseteq \{p \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle p, a \rangle = \varrho\} = \mathbb{R}^n.$$

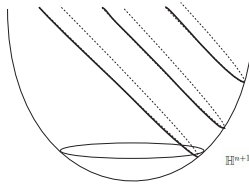


Figura 2.8: Item (b<sub>2</sub>): Horoesferas

(b<sub>3</sub>) *Se  $H^2 \in [0, 1)$  então existem  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$  e  $\varrho \in \mathbb{R}$  tais que  $\langle a, a \rangle = 1$  e*

$$x(M^n) \subseteq \{p \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle p, a \rangle = \varrho\} = \mathbb{H}^n(\sqrt{\varrho^2 + 1}).$$

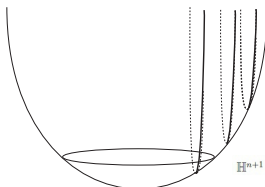


Figura 2.9: Item (b<sub>3</sub>): Hiperesferas

## 2.4 Variedades semi-Riemannianas munidas com um campo conforme

Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade semi-Riemanniana, com métrica semi-Riemanniana  $\langle, \rangle$  e conexão de Levi-Civita  $\overline{\nabla}$ . Dizemos que  $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$  é *conforme* quando

$$\mathcal{L}_V \langle, \rangle = 2\varphi \langle, \rangle \quad (2.66)$$

para alguma função  $\psi \in C^\infty(\overline{M})$ , onde  $\mathcal{L}$  denota a derivada de Lie na métrica de  $\overline{M}^{n+1}$ . A função  $\varphi$  é chamada *fator conforme* de  $V$ . Desde que  $\mathcal{L}_V(X) = [V, X]$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ , podemos obter de (2.66) que  $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$  é conforme se, e somente se,

$$\langle \overline{\nabla}_X V, Y \rangle + \langle X, \overline{\nabla}_Y V \rangle = 2\varphi \langle X, Y \rangle, \quad (2.67)$$

para quaisquer  $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ . Em particular,  $V$  é campo vetorial de Killing se, e só se,  $\psi \equiv 0$ . Um caso particular interessante de um campo vetorial conforme  $V$  é dado quando

$$\overline{\nabla}_X V = \varphi X \quad (2.68)$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ . Neste caso dizemos que  $V$  é *fechado*.

Uma classe particular de variedades semi-Riemannianas é dada pelas *variedades Lorentzianas conformemente estacionárias*, a saber, aquelas variedade Lorentzianas que possuem um campo vetorial conforme tipo-tempo globalmente definido.

O resultado que enunciaremos agora é devido a S. Montiel (cf. Proposição 1 de [13]). Nele percebemos o quanto a presença de um campo conforme e fechado influi na geometria de uma variedade. Em termos mais precisos, temos o seguinte

**Proposição 2.11.** *Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade de Lorentz munido de um campo de vetores tipo-tempo conforme fechado  $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$  de fator conforme  $\varphi$ . Então*

(a) *A distribuição  $n$ -dimensional  $V^\perp$  definida em  $\overline{M}^{n+1}$  por*

$$p \mapsto V^\perp(p) = \{ w \in T_p \overline{M} ; \langle V(p), w \rangle = 0 \}$$

*determina uma folheação tipo-espaco de codimensão 1, a qual é orientada por  $V$ . Além disso, as funções  $\langle V, V \rangle$ ,  $\text{div} V$  e  $V(\varphi)$  são constantes em cada folha conexa de  $V^\perp$ .*

(b) O campo unitário tipo-tempo  $\nu = \frac{V}{|V|}$  em  $\overline{M}^{n+1}$  satisfaz

$$(i) \quad \overline{\nabla}_\nu \nu = 0;$$

$$(ii) \quad \overline{\nabla}_X \nu = \frac{\psi}{|V|} X, \text{ se } \langle X, \nu \rangle = 0;$$

e, portanto, o fluxo do campo  $\nu$  é um fluxo geodésico normalizado tipo-tempo o qual leva homoteticamente folhas de  $V^\perp$  em folhas de  $V^\perp$ , sendo cada folha de  $V^\perp$  totalmente umbílica com curvatura média constante  $H = -\frac{\psi}{|V|}$ .

**Observação 1.** No caso em que  $\overline{M}^{n+1}$  é uma variedade Riemanniana munida com um campo conforme fechado e não-trivial  $V$ , é possível mostrar que o conjunto

$$\mathcal{Z}(V) = \{p \in \overline{M}^{n+1}; V(p) = 0\}$$

é discreto em  $\overline{M}^{n+1}$ . Assim, os itens (a) e (b) da Proposição 2.11 continuam válidos quando consideramos o campo  $\nu = \frac{V}{|V|}$  definido no conjunto  $\mathcal{M} = \overline{M}^{n+1} \setminus \mathcal{Z}(V)$  (cf. Proposição 1 de [12]).

O seguinte resultado fornece um campo tipo-tempo conforme e fechado no espaço Steady State.

**Proposição 2.12.** O campo de vetores

$$\mathcal{K} = a - \langle p, a \rangle p \tag{2.69}$$

definido em  $\mathcal{H}^{n+1} = \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle p, a \rangle > 0\}$  é um campo tipo-tempo conforme e fechado, onde  $a \in \mathbb{L}^{n+2} \setminus \{0\}$  é tal que  $\langle a, a \rangle = 0$  e  $\langle a, e_{n+2} \rangle > 0$ .

*Demonstração.* Primeiramente observemos que

$$\langle \mathcal{K}(p), p \rangle = \langle a - \langle a, p \rangle p, p \rangle = \langle a, p \rangle - \underbrace{\langle a, p \rangle \langle p, p \rangle}_1 = 0,$$

para todo  $p \in \mathcal{H}^{n+1}$ . Logo  $\mathcal{K} \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}^{n+1})$ . Para verificar que é tipo-tempo, note que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{K}(p), \mathcal{K}(p) \rangle &= \langle a - \langle p, a \rangle p, a - \langle p, a \rangle p \rangle \\ &= \underbrace{\langle a, a \rangle}_0 - 2 \langle a, \langle p, a \rangle p \rangle + \langle p, a \rangle^2 \underbrace{\langle p, p \rangle}_1 = -\langle p, a \rangle^2 < 0, \end{aligned}$$

para todo  $p \in \mathcal{H}^{n+1}$ , pois  $\langle p, a \rangle > 0$ .

Por outro lado, sendo  $\mathcal{H}^{n+1}$  uma região aberta de  $\mathbb{S}^{n+1}$ , então de (2.36) e (2.38) obtemos que a fórmula de Gauss de  $\mathcal{H}^{n+1}$  é dada por

$$\nabla_V^\circ W = \overline{\nabla}_V W - \langle V, W \rangle x,$$

para todos  $V, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}^{n+1})$ , onde  $\nabla^\circ$  e  $\bar{\nabla}$  são as conexões de Levi-Civita de  $\mathcal{H}^{n+1}$  e  $\mathbb{L}^{n+2}$ , respectivamente. Daí,

$$\begin{aligned}
 \bar{\nabla}_V \mathcal{K} &= \nabla_V^\circ(a - \langle p, a \rangle p) + \langle V, a - \langle p, a \rangle p \rangle p \\
 &= \nabla_V^\circ a - \nabla_V^\circ(\langle p, a \rangle p) + \langle V, a \rangle p - \langle p, a \rangle \langle V, p \rangle x \\
 &= -\langle p, a \rangle \nabla_V^\circ p - V \langle p, a \rangle p + \langle V, a \rangle p - \langle p, a \rangle \langle V, p \rangle x \\
 &= -\langle p, a \rangle V - \langle \bar{\nabla}_V a, p \rangle p - \langle a, \bar{\nabla}_V p \rangle p + \langle V, a \rangle p - \langle p, a \rangle \langle V, p \rangle x \\
 &= -\langle p, a \rangle V - \langle \nabla_V^\circ a + \langle V, a \rangle p, p \rangle p - \langle a, \nabla_V^\circ p + \langle V, p \rangle p \rangle p \\
 &\quad + \langle V, a \rangle p - \langle p, a \rangle \langle V, p \rangle x \\
 &= -\langle p, a \rangle V - \langle \langle V, a \rangle p, p \rangle p - \langle a, V + \langle V, p \rangle p \rangle p \\
 &\quad + \langle V, a \rangle p - \langle p, a \rangle \langle V, p \rangle p \\
 &= -\langle p, a \rangle V - \langle V, a \rangle \langle p, p \rangle p - \langle a, V \rangle p - \langle a, \langle V, p \rangle p \rangle p \\
 &\quad + \langle V, a \rangle p - \langle p, a \rangle \langle V, p \rangle x \\
 &= -\langle p, a \rangle V - \langle V, a \rangle p - \langle V, p \rangle \langle a, p \rangle p - \langle p, a \rangle \langle V, p \rangle p,
 \end{aligned}$$

então para todo  $W \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}^{n+1})$ , temos

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{\nabla}_V \mathcal{K}, W \rangle &= \langle -\langle p, a \rangle V - \langle V, a \rangle p - \langle V, p \rangle \langle a, p \rangle p - \langle p, a \rangle \langle V, p \rangle p, W \rangle \\
 &= \langle -\langle p, a \rangle V, W \rangle.
 \end{aligned}$$

Como  $W \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}^{n+1})$  foi escolhido arbitrariamente, segue que

$$\bar{\nabla}_V \mathcal{K} = -\langle p, a \rangle V.$$

Portanto,  $\mathcal{K}$  é um campo conforme e fechado com fator conforme  $-\langle p, a \rangle$ .  $\square$

**Observação 2.1.** Podemos concluir das Proposições 2.12 e 2.11 que a distribuição  $n$ -dimensional de campos ortogonais

$$\mathcal{K}^\perp = \{W \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}^{n+1}); \langle W, \mathcal{K} \rangle = 0\},$$

associado ao campo vetorial  $\mathcal{K}$  definido em (2.69), determina uma folheação tipo-espaço 1-codimensional em  $\mathcal{H}^{n+1}$ . Além disso, pode ser mostrado ([13], Seção 4) que as folhas são justamente hiperplanos da forma

$$\mathcal{L}_\varrho = \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle p, a \rangle = \varrho\}, \quad \varrho \in (0, +\infty),$$

que são hipersuperfícies totalmente umbílicas de  $\mathcal{H}^{n+1}$ , isométricas ao espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , e possuem curvatura média constante igual a um com respeito ao campo normal unitário

$$\eta_\varrho(p) = \frac{1}{\varrho} a - p, \quad p \in \mathcal{L}_\varrho.$$



Seguindo as mesmas ideias da prova da Proposição 2.12, podemos construir um campo conforme fechado no espaço hiperbólico, como estabelece o seguinte resultado.

**Proposição 2.13.** *O campo de vetores*

$$K = a + \langle p, a \rangle p \quad (2.70)$$

definido em  $\mathbb{H}^{n+1} = \{p \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle p, p \rangle = -1, p_{n+2} \geq 1\}$  é um campo conforme fechado, onde  $a \in \mathbb{L}^{n+2} \setminus \{0\}$  é tal que  $\langle a, a \rangle = 0$  e  $\langle a, e_{n+2} \rangle > 0$ .

**Observação 2.2.** *Da Proposição 2.13 e da Observação 1 podemos concluir que a distribuição  $n$ -dimensional de campos ortogonais*

$$K^\perp = \{W \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1}); \langle W, K \rangle = 0\},$$

associado ao campo vetorial  $K$  definido em (2.70), determina uma folheação 1-codimensional em  $\mathbb{H}^{n+1}$ , cujas folhas são justamente ([12], Seção 4) as horoesferas

$$L_\tau = \{p \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle p, a \rangle = \tau\}, \quad \tau \in (0, +\infty).$$

Cada uma dessas folhas são orientadas pelo campo normal unitário

$$\xi_\tau(p) = -\frac{a}{\tau} - p \in \mathcal{H}^{n+1}, \quad p \in L_\tau, \quad (2.71)$$

e, com essa escolha de orientação, as folhas têm curvatura média contante igual a um.

## 2.4.1 Produtos warped semi-Riemannianos

Apresentaremos nesta seção uma classe particular de variedades semi-Riemannianas naturalmente munidas com um campo vetorial conforme. Para isto, sejam  $M^n$  uma variedade Riemanniana conexa e orientada,  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave e positiva. Considere a variedade produto  $\overline{M}^{n+1} = I \times M^n$  e denotemos por  $\pi_I$  e  $\pi_M$  as projeções canônicas sobre os fatores  $I$  e  $M^n$ , respectivamente. Em  $\overline{M}^{n+1}$  definimos a métrica

$$\langle v, w \rangle_p = \epsilon \langle (\pi_I)_* v, (\pi_I)_* w \rangle + (f \circ \pi_I)(p)^2 \langle (\pi_M)_* v, (\pi_M)_* w \rangle,$$

para todo  $p \in \overline{M}^{n+1}$  e para quaisquer  $v, w \in T_p \overline{M}$ , onde  $\epsilon$  é o sinal de  $\partial/\partial t$ . A variedade semi-Riemanniana assim obtida é chamada *produto warped semi-Riemanniano* e será representada por

$$\overline{M}^{n+1} = \epsilon I \times_f M^n.$$

É possível mostrar que o campo vetorial

$$V = (f \circ \pi_I) \frac{\partial}{\partial t}$$

é conforme fechado, com fator conforme  $\psi = f' \circ \pi_I$ , onde  $'$  denota a derivação com respeito a  $t \in I$ . As folhas fornecidas pela Proposição 2.11 são da forma  $\{t_0\} \times F^n$ ,  $t_0 \in I$ , são orientadas pelo campo normal unitário  $\partial/\partial t$  e possuem curvatura média constante

$$H = -\epsilon \frac{f'(t_0)}{f(t_0)}.$$

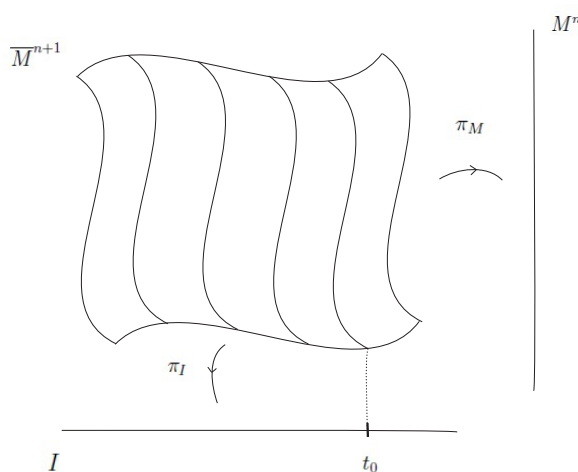


Figura 2.10: Produto warped semi-Riemanniano

Quando  $\epsilon = -1$ , a variedade  $\overline{M}^{n+1}$  obtida pela construção anterior é denominada, de acordo com a nomenclatura introduzida por L.J. Alías, A. Romero e M. Sánchez em [2], um *espaço-tempo de Robertson-Walker Generalizado* (GRW).

Fechamos esta seção descrevendo alguns modelos de produtos warped para os espaços de Sitter, Steady State e hiperbólico.

**Exemplo 2.** *Pode ser mostrado que o espaço de Sitter  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  admite o modelo GRW*

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = -\mathbb{R} \times_{\cosh t} \mathbb{S}^n,$$

onde  $\mathbb{S}^n$  é a esfera unitária  $n$ -dimensional no espaço Euclidiano. Assim, o campo vetorial  $V = (\sinh t)\partial/\partial t$  é conforme fechado tipo-tempo, fornece uma folhação de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  por hipersuperfícies totalmente umbílicas da forma  $\{t_0\} \times \mathbb{S}^n$ , com  $\{t_0\} \times \mathbb{R}^n$ , cada uma delas orientadas por  $\partial/\partial t$  e com curvatura média contante  $H = \tanh(t_0)$ .

**Exemplo 3.** O espaço Steady State  $\mathcal{H}^{n+1}$  também admite um modelo GRW, a saber,

$$\mathcal{H}^{n+1} = -\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n.$$

Logo, o campo vetorial conforme fechado e tipo-tempo  $V = (e^t)\partial/\partial t$  fornece uma folheação de  $\mathcal{H}^{n+1}$  por hipersuperfícies tipo-espaço da forma  $\{t_0\} \times \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ , orientadas por  $\partial/\partial t$ , cada uma delas com curvatura média constante  $H = 1$ .

**Exemplo 4.** O espaço hiperbólico  $\mathcal{H}^{n+1}$  admite o seguinte modelo de produto warped

$$\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n,$$

cujas folhas determinadas pelo campo vetorial conforme fechado  $V = (e^t)\partial/\partial t$  são hipersuperfícies da forma  $\{t_0\} \times \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ , cada uma delas com curvatura média constante  $H = 1$ , sempre que sejam orientadas por  $-\partial/\partial t$ .

### 2.4.2 O Laplaciano da função altura

Sejam  $I \times_f M^n$  um produto warped Riemanniano e  $\psi : \Sigma^n \rightarrow I \times_f M^n$  uma hipersuperfície. Definimos a *função altura* de  $\Sigma^n$  com respeito ao campo de vetores unitário  $\partial/\partial t$  como sendo a função  $h : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $h(t, x) = (\pi_I \circ \psi)(t, x) = t$ .

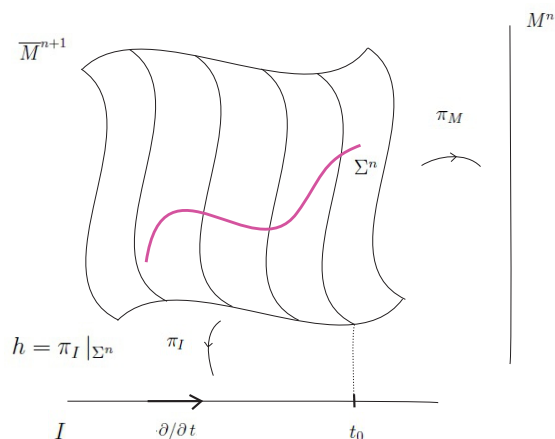


Figura 2.11: Função altura de  $\Sigma^n$

O seguinte resultado fornece uma expressão para o Laplaciano de  $h$ , expressão que, no próximo capítulo, será crucial para obter os principais resultados deste trabalho.

**Lema 2.2.** Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow I \times_f M^n$  uma hipersuperfície imersa em um produto warped Riemanniano  $I \times_f M^n$ , com  $N$  sendo a aplicação de Gauss. Então, denotando por  $h = \pi_I \circ \psi$  a função altura de  $\Sigma^n$ , temos:

$$\Delta h = (\ln f)'(h) \{n - |\Delta h|^2\} + nH \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle,$$

onde  $H$  é a curvatura média de  $\Sigma^n$  com relação a  $N$ .

*Demonstração.* Tomando  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  e sabendo que

$$X = X^* + \left\langle X, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial t},$$

onde  $X^* = (\pi_M)_*(X)$ , temos

$$\langle \nabla h, X \rangle = X(h) = \underbrace{X^*(h)}_0 + \left\langle X, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(h)}_1 = \left\langle X, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle.$$

Segue que,

$$\nabla h = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^\top = \frac{\partial}{\partial t} - \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle N, \quad (2.72)$$

onde  $W^\top$  denota a projeção de um campo  $W \in \mathfrak{X}(I \times_f M^n)$  ao longo de  $\Sigma^n$ .

Seja  $p \in \Sigma^n$  e considere  $v \in T_p \Sigma$ . Logo, existe  $w \in T_p(I \times_f M^n)$  tangente as folhas de  $I \times_f M^n$  tal que  $v = w + \left\langle v, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial t}$ . Pelos itens (i) e (ii) da Proposição 2.11, temos

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad e \quad \bar{\nabla}_w \frac{\partial}{\partial t} = (\ln f)'w.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_v \frac{\partial}{\partial t} &= \bar{\nabla}_{w + \left\langle v, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} \\ &= \bar{\nabla}_w \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\nabla}_{\left\langle v, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} \\ &= (\ln f)'w + \left\langle v, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \underbrace{\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t}}_0 \\ &= (\ln f)'w. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Por outro lado, da fórmula de Gauss de  $\Sigma^n$ , dada na equação (2.1), a derivada covariante de  $\nabla h$  com relação a  $v$  é dada por

$$\nabla_v \nabla h = \bar{\nabla}_v \nabla h - \langle Av, \nabla h \rangle N, \quad (2.74)$$

onde  $A$  é o operador de forma. Substituindo (2.72) e (2.73) em (2.74) e lembrando que

$Av = -\bar{\nabla}_v N$  (vide equação(2.10)), temos

$$\begin{aligned}
 \nabla_v \nabla h &= \bar{\nabla}_v \left( \frac{\partial}{\partial t} - \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle N \right) - \langle Av, \nabla h \rangle N \\
 &= \bar{\nabla}_v \frac{\partial}{\partial t} - \bar{\nabla}_v \left( \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle N \right) - \langle Av, \nabla h \rangle N \\
 &= (\ln f)' w - v \left( \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \right) N - \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \bar{\nabla}_v N - \langle Av, \nabla h \rangle N \\
 &= (\ln f)' w - \left\langle \underbrace{\bar{\nabla}_v N}_{-Av}, \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^\top}_{\nabla h} \right\rangle N \\
 &\quad - \left\langle N, \underbrace{\bar{\nabla}_v \frac{\partial}{\partial t}}_{(\ln f)' w} \right\rangle N - \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \underbrace{\bar{\nabla}_v N}_{-Av} - \langle Av, \nabla h \rangle N \\
 &= (\ln f)' w + \langle Av, \nabla h \rangle N - (\ln f)' \langle N, w \rangle N + \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle Av \\
 &\quad - \langle Av, \nabla h \rangle N \\
 &= (\ln f)' (w - \langle N, w \rangle N) + \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle Av, \tag{2.75}
 \end{aligned}$$

onde na quarta igualdade usamos o seguinte argumento

$$\begin{aligned}
 \left\langle Av, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle Av, \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^\top + \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle N \right\rangle \\
 &= \left\langle Av, \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^\top \right\rangle + \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \underbrace{\langle Av, N \rangle}_0 = \left\langle Av, \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^\top \right\rangle. \tag{2.76}
 \end{aligned}$$

Lembrando que

$$w = v - \left\langle v, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial t},$$

então de (2.75) obtemos

$$\begin{aligned}
 \nabla_v \nabla h &= (\ln f)' \left( v - \left\langle v, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial t} - \left\langle N, v - \left\langle v, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle N \right) \\
 &\quad + \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle Av \\
 &= (\ln f)' \left( v - \left\langle v, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial t} - \underbrace{\langle N, v \rangle}_0 N + \left\langle v, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle N \right) \\
 &\quad + \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle Av \\
 &= (\ln f)' \left( v - \langle v, \nabla h \rangle \frac{\partial}{\partial t} + \langle v, \nabla h \rangle \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle N \right) \\
 &\quad + \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle Av, \tag{2.77}
 \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos um argumento similar ao da equação (2.76) para justificar que  $\langle v, \frac{\partial}{\partial t} \rangle = \langle v, \nabla h \rangle$ . De (2.72) podemos observar que

$$\left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle N = \frac{\partial}{\partial t} - \nabla h. \quad (2.78)$$

Substituindo (2.78) em (2.78),

$$\begin{aligned} \nabla_v \nabla h &= (\ln f)' \left( v - \langle v, \nabla h \rangle \frac{\partial}{\partial t} + \langle v, \nabla h \rangle \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nabla h \right) \right) \\ &\quad + \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle Av \\ &= (\ln f)' \left( v - \langle v, \nabla h \rangle \frac{\partial}{\partial t} + \langle v, \nabla h \rangle \frac{\partial}{\partial t} - \langle v, \nabla h \rangle \nabla h \right) \\ &\quad + \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle Av \\ &= (\ln f)' (v - \langle v, \nabla h \rangle \nabla h) + \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle Av. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Agora, fixando uma base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  em  $T_p \Sigma$  temos, de (1.2) e (2.79), que

$$\begin{aligned} \Delta h &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \nabla h, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \left\langle (\ln f)' (e_i - \langle e_i, \nabla h \rangle \nabla h) + \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle A e_i, e_i \right\rangle \\ &= (\ln f)' \left\{ \sum_{i=1}^n \langle e_i, e_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle e_i, \nabla h \rangle \langle \nabla h, e_i \rangle \right\} + \sum_{i=1}^n \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \langle A e_i, e_i \rangle \\ &= (\ln f)' \left\{ \underbrace{\sum_{i=1}^n \langle e_i, e_i \rangle}_n - \underbrace{\sum_{i=1}^n (\langle e_i, \nabla h \rangle)^2}_{|\nabla h|^2} \right\} + \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \underbrace{\sum_{i=1}^n \langle A e_i, e_i \rangle}_{\text{tr}(A)} \\ &= (\ln f)' \{ n - |\nabla h|^2 \} + \underbrace{\text{tr}(A)}_{nH} \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \\ &= (\ln f)' \{ n - |\nabla h|^2 \} + nH \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle, \end{aligned}$$

onde na última igualdade segue de (2.7). □

# Capítulo 3

## Resultados Principais

No que segue, denotaremos por

$$\Phi : \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n \rightarrow \{p \in \mathbb{L}^{n+1}; \langle p, p \rangle = -1, p_{n+2} > 0\} \quad (3.1)$$

a isometria entre os modelos warped e quádrico do espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$  (veja [3]), que faz corresponder (de forma biunívoca) folhas do modelo warped, orientadas pelo campo vetorial  $-\partial/\partial t$ , em horoesferas do modelo quádrico. Seja  $\xi$  o campo vetorial no modelo quádrico de  $\mathbb{H}^{n+1}$  dedinido por

$$\xi_{\Phi(q)} = \Phi_* \left( \frac{\partial}{\partial t} \Big|_q \right), \quad q \in \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n. \quad (3.2)$$

Nesse contexto, a aplicação de Gauss  $N$  de uma hipersuperfície  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$  pode ser considerada como

$$\begin{aligned} \Sigma^n &\rightarrow \mathcal{H}^{n+1} \\ p &\mapsto -\Phi_*(N_p). \end{aligned}$$

**Definição 3.1.** *Dada uma hipersuperfície  $\Sigma^n$  imersa em  $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$  cuja aplicação de Gauss  $N$  satisfaz*

$$\left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \leq 0,$$

*definimos o ângulo normal  $\theta$  de  $\Sigma^n$  como sendo a função suave  $\theta : \Sigma^n \rightarrow [0, \frac{\pi}{2}]$  dada por*

$$0 \leq \cos \theta = - \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \leq 1.$$

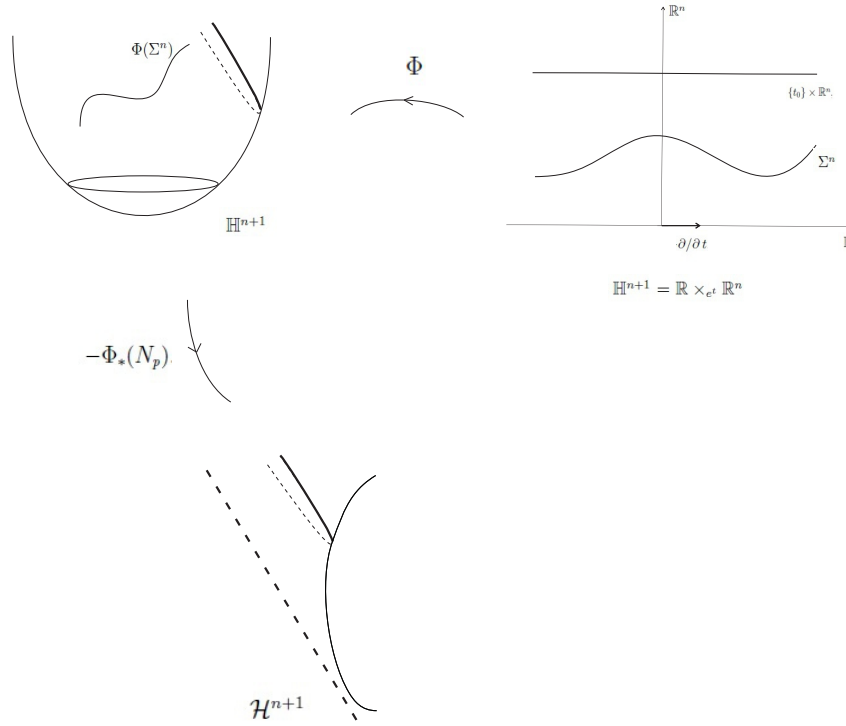


Figura 3.1: Isometria entre os modelos warped e quádrico em  $\mathbb{H}$  e a aplicação de Gauss em  $\mathcal{H}$

Para mostrar um dos resultados principais deste trabalho, precisamos do seguinte princípio de máximo generalizado, obtido por H. Omori e S. T. Yau (cf. [14], [16]), cuja demonstração pode ser encontrada em [4].

**Lema 3.1.** *Seja  $\Sigma^n$  uma variedade Riemanniana completa  $n$ -dimensional cuja curvatura de Ricci é limitada inferiormente e  $u : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave que é limitada superiormente em  $\Sigma^n$ . Então existe uma sequência de pontos  $\{p_k\}$  em  $\Sigma^n$  tal que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(p_k) = \sup_{\Sigma} u, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |\nabla u(p_k)| = 0 \quad e \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta u(p_k) \leq 0.$$

**Teorema 3.2.** *Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície completa, com segunda forma fundamental  $A$  limitada. Suponha que a curvatura média  $H$  de  $\Sigma^n$  é tal que  $0 \leq H \leq 1$ . Se  $\Sigma^n$  está abaixo de uma horoesfera de  $\mathbb{H}^{n+1}$  e o ângulo normal  $\theta$  satisfaz  $\cos \theta \geq \sup_{\Sigma} H$ , então  $\Sigma^n$  é uma horoesfera e a imagem da sua aplicação de Gauss é exatamente um hiperplano de  $\mathcal{H}^{n+1}$ .*

*Demonstração.* Consideremos o modelo warped  $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$  para o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$  e, como indicado (3.1), denotemos por  $\Phi$  a isometria entre  $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$  e o modelo quádrico de  $\mathbb{H}^{n+1}$ .

Da equação de Gauss de  $\Sigma^n$ , dada em (2.15), e de (1.7) obtemos que a curvatura



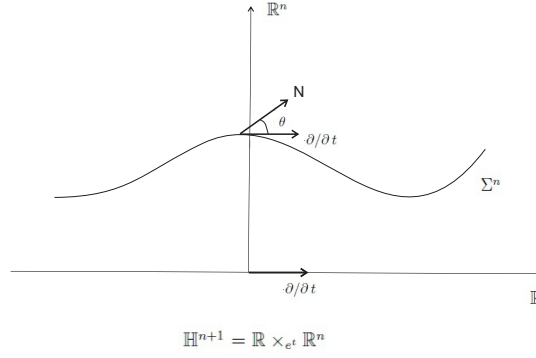


Figura 3.2: Ângulo normal  $\theta$  de  $\Sigma^n$

de Ricci de  $\Sigma^n$ , que será denotada por  $\text{Ric}_\Sigma$ , satisfaz

$$\begin{aligned}
 \text{Ric}_\Sigma(X, X) &= \sum_{i=1}^n \langle R(X, e_i)X, e_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n (-\langle X, X \rangle \langle e_i, e_i \rangle + \langle e_i, X \rangle \langle X, e_i \rangle \\
 &\quad + \langle AX, X \rangle \langle Ae_i, e_i \rangle - \langle Ae_i, X \rangle \langle AX, e_i \rangle) \\
 &= -n\langle X, X \rangle + \langle X, X \rangle + \langle AX, X \rangle \text{tr}(A) - \sum_{i=1}^n \langle e_i, AX \rangle \langle AX, e_i \rangle \\
 &= -n\langle X, X \rangle + \langle X, X \rangle + nH\langle AX, X \rangle - \langle AX, AX \rangle, \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , onde foi considerado um referencial ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  definido em uma vizinhança de algum ponto de  $\Sigma^n$ . Observando que

$$\begin{cases} -\langle AX, X \rangle \leq |\langle AX, X \rangle| \leq |A||X|^2 \\ \langle AX, AX \rangle = \langle A^2X, X \rangle \leq |\langle A^2X, X \rangle| \leq |A|^2|X|^2 \end{cases}$$

então de (3.3),

$$\begin{aligned}
 \text{Ric}_\Sigma(X, X) &\geq -n\langle X, X \rangle - \langle X, X \rangle - nH|A||X|^2 - |A^2||X|^2 \\
 &= \{-n + 1 - nH|A| - |A^2|\} \langle X, X \rangle \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

para qualquer  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ . Como por hipóteses  $H$  e  $A$  são limitadas, de (3.4) obtemos que existe  $\kappa \in \mathbb{R}$  tal que  $\text{Ric}_\Sigma(X, X) \geq \kappa \langle X, X \rangle$ , para todo  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ . Assim,  $\text{Ric}_\Sigma$  é limitado inferiormente.

Por outro lado, fazendo  $f(t) = e^t$  no Lema 2.2 obtemos

$$\Delta h = n - |\nabla h|^2 + nH \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = n \left( 1 + H \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \right) - |\nabla h|^2, \tag{3.5}$$

onde  $h = \pi_{\mathbb{R}}|_{\Sigma^n} : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$  é a função altura. Como  $\Sigma^n$  está abaixo de uma horoesfera de  $\mathbb{H}^{n+1}$  então, considerando o modelo warped de  $\mathbb{H}^{n+1}$ , obtemos que  $h$  é limitada superiormente.

Assim, o Lema 3.1 nos garante que existe uma sequência  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  em  $\Sigma^n$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} h(p_k) = \sup_{\Sigma} h, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} |\nabla h(p_k)| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \Delta h(p_k) \leq 0. \quad (3.6)$$

Logo de (3.6) e (3.5), como as funções  $H$  e  $\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \rangle$  são limitadas, podemos obter uma subsequência  $\{p_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  de  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que

$$0 \geq \lim_{j \rightarrow +\infty} \Delta h(p_{k_j}) = n \left( 1 + \lim_{j \rightarrow +\infty} H(p_{k_j}) \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle(p_{k_j}) \right). \quad (3.7)$$

Observemos que a definição de ângulo normal nos garante que

$$\left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \geq -1.$$

Assim, de (3.7) obtemos

$$0 \geq \lim_{j \rightarrow +\infty} \Delta h(p_{k_j}) \geq n \left( 1 - \lim_{j \rightarrow +\infty} H(p_{k_j}) \right) \geq 0,$$

onde na última desigualdade segue da hipótese  $0 \leq H \leq 1$ . Segue que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} H(p_{k_j}) = 1,$$

e conseqüentemente,  $\sup_{\Sigma} H = 1$ .

Por hipótese,  $\cos \theta \geq \sup_{\Sigma} H$ . Mas como  $\cos \theta \leq 1$  e  $\sup_{\Sigma} H = 1$  então  $\cos \theta = 1$  em  $\Sigma^n$ . Logo,  $N$  está na mesma direção de  $-\partial/\partial t$ . Mas como  $N$  e  $-\partial/\partial t$  são unitários,  $N = -\partial/\partial t$ . Portanto,  $\Sigma^n = \{t_0\} \times \mathbb{R}^n$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ , o que corresponde a uma horoesfera no modelo quádrico de  $\mathbb{H}^{n+1}$ .

Além disso, com relação a imagem da aplicação de Gauss  $N(\Sigma^n)$ , de (3.2) e (2.71) podemos afirmar que

$$\begin{aligned} \langle \Phi_*(N_p), a \rangle &= \left\langle \Phi_* \left( -\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right), a \right\rangle = \langle -\xi_{\Phi(p)}, a \rangle \\ &= \left\langle \Phi(p) + \frac{1}{\tau} a, a \right\rangle = \langle \Phi(p), a \rangle = \tau, \end{aligned}$$

para algum número real positivo  $\tau$ . Portanto, concluímos que  $N(\Sigma^n)$  é exatamente um hiperplano de  $\mathcal{H}^{n+1}$ .  $\square$

**Observação 2.** *A nossa hipótese sobre o ângulo normal no Teorema 3.2 é inspirada na seguinte situação: seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$  uma imersão de uma variedade compacta  $\Sigma^n$  com fronteira convexa  $\partial \Sigma$  contida numa folha  $\{t_0\} \times \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Seja*

$$L_{\tau} = \{p \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle p, a \rangle = \tau\}, \quad \tau \in (0, +\infty)$$

a horoesfera que corresponde a  $\{t_0\} \times \mathbb{R}^n$  via isometria  $\Phi$ . Suponha que  $\psi$  tem curvatura média constante  $0 \leq H \leq 1$ . Pela estimativa do gradiente, obtida por S. Montiel em [11], de acordo com a orientação  $N$  de  $\Sigma^n$  que estamos considerando, temos

$$\langle \Phi_*(N_p), a \rangle \geq \tau H(p), \quad p \in \Sigma^n.$$

Consequentemente, supondo que  $\Sigma^n$  está abaixo da horoesfera  $L_\tau$ , concluímos de (3.2) e (2.71) que o ângulo normal  $\theta$  de  $\Sigma^n$  satisfaz

$$\begin{aligned} \cos \theta(p) &= - \left\langle N_p, \frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right\rangle \\ &= \left\langle \Phi_*(N_p), \Phi_* \left( - \frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) \right\rangle \\ &= \langle \Phi_*(N_p), -\xi_{\Phi(p)} \rangle = \left\langle \Phi_*(N_p), \Phi(p) + \frac{1}{\langle \Phi(p), a \rangle} a \right\rangle \\ &= \underbrace{\langle \Phi_*(N_p), \Phi(p) \rangle}_0 + \frac{1}{\langle \Phi(p), a \rangle} \langle \Phi_*(N_p), a \rangle \\ &\geq \frac{1}{\tau} \langle \Phi_*(N_p), a \rangle \geq H(p), \end{aligned} \tag{3.8}$$

para todo  $p \in \Sigma^n$ .

**Corolário 3.3.** *Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície completa, com segunda curvatura média  $H_2$  limitada inferiormente. Suponha que a curvatura média  $H$  de  $\Sigma^n$  é tal que  $0 \leq H \leq 1$ . Se  $\Sigma^n$  está abaixo de uma horoesfera de  $\mathbb{H}^{n+1}$  e o ângulo normal  $\theta$  satisfaz  $\cos \theta \geq \sup_\Sigma H$ , então  $\Sigma^n$  é uma horoesfera e a imagem da aplicação de Gauss é exatamente um hiperplano de  $\mathcal{H}^{n+1}$ .*

*Demonstração.* Do Lemma 2.1,  $|A|^2 = n^2 H^2 - n(n-1)H_2$ . Como, por hipótese,  $H_2$  é limitada inferiormente e  $0 \leq H \leq 1$ , concluímos que  $A$  é limitado, e assim, estamos nas condições do Teorema 3.2, donde segue o resultado.  $\square$

**Corolário 3.4.** *Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície completa, com a segunda forma fundamental  $A$  limitada. Suponha que a curvatura média  $H$  de  $\Sigma^n$  é tal que  $0 \leq H \leq 1$ . Se  $\Sigma^n$  está abaixo de uma horoesfera  $L_\tau$  e a imagem da aplicação de Gauss  $N(\Sigma^n)$  está contida na fronteira do domínio interior limitada por um hiperplano  $\mathcal{L}_\rho$  de  $\mathcal{H}^{n+1}$ , com  $\frac{\rho}{\tau} \geq \sup_\Sigma H$ , então  $\Sigma^n$  é uma horoesfera e a imagem da aplicação de Gauss é exatamente um hiperplano de  $\mathcal{H}^{n+1}$ .*

*Demonstração.* Temos que  $\langle \Phi(p), a \rangle \leq \tau$  e  $\langle \Phi_*(N_p), a \rangle = \rho$  para cada  $p \in \Sigma^n$ , pois  $\Sigma^n$  está abaixo de  $L_\tau$  e  $N(\Sigma^n)$  está contida na fronteira do domínio interior limitada por um hiperplano  $\mathcal{L}_\rho$  de  $\mathcal{H}^{n+1}$ , respectivamente. Logo, de (3.8),

$$\cos \theta(p) = \frac{1}{\langle \Phi(p), a \rangle} \langle \Phi_*(N_p), a \rangle \geq \frac{1}{\tau} \langle \Phi_*(N_p), a \rangle = \frac{\rho}{\tau},$$

para todo  $p \in \Sigma^n$ . Como, ainda por hipótese,  $\frac{\rho}{\tau} \geq \sup_\Sigma H$ , segue que  $\cos \theta \geq \sup_\Sigma H$ , donde recaímos nas condições do Teorema 3.2, concluindo assim o resultado.  $\square$

Para estabelecer nosso próximo resultado, precisamos da seguinte noção.

**Definição 3.5.** *Seja  $M^2$  uma superfície Riemanniana. Uma função  $f \in C^\infty(M)$  é dita subharmônica se  $\Delta f \geq 0$ . Além disso, dizemos que  $M^2$  é parabólica se  $M^2$  não é compacta e toda função subharmônica negativa é constante em  $M^2$ .*

O seguinte resultado fornece condições suficientes para que uma superfície Riemanniana seja parabólica.

**Proposição 3.6.** *(A. Hüber [9]) Toda superfície Riemanniana completa não-compacta e com curvatura Gaussiana não-negativa é parabólica.*

Agora, podemos estabelecer outro dos resultados principais deste trabalho.

**Teorema 3.7.** *Seja  $\psi : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  uma hipersuperfície completa com curvatura Gaussiana não-negativa e curvatura média  $0 \leq H \leq 1$ . Se o ângulo normal  $\theta$  de  $\Sigma^2$  satisfaz  $\cos \theta \geq H$ , então  $\Sigma^2$  é uma horoesfera e a imagem da aplicação de Gauss é exatamente um plano de  $\mathcal{H}^3$ .*

*Demonstração.* Inicialmente, identifiquemos folhas de  $\mathbb{R} \times_{et} \mathbb{R}^n$  com suas correspondentes horoesferas via a isometria  $\Phi$ , definida em (3.1).

Fazendo  $n = 2$  e em (3.5),

$$\Delta h = (2 - |\nabla h|^2) + 2H \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle. \quad (3.9)$$

Agora, do item (iv) da Proposição 1.12,

$$\Delta e^{-h} = e^{-h} |\nabla h|^2 - e^{-h} \Delta h,$$

e substituindo (3.9) na igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta e^{-h} &= e^{-h} |\nabla h|^2 - e^{-h} \Delta h \\ &= e^{-h} |\nabla h|^2 - e^{-h} \left[ 2 - |\nabla h|^2 + 2H \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \right] \\ &= 2e^{-h} |\nabla h|^2 - 2e^{-h} - 2e^{-h} H \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \\ &= 2e^{-h} \left( |\nabla h|^2 - 1 - H \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Por outro lado, de (2.72) obtemos

$$\begin{aligned}
 |\nabla h|^2 &= \langle \nabla h, \nabla h \rangle = \left\langle \frac{\partial^\top}{\partial t}, \frac{\partial^\top}{\partial t} \right\rangle \\
 &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} - \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle N, \frac{\partial}{\partial t} - \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle N \right\rangle \\
 &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle - \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, N \right\rangle \\
 &\quad - \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle + \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle^2 \langle N, N \rangle \\
 &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle - \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle^2 = 1 - \cos^2 \theta, \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

já que  $\cos \theta = -\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \rangle$ . Logo, substituindo (3.11) em (3.10), obtemos

$$\begin{aligned}
 \Delta e^{-h} &= 2e^{-h} \left( |\nabla h|^2 - 1 - H \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \right) \\
 &= 2e^{-h} (1 - \cos^2 \theta - 1 + H \cos \theta) \\
 &= 2e^{-h} (H \cos \theta - \cos^2 \theta) \\
 &= 2e^{-h} \cos \theta (H - \cos \theta).
 \end{aligned}$$

Sabemos que a  $e^{-h}$  e  $\cos \theta$  são funções positivas. Além disso, por hipótese  $\cos \theta \geq H$ , implicando que

$$\Delta e^{-h} \leq 0.$$

Assim, a função  $-e^{-h}$  é subharmônica e negativa em  $\Sigma^2$ . Logo, da Proposição 3.6 obtemos que  $h$  é constante em  $\Sigma^2$ . Segue que  $\Sigma^2$  é uma horoesfera de  $\mathbb{H}^3$  e a aplicação imagem de Gauss Lorentz  $N(\Sigma^n)$  é exatamente um plano de  $\mathcal{H}^3$ .  $\square$

# Bibliografía

- [1] J.A. Alledo, *Hipersuperficies Espaciales Completas de Curvatura Media Constante en el Espacio de De Sitter*, Tesina de Licenciatura, Universidad De Murcia (1998).
- [2] L.J. Alías, A. Romero, M. Sánchez, *Uniqueness of complete spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in Generalized Robertson-Walker spacetimes*, Gen. Relat. Grav., **27** (1995), 71-84.
- [3] L.J. Alías, M. Dajczer, *Uniqueness of constant mean curvature surfaces properly immersed in a slab*, Comment. Math. Helv., **81** (2006), 653-663.
- [4] K. Bezerra, *Um Teorema de Rigidez para Hipersuperfícies Completas CMC em Variedades de Lorentz*. Dissertação de Mestrado, UFC (2009).
- [5] F.E.C. Camargo, A. Caminha, H.F. de Lima, *Bernstein-type Theorems in Semi-Riemannian warped products*. Proc. Amer. Math. Soc., **139** (2011), 1841-1850.
- [6] A. Caminha, H.F. de Lima, *Complete vertical graphs with constant mean curvature in semi-Riemannian warped products*. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, **16** (2009), 91-105.
- [7] H.F. de Lima, *Rigidity theorems in the hyperbolic space*. Bulletin of the Korean Mathematical Society, **50** (2013), 97-103.
- [8] M.P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, IMPA, Rio de Janeiro, (2008).
- [9] A. Hüber, *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv. **32** (1957), 13-72.

- 
- [10] R. López, S. Montiel, *Existence of constant mean curvature graphs in hyperbolic space*, Calc. Var. Partial Differential Equations **8** (1999), 177-190.
- [11] S. Montiel, *Complete non-compact spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in de Sitter spaces*, J. Math. Soc. Japan **55** (2003), 915–938.
- [12] S. Montiel, *Unicity of constant mean curvature hypersurfaces in some Riemannian manifolds*. Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), 711-748.
- [13] S. Montiel, *Uniqueness of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in foliated spacetimes*, Math. Ann. **314** (1999), 529–553.
- [14] H. Omori, *H. Isometric immersions of Riemannian manifolds*. J. Math. Soc. Japan, **19** (1967), 205-214.
- [15] B. O’Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, (1983).
- [16] S.T. Yau, *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*. Comm. Pure Appl. Math., **28** (1975), 201-228.
- [17] S.T. Yau, *Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry*. Indiana Univ. Math. J., **25** (1976), 659-670.