Resumo

Neste trabalho, estudamos a existência de infinitas soluções para o problema

$$\Delta u + |u|^{\frac{4}{n-2}} u = 0, \quad u \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad n \geq 3,$$

as quais possuem energia finita e que mudam de sinal. Para tanto, usaremos argumentos desenvolvidos por Ding [9]. Neste caso, resolveremos um problema, na esfera S^n, que é equivalente ao problema em questão.

Abstract

In this work, we study the existence of infinite solutions to the problem

$$\Delta u + |u|^{\frac{4}{n-2}} u = 0, \quad u \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad n \geq 3,$$

which has finite energy and change sign. To do this, we use arguments developed by Ding [9]. In this case, we solve a problem, on sphere S^n, that is equivalent to the problem in question.

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Teconologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sobre a Existência de Infinitas Soluções com Energia Finita de Uma Equação Elíptica em S^n

por

Jesualdo Gomes das Chagas

sob orientação do

Prof. Dr. Marco Aurelio Soares Souto

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB

Setembro/2005

Sobre a Existência de Infinitas Soluções com Energia Finita de Uma Equação Elíptica em S^n

por

Jesualdo Gomes das Chagas

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Prof. Dr. Marco Aurelio Soares Souto

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Setembro/2005

Agradecimentos

- A Deus e à Sempre Virgem Maria, "Mãe do meu Senhor"(S. Lucas I, 43);

- Aos meus pais, Moisés e Selma;

- À minha esposa Adriana e ao nosso bebê, que nascerá em breve, se Deus assim o permitir;

- A todos os outros que também fazem parte de minha família;

- Ao professor Marco Aurelio que me orientou no desenvolvimento deste trabalho. Sempre paciente e compreensivo;

- Aos professores Claudianor O. Alves e José Fábio Montenegro pela disponibilidade nesta tarefa de me avaliar, fazendo parte da banca examinadora;

- A todos que fazem parte do departamento de Matemática e Estatística da UFCG;

- Aos meus colegas da graduação e da pós-graduação. Em especial a Ana Cristina, Tatiana, Iraponil, Juliana, Jesus, Moisés e Orlando.

- Aos meus amigos, não-necessariamente do Departamento de Matemática;

- Afinal, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Dedicatória

À Adriana e ao nosso bebê.

“Extra Ecclesia nullus omnino salvatur”

(IV Concílio de Latrão, Denzinger 430)

Conteúdo

Introdução 6

1 Espaços de Sobolev Sobre Variedades Compactas **9**

1.1 Preliminares 9

1.2 A Integral em Vizinhanças Coordenadas 10

1.3 A Mudança de Parametrização 12

1.4 A Integral sobre Variedades Riemaniannas(sem bordo e compactas) . . 14

1.5 A Teoria da Medida e Integração 15

1.6 Os Espaços $L^r(M)$ 15

1.7 Os Espaços de Sobolev $W^{1,r}(M)$ 17

1.7.1 O Espaço de Sobolev $W^{1,r}(\Omega)$ 17

1.7.2 O Espaço de Sobolev $W^{1,r}(M)$ 21

1.8 As Imersões de Sobolev sobre a Variedade M 22

1.9 Regularização de soluções de EDP's Elípticas sobre M 23

2 Problema de Yamabe (Caso Subcrítico) **27**

3 Existência de Infinitas Soluções com Energia Finita **32**

3.1 Observações Preliminares 32

3.2 Lemas Iniciais 34

3.3 Uso do Princípio de Criticalidade Simétrica 40

3.4 Lemas Finais 41

A Variedades Riemannianas **46**

A.1 Variedades Diferenciáveis 46

A.2 Espaço Tangente 47

A.3 Campo de Vetores 49

A.4 Métricas Riemannianas 50

A.5 Conexões Riemannianas 51

A.6 Curvatura 53

A.7 A Esfera S^n 55

A.7.1 Símbolos de Christoffel em S^n 55

A.7.2 Curvatura Escalar em S^n 56

A.8 Isometrias 57

B Gradiente, Divergente e Laplaciano **61**

B.1 Gradiente 61

B.2 Divergente 63

B.3 Laplaciano 65

C Métricas Conformes **67**

D Grupos Topológicos **74**

Bibliografia **78**

Introdução

Em 1960, foi formulado, por H. Yamabe, a seguinte conjectura: "Toda variedade Riemanniana compacta (M, g), de dimensão $n \geq 3$, admite uma métrica conforme à g cuja curvatura escalar é constante". Tal problema, passou a ser chamado, desde então, de Problema de Yamabe.

Inicialmente, o próprio Yamabe [20] apresentou uma "prova" deste fato. Mas, em 1968, N.S. Trudinger [19] reexaminou o trabalho de Yamabe e descobriu um erro.

O problema foi completamente resolvido apenas em 1984. E, para tanto, contribuiram N. S. Trudinger [19], T. Aubin [3] e R. Schoen [18].

Em virtude da relação

$$-\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\tilde{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}}, \tag{1}$$

entre curvaturas escalares, S_g e $S_{\tilde{g}}$, de métricas conformes (vide Apêndice C), onde $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ com $u > 0$ e $u \in C^{\infty}(M)$, nota-se que: resolver o problema de Yamabe é equivalente a demonstrarmos a existência de solução positiva para a equação

$$-\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}}, \tag{2}$$

para algum número real λ.

Observe que, comparando-se (2) com

$$\Delta u + |u|^{\frac{4}{n-2}} u = 0, \tag{3}$$

vê-se que ao tentarmos encontrar uma solução positiva para (3), estamos, na verdade, procurando demonstrar que a métrica usual de $\mathbb{R}^n$, cuja curvatura escalar é nula, é conforme a uma métrica $\tilde{g}$ de curvatura escalar constante e igual a $S_{\tilde{g}} = \dfrac{4(n-1)}{n-2}$.

No artigo de Gidas, Ni & Nirenberg [11], prova-se que qualquer solução positiva da equação elíptica

$$\Delta u + |u|^{\frac{4}{n-2}} u = 0, \quad u \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad n \geq 3, \tag{4}$$

que possua energia finita, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx < \infty, \tag{5}$$

é necessariamente da forma

$$u(x) = \left(\frac{\sqrt{n(n-2)a}}{a^2 + |x-\xi|^2} \right)^{(n-2)/2}, \tag{6}$$

onde $a > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Nosso principal objetivo, neste trabalho, é o de apresentar um resultado devido a Ding [9], onde se estabelece que (4)-(5) possui uma infinidade de soluções que mudam de sinal.

Este trabalho é organizado da seguinte maneira:

No **Capítulo 1**, definimos a integral sobre variedades Riemannianas compactas e demonstramos alguns resultados de integração envolvendo divergente de campos e gradientes e laplacianos de funções. Definimos, também, os espaços de Lebesgue $L^r(M)$ e de Sobolev $W^{1,r}(M)$ em variedades compactas e provamos alguns resultados de imersões de Sobolev e de regularização de soluções de EDP's elípticas sobre M.

No **Capítulo 2**, enunciamos o problema de Yamabe no caso subcrítico, e demonstramos a existência de solução positiva para este caso.

No **Capítulo 3**, fazemos, inicialmente, algumas observações preliminares sobre o problema em questão, afim de concluirmos que: para demonstrarmos o que é proposto, basta provarmos o seguinte teorema:

Teorema 3.1 *Existe uma sequência de soluções u_k, com energia finita, do problema*

$$\Delta u + |u|^{\frac{4}{n-2}} u = 0, \quad u \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad n \geq 3, \tag{7}$$

tal que $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_k|^2 dx \to \infty$ quando $k \to \infty$.

Fixamos nossa atenção, neste capítulo, à uma série de lemas que, consequentemente, visam demonstrar tal teorema. Em resumo, o que fazemos é o seguinte: mostramos que o problema em questão é, de certa forma, equivalente ao problema

$$\Delta v - \frac{1}{4} n(n-2) v + |v|^{q-2} v = 0, \quad v \in C^2(S^n), \quad q = 2^* = \frac{2n}{n-2}\ . \tag{8}$$

Depois, usamos o Princípio de Criticalidade Simétrica (vide Apêndice D) e um resultado, da Teoria de Pontos Críticos, devido à Ambrosetti & Rabinowitz [2], para demonstrarmos o Lema 3.2.7 (a seguir) e, assim, concluirmos a validade do Teorema 3.1.

Lema 3.2.7. Existe uma sequência $\{v_k\}$ de soluções de

$$\Delta v - \frac{1}{4}n(n-2)v + |v|^{q-2}v = 0, \quad v \in C^2(S^n), \quad q = 2^* = \frac{2n}{n-2}\ , \tag{9}$$

tal que $\displaystyle\int_{S^n} |v_k|^q dV \to \infty$ quando $k \to \infty$, onde Δ denota o laplaciano com relação à métrica usual de S^n.

No **Apêndice A**, iniciamos fazendo uma breve revisão de alguns conceitos sobre variedades Riemannianas. Esta exposição inicial é feita de modo a combinar com a exposição em [7]. Logo após, calculamos os símbolos de Christoffel da esfera S^n, parametrizada pela projeção estereográfica, e a curvatura da esfera S^n. Por fim, colocamos uma seção sobre isometrias entre variedades, na qual apresentamos alguns resultados que são utilizados em outras partes deste trabalho.

No **Apêndice B**, definimos o gradiente e o laplaciano de uma função $f \in C^\infty(M)$, e o divergente de um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, onde M é uma variedade Riemanniana, além de demonstrarmos algumas expressões locais para o gradiente, divergente e laplaciano.

No **Apêndice C**, temos, como fato principal, a demonstração da relação (1) entre as curvaturas escalares, S_g e $S_{\tilde{g}}$ com relação às métricas conformes g e $\tilde{g}$, respectivamente, onde $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$.

No **Apêndice D**, fazemos algumas considerações sobre grupos topológicos. Aqui, demonstramos que $O(n+1)$ atua em $H^1(S^n)$ e apresentamos um resultado importante, o qual será denominado por *Princípio de Criticalidade Simétrica*, que será utilizado no Capítulo 3.

Capítulo 1

Espaços de Sobolev Sobre Variedades Compactas

1.1 Preliminares

Neste capítulo consideraremos (M, g) uma variedade Riemanniana orientável de dimensão n. Indicaremos, neste capítulo, uma parametrização genérica de uma vizinhança parametrizada Ω por $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$, $\Omega = x(U)$. A variável no aberto U é $z = (x_1, \ldots, x_n) \in U$.

Da seção 1.3 em diante estaremos considerando que M é uma variedade riemanniana compacta, orientável e sem bordo. Isto quer dizer que M pode ser coberto por um número finito de vizinhanças parametrizadas da forma $x_\alpha : U_\alpha \subset I\!R^n \to M$, $\alpha = 1, 2, \ldots, N$. Denotemos $\Omega_\alpha = x_\alpha(U_\alpha)$.

Para $f : U \subset I\!R^n \to I\!R$, vamos indicar por $D_j f(z)$ a derivada parcial de f com relação à coordenada x_j de z. Isto para distingüir do campo tangente $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ definido em Ω por

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(p)(u) = \frac{\partial u}{\partial x_j}(p) = D_j(u \circ x)(z), \quad u \in C^\infty(M),$$

onde $x(z) = p$.

Denotaremos por G o determinante da matriz $(g_{ij})_{n\times n}$ dos coeficientes da métrica g, sendo $(g^{ij})_{n\times n}$ sua inversa.

Devido à positividade da métrica, obtemos que existem $0 < \lambda \leq \Lambda$ tais que

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(p)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \ \forall p \in \Omega, \ \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in I\!R^n, \tag{1.1}$$

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \ \forall p \in \Omega, \ \xi \in I\!R^n, \tag{1.2}$$

e

$$\lambda^2 \leq G(p) \leq \Lambda^2, \ \forall p \in \Omega. \tag{1.3}$$

1.2 A Integral em Vizinhanças Coordenadas

A integral de uma função u contínua em M, de suporte compacto contido numa vizinhança parametrizada $\Omega = x(U)$ é definida por

$$\int_M u dV = \int_U (u \circ x)(z)\sqrt{G \circ x(z)} dz. \tag{1.4}$$

Claro que nestas condições a função $u \circ x$ é contínua e possui suporte compacto no aberto U do $I\!R^n$ e, portanto, a definição é consistente (demonstraremos mais adiante que tal definição não depende da parametrização contendo o suporte de u).

Vejamos alguns resultados sobre integrais de funções contínuas u com suporte compacto numa vizinhança parametrizada Ω. Indicaremos esta situação por

$$supp\, v \subset\subset \Omega.$$

Lema 1.2.1 *Sejam $u, v \in C^\infty(M)$, tais que $supp\, v \subset\subset \Omega$. Então:*

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dV = -\int_M v\Delta u dV.$$

Prova. Utilizando a expressão (B.10) e integração por partes no $I\!R^n$, temos:

$$\begin{aligned}
\int_M v\Delta u dV &= \int_U \frac{v \circ x}{\sqrt{G \circ x}} \sum_{i,j=1}^{n} D_i \left[(g^{ij} \circ x)\sqrt{G \circ x} D_j(u \circ x) \right] \sqrt{G \circ x}\ dz \\
&= \int_U (v \circ x) \sum_{i,j=1}^{n} D_i \left[(g^{ij} \circ x)\sqrt{G \circ x} D_j(u \circ x) \right] dz \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n} \int_U D_i(v \circ x) \left[(g^{ij} \circ x) D_j(u \circ x) \right] \sqrt{G \circ x}\ dz \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n} \int_M \frac{\partial v}{\partial x_i} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} dV \\
&= -\int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dV. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

A respeito do divergente de um campo temos:

Lema 1.2.2 *Seja $Y \in \mathfrak{X}(M)$, tal que $supp\, Y \subset\subset \Omega$. Então:*

$$\int_M div\, Y dV = 0.$$

Prova. Primeiramente observe que sendo o campo Y, em Ω, dado por:

$$Y(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

então as funções $a_i \circ x$ possuem suporte compacto dentro de U. Defina o campo $F : U \to I\!R^n$ por

$$F(z) = (\sqrt{G \circ x(z)}\ (a_1 \circ x)(z), \ldots, \sqrt{G \circ x(z)}\ (a_n \circ x)(z)),$$

o qual tem por divergente

$$div\, F(z) = \sum_{i=1}^{n} D_i \left[\sqrt{G \circ x}\ (a_i \circ x) \right].$$

Agora basta usar o Teorema do Divergente em $U \subset I\!R^n$, e a expressão (B.7) do divergente do campo Y em Ω, para obter

$$\begin{aligned} \int_M div\, Y dV &= \int_U \frac{1}{\sqrt{G \circ x}} \sum_{i=1}^{n} D_i \left[\sqrt{G \circ x}\ (a_i \circ x) \right] \sqrt{G \circ x}\ dz \\ &= \int_U \sum_{i=1}^{n} D_i \left[\sqrt{G \circ x}\ (a_i \circ x) \right] dz = \int_U div\ F(z) dz = 0. \end{aligned}$$

■

Observação. *Note que o Lema 1.2.1 segue como corolário do Lema 1.2.2 se considerarmos o campo $Y = v\nabla u$.*

Corolário 1.2.3 *Suponha que $u \in C^\infty(M)$ é tal que $supp\, u \subset\subset \Omega$. Então:*

$$\int_M \Delta u dV = 0.$$

Prova. Aplique o Lema 1.2.2 para $Y = \nabla u$. ■

Corolário 1.2.4 *Suponha $u, v \in C^\infty(M)$ com $supp\, v \subset\subset \Omega$. Então, para todo $j = 1, 2, 3, \ldots, n$:*

$$\int_M \frac{u}{\sqrt{G}} \frac{\partial v}{\partial x_j} dV = -\int_M \frac{v}{\sqrt{G}} \frac{\partial u}{\partial x_j} dV.$$

Prova. Defina o campo Y por

$$\begin{cases} Y(p) = 0 \text{ se } p \notin \Omega \\ Y(p) = \dfrac{u(p)v(p)}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial}{\partial x_j}, \text{ se } p \in \Omega. \end{cases}$$

Usando a expressão (B.7) do divergente de Y, temos:

$$div\, Y(p) = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{uv}{\sqrt{G}} \sqrt{G} \right] = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_j}(uv) = \frac{1}{\sqrt{G}} v \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{1}{\sqrt{G}} u \frac{\partial v}{\partial x_j}.$$

Usando o Lema 1.2.2, concluímos a demonstração. ■

1.3 A Mudança de Parametrização

Suponha que $x_\alpha : U_\alpha \subset I\!R^n \to M$ e $x_\beta : U_\beta \subset I\!R^n \to M$ são parametrizações da mesma vizinhança $\Omega = x_\alpha(U_\alpha) = x_\beta(U_\beta)$. A variável no aberto U_α é $z = (x_1, \ldots, x_n) \in U_\alpha$ e $q = (y_1, \ldots, y_n) \in U_\beta$ é a variável em U_β. A mudança de variáveis $F : U_\alpha \to U_\beta$, $q = F(z) = x_\beta^{-1} \circ x_\alpha(z) = (y_1(z), \ldots, y_n(z))$, tem derivada $C = F'(z) = (\dfrac{\partial y_k}{\partial x_j})_{n \times n}$, $y_k = y_k(x_1, \ldots, x_n)$.

A notação $D_{x_j} f(z)$ vai indicar a derivada parcial de f com relação à coordenada x_j de z, e $D_{y_k} f(q)$ indicará a derivada parcial de f com relação à coordenada y_k de q. Considerando-se $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e derivando-se $u \circ x_\alpha(z) = (u \circ x_\beta) \circ F(z)$ com relação à coordenada x_j, obtemos para $p = x_\alpha(z) = x_\beta(q)$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(p)(u) = \frac{\partial u}{\partial x_j}(p) = D_{x_j}(u \circ x_\alpha)(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(z) D_{y_k}(u \circ x_\beta)(q),$$

que combinando com

$$\frac{\partial}{\partial y_k}(p)(u) = \frac{\partial u}{\partial y_k}(p) = D_{y_k}(u \circ x_\beta)(z)$$

nos leva às relações

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(z) \frac{\partial u}{\partial y_k}(p) \tag{1.5}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(z) \frac{\partial}{\partial y_k}(p), \quad \forall p \in \Omega. \tag{1.6}$$

Analogamente,

$$\frac{\partial u}{\partial y_\ell}(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_\ell}(q) \frac{\partial u}{\partial x_i}(p) \tag{1.7}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y_\ell}(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_\ell}(q) \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \tag{1.8}$$

onde $(F^{-1})'(q) = (\dfrac{\partial x_i}{\partial y_\ell})_{n\times n}$ que é a matriz inversa de $C = F'(z)$.

Indicaremos por B a matriz $(g_{ij})_{n\times n}$,

$$g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle,\ i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

$B^{-1} = (g^{ij})_{n\times n}$ e por L a matriz $(s_{k\ell})_{n\times n}$,

$$s_{k\ell}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_k}, \frac{\partial}{\partial y_\ell} \right\rangle,\ k, \ell = 1, 2, \ldots, n,$$

$L^{-1} = (s^{k\ell})_{n\times n}$. As matrizes B e L são simétricas, invertíveis e, utilizando a expressão (1.6), se relacionam por:

$$g_{ij} = \left\langle \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial y_\ell}{\partial x_i}(z) \frac{\partial}{\partial y_\ell}(p), \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(z) \frac{\partial}{\partial y_k}(p) \right\rangle,$$

de onde vem

$$g_{ij} = \sum_{\ell,k=1}^{n} \frac{\partial y_\ell}{\partial x_i}(z) s_{\ell k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(z),$$

que na notação matricial fica $B = C^{\mathrm{T}} L C$ (aqui C^{T} indica a matriz transposta de C). Como $B^{-1} = C^{-1} L^{-1} (C^{-1})^{\mathrm{T}}$, então

$$g^{ij} = \sum_{\ell,k=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_\ell}(q) s^{\ell k} \frac{\partial x_j}{\partial y_k}(q). \tag{1.9}$$

Lema 1.3.1 *A definição da integral* $\displaystyle\int_\Omega u dV$*, independe da parametrização escolhida, ou seja,*

$$\int_{U_\alpha} (u \circ x_\alpha)(z) \sqrt{G \circ x_\alpha(z)}\ dz = \int_{U_\beta} (u \circ x_\beta)(q) \sqrt{S \circ x_\beta(q)}\ dq,$$

onde $G = \det(g_{ij})$ *e* $S = \det(s_{\ell k})$.

Prova. Como $B = C^{\mathrm{T}} L C$, então $G = S(\det C)^2 = S(\det F'(z))^2$. Basta usar o Teorema de Mudança de Variáveis na Integral de Riemann

$$\int_{U_\beta} f(q) dq = \int_{U_\alpha} (f \circ F)(z)) |\det F'(z)| dz,$$

no difeomorfismo $F : U_\alpha \to U_\beta$, $F = x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$, para $f : U_\beta \to I\!R$ dada por $f(q) = (u \circ x_\beta)(q) \sqrt{S \circ x_\beta(q)}$. ■

1.4 A Integral sobre Variedades Riemaniannas(sem bordo e compactas)

Considere uma partição da unidade $\{\rho_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ subordinada à cobertura $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ de M (vide Definição A.1.3). Para uma função u contínua em M a integral sobre a variedade é definida da seguinte maneira: para cada α, a função $\rho_\alpha u$ possui suporte compacto dentro da vizinhança parametrizada Ω_α. Daí define-se a integral por:

$$\int_M udV = \sum_{\alpha=1}^{N} \int_M \rho_\alpha udV.$$

O Lema 1.3.1 mostra que esta definição independe da escolha da cobertura da variedade.

Com esta definição podemos generalizar os Lemas 1.2.1, 1.2.2 e o Corolário 1.2.3, para uma função qualquer de $C^\infty(M)$, desde que M seja uma variedade compacta, como veremos a seguir.

Lema 1.4.1 *Sejam $u, v \in C^\infty(M)$, onde M é uma variedade riemanniana compacta e orientável. Então,*

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dV = -\int_M v\Delta udV.$$

Prova. Usando o Lema 1.2.1 nas funções $\rho_\alpha v$, temos

$$\begin{aligned} \int_M v\Delta udV &= \sum_{\alpha=1}^{N} \int_M \rho_\alpha v\Delta udV = -\sum_{\alpha=1}^{N} \int_M \langle \nabla u, \nabla(\rho_\alpha v) \rangle \, dV \\ &= -\int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dV. \end{aligned}$$ ■

Lema 1.4.2 *Se $Y \in \mathfrak{X}(M)$, então*

$$\int_M div\, Y dV = 0.$$

Prova. Usando o Lema 1.2.2 nos campos vetoriais $\rho_\alpha Y$, temos

$$\int_M div\, Y dV = \sum_{\alpha=1}^{n} \int_M div\,(\rho_\alpha Y) dV = 0.$$ ■

Corolário 1.4.3 *Se $u \in C^\infty(M)$, então:*

$$\int_M \Delta udV = 0.$$

Prova. Aplique o Lema 1.4.2 para $Y = \nabla u$. ■

1.5 A Teoria da Medida e Integração

Considere $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel, definida como sendo a menor σ-álgebra que contém a topologia $\mathfrak{T}$ dos abertos de M. Nesta σ-álgebra de Borel $\mathfrak{B}$ temos as seguintes propriedades:

- Um conjunto E pertence a $\mathfrak{B}$ se, e somente se, $x^{-1}(E \cap \Omega)$ é Lebesgue-mensurável em U, para toda parametrização x;

- Uma função simples
$$\psi = \sum_{k=1}^{h} \alpha_k \chi_{E_k}$$
é $\mathfrak{B}$-mensurável se, e somente se, $\psi \circ x$ é função simples Lebesgue-mensurável em U, para toda parametrização x;

- Uma função $u : M \to I\!R$ é $\mathfrak{B}$-mensurável se, e somente se, $u \circ x$ é Lebesgue-mensurável em U, para toda parametrização x;

- Um conjunto mensurável $E \in \mathfrak{B}$ tem medida nula $\mu(E) = 0$ se, e somente se, a medida de Lebesgue de $x^{-1}(E \cap \Omega)$ é nula, para toda parametrização x;

A medida de Lebesgue em M é a medida gerada a partir da aplicação enumerável aditiva $\mu : \mathfrak{T} \to I\!R_+$, dada por:

$$\mu(E) = \int_E dV := \sum_\alpha \int_M \chi_E \rho_\alpha, \quad E \in \mathfrak{T}.$$

onde χ_E é a função característica do conjunto E. Sobre geração de medidas, veja [16] - Capítulo 9.

1.6 Os Espaços $L^r(M)$

Definição 1.6.1 *Seja $r \geq 1$. O Espaço $L^r(M)$ é definido como*

$$L^r(M) = \{u : M \to I\!R : u \text{ é mensurável e } \int_M |u|^r dV < \infty\},$$

e está munido pela norma

$$||u||_{L^r(M)} = \left(\int_M |u|^r dV \right)^{\frac{1}{r}}.$$

O Espaço $L^r(M)$ é de Banach. Dizemos que $u : M \to I\!R$ é integrável se $u \in L^1(M)$.

O lema a seguir facilitará o cálculo de integrais sobre M.

Lema 1.6.2 *Existe uma família finita de parametrizações* $\{x_\alpha : U_\alpha \to M\}_{\alpha=1}^N$, $\Omega_\alpha = x_\alpha(U_\alpha)$, *satisfazendo:*

(i) $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta = \emptyset$, $\alpha \neq \beta$;

(ii) $M = \bigcup_{\alpha=1}^N \overline{\Omega_\alpha}$;

(iii) *Para todo* $u \in L^1(M)$, *tem-se*

$$\int_M u dV = \sum_{\alpha=1}^N \int_{\Omega_\alpha} u dV.$$

Prova. Seja $\{(V_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha=1}^N$ um atlas de M. Considere, então,

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= x_1(V_1)\\
\Omega_2 &= \left(M \setminus \overline{\Omega_1}\right) \cap x_2(V_2)\\
\Omega_3 &= \left[M \setminus \left(\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}\right)\right] \cap x_3(V_3)\\
&\vdots\\
\Omega_N &= \left[M \setminus \left(\bigcup_{\alpha=1}^{N-1} \overline{\Omega_\alpha}\right)\right] \cap x_N(V_N).
\end{aligned}$$

Utilizando-se a família $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_N\}$, pode-se concluir o resultado desejado. ■

Agora, sem perda de generalidade, vamos supor que (1.1), (1.2) e (1.3) se verificam uniformemente em $\alpha = 1, 2, \ldots, N$ em todas as parametrizações x_α.

Mais uma vez, vamos indicar qualquer parametrização $x_\alpha : U_\alpha \to M$, por $x : U \to M$, $\Omega = x(U)$.

Para cada $u \in L^r(M)$, observe que $u \circ x \in L^r(U)$. Com efeito, usando (1.3) temos:

$$\lambda \int_U |u \circ x|^r \, dz \leq \lambda \int_U |u \circ x|^r \sqrt{G \circ x} \, dz = \int_\Omega |u|^r dV \leq ||u||_{L^r(M)}^r, \tag{1.10}$$

ou seja,

$$\lambda^{\frac{1}{r}} ||u \circ x||_{L^r(U)} \leq ||u||_{L^r(M)},$$

para todo $u \in L^r(M)$. Isto diz que a aplicação $\pi : L^r(M) \to L^r(U)$, dada por $\pi(u) = u \circ x$ é linear e contínua. Por outro lado, usando (1.3),

$$\int_\Omega |u|^r dV = \int_U |u \circ x(z)|^r \sqrt{G \circ x} \, dz \leq \Lambda \int_U |u \circ x(z)|^r dz = \Lambda ||u \circ x||_{L^r(U)}^r. \tag{1.11}$$

Mais ainda, combinando (1.10) e (1.11) temos

$$\lambda ||u \circ x||_{L^r(U)}^r \leq \int_\Omega |u|^r dV \leq \Lambda ||u \circ x||_{L^r(U)}^r \tag{1.12}$$

Lema 1.6.3 *Temos que $u \in L^r(M)$ se, e somente se, $u \circ x_\alpha \in L^r(U_\alpha)$, para todo $\alpha = 1, 2, \ldots, N$. A norma*

$$||u||_r^* = \left(\sum_{\alpha=1}^{n} ||u \circ x||_{L^r(U_\alpha)}^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

é equivalente à norma usual de $L^r(M)$.

Prova. Basta simplesmente combinar o ítem **(iii)** do Lema 1.6.2 e a desigualdade (1.12) para obter:

$$\lambda^{\frac{1}{r}} ||u||_p^* \leq ||u||_{L^r(M)} \leq \Lambda^{\frac{1}{r}} ||u||_p^*,$$

para todo $u \in L^r(M)$. ■

1.7 Os Espaços de Sobolev $W^{1,r}(M)$

1.7.1 O Espaço de Sobolev $W^{1,r}(\Omega)$

Mais uma vez, fixe uma parametrização $x : U \to M$, $\Omega = x(U)$.

Definição 1.7.1 *Seja $u \in L^1(\Omega)$. Dizemos que uma função $f \in L^1(\Omega)$ é a derivada $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ fraca de u (no sentido das distribuições) em $\Omega = x(U)$, se*

$$\int_\Omega \frac{u}{\sqrt{G}} \frac{\partial v}{\partial x_k} dV = -\int_\Omega f \frac{v}{\sqrt{G}} dV,$$

para todo $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $supp\, v \subset\subset \Omega$ (tal definição independe da parametrização).

Observação 1.7.2 *O Corolário 1.2.4 nos mostra que a derivada fraca f da definição acima coincide com $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, no caso de $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Lema 1.7.3 *Seja $u \in L^1(\Omega)$. Então, u possui derivada $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ fraca em Ω se, e somente se, $u \circ x$ possui derivada fraca $D_k(u \circ x)$ em U. Mais ainda, se f é a sua derivada $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ fraca em Ω, então $f \circ x : U \to I\!R$ é a derivada fraca $D_k(u \circ x)$ da função $u \circ x$.*

Prova. Seja $\phi \in C_0^\infty(U)$. Considere $\psi \in C^\infty(\Omega)$ dada por $\psi = \phi \circ x^{-1}$. Certamente, temos que $supp\, \psi \subset\subset \Omega$ e $(\psi \circ x)(z) = \phi(z)$ e $D_k\phi(z) = D_k(\psi \circ x)(z) = \dfrac{\partial \psi}{\partial x_k}(x(z))$

para todo $z \in U$. Dessa forma, utilizando a definição de f, a demonstração é concluída a partir da identidade abaixo:

$$\begin{aligned}
\int_U (u \circ x) D_k \phi dz &= \int_U (u \circ x) \frac{D_k(\psi \circ x)}{\sqrt{G \circ x}} \sqrt{G \circ x}\; dz \\
&= \int_\Omega \frac{u}{\sqrt{G}} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} dV = - \int_\Omega \frac{f\psi}{\sqrt{G}} dV \\
&= - \int_U (f \circ x) \frac{(\psi \circ x)}{\sqrt{G \circ x}} \sqrt{G \circ x}\; dz = - \int_U (f \circ x) \phi dz. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Definição 1.7.4 *Seja* $u \in L^1(\Omega)$. *Suponha que* u *possui todas as derivadas* $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ *fracas em* $\Omega = x(U)$, *denotadas por* $f_k : V \to I\!R$, $k = 1, 2, \ldots, n$. *O gradiente fraco de* u *em* $\Omega = x(U)$ *é o campo*

$$grad\, u = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(p) f_i(p) \frac{\partial}{\partial x_j},\ p \in x(U). \tag{1.13}$$

O gradiente fraco foi definido em $\Omega = x(U)$ para que $grad\, v = \nabla v$, quando $v \in C^\infty(\Omega)$ (veja (B.2)).

Lema 1.7.5 *Suponha que* $u \in L^1(\Omega)$ *possui gradiente fraco em* Ω. *Então, para todo* $v \in C^\infty(\Omega)$, $supp\, v \subset\subset \Omega$, *temos*

$$\int_\Omega \langle grad\, u, \nabla v \rangle\, dV = - \int_\Omega u \Delta v dV.$$

Prova. Observe, primeiramente, que, do mesmo modo como em (B.4), podemos verificar que

$$\langle grad\, u, \nabla v \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} f_i \frac{\partial v}{\partial x_j}, \tag{1.14}$$

onde f_i é a derivada $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ fraca de u.

Utilizando (B.10), (1.14) e a definição dos f_k's, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u \Delta v dV &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{u}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[g^{ij} \sqrt{G} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right] dV \\
&= - \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{f_i g^{ij}}{\sqrt{G}} \sqrt{G} \frac{\partial v}{\partial x_j} dV \\
&= - \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega f_i g^{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} dV \\
&= - \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} f_i \frac{\partial v}{\partial x_j} \right] dV \\
&= - \int_\Omega \langle grad\, u, \nabla v \rangle\, dV. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

A partir de agora vamos indicar por $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ a função mensurável f_k dada na Definição 1.7.1. Neste caso, $D_k(u \circ x)(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x_k} \circ x(z)$ quase sempre em U e, além disso,

$$grad\, u = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(p) \frac{\partial u}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial x_j},\ p \in x(U). \tag{1.15}$$

e

$$\langle grad\, u, grad\ u \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}. \tag{1.16}$$

Seja Ω uma vizinhança parametrizada por $x : U \to \Omega$, com U aberto limitado e tal que são satisfeitos (1.1), (1.2) e (1.3).

Definição 1.7.6 *O espaço vetorial $W^{1,r}(\Omega) = \{u \in L^r(\Omega) : |grad\, u| \in L^r(\Omega)\}$ munido com a norma*

$$||u||_{W^{1,r}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^r dV + \int_\Omega |grad\, u|^r dV \right)^{\frac{1}{r}}.$$

é o Espaço de Sobolev $W^{1,r}$ sobre a vizinhança parametrizada Ω. Quando $r = 2$, $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ é um Espaço de Hilbert munido do produto interno

$$(u, v)_{H^M(\Omega)} = \int_\Omega uv dV + \int_\Omega \langle grad\, u, grad\, v \rangle\, dV.$$

Observe que a partir de (1.1) e (1.16), temos

$$\lambda^r \left(\sum_{i=1}^{n} |D_i(u \circ x)(z)|^2 \right)^{\frac{r}{2}} \leq\ |grad\, u|^r(p)\ \leq \Lambda^r \left(\sum_{i=1}^{n} |D_i(u \circ x)(z)|^2 \right)^{\frac{r}{2}},$$

para todo $z \in U$ e $p = x(z)$. Usando, ainda, a equação (1.3), segue que

$$\lambda^{r+1} \int_U \left[\sum_{i=1}^{n} |D_i(u \circ x)|^2 \right]^{\frac{r}{2}} dz \leq \int_\Omega |grad\, u|^r dV \leq \Lambda^{r+1} \int_U \left[\sum_{i=1}^{n} |D_i(u \circ x)|^2 \right]^{\frac{r}{2}} dz.$$

A última desigualdade e a desigualdade (1.12) demonstram o seguinte lema:

Lema 1.7.7 *a aplicação $\pi : W^{1,r}(\Omega) \to W^{1,r}(U)$, dada por $\pi(u) = u \circ x$ é um isomorfismo. As normas $||u||_{W^{1,r}(\Omega)}$ e $|u|_{\Omega,1,r} = ||u \circ x||_{W^{1,r}(U)}$ são equivalentes.*

O Lema a seguir é uma versão da desigualdade de Poincaré para variedades:

Lema 1.7.8 *Existe uma constante $C = C_{r,\Omega} > 0$ tal que*

$$\int_\Omega |v|^r dV \leq C \int_\Omega |grad\, v|^r dV$$

para todo $v \in W^{1,r}(\Omega)$, com $supp\ v \subset\subset \Omega$.

Prova. Esta prova é uma simples aplicação do Lema 1.7.7 e a desigualdade de Poincaré (corolário IX.19 em [12]). ■

Para finalizar esta subseção vamos mostrar que o gradiente fraco independe da parametrização escolhida. Para isto considere as parametrizações x_α e x_β dadas na seção 1.3 tais que $x_\alpha(U_\alpha) = \Omega = x_\beta(U_\beta)$. Suponha haja dois gradientes fracos para uma função $u \in L^1(\Omega)$, a saber:

$$grad_\alpha u = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(p)\frac{\partial u}{\partial x_i}(p)\frac{\partial}{\partial x_j},\ p \in \Omega. \tag{1.17}$$

$$grad_\beta u = \sum_{k,\ell=1}^{n} s^{k\ell}(p)\frac{\partial u}{\partial y_k}(p)\frac{\partial}{\partial y_\ell},\ p \in \Omega. \tag{1.18}$$

De acordo com a Proposição IX.6 em [12], as expressões (1.5) e (1.7) também são válidas para as derivadas fracas $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y_k}$. Substituindo (1.5), (1.6) e (1.9) em (1.17), temos

$$\begin{aligned}
grad_\alpha u &= \sum_{i,j=1}^{n}\left[\sum_{\ell,k=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial y_\ell}(q)s^{\ell k}\frac{\partial x_j}{\partial y_k}(q)\right]\frac{\partial u}{\partial x_i}(p)\frac{\partial}{\partial x_j},\\
&= \sum_{\ell,k=1}^{n} s^{\ell k}\left[\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial y_\ell}(q)\frac{\partial x_j}{\partial y_k}(q)\frac{\partial u}{\partial x_i}(p)\frac{\partial}{\partial x_j}\right],\\
&= \sum_{\ell,k=1}^{n} s^{\ell k}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}(p)\frac{\partial x_i}{\partial y_\ell}(q)\right]\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_j}{\partial y_k}(q)\frac{\partial}{\partial x_j}\right].
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$grad_\alpha u = \sum_{k,\ell=1}^{n} s^{k\ell}(p)\frac{\partial u}{\partial y_k}(p)\frac{\partial}{\partial y_\ell} = grad_\beta.$$

Lema 1.7.9 *O gradiente fraco não depende da parametrização escolhida, ou seja, se x_α e x_β são duas parametrizações tais que $x_\alpha(U_\alpha) = \Omega = x_\beta(U_\beta)$ então para uma função $u \in L^1(\Omega)$ onde está definida o gradiente fraco $grad_\alpha u$, também existe o gradiente fraco $grad_\beta u$ e deveremos ter*

$$grad_\alpha u = grad_\beta u.$$

Prova. Para concluir este resultado basta, depois do que já fizemos, mostrar que as derivadas fracas $\dfrac{\partial u}{\partial y_k}$ também existem, para todo $k = 1, 2, \ldots, n$. Isto decorre do Lema 1.7.3 e da Proposição IX.6 em [12]. ■

1.7.2 O Espaço de Sobolev $W^{1,r}(M)$

Definição 1.7.10 *Seja $u \in L^1(M)$. Suponha que, para qualquer vizinhança parametrizada $x_\alpha : U \to \Omega_\alpha$, o gradiente fraco $grad_\alpha u$ está definido. Então o campo vetorial definido por $grad\, u = grad_\alpha u$ em Ω_α é chamado de gradiente fraco de u em M.*

O Lema 1.7.8 garante que a definição é consistente e que uma função $u \in L^1(M)$ possui, no máximo, um gradiente fraco. Certamente que $grad\, v = \nabla v$, quando $v \in C^\infty(M)$.

O Lema 1.7.5 pode ser generalizado como a seguir.

Lema 1.7.11 *Suponha que $u \in L^1(M)$ possui gradiente fraco em Ω. Então, para todo $v \in C^\infty(M)$, temos*

$$\int_M \langle grad\, u, \nabla v \rangle \, dV = -\int_M u \Delta v dV.$$

Prova. Basta fazer uso da partição da unidade, e proceder como na prova do Lema 1.4.1. ■

A partir de agora vamos usar a mesma notação ∇u para denotar o $grad\, u$.

Definição 1.7.12 *O espaço vetorial $W^{1,r}(M) = \{u \in L^r(M) : |\nabla u| \in L^r(M)\}$, munido com a norma*

$$||u||_{W^{1,r}(M)} = \left(\int_M |u|^r dV + \int_M |\nabla u|^r dV \right)^{\frac{r}{2}},$$

é o Espaço de Sobolev $W^{1,r}$ sobre a variedade M. Quando $r = 2$, $H^1(M) = W^{1,2}(M)$ é um Espaço de Hilbert munido do produto interno

$$(u, v)_{H^M(M)} = \int_M uv dV + \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dV.$$

Considere uma família de parametrizações com propriedades do Lema 1.6.2. O resultado abaixo é uma conseqüência imediata do Lema 1.7.7.

Lema 1.7.13 *As normas $||u||_{W^{1,r}(M)}$ e*

$$||u||^*_{1,r} = \left[\sum_{\alpha=1}^{N} |u|^r_{\Omega_\alpha,1,r} \right]^{\frac{1}{r}} = \left[\sum_{\alpha=1}^{N} ||u \circ x_\alpha||^r_{W^{1,r}(U_\alpha)} \right]^{\frac{1}{r}}$$

são equivalentes em $W^{1,r}(M)$. Aqui, denotamos $|u|^r_{\Omega_\alpha,1,r} = ||u \circ x_\alpha||^r_{W^{1,r}(U_\alpha)}$.

Observação 1.7.14 *Se $u \in W^{1,r}(M)$, $u \in L^\infty(M)$ e $f : I\!R \to I\!R$ é de classe $C^1(I\!R)$, então $v = f \circ u \in W^{1,r}(M)$ e $\nabla v = f'(u) \nabla u$.*

Observação 1.7.15 *A observação anterior é válida se* $u \in W^{1,r}(M)$ *e* $|f'(t)| \leq C$ *para todo* t *real.*

Observação 1.7.16 *Se* $u \in W^{1,r}(M)$ *e* $\psi \in C^1(M)$ *então* $u\psi \in W^{1,r}(M)$ *e* $\nabla(u\psi) = \psi\nabla u + u\nabla\psi$.

Observação 1.7.17 *Se* $u, v \in W^{1,r}(M)$ *e* $u, v \in L^\infty(M)$ *então* $uv \in W^{1,r}(M)$ *e* $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$.

1.8 As Imersões de Sobolev sobre a Variedade M

Definição 1.8.1 *Dizemos que uma função* $u : M \to I\!R$ *é de classe* $C^{k,\tau}$*, e denotamos por* $u \in C^{k,\tau}(M)$*, se para cada vizinhança parametrizada* $x : U \subset I\!R^n \to M$*, temos* $u \circ x \in C^{k,\tau}(U)$.

Teorema 1.8.2 ***(Imersão de Sobolev para variedade compacta)*** *Seja* M *uma variedade compacta orientável de dimensão* n*. Valem as seguintes afirmações:*

(i) Se $\frac{1}{s} \geq \frac{1}{r} - \frac{1}{n}$*, então* $W^{1,r}(M)$ *está imerso continuamente em* $L^s(M)$*;*

(ii) ***(Rellich-Kondrachov)****A imersão acima é compacta se* $\frac{1}{s} > \frac{1}{r} - \frac{1}{n}$*;*

Prova. Começaremos com a parte *(i)*. Seja $\{x_\alpha : U_\alpha \to M\}_{\alpha=1}^N$ a parametrização dada pelo Lema 1.6.2. A imersão de Sobolev, dada no Teorema 7.26 em [8] (ou Teorema IX.16 em [12]), garante que para cada $\alpha = 1, 2, \ldots, N$ existe uma constante $C_\alpha > 0$ tal que

$$||v||_{L^s(U_\alpha)} \leq C_\alpha ||v||_{W^{1,r}(U_\alpha)}, \text{ para todo } v \in ||v||_{W^{1,r}(U_\alpha)}.$$

Faça $C = \max\{C_1, \ldots, C_N\}$. Usando a notação dos lemas 1.6.3 e 1.7.13 e as desigualdades acima temos:

$$(||u||_s^*)^s = \sum_{\alpha=1}^N ||u \circ x_\alpha||_{L^s(U_\alpha)}^s \leq \sum_{\alpha=1}^N C_\alpha^s ||u \circ x_\alpha||_{W^{1,r}(U_\alpha)}^s \leq C^s \sum_{\alpha=1}^N ||u \circ x_\alpha||_{W^{1,r}(U_\alpha)}^s,$$

e, conseqüentemente,

$$||u||_s^* \leq \tilde{C} ||u||_{1,r}^*$$

para algum $\tilde{C}$ que só depende de C e da equivalência das normas $|.|_r$ e $|.|_s$ do $I\!R^N$. Finalmente, utilizando as equivalências das normas $||u||_s^*$ com $||u||_{L^s(M)}$ e $||u||_{1,r}^*$ com $||u||_{W^{1,r}(M)}$, o lema fica demonstrado. ∎

Observação 1.8.3 *Da imersão do lema anterior existe uma menor constante* S_M *tal que:*

$$S_M \left(\int_M |u|^{2^*} dV \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \int_M \left(|\nabla u|^2 + u^2 \right) dV \tag{1.19}$$

para todo $u \in H^1(M)$*. Aqui* $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$.

1.9 Regularização de soluções de EDP's Elípticas sobre M

Voltemos à expressão (1.13) do gradiente fraco ∇u em uma vizinhança Ω parametrizada por $x : U \to \Omega$. Neste caso, $D_k(u \circ x)(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x_k}(x(z))$ quase sempre em U e, além disso,

$$\nabla u = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(p)\frac{\partial u}{\partial x_i}(p)\frac{\partial}{\partial x_j},\ p \in x(U).$$

Usando a Proposição IX.5 em [12] e a expressão acima, temos a seguinte observação.

Observação 1.9.1 *Se $u \in W^{1,r}(M) \cap L^{\infty}(M)$, então, para cada $s > 1$, temos $|u|^s \in W^{1,r}(M)$, $\dfrac{\partial}{\partial x_k}(|u|^s) = s|u|^{s-2}u\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ e, conseqüentemente, $\nabla(|u|^s) = s|u|^{s-2}u\nabla u$.*

Agora, adaptaremos um resultado contido em Brezis & Kato [13]. Neste caso, é necessário o conceito de *função de Carathéodory* . Para tanto, consulte [10].

Proposição 1.9.2 *Sejam $Q \in L^{\frac{n}{2}}(M)$ uma função não-negativa e $f : M \times I\!R \to I\!R$ uma função de Carathéodory. Se $v \in H^1(M)$ satisfaz em M, no sentido das distribuições, à equação*

$$-\Delta v = f(p, v), \tag{1.20}$$

e f verifica, para toda solução fraca u de (1.20),

$$|f(p, u)| \leq (Q(p) + C_0)|u|, \tag{1.21}$$

onde C_0 é uma constante, então $v \in L^r(M)$ para todo $r \in [1, +\infty)$. Mais ainda, existe uma constante positiva $C_r = C(r, C_0, Q)$ tal que

$$||v||_{L^{2^*(r+1)}(M)} \leq C_r||v||_{L^{2(r+1)}(M)}, \tag{1.22}$$

Para a demonstração da Proposição 1.9.2, precisaremos do lema a seguir:

Lema 1.9.3 *Seja $Q \in L^{\frac{n}{2}}(M)$ uma função não-negativa. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma constante $c_\varepsilon = c(\varepsilon, Q) > 0$ tal que*

$$\int_M Q(p)u^2 dV \leq \varepsilon \int_M |\nabla u|^2 dV + c_\varepsilon \int_M u^2 dV,\ \forall u \in H^1(M). \tag{1.23}$$

Prova. Primeiramente, observe que a função Qu^2 é integrável, pois, se $u \in H^1(M)$, temos, pelas imersões de Sobolev, que $u \in L^{\frac{2n}{n-2}}(M)$, de onde segue que Q e u^2 pertencem à espaços de Lebesgue de expoentes conjugados.

Fixado $\varepsilon > 0$, seja $\tilde{c}_\varepsilon = \tilde{c}(\varepsilon, Q) > 0$ tal que

$$||Q||_{L^{\frac{n}{2}}(\{Q \geq \tilde{c}_\varepsilon\})} \leq \varepsilon S_M,$$

onde S_M é constante definida em (1.19). Temos

$$\begin{aligned}
\int_M Q(p)u^2dV &= \int_{\{Q\leq\tilde{c}_\varepsilon\}} Q(p)u^2dV + \int_{\{Q\geq\tilde{c}_\varepsilon\}} Q(p)u^2dV \\
&\leq \tilde{c}_\varepsilon \int_{\{Q\leq\tilde{c}_\varepsilon\}} u^2dV + \int_{\{Q\geq\tilde{c}_\varepsilon\}} Q(p)u^2dV \\
&\leq \tilde{c}_\varepsilon \int_M u^2dV + ||Q||_{L^{\frac{n}{2}}(\{Q\geq\tilde{c}_\varepsilon\})}||u||^2_{L^{2^*}(\{Q\geq\tilde{c}_\varepsilon\})}.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade (1.19) e a definição de $\tilde{c}_\varepsilon$, a desigualdade (1.23) fica provada para $c_\varepsilon = \tilde{c}_\varepsilon + \varepsilon$. ■

Agora, estamos prontos para demonstrar a Proposição 1.9.2.

Prova da Proposição 1.9.2. Para cada $k \in I\!N$ e $r > 0$, considere $A_k = \{p \in M : |v|^r \leq k\}$, $B_k = M \setminus A_k$.

Defina v_k por

$$v_k(p) = \begin{cases} v(p)|v|^{2r}(p), & p \in A_k \\ k^2 v(p), & p \in B_k \end{cases}.$$

Observe que $v_k \leq |v|^{2r+1}$. Portanto, a partir da Observação 1.9.1, podemos concluir que $v_k \in H^1(M)$ e

$$\nabla v_k(p) = \begin{cases} (2r+1)|v|^{2r}(p)\nabla v(p), & p \in A_k \\ k^2\nabla v(p), & p \in B_k \end{cases}. \tag{1.24}$$

Como

$$\int_M \nabla v \nabla v_k dV = \int_M f(p,v)v_k dV,$$

então, substituindo (1.24) na última equação, obtemos

$$\begin{aligned}
(2r+1)\int_{A_k} |v|^{2r}|\nabla v|^2dV + k^2\int_{B_k}|\nabla v|^2dV &\leq \int_M |f(p,v)v_k|dV \\
&\leq \textstyle\int_M (Q(p)+C_0)|vv_k|dV.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Agora, considere

$$\omega_k(p) = \begin{cases} v(p)|v|^r(p), & p \in A_k \\ kv(p), & p \in B_k \end{cases}.$$

Desse modo,

$$\omega_k^2 = vv_k \leq |v|^{2(r+1)}$$

e

$$\nabla\omega_k(p) = \begin{cases} (r+1)|v|^r(p)\nabla v(p), & p \in A_k \\ k\nabla v(p) \ p \in B_k \end{cases}. \tag{1.26}$$

Um simples cálculo mostra que

$$\int_M |\nabla\omega_k|^2 dV = (r+1)^2 \int_{A_k} |v|^{2r}|\nabla v|^2 dV + k^2 \int_{B_k} |\nabla v|^2 dV. \tag{1.27}$$

De (1.25) e (1.27), temos

$$\frac{2r+1}{(r+1)^2}\int_M |\nabla\omega_k|^2 dV \leq \int_M (Q(p)+C_0)\omega_k^2 dV. \tag{1.28}$$

Seja c_r dado no Lema 1.9.3 com relação a $\varepsilon = \dfrac{2r+1}{2(r+1)^2}$. Assim,

$$\int_M |\nabla\omega_k|^2 dV \leq \tilde{C}_r \int_M \omega_k^2 dV, \tag{1.29}$$

$$\int_M \left(|\nabla\omega_k|^2 + \omega_k^2\right) dV \leq (\tilde{C}_r + 1)\int_M \omega_k^2 dV, \tag{1.30}$$

onde $\tilde{C}_r = \dfrac{2(r+1)^2}{2r+1}(C_0 + c_r)$. Suponha que $v \in L^{2(r+1)}(M)$ para algum $r > 0$.

Aplicando (1.19) em (1.30), ficamos com

$$\left[\int_{A_k} |\omega_k|^{2^*} dV\right]^{\frac{2}{2^*}} \leq \left[\int_M |\omega_k|^{2^*} dV\right]^{\frac{2}{2^*}} \leq S_M^{-1}(\tilde{C}_r+1)\int_M \omega_k^2 dV,$$

ou seja,

$$\left[\int_{A_k} |v|^{2^*(r+1)} dV\right]^{\frac{2}{2^*}} \leq S_M^{-1}(\tilde{C}_r+1)\int_M |v|^{2(r+1)} dV. \tag{1.31}$$

Agora, passando ao limite de $k \to +\infty$ em (1.31), temos que $v \in L^{2^*(r+1)}(M)$ e

$$||v||_{L^{2^*(r+1)}(M)} \leq C_r ||v||_{L^{2(r+1)}(M)}, \tag{1.32}$$

onde

$$C_r = \left(S_M^{-1}\left[\frac{2(r+1)^2}{2r+1}(C_0+c_r)+1\right]\right)^{\dfrac{1}{2(r+1)}}.$$

Observação: Mostramos, até agora, que vale a seguinte afirmação: se $v \in L^{2(r+1)}(M)$, para algum $r > 0$, então $v \in L^{2^*(r+1)}(M)$ e (1.32) é satisfeito. A demonstração da proposição segue dos argumentos abaixo:

Seja r_1 dado por $2(r_1+1) = 2^*$. Note que $0 < r_1$ e $v \in L^{2(r_1+1)}(M)$. Usando a desigualdade (1.32) temos $v \in L^{2^*(r_1+1)}(M)$. Agora, seja r_2 tal que $2(r_2+1) = 2^*(r_1+1)$. Veja que $0 < r_1 < r_2$ e $v \in L^{2(r_2+1)}(M)$. Novamente por (1.32), temos $v \in L^{2^*(r_2+1)}(M)$. Por este processo, obtemos uma seqüencia crescente r_k dada por $2(r_{k+1}+1) = 2^*(r_k+1)$ e satisfazendo $v \in L^{2(r_{k+1}+1)}(M)$ para todo $k \in I\!N$. Daí,

$$r_{k+1} + 1 = [\frac{N}{N-2}]^k 2^*.$$

Finalmente, conclui-se que r_k tende para ∞ e, consequentemente, $v \in L^r(M)$ $\forall r \geq 2$. Mas, como M é compacto, temos que $v \in L^r(M)$ $\forall r \geq 1$. ■

Para finalizar esta seção, apresentamos um resultado de regularidade.

Teorema 1.9.4 *Nas hipóteses da Proposição 1.9.2, suponha que $f \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$. Então, a solução fraca $v \in H^1(M)$ é de classe $C^\infty(M)$.*

Prova. Já sabemos que $v \in L^r(M)$ para todo $r \geq 1$. Mostraremos que, numa vizinhança $\Omega = x(U)$, parametrizada por $x : U \subset I\!R^n \to M$, a função $v \circ x$ é de classe C^∞. Para isto, observe que, para todo $\psi \in C^\infty(M)$ de modo que *supp* $\psi \subset\subset \Omega$, temos

$$\int_M \nabla v \nabla \psi dV = \int_M f(p, v)\psi dV,$$

Pela definição da integral, para cada $\phi \in C_0^\infty(U)$ (definindo-se $\psi = \phi \circ x^{-1}$), temos:

$$\int_U \sum_{i,j=1}^n (g^{ij} \circ x) D_i(v \circ x) D_j \phi(z) \sqrt{G \circ x}\; dz = \int_U f(x(z), v \circ x)\phi(z)\sqrt{G \circ x}\; dz.$$

Isto quer dizer que $v \circ x$ é solução fraca (no sentido de $W^{1,2}(U)$) do problema

$$-Lu = \tilde{f}(z) = \sqrt{G(x(z))}\; f(x(z), (v \circ x)(z))$$

em U, para todo $r > 0$. Aqui, o operador L é estritamente elíptico e dado por

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n D_j \left(\sqrt{G \circ x}\; (g^{ij} \circ x) D_i u \right).$$

Como $\tilde{f} \in L^2(U)$, o Teorema 8.8 em [8] implica que $v \circ x \in W^{2,2}(U')$, onde $U' \subset\subset U$. Daí, $v \circ x$ satisfaz no sentido forte (sentido de $W^{2,2}$), a equação $-L_o u = \tilde{f}(z)$, onde

$$L_o u = \sum_{i,j=1}^n \sqrt{G \circ x}\; (g^{ij} \circ x) D_{ij} u + \sum_{i,j=1}^n D_j \left(\sqrt{G \circ x}\; (g^{ij} \circ x) \right) D_i u.$$

Como $\tilde{f} \in W_{loc}^{2,2}(U)$, o Teorema 9.19 em [8] implica que $v \circ x \in W_{loc}^{4,2}(U)$. Iterando este argumento, temos que $\tilde{f} \in W_{loc}^{r,2}(U)$ e, conseqüentemente, $v \circ x \in W_{loc}^{r,2}(U)$ para todo $r \geq 1$. É conseqüência do Teorema 7.26, também em [8], que $v \circ x \in C^m(U)$, para todo $m \in I\!N$ e, assim, $v \circ x \in C^\infty(U)$. ■

Capítulo 2

Problema de Yamabe (Caso Subcrítico)

Neste capítulo, demonstraremos um resultado, devido a Yamabe [20], que trata da existência de solução para a equação

$$-\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = \lambda u^{r-1},\ 2 < r < 2^*, \tag{2.1}$$

onde g é a métrica Riemanniana da variedade diferenciável compacta M, e $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma constante.

Seja $I : H^1(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcional definido por

$$I(u) = \int_M |\nabla u|^2 dV + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g u^2 dV. \tag{2.2}$$

Fixado r tal que $2 < r < 2^*$, considere

$$H_r = \left\{ u \in H^1(M); \|u\|_{L^r(M)} = 1 \right\} \tag{2.3}$$

$$\lambda_r = \inf_{u \in H_r} I(u). \tag{2.4}$$

Teorema 2.1 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$. Dado $r \in (2, \frac{2n}{n-2})$, considere λ_r como em (2.4). Então, existe uma solução positiva $u = u_r \in C^\infty(M)$ da equação*

$$-\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = \lambda_r u^{r-1}, \tag{2.5}$$

com a propriedade adicional de que $\int_M u^r dV_g = 1$.

Prova. Para uma melhor organização da demonstração, a dividiremos em algumas etapas:

Etapa 1. λ_r é finito.

Note que, dada uma função $u \in H_r$, temos, usando a Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\left|\int_M S_g u^2 dV\right| &\leq \int_M |S_g|\,|u|^2 dV \leq \|S_g\|_{L^\infty(M)} \int_M |u|^2 dV \\ &\leq \|S_g\|_{L^\infty(M)} \underbrace{\|u\|^2_{L^r(M)}}_{1} [\mu(M)]^{2s},\end{aligned}$$

onde $\mu(M) = \displaystyle\int_M dV$ e $s = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{r}$.

Logo,

$$\left|\int_M S_g u^2 dV\right| \leq c_1 \text{ e } I(u) < +\infty,$$

onde c_1 é uma constante.

Então,

$$\int_M S_g u^2 dV \geq -c_1,$$

o que implica

$$\begin{aligned}I(u) &= \int_M |\nabla u|^2 dV + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g u^2 dV \\ &\geq \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g u^2 dV \\ &\geq -c_1 \frac{n-2}{4(n-1)}.\end{aligned}$$

Daí, podemos concluir que λ_r é finito.

Etapa 2. Existe $u = u_r \in H_r,\ u \geq 0$, tal que $I(u) = \lambda_r$.

Seja $(u_k) \subset H_r$ uma sequência minimizante para λ_r. Ou seja, (u_k) verifica:

(i) $\displaystyle\int_M |u_k|^r dV = 1,\ \forall k \in I\!N$;

(ii) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} I(u_k) = \lambda_r$.

Além disso,

(iii) podemos considerar $u_k \geq 0$;

(iv) (u_k) é limitada em $H^1(M)$.

O ítem **(iii)** pode ser verificado, observando-se o fato de que se $u \in H^1(M)$, então $|u| \in H^1(M)$ com

$$|\nabla |u|| \leq |\nabla u|,\ u \in H^1(M),$$

cuja demonstração se encontra em [4]. De fato, temos, para cada k,

$$\begin{aligned} I(|u_k|) &= \int_M |\nabla |u_k||^2 \, dV + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g |u_k|^2 dV \\ &\leq I(u_k). \end{aligned}$$

Logo,

$$I(|u_k|) \longrightarrow \lambda_r.$$

Com relação ao ítem **(iv)** , observemos que

$$\begin{aligned} \|u_k\|^2_{H^1(M)} &= \|\nabla u_k\|^2_{L^2(M)} + \|u_k\|^2_{L^2(M)} \\ &= \int_M |\nabla u_k|^2 dV + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g u_k^2 dV + \\ &\quad - \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g u_k^2 dV + \|u_k\|^2_{L^2(M)} \\ &= I(u_k) - \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g u_k^2 dV + \|u_k\|^2_{L^2(M)} \\ &\leq I(u_k) + \left(\frac{n-2}{4(n-1)} \|S_g\|_{L^\infty(M)} + 1 \right) \|u_k\|^2_{L^2(M)} . \end{aligned}$$

Suponha k suficientemente grande de modo que

$$I(u_k) < \lambda_r + 1.$$

Sendo assim, usando-se a desigualdade $\|u_k\|^2_{L^2(M)} \leq \|u_k\|^2_{L^r(M)} [\mu(M)]^{2s}$, como no **Passo 1,** temos, para alguma constante positiva c_2,

$$\|u_k\|^2_{H^1(M)} \leq (\lambda_r + 1) + \left(\frac{n-2}{4(n-1)} \|S_g\|_{L^\infty(M)} + 1 \right) c_2,$$

de onde segue que (u_k) é limitada.

Agora, usando o fato de que $H^1(M)$ é um espaço reflexivo, considere $u \in H^1(M)$ tal que (u_k) convirja fracamente para u. Utilizando-se das imersões de Sobolev, sabemos que existe uma subsequência de (u_k), a qual ainda denotaremos por (u_k), tal que $u_k \longrightarrow u$ na norma de $L^r(M)$.

Daí, temos $\|u\|_{L^r(M)} = 1$ e, portanto, $u \in H_r$. Da convergência em $L^r(M)$ e do fato de que $u_k \geq 0$, obtemos que $u \geq 0$ qtp em M, visto que (u_k) converge em quase todo ponto para u.

Além disso, temos

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{H^1(M)} &\leq \liminf \|u_k\|^2_{H^1(M)} \\ &\leq \liminf \left(\|\nabla u_k\|^2_{L^2(M)} + \|u_k\|^2_{L^2(M)} \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(M)} + \|u\|^2_{L^2(M)} \leq \liminf \|\nabla u_k\|^2_{L^2(M)} + \|u\|^2_{L^2(M)},$$

o que implica

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(M)} \leq \liminf \|\nabla u_k\|^2_{L^2(M)}.$$

Sendo assim, observe que

$$\begin{aligned}
\lambda_r \leq I(u) &= \int_M |\nabla u|^2 dV + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g |u|^2 dV \\
&\leq \liminf \|\nabla u_k\|^2_{L^2(M)} + \frac{n-2}{4(n-1)} \lim_{k \to +\infty} \int_M S_g |u_k|^2 dV \\
&= \liminf \left(\int_M |\nabla u_k|^2 dV + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g |u_k|^2 dV \right) \\
&= \liminf I(u_k) = \lambda_r.
\end{aligned}$$

Logo,

$$I(u) = \lambda_r.$$

Aplicando-se o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (para Espaços de Banach), obtemos que existe uma constante $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle \, dV + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g u \phi dV = \alpha \int_M u^{r-1} \phi dV.$$

Substituindo-se $\phi = u$, obtemos $I(u) = \alpha$ e, portanto, $\alpha = \lambda_r$, o que nos leva a concluir que u é solução fraca de (2.5).

Etapa 3. u é positiva e de classe C^∞.

Seja $f : M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(p,t) = \left(\lambda_r |t|^{r-2} - \frac{n-2}{4(n-1)} S_g(p) \right) t.$$

Note que u é solução fraca de

$$-\Delta u = f(p,u)$$

e, além disso,

$$|f(p,u)| \leq (Q(p) + C_0)|u|,$$

onde $Q = \lambda_r |u|^{r-2} \in L^{\frac{n}{2}}(S^n)$ e C_0 é uma constante tal que $\left| \dfrac{n-2}{4(n-1)} S_g(p) \right| \leq C_0$, para todo $p \in S^n$.

Utilizando a Proposição 1.9.2, conclui-se que $u \in C^\infty(M)$. Além disso, como $u \geq 0$, podemos, a partir do Princípio de Máximo (próximo teorema), concluir que u é positiva em M. ∎

Teorema (Princípio de Máximo). *Suponha que h é uma função não-negativa, regular, definida na variedade compacta M, e $u \in C^2(M)$ satisfaz $(\Delta + h)u \geq 0$. Se u atinge o minimo $m \leq 0$, então u é constante em M.*

Tal teorema pode ser demonstrado utilizando-se os resultados contidos em [8] e um procedimento de *colagem.*

Capítulo 3

Existência de Infinitas Soluções com Energia Finita

Como já mencionado na introdução, sabemos que qualquer solução positiva da equação elíptica

$$\Delta u + |u|^{\frac{4}{n-2}} u = 0, \quad u \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad n \geq 3, \tag{3.1}$$

que possua energia finita, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx < \infty, \tag{3.2}$$

é necessariamente da forma

$$u(x) = \left(\frac{\sqrt{n(n-2)a}}{a^2 + |x-\xi|^2} \right)^{(n-2)/2}, \tag{3.3}$$

onde $a > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Nosso objetivo neste capítulo é o de demonstrar, para $n \geq 3$, o seguinte teorema:

Teorema 3.1 (Ding [9]) *Existe uma sequência de soluções u_k do problema (3.1)-(3.2) tais que $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_k|^2 dx \to \infty$ quando $k \to \infty$.*

3.1 Observações Preliminares

a) Se $u(x)$ é solução de (3.1), então, para cada $\lambda > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, a função $v(x) = \lambda^{(n-2)/2} u[(x-\xi)\lambda]$ é também solução de (3.1).

Com efeito, observe que

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = \lambda^{\frac{n-2}{2}}\lambda\frac{\partial u}{\partial x_i}(\lambda(x-\xi)),$$

de onde segue que

$$\frac{\partial v}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \lambda^{\frac{n+2}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_i \partial x_j}(\lambda(x-\xi)).$$

Desse modo, podemos concluir que

$$\Delta v(x) = \lambda^{\frac{n+2}{2}}\Delta u(\lambda(x-\xi)). \tag{3.4}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
|v(x)|^{\frac{4}{n-2}}v(x) &= |\lambda^{\frac{n-2}{2}}u[(x-\xi)\lambda]|^{\frac{4}{n-2}}\lambda^{\frac{n-2}{2}}u[(x-\xi)\lambda] \\
&= \lambda^2|u[(x-\xi)\lambda]|^{\frac{4}{n-2}}\lambda^{\frac{n-2}{2}}u[(x-\xi)\lambda] \\
&= \lambda^{\frac{n+2}{2}}|u[(x-\xi)\lambda]|^{\frac{4}{n-2}}u[(x-\xi)\lambda] \\
&= \lambda^{\frac{n+2}{2}}\left(-\Delta u(\lambda(x-\xi))\right).
\end{aligned}$$

Agora, usando (3.4), concluímos o que foi afirmado no ítem **a)**. ■

b) As funções u e v, dadas no ítem **a)** acima, possuem a mesma energia.

De fato, note que

$$\left[\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right]^2 = \lambda^n\left[\frac{\partial u}{\partial x_i}(\lambda(x-\xi))\right]^2.$$

Logo,

$$|\nabla v(x)|^2 = \lambda^n|\nabla u(\lambda(x-\xi))|^2.$$

Usando o fato de que o determinante jacobiano da função $\varphi(x) = \lambda(x-\xi)$ é igual a λ^n, podemos aplicar o Teorema de Mudança de Variáveis, para obtermos

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla v(x)|^2dx = \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u(\lambda(x-\xi))|^2dx,$$

como queríamos demonstrar. ■

c) Diremos que duas soluções u e v de (3.1) são equivalentes se possuem a mesma energia. Neste caso, temos que todas as soluções da forma (3.3) são equivalentes.

Efetivamente, sejam

$$u(x) = \left(\frac{\sqrt{n(n-2)}a}{a^2+|x-\xi|^2}\right)^{(n-2)/2} \quad \text{e} \quad v(x) = \left(\frac{\sqrt{n(n-2)}b}{b^2+|x-\eta|^2}\right)^{(n-2)/2},$$

como em (3.3).

Considere $\lambda > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\lambda = \frac{a}{b} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{\lambda\eta - \xi}{\lambda}.$$

Para concluir o que é desejado, basta observar que

$$v(x) = \lambda^{\frac{n-2}{2}} u(\lambda(x - \theta))$$

e utilizar o ítem **b)**. ■

3.2 Lemas Iniciais

Nesta seção, estaremos considerando (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas de dimensões maiores do que, ou iguais a, 3. Suporemos que existe um difeomorfismo conforme $f : M \longrightarrow N$, isto é,

$$f^*h = \varphi^{\frac{4}{n-2}} g,$$

para alguma função positiva $\varphi \in C^\infty(M)$, onde f^*h denota a métrica em M definida por

$$f^*h_p(v_1, v_2) = h_{f(p)}(df_p(v_1), df_p(v_2)), \quad p \in M, \quad v_1, v_2 \in T_pM.$$

As curvaturas escalares de (M, g) e (N, h) serão denotados por S_g e S_h, respectivamente. No lema seguinte, $F : M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $\tilde{\varphi} = \varphi \circ f^{-1}$.

Lema 3.2.1 *Suponha que $v : N \longrightarrow \mathbb{R}$ é solução de*

$$\Delta_h v - \beta S_h(y) v + \tilde{\varphi}(y)^{1-q} F(f^{-1}(y), \tilde{\varphi}(y) v) = 0, \quad v \in C^2(N), \tag{3.5}$$

onde $q = 2^* = 2n/(n-2)$ e $\beta = (n-2)/[4(n-1)]$. Então, $u = (v \circ f)\varphi$ é solução de

$$\Delta_g u - \beta S_g(x) u + F(x, u) = 0, \quad u \in C^2(M). \tag{3.6}$$

Mais ainda,

$$\int_M |u|^q dV_g = \int_N |v|^q dV_h. \tag{3.7}$$

Prova. Suponha que $v \in C^2(N)$ é solução de (3.5). Então, para todo $x \in M$, temos

$$(\Delta_h v)(f(x)) - \beta S_h(f(x)) v(f(x)) + \varphi(x)^{1-q} F(x, \varphi(x) v(f(x))) = 0.$$

Utilizando-se os resultados da seção A.8 sobre isometrias(mais precisamente, o Corolário (A.8.6) e o Teorema (A.8.7)), obtemos

$$\Delta_{\tilde{h}}(v \circ f)(x) - \beta S_{\tilde{h}}(x)(v \circ f)(x) + \varphi(x)^{1-q} F(x, \varphi(x)(v \circ f)(x)) = 0,$$

onde $\tilde{h} = f^*h$.

Portanto, $w = v \circ f$ é solução de

$$\Delta_{\tilde{h}} w - \beta S_{\tilde{h}} w + \varphi^{1-q} F(x, \varphi w) = 0. \tag{3.8}$$

Além disso, usando o fato de que $\tilde{h} = \varphi^{\frac{4}{n-2}} g$, temos, em virtude do Teorema C.2,

$$\Delta_g \varphi - \beta S_g \varphi + \beta S_{\tilde{h}} \varphi^{q-1} = 0. \tag{3.9}$$

Considerando-se $u = w\varphi$, podemos aplicar o Teorema C.4, para obtermos

$$\Delta_{\tilde{h}} w = \Delta_{\tilde{h}}(\varphi^{-1} u) = \frac{1}{\varphi^{q-1}} \Delta_g u - \frac{u}{\varphi^q} \Delta_g \varphi. \tag{3.10}$$

Agora, de (3.8), (3.9) e (3.10), podemos concluir que

$$\varphi^{1-q} \Delta_g u - u\varphi^{-q}[\beta S_g \varphi - \beta S_{\tilde{h}} \varphi^{q-1}] - \beta S_{\tilde{h}} u \varphi^{-1} + \varphi^{1-q} F(x, u) = 0,$$

o que implica

$$\varphi^{1-q}[\Delta_g u - \beta S_g u + F(x, u)] = 0,$$

ou melhor,

$$\Delta_g u - \beta S_g u + F(x, u) = 0.$$

Portanto, $u = (v \circ f)\phi$ é solução de (3.6).

Agora, observe que usando a Observação C.3 e o Teorema A.8.8, temos as seguintes igualdades

$$\int_N |v|^q dV_h = \int_M |v \circ f|^q dV_{\tilde{h}} = \int_M |v \circ f|^q \varphi^q dV_g = \int_M |u|^q dV_g,$$

o que finaliza a demonstração. ■

Lema 3.2.2 *Cada solução v da equação*

$$\Delta v - \frac{1}{4} n(n-2) v + |v|^{q-2} v = 0, \quad v \in C^2(S^n), \quad q = 2^* = \frac{2n}{n-2}\ , \tag{3.11}$$

onde Δ é o Laplaciano com relação à métrica usual em S^n, corresponde a uma solução u da equação

$$\Delta u + |u|^{\frac{4}{n-2}} u = 0, \quad u \in C^2(\mathbb{R}^n), \tag{3.12}$$

satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx = \int_{S^n} |v|^q dV. \tag{3.13}$$

Prova. Denotaremos por h a métrica usual em S^n e por g a métrica usual em $\mathbb{R}^n$.

Seja $\pi : S^n - \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, a projeção estereográfica, onde $p = (0, \ldots, 0, 1)$. Considere $f = \pi^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n - \{p\}$, ou seja,

$$f(y) = \left(\frac{2y_1}{1+|y|^2}, \ldots, \frac{2y_n}{1+|y|^2}, \frac{|y|^2-1}{1+|y|^2} \right).$$

Pelo fato de f ser um difeomorfismo, podemos induzir em $\mathbb{R}^n$ uma métrica $\tilde{g}$ através de f. Dessa forma, f é uma isometria entre $(\mathbb{R}^n, \tilde{g})$ e $(S^n - \{p\}, h)$. Assim, de acordo com os resultados da seção A.8 sobre isometrias, temos

$$\tilde{g}_{ij} = h_{ij} \circ f. \tag{3.14}$$

A função f é, também, uma parametrização para S^n, e, além disso, sabemos que

$$\begin{cases} h_{ij}(f(x)) = 0, \quad i \neq j \\ h_{ii}(f(x)) = \left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^2. \end{cases}$$

Por (3.14), temos

$$\begin{cases} \tilde{g}_{ij}(x) = 0, \quad i \neq j \\ \tilde{g}_{ii}(x) = \left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^2. \end{cases}$$

Assim, $\tilde{g}$ é conforme à $g(g_{ij} \equiv 0, \quad i \neq j$ e $g_{ii} \equiv 1)$ e, além disso,

$$\tilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-2}} g, \tag{3.15}$$

onde

$$\varphi(x) = \left(\frac{2}{1+|x|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}}. \tag{3.16}$$

Considere $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$F(x, y) = |y|^{\frac{4}{n-2}} y. \tag{3.17}$$

Temos, também, que a curvatura escalar S_h da esfera S^n é $n(n-1)$. Então,

$$\Delta_h v - \beta S_h(y) v + \tilde{\varphi}(y)^{1-q} F(f^{-1}(y), \tilde{\varphi}(y) v) = 0, \quad v \in C^2(S^n - \{p\}), \tag{3.18}$$

onde $\tilde{\varphi} = \varphi \circ f^{-1}$, equivale à equação

$$\Delta_h v - \frac{1}{4} n(n-2) v + |v|^{q-2} v = 0, \quad v \in C^2(S^n - \{p\}). \tag{3.19}$$

Se v é solução de (3.11), então $v\big|_{S^n \setminus \{p\}}$ é solução de (3.19). Logo, usando-se o Lema 3.2.1, a esta última, corresponde uma solução u da equação

$$\Delta_g u - \beta S_g(x) u + F(x, u) = 0, \quad u \in C^2(\mathbb{R}^n),$$

ou seja, da equação (3.12).

Resta-nos, agora, demonstrar a identidade (3.13). Com este intuito, podemos usar o Lema 3.2.1, para obtermos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx = \int_{S^n\setminus\{p\}} \left| v\big|_{S^n\setminus\{p\}} \right|^q dV.$$

Como,

$$\int_{S^n\setminus\{p\}} \left| v\big|_{S^n\setminus\{p\}} \right|^q dV = \int_{S^n} |v|^q dV,$$

concluímos, a partir destas duas últimas igualdades,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx = \int_{S^n} |v|^q dV. \tag{3.20}$$

Agora, multiplicando (3.12) por u, obtemos

$$-u\Delta u = |u|^q. \tag{3.21}$$

Como $|u|^q$ é integrável em $\mathbb{R}^n$, então $-u\Delta u$ também é integrável em $\mathbb{R}^n$. Além disso,

$$\int_{\mathbb{R}^n} -u\Delta u dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx. \tag{3.22}$$

Afirmação A. *A função $|\nabla u|^2$ é integrável em $\mathbb{R}^n$ e vale a seguinte igualdade:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} -u\Delta u dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx. \tag{3.23}$$

Logo, de (3.20), (3.22) e (3.23), conclui-se a demonstração. ∎

Prova da Afirmação A.

Observação 3.2.3 *Nesta demonstração, usaremos propriedades do espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Para mais detalhes consulte [1]*

Denotemos $w = v\big|_{S^n\setminus\{p\}} \circ f$. Desse modo, temos $u = w\varphi$. Como $v \in C^2(S^n)$ e S^n é compacto, então v e $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, são limitados. Logo, w e $D_i w$ são limitados, onde $D_i w$ denota a derivada parcial de w como relação à i-ésima coordenada. No que segue, denotamos k_1, k_2, k_3, k_4 como sendo constantes convenientes.

Usando o Teorema do Divergente, temos, fixado $R > 0$,

$$\int_{B_R(0)} div\ (u\nabla u) dx = \int_{S_R(0)} \left\langle u(x)\nabla u(x), \frac{x}{R} \right\rangle d\sigma,$$

onde $S_R(0)$ é a esfera em $\mathbb{R}^n$ com centro na origem e raio R. Daí,

$$\begin{aligned}\int_{B_R(0)}(u\Delta u+|\nabla u|^2)dx &= \sum_{i=1}^{n}\int_{S_R(0)}\frac{x_i}{R}uD_iud\sigma \\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_{S_R(0)}\frac{x_i}{R}w\varphi D_i(w\varphi)d\sigma \\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_{S_R(0)}\frac{x_i}{R}w\varphi(wD_i\varphi+\varphi D_iw)d\sigma.\end{aligned}$$

A partir da limitação de w e D_iw, temos

$$\left|\int_{B_R(0)}(u\Delta u+|\nabla u|^2)dx\right| \leq k_1\sum_{i=1}^{n}\int_{S_R(0)}\left|\frac{x_i}{R}\varphi D_i\varphi\right|d\sigma + k_2\sum_{i=1}^{n}\int_{S_R(0)}\varphi^2 d\sigma.$$

Como

$$|D_i\varphi(x)| = \frac{n-2}{2}|x_i|\left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^{\frac{n}{2}},$$

obtemos

$$\begin{aligned}\left|\int_{B_R(0)}(u\Delta u+|\nabla u|^2)dx\right| &\leq k_1\sum_{i=1}^{n}\int_{S_R(0)}\frac{(n-2)x_i^2}{2R}\left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^{\frac{n}{2}}d\sigma+ \\ &\quad +k_2\sum_{i=1}^{n}\int_{S_R(0)}\left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^{n-2}d\sigma \\ &\leq k_3\sum_{i=1}^{n}\int_{S_R(0)}\left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^{n-1}d\sigma+ \\ &\qquad +k_2\sum_{i=1}^{n}\int_{S_R(0)}\left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^{n-2}d\sigma.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left|\int_{B_R(0)}(u\Delta u+|\nabla u|^2)dx\right| \leq k_4\ Vol\ (S_R(0))\left[\left(\frac{2}{1+R^2}\right)^{n-1}+\left(\frac{2}{1+R^2}\right)^{n-2}\right], \tag{3.24}$$

onde $Vol\ (S_R(0))$ é o volume de $S_R(0)$.

Além disso, sabe-se que

$$Vol\ (S_R(0)) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}R^{n-1}, \tag{3.25}$$

onde a função $\Gamma:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ é chamada *função gama* e é definida por

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-t}dt.$$

Assim, pode-se concluir que o limite

$$\lim_{R\to\infty} Vol\ (S_R(0)) \left[\left(\frac{2}{1+R^2} \right)^{n-1} + \left(\frac{2}{1+R^2} \right)^{n-2} \right] \tag{3.26}$$

existe.

De (3.22), (3.24) e (3.26), conclui-se que $|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Como $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$, então u pertence ao espaço

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^n) = \left\{ v \in L^{2^*}; \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

o qual possui norma proveniente do produto interno

$$\langle w, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla w \nabla v dx.$$

Também temos que a norma de $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ é equivalente à norma

$$\|v\|_0 = \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|v\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.27}$$

O espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Portanto, podemos considerar uma sequência $(u_\ell) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ convergente em $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ para u. Usando o fato de que u é solução de (3.12), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_\ell \nabla u dx = \int_{\mathbb{R}^n} -u_\ell \Delta u dx = \int_{\mathbb{R}^n} u_\ell u |u|^{q-2} dx.$$

Portanto, utilizando-se a norma (3.27), nota-se que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_\ell \nabla u dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_\ell u |u|^{q-2} dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx,$$

onde, para concluirmos a última convergência, trabalhamos com a desigualdade de Hölder.

Daí, conclui-se a validade da Afirmação A. ■

Observação 3.2.4 *Note que, para $n \geq 4$, o limite em (3.26) é igual a zero. Portanto, já poderíamos, neste ponto, termos concluído a validade da Afirmação A para o caso $n \geq 4$.*

Observação 3.2.5 *Para $n \geq 4$, temos $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Entretanto, se $n = 3$, então $\varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \setminus H^1(\mathbb{R}^3)$.*

Observação 3.2.6 *Em virtude de (C.1), obtemos que φ em (3.16) verifica*

$$\Delta\varphi + \frac{n(n-2)}{4}|\varphi|^{\frac{4}{n-2}}\varphi = 0. \tag{3.28}$$

Compare este resultado com (3.1)-(3.3).

Do Lema 3.2.2, observamos que, para provar o Teorema 3.1, basta provar o lema seguinte.

Lema 3.2.7 *Existe uma sequência $\{v_k\}$ de soluções de (3.11) tal que $\displaystyle\int_{S^n} |v_k|^q dV \to \infty$ quando $k \to \infty$.*

3.3 Uso do Princípio de Criticalidade Simétrica

Daqui por diante, usaremos as definições e resultados contidos no Apêndice D. Além disso, dado $z \in \mathbb{R}^{n+1}$, consideremos $k, m \in I\!N$ tais que $k+m = n+1$, e denotemos $z = (x, y)$, onde $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ e $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Dessa forma, S^n pode ser descrita como

$$S^n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; |x|^2 + |y|^2 = 1\}. \tag{3.29}$$

Agora, considere o conjunto

$$G = \{\Phi \in Gl_{n+1}(\mathbb{R}); \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & \Phi_2 \end{pmatrix}, \text{ onde } \Phi_1 \in O(k),\ \Phi_2 \in O(m)\}.$$

Verifica-se, facilmente, que:

1) $\Phi \in G \Rightarrow \Phi^{-1} \in G$;

2) $\Phi, \Phi' \in G \Rightarrow \Phi\Phi' \in G$;

3) $G \subset O(n+1)$;

Portanto, podemos concluir que $(G, \cdot)$ munido da topologia induzida por $Gl_{n+1}(\mathbb{R})$ é um subgrupo topológico de $O(n+1)$. Além disso, restringindo a ação de $O(n+1)$, em $H^1(S^n)$, ao conjunto $G \times H^1(S^n)$, temos uma ação de G em $H^1(S^n)$.

O fixo de G em $H^1(S^n)$ será denotado por X_G, isto é,

$$X_G = \{v \in H^1(S^n);\ \Phi v = v,\ \forall \Phi \in G\}.$$

Podemos, também, escrever

$$X_G = \{v \in H^1(S^n); v(\Phi x) = v(x), \forall \Phi \in G \text{ e q.s. em } S^n\}. \tag{3.30}$$

Nota-se, a partir do Princípio de Criticalidade Simétrica (Teorema D.11) e do Exemplo D.9, que se $u \in X_G$, é ponto crítico do funcional

$$J(v) = \int_{S^n} \left[\frac{1}{2}(|\nabla v|^2 + cv^2) - \frac{1}{q}|v|^q \right] dV, \tag{3.31}$$

restrito ao subespaço X_G, então u é ponto crítico de J em $H^1(S^n)$, visto que $J \in C^1$.

Portanto, observando-se que o funcional J é o funcional de Euler-Lagrange associado a (3.11), o Lema 3.2.7 fica demonstrado se conseguirmos estabelecer o seguinte:

Lema 3.3.1 *Existe uma sequência $\{v_k\}$ de pontos críticos de J, restritos à X_G, tal que $\int_{S^n} |v_k|^q dV \to \infty$ quando $k \to \infty$.*

Observação 3.3.2 *Dado $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & \Phi_2 \end{pmatrix} \in G$ e $z = (x, y) \in S^n$, temos $\Phi z = (\Phi_1 x, \Phi_2 y)$.*

Observação 3.3.3 *Fixados $x, y \in S^\ell$, existe $\Phi \in O(\ell + 1)$ tal que $x = \Phi y$.*

3.4 Lemas Finais

De Ambrosetti e Rabinowitz [2], observa-se que o seguinte resultado se verifica.

Lema 3.4.1 *Seja X um subespaço fechado de $H^1(S^n)$. Suponha que a imersão $X \subset L^q(S^n)$, $q = 2^* = \dfrac{2n}{n-2}$, é compacta. Então, a restrição $J\big|_X$ satisfaz a condição de Palais-Smale. Mais ainda, se X tem dimensão infinita, então $J\big|_X$ possui uma sequência de pontos críticos v_k em X, tal que $\int_{S^n} |v_k|^q dV \to \infty$ quando $k \to \infty$.*

Para demonstrarmos o Lema 3.3.1, usaremos o Lema 3.4.1. Com este objetivo, verificaremos, primeiramente, as seguintes propriedades do subespaço X_G:
P1) $\dim X_G = \infty$.

Com efeito, basta observar que, para cada $\ell \in \mathbb{N}$, a função $v_\ell \in H^1(S^n)$ definida por $v_\ell(z) = |x|^\ell |y|^\ell$, $z = (x, y)$, pertence a X_G.

P2) X_G é fechado.

Inicialmente, observe que, fixado $\Phi \in G$, temos, em virtude do ítem **iv)** da Definição D.6, que a função $u \longmapsto \Phi u$ é contínua. Logo, a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \Psi_\Phi & : & H^1(S^n) & \longrightarrow & H^1(S^n) \\ & & u & \longmapsto & \Psi_\Phi(u) = u - \Phi u \end{array}$$

é contínua. Desse modo, para cada $\Phi \in G$, o conjunto $\Psi_\Phi^{-1}(\{0\})$ é fechado.

Agora, note que

$$X_G = \{u \in H^1(S^n); \Psi_\Phi(u) = 0,\ \forall \Phi \in G\},$$

isto é,

$$X_G = \bigcap_{\Phi \in G} \Psi_\Phi^{-1}(\{0\}).$$

Portanto, X_G é fechado.

Caso 1.

Consideremos, inicialmente, o caso em que $n \geq 5$. Desse modo, escolha $k, m \in I\!N$ tais que $k + m = n + 1$ e $k \geq m \geq 3$. Note que, sendo assim, temos $k < n$ e, portanto, $\dfrac{2k}{k-2} > \dfrac{2n}{n-2}$. Logo, o seguinte lema, junto com o Lema 3.4.1, nos leva ao resultado desejado, para este caso.

Lema 3.4.2 *Para $r = \dfrac{2k}{k-2}$ e $1 \leq p \leq r$, a imersão $X_G \subset L^p(S^n)$ é contínua. Tal imersão é compacta se $1 \leq p < r$.*

Prova. Sejam $u \in X_G$ e $Q \subset S^n$ tais que o conjunto $S^n \setminus Q$ tenha medida nula e $u(\Phi z) = u(z),\ \forall \Phi \in G$ e $\forall z \in Q$. Sendo $z = (x, y) \in Q$, como em (3.29), temos

$$u(\Phi_1 x, \Phi_2 y) = u(z),\ \forall \Phi_1 \in O(k) \ \text{ e } \ \forall \Phi_2 \in O(m). \tag{3.32}$$

Afirmação B. *A função u depende apenas de $|x|$ ou, equivalentemente, de $|y|$.*

De fato, considere $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in Q$ tais que $|x_1| = |x_2|$. Como $|x_1|^2 + |y_1|^2 = 1$ e $|x_2|^2 + |y_2|^2 = 1$, então $|y_1| = |y_2|$. Usando a observação 3.3.3, concluímos que existem $\Phi_1 \in O(k)$ e $\Phi_2 \in O(m)$ tais que

$$x_1 = \Phi_1 x_2 \ \text{ e } \ y_1 = \Phi_2 y_2.$$

Logo,

$$u(x_1, y_1) = u(\Phi_1 x_2, \Phi_2 y_2) = u(x_2, y_2),$$

de onde segue o afirmado.

Agora, observe que se $z = (s, t) \in S^n$ é tal que $t_i \neq 0$ para algum $i = 1, \ldots, m$, podemos considerar uma vizinhança U, de z, e $\delta_1 > 0$ tais que a aplicação $h : U \longrightarrow B^k_{\delta_1}(s) \times B^{m-1}_{\delta_1}(\bar{t}) \subset \mathbb{R}^n$ dada por

$$h(x, y) = (x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_m) \tag{3.33}$$

é um difeomorfismo, onde $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_m)$.

Analogamente, se $z = (s,t) \in S^n$ é tal que $s_i \neq 0$ para algum $i = 1, \ldots, k$, podemos considerar uma vizinhança V, de z, e $\delta_2 > 0$ tais que a aplicação $f : V \longrightarrow B^{k-1}_{\delta_2}(\bar{s}) \times B^m_{\delta_2}(t) \subset \mathbb{R}^n$ dada por

$$f(x,y) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m) \tag{3.34}$$

é um difeomorfismo, onde $\bar{s} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_m)$.

Usando a Afirmação B, concluímos que estão 'bem definidas' as funções $v_u : B^k_{\delta_1}(s) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $w_u : B^m_{\delta_2}(t) \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$v_u(x) = (u \circ h^{-1})(x, \bar{y}),\ (x, \bar{y}) \in B^k_{\delta_1}(s) \times B^{m-1}_{\delta_1}(\bar{t})$$

e

$$w_u(y) = (u \circ f^{-1})(\bar{x}, y),\ (\bar{x}, y) \in B^{k-1}_{\delta_2}(\bar{s}) \times B^m_{\delta_2}(t).$$

Podemos assumir que S^n é coberto por um número finito de parametrizações da forma (3.33) e da forma (3.34), digamos $\{(U_\alpha, h_\alpha)\} \cup \{(V_\beta, f_\beta)\}$. Além disso, também assumiremos que as parametrizações são tais que as componentes (g_{ij}) da métrica, em quaisquer cartas, verificam as condições (1.1), (1.2) e (1.3). No que segue, os c_i's sempre denotam constantes.

Dada uma função diferenciável $u \in X_G$, temos, numa vizinhança U,

$$\begin{aligned}
\int_U |u|^p dV &= \int_{B^k_{\delta_1} \times B^{m-1}_{\delta_1}} |u \circ h^{-1}|^p \sqrt{\det(g_{ij} \circ h^{-1})}\, dx d\bar{y} \\
&\leq c_1 \int_{B^{m-1}_{\delta_1}} \left[\int_{B^k_{\delta_1}} |u \circ h^{-1}|^p dx \right] d\bar{y} \\
&= c_1 \int_{B^{m-1}_{\delta_1}} \left[\int_{B^k_{\delta_1}} |v_u|^p dx \right] d\bar{y} \\
&\leq c_2 \|v_u\|^p_{L^p(B^k_{\delta_1})},
\end{aligned}$$

o que implica

$$\|u\|_{L^p(U)} \leq c_2 \|v_u\|_{L^p(B^k_{\delta_1})}. \tag{3.35}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_U |\nabla u|^2 dV &= \int_U \left[\sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] dV \geq c_3 \int_U \left[\sum_i \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right] dV \\
&= \int_{B^k_{\delta_1} \times B^{m-1}_{\delta_1}} \left[\sum_i \left| \frac{\partial (u \circ h^{-1})}{\partial x_i} \right|^2 \right] \sqrt{\det(g_{j\ell} \circ h^{-1})}\, dx d\bar{y} \\
&\geq c_4 \int_{B^{m-1}_{\delta_1}} \left[\int_{B^k_{\delta_1}} |\nabla v_u|^2 dx \right] d\bar{y},
\end{aligned}$$

donde se conclui que

$$\|\nabla u\|_{L^2(U)} \geq c_5 \|\nabla v_u\|_{L^2(B^k_{\delta_1})}. \tag{3.36}$$

A partir de (3.35) e (3.36), obtemos

$$\|u\|_{H^1(U)} \geq c_6 \|v_u\|_{H^1(B^k_{\delta_1})}. \tag{3.37}$$

Usando o fato de que $H^1(B^k_{\delta_1})$ está imerso continuamente em $L^p(B^k_{\delta_1})$ para $1 \leq p \leq \dfrac{2k}{k-2}$, e as desigualdades (3.35) e (3.37), obtemos que existe $c_7 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|u\|_{L^p(U)} \leq c_7 \|u\|_{H^1(U)}, \tag{3.38}$$

para $1 \leq p \leq \dfrac{2k}{k-2}$.

Com um procedimento análogo, usando a parametrização f^{-1}, mostra-se

$$\|u\|_{L^p(V)} \leq c_8 \|u\|_{H^1(V)}, \tag{3.39}$$

para $1 \leq p \leq \dfrac{2m}{m-2}$.

Como $k \geq m$, então $\dfrac{2k}{k-2} \leq \dfrac{2m}{m-2}$. Portanto, em qualquer vizinhança W de S^n, obtemos

$$\|u\|_{L^p(W)} \leq c_9 \|u\|_{H^1(W)}, \tag{3.40}$$

para $1 \leq p \leq \dfrac{2k}{k-2}$.

Esta última desigualdade nos leva ao fato de que a imersão $X_G \subset L^p(S^n)$, para $1 \leq p \leq \dfrac{2k}{k-2}$, é contínua.

Compacidade.

Seja $(u_j) \subset X_G$ uma sequência limitada em $H^1(U)$, isto é, existe $R > 0$ tal que

$$\|u_j\|_{H^1(U)} \leq R, \forall j \in I\!N.$$

Por (3.37), temos que (v_{u_j}) é limitada em $H^1(B^k_{\delta_1})$ e, consequentemente, possui uma subsequência, a qual ainda denotaremos por (v_{u_j}), que converge em $L^p(B^k_{\delta_1})$, $1 \leq p < \dfrac{2k}{k-2}$, para $v_u \in L^p(B^k_{\delta_1})$. Portanto, usando (3.35), temos que (u_j) converge em $L^p(U)$, $1 \leq p < \dfrac{2k}{k-2}$, para $v_u \circ h \in L^p(U)$. Raciocínio análogo pode ser aplicado nas vizinhanças do tipo (3.34).

Desse modo, como S^n é coberto por um número finito de parametrizações, podemos concluir que X_G está imerso compactamente em $L^p(S^n)$, para $1 \leq p < r$.

Caso 2.

Corolário 3.4.3 *Para $n = 3$, temos X_G imerso compactamente em $L^p(S^n)$ com $1 \leq p < \infty$. Para $n = 4$, temos X_G imerso compactamente em $L^p(S^n)$ com $1 \leq p < r$.*

Prova. A demonstração é um procedimento análogo ao do Lema 3.4.2. No caso $n = 3$, basta considerar $k = 2$, $m = 2$ e as imersões de Sobolev em $\mathbb{R}^2$. No caso $n = 4$, basta considerar $k = 3$, $m = 2$ e as imersões de Sobolev em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$. ∎

Portanto, usando as propiedades **P1)** e **P2),** o Lema 3.4.2 e o Corolário 3.4.3, podemos concluir a validade do Lema 3.3.1, através do Lema 3.4.1.

Depois disso, só resta-nos demonstrar o lema a seguir:

Lema 3.4.4 *As soluções fracas de (3.11) são, na verdade, de classe C^∞.*

Prova. Sejam v uma solução fraca de (3.11) e $f : S^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(p,t) = \left(|t|^{q-2} - \frac{n(n-2)}{4} \right) t.$$

Note que, desse modo, v é solução fraca de

$$-\Delta u = f(p,v)$$

e, além disso,

$$|f(p,v)| \leq (Q(p) + C_0)|v|,$$

onde $Q = |v|^{q-2} \in L^{\frac{n}{2}}(S^n)$ e $C_0 = \dfrac{n(n-2)}{4}$.

Portanto, a partir da Proposição 1.9.2, concluimos que $v \in C^\infty(S^n)$. ∎

Apêndice A

Variedades Riemannianas

Neste apêndice, apresentaremos alguns resultados e definições relativos às variedades diferenciáveis, os quais são relevantes neste trabalho. Mais detalhes em [7].

A.1 Variedades Diferenciáveis

Definição A.1.1 *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas* $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ *de abertos* U_α *de* $\mathbb{R}^n$ *em M tais que:*

(1) $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$;

(2) *Para todo par* (α, β) *com* $x_\alpha(U_\alpha) \bigcap x_\beta(U_\beta) = W \neq \phi$, *os conjuntos* $x_\alpha^{-1}(W)$ *e* $x_\beta^{-1}(W)$ *são abertos em* $\mathbb{R}^n$ *e as aplicações* $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha : x_\alpha^{-1}(W) \longrightarrow x_\beta^{-1}(W)$ *são diferenciáveis;*

(3) *A família* $F = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ *é máxima relativamente às condições* (1) *e* (2).

O par (U_α, x_α), *ou a aplicação* x_α, *é chamado uma parametrização, um sistema de coordenadas, ou uma carta local, de M em torno do ponto* $p \in x_\alpha(U_\alpha)$. *Uma família* $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ *satisfazendo as condições* **(1)** *e* **(2)** *é chamada atlas, ou estrutura diferenciável de M.*

Exemplos. *São variedades diferenciáveis os seguintes conjuntos:*

$$\mathbb{R}^n,\ S^n \text{ e } P^n(\mathbb{R}) = \{\text{retas de } \mathbb{R}^{n+1} \text{ que passam pela origem}\}.$$

Observação A.1.2 *O atlas da variedade diferenciável M faz dela um espaço topológico, onde* $A \subset M$ *é aberto se* $x^{-1}(A \cap x(U))$ *é um aberto de* $\mathbb{R}^n$, *qualquer que seja a parametrização* $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$.

Definição A.1.3 *Dizemos que uma família* $\{f_\alpha\}$ *de funções diferenciáveis* $f_\alpha : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma partição diferenciável da unidade se:*

(i) *Para todo* α, $f_\alpha \geq 0$ *e o suporte de* f_α *está contido em uma vizinhança coordenada* $V_\alpha = x_\alpha(U_\alpha)$ *de uma estrutura diferenciável* $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ *de* M*;*

(ii) *A família* $\{V_\alpha\}$ *é localmente finita;*

(iii) $\sum_\alpha f_\alpha(p) = 1$, *para todo* $p \in M$.

Dizemos que a partição $\{f_\alpha\}$ *da unidade está subordinada à cobertura* $\{V_\alpha\}$.

Restrições quanto à topologia de M:

Axioma de Hausdorff. Dados dois pontos distintos de M, existem vizinhanças destes dois pontos as quais não se intersectam.

Axioma de base enumerável. A variedade M pode ser coberta por uma quantidade enumerável de vizinhanças coordenadas.

A variedade M *é conexa.*

Estas considerações são importantes devido ao resultado abaixo.

Teorema A.1.4 *Uma variedade diferenciável* M *possui uma partição diferenciável da unidade se, e somente se, toda componente conexa de* M *é de Hausdorff e possui base enumerável.*

A.2 Espaço Tangente

Definição A.2.1 *Sejam* M_1 *e* M_2 *variedades diferenciáveis de dimensões* n *e* m*, respectivamente. Uma aplicação* $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ *é dita ser diferenciável em* $p \in M_1$ *se, dada uma parametrização* $y : V \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow M_2$ *em* $\varphi(p)$*, existe uma parametrização* $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M_1$ *em* p *tal que* $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ *e a aplicação*

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$*. Mais ainda, diz-se que* φ *é diferenciável em um aberto de* M_1 *se é diferenciável em todos os pontos desse aberto.*

Definição A.2.2 *Seja* M *uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável* $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ *é chamada uma curva (diferenciável) em* M*. Suponha que* $\alpha(0) = p \in M$*, e seja* $C^\infty(M)$ *o conjunto das funções* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *diferenciáveis em* p*. O vetor tangente à curva* α *em* $t = 0$ *é a função* $\alpha'(0) : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$\alpha'(0)f = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0}, \quad f \in C^\infty(M). \tag{A.1}$$

Um vetor tangente em $p \in M$ é um vetor tangente, em $t = 0$, a alguma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será denotado por T_pM.

De acordo com as notações na definição A.2.2, escolha uma parametrização $x : U \longrightarrow M$ em $p = x(q)$ e escreva

$$\begin{array}{c} (x^{-1} \circ \alpha)(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t)) \\ \text{e} \quad (f \circ x)(q) = \tilde{f}(x_1, \cdots, x_n),\ q = (x_1, \cdots, x_n) \in U. \end{array}$$

Assim,

$$\alpha'(0)f = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\tilde{f}(x_1(t), \cdots, x_n(t))\bigg|_{t=0} = \sum_i x_i'(0)\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(q).$$

Portanto, o vetor $\alpha'(0)$ pode ser expresso, através da parametrização x, por

$$\alpha'(0) = \sum_i x_i'(0)\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{A.2}$$

onde $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ denota o vetor pertencente ao conjunto T_pM tal que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f) = \frac{\partial(f \circ x)}{\partial x_i}(x^{-1}(p)), \quad \forall f \in C^{\infty}(M). \tag{A.3}$$

Observação A.2.3 *Com as operações usuais de funções, nota-se que T_pM é espaço vetorial. Além disso, escolhida uma parametrização $x : U \longrightarrow M$ em $p = x(q)$, pode-se ver que o conjunto $\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\}$ é uma base de T_pM, a qual chamamos de base associada à parametrização (U, x).*

Definição A.2.4 *O espaço vetorial T_pM é chamado espaço tangente de M em p.*

Proposição A.2.5 *Sejam M_1 e M_2 variedades de dimensões n e m, respectivamente. Seja $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M$ e cada $v \in T_p(M_1)$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M_1$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_p(M_1) \longrightarrow T_{\varphi(p)}(M_2)$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α.*

Definição A.2.6 *A aplicação linear $d\varphi_p$ dada pela Proposição A.2.5 é chamada diferencial de φ em p.*

Definição A.2.7 *Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Uma aplicação φ de M_1 em M_2 é um difeomorfismo se ela é diferenciável, biunívoca e sua inversa φ^{-1} é diferenciável.*

A.3 Campo de Vetores

Definição A.3.1 *Seja M uma variedade diferenciável. O conjunto* $TM = \{(p, v); p \in M,\ v \in T_pM\}$ *é chamado de fibrado tangente da variedade M.*

Proposição A.3.2 *O fibrado tangente TM é uma variedade diferenciável de dimensão* $2n$*, onde* M *tem dimensão* n*.*

Definição A.3.3 *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto* $p \in M$ *associa um vetor* $X(p) \in T_pM$*. O campo é dito diferenciável se a aplicação* $X : M \longrightarrow TM$ *é diferenciável.*

Notação. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em M.

Também é coveniente pensar em um campo de vetores como uma aplicação $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ definida por

$$(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p), \quad f \in C^\infty(M),$$

onde f indica, por um abuso de notação, a expressão de f na parametrização (U, x).

Lema A.3.4 *Sejam X e Y são campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M. Então, existe um único campo vetorial Z tal que, para todo* $f \in C^\infty(M)$*,* $Zf = (XY - YX)f$*.*

Definição A.3.5 *O campo vetorial diferenciável Z dado no lema A.3.4 é chamado o colchete(de Lie) dos campos X e Y, e é denotado por* $[X, Y]$*; ou seja, escrevemos*

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Definição A.3.6 *Um campo vetorial ao longo de uma curva* $c : I \longrightarrow M$ *é uma aplicação que a cada* $t \in I$ *associa um vetor tangente* $V(t) \in T_pM$*, a qual é diferenciável no seguinte sentido: se f é uma função diferenciável em M, então a funçãot* $\longmapsto V(t)f$ *é diferenciável em I. O campo vetorial* $dc\left(\frac{d}{dt}\right)$*, indicado por* $\frac{dc}{dt}$ *é chamado campo velocidade (ou tangente) de c.*

Observação A.3.7 *Sempre suporemos um atlas* $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ *para M de modo que os campos* $X_i^\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \in \mathfrak{X}(x_\alpha(U_\alpha))$ *sejam passíveis de extensão em M.*

A.4 Métricas Riemannianas

Definição A.4.1 *Uma métrica Riemanniana ou estrutura Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência g que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ é um sistema de coordenadas em torno de p, então, para cada (i, j), a função $g_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$g_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q, \tag{A.4}$$

onde $q = x(x_1, \cdots, x_n)$, é diferenciável.

As funções g_{ij} são chamadas expressões da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas (U, x). Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma variedade Riemanniana.

Proposição A.4.2 *Considere $(g^{ij})_{n\times n}$ a matriz inversa da matriz $(g_{ij})_{n\times n}$. Então,*

$$\frac{\partial g^{il}}{\partial x_j} = -\sum g^{ik} g^{ml} \frac{\partial g_{km}}{\partial x_j}. \tag{A.5}$$

Prova. Observe que

$$\sum_k g_{ik} g^{kl} = \delta_{il}.$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_k g_{ik} g^{kl}\right) = 0,$$

o que implica

$$\sum_k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} g^{kl} = -\sum_k g_{ik} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x_j}.$$

Denotando-se $D = \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}\right)_{n\times n}$, $B = (g_{ik})_{n\times n}$ e $C = \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x_j}\right)_{n\times n}$, temos, a partir da última iguadade,

$$DB^{-1} = -BC.$$

Assim,

$$C = -B^{-1}DB^{-1}.$$

Daí, efetuando-se o produto no lado direito da igualdade, pode-se concluir (A.5). ■

Definição A.4.3 *O comprimento ou norma de um vetor tangente $u \in T_pM$ é definido por*

$$\|u\| = \|u\|_p = \sqrt{\langle u, u\rangle_p}.$$

Observação A.4.4 *Seja* $f : M \longrightarrow N$ *uma imersão, isto é,* f *é diferenciável e* $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ *é injetiva para todo* $p \in M$*. Se* N *tem uma estrutura Riemanniana, podemos munir* M *com uma estrutura Riemanniana definindo*

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}, \quad u, v \in T_pM.$$

A métrica de M *obtida dessa maneira é dita induzida por* f*.*

Definição A.4.5 *Sejam* M *e* N *variedades Riemannianas. Um difeomorfismo* $f : M \longrightarrow N$ *é chamado isometria se*

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}, \tag{A.6}$$

quaisquer que sejam $p \in M$ *e* $u, v \in T_pM$*.*

Teorema A.4.6 *Uma variedade diferenciável* M *(de Hausdorff e com base enumerável) possui uma métrica Riemanniana.*

A.5 Conexões Riemannianas

Definição A.5.1 *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* M *é uma aplicação* $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$*, indicada por* $(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$*, a qual satisfaz às seguintes propriedades:*

(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

(ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

(iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f, g \in C^\infty(M)$*.*

Observação A.5.2 *A partir de (iii), pode-se mostrar que a conexão afim é uma noção local, isto é, se os campos* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *coincidem, em algum aberto* $A \subset M$*, com campos* $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathfrak{X}(M)$*, respectivamente, então* $\nabla_X Y$ *e* $\nabla_{\overline{X}}\overline{Y}$ *coincidem em* A*.*

Observação A.5.3 *Pode-se mostrar também que* $\nabla_X Y(p)$ *depende apenas do valor de* $X(p)$ *e do valor de* Y *ao longo de uma curva tangente a* X*.*

Observação A.5.4 *Considerando-se os campos* $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(M)$*, podemos escrever* $\nabla_{X_i} X_j$ *em* $x(U)$ *como*

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k.$$

Como $\nabla_{X_i} X_j$ *é um campo diferenciável, temos que as funções* Γ_{ij}^k *são diferenciáveis. Tais funções são chamadas símbolos de Christoffel associados à parametrização* (U, x)*.*

Proposição A.5.5 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então, existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $c : I \longrightarrow M$ um outro campo vetorial ao longo de c, denotado por $\frac{DV}{dt}$, tal que:*

a) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$;

b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{Dv}{dt}$;

Onde W é um campo de vetores ao longo de c, e f é uma função diferenciável em I.

c) *Se V é induzido por um campo de vetores Y, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$.*

Definição A.5.6 *Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \longrightarrow M$ é chamado paralelo quando $\frac{Dv}{dt} = 0$ para todo $t \in I$.*

Definição A.5.7 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle , \rangle$. A conexão é dita compatível com a métrica $\langle , \rangle$ quando, para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P, P' ao longo de c, tivermos $\langle P, P' \rangle =$ constante.*

Proposição A.5.8 *Suponha que uma variedade Riemanniana M tem uma conexão ∇ compatível com a métrica. Sejam V e W campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c : I \longrightarrow M$. Então,*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{dV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{dW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I. \tag{A.7}$$

Corolário A.5.9 *Uma conexão afim ∇ numa variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \tag{A.8}$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição A.5.10 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando, quaisquer que sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,temos*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]. \tag{A.9}$$

Teorema A.5.11 (Levi-Civita) *Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim* ∇ *em M que é simétrica e compatível com a métrica. Tal conexão é chamada conexão Riemanniana.*

Observação A.5.12 *Dada uma parametrização* (U, x) *de M, os símbolos de Christoffel da conexão Riemannina em termos de componentes da métrica são dados por*

$$\Gamma_{ij}^{m} = \frac{1}{2} \sum_{k} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) g^{km}. \tag{A.10}$$

Observação A.5.13 *Usando-se (A.10) e (A.5), podemos concluir que*

$$\frac{\partial g^{il}}{\partial x_j} = -\sum_{k} g^{ik} \Gamma_{jk}^{l} - \sum_{m} g^{ml} \Gamma_{jm}^{i}. \tag{A.11}$$

A.6 Curvatura

Definição A.6.1 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma lei que associa a cada par* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *uma aplicação* $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ *dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_X(\nabla_Y Z) + \nabla_{[X,Y]}Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M), \tag{A.12}$$

onde ∇ *é a conexão Riemanniana de M.*

Dada uma parametrização (U, x), ponhamos

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_{l} R_{ijk}^{l} X_l.$$

As funções R_{ijk}^{l} são chamadas de componentes da curvatura R em (U, x). Usando a equação (A.12) podemos obter a seguinte expressão de R_{ijk}^{l} em termos dos coeficientes Γ_{ij}^{k}:

$$R_{ijk}^{l} = \sum_{s} \Gamma_{ik}^{s} \Gamma_{js}^{l} - \sum_{s} \Gamma_{jk}^{s} \Gamma_{is}^{l} + \frac{\partial \Gamma_{ik}^{l}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^{l}}{\partial x_i}. \tag{A.13}$$

Proposição A.6.2 *Suponha que os campos* $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ *coincidem, no ponto* $p \in M$*, com os campos* $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, \overline{T} \in \mathfrak{X}(M)$*, respectivamente. Então,*

$$\langle R(X,Y)Z, T \rangle (p) = \left\langle R(\overline{X}, \overline{Y})\overline{Z}, \overline{T} \right\rangle (p).$$

Definição A.6.3 *Dados* $x, y, z, t \in T_pM$*, definimos*

$$(x, y, z, t) = \langle X, Y, Z, T \rangle (p),$$

onde $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ *são tais que* $X(p) = x$*,* $Y(p) = y$*,* $Z(p) = z$ *e* $T(p) = t$*.*

Notação. Denotaremos por $|x \wedge y|$ a expressão

$$\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}.$$

Proposição A.6.4 *Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bidimensional de T_pM e sejam $x, y \in \sigma$ vetores linearmente independentes. Então,*

$$K(x,y) = \frac{(x,y,x,y)}{|x \wedge y|^2} \tag{A.14}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Definição A.6.5 *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_pM$, o número $K(\sigma) = K(x,y)$ em (A.14), onde $\{x, y\}$ é uma base de σ, é chamado curvatura seccional de σ em p.*

Definição A.6.6 *Seja $x \in T_pM$ tal que $\|x\| = 1$. Escolha uma base ortonormal $\{z_1, \ldots, z_{n-1}\}$ do hiperplano, em T_pM, ortogonal a x. Os números*

$$\begin{aligned} &\operatorname{Ric}(x) = \sum_i (x, z_i, x, z_i) \\ \text{e} \quad &S(p) = \sum_j Ric(z_j) = \sum_{ij} (z_i, z_j, z_i, z_j), \quad x = z_n, \end{aligned} \tag{A.15}$$

são chamados curvatura de Ricci na direção x e curvatura escalar em p, respectivamente.

Observação A.6.7 Tais curvaturas independem da escolha das bases. Para concluir isto com relação à curvatura de Ricci, basta observar que $\operatorname{Ric}(x) = Q(x,x)$, onde a aplicação Q é definida por $Q(x,y) = \operatorname{Tr}(z \longmapsto R(x,z)y)$. Já com relação à curvatura escalar, basta verificar que $S(p)$ é o traço da aplicação linear auto-adjunta $\mathcal{K} : T_pM \longrightarrow T_pM$, a qual é correspondente à forma quadrática Q em T_pM, isto é,

$$\langle \mathcal{K}(x), y \rangle = Q(x,y).$$

Proposição A.6.8 *Dada uma carta local (U, x), a curvatura escalar S_g da variedade Riemanniana (M, g) pode ser escrita, em $x(U)$, como*

$$S_g = \sum_{ijk} g^{ik} R^j_{ijk} \tag{A.16}$$

Prova. Para demostrar (A.16) usaremos o seguite resultado de álgebra linear: *seja $T : V \longrightarrow V$ uma aplicação linear num espaço vetorial V, de dimensão n, munido com produto interno. Seja $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Então, o traço de T é dado por*

$$\operatorname{Tr}(T) = \sum_{kl} g^{kl} \langle T(v_l), v_k \rangle,$$

onde $(g^{kl})_{n\times n}$ *é a matriz inversa de* $(g_{kl})_{n\times n} = (\langle v_k, v_l\rangle)_{n\times n}$.

Considerando-se a carta (U, x) e a base $\{X_1, \ldots, X_n\}$, associada à x, podemos usar o resultado referido para obtermos

$$\begin{aligned} S_g &= \mathrm{Tr}(\mathcal{K}) = \sum_{ij} g^{ij} \langle \mathcal{K}(X_j), X_i\rangle = \sum_{ij} g^{ij} Q(X_j, X_i) \\ &= \sum_{ij} g^{ij} \cdot \mathrm{Tr}(Z \longmapsto R(Xj, Z)X_i) = \sum_{ij} g^{ij} \left[\sum_{ls} g^{ls} \langle R(X_j, X_s)X_i, X_l\rangle\right] \\ &= \sum_{ijkls} g^{ij} g^{ls} R^k_{jsi} g_{kl}. \end{aligned}$$

Daí,

$$S_g = \sum_{ijks} g^{ij} R^k_{jsi} \delta_{sk},$$

de onde segue (A.16). ∎

A.7 A Esfera S^n

Vamos, primeiramente, calcular a expressão dos símbolos de Christoffel na esfera S^n considerando-se uma parametrização dada pela projeção estereográfica. Depois, calcularemos, na vizinhança coordenada associada a esta parametrtização, a expressão da curvatura escalar. Estaremos considerando em S^n a métrica induzida pelo $\mathbb{R}^n$ através da aplicação identidade.

A.7.1 Símbolos de Christoffel em S^n

Seja π projeção estereográfica que associa a cada ponto $p = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n$, com excessão do Pólo Norte $N = (0, \ldots, 0, 1)$, a interseção do plano $x_{n+1} = 0$ com a reta determinada por N e p. A parametrização que consideraremos é $f = \pi^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n$, ou seja,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{2x_1}{1+|x|^2}, \ldots, \frac{2x_n}{1+|x|^2}, \frac{|x|^2-1}{1+|x|^2}\right).$$

Note que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(-\frac{4x_1x_i}{(1+|x|^2)^2}, \ldots, \underbrace{\frac{2(1+|x|^2)-4x_i^2}{(1+|x|^2)^2}}_{\text{i-ésima posição}}, \ldots, -\frac{4x_nx_i}{(1+|x|^2)^2}, \frac{4x_i}{(1+|x|^2)^2}\right)$$

Daí, podemos obter

$$g_{ij}(x) = 0, \quad i \neq j$$

e

$$g_{ii}(x) = \left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^2.$$

Logo, os coeficientes da matriz inversa (g^{ij}) são dados por

$$\begin{aligned} & g^{ij}(x) = 0, \quad i \neq j \\ \text{e} \quad & g^{ii}(x) = \left(\frac{1+|x|^2}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Usando estas equações e a expressão (A.10) podemos concluir que:

(1) $\Gamma_{ij}^m = 0, \quad i, j, m$ distintos;

(2) $\Gamma_{ii}^m = \dfrac{2x_m}{1+|x|^2}, \quad i \neq m;$

(3) $\Gamma_{im}^i = \dfrac{-2x_m}{1+|x|^2}, \quad i \neq m;$

(4) $\Gamma_{mm}^m = \dfrac{-2x_m}{1+|x|^2}.$

A.7.2 Curvatura Escalar em S^n

Usando (A.16), as componentes g_{ij} da métrica usual da esfera S^n e os símbolos de Christoffel calculados anteriormente, a curvatura escalar S_g de S^n, nesta parametrização, pode ser escrita como

$$S_g = \sum_{kj} g^{kk} R_{kjk}^j.$$

A partir de (A.13), temos

$$R_{kjk}^j = \frac{\partial \Gamma_{kk}^j}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^j}{\partial x_k} + \sum_l \Gamma_{kk}^l \Gamma_{jl}^j - \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{kl}^j.$$

É imediato verificar que $R_{kkk}^k = 0$. Entretanto, no caso em que $j \neq k$, temos

$$\begin{aligned} R_{kjk}^j \; = \; & \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{2x_j}{1+|x|^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{-2x_k}{1+|x|^2}\right) + \sum_{\substack{l\neq k \\ l\neq j}} \left(\frac{2x_l}{1+|x|^2}\right)\left(\frac{-2x_l}{1+|x|^2}\right) + \\ & + \left(\frac{-2x_k}{1+|x|^2}\right)\left(\frac{-2x_k}{1+|x|^2}\right) + \left(\frac{2x_j}{1+|x|^2}\right)\left(\frac{-2x_j}{1+|x|^2}\right) + \\ & - \left(\frac{-2x_j}{1+|x|^2}\right)\left(\frac{2x_j}{1+|x|^2}\right) - \left(\frac{-2x_k}{1+|x|^2}\right)\left(\frac{-2x_k}{1+|x|^2}\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$R_{kjk}^j = \left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^2,$$

o que implica

$$g^{kk} R_{kjk}^k = 1, \quad k \neq j.$$

Desse modo, como

$$S_g = \sum_{k\neq j} g^{kk} R_{kjk}^k,$$

concluimos que

$$S_g \equiv n(n-1).$$

A.8 Isometrias

Nesta seção, denotaremos por g e $\bar{g}$ as métricas das variedades Riemannianas M e N, respectivamente, e suporemos a existência de uma isometria $f : M \longrightarrow N$. Além disso, consideraremos:

a) $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ um atlas para M;

b) $\{(U_\alpha, f \circ x_\alpha)\}$ o atlas de N associado ao atlas $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ de M;

c) $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\}$ a base de T_pM associada à parametrização $x : U \longrightarrow M$;

d) $\{\frac{\partial}{\partial y_1}(f(p)), \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}(f(p))\}$ a base de $T_{(f(p))}N$ associada à parametrização $y = f \circ x : U \longrightarrow N$.

Lema A.8.1 *Dada uma função $u \in C^\infty(M)$, temos*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial(u \circ f^{-1})}{\partial y_i}(f(p)), \quad p \in x(U). \tag{A.17}$$

Ou ainda,

$$\frac{\partial(u \circ f^{-1})}{\partial y_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \circ f^{-1}. \tag{A.18}$$

Prova. Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(u \circ f^{-1})}{\partial y_i}(f(p)) &= \frac{\partial(u \circ f^{-1}) \circ (f \circ x)}{\partial y_i}((f \circ x)^{-1}(f(p))) \\
&= \frac{\partial(u \circ x)}{\partial x_i}(x^{-1}(p)) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x_i}(p),
\end{aligned}$$

de onde segue o resultado. ■

Lema A.8.2 *Os vetores das bases associadas às parametrizações dadas se relacionam através da equação*

$$df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\right) = \frac{\partial}{\partial y_i}(f(p)). \tag{A.19}$$

Prova. Note que $y^{-1} \circ f \circ x = I$, onde I é a aplicação identidade. Assim, as coordenadas de $df_p\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}(p)\right)$ com relação à base $\{\dfrac{\partial}{\partial y_1}(f(p)), \ldots, \dfrac{\partial}{\partial y_n}(f(p))\}$ são dadas pelo produto $dI_{x^{-1}(p)}(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, onde $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ são as coordenadas de $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(p)$ em relação à base $\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}(p), \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}(p)\}$. Daí, conclui-se (A.19). ∎

Teorema A.8.3 *As métricas g e $\bar{g}$ relacionam-se da seguinte maneira:*

$$\bar{g}_{ij} = g_{ij} \circ f^{-1}. \tag{A.20}$$

Consequentemente,

$$\bar{g}^{ij} = g^{ij} \circ f^{-1}. \tag{A.21}$$

Prova. Dado $q \in N$, considere $p \in M$ tal que $f(p) = q$. Desse modo, sendo $f \circ x : U \longrightarrow N$ uma parametrização tal que $q \in f(x(U))$, temos

$$\bar{g}_{ij}(q) = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}(f(p)), \frac{\partial}{\partial y_j}(f(p)) \right\rangle_{f(p)}.$$

Usando (A.19) e o fato de que f é isometria, obtemos

$$\bar{g}_{ij}(q) = \left\langle df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\right), df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(p)\right) \right\rangle_{f(p)} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle_p = g_{ij}(p).$$

Portanto (A.20) fica demonstrada e (A.21) é consequência de (A.20). ∎

Teorema A.8.4 *Os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^m e $\bar{\Gamma}_{ij}^m$ associados às parametrizações (U, x) e $(U, f \circ x)$, respectivamente, relacionam-se da seguinte maneira:*

$$\bar{\Gamma}_{ij}^m = \Gamma_{ij}^m \circ f^{-1}. \tag{A.22}$$

Prova. Dado $q \in N$, consideremos $p \in M$ tal que $f(p) = q$, e $f \circ x : U \longrightarrow N$ uma parametrização tal que $q \in f(x(U))$.

Temos que

$$\bar{\Gamma}_{ij}^m(q) = \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial \bar{g}_{jk}}{\partial y_i}(q) + \frac{\partial \bar{g}_{ik}}{\partial y_j}(q) - \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial y_k}(q) \right) \bar{g}^{km}(q).$$

Usando (A.17), (A.20) e (A.21), obtemos

$$
\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{ij}^m(q) &= \frac{1}{2}\sum_k \left(\frac{\partial(\bar{g}_{jk}\circ f)}{\partial x_i}(p) + \frac{\partial(\bar{g}_{ik}\circ f)}{\partial x_j}(p) - \frac{\partial(\bar{g}_{ij}\circ f)}{\partial x_k}(p) \right) (\bar{g}^{km}\circ f)(p). \\
&= \frac{1}{2}\sum_k \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}(p) + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}(p) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(p) \right) g^{km}(p). \\
&= \Gamma_{ij}^m(p).
\end{aligned}
$$

Daí, conclui-se (A.22). ■

Observação A.8.5 *A partir de* (A.22) *e* (A.13)*, podemos concluir que*

$$\bar{R}_{ijk}^l = R_{ijk}^l \circ f^{-1}.$$

Através desta última igualdade e de (A.16), verifica-se facilmente o seguinte:

Corolário A.8.6 *As curvaturas escalares S_g e $S_{\bar{g}}$, respectivamente de M e N, relacionam-se de acordo com a equação*

$$S_{\bar{g}} = S_g \circ f^{-1}. \tag{A.23}$$

Teorema A.8.7 *A partir destes resultados anteriores, temos o seguinte:*

(i) $\Delta_{\bar{g}}(u\circ f^{-1}) = (\Delta_g u)\circ f^{-1}$*;*

(ii) $|\nabla_{\bar{g}}(u\circ f^{-1})|^2 = |\nabla_g u|^2 \circ f^{-1}$.

Prova. Note que

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\bar{g}}(u\circ f^{-1})(f(p)) &= \frac{1}{\sqrt{\det(\bar{g}_{ij}(f(p)))}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\sqrt{\det(\bar{g}_{ij})}\ \bar{g}^{ij} \frac{\partial(u\circ f^{-1})}{\partial y_j} \right)(f(p)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(\bar{g}_{ij}(f(p)))}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{\det(\bar{g}_{ij}\circ f)}\ (\bar{g}^{ij}\circ f) \frac{\partial(u\circ f^{-1})}{\partial y_j}\circ f \right)(p).
\end{aligned}
$$

Usando, agora, (A.18), (A.20) e (A.21), concluímos que

$$\Delta_{\bar{g}}(u\circ f^{-1})(f(p)) = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij}(p))}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{\det(g_{ij})}\ g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)(p),$$

o que impllica em *(i)*.

Além disso, observe que

$$
\begin{aligned}
\left|\nabla_{\bar{g}}(u\circ f^{-1})\right|^2 (f(p)) &= \sum_{ij} \bar{g}^{ij}(f(p)) \frac{\partial(u\circ f^{-1})}{\partial y_i}(f(p)) \frac{\partial(u\circ f^{-1})}{\partial y_j}(f(p)) \\
&= \sum_{ij} g^{ij}(p) \frac{\partial u}{\partial x_i}(p) \frac{\partial u}{\partial x_j}(p).
\end{aligned}
$$

Daí, segue *(ii)*. ■

No próximo teorema, estamos supondo a definição de integral em variedades Riemannianas, a qual se encontra no Capítulo 1.

Teorema A.8.8 *Seja $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e integrável. Então,*

$$\int_M u dV_g = \int_N (u \circ f^{-1}) dV_{\bar{g}}. \tag{A.24}$$

Prova. Demonstraremos tal igualdade no caso em que $supp(u) \subset\subset x(U)$, onde estamos denotando por $supp(u)$ o suporte da função u. Inicialmente, observemos que

$$\int_M u dV_g = \int_U (u \circ x) \sqrt{\det(g_{ij} \circ x)}.$$

Como $supp(u) \subset\subset x(U)$, então $supp(u \circ f^{-1}) \subset\subset f(x(U))$. Logo,

$$\int_N (u \circ f^{-1}) dV_{\bar{g}} = \int_U ((u \circ f^{-1}) \circ (f \circ x)) \sqrt{\det(\bar{g_{ij}} \circ (f \circ x))}.$$

Destas duas últimas equações, conclui-se o que queríamos demonstrar. ∎

Apêndice B

Gradiente, Divergente e Laplaciano

B.1 Gradiente

Definição B.1.1 *Seja $f \in C^\infty(M)$, onde M é uma variedade Riemanniana. O gradiente de f é o campo de vetores em M, denotado por ∇f, definido pela seguinte condição:*

$$\langle \nabla f(p), v\rangle = df_p(v), \quad p \in M, \quad v \in T_pM. \tag{B.1}$$

Proposição B.1.2 *Se $f, g \in C^\infty(M)$, então:*

(i) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;

(ii) $\nabla(f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$.

Prova. Omitiremos esta demonstração em virtude de se tratar de um simples uso das propriedades da diferencial de uma aplicação. ■

Proposição B.1.3 *Sejam $x : U \longrightarrow M$ uma parametrização de M, e $f \in C^\infty(M)$. Então, na vizinhança $x(U)$, temos*

$$\nabla f = \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{B.2}$$

Consequentemente, $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$.

Prova. Nesta demonstração, iremos usar o fato de que

$$df_p(v) = v(f), \quad p \in M, \quad v \in T_pM.$$

Suponha que, nesta parametrtização, tenhamos

$$\nabla f = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\cdot$$

Portanto, em $x(U)$,

$$\left\langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_i a_i \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_i a_i g_{ij}. \tag{B.3}$$

Assim, denotando $F = \left(\left\langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle\right)_{n\times 1}$, $A = (a_i)_{n\times 1}$ e $B = (g_{ij})_{n\times n}$, decorre de (B.3) que $F = BA$. Sendo B invertível, temos $A = B^{-1}F$. Desse modo,

$$a_i = \sum_j g^{ij} \left\langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_j g^{ij} df \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

de onde segue o resultado afirmado. ■

Observação B.1.4 *Utilizando a expressão (B.2) do gradiente, obtemos*

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot \tag{B.4}$$

Com efeito, temos

$$\nabla u = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \text{ e } \nabla v = \sum_{k,\ell=1}^{n} g^{k\ell} \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_\ell}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla u, \nabla v \rangle &= \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} g_{j\ell} g^{k\ell} \frac{\partial v}{\partial x_k} \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} \left(\sum_{\ell=1}^{n} g_{j\ell} g^{\ell k} \right) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} \delta_{jk} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

B.2 Divergente

Definição B.2.1 *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. O divergente de X é a função $div\ X : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definda por*

$$div\ X(p) = \mathrm{Tr}\left(\begin{array}{ccc} T_pM & \longrightarrow & T_pM \\ v & \longmapsto & (\nabla_v X)(p) \end{array}\right), \tag{B.5}$$

onde Tr denota o traço da aplicação em questão e ∇ é a conexão de M.

Proposição B.2.2 *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$. Então:*

(i) *$div\ (X+Y) = div\ X + div\ Y$;*

(ii) *$div\ (fX) = f \cdot divX + \langle \nabla f, X\rangle$.*

Prova. É fácil concluirmos a validade do ítem **(i)**. Portanto, faremos apenas a demonstração do ítem **(ii)**.

Para cada $p \in M$, temos

$$\begin{aligned} div\ (fX)(p) &= \mathrm{Tr}(v \longmapsto \nabla_v(fX)(p)) \\ &= \mathrm{Tr}(v \longmapsto f(p)\nabla_v X(p) + v(f)X(p)) \\ &= f(p)\mathrm{Tr}(v \longmapsto \nabla_v X(p)) + \sum_i \langle e_i(f)X(p), e_i\rangle, \end{aligned}$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é base ortonormal de T_pM.

Então,

$$\begin{aligned} div\ (fX)(p) &= f(p)div\ X(p) + \sum_i e_i(f)\langle X(p), e_i\rangle \\ &= f(p)div\ X(p) + \sum_i \langle \nabla f(p), e_i\rangle \langle X(p), e_i\rangle \\ &= f(p)div\ X(p) + \langle \nabla f(p), X(p)\rangle, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

Proposição B.2.3 *Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $x : U \longrightarrow M$ uma parametrização de modo que, em $x(U)$, tenhamos $X = \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Então, nesta parametrização,*

$$div\ X = \sum_i \left[\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_j a_j \Gamma^i_{ij}\right]. \tag{B.6}$$

Consequentemente, $div\ X \in C^\infty(M)$.

Prova. Por definição, para cada $p \in M$,

$$div\ X(p) = \mathrm{Tr}(H_p),$$

onde $H_p(v) = \nabla_v X(p), \quad v \in T_pM$.

Note que

$$\begin{aligned}
H_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(\textstyle\sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_j}) = \sum_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_j \left(a_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\
&= \sum_j \left(\sum_k a_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\
&= \sum_k \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i} + \sum_j a_j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

Desta última expressão, podemos concluir que

$$\mathrm{Tr}(H_p) = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \sum_j a_j \Gamma_{1j}^1 \right) + \cdots + \left(\frac{\partial a_n}{\partial x_n} + \sum_j a_j \Gamma_{nj}^n \right).$$

Daí, notamos que a equação (B.6) é verificada. ■

Proposição B.2.4 *Considerando-se as mesmas hipóteses da Proposição B.2.3, obtemos*

$$div\ X = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i \sqrt{G}\right), \tag{B.7}$$

onde $G = \det(g_{kj})$.

Prova. Será necessário utilizar, nesta demonstração, o seguinte resultado: *Se* $A \in C^\infty((a,b); Gl_n(\mathbb{R}))$, *então* $(\det A)' = \det A \cdot \mathrm{Tr}(A' A^{-1})$ *em* (a,b).

Observe que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i\sqrt{G}\right) = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\sqrt{G} + \frac{a_i}{2\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial x_i}.$$

Em virtude do resultado citado anteriormente, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial x_i} &= G \cdot \mathrm{Tr}\left[\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} \right)_{n\times n} (g^{kj})_{n\times n} \right] \\
&= G \left(\sum_k \frac{\partial g_{1k}}{\partial x_i} g^{k1} + \cdots + \sum_k \frac{\partial g_{nk}}{\partial x_i} g^{kn} \right) \\
&= G \left(\sum_{kj} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj} \right).
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i\sqrt{G}\right) = \sqrt{G}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{a_i}{2} \sum_{jk} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj} \right). \tag{B.8}$$

Por outro lado, usando (B.6),

$$div\ X = \sum_i \left[\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{jk} \frac{a_i}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) g^{ki} \right].$$

Logo,

$$div\ X = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{ijk} \frac{a_j}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{ki} + \sum_{ijk} \frac{a_j}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} g^{ki} - \sum_{ijk} \frac{a_j}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} g^{ki}.$$

Observando-se que a segunda e quarta parcelas, nesta soma, se anulam, resta-nos que

$$div\ X = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{ijk} \frac{a_j}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} g^{ki},$$

o que implica

$$div\ X = \sum_i \left[\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{a_i}{2} \sum_{jk} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj} \right].$$

Desta última igualdade e de (B.8), obtemos o resultado desejado. ■

B.3 Laplaciano

Definição B.3.1 *Seja $f \in C^\infty(M)$. O laplaciano de f é a aplicação $\Delta f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\Delta f(p) = div\ (\nabla f)(p). \tag{B.9}$$

É imediato verificar que $\Delta f \in C^\infty(M)$.

Definição B.3.2 *O operador $f \longmapsto \Delta f$ de $C^\infty(M)$ em $C^\infty(M)$ é chamado operador de Laplace-Beltrami.*

Proposição B.3.3 *Sejam $f, g \in C^\infty(M)$. Então:*

(i) $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$;

(ii) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle$.

Prova. Basta usar as proposições B.1.2 e B.2.2. ■

Proposição B.3.4 *sejam $f \in C^\infty(M)$ e $x : U \longrightarrow M$ uma parametrização. Então, em $x(U)$,*

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right), \tag{B.10}$$

onde $G = \det(g_{ij})$.

Prova. Este resultado segue imediatamente de (B.9) utilizando-se as identidades (B.2) e (B.7). ■

Proposição B.3.5 *Sob as mesmas hipóteses da Proposição B.3.4, temos*

$$\Delta f = \sum_{ij} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \Gamma_{ij}^k \right). \tag{B.11}$$

Prova. Substituindo (B.2) e (B.6), temos

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) + \sum_k \left(\sum_j g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \Gamma_{ik}^i \right] \\ &= \sum_{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{ijk} g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^i. \end{aligned}$$

Usando (A.11), obtemos

$$\Delta f = -\sum_{ijk} g^{ik} \Gamma_{ik}^j \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{ijm} g^{jm} \Gamma_{im}^i \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{ijk} g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^i.$$

Observando-se que a segunda e quarta parcelas, desta soma, se anulam, concluímos que

$$\Delta f = \sum_{ij} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \Gamma_{ij}^k \right),$$

como queríamos demonstrar. ■

Apêndice C

Métricas Conformes

Definição C.1 *Sejam g e $\tilde{g}$ métricas Riemannianas numa variedade diferenciável M. Dizemos que tais métricas são conformes se existe uma função $\phi \in C^\infty(M)$ positiva tal que $\tilde{g} = \phi g$.*

Teorema C.2 *Se g e $\tilde{g}$ são métricas conformes em uma Variedade Riemanniana M, isto é, $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$, sendo u é uma função diferenciável positiva de M em $\mathbb{R}$, então as curvaturas escalares (respectivamente denotadas por S_g e $S_{\tilde{g}}$) associadas a tais métricas, relacionam-se através da equação*

$$-\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} u S_g = \frac{n-2}{4(n-1)} u^{\frac{n+2}{n-2}} S_{\tilde{g}}. \tag{C.1}$$

Prova. A prova de tal fato se dá através de alguns cálculos, como veremos a seguir. Para efeito de simplificação, estabeleceremos, nesta seção, a notação $r = \frac{4}{n-2}$. Além disso, as notações associadas ao símbolo $\sim$ sempre farão referência à métrica $\tilde{g}$. Por exemplo, $\tilde{g}_{ij}$ denotará as componentes da métrica $\tilde{g}$.

Passo 1

Como $\tilde{g} = u^r g$, então $\tilde{g}_{ij} = u^r g_{ij}$ e $\tilde{g}^{ij} = u^{-r} g^{ij}$. Usando a expressão dos símbolos de Christoffel numa parametrização $x : U \longrightarrow M$ e denotando $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{ij}^l &= \frac{1}{2} \sum_k (\partial_i \tilde{g}_{jk} + \partial_j \tilde{g}_{ik} - \partial_k \tilde{g}_{ij}) \tilde{g}^{kl} \\
&= \frac{1}{2} \sum_k [\partial_i (u^r g_{jk}) + \partial_j (u^r g_{ik}) - \partial_k (u^r g_{ij})] u^{-r} g^{kl} \\
&= \frac{1}{2} r u^{-1} \sum_k (g_{jk} \partial_i u + g_{ik} \partial_j u - g_{ij} \partial_k u) g^{kl} + \frac{1}{2} \sum_k (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) g^{kl}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\tilde{\Gamma}^l_{ij} \quad = \quad \Gamma^l_{ij} + \frac{1}{2} r u^{-1} \left[\sum_k (g_{kj} g^{kl} \partial_i u) + \sum_k (g_{ik} g^{kl} \partial_j u) - \sum_k (g_{ij} g^{kl} \partial_k u) \right],$$

o que implica

$$\tilde{\Gamma}^l_{ij} = \Gamma^l_{ij} + \frac{1}{2} r u^{-1} \left[\delta_{jl} \partial_i u + \delta_{il} \partial_j u - \sum_k (g_{ij} g^{kl} \partial_k u) \right]. \qquad \text{(C.2)}$$

Como a expressão da curvatura escalar $S_{\tilde{g}}$ em termos de componentes da métrica é dada por

$$S_{\tilde{g}} = \sum_{ijk} \tilde{g}^{ik} \tilde{R}^j_{ijk},$$

então

$$S_{\tilde{g}} = \sum_{ijk} u^{-r} g^{ik} \left[\partial_j \tilde{\Gamma}^j_{ik} - \partial_i \tilde{\Gamma}^j_{jk} + \sum_s \tilde{\Gamma}^s_{ik} \tilde{\Gamma}^j_{js} - + \sum_s \tilde{\Gamma}^s_{jk} \tilde{\Gamma}^j_{is} \right]. \qquad \text{(C.3)}$$

Substituindo (C.2) em (C.3), obtemos

$$\begin{aligned}
u^r S_{\tilde{g}} \quad = \quad & \sum_{ijk} g^{ik} \partial_j \left[\Gamma^j_{ik} + \frac{1}{2} r u^{-1} \left(\delta_{kj} \partial_i u + \delta_{ij} \partial_k u - \sum_m g_{ik} g^{mj} \partial_m u \right) \right] + \\
& - \sum_{ijk} g^{ik} \partial_i \left[\Gamma^j_{jk} + \frac{1}{2} r u^{-1} \left(\delta_{kj} \partial_j u + \delta_{jj} \partial_k u - \sum_m g_{jk} g^{mj} \partial_m u \right) \right] + \\
& + \sum_{ijks} g^{ik} \left[\Gamma^s_{ik} + \frac{1}{2} r u^{-1} \left(\delta_{ks} \partial_i u + \delta_{is} \partial_k u - \sum_m g_{ik} g^{ms} \partial_m u \right) \right] \cdot \\
& \cdot \left[\Gamma^j_{js} + \frac{1}{2} r u^{-1} \left(\delta_{sj} \partial_j u + \delta_{jj} \partial_s u - \sum_p g_{js} g^{pj} \partial_p u \right) \right] + \\
& - \sum_{ijks} g^{ik} \left[\Gamma^s_{jk} + \frac{1}{2} r u^{-1} \left(\delta_{ks} \partial_j u + \delta_{js} \partial_k u - \sum_m g_{jk} g^{ms} \partial_m u \right) \right] \cdot \\
& \cdot \left[\Gamma^j_{is} + \frac{1}{2} r u^{-1} \left(\delta_{sj} \partial_i u + \delta_{ij} \partial_s u - \sum_l g_{is} g^{lj} \partial_l u \right) \right].
\end{aligned} \qquad \text{(C.4)}$$

Passo 2

Denotaremos, de agora em diante, por A, B, C e D, a primeira, segunda, terceira e quarta parcelas, respectivamente, da soma no lado direito da igualdade na equação (C.4).

Observe, então, que

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{ijk} g^{ik}\partial_j\Gamma_{ik}^j + \frac{ru^{-1}}{2}\sum_{ijk} g^{ik}\delta_{kj}\partial_{ji}u + \frac{ru^{-1}}{2}\sum_{ijk} g^{ik}\delta_{ij}\partial_{jk}u + \\
&\quad - \frac{ru^{-1}}{2}\sum_{ijkm} g^{ik}\partial_j(g_{ik}g^{mj}\partial_m u) - \frac{ru^{-2}}{2}\sum_{ijk} g^{ik}\delta_{kj}\partial_j u\partial_i u + \\
&\quad - \frac{ru^{-2}}{2}\sum_{ijk} g^{ik}\delta_{ij}\partial_j u\partial_k u + \frac{ru^{-2}}{2}\sum_{ijkm} g^{ik}g_{ik}\partial_j u\partial_m u \\
&= \sum_{ijk} g^{ik}\partial_j\Gamma_{ik}^j + \frac{ru^{-1}}{2}\sum_{ik} g^{ik}\partial_{ki}u + \frac{ru^{-1}}{2}\sum_{jk} g^{jk}\partial_{jk}u + \\
&\quad - \frac{ru^{-1}}{2}\sum_{ijkm} g^{ik}\partial_j(g_{ik}g^{mj}\partial_m u) - \frac{ru^{-2}}{2}\sum_{jk} g^{jk}\partial_j u\partial_k u + \\
&\quad - \frac{ru^{-2}}{2}\sum_{jk} g^{jk}\partial_j u\partial_k u + \frac{nru^{-2}}{2}\sum_{mj} g^{mj}\partial_j u\partial_m u \\
&= \sum_{ijk} g^{ik}\partial_j\Gamma_{ik}^j + ru^{-1}\sum_{ik} g^{ik}\partial_{ki}u - \frac{ru^{-1}}{2}\sum_{ijkm} g^{ik}\partial_j(g_{ik})g^{mj}\partial_m u + \\
&\quad - \frac{ru^{-1}}{2}\sum_{ijkm} g^{ik}g_{ik}\partial_j(g^{mj})\partial_m u - \frac{ru^{-1}}{2}\sum_{ijkm} g^{ik}g_{ik}g^{mj}\partial_{mj}u + \\
&\quad + \frac{(n-2)ru^{-2}}{2}\sum_{jk} g^{jk}\partial_j u\partial_k u \\
&= \sum_{ijk} g^{ik}\partial_j\Gamma_{ik}^j + ru^{-1}\sum_{ik} g^{ik}\partial_{ki}u - \frac{ru^{-1}}{2}\sum_{ijkm} g^{ik}\partial_j(g_{ik})g^{mj}\partial_m u + \\
&\quad - \frac{nru^{-1}}{2}\sum_{jm} \partial_j(g^{mj})\partial_m u - \frac{nru^{-1}}{2}\sum_{jm} g^{mj}\partial_{mj}u + 2u^{-2}\sum_{jk} g^{jk}\partial_j u\partial_k u.
\end{aligned}$$

Usando a igualdade em (A.5), temos

$$\partial_j(g^{mj}) = -\sum_{ik} g^{mi}\partial_j(g_{ik})g^{jk}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{ijk} g^{ik}\partial_j\Gamma_{ik}^j - 2u^{-1}\sum_{ik} g^{ik}\partial_{ki}u - \frac{ru^{-1}}{2}\sum_{ijkm} g^{ik}\partial_j(g_{ik})g^{mj}\partial_m u + \\
&\quad + \frac{nru^{-1}}{2}\sum_{ijkm} g^{mi}\partial_j(g_{ik})g^{jk}\partial_m u + 2u^{-2}\sum_{jk} g^{jk}\partial_j u\partial_k u.
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
B &= \sum_{ijk} g^{ik}\partial_i\Gamma_{jk}^j + \sum_{ijk} g^{ik}\partial_i\left[\frac{ru^{-1}}{2}\left(\delta_{kj}\partial_j u + \delta_{jj}\partial_k u - \sum_m g_{jk}g^{mj}\partial_m u\right)\right] \\
&= \sum_{ijk} g^{ik}\partial_i\Gamma_{jk}^j + \sum_{ik} g^{ik}\partial_i\left[\sum_j \frac{ru^{-1}}{2}\left(\delta_{kj}\partial_j u + \delta_{jj}\partial_k u - \sum_m g_{jk}g^{mj}\partial_m u\right)\right] \\
&= \sum_{ijk} g^{ik}\partial_i\Gamma_{jk}^j + \frac{nr}{2}\sum_{ik} g^{ik}\partial_i(u^{-1}\partial_k u),
\end{aligned}$$

o que implica

$$B=\sum_{ijk}g^{ik}\partial_i\Gamma^j_{jk}-\frac{nru^{-2}}{2}\sum_{ik}g^{ik}\partial_iu\partial_ku+\frac{nru^{-1}}{2}\sum_{ik}g^{ik}\partial_{ik}u. \tag{C.6}$$

Podemos, também, desenvolver o produto em C, para obtermos

$$\begin{aligned}
C \;=\;& \sum_{ijks}g^{ik}\Gamma^s_{ik}\Gamma^j_{js}+\frac{ru^{-1}}{2}\sum_{ijks}g^{ik}\Gamma^s_{ik}\left(\delta_{sj}\partial_ju+\delta_{jj}\partial_su-\sum_p g_{js}g^{pj}\partial_pu\right)+\\
&+\frac{ru^{-1}}{2}\sum_{ijks}g^{ik}\Gamma^j_{js}\left(\delta_{ks}\partial_iu+\delta_{is}\partial_ku-\sum_m g_{ik}g^{ms}\partial_mu\right)+\\
&+\frac{r^2u^{-2}}{4}\sum_{ijks}g^{ik}\left(\delta_{ks}\partial_iu+\delta_{is}\partial_ku-\sum_m g_{ik}g^{ms}\partial_mu\right)\cdot\\
&\cdot\left(\delta_{sj}\partial_ju+\delta_{jj}\partial_su-\sum_p g_{js}g^{pj}\partial_pu\right)\\
=\;& \sum_{ijks}g^{ik}\Gamma^s_{ik}\Gamma^j_{js}+\frac{nru^{-1}}{2}\sum_{iks}g^{ik}\Gamma^s_{ik}\partial_su+\frac{ru^{-1}}{2}\sum_{ijs}g^{is}\Gamma^j_{js}\partial_iu+\\
&+\frac{ru^{-1}}{2}\sum_{jks}g^{sk}\Gamma^j_{js}\partial_ku-\frac{nru^{-1}}{2}\sum_{jsm}g^{ms}\Gamma^j_{js}\partial_mu+\\
&+\frac{nr^2u^{-2}}{4}\sum_{iks}g^{ik}\delta_{ks}\partial_iu\partial_su+\frac{nr^2u^{-2}}{4}\sum_{iks}g^{ik}\delta_{is}\partial_ku\partial_su+\\
&-\frac{nr^2u^{-2}}{4}\sum_{iksm}g^{ik}g_{ik}g^{ms}\partial_mu\partial_su\\
=\;& \sum_{ijks}g^{ik}\Gamma^s_{ik}\Gamma^j_{js}+\frac{nru^{-1}}{2}\sum_{iks}g^{ik}\Gamma^s_{ik}\partial_su+\frac{(2-n)ru^{-1}}{2}\sum_{jks}g^{ks}\Gamma^j_{js}\partial_ku+\\
&+\left(\frac{nr^2u^{-2}}{2}-\frac{n^2r^2u^{-2}}{4}\right)\sum_{ks}g^{ks}\partial_ku\partial_su.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
C \;=\;& \sum_{ijks}g^{ik}\Gamma^s_{ik}\Gamma^j_{js}+\frac{nru^{-1}}{2}\sum_{iks}g^{ik}\Gamma^s_{ik}\partial_su+2u^{-1}\sum_{jks}g^{ks}\Gamma^j_{js}\partial_ku+\\
&+\frac{4nu^{-2}}{2-n}\sum_{ks}g^{ks}\partial_ku\partial_su.
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Finalmente, observe que

$$\begin{aligned}
D &= \sum_{ijks} g^{ik}\Gamma^s_{jk}\Gamma^j_{is} + \frac{ru^{-1}}{2}\sum_{ijks} g^{ik}\Gamma^s_{jk}\left(\delta_{sj}\partial_i u + \delta_{ij}\partial_s u - \sum_l g_{is}g^{lj}\partial_l u\right) + \\
&+\frac{ru^{-1}}{2}\sum_{ijks} g^{ik}\Gamma^j_{is}\left(\delta_{ks}\partial_j u + \delta_{js}\partial_k u - \sum_m g_{jk}g^{ms}\partial_m u\right) + \\
&+\frac{r^2u^{-2}}{4}\sum_{ijks} g^{ik}\left(\delta_{ks}\partial_j u + \delta_{js}\partial_k u - \sum_m g_{jk}g^{ms}\partial_m u\right)\cdot \\
&\cdot\left(\delta_{sj}\partial_i u + \delta_{ij}\partial_s u - \sum_l g_{is}g^{lj}\partial_l u\right) \\
&= \sum_{ijks} g^{ik}\Gamma^s_{jk}\Gamma^j_{is} + \frac{ru^{-1}}{2}\sum_{ijk} g^{ik}\Gamma^j_{jk}\partial_i u + \frac{ru^{-1}}{2}\sum_{jks} g^{jk}\Gamma^s_{jk}\partial_s u + \\
&-\frac{ru^{-1}}{2}\sum_{ijksl} g^{ik}\Gamma^s_{jk}g_{is}g^{jl}\partial_l u + \frac{ru^{-1}}{2}\sum_{ijs} g^{is}\Gamma^j_{is}\partial_j u + \frac{ru^{-1}}{2}\sum_{iks} g^{ik}\Gamma^s_{is}\partial_k u + \\
&-\frac{ru^{-1}}{2}\sum_{ijksm} g^{ik}\Gamma^j_{is}g_{jk}g^{ms}\partial_m u + \frac{r^2u^{-2}}{4}\sum_{ijks} g^{ik}\delta_{ks}\partial_j u\delta_{sj}\partial_i u + \\
&+\frac{r^2u^{-2}}{4}\sum_{ijks} g^{ik}\delta_{ks}\partial_j u\delta_{ij}\partial_s u - \frac{r^2u^{-2}}{4}\sum_{ijksl} g^{ik}\delta_{ks}\partial_j u g_{is}g^{jl}\partial_l u + \\
&+\frac{r^2u^{-2}}{4}\sum_{ijks} g^{ik}\delta_{js}\partial_k u\delta_{sj}\partial_i u + \frac{r^2u^{-2}}{4}\sum_{ijks} g^{ik}\delta_{js}\partial_k\delta_{ij}\partial_s u + \\
&-\frac{r^2u^{-2}}{4}\sum_{ijksl} g^{ik}\delta_{js}\partial_k u g_{is}g^{jl}\partial_l u - \frac{r^2u^{-2}}{4}\sum_{ijksm} g^{ik}g_{jk}g^{ms}\partial_m u\delta_{sj}\partial_i u + \\
&-\frac{r^2u^{-2}}{4}\sum_{ijksm} g^{ik}g_{jk}g^{ms}\partial_m u\delta_{ij}\partial_s u + \frac{r^2u^{-2}}{4}\sum_{ijksml} g^{ik}g_{jk}g^{ms}\partial_m u g_{is}g^{jl}\partial_l u.
\end{aligned}$$

Daí, podemos concluir que

$$D = \sum_{ijks} g^{ik}\Gamma^s_{jk}\Gamma^j_{is} + ru^{-1}\sum_{ijk} g^{ik}\Gamma^j_{ik}\partial_j u + \frac{(2-n)r^2u^{-2}}{4}\sum_{ik} g^{ik}\partial_k u\partial_i u. \qquad \text{(C.8)}$$

Passo 3

Substituindo-se (C.5)-(C.8) em (C.4) e usando a expressão da curvatura escalar S_g em termos de componentes da métrica, notamos que

$$\begin{aligned}
u^r S_{\tilde g} &= S_g - 2u^{-1}\sum_{ik} g^{ik}\partial_{ik}u - \frac{ru^{-1}}{2}\sum_{ijkm} g^{ik}\partial_j(g_{ik})g^{mj}\partial_m u + \\
&+\frac{nru^{-1}}{2}\sum_{ijkm} g^{mi}\partial_j(g_{ik})g^{kj}\partial_m u + 2u^{-2}\sum_{jk} g^{jk}\partial_j u\partial_k u + \\
&+\frac{nru^{-2}}{2}\sum_{ik} g^{ik}\partial_i u\partial_k u - \frac{nru^{-1}}{2}\sum_{ik} g^{ik}\partial_{ik}u + \frac{nru^{-1}}{2}\sum_{iks} g^{ik}\Gamma^s_{ik}\partial_s u \\
&-2u^{-1}\sum_{jks} g^{ks}\Gamma^j_{js}\partial_k u + \frac{4nu^{-2}}{2-n}\sum_{ks} g^{ks}\partial_k u\partial_s u - ru^{-1}\sum_{ijk} g^{ik}\Gamma^j_{ik}\partial_j u + \\
&-\frac{4u^{-2}}{2-n}\sum_{ks} g^{ks}\partial_k u\partial_s u.
\end{aligned}$$

Ou melhor,

$$\begin{aligned} u^{r+1}S_{\tilde{g}} &= uS_g - \frac{4(n-1)}{n-2}\sum_{ik} g^{ik}\partial_{ik}u - \frac{r}{2}\sum_{ijkm} g^{ik}\partial_j(g_{ik})g^{mj}\partial_m u + \\ &+\frac{nr}{2}\sum_{ijkm} g^{mi}\partial_j(g_{ik})g^{kj}\partial_m u + 2\sum_{ijk} g^{ik}\Gamma^j_{ik}\partial_j u - 2\sum_{jks} g^{ks}\Gamma^j_{js}\partial_k u. \end{aligned} \tag{C.9}$$

Usando, agora, a expressão dos símbolos de Christoffel em termos de componentes da métrica, pode-se observar que

$$\sum_{ijk} g^{ik}\Gamma^j_{ik}\partial_j u - \sum_{jks} g^{ks}\Gamma^j_{js}\partial_k u = \sum_{jksl} g^{ks}g^{jl}\partial_l(g_{js})\partial_k u - \sum_{jksl} g^{ks}g^{jl}\partial_s(g_{jl})\partial_k u.$$

Substituindo tal igualdade em (C.9), obtemos

$$\begin{aligned} u^{r+1}S_{\tilde{g}} &= uS_g - \frac{4(n-1)}{n-2}\sum_{ik} g^{ik}\partial_{ik}u - \frac{r}{2}\sum_{ijkm} g^{ik}\partial_j(g_{ik})g^{mj}\partial_m u + \\ &+\frac{nr}{2}\sum_{ijkm} g^{mi}\partial_j(g_{ik})g^{kj}\partial_m u + 2\sum_{jksl} g^{ks}g^{jl}\partial_l(g_{js})\partial_k u + \\ &-2\sum_{jksl} g^{ks}g^{jl}\partial_s(g_{jl})\partial_k u. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{n-2}{n-1}u^{\frac{n+2}{n-2}}S_{\tilde{g}} &= \frac{n-2}{n-1}uS_g - 4\sum_{ik} g^{ik}\partial_{ik}u - 2\sum_{jksl} g^{ks}g^{jl}\partial_s(g_{jl})\partial_k u + \\ &+4\sum_{jksl} g^{ks}g^{jl}\partial_l(g_{js})\partial_k u. \end{aligned}$$

A última parcela do lado direito desta igualdade pode ser escrita como uma soma, da seguinte maneira:

$$4\sum_{jksl} g^{ks}g^{jl}\partial_l(g_{js})\partial_k u = 2\sum_{jksl} g^{ks}g^{jl}\partial_l(g_{js})\partial_k u + 2\sum_{jksl} g^{ks}g^{lj}\partial_j(g_{ls})\partial_k u.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \frac{n-2}{n-1}u^{\frac{n+2}{n-2}}S_{\tilde{g}} &= \frac{n-2}{n-1}uS_g - 4\sum_{ik} g^{ik}\partial_{ik}u + \\ &+2\sum_{jksl} g^{ks}g^{jl}\left[\partial_l(g_{js}) + \partial_j(g_{ls}) - \partial_s(g_{jl})\right]\partial_k u \\ &= \frac{n-2}{n-1}uS_g - 4\sum_{ik} g^{ik}\partial_{ik}u + 4\sum_{jkl} g^{jl}\Gamma^k_{jl}\partial_k u \\ &= \frac{n-2}{n-1}uS_g - 4\sum_{jl} g^{jl}\left(\partial_{jl}u - \sum_k \Gamma^k_{jl}\partial_k u\right). \end{aligned}$$

Entretanto, pela Proposição B.3.5,

$$\Delta_g u = \sum_{jl} g^{jl}\left(\partial_{jl}u - \sum_k \Gamma^k_{jl}\partial_k u\right).$$

Portanto,

$$-\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} u S_g = \frac{n-2}{4(n-1)} u^{\frac{n+2}{n-2}} S_{\tilde{g}},$$

como queríamos demonstrar. ■

Observação C.3 *Se $\tilde{g} = v^{\frac{4}{n-2}} g$ para alguma função positiva $v \in C^{\infty}(M)$, então, denotando $\tilde{G} = \det(\tilde{g}_{ij})$ e $G = \det(g_{ij})$, temos*

$$\sqrt{\tilde{G}} = v^{2^*} \sqrt{G}, \tag{C.10}$$

onde $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$.

Teorema C.4 *Se $\tilde{g} = v^{\frac{4}{n-2}} g$ para alguma função positiva $v \in C^{\infty}(M)$, então*

$$\Delta_{\tilde{g}}(v^{-1}u) = \frac{1}{v^{2^*-1}} \Delta_g u - \frac{u}{v^{2^*}} \Delta_g v, \quad \forall u \in C^{\infty}(M). \tag{C.11}$$

Prova. Observe que,

$$\begin{aligned}
\Delta_{\tilde{g}}(v^{-1}u) &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{G}}} \sum_{ij} \partial_i \left(\sqrt{\tilde{G}}\ \tilde{g}^{ij} \partial_j (v^{-1}u) \right) \\
&= \frac{1}{v^{2^*}\sqrt{G}} \sum_{ij} \partial_i \left(v^{2^*} \sqrt{G}\ v^{\frac{-4}{n-2}} g^{ij} \partial_j (v^{-1}u) \right) \\
&= \frac{1}{v^{2^*}\sqrt{G}} \sum_{ij} \partial_i \left(\sqrt{G}\ v^2 g^{ij} \partial_j (v^{-1}u) \right) \\
&= \frac{1}{v^{2^*}\sqrt{G}} \sum_{ij} \partial_i \left(\sqrt{G}\ g^{ij} v \partial_j u \right) - \frac{1}{v^{2^*}\sqrt{G}} \sum_{ij} \partial_i \left(\sqrt{G}\ g^{ij} u \partial_j v \right) \\
&= \frac{1}{v^{2^*}\sqrt{G}} \sum_{ij} \partial_i \left(\sqrt{G}\ g^{ij} \partial_j u \right) v + \frac{1}{v^{2^*}\sqrt{G}} \sum_{ij} \sqrt{G}\ g^{ij} \partial_i v \partial_j u + \\
&\quad - \frac{1}{v^{2^*}\sqrt{G}} \sum_{ij} \partial_i \left(\sqrt{G}\ g^{ij} \partial_j v \right) u - \frac{1}{v^{2^*}\sqrt{G}} \sum_{ij} \sqrt{G}\ g^{ij} \partial_j v \partial_i u \\
&= \frac{1}{v^{2^*}\sqrt{G}} \sum_{ij} \partial_i \left(\sqrt{G}\ g^{ij} \partial_j u \right) v - \frac{1}{v^{2^*}\sqrt{G}} \sum_{ij} \partial_i \left(\sqrt{G}\ g^{ij} \partial_j v \right) u,
\end{aligned}$$

de onde segue a equação (C.11). ■

Apêndice D

Grupos Topológicos

Neste apêndice, apresentaremos algumas definições e resultados que serão úteis no Capítulo 3.

Definição D.1 *Um par $((G, \cdot), (G, \tau))$ formado por um grupo e um espaço topológico, com mesmo conjunto subjacente, chama-se um grupo topológico se a aplicação $(x, y) \longmapsto xy^{-1}$ de $G \times G$ em G for contínua, onde consideramos em $G \times G$ a topologia produto.*

Exemplo D.2.
Seja $M_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes reais quadradas de ordem n. Consideraremos em $M_n(\mathbb{R})$ a topologia proveniente da norma

$$\|(a_{ij})_{n\times n}\| = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}\ .$$

O conjunto $Gl_n(\mathbb{R})$ das matrizes invertíveis de ordem n, com a topologia induzida pela topologia de $M_n(\mathbb{R})$, é um grupo topológico.

Antes de apresentarmos outro exemplo de grupo topológico, faremos a seguite definição.

Definição D.3 *Uma matriz real Φ é uma matriz ortogonal se suas colunas constituem uma base ortonormal para $\mathbb{R}^n$. O conjunto de todas as matrizes ortogonais $n \times n$ é denotado por $O(n)$.*

Exemplo D.4.
O conjunto $O(n) \subset Gl_n(\mathbb{R})$ é um grupo topológico com a topologia induzida pela topologia de $Gl_n(\mathbb{R})$.

Proposição D.5 *As seguites afirmações são equivalentes:*

a) $\Phi \in O(n)$;

b) $\Phi^t\Phi = I_n$;

c) $\langle \Phi x, \Phi y\rangle = \langle x, y\rangle$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}^n$;

d) $\|\Phi x\| = \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Definição D.6 (Ação de um grupo topológico) *Uma ação de um grupo topológico* G *sobre um espaço de Hilbert* H *é definida como sendo uma aplicação* $\varphi : G \times H \longrightarrow H$ *tal que:*

i) $\varphi(e, u) = u, \ \forall u \in H$, *onde* e *é o elemento neutro em* G;

ii) $\varphi(gh, u) = \varphi(g, \varphi(h, u)), \ \forall u \in H, \ \forall g, h \in G$;

iii) *dado* $g \in G$, *a aplicação* $u \longmapsto \varphi(g, u)$ *é linear;*

iv) $\|\varphi(g, u)\| = \|u\| \ \forall u \in H, \ \forall g \in G$.
Neste caso, dizemos que o G *atua sobre* H.

Geralmente, denota-se $\varphi(g, u)$ como gu. É o que faremos daqui em diante. Neste caso, por exemplo, o ítem **ii)** da Definição D.6 se escreve como uma espécie de associatividade, como segue: $(gh)u = g(hu)$.

Exemplo D.7 (Ação de $O(n+1)$ em $H^1(S^n)$).

Mostraremos que a aplicação

$$\begin{array}{ccc} O(n+1) \times H^1(S^n) & \longrightarrow & H^1(S^n) \\ (\Phi, u) & \longmapsto & \Phi u : S^n \longrightarrow \mathbb{R}, \end{array} \tag{D.1}$$

onde

$$\Phi u(x) = u(\Phi^{-1}x). \tag{D.2}$$

é uma ação.

Note que (D.2) faz sentido, pois, em virtude do ítem **d)** da Proposição D.5, obtemos que $\Phi^{-1}x \in S^n, \quad \forall x \in S^n$.

i) Seja I a identidade em $O(n+1)$. Então,

$$Iu(x) = u(I^{-1}x) = u(x), \quad \forall x \in S^n,$$

o que implica

$$Iu = u.$$

ii) Sejam $\Phi_1, \Phi_2 \in O(n+1)$. Assim, dado $x \in S^n$,

$$(\Phi_1\Phi_2)u(x) = u((\Phi_1\Phi_2)^{-1}x) = u(\Phi_2^{-1}\Phi_1^{-1}x)$$

e

$$\Phi_1(\Phi_2 u)(x) = \Phi_2 u(\Phi_1^{-1}x) = u(\Phi_2^{-1}\Phi_1^{-1}x),$$

implicam que

$$(\Phi_1\Phi_2)u = \Phi_1(\Phi_2 u).$$

iii) Considere $\alpha \in \mathbb{R}$, $u, v \in H^1(S^n)$ e $\Phi \in O(n+1)$. Desse modo,

$$\Phi(\alpha u + v)(x) = (\alpha u + v)(\Phi^{-1}x) = \alpha u(\Phi^{-1}x) + v(\Phi^{-1}x) = (\alpha(\Phi u) + \Phi v)(x),$$

nos leva ao fato de que a aplicação $u \longmapsto \Phi u$ é linear.

iv) Escolha $u \in C^\infty(S^n)$ e $\Phi \in O(n+1)$. A partir do ítem **c)** da Proposição D.5, obtemos que $\Phi : S^n \longrightarrow S^n$ é uma isometria. Portanto, usando os resultados da Seção A.8, temos

$$\int_{S^n} u^2 dV = \int_{S^n} (u \circ \Phi^{-1})^2 dV$$

e

$$\int_{S^n} |\nabla(u \circ \Phi^{-1})|^2 dV = \int_{S^n} (|\nabla u|^2 \circ \Phi^{-1}) dV = \int_{S^n} |\nabla u|^2 dV.$$

Portanto,

$$\|u\|_{H^1(S^n)} = \|u \circ \Phi^{-1}\|_{H^1(S^n)} = \|\Phi u\|_{H^1(S^n)}.$$

Dessa forma, concluímos que a aplicação definida em (D.1)-(D.2) é uma ação usando-se o fato de que $C^\infty(S^n)$ é denso em $H^1(S^n)$. ■

Definição D.8 *Seja G um grupo topológico que atua sobre um espaço de Hilbert H. Um funcional $I : H \longrightarrow \mathbb{R}$ é dito invariante por G se*

$$I(\Phi u) = I(u), \ \forall \Phi \in G, \quad \forall u \in H. \tag{D.3}$$

Exemplo D.9.

O funcional $J : H^1(S^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J(v) = \int_{S^n} \left[\frac{1}{2}(|\nabla v|^2 + cv^2) - \frac{1}{q}|v|^q \right] dV \tag{D.4}$$

é invariante com relação à ação de $O(n+1)$ em $H^1(S^n)$.

Para concluir isto, basta observar que, dado $\Phi \in O(n+1)$ e $v \in H^1(S^n)$,

$$J(\Phi v) = \int_{S^n} \left[\frac{1}{2} \left(|\nabla(\Phi v)|^2 + c(\Phi v)^2 \right) - \frac{1}{q}|\Phi v|^q \right] dV$$

$$= \int_{S^n} \left[\frac{1}{2} \left(|\nabla(v \circ \Phi^{-1})|^2 + c(v \circ \Phi^{-1})^2 \right) - \frac{1}{q}|v \circ \Phi^{-1}|^q \right] dV.$$

A partir daí, podemos usar os resultados da seção A.8 e o fato de que $\Phi : S^n \longrightarrow S^n$ é isometria, para obtermos que

$$J(v) = \int_{S^n} \left[\frac{1}{2} \left(|\nabla(v \circ \Phi^{-1})|^2 + c(v \circ \Phi^{-1})^2 \right) - \frac{1}{q}|v \circ \Phi^{-1}|^q \right] dV.$$

Logo

$$J(\Phi v) = J(v)$$

e, consequentemente, J é invariante por $O(n+1)$.

Definição D.10 *Suponha que o grupo topológico G atua no espaço de Hilbert H. O subespaço*

$$Fix(G) = \{u \in H; \Phi u = u \ \forall \phi \in G\}$$

é chamado o fixo de G em H.

Teorema D.11 (Princípio de Criticalidade Simétrica) *Suponha que G é um grupo topológico que atua sobre um espaço de Hilbert H e que $I : H \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional de classe C^1 invariante por G. Se existe $u \in H$ tal que u é ponto crítico de I, restrito ao $Fix(G)$, então u é ponto crítico de I em H.*

Prova. Veja Teorema 2.2 em [15]. ■

Bibliografia

[1] **Alves, C. O.,** Existência de Solução Positiva de Equações Elípticas Não-Lineares Variacionais em $\mathbb{R}^n$, Tese de Doutorado, UNB, Brasília, 1996.

[2] **Ambrosetti, A., Rabinowitz, P. H.,** Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Aplications, J. Funct. Anal., 14, 349-381 (1973).

[3] **Aubin, Thierry,** Métriques Riemannienes et Courbure, J. Diff. Geom., 4, 383-424.

[4] **Aubin, Thierry,** Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations, Springer-Verlag, New York, 1982.

[5] **Carmo, Manfredo P. do,** Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice Hall, New Jersey, 1976.

[6] **Carmo, Manfredo P. do,** Formas Diferenciais e Aplicações, Monografias de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1983.

[7] **Carmo, Manfredo P. do,** Geometria Riemanniana, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[8] **D. Gilbarg & D. Trudinger**, Elliptic Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag, New York, 1983.

[9] **Ding, W.,** On a conformally invariant elliptic equation on $\mathbb{R}^n$, Commun. Math. Phys., 107, 331-335 (1986).

[10] **Figueredo, D. G. de,** Lectures on the Ekeland Variational Principle with Applications and Detours, Campinas, 1987.

[11] **Gidas, B., Ni, W. M. e Nirenberg, L.,** Symmetry and related properties via the maximum principle, Comm. Math. Phys., 68, 209-243 (1979).

[12] **H. Brezis**, Analyse Fonctionnelle - Théorie et applications, Masson, Paris, 1996.

[13] **H. Brezis & T. Kato,** Remarks on the Schrödinger operator with regular complex potentials, J. Math. pures et appl., 58, 1979, p. 137-151.

[14] **O. H. Miyagaki**, Equações Elípticas Modeladas em Variedades Riemannianas: Uma Introdução, João Pessoa - PB, Janeiro de 2004.

[15] **Luís Paulo de L. Cavalcante,** Existência de Soluções Positivas para uma Classe de Problemas Elípticos não Lineares em Domínios não Limitados, Dissertação de Mestrado, Campina Grande-PB, Outubro de 2004.

[16] **R. G. Bartle**, The Elements of Integration, John Wiley & Sons, Inc., New York.

[17] **Rodrigues, Alexandre A. M.,** Introdução à Teoria dos Grupos de Lie, sexto colóquio brasileiro de matemática, Poços de Caldas, 1967.

[18] **Schoen, R.,** Conformal Deformation of a Riemannian Metric to Constant Scalar Curvature, J. Diff. Geom., 20, 479-495 (1984).

[19] **Trudinger, N. S.,** Remarks Concerning the Conformal Deformation of Riemannian Structures on Compact Manifolds, Ann Scuola Norm. Pisa, 22, 267-274 (1968).

[20] **Yamabe, H.,** On Deformation of Riemannian Structures on Compact Manifolds, Osaka Math. J. 12 21-37(1960).