Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

O Método das Sub e Supersoluções para um Sistema do Tipo (p, q)-Laplaciano

por

José de Brito Silva †

sob orientação do

Prof. Dr. Angelo Roncalli Furtado de Holanda
Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes

O Método das Sub e Supersoluções para um Sistema do Tipo (p,q)-Laplaciano

por

José de Brito Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG

Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva - UFPA

Prof. Dr. Angelo Roncalli Furtado de Holanda - UFCG
Orientador

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Outubro /2013

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao meu bom Deus pelo dom da vida e por essa conquista.

Aos meus pais pelo carinho e amor, por me proporcionarem a oportunidade de estudar, os ensinamentos de vida e a educação que me deram.

Aos meus irmãos Luciano e Janaina.

Aos meus sobrinhos Arthur e Tainá pela alegria que me trazem.

Ao Professor Daniel Cordeiro, pela orientação neste trabalho, sugestões e ensinamentos que adquiri com ele no decorrer do curso, sou muito grato por poder ter tralhado com ele.

Ao Professor Angelo Roncalli também pela orientação neste trabalho, pelas dicas e sugestões desde tempos de graduação.

Ao Professor Claudianor pela participação na banca examinadora e pelas valiosas sugestões no trabalho.

Ao Professor João Pablo pela participação na banca examinadora e sugestões feitas à respeito do trabalho.

Aos professores de graduação, Márcia Cristina, Gisélia Vasconcelos, Fernando Aires, Anselmo Lopes, Glageane Souza, Marcelo, Alex e Jorge.

Aos professores do mestrado, Marco Aurélio, Marco Antonio, Severino Horácio, Diogo Diniz, Jefferson Abrantes e aos demais.

Aos meus amigos de graduação em especial a Jarbas e Luan.

Aos meus amigos que me ajudaram nesta luta de mestrado e estiveram sempre ao meu lado, em especial quero agradecer aos que formaram minha turma, Elizabete, Débora Carolino e Arthur Giusepe, principalmente ao Arthur pela parceria de estudo, revisão textual da dissertação e dicas. Aos colegas que pagaram disciplina comigo Fábio Reis, Luciano Cipriano, Carlos, Jogli Gidel, Alex Borges um bom amigo além de parceiro de estudo, Luiz Gonzaga, Romildo Lima, Patrício Andrade, Nancy, Emanuela

Régia, Anderson, Michel Barros, José Marcos. Aos que não estudamos juntos mas são mais que colegas, Marcos Duarte (o Índio), Claudemir Fideles (Cacau), que foi um bom amigo além de colega de estudos, Fabrício e Alanio. Aqueles com quem constituí um lar, Annaxsuel, Denilson, Alex, Claudemir, Luciano Brito, Erivaldo Diniz.

Aos meus amigos de infância Edjair Oliveira e José Francisco.

A minha namorada Junara Almeida, pelo companheirismo, carinho amor e paciência em tempos difíceis.

Aos funcionários do DME, em especial a, Andreza Freitas (secretária da pós-graduação), Aninha, David, Sóstenes, Severina (Dú), Renato, Rodrigo e Suenia.

A Capes pelo apoio financeiro.

Dedicatória

Aos meus pais e irmãos.

Resumo

Neste trabalho discutiremos a existência de soluções fracas positivas para um sistema do (p, q)-Laplaciano com mudança de sinal nas funções de peso, com domínio limitado e fronteira suave. Para garantir a existência de soluções fracas positivas primeiramente asseguraremos a solução positiva de um problema calásico que é o problema de autovalor do p-laplaciano, e do problema "linear"do p-laplaciano com condição zero de Dirichlet. Feito isto usaremos a existência destas soluções para assegurar que o problema em questão admite solução fraca positiva, via o método das sub-super-soluções.
Palavras-chave: (p,q)-Laplaciano, autovalor, sub-supersoluções.

Abstract

In this work we discuss the existence of weak positive solutions for a system (p, q)-Laplacian with change of sign in the weight functions with bounded domain and smooth boundary. To ensure the existence of weak positive solutions first will ensure a positive solution to a classic problem that is the problem eigenvalue p-Laplacian value, and the "linear"problem with zero condition p-Laplacian Dirichelt. Having done this we use the existence of these solutions to ensure that the problem in question admits a weak positive solution via the method of sub-super-solutions.

Keywords: (p,q)-Laplacian, eigenvalue, sub-super-solutions.

Sumário

Introdução

Em nosso trabalho, estamos interessados em obter soluções fracas positivas para um sistema do tipo (p,q)-Laplaciano com mudança de sinal nas funções peso para valores suficientemente próximos da fronteira. Faremos o estudo do problema da seguinte maneira, no **Capítulo 1** que é baseado em Lindqvist [18], [19] e em Renard, Rogers [25], exibiremos algumas propriedades do operador não linear o p-Laplaciano (Operador de Laplace) que é definido como sendo $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ com $p > 1$. A partir daí estudaremos o clássico problema de autovalor do p-Laplaciano, mais precisamente analisaremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2}u, & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $-\Delta_p u = -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $N \geq 1$ e $1 < p < +\infty$. Provaremos a existência de um menor autovalor que o denotaremos por λ_1 e uma primeira autofunção correspondente a este autovalor, que a denotaremos por ϕ_1. Em seguida mostraremos que o primeiro autovalor é isolado e simples em qualquer domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Thelin [31] observou que existe essencialmente apenas uma primeira autofunção entre as funções radiais numa bola. Uma consequência imediata do interessante trabalho de Sakaguchi [27], é que o primeiro autovalor é simples em domínios convexos. A simplicidade do primeiro autovalor foi estendida para domínios Hölder de classe $C^{2,\alpha}$ por Anane [2].

Em seguida analisaremos o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(x), & \text{em} & \Omega \\ u &= 0, & \text{sobre} & \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

onde $f \in \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave e $p > 1$, onde a existência e unicidade de solução para este problema é garantida pelo Teorema de Browder-Minty e a regularidade da solução pode ser vista em [13].

No **Capítulo 2** motivado pelo estudo feito em 2005 no artigo de Canada, Drabek e Gamez [6], exibiremos um caso escalar para um problema envolvendo o operador p-Laplaciano com mudança de sinal na função peso para valores perto da fronteira. De forma mais precisa vamos considerar o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda g(x) f(u), & \text{em} & \Omega, \\ u &= 0, & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $N \geq 1$, Δ_p o operador p-Laplaciano $p > 1$. A função g é de classe $C^1(\Omega)$ com mudança de sinal e a função f também de classe C^1 satisfazendo $f(0) > 0$. No entanto, vamos nos restringir para a classe de funções g com mudança de sinal tais que, são positivas no interior de Ω e negativas para valores suficientemente perto de $\partial\Omega$. No decorrer deste capítulo exibiremos uma solução fraca para o problema mencionado utilizando o método de sub supersolução e resultados conhecidos de soluções do problema de autovalor e do problema de Dirichlet.

No **Capítulo 3** que foi um problema estudado em 2010 por Rasouli, Halimi e Mashhadban [24], faremos uma generalização deste caso escalar do problema envolvendo o p-Laplaciano com mudança de sinal na função peso perto da fronteira, para um sistema do tipo (p, q)-Laplaciano com mudança de sinal nas funções peso para valores suficientemente próximos da fronteira da seguinte maneira

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda a(x) f(v), & \text{em} & \Omega, \\ -\Delta_q v &= \lambda b(x) g(u), & \text{em} & \Omega, \\ u = v &= 0, & \text{sobre} & \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Onde Δ_p denota o operador p-Laplaciano, $\lambda > 0$ é um parâmetro, Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ $N > 1$ com fronteira suave, a e b são funções de classe $C^1(\Omega)$ com mudança de sinal negativo perto da fronteira e $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ são funções de classe C^1 não decrescentes tais que $f(s), g(s) > 0$ para $s > 0$. Assim como no Capítulo 2 usaremos um resultado de sub supersolução e estimativas do problema do autovalor e do problema de Dirichlet.

No **Apêndice A** mostraremos alguns resultados de Análise Funcional, Espaços de Sobolev e Medida e Integração. No **Apêndice B** serão demonstradas algumas desigualdades utilizadas no decorrer de todo o texto. Por fim no **Apêndice C** mostraremos algumas versões de Princípios de Máximo e Comparação.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

1.1 O Operador p-Laplaciano

Na literatura Clássica, o operador p-Laplaciano $\Delta_p : C^2(\Omega) \longrightarrow C(\Omega)$ onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto e $p > 1$, é definido por

$$\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Essa definição motiva a definição do operador $-\Delta_p : \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} -\Delta_p : \quad \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega) \\ u \quad &\longmapsto -\Delta_p u : \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad v \longmapsto \langle -\Delta_p u, v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx \end{aligned}$$

Provaremos agora algumas propriedades desse operador, inicialmente verifiquemos que está bem definido:

Seja $v \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ temos

$$\begin{aligned}
\langle -\Delta_p u, v\rangle &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v dx\\
&\leq \left|\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v dx\right|\\
&\leq \int_\Omega ||\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v| dx\\
&= \int_\Omega ||\nabla u||^{p-1}|\nabla v| dx, \quad \text{(pela desigualdade de Hölder)}\\
&\leq \left(\int_\Omega (|\nabla u|^{p-1})^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\int_\Omega (|\nabla v|)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \|\nabla u\|^{p-1}_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\cdot\|\nabla v\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)},
\end{aligned}$$

como $|\nabla u|$, $|\nabla v|\in L^p(\Omega)$ podemos concluir que $|\langle -\Delta_p u, v\rangle| < +\infty$.

Portanto $-\Delta_p u$ está bem definido.

Vejamos outras propriedades do operador p-Laplaciano:

Teorema 1.1 *Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ um domínio limitado.*

(i) $-\Delta_p : \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)\longrightarrow \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$ *é um operador limitado.*

(ii) $-\Delta_p : \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)\longrightarrow \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$ *é um operador coercivo.*

(iii) $-\Delta_p : \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)\longrightarrow \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$ *é um operador monótono, ou seja,* $\langle -\Delta_p u - (-\Delta_p v), u-v\rangle \geq 0$, *para todo* $u, v\in W^{1,p}_0(\Omega)$.

(iv) $-\Delta_p : \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)\longrightarrow \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$ *é do tipo* S_+, *isto é, se* $u_n \rightharpoonup u$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\langle -\Delta_p u_n - (-\Delta_p u), u_n - u\rangle \leq 0$, *então* $u_n\longrightarrow u$ *em* $W^{1,p}_0(\Omega)$.

(v) $-\Delta_p : \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)\longrightarrow \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$ *é um homeomorfismo.*

(vi) O operador composto,

$$(-\Delta_p)^{-1} : \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)\longrightarrow \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)\hookrightarrow \mathrm{L}^q(\Omega),$$

onde $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, *é compacto se* $1<q<\dfrac{Np}{N-p}$.

Demonstração.

(i) Já vimos que $-\Delta_p : \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$ está bem definido. Seja $u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, aplicando a desigualdade de Hölder temos

$$
\begin{aligned}
\| - \Delta_p u\|_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)} &= \sup_{\substack{\phi \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \\ \|\phi\|=1}} |\langle -\Delta_p u, \phi \rangle| \\
&= \sup_{\substack{\phi \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \\ \|\phi\|=1}} \left| \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \phi dx \right| \\
&\leq \sup_{\substack{\phi \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \\ \|\phi\|=1}} \int_\Omega |\nabla u|^{p-1} \cdot |\nabla \phi| dx \\
&\leq \sup_{\substack{\phi \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \\ \|\phi\|=1}} \left[\int_\Omega |\nabla u|^{(p-1)q} dx \right]^{\frac{1}{q}} \cdot \|\nabla \phi\|_{L^p(\Omega)} dx \\
&= \sup_{\substack{\phi \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \\ \|\phi\|=1}} \|\nabla u\|^{p-1}_{L^{(p-1)q}(\Omega)} \cdot \|\nabla \phi\|_{L^p(\Omega)} dx \\
&= \sup_{\substack{\phi \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \\ \|\phi\|=1}} \|u\|^{p-1}_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)} \cdot \|\phi\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)} \\
&\leq \|u\|^{p-1}_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)}. \qquad (1.1)
\end{aligned}
$$

Portanto $-\Delta_p$ é um operador limitado.

(ii) Seja $u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$, Então,

$$
\begin{aligned}
\langle -\Delta_p u, u \rangle &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla u dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^p dx \\
&= \|u\|^p_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\lim_{\|u\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)} \to \infty} \frac{\langle -\Delta_p u, u \rangle}{\|u\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)}} = \lim_{\|u\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)} \to \infty} \frac{\|u\|^p_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)}}{\|u\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)}} = +\infty
$$

Portanto $-\Delta_p$ é um operador coercivo.

(iii) A monotonicidade do operador segue diretamente do Lema B.1.

(iv) Se $u_n \rightharpoonup u$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\langle -\Delta_p u_n - (-\Delta_p u), u_n - u\rangle \leq 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \langle -\Delta_p u_n - (-\Delta_p u), u_n - u\rangle = 0$. De fato, temos

$$\lim_{n\to\infty} \sup\langle -\Delta_p u_n - (-\Delta_p u), u_n - u\rangle \leq 0, \tag{1.2}$$

como $u_n - u \rightharpoonup 0$ usando pela Observação B.1 para o caso $p \geq 2$

$$\lim_{n\to\infty} \inf\langle -\Delta_p u_n - (-\Delta_p u), u_n - u\rangle \geq \lim_{n\to\infty} \inf \|u_n - u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \geq 0. \tag{1.3}$$

De (1.2) e (1.3) segue que

$$\lim_{n\to\infty} \langle -\Delta_p u_n - (-\Delta_p u), u_n - u\rangle = 0.$$

Se $1 < p < 2$ novamente pela Observação B.1 temos

$$\begin{aligned}
\langle -\Delta_p u_n - (-\Delta_p u), u_n - u\rangle &= \int_\Omega \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla u_n - \nabla u\rangle dx \\
&\geq c_p \frac{\|u_n - u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}}{\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \\
&\geq c_p \frac{\|u_n - u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}}{C + \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}},
\end{aligned}$$

pois $u_n \rightharpoonup u$ implica $\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C$. Com o mesmo raciocínio do caso anterior concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \langle -\Delta_p u_n - (-\Delta_p u), u_n - u\rangle = 0.$$

Se $p \geq 2$, pelo Corolário B.1 temos

$$\begin{aligned}
c_1(p) \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^p dx &\leq \int_\Omega \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla u_n - \nabla u\rangle dx \\
&= \langle -\Delta_p u_n - (-\Delta_p u), u_n - u\rangle \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando $n \longrightarrow \infty$.

Se $1 < p < 2$, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^p dx &= \int_\Omega \frac{|\nabla u_n - \nabla u|^p}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(2-p)}{2}}} (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(2-p)}{2}} dx \\ &\leq \|g_n\|_{L^{\frac{2}{p}}(\Omega)} \cdot \|h_n\|_{L^{\frac{2}{2-p}}(\Omega)}. \qquad (1.4)\end{aligned}$$

Onde

$$g_n = \frac{|\nabla u_n - \nabla u|^p}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(2-p)}{2}}}$$

e

$$h_n = (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(2-p)}{2}}$$

Como $u_n \rightharpoonup u$, segue que a sequência (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, então existe uma constante positiva C tal que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx \leq C.$$

Dai pela hipótese $u_n \rightharpoonup u$ e pelo Lema B.1

$$\begin{aligned}\|g_n\|^{\frac{2}{p}}_{L^{\frac{2}{p}}(\Omega)} = \int_\Omega |g_n|^{\frac{2}{p}} dx &\leq C_2(p) \int_\Omega \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla u_n - \nabla u\rangle dx \\ &= \langle -\Delta_p u_n - (-\Delta_p u), u_n - u\rangle \longrightarrow 0. \qquad (1.5)\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}\|h_n\|^{\frac{2}{2-p}}_{L^{\frac{2}{2-p}}(\Omega)} &= \int_\Omega |h_n|^{\frac{2}{2-p}} dx = \int_\Omega (|\nabla u_n| - \nabla u|)^p dx \\ &\leq 2^p \int_\Omega (|\nabla u_n|)^p dx + 2^p \int_\Omega |\nabla u|^p dx \leq C_3 \qquad (1.6)\end{aligned}$$

De(1.6), (1.5) e (1.4) obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^p dx \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty \text{ com } 1 < p < \infty.$$

Donde segue que $u_n \longrightarrow u$ em $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

(v) Provaremos agora que o operador $-\Delta_p$ é um homeomorfismo. Quanto à continuidade de $-\Delta_p$, provaremos que se $u_n \longrightarrow u$ em $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ então $-\Delta_p u_n \longrightarrow -\Delta_p u$ em $\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$.

Seja $(u_n) \subset \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ em $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Então

$$\nabla u_n \longrightarrow \nabla u, \quad \text{em} \qquad (L^p(\Omega))^N. \tag{1.7}$$

Pelo Lema A.2 existem uma subsequência, que ainda denotaremos por (u_n) e uma função $g \in L^p(\Omega)$ que verificam

$$\nabla u_n(x) \longrightarrow \nabla u(x) \quad \text{q.t.p em } \Omega \tag{1.8}$$

e

$$|\nabla u_n(x)| \leq g(x) \;\; \text{q.t.p em } \Omega \tag{1.9}$$

Por (1.8) temos

$$|\nabla u_n(x)| \longrightarrow |\nabla u(x)| \quad \text{q.t.p em } \Omega \tag{1.10}$$

Para toda $\phi \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} |\langle -\Delta_p u_n - (-\Delta_p u), \phi\rangle| &= \left| \int_\Omega \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla\phi\rangle dx \right| \\ &\leq \int_\Omega ||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u|.|\nabla\phi| dx. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Definido f_n como sendo

$$f_n = ||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u|, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.12}$$

temos então

$$f_n \leq |\nabla u_n|^{p-1} + |\nabla u|^{p-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.13}$$

Observe que

$$(|\nabla u_n|^{p-1} + |\nabla u|^{p-1}) \in L^q(\Omega) \quad \text{onde} \quad q = \frac{p}{p-1}.$$

Diretamente de (1.13) seque que $f_n \subset L^q(\Omega)$.

Aplicando a desigualdade de Hölder em (1.11) temos

$$\begin{aligned}
|\langle -\Delta_p u_n - (-\Delta_p u), \phi\rangle| &\leq \int_\Omega ||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u| \cdot |\nabla\phi| dx \\
&\leq \left[\int_\Omega (f_n)^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\int_\Omega |\nabla\phi|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|f_n\|_{L^q(\Omega)} \cdot \|\nabla\phi\|_{L^p(\Omega)} \\
&= \|f_n\|_{L^q(\Omega)} \cdot \|\phi\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\| - \Delta_p u_n - (-\Delta_p u)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq \|f_n\|_{L^q(\Omega)} \tag{1.14}$$

Combinando (1.8), (1.10), (1.12) temos

$$f_n(x) \longrightarrow 0 \;\; \text{q.t.p em } \Omega. \tag{1.15}$$

De (1.9) e (1.13),

$$f_n \leq g^{p-1} + |\nabla u|^{p-1}$$

como $q(p-1) = p$, temos que

$$(f_n(x))^q \leq 2^q(g(x)^p + |\nabla u(x)|^p) \in L^1(\Omega) \;\; \text{q.t.p em } \Omega. \tag{1.16}$$

De (1.15), (1.16) e do Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f_n)^q dx = 0.$$

Portanto

$$\|f_n\|_{L^q(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow \infty. \tag{1.17}$$

De (1.14) e de (1.17) temos que

$$\| - \Delta_p u_n - (-\Delta_p u)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Portanto $-\Delta_p$ é um operador contínuo.
A injetividade de $-\Delta_p$ segue imediatamente de (B.9).
Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $W^{-1,p'}(\Omega)$ são espaços de Banach e reflexivos para $1 < p < \infty$ e sendo $-\Delta_p$ um operador monótono, coercivo, contínuo e limitado então segue do Teorema 1.10 que $-\Delta_p$ é sobrejetivo. Logo o operador inverso

$$(-\Delta_p)^{-1} : \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega) \longrightarrow \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega),$$

está bem definido. Provemos sua continuidade.
Seja $(g_n) \subset \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$ tal que $g_n \longrightarrow g$ em $\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Considere

$$u_n = (-\Delta_p)^{-1}(g_n) \text{ e } u = (-\Delta_p)^{-1}(g),$$

ou seja,

$$-\Delta_p u_n = g_n \quad \text{e} \quad -\Delta_p u = g. \tag{1.18}$$

Temos que

$$\frac{\langle -\Delta_p u_n, u_n\rangle}{\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} = \frac{\langle g_n, u_n\rangle}{\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \leq \|g_n\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}.$$

Dai usando a limitação de g_n e o fato de que $-\Delta_p$ é coercivo concluímos que (u_n) é uma sequência limitada em $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Sendo $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ um espaço de Banach reflexivo podemos supor a menos de subsequência que

$$u_n \rightharpoonup u_0.$$

Notemos ainda que

$$\langle -\Delta_p u_n - (-\Delta_p u_0), u_n - u_0\rangle = \langle g_n, u_n - u_0\rangle - \langle -\Delta_p u_0, u_n - u_0\rangle.$$

Por outro lado, temos

$$\langle g_n, u_n - u_0 \rangle = \langle g_n - g, u_n - u_0 \rangle + \langle g, u_n - u_0 \rangle$$

Levando em consideração que $g_n \longrightarrow g$ e que $u_n \rightharpoonup u_0$ das últimas igualdades, obtemos

$$\lim_{n \to \infty} \langle -\Delta_p u_n - (-\Delta_p u_0), u_n - u_0 \rangle = 0.$$

Como $-\Delta_p$ é do tipo S_+, segue que

$$u_n \longrightarrow u_0 \tag{1.19}$$

Por $i)$ segue que

$$-\Delta_p u_n \longrightarrow -\Delta_p u_0$$

Por (1.18) temos que $-\Delta_p u = -\Delta_p u_0$ e pela injetividade segue que $u = u_0$. Então de (1.19) podemos concluir que

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega),$$

e assim, $(-\Delta_p)^{-1}$ é contínuo.

Portanto $-\Delta_p$ é um homeomorfismo.

(iv) Segue diretamente da continuidade de $(-\Delta_p)^{-1}$ e da imersão compacta de Sobolev $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^q$ para $1 < q < \dfrac{Np}{N-p}$. □

1.2 O Problema de Autovalor do Operador p-Laplaciano.

Nesta seção estudaremos problema de autovalor para o operador p-laplaciano que é dado por

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.20}$$

Onde $-\Delta_p u = -div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $N \geq 1$ e $1 < p < +\infty$.

Definição 1.2 *Dizemos que λ é um* **autovalor** *de* (1.20) *se existe uma função contínua $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \neq 0$ tal que*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \eta dx = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} u \cdot \eta dx, \tag{1.21}$$

para toda $\eta \in W_0^{1,p}(\Omega)$. A função u é chamada de **autofunção**.

Nosso principal objetivo nesta seção é provar a existência de um menor autovalor, que o denotaremos por λ_1 e de uma primeira autofunção correspondente a λ_1, que denotaremos por u_1 e provar que este autovalor é isolado e simples.

Observe que em (1.21), λ pode ser escrito como

$$\lambda = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^p dx}, \tag{1.22}$$

pois basta tomar $\eta = u$ em (1.21). O quociente (1.22) é classicamente conhecido como quociente de **Rayleigh**.

Observação 1.1 *Todos os autovalores do p-Laplaciano são positivos.*

De fato, pois pela desigualdade de Poincaré A.9 temos

$$\int_\Omega |u|^p dx \leq C(n,p) \int_\Omega |\nabla u|^p dx, \tag{1.23}$$

daí, substituindo (1.23) em (1.22) temos

$$\lambda = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^p dx} \geq \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{C(N,p)\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx} = \frac{1}{C(N,p)} > 0$$

O lema a seguir, que é uma versão das imersões compactas de (Rellich-Kondrachov), será útil na demonstração dos teoremas seguintes. As demonstrações podem ser todas vistas em [18] e [19].

Lema 1.1 (Rellich-Kondrachov) *Seja $p > 1$. Suponha que $u_1, u_2, ...$ são funções em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e que $\|\nabla u_k\|_{L^p(\Omega)} < +\infty$, $k \in \mathbb{N}$. Então existem uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e uma subsequência $(u_{k_j}) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $(u_{k_j}) \longrightarrow u$ em $L^p(\Omega)$ e $\nabla(u_{k_j}) \rightharpoonup \nabla u$ em $L^p(\Omega)$.*

Provemos o

Teorema 1.3 *Existe um menor autovalor de* (1.20) *e uma autofunção correspondente a este autovalor. Esta autofunção minimiza o quociente de Rayleigh sobre todas as funções no espaço de Sobolev* $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$. *Além disso esta autofunção não muda de sinal em* Ω.

Demonstração. Sejam $F, J : \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definidos por

$J(u) = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx$ e $F(u) = \displaystyle\int_\Omega |u|^p dx$ e o conjunto $\mathfrak{Y} = \{u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega); \|u\|_{L^P(\Omega)}^p = 1\}$

Os funcionais F, J estão bem definidos e são de classe $C^1(\Omega)$ ver Teoremas B.4 e B.5.

Provaremos que

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^p dx} = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u|^p dx \tag{1.24}$$

é um autovalor, deste modo por sua caracterização será o menor dentre todos os autovalores de (1.20).

Por definição de ínfimo existe uma sequência minimizante $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ de (1.24). Então temos que

$$J(u_n) = \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}^p = \|u_n\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)}^p$$

Portanto (u_n) é uma sequência limitada em $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Pelo Lema 1.1 existe uma função $\overline{u} \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ e uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que $u_{n_j} \longrightarrow \overline{u}$ em $\mathrm{L}^p(\Omega)$ e $\nabla u_{n_j} \rightharpoonup \nabla\overline{u}$ em $\mathrm{L}^p(\Omega)$. Como $u_n \longrightarrow \overline{u}$ em $L^p(\Omega)$ então $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow \|\overline{u}\|_{L^p(\Omega)}$, o que implica que $\overline{u} \in \mathfrak{Y}$.

Por outro lado, como $u_n \rightharpoonup \overline{u}$ em $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$, temos que $\|\overline{u}\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)} \leq \liminf \|u_n\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)}$ daí

$$\lambda_1 \leq J(\overline{u}) \leq \|\overline{u}\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)}^p \leq \left(\liminf \|u_n\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)}\right)^p = \left(\liminf J(u_n)^{\frac{1}{p}}\right)^p = \lambda_1.$$

Portanto $J(\overline{u}) = \lambda_1$.

Justificaremos agora que $\overline{u}$ é autofunção de (1.20) para algum $\lambda = \lambda_1$, ou seja, também justificaremos que λ_1 é de fato um autovalor. Com efeito, já sabemos que

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^p dx} = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^p dx}{\displaystyle\int_\Omega |\overline{u}|^p dx}.$$

Fazendo $J(u) = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx$ e $F(u) = \displaystyle\int_\Omega |u|^p dx$, temos que J e F são de classe C^1 e satisfazem as condições do Teorema A.13. Logo existe $\lambda \in \mathbb{R}$ que verifica

$$J'(\overline{u}) = \lambda F'(\overline{u}),$$

o que implica

$$J'(u_1) \cdot \eta = \lambda F'(\overline{u}) \cdot \eta,$$

para toda função $\eta \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Ou seja,

$$\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u} \cdot \nabla \eta dx = \lambda \int_\Omega |\overline{u}|^{p-2} \overline{u} \cdot \eta dx. \tag{1.25}$$

A função u_1 que satisfaz (1.25), é de classe $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$ a justificativa dessa afirmação pode ser vista em [13]. Portanto u_1 é autofunção de (1.20) associada ao autovalor $\lambda = \lambda_1$. De (1.25) concluímos que u_1 minimiza o quociente de Rayleigh sobre todas as funções em $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Se $\overline{u}$ minimiza o quociente (1.22) então $|\overline{u}|$ também minimiza o quociente (1.22), pois $|\nabla |\overline{u}|| = |\nabla \overline{u}|$ e então recaímos no mesmo problema de minimização (1.24), ou seja $|\overline{u}|$ também é autofunção associada ao autovalor λ_1. Desde que $|\overline{u}| \geq 0$ pelo Princípio do Máximo C.2 devemos ter $|\overline{u}| > 0$. Por continuidade devemos ter $\overline{u} < 0$ ou $\overline{u} > 0$ em Ω. □

O próximo resultado assegura a unicidade da primeira autofunção em domínios limitados, no sentido de que se existir outra primeira autofunção então elas devem ser múltiplas escalares, ou ainda que o autoespaço gerado pela primeira autofunção tem dimensão 1.

No que segue λ_1 sempre denotará o primeiro autovalor de (1.20)

Teorema 1.4 *O primeiro autovalor do operador p-laplaciano é simples em qualquer domínio limitado, ou seja se u e v são autofunções associadas a λ_1 então elas são l.d.*

Demonstração. Suponha que u e v são autofunções associadas ao autovalor λ_1. Como não mudam de sinal, é suficiente tratarmos o caso em que $u > 0$ e $v > 0$. Temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \eta dx = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} u \cdot \eta dx, \tag{1.26}$$

e

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \cdot \nabla \eta dx = \lambda \int_\Omega |v|^{p-2} v \cdot \eta dx, \tag{1.27}$$

para toda $\eta \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Assim em particular utilizaremos as funções testes

$$\eta_1 = \frac{(u+\varepsilon^p) - (v+\varepsilon)^p}{(u+\varepsilon)^{p-1}} \quad \text{e} \quad \eta_2 = \frac{(v+\varepsilon^p) - (u+\varepsilon)^p}{(v+\varepsilon)^{p-1}}$$

em (1.26) e (1.27) respectivamente, onde ε é um parâmetro positivo.
Um cálculo simples mostra que

$$\nabla \eta_1 = \left[1 + (p-1)\left(\frac{v+\varepsilon}{u+\varepsilon}\right)^p\right] \cdot \nabla u - p\left(\frac{v+\varepsilon}{u+\varepsilon}\right)^{p-1} \cdot \nabla v, \tag{1.28}$$

e

$$\nabla \eta_2 = \left[1 + (p-1)\left(\frac{u+\varepsilon}{v+\varepsilon}\right)^p\right] \cdot \nabla v - p\left(\frac{u+\varepsilon}{v+\varepsilon}\right)^{p-1} \cdot \nabla u. \tag{1.29}$$

Por simplicidade de escrita, denotaremos $u_\varepsilon = u + \varepsilon$ e $v_\varepsilon = v + \varepsilon$. Observe que

$$\nabla u_\varepsilon = \nabla u, \tag{1.30}$$

e que

$$\nabla v_\varepsilon = \nabla v. \tag{1.31}$$

Substituindo (1.30) e (1.31) em (1.26) e (1.27) respectivamente obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \eta_1 dx = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2}u \cdot \eta dx \tag{1.32}$$

$$\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon \cdot \nabla \eta_2 dx = \lambda \int_\Omega |v|^{p-2}v \cdot \eta dx. \tag{1.33}$$

Agora observe que combinando (1.28), (1.30) e (1.32) temos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \eta_1 dx = \\
&= \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \left[\left[1 + (p-1)\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^p\right] \cdot \nabla u - p\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^{p-1} \cdot \nabla v\right] dx = \\
&= \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \left[1 + (p-1)\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^p\right] \cdot \nabla u dx - \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon p\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^{p-1} \cdot \nabla v dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon \left[1 + (p-1)\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^p\right] dx - \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon p\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^{p-1} dx.
\end{aligned}$$

Portanto podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \eta_1 dx &= \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^p \left[1 + (p-1)\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^p\right] dx \\
&- p\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon \left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^{p-1} dx.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

De forma inteiramente análoga combinando (1.29), (1.31) e (1.33) temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon \cdot \nabla \eta_2 dx &= \int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p \left[1 + (p-1)\left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^p\right] dx \\
&- p\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon \left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^{p-1} dx.
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Somando (1.34) e (1.35)

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \eta_1 dx + \int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon \cdot \nabla \eta_2 dx = \\
&= \int_\Omega \left[\left(1 + (p-1)\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^p\right)|\nabla u_\varepsilon|^p + \left(1 + (p-1)\left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^p\right)|\nabla v_\varepsilon|^p\right] dx \\
&- \int_\Omega \left[p\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^{p-1} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon + p\left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^{p-1} |\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon\right] dx.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Usando o fato que u e v são funções positivas temos

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 \int_\Omega \left[\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}} - \frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}}\right] \cdot [u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p] dx &= \lambda_1 \int_\Omega u^{p-1} \cdot \eta_1 dx + \lambda_1 \int_\Omega v^{p-1} \cdot \eta_2 dx \qquad (1.37)\\
&= \lambda_1 \int_\Omega |u|^{p-2} u \cdot \eta_1 dx + \lambda_1 \int_\Omega |v|^{p-2} v \cdot \eta_2 dx \qquad (1.38)
\end{aligned}
$$

De (1.36) e de (1.38) temos

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \lambda_1 \left[\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}} - \frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}}\right] \cdot [u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p] dx = \\
&= \int_\Omega \left[\left(1 + (p-1)\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^p\right) |\nabla u_\varepsilon|^p + \left(1 + (p-1)\left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^p\right) |\nabla v_\varepsilon|^p\right] dx \\
&- \int_\Omega \left[p \left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^{p-1} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon + p \left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^{p-1} |\nabla v_\varepsilon|^{p-2} \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon\right] dx.
\end{aligned}
$$

Por outro lado observe que

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(1 + (p-1)\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^p\right) |\nabla u_\varepsilon|^p dx - \int_\Omega p \left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^{p-1} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon dx = \\
&= \int_\Omega \left[|\nabla u_\varepsilon|^p + p\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^p |\nabla u_\varepsilon|^p - \left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^p |\nabla u_\varepsilon|^p\right] dx - \int_\Omega p \left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^{p-1} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon dx \\
&= \int_\Omega \left[|\nabla ln u_\varepsilon|^p \cdot u_\varepsilon + p v \varepsilon^p |\nabla ln u_\varepsilon|^p - v_\varepsilon^p \cdot |\nabla ln u_\varepsilon|\right] dx - \int_\Omega p \left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^{p-1} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon dx \\
&= \int_\Omega \left[|\nabla ln u_\varepsilon|^p \cdot u_\varepsilon + p v \varepsilon^p |\nabla ln u_\varepsilon|^p - v_\varepsilon^p \cdot |\nabla ln u_\varepsilon|\right] dx - \int_\Omega p \frac{v_\varepsilon^p}{u_\varepsilon^{p-2}} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \cdot \frac{\nabla u_\varepsilon}{u_\varepsilon} \cdot \frac{\nabla v_\varepsilon}{v_\varepsilon} dx \\
&= \int_\Omega \left[|\nabla ln u_\varepsilon|^p \cdot u_\varepsilon + p v \varepsilon^p |\nabla ln u_\varepsilon|^{p-2} \cdot \nabla ln u_\varepsilon \cdot \nabla ln u_\varepsilon - v_\varepsilon^p \cdot |\nabla ln u_\varepsilon|\right] dx \\
&- \int_\Omega p v_\varepsilon^p |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \cdot \nabla ln u_\varepsilon \cdot \nabla ln v_\varepsilon dx. \qquad (1.39)
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(1 + (p-1)\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^p\right) |\nabla u_\varepsilon|^p dx - \int_\Omega p \left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^{p-1} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon dx = \\
&= \int_\Omega \left[|\nabla ln u_\varepsilon|^p . u_\varepsilon + p v \varepsilon^p |\nabla ln u_\varepsilon|^{p-2} \cdot \nabla ln u_\varepsilon \cdot \nabla ln u_\varepsilon - v_\varepsilon^p \cdot |\nabla ln u_\varepsilon|\right] dx \\
&- \int_\Omega p v_\varepsilon^p |\nabla ln u_\varepsilon|^{p-2} \cdot \nabla ln u_\varepsilon \cdot \nabla ln v_\varepsilon dx \\
&= \int_\Omega \left[u_\varepsilon . |\nabla ln u_\varepsilon|^p - v_\varepsilon^p . |\nabla ln u_\varepsilon|\right] dx \\
&- \int_\Omega p v_\varepsilon^p |\nabla ln u_\varepsilon|^{p-2} \cdot \nabla ln u_\varepsilon \cdot (\nabla ln v_\varepsilon - \nabla ln u_\varepsilon) dx. \qquad (1.40)
\end{aligned}
$$

De uma forma totalmente análoga também obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(1+(p-1)\left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^p\right)|\nabla v_\varepsilon|^p dx - \int_\Omega p\left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^{p-1}|\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon dx = \\
&= \int_\Omega \left[|\nabla lnv_\varepsilon|^p\cdot v_\varepsilon + pu_\varepsilon^p|\nabla lnv_\varepsilon|^{p-2}\cdot\nabla lnv_\varepsilon\cdot\nabla lnv_\varepsilon - u_\varepsilon^p\cdot|\nabla lnv_\varepsilon|\right]dx \\
&- \int_\Omega pu_\varepsilon^p|\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\cdot\nabla lnv_\varepsilon\cdot\nabla lnu_\varepsilon dx \\
&= \int_\Omega \left[v_\varepsilon\cdot|\nabla lnv_\varepsilon|^p - u_\varepsilon^p\cdot|\nabla lnv_\varepsilon|\right]dx \\
&- \int_\Omega pu_\varepsilon^p|\nabla lnv_\varepsilon|^{p-2}\cdot\nabla lnv_\varepsilon\cdot(\nabla lnu_\varepsilon - \nabla lnv_\varepsilon)dx. \qquad (1.41)
\end{aligned}$$

Substituindo (1.40) e (1.41) em (1.39) temos

$$\begin{aligned}
\lambda_1\int_\Omega\left[\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}}-\frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}}\right]\cdot[u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p]dx &= \int_\Omega [u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p].(|\nabla lnu_\varepsilon|^p - |\nabla lnv_\varepsilon|^p)dx \qquad (1.42)\\
&- \int_\Omega pv_\varepsilon^p|\nabla lnu_\varepsilon|^{p-2}\nabla lnu_\varepsilon\cdot(\nabla lnv_\varepsilon - \nabla lnu_\varepsilon)dx \\
&- \int_\Omega pu_\varepsilon^p|\nabla lnv_\varepsilon|^{p-2}\nabla lnv_\varepsilon\cdot(\nabla lnu_\varepsilon - \nabla lnv_\varepsilon)dx.
\end{aligned}$$

Podemos observar direto do Teorema B.2 que o segundo termo da igualdade (1.42) é ≤ 0.

Temos ainda o seguinte

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}}-\frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}}\right]\cdot[u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p] = 0, \qquad (1.43)$$

logo podemos considerar $k>0$ tal que

$$\left|\left[\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}}-\frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}}\right]\cdot[u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p]\right| \leq [1+1]\left[|u_\varepsilon|^p + |v_\varepsilon|^p\right] \leq 2[|u+k|^p + |v+k|^p]. \qquad (1.44)$$

Daí, sendo a medida de Ω finita temos que o último termo da desigualdade acima é integrável, então podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada e obter

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega\left[\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}}-\frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}}\right].[u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p] = 0. \qquad (1.45)$$

Analisemos o caso em que $p\geq 2$, de acordo com o Lema B.2 temos

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{2^{p-1}-1}\int_{\Omega}\left[\frac{1}{u_\varepsilon^p}+\frac{1}{v_\varepsilon^p}\right]\cdot|v_\varepsilon\nabla u_\varepsilon-u_\varepsilon\nabla v_\varepsilon|^p dx\\
&= \frac{1}{2^{p-1}-1}\int_{\Omega}[u_\varepsilon^p+v_\varepsilon^p]\cdot|\nabla ln u_\varepsilon-\nabla ln v_\varepsilon|^p dx\\
&\leq \int_{\Omega}[u_\varepsilon^p-v_\varepsilon^p]\cdot(|\nabla ln u_\varepsilon|^p-|\nabla ln v_\varepsilon|^p)dx\\
&- \int_{\Omega}p v_\varepsilon^p|\nabla ln u_\varepsilon|^{p-2}\nabla ln u_\varepsilon\cdot(\nabla ln v_\varepsilon-\nabla ln u_\varepsilon)dx\\
&- \int_{\Omega}p u_\varepsilon^p|\nabla ln v_\varepsilon|^{p-2}\nabla ln v_\varepsilon\cdot(\nabla ln u_\varepsilon-\nabla ln v_\varepsilon)dx.
\end{aligned}
$$

Fazendo $\varepsilon\to 0^+$ aplicando o lema de Fatou (A.1) juntamente com (1.45) temos

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{2^{p-1}-1}\int_{\Omega}\liminf_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{1}{u_\varepsilon^p}+\frac{1}{v_\varepsilon^p}\right]\cdot|v_\varepsilon\nabla u_\varepsilon-u_\varepsilon\nabla v_\varepsilon|^p dx\\
&\leq \frac{1}{2^{p-1}-1}\liminf_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\Omega}\left[\frac{1}{u_\varepsilon^p}+\frac{1}{v_\varepsilon^p}\right]\cdot|v_\varepsilon\nabla u_\varepsilon-u_\varepsilon\nabla v_\varepsilon|^p dx\\
&\leq \frac{1}{2^{p-1}-1}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\Omega}\left[\frac{1}{u_\varepsilon^p}+\frac{1}{v_\varepsilon^p}\right]\cdot|v_\varepsilon\nabla u_\varepsilon-u_\varepsilon\nabla v_\varepsilon|^p dx\\
&\leq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\lambda_1\int_{\Omega}\left[\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}}-\frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}}\right].[u_\varepsilon^p-v_\varepsilon^p]=0.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2^{p-1}-1}\int_{\Omega}\left[\frac{1}{u_\varepsilon^p}+\frac{1}{v_\varepsilon^p}\right]\cdot|v_\varepsilon\nabla u_\varepsilon-u_\varepsilon\nabla v_\varepsilon|^p dx=0
$$

Donde concluímos que $u\nabla v=v\nabla u$, ou seja $u=kv$ para alguma constante k. De fato, temos

$$
\nabla\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\nabla u-u\nabla v}{v^2}=0,
$$

o que implica,

$$
\nabla\left(\frac{u}{v}\right)=0.
$$

Portanto $u=kv$, para alguma constante k.

Agora tratemos o caso $1<p<2$, aplicando o Lema B.2 temos

$$
\begin{aligned}
0 &\leq C(p)\int_\Omega (u_\varepsilon v_\varepsilon)^p(u_\varepsilon+v_\varepsilon)^p\frac{|v_\varepsilon\nabla u_\varepsilon - u_\varepsilon\nabla v_\varepsilon|^2}{(v_\varepsilon|\nabla_u\varepsilon| + u_\varepsilon|\nabla v_\varepsilon|)^{2-p}}dx\\
&= C(p)\int_\Omega (u_\varepsilon v_\varepsilon)^p(u_\varepsilon+v_\varepsilon)^p\frac{(u_\varepsilon v_\varepsilon)^2}{(u_\varepsilon v_\varepsilon)^2}\frac{|v_\varepsilon\nabla u_\varepsilon - u_\varepsilon\nabla v_\varepsilon|^2}{(v_\varepsilon|\nabla u_\varepsilon| + u_\varepsilon|\nabla v_\varepsilon|)^{2-p}}dx\\
&= C(p)\int_\Omega (u_\varepsilon^p+v_\varepsilon^p)\frac{|\nabla \ln v_\varepsilon - \nabla \ln u_\varepsilon|^2}{(|\nabla \ln v_\varepsilon| + |\nabla \ln u_\varepsilon|)^{2-p}}dx\\
&\leq \int_\Omega [u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p]\cdot(|\nabla ln u_\varepsilon|^p - |\nabla ln v_\varepsilon|^p)dx\\
&- \int_\Omega p v_\varepsilon^p|\nabla ln u_\varepsilon|^{p-2}\nabla ln u_\varepsilon\cdot(\nabla ln v_\varepsilon - \nabla ln u_\varepsilon)dx\\
&- \int_\Omega p u_\varepsilon^p|\nabla ln v_\varepsilon|^{p-2}\nabla ln v_\varepsilon\cdot(\nabla ln u_\varepsilon - \nabla ln v_\varepsilon)dx.
\end{aligned}
$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$ aplicando o Lema de Fatou A.1 na desigualdade acima juntamente com (1.45) temos

$$
\begin{aligned}
0 &\leq C(p)\int_\Omega \lim_{\varepsilon\to 0^+}\inf(u_\varepsilon v_\varepsilon)^p(u_\varepsilon+v_\varepsilon)^p\frac{|v_\varepsilon\nabla u_\varepsilon - u_\varepsilon\nabla v_\varepsilon|^2}{(v_\varepsilon|\nabla u_\varepsilon| + u_\varepsilon|\nabla v_\varepsilon|)^{2-p}}dx\\
&\leq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\inf C(p)\int_\Omega (u_\varepsilon v_\varepsilon)^p(u_\varepsilon+v_\varepsilon)^p\frac{|v_\varepsilon\nabla u_\varepsilon - u_\varepsilon\nabla v_\varepsilon|^2}{(v_\varepsilon|\nabla u_\varepsilon| + u_\varepsilon|\nabla v_\varepsilon|)^{2-p}}dx\\
&\leq \lim_{\varepsilon\to 0^+} C(p)\int_\Omega (u_\varepsilon v_\varepsilon)^p(u_\varepsilon+v_\varepsilon)^p\frac{|v_\varepsilon\nabla u_\varepsilon - u_\varepsilon\nabla v_\varepsilon|^2}{(v_\varepsilon|\nabla u_\varepsilon| + u_\varepsilon|\nabla v_\varepsilon|)^{2-p}}dx\\
&\leq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\lambda_1\int_\Omega\left[\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}} - \frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}}\right].[u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p] = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\lim_{\varepsilon\to 0^+} C(p)\int_\Omega (u_\varepsilon v_\varepsilon)^p(u_\varepsilon+v_\varepsilon)^p\frac{|v_\varepsilon\nabla u_\varepsilon - u_\varepsilon\nabla v_\varepsilon|^2}{(v_\varepsilon|\nabla u_\varepsilon| + u_\varepsilon|\nabla v_\varepsilon|)^{2-p}}dx = 0.
$$

Donde concluímos que $u\nabla v = v\nabla u$, ou seja, $u = kv$ para alguma constante k. □

Teorema 1.5 *Toda autofunção positiva é sempre uma primeira autofunção, ou seja, se $v > 0$ é uma autofunção correspondente a um autovalor λ, então $\lambda = \lambda_1$.*

Demonstração. Seja $v > 0$ a autofunção correspondente a um autovalor λ. Seja $u > 0$ a primeira autofunção correspondente ao primeiro autovalor λ_1. Pelas estimativas feitas no Teorema 1.4 temos o seguinte

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left[\lambda_1 \frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}} - \lambda \frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}}\right] \cdot [u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p]dx &= \int_\Omega [u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p] \cdot (|\nabla ln u_\varepsilon|^p - |\nabla ln v_\varepsilon|^p)dx \\ &- \int_\Omega p v_\varepsilon^p |\nabla ln u_\varepsilon|^{p-2} \nabla ln u_\varepsilon \cdot (\nabla ln v_\varepsilon - \nabla ln u_\varepsilon)dx \\ &- \int_\Omega p u_\varepsilon^p |\nabla ln v_\varepsilon|^{p-2} \nabla ln v_\varepsilon \cdot (\nabla ln u_\varepsilon - \nabla ln v_\varepsilon)dx.\end{aligned}$$

E como já vimos o último termo desta igualdade é não negativo.

De uma forma análoga ao feito na demonstração do Teorema 1.4, fazendo $\varepsilon \to 0^+$ temos o seguinte

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \left[\lambda_1 \frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}} - \lambda \frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}}\right] \cdot [u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p]dx = \int_\Omega [\lambda_1 - \lambda] \cdot [u^p - v^p]dx \leq 0. \qquad (1.46)$$

O que é uma contradição se $\lambda > \lambda_1$, pois caso isto ocorra, teríamos o seguinte

$$(\lambda_1 - \lambda) < 0 \quad \text{e} \quad \int_\Omega (u^p - v^p)dx \geq 0.$$

Como v pode ser substituída por qualquer múltiplo kv, considere k suficientemente grande de modo que

$$u(x)^p \leq (\max u(x))^p \leq (k \min v(x))^p \leq (kv(x))^p,$$

sendo $u, v \geq 0$ temos

$$\int_\Omega (u^p - (kv)^p)dx \leq 0,$$

contradição.

Portanto $\lambda = \lambda_1$. □

Definição 1.6 *Sejam* u_i, $i = 1, 2, ...$ *autofunções associadas respectivamente aos autovalores* λ_i, $i = 1, 2, ...$ *vamos designar por* **linha nodal** *de* u_i *o conjunto* $\mathrm{N}(u_i) = \overline{\{x \in \Omega; u_i = 0\}}$ *e por* **domínios nodais** *as componentes conexas de* $\Omega \backslash \mathrm{N}(u_i)$.

Teorema 1.7 *Qualquer autofunção tem apenas um número finito de domínios nodais.*

Demonstração. Seja u uma autofunção correspondente a um certo autovalor λ. Se N_j denota a componente conexa de um dos conjuntos $\Omega^+ = \{x \in \Omega; u(x) > 0\}$ e $\Omega^- = \{x \in \Omega; u(x) < 0\}$, então sendo u uma função contínua temos que $u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\mathrm{N}_j)$. Temos o seguinte

$$\int_{\mathrm{N}_j} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla u dx = \lambda \int_{\mathrm{N}_j} |u|^{p-2}u \cdot u dx,$$

ou ainda

$$\int_{\mathrm{N}_j} |\nabla u|^p dx = \lambda \int_{\mathrm{N}_j} |u|^p \cdot u dx. \tag{1.47}$$

Para $1 < p < N$ usando a Desigualdade de Hölder A.5 e a imersão de Sobolev em (1.47) temos

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} &= \lambda \int_{\mathrm{N}_j} |u|^p.u dx \\
&\leq \lambda \left[\int_{\mathrm{N}_j} 1^{\frac{N}{p}} dx\right]^{\frac{p}{N}} \cdot \left[\int_{\mathrm{N}_j} |u^p|^{\frac{N}{N-p}} dx\right]^{\frac{N-p}{N}} \\
&= \lambda |\mathrm{N}_j|^{\frac{p}{N}} \cdot \|u^p\|_{L^{\frac{N}{N-p}}(\Omega)} \\
&= \lambda |\mathrm{N}_j|^{\frac{p}{N}} \cdot \|u\|^p_{L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega)} \\
&\leq \lambda |\mathrm{N}_j|^{\frac{p}{N}} \cdot C(N,p) \cdot \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{1.48}$$

Onde $C(N,p)$ é a constante da imersão de Sobolev de $\mathrm{W}_0^{1,p}(\mathrm{N}_j)$ em $L^P(\mathrm{N}_j)$.
De (1.48), temos

$$|\mathrm{N}_j| \geq \lambda^{-\frac{N}{p}} C(N,p)^{-1}. \tag{1.49}$$

Portanto de (1.49)

$$|\Omega| \geq \sum_j |\mathrm{N}_j| \geq \lambda^{-\frac{N}{p}} C(N,p)^{-1} \sum_j 1. \tag{1.50}$$

Portanto a soma das medidas das componentes conexas é menor ou igual à $\lambda^{-\frac{N}{p}} C(N,p)^{-1} < +\infty$ para $1 < p < N$.
Suponha agora $p \geq N$, e sejam α e $\beta > 0$, tais que, $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$. Então temos

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} &= \lambda \int_{\mathrm{N}_j} |u|^p \cdot u dx \\
&\leq \lambda \left[\int_{\mathrm{N}_j} 1^\beta dx \right]^{\frac{1}{\beta}} \cdot \left[\int_{\mathrm{N}_j} |u^p|^\alpha dx \right]^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= \lambda |\mathrm{N}_j|^{\frac{1}{\beta}} \cdot \|u^p\|_{L^\alpha(\Omega)}. \qquad (1.51)
\end{aligned}$$

Sendo $\alpha > 1$ temos $\alpha p > p$, logo $\alpha p > p \geq N$. Desde que Ω tem medida finita valem as seguintes imersões

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha p}(\Omega). \qquad (1.52)$$

Daí temos

$$\|u\|^p_{L^{\alpha p}(\Omega)} \leq C(N,P) \cdot \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}, \qquad (1.53)$$

de (1.51) e (1.53) temos

$$\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \lambda |\mathrm{N}_j|^{\frac{1}{\beta}} \cdot \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} C(N,p),$$

ou ainda,

$$|\mathrm{N}_j| \geq \lambda^{-\beta} C(N,p)^{-\beta}. \qquad (1.54)$$

Donde segue que

$$|\Omega| \geq \sum_j |\mathrm{N}_j| \geq \lambda^{-\beta} C(N,p)^{-\beta} \sum_j 1$$

Portanto o numero de domínios nodais é sempre finito. □

Teorema 1.8 *O primeiro autovalor é isolado, ou seja existe $\alpha > 0$ tal que λ_1 é o único autovalor no intervalo $[0, \alpha]$.*

Demonstração. Provaremos o teorema argumentando por contradição. Suponha que exista uma sequência de autovalores λ_k que tende para λ_1. Seja u_k a sequência de autofunções correspondentes em $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Temos então

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_k|^p dx}{\displaystyle\int_\Omega |u_k|^p dx} = \lambda_k, \qquad \text{onde} \quad \int_\Omega |u_k|^p dx = 1. \tag{1.55}$$

Pelo Teorema 1.1 existem uma subsequência u_{k_j} e uma função u pertencentes a $W_0^{1,p}(\Omega)$ tais que $u_{k_j} \to u$ e $\nabla u_{k_j} \rightharpoonup \nabla u$ em $L^p(\Omega)$. Por semicontinuidade inferior fraca temos

$$\begin{aligned}\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^p dx} &\leq \liminf_{j\to\infty} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_k|^p dx}{\displaystyle\int_\Omega |u_k|^p dx} \\ &= \liminf_{j\to\infty} \lambda_k \\ &= \lambda_1.\end{aligned}$$

Ou seja u é a primeira autofunção. Desde que u não muda de sinal em Ω podemos supor $u > 0$.

Se $\lambda_k \neq \lambda_1$, então u_k muda de sinal em Ω, pois apenas a primeira autofunção não muda de sinal em Ω ver Teorema 1.3. Do Teorema 1.7 segue que quaquer outra autofunção diferente da primeira muda de sinal em Ω. Observe que ambos os conjuntos $\Omega_k^+ = \{x \in \Omega; u_k(x) > 0\}$ e $\Omega_k^- = \{x \in \Omega; u_k(x) < 0\}$ são não vazios e tem medida não nula, pois do Teorema 1.7 decorre que

$$|\Omega^+| \geq |N_j| \geq \lambda_k^A C(N,p)^{-1} \quad \text{e} \quad |\Omega^-| \geq |N_j| \geq \lambda_k^A C(N,p)^{-1},$$

onde $A = -\frac{N}{p}$ se $1 < p < N$ e $A = -\beta$ se $p \geq N$.
Isto impede u_{k_j} de convergir para uma função positiva em $L^p(\Omega)$. Com efeito, os conjuntos

$$\Omega^+ = \limsup \Omega_{kj}^+ \quad e \quad \Omega^- = \limsup \Omega_{kj}^-$$

tem medida positiva. Podemos assumir que $u = \lim u_{k_j}$ q.t.p. em Ω. Passando a uma subsequência caso necessite, temos $u > 0$ q.t.p. em Ω^+ e $u < 0$ q.t.p. em Ω^-. O que é uma contradição.

Portanto o autovalor λ_1 é isolado. $\square$

1.3 O Problema de Dirichlet para o p-Laplaciano

Nesta seção estudaremos a existência, unicidade e regularidade de solução para um problema de Dirichlet envolvendo o p-Laplaciano, que servirá de suporte na demonstração de resultados nos capítulos seguintes.

O problema de nosso interesse no momento é dado por

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(x), \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1.56}$$

Onde $f \in \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $p > 1$ e $-\Delta_p$ denota o operador não linear p-Laplaciano, que já definimos no início do capítulo.

Afim de garantir a existência de solução fraca para o problema (1.56) enunciaremos um teorema e um lema cujas demonstrações podem ser vistas em [25] e serão referência na demonstração do teorema de Browder-Minty, com o qual provaremos a existência de solução fraca para o problema (1.56).

Teorema 1.9 *Seja $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ contínua e coerciva. Então para cada $a \in \mathbb{R}^N$ a equação*

$$f(u) = a \tag{1.57}$$

admite uma solução $u \in \mathbb{R}^N$.

Demonstração. Ver [25]

Lema 1.2 *Sejam X um espaço de Banach reflexivo, $g \in X'$ e $T : X \longrightarrow X'$ um operador contínuo. Se $u \in X$ é solução da inequação variacional*

$$(T(v) - g, v - u) \geq 0 \tag{1.58}$$

para todo $v \in X$, então u satisfaz a equação

$$T(u) = g \tag{1.59}$$

Demonstração. Ver [25]

Teorema 1.10 (Browder-Minty) *Seja X um espaço de Banach reflexivo e separável e seja $T : X \longrightarrow X'$ um operador limitado, contínuo, coercivo, e monótono. Então para cada $g \in X'$ existe uma solução da equação*

$$Tu = g \tag{1.60}$$

Ou seja $T(X) = X'$.

Demonstração. Como X é separável, seja (x_n) uma sequência com *Span* denso em X. Note que

$$X \supset X_n =: Span\{x_1, x_2, ..., x_n\} \tag{1.61}$$

O objetivo é aproximar o problema (1.60) por um problema em um espaço de dimensão finita. Seja $g \in X'$ e defina $g_n \in X_n'$ como sendo $g_n := g \mid_{X_n}$, de forma similar definimos o operador $T_n : X_n \longrightarrow X_n'$ como sendo $T_n u := Tu\big|_{X_n}$ para todo $u \in X_n$. Dados $u, v \in X_n$ nós temos pelo Teorema 1.9

$$\langle g - g_n, v\rangle = \langle Tu - T_n u, v\rangle = 0. \tag{1.62}$$

Temos diretamente das propriedades de T que T_n é

(i) limitado

(ii) contínuo

(iii) coercivo

Usando o Teorema 1.9, dada $g \in X$, existe $u_n \in X_n$ tal que

$$T_n(u_n) = g_n.$$

Considere $(u_n) \subset X$.

Temos

$$\frac{\langle Tu_n, u_n\rangle}{||u_n||} = \frac{\langle T_n u_n, u_n\rangle}{||u_n||} = \frac{\langle g_n, u_n\rangle}{\|u_n\|} \leq \frac{\|g\|.\|u_n\|}{\|u_n\|} = \|g\|.$$

Pela coercividade de T, devemos ter $\|u_n\|$ limitada. Mais ainda sendo T limitado $\|Tu_n\|$ é limitado. Usando a reflexividade de X e a separabilidade de X' por compacidade fraca existem $u \in X$, $\overline{g} \in X'$ e uma subsequência que ainda denotaremos por (u_n) tais que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } X$$

e

$$Tu_n \rightharpoonup \overline{g} \text{ em } X'$$

Provaremos que $\overline{g} = g$ e que $Tu = g$.
Usando (1.62), para toda base que representa (x_n) temos

$$\langle \overline{g} - g, x_i \rangle = \lim_{x \to \infty} \langle Tu_n - g, x_i \rangle = 0,$$

portanto $\overline{g} = g$. Ainda utilizando (1.62) temos que

$$\begin{aligned}
\langle Tu_n, u_n \rangle &= \langle T_n u_n, u_n \rangle \\
&= \langle g_n, u_n \rangle \\
&= \langle g, u_n \rangle \to \langle g, u \rangle.
\end{aligned}$$

Usando agora a monotonicidade do operador T para todo $v \in X$ temos

$$\begin{aligned}
0 \le \langle Tu_n - Tv, u_n - v \rangle &= \langle Tu_n, u_n \rangle + \langle Tu_n, -v \rangle + \langle -Tv, u_n \rangle + \langle -Tv, -v \rangle \\
&\to \langle g, u \rangle + \langle g, -v \rangle + \langle -Tv, u \rangle + \langle -Tv, v \rangle \\
&= \langle g - Tv, u - v \rangle \\
&= \langle Tv - g, v - u \rangle
\end{aligned}$$

portanto $\langle Tv - g, v - u \rangle \ge 0$. Então pelo Lema 1.2, tem-se $Tu = g$. □

Provaremos a existência de solução fraca para o Problema de Dirichlet envolvendo o p-Laplaciano, como aplicação do Teorema 1.10.

Teorema 1.11 *O problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(x), & em & \Omega \\ u &= 0, & sobre & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $f \in \mathrm{W}^{1,p'}(\Omega)$*,* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *é um domínio limitado com fronteira suave,* $p > 1$ *e* $-\Delta_p$ *denota o operador não linear p-Laplaciano. Admite uma única solução fraca* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$*.*

Demonstração. Sendo $W_0^{1,p}(\Omega)$ um espaço de Banach reflexivo e separável e $-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ um operador limitado, contínuo coercivo e monótono, ver Teorema 1.1, logo as hipóteses do Teorema 1.10 são verificadas. Portanto existe uma solução fraca $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ do Problema (1.11).

A unicidade é garantida pela injetividade do operador $-\Delta_p$ que também foi provada no Teorema 1.1. $\square$

Observação 1.2 *A solução u do problema (1.11) é de classe* $C^{1,\alpha}(\Omega)$*, para algum* $\alpha \in (0, 1)$*, desde que* $f \in L^\infty(\Omega)$*.*

A justificativa da Observação 1.2 pode ser vista em [13].

Capítulo 2

O Problema Escalar

2.1 Existência de Soluções para uma Classe de Problemas Envolvendo o p-Laplaciano

Neste capítulo, discutiremos a existência de soluções para uma classe de problemas envolvendo o p-Laplaciano com mudança de sinal nas funções peso. Mais precisamente, estudaremos a existência de soluções fracas para o seguinte problema escalar de contorno

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda g(x) f(u), \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $N \geq 1$, Δ_p denota o operador p-Laplaciano definido no Capítulo 1 para $p > 1$. A função g é de classe $C^1(\Omega)$ e muda de sinal, e a função f de classe C^1 satisfazendo $f(0) > 0$. Em nosso caso vamos nos restringir a clase de funções g com mudança de sinal, positivas no interior de Ω e negativas para valores suficientemente próximos de $\partial\Omega$.

2.2 Existência de Soluções

A fim de definir uma classe de funções g com a qual trabalharemos, consideremos inicialmente o problema de autovalor estudado no Capítulo 1. Seja $\phi_1 \in C^1(\overline{\Omega})$ a primeira autofunção correspondente ao primeiro autovalor λ_1 de (1.20) tal que $\phi_1 > 0$ em Ω e $\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \eta} < 0$ em $\partial\Omega$, onde η é a derivada normal exterior a $\partial\Omega$. Em todo este capítulo, λ_1 e ϕ_1 sempre denotarão, respectivamente, o primeiro autovalor e a primeira autofunção do problema (1.20). Por simplicidade vamos considerar $\|\phi_1\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$.

Provemos que existem constantes positivas $m, \delta \quad e \quad \sigma$ que dependem de Ω e verificam

$$|\nabla \phi_1|^p - \lambda_1 \phi_1^p \geq m, \quad \text{em} \quad \Omega_\delta \tag{2.2}$$

e

$$\phi_1 \geq \sigma, \quad \text{em} \quad \Omega_0 = \Omega \setminus \Omega_\delta, \tag{2.3}$$

onde

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega; dist(x, \partial\Omega) \leq \delta\}.$$

Temos $0 \equiv \phi_1$ em $\partial\Omega$ e $\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \eta} < 0$ em $\partial\Omega$ o que implica $\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \leq -n$ em $\partial\Omega$ para algum $n > 0$. Por simplicidade vamos normalizar o vetor η e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos,

$$-|\nabla \phi_1| \cdot |\eta| \leq \langle \nabla \phi_1, \eta \rangle = \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \leq -n$$
$$\Rightarrow -|\nabla \phi_1| \cdot |\eta| \leq -n$$
$$\Rightarrow |\nabla \phi_1|^p \geq \frac{n^p}{|\eta|^p} = n^p,$$

fazendo $n^p = m_1$ teremos o seguinte

$$|\nabla \phi_1|^p \geq m_1.$$

Sendo $\phi \equiv 0$ em $\partial\Omega$, pela continuidade de ϕ_1 podemos considerar δ suficientemente pequeno de modo que $\lambda \phi_1^p \leq \frac{m_1}{2}$ em Ω_δ.

Portanto,

$$|\nabla\phi_1|^p - \lambda_1\phi_1^p \geq \frac{m_1}{2} := m.$$

Por outro lado sendo ϕ_1 uma função contínua e o conjunto $\overline{\Omega \setminus \Omega_\delta}$ compacto temos que ϕ_1 atinge um mínimo em $\overline{\Omega \setminus \Omega_\delta}$, então fica provada a existência de um $\sigma \in \mathbb{R}$ que satisfaz $\phi_1 \geq \sigma$ em $\Omega_0 = \Omega \setminus \Omega_\delta$.

Ao longo deste capítulo assumiremos as seguintes hipóteses a respeito da função g. Existem constantes positivas β e r tais que

$$g(x) \geq -\beta \quad \text{em} \quad \Omega_\delta \tag{2.4}$$

e

$$g(x) \geq r \quad \text{em} \quad \Omega_0. \tag{2.5}$$

Definição 2.1 *Uma função* $\underline{u}$ *é dita* **subsolução fraca** *do problema (2.1) se* $\underline{u} \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *é tal que* $\underline{u} \equiv 0$ *em* $\partial\Omega$ *e*

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla\underline{u}\cdot\nabla w dx \leq \int_\Omega \lambda g(x) f(\underline{u})\cdot w dx, \quad \textit{para} \quad \textit{todo} \;\; w \in W$$

onde $W = \{w \in C_0^\infty(\Omega); w \geq 0 \;\; \textit{em} \;\; \Omega\}$.

Uma função $\overline{u}$ *é dita* **supersolução fraca** *do problema (2.1) se* $\overline{u} \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *é tal que* $\overline{u} \equiv 0$ *em* $\partial\Omega$ *e*

$$\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla\overline{u}\cdot\nabla w dx \geq \int_\Omega \lambda g(x) f(\overline{u})\cdot w dx \quad \textit{para} \quad \textit{todo} \;\; w \in W.$$

Definição 2.2 *Uma função* u *é dita* **solução fraca** *do problema (2.1) se* $u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *é tal que* $u \equiv 0$ *em* $\partial\Omega$ *e*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla w dx = \int_\Omega \lambda g(x) f(u)\cdot w dx, \quad \textit{para} \quad \textit{todo} \;\; w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

2.3 O Método de Sub-Supersolução

Provaremos a existência de uma solução fraca para o problema (2.1) utilizando o método de sub e supersoluções.

Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(x,u), & \text{em} & \Omega \\ u &= 0, & \text{sobre} & \partial\Omega \end{cases} \tag{2.6}$$

Onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado regular. A função $f : \Omega \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é Carathéodory com $f(x,.)$ não decrescente e $f(.,u(.)) \in L^\infty(\Omega)$, para $u \in L^\infty(\Omega)$.

Definição 2.3 *A função $\underline{u}$ é dita* **subsolução fraca** *de (2.6) se $\underline{u} \equiv 0$ em $\partial\Omega$, $\underline{u} \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, e verifica*

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u} \cdot \nabla\varphi dx \leq \int_\Omega f(x,\underline{u})\varphi dx. \tag{2.7}$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$.
A função $\overline{u}$ é dita **supersolução fraca** *de (2.6) se $\overline{u} \equiv 0$ em $\partial\Omega$, $\underline{u} \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, e verifica*

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \overline{u} \cdot \nabla\varphi dx \geq \int_\Omega f(x,\overline{u}) \cdot \varphi dx. \tag{2.8}$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$.

Definição 2.4 *A função u é dita* **solução fraca** *de (2.6) se $u \equiv 0$ em $\partial\Omega$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, e verifica*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi dx = \int_\Omega f(x,u) \cdot \varphi dx, \tag{2.9}$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Antes de provarmos o resultado de sub-supersoluções exibiremos um resultado de regularidade.

Lema 2.1 (Estimativa $C^{1,\alpha}$, Tolksdorff, Liebermann.) *Seja Ω um domínio limitado de classe $C^{2,\beta}(\Omega)$ para algum $\beta \in (0,1)$, e seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $\Delta_p u \in L^\infty(\Omega)$. Então $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq K_1$ para algum $\alpha \in (0,1)$ e uma constante $K_1 > 0$. As constantes α e K_1 dependem apenas de N, Ω, p, $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ e de $\|\Delta_p u\|_{L^\infty(\Omega)}$.*

Demonstração. Ver Liebermann [16] e Tolksdorff [32].

Lema 2.2 *Se existem uma subsolução $\underline{u}$ e uma supersolução $\overline{u}$ do problema (2.6), tal que, $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω. Então o problema (2.6) admite uma solução fraca $u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ que satisfaz $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$.*

Demonstração. Seja $u_0 = \underline{u} \in C(\overline{\Omega})$. Logo existe $M > 0$ tal que $|\underline{u}(x)| \leq M$ para todo $x \in \Omega$. Segue que

$$f(x, u_0) = f(x, \underline{u}) \in L^\infty(\Omega)$$

e daí

$$f(x, u_0) \in L^s(\Omega) \text{ para todo } s > 1.$$

Como é conhecido do Capítulo 1, mais precisamente do Teorema 1.11 o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(x, u_0), \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.10}$$

admite única solução fraca $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso, podemos observar que

$$-\Delta_p u_1 = f(x, u_0) = f(x, \underline{u}) \geq -\Delta_p \underline{u} \text{ em } \Omega$$
$$\text{e}$$
$$\underline{u} = u_1 \text{ em } \partial\Omega.$$

Pelo Princípio da Comparação Fraca temos

$$\underline{u} \leq u_1 \text{ em } \Omega. \tag{2.11}$$

Por outro lado,

$$-\Delta_p u_1 = f(x, \underline{u}) \leq f(x, \overline{u}) \leq -\Delta_p \overline{u} \text{ em } \Omega$$
$$\text{e}$$
$$u_1 = \overline{u} = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Novamente, pelo Princípio da Comparação Fraca, temos

$$u_1 \leq \overline{u} \text{ em } \Omega. \tag{2.12}$$

Então de (2.11) e (2.12) segue que

$$\underline{u} \leq u_1 \leq \overline{u}, \quad em \quad \overline{\Omega}. \tag{2.13}$$

Daí segue que $u_1 \in L^\infty(\Omega)$, pois está entre duas funções limitadas.

Como $u_1 \in L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e é solução de (3.13), pelo Lema 2.1 temos que $u_1 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Novamente, consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(x, u_1), & \text{em} & \Omega \\ u &= 0, & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.14}$$

que admite única solução $u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Notemos que

$$\Delta_p u_2 = f(x, u_1) \geq f(x, \underline{u}) = -\Delta_p u_1 \text{ em } \Omega$$

$$\text{e}$$

$$u_2 = u_1 = 0 \text{ sobre } \partial\Omega$$

Então pelo Princípio da Comparação Fraca temos

$$u_1 \leq u_2, \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{2.15}$$

Por outro lado temos que

$$\Delta_p u_2 = f(x, u_1) \leq f(x, \overline{u}) \leq -\Delta_p \overline{u} \quad \text{em} \quad \Omega$$

e

$$u_1 = u_2 = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega.$$

Pelo Princípio da Comparação Fraca C.3 temos

$$u_2 \leq \overline{u}, \quad \text{em} \quad \Omega \tag{2.16}$$

De (2.15) e de (2.16) temos que

$$u_1 \leq u_2 \leq \overline{u}. \tag{2.17}$$

Daí $u_2 \in L^\infty(\Omega)$, sendo solução de (2.14), pelo Lema 2.1 segue que $u_2 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Até agora concluímos que

$$\underline{u} \;\; \leq \;\; u_1 \leq u_2 \leq \overline{u}. \tag{2.18}$$

Continuando com este raciocínio, obtemos uma sequência de problemas

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = f(x, u_{n-1}), & \text{em} \quad \Omega \\ u_n = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.19}$$

Cujas soluções $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ verificam o seguinte

$$\underline{u} \leq \cdots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \cdots \leq \overline{u}. \tag{2.20}$$

Como toda sequência monótona e limitada é convergente, segue que podemos definir a função

$$\begin{aligned} u : \ \overline{\Omega} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x). \end{aligned}$$

Aplicando o limite em (2.20), obtemos:

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u}.$$

De $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ e $f(x, u_{n-1}) \in L^\infty(\Omega)$ ser uma função de Carathéodory, temos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(x, u_{n-1})dx = \int_\Omega f(x, u)dx. \tag{2.21}$$

Por outro lado temos

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \varphi dx = \int_\Omega f(x, u_{n-1}) \cdot \varphi dx,$$

e

$$-\|\underline{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \underline{u} \leq u_1 \leq \cdots \leq u_{n+1} \leq \cdots \leq \overline{u} \leq \|\overline{u}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Daí,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p = \int_\Omega f(x, u_{n-1}) \cdot u_n dx \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\|\underline{u}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\overline{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \right) |\Omega|.$$

Portanto (u_n) é uma sequência limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Sem perda de generalidade temos

(i) $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$

(ii) $u_n \longrightarrow u$ em $L^p(\Omega)$, (imersão de Sobolev)

(iii) $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ q.t.p em Ω.

Se $p \geq 2$ e usando a Observação B.1 temos

$$
\begin{aligned}
0 &\leq c_p \int_\Omega |\nabla u_n - u_m|^p dx \leq \int_\Omega \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m, \nabla u_n - \nabla u_m \rangle dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot (\nabla u_n - \nabla u_m) dx - \int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \cdot (\nabla u_n - \nabla u_m) dx \\
&= \int_\Omega f(x, u_{n-1}) \cdot (u_n - u_m) dx - \int_\Omega f(x, u_{m-1}) \cdot (u_n - u_m) dx \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

Agora pela Desigualdade de Hölder temos

$$
\begin{aligned}
\left| \int_\Omega f(x, u_{n-1}) \cdot (u_n - u_m) dx \right| &\leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |u_n - u_m| dx \\
&\leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_n - u_m\|_{L^p(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{p'}}. \qquad (2.23)
\end{aligned}
$$

Então de (2.22) e (2.23), concluímos que (∇u_n) é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$.

Logo $\nabla u_n \longrightarrow \nabla u$ em $L^p(\Omega)$. Ou seja $u_n \longrightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Pela continuidade do operador $-\Delta_p$ provada no Teorema 1.1, segue que

$$
-\Delta_p u_n \longrightarrow -\Delta_p u.
$$

Se $1 < p < 2$ pela Observação B.1 temos

$$
\begin{aligned}
0 \leq c_p \frac{\|u_n - u_m\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)}}{(2C)^{2-p}} &\leq c_p \frac{\|u_n - u_m\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)}}{(\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u_m\|_{W_0^{1,p}(\Omega)})^{2-p}} \\
&\leq \int_\Omega \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m, \nabla u_n - \nabla u_m \rangle dx,
\end{aligned}
$$

pois de $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, tem-se que $\|u_n\|_{W_0^{1,p}} \leq C$. De uma forma inteiramente análoga ao caso em que $p \geq 2$ temos que

$$-\Delta_p u_n \longrightarrow -\Delta_p u.$$

Portanto podemos concluir a função u é solução fraca de (2.6). Como $u \in L^\infty(\Omega)$, pois $\underline{u} \le u \le \overline{u}$, segue que $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e sendo solução fraca de (2.6) segue que $\Delta_p u \in L^\infty(\Omega)$, então pelo Lema 2.1 $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. □

2.4 O Resultado Principal Para o Caso Escalar

Antes de enunciarmos o resultado principal, vamos considerar o problema auxiliar:

$$\begin{cases} -\Delta_p e &= 1, \quad \text{em} \quad \Omega \\ e &= 0, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.24}$$

que pelo Teorema 1.11 admite solução fraca única.

Agora estamos prontos para provar o principal resultado deste capítulo, cuja demonstração encontra-se em [6].

Teorema 2.5 *Seja $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, não decrescente, tal que $f(0) > 0$. Suponha ainda que exista $\gamma > 0$ tal que*

$F_1)$ $\dfrac{f(\gamma\alpha)}{f(\gamma)} \ge \dfrac{\lambda_1}{m} \cdot \dfrac{\beta}{r}$, *onde $\alpha = \sigma^{\frac{p}{p-1}}$, β e r aparecem, respectivamente em (2.4) e (2.5)*

$F_2)$ $\dfrac{\gamma^{p-1}}{f(\gamma\alpha)} < \left(\dfrac{p-1}{p}\right)^{p-1} \cdot \dfrac{r}{\lambda_1} \cdot \mu(\gamma)$
onde
$\mu(\gamma) = \sup\limits_{s \in [k_2(\gamma), \infty)} \dfrac{s^{p-1}}{f(s)} \cdot \dfrac{1}{\|e\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)} g_0}$, $\quad k_2(\gamma) = \dfrac{p}{p-1} \cdot \gamma \|e\|_{L^\infty(\Omega)} \lambda_1^{\frac{1}{p-1}}$ *e* $g_0 = \sup\limits_{x \in \overline{\Omega}} g(x)$, *$e \in C^1(\overline{\Omega})$ é a única solução fraca positiva de (2.24).*

Então existe uma solução positiva de (2.1) para todo $\lambda \in [\underline{\lambda}(\gamma), \overline{\lambda}(\gamma)]$ onde

$$\underline{\lambda}(\gamma) = \frac{\lambda_1 \left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}}{f(\gamma\alpha)^r}, \quad \overline{\lambda}(\gamma) = \min\{\lambda^*(\gamma), \mu(\gamma)\} \quad e \quad \lambda^*(\gamma) = m \cdot \frac{\left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}}{f(\gamma)\beta}.$$

Demonstração. Inicialmente provemos que (F_1) implica $\underline{\lambda}(\gamma) \le \lambda^*(\gamma)$ e (F_2) implica $\underline{\lambda}(\gamma) \le \mu(\gamma)$ donde segue que $\underline{\lambda}(\gamma) \le \overline{\lambda}(\gamma)$. De fato, de (F_1) temos o seguinte

$$\frac{f(\gamma\alpha)}{f(\gamma)} \geq \frac{\lambda_1}{m} \cdot \frac{\beta}{r}$$

$$\Rightarrow f(\gamma\alpha) \cdot r \cdot m \geq \lambda_1 \beta \cdot f(\gamma)$$
$$\Rightarrow \frac{\lambda_1}{f(\gamma\alpha) \cdot r} \leq \frac{m}{f(\gamma) \cdot \beta},$$

sendo $\left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1} > 0$ temos

$$\frac{\lambda_1 \left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}}{f(\gamma\alpha) \cdot r} \leq \frac{m \left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}}{f(\gamma) \cdot \beta}.$$

Portanto $\underline{\lambda}(\gamma) \leq \lambda^*(\gamma)$.

Por (F_2) temos,

$$\frac{\gamma^{p-1}}{f(\gamma\alpha)} < \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} \cdot \frac{r}{\lambda_1} \cdot \mu(\gamma)$$
$$\Rightarrow \frac{\lambda_1 \gamma^{p-1}}{f(\gamma\alpha) \cdot r} < \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} \cdot \mu(\gamma)$$

Sendo $\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} > 0$, temos

$$\frac{\lambda_1 \left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}}{f(\gamma\alpha) \cdot r} < \mu(\gamma).$$

Portanto $\underline{\lambda}(\gamma) \leq \mu(\gamma)$ e daí $\underline{\lambda}(\gamma) \leq \overline{\lambda}(\gamma)$.

Seja $\lambda \in [\underline{\lambda}(\gamma), \overline{\lambda}(\gamma)]$ e $\underline{u} = \gamma \phi_1^{\frac{p}{p-1}}$.

Daí

$$\nabla \underline{u} = \tfrac{p}{p-1}\gamma \phi_1^{\frac{1}{p-1}} \cdot \nabla \phi_1 \text{ e } |\nabla \underline{u}| = \tfrac{p}{p-1}\gamma \phi_1^{\frac{1}{p-1}} \cdot |\nabla \phi_1|.$$

Assim, observando que λ_1 é o primeiro autovalor de (1.20) e ϕ_1 é a primeira autofunção de (1.20) e aplicando a regra do produto temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}\cdot\nabla w dx &= \int_\Omega \left(\frac{p}{p-1}\gamma\phi_1^{\frac{1}{p-1}}\right)^{p-2}|\nabla\phi_1|^{p-2}\frac{p}{p-1}\gamma\phi_1^{\frac{1}{p-1}}\nabla\phi_1\cdot\nabla w dx\\
&= \left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}\cdot\int_\Omega |\nabla\phi_1|^{p-2}\nabla\phi_1\cdot\phi_1\nabla w dx\\
&= \left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}\cdot\int_\Omega |\nabla\phi_1|^{p-2}\nabla\phi_1\cdot(\nabla(\phi_1\cdot w)-w\nabla\phi_1)dx\\
&= \left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}\cdot\int_\Omega \left[|\nabla\phi_1|^{p-2}\nabla\phi_1\cdot\nabla(\phi_1\cdot w)-w\nabla\phi_1\right]dx\\
&= \left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}\cdot\int_\Omega |\nabla\phi_1|^{p-2}\nabla\phi_1\cdot\nabla(\phi_1\cdot w)dx-\int_\Omega|\nabla\phi_1|^p\cdot w dx\\
&= \left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}\cdot\int_\Omega \lambda_1|\phi_1|^{p-2}\phi_1\cdot(\phi_1\cdot w)dx-\int_\Omega|\nabla\phi_1|^p\cdot w dx\\
&= \left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}\cdot\int_\Omega [\lambda_1\phi_1^p-|\nabla\phi_1|^p]\cdot w dx. \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

Dos cálculos anteriores, note que $\underline{u}$ será subsolução de (2.1) se a seguinte desigualdade ocorrer

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}\cdot\nabla\cdot w dx &= \left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}\cdot\int_\Omega [\lambda_1\phi_1^p-|\nabla\phi_1|^p]\cdot w dx\\
&\le \int_\Omega \lambda g(x)f(\underline{u})\cdot w dx,
\end{aligned}$$

para todo $w\in W$. Provemos que isso ocorre.

Em Ω_δ definido em (2.2) temos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}.[\lambda_1\phi_1^p-|\nabla\phi_1|^p] &\le -m\left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}\\
&\le -\lambda\beta f(\gamma), \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

pois $\lambda<\lambda^*(\gamma)=m\cdot\dfrac{\left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}}{f(\gamma)\beta}$.

Relembrando que $\|\phi_1\|_{L^\infty(\Omega)}=1$ temos $\phi_1(x)\le 1$ para todo $x\in\Omega$ e usando a monotonicidade da função f, temos

$$\phi_1^{\frac{p}{p-1}}\le 1\Rightarrow \gamma\phi_1^{\frac{p}{p-1}}\le\gamma\Rightarrow f(\gamma)\ge f\left(\gamma\phi_1^{\frac{p}{p-1}}\right).$$

Portanto,

$$-f(\gamma) \leq -f\left(\gamma\phi_1^{\frac{p}{p-1}}\right). \tag{2.27}$$

substituindo (2.3) e (2.27) em (2.26) e usando (2.4) ficamos com

$$\begin{aligned}\left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}\cdot[\lambda_1\phi_1^p - |\nabla\phi_1|^p] &\leq -\lambda\beta f\left(\gamma\phi_1^{\frac{p}{p-1}}\right)\\ &\leq \lambda g(x) f\left(\gamma\phi_1^{\frac{p}{p-1}}\right)\\ &= \lambda g(x) f(\underline{u}),\end{aligned} \tag{2.28}$$

para todo $x \in \Omega_\delta$.

Agora, em $\Omega_0 = \Omega \setminus \Omega_\delta$, usando o fato que $\lambda \geq \underline{\lambda}(\gamma) = \dfrac{\lambda_1\left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}}{f(\gamma\alpha)\cdot r}$, segue de (2.3), (2.5) e da monotonicidade de f

$$\begin{aligned}\left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}\cdot[\lambda_1\phi_1^p - |\nabla\phi_1|^p] &\leq \left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}\cdot\lambda_1\\ &\leq \lambda r f(\gamma\alpha)\\ &\leq \lambda g(x) f(\gamma\phi_1^{\frac{p}{p-1}})\\ &= \lambda g(x) f(\underline{u}).\end{aligned} \tag{2.29}$$

para todo $x \in \Omega_0$. Portanto de (2.25), (2.28) e (2.29) segue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla\underline{u}|^{p-2}\nabla\underline{u}\cdot\nabla w dx &= \left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}\cdot\int_\Omega[\lambda_1\phi_1^p - |\nabla\phi_1|^p]\cdot w dx\\ &\leq \int_\Omega \lambda g(x) f(\underline{u})\cdot w dx.\end{aligned}$$

Ou seja, $\underline{u}$ é subsolução fraca positiva de (2.1).

Por outro lado, desde que $\lambda \leq \overline{\lambda}(\gamma) \leq \mu(\gamma)$ escolha $R(\gamma) \in [k_2(\gamma), \infty)$ tal que

$$\lambda \leq \frac{[R(\gamma)]^{p-1}}{f(R(\gamma))\cdot\|e\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-1}\cdot g_0} < \mu(\gamma), \tag{2.30}$$

observe que $R(\gamma)$ existe pelas propriedades de supremo.

Definindo

$$\overline{u} = \frac{R(\gamma)\cdot e}{\|e\|_{L^\infty(\Omega)}}, \quad \text{temos} \quad \nabla\overline{u} = \frac{R(\gamma)}{\|e\|_{L^\infty(\Omega)}}\nabla e, \text{ e ainda } |\nabla\overline{u}| = \frac{R(\gamma)}{\|e\|_{L^\infty(\Omega)}}|\nabla e|.$$

Então, para todo $w \in W$, pela monotonicidade de f, usando (2.30) e o fato que e é solução fraca de (2.24), temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla\overline{u}|^{p-2}\nabla\overline{u}\cdot\nabla w dx &= \int_\Omega \left(\frac{R(\gamma)}{\|e\|_{L^\infty(\Omega)}}|\nabla e|\right)^{p-2}\frac{R(\gamma)}{\|e\|_{L^\infty(\Omega)}}\nabla e\cdot\nabla w dx \\
&= \left(\frac{R(\gamma)}{\|e\|_{L^\infty(\Omega)}}\right)^{p-1}\cdot\int_\Omega |\nabla e^{p-2}\nabla e\cdot\nabla w dx \\
&= \left(\frac{R(\gamma)}{\|e\|_{L^\infty(\Omega)}}\right)^{p-1}\cdot\int_\Omega 1\cdot w dx \\
&= \int_\Omega \left(\frac{R(\gamma)}{\|e\|_{L^\infty(\Omega)}}\right)^{p-1}\cdot w dx \\
&\geq \int_\Omega \lambda f(R(\gamma))g_0\cdot w dx \\
&\geq \int_\Omega \lambda g(x) f\left(\frac{R(\gamma)\cdot e}{\|e\|_{L^\infty(\Omega)}}\right)\cdot w dx \\
&= \int_\Omega \lambda g(x) f(\overline{u})\cdot w dx.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Portanto $\overline{u}$ é supersolução fraca de (2.1).

Desde que $R(\gamma) \geq k_2(\gamma)$, temos

$$R(\gamma) \geq \frac{p}{p-1}\cdot\gamma\|e\|_{L^\infty(\Omega)}\lambda_1^{\frac{1}{p-1}},$$

o que implica,

$$\frac{R(\gamma)}{\|e\|_{L^\infty(\Omega)}} \geq \frac{p}{p-1}\cdot\gamma\cdot\lambda_1^{\frac{1}{p-1}}$$

elevando ambos os membros da desigualdade por $p-1$ e relembrando que $\|\phi_1\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$ temos

$$\begin{aligned}\left(\frac{R(\gamma)}{\|e\|_{L^\infty(\Omega)}}\right)^{p-1} \geq \left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}\lambda_1 &\geq \left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}\lambda_1\cdot\phi_1^p \\ &\geq \left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}[\lambda_1\cdot\phi_1^p - |\nabla\phi_1|^p]. \quad (2.32)\end{aligned}$$

Portanto de (2.25), (2.31) e (2.32) temos para todo $w \in W$ que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla\overline{u}|^{p-2}\nabla\overline{u}\cdot\nabla w dx &= \int_\Omega \left(\frac{R(\gamma)}{\|e\|_{L^\infty(\Omega)}}\right)^{p-1}\cdot w dx \\ &\geq \left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}\cdot\int_\Omega [\lambda_1\phi_1^p - |\nabla\phi_1|^p]\cdot w dx \\ &= \int_\Omega |\nabla\underline{u}|^{p-2}\nabla\underline{u}\cdot\nabla w dx,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_\Omega |\nabla\overline{u}|^{p-2}\nabla\overline{u}\cdot\nabla w dx \geq \int_\Omega |\nabla\underline{u}|^{p-2}\nabla\underline{u}\cdot\nabla w dx$$

para todo $w \in W$, isto é,

$-\Delta_p\underline{u} \leq -\Delta_p\overline{u}$ em Ω e como $\underline{u} = \overline{u}$ em $\partial\Omega$ pelo Princípio da Comparação Fraca segue que $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω.

Portanto, pelo Lema 2.2, o Problema 2.1 admite uma solução fraca $u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. □

Corolário 2.6 *Suponha que exista $\gamma_0 > 0$ tal que para $\gamma \geq \gamma_0$ a condição F_1 é satisfeita e a função f é sublinear no infinito, ou seja, $\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{f(s)}{s^{p-1}} = 0$. Então o problema (2.1) admite uma solução positiva para cada $\lambda \geq \underline{\lambda}(\gamma_0)$.*

Demonstração. Por hipótese temos que a condição (F_1) é satisfeita para todo $\gamma \geq \gamma_0$, seja $\underline{\lambda}(\gamma) \leq \lambda^*(\gamma)$, para todo $\gamma \geq \gamma_0$.

Sendo f sublinear no infinito, temos $\mu(\gamma) = +\infty$ para $\gamma \geq 0$, pois

$$\mu(\gamma) = \sup_{s\in[k_2(\gamma),\infty)} \frac{s^{p-1}}{f(s)}\cdot\frac{1}{\|e\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-1} g_0} \longrightarrow \infty, \quad \text{quando} \quad s \longrightarrow \infty.$$

Logo (F_2) é satisfeita para todo $\gamma \geq 0$. Então pelo Teorema 2.5, existe uma solução fraca positiva para todo

$$\lambda \in S := \bigcup_{\gamma \geq \gamma_0} [\underline{\lambda}(\gamma), \lambda^*(\gamma)],$$

pois,

$$\overline{\lambda}(\gamma) = \min\{\lambda^*(\gamma), \mu(\gamma)\} = \lambda^*(\gamma).$$

Sendo f sublinear no infinito, temos

$$\lim_{\gamma\to\infty} \underline{\lambda}(\gamma) = \lim_{\gamma\to\infty} \frac{\lambda_1 \left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}}{f(\gamma\alpha)r} = \frac{\lambda_1 \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}}{r\alpha^{p-1}} \lim_{\gamma\to\infty} \frac{(\alpha\gamma)^{p-1}}{f(\gamma\alpha)} = +\infty \tag{2.33}$$

e

$$\lim_{\gamma\to\infty} \lambda^*(\gamma) = \lim_{\gamma\to\infty} \frac{m \left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}}{f(\gamma)\beta} = \frac{m \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}}{\beta} \lim_{\gamma\to\infty} \frac{\gamma^{p-1}}{f(\gamma)} = +\infty. \tag{2.34}$$

Sendo $\underline{\lambda}(\gamma)$ e $\lambda^*(\gamma)$ funções contínuas, de (2.33) e de (2.34) obtemos

$$S = [\lambda_0, \infty), \quad \text{onde} \quad \lambda_0 = \underline{\lambda}(\gamma_0).$$

$\square$

Corolário 2.7 *Seja $M > 0$ tal que, $\dfrac{f(0)}{M} \geq \dfrac{\lambda_1}{m} \cdot \dfrac{\beta}{r}$ e $f(s) \leq M$ para $s \geq 0$. Então (2.1) admite uma solução fraca positiva para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração. A hipótese de que $\frac{f(0)}{M} \geq \frac{\lambda_1}{m} \cdot \frac{\beta}{r}$ implica que a condição (F_1) é satisfeita para $\gamma > 0$. De fato, temos $\alpha = \sigma^{\frac{p}{p-1}} > 0$ e $f(\gamma\alpha) > f(0)$ pela monotonicidade da função f. Logo

$$\frac{f(\gamma\alpha)}{M} \geq \frac{\lambda_1}{m} \cdot \frac{\beta}{r},$$

Sendo $f(s) \leq M$ para $s \geq 0$ temos

$$\frac{f(\gamma\alpha)}{f(\gamma)} \geq \frac{f(\gamma\alpha)}{M} \geq \frac{\lambda_1}{m} \cdot \frac{\beta}{r}. \tag{2.35}$$

Portanto, de (2.35) temos que (F_1) é satisfeita, e como consequência $\underline{\lambda}(\gamma) \leq \lambda^*(\gamma)$ para $\gamma > 0$. Usando novamente a hipótese de que $f(s) \leq M$ para $s \geq 0$, obtemos

$$\mu(\gamma) = \sup_{s\in[k_2(\gamma),\infty)} \frac{s^{p-1}}{f(s)} \cdot \frac{1}{\|e\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)} g_0} \geq \sup_{s\in[k_2(\gamma),\infty)} \frac{s^{p-1}}{M} \cdot \frac{1}{\|e\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)} g_0} \longrightarrow \infty \quad \text{quando } s \longrightarrow \infty,$$

ou seja, a condição (F_2) é verificada. Então pelo Teorema 2.5 existe uma solução positiva de (2.1) para todo

$$\lambda \in S = [\underline{\lambda}(\gamma), \lambda^*(\gamma)].$$

Pois,

$$\overline{\lambda}(\gamma) = \min\{\lambda^*(\gamma), \mu(\gamma)\} = \lambda^*(\gamma).$$

Sendo $f(s) \leq M$ para todo $s \geq 0$, temos

$$\lim_{\gamma\to\infty} \underline{\lambda}(\gamma) = \lim_{\gamma\to\infty} \frac{\lambda_1 \left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}}{f(\gamma\alpha)r} \geq \lambda_1 \frac{\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}}{M\cdot r} \lim_{\gamma\to\infty} \gamma^{p-1} = \infty \tag{2.36}$$

e

$$\lim_{\gamma\to\infty} \lambda^*(\gamma) = \lim_{\gamma\to\infty} \frac{m\left(\frac{p}{p-1}\gamma\right)^{p-1}}{f(\gamma)\beta} \geq \frac{m\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}}{\beta M} \lim_{\gamma\to\infty} \gamma^{p-1} = +\infty. \tag{2.37}$$

Logo de (2.36) e (2.37) temos $\lim\limits_{\gamma\to\infty} \underline{\lambda}(\gamma) = \infty = \lim\limits_{\gamma\to\infty} \lambda^*(\gamma)$, e como $\underline{\gamma}(0) = 0$, sendo $\underline{\lambda}$ e λ^* funções contínuas de γ temos que $S = (0, \infty)$. □

Vejamos agora, alguns exemplos como aplicação destes corolários.

Exemplo 1 *O problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda g(x)(u+1)^{q-1}, & em \quad \Omega \\ u &= 0, & sobre \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.38}$$

onde $1 < q < p$ *e a função* g *satisfaz as condições (2.4) e (2.5) respectivamente. Admite solução positiva para todo* $\lambda \geq \lambda_0$.

Demonstração. Seja $f(u) = (u+1)^{q-1}$, com $1 < q < p$. Note que a função f satisfaz as seguintes propriedades

(i) $f \in C^1$.

(ii) f é monótona não decrescente, pois se $u_1 \geq u_2 \geq 0$ temos

$$f(u_1) = (u_1+1)^{q-1} \geq (u_2+1)^{q-1} = f(u_2),$$

já que $q - 1 > 0$.

(iii) f é sublinear no infinito, pois,

$$\begin{aligned} \lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s^{p-1}} = \lim_{s\to\infty} \frac{(s+1)^{q-1}}{s^{p-1}} &= \lim_{s\to\infty} \frac{(s+1)^{q-1}}{s^{p-1}} \cdot \frac{s^{q-1}}{s^{q-1}} \\ &= \lim_{s\to\infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{q-1} \cdot s^{q-p} \\ &= 0. \end{aligned}$$

E ainda temos $f(0) = 1$. Observe também o seguinte

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma\to\infty} \frac{f(\gamma\alpha)}{f(\gamma)} &= \lim_{s\to\infty} \frac{(\gamma\alpha+1)^{q-1}}{s^{\gamma+1}} \\ &= \lim_{\gamma\to\infty} \alpha^{q-1} \cdot \left(\frac{\gamma + \frac{1}{\alpha}}{\gamma+1}\right)^{q-1} \\ &= \alpha^{q-1}. \end{aligned}$$

Assim se $\frac{\beta}{r}$ for suficientemente pequeno tal que $\alpha^{q-1} > \frac{\lambda_1}{m}\frac{\beta}{r}$, então a condição (F_1) é satisfeita para $\gamma > \gamma_0$, para algum $\gamma_0 > 0$. Logo as hipóteses do Corolário 2.6 são satisfeitas. Portanto existe λ_0 tal que o problema (2.38) admite solução fraca positiva para todo $\lambda \geq \lambda_0$. □

Exemplo 2 *O problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda g(x) e^{\frac{au}{a+u}}, & em \quad \Omega \\ u = 0, & sobre \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.39}$$

onde a é uma constante positiva, e a função g satisfaz as condições (2.4) e (2.5) respectivamente. Admite solução positiva para todo $\lambda > 0$.

Demonstração. Seja $f(u) = e^{\frac{a}{a+u}}$, e observemos que f satisfaz as seguintes propriedades

(i) $f \in C^1$.

(ii) f é monótona não decrescente.

(iii) f é limitada.

A última afirmação decorre do fato de que $f(0) = 1$ e $f(u) \leq e^a$ para todo $u \geq 0$. De fato,

$$f(u) = e^{\frac{au}{a+u}} \leq e^a,$$

pois

$$\frac{u}{a+u} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{au}{a+u} \leq a.$$

Então pela monotonicidade da função f segue o resultado.

Daí, as hipóteses do Corolário 2.7 são verificadas se $\frac{\beta}{r}$ é suficientemente pequeno de modo que $\frac{1}{e^a} \geq \frac{\lambda_1}{m} \cdot \frac{\beta}{r}$. Portanto o problema (2.39) admite uma solução fraca positiva para todo $\lambda > 0$. $\square$

Capítulo 3

Sistema do Tipo (p, q)-Laplaciano

3.1 Soluções Positivas Para uma Classe de Sistemas do Tipo (p, q)-Laplaciano

Iremos repetir o que foi feito no Capítulo 2, onde estudamos a existência de soluções positivas para uma classe de problemas escalares envolvendo o p-Laplaciano, com mudança de sinal na função peso. Neste capítulo iremos estender os resultados obtidos no Capítulo 2 para um sistema envolvendo operadores com p-Laplaciano e q-Laplaciano. Mais precisamente estudaremos a existência de soluções positivas para o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda a(x) f(v), \quad \text{em} \quad \Omega \\ -\Delta_q v &= \lambda b(x) g(u), \quad \text{em} \quad \Omega \\ u = v &= 0, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro, Ω é um domínio limitado regular em $\mathbb{R}^N$ N>1. As funções a e b, são de classe $C^1(\Omega)$ e podem assumir valores negativos próximo a fronteira de Ω. As funções $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ são funções de classe C^1 não decrescentes com $f(s), g(s) > 0$, para $s > 0$.

Para garantir a existência de subsolução fraca para o sistema (3.1) faremos uso do problema de autovalor do p-Laplaciano, onde no Capítulo 1 apresentamos resultados sobre existência e regularidade de soluções fracas do mesmo que é dado por

$$\begin{cases} -\Delta_r \phi = \lambda |\phi|^{r-2}\phi, & \text{em} \quad \Omega \\ \phi = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

para $r = p, q$.

Consideremos inicialmente as primeiras autofunções de (3.2), $\phi_{1,r} \in C^1(\overline{\Omega})$ para $r = p, q$ correspondentes ao primeiro autovalor $\lambda_{1,r}$ para $r = p, q$ de (3.2) tal que $\phi_{1,r} > 0$ em Ω e $\dfrac{\partial \phi_{1,r}}{\partial \eta} < 0$, para $r = p, q$ onde η é a derivada normal exterior a $\partial\Omega$. Em todo este capítulo $\lambda_{1,r}$ e $\phi_{1,r}$ sempre denotarão o primeiro autovalor e a primeira autofunção do problema (3.2) para $r = p, q$. Por simplicidade, vamos considerar $\|\phi_{1,r}\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$.

De uma maneira análoga como no Capítulo 2 página 35, existem constantes positivas $m_{1,p}$, $\delta_{1,p}$ e $\sigma_{1,p}$ que dependem de Ω e verificam

$$|\nabla \phi_{1,p}|^p - \lambda_{1,p}\phi_{1,p}^p \geq m_1 \quad \text{em} \quad \overline{\Omega}_{\delta_{1,p}} \tag{3.3}$$

e

$$\phi_{1,p} \geq \sigma_{1,p} \quad \text{em} \quad \Omega_1 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_{\delta_{1,p}}, \tag{3.4}$$

onde $\overline{\Omega}_{\delta_{1,p}} = \{x \in \Omega; \quad d(x, \partial\Omega) \leq \delta_{1,p}\}$.

E existem constantes positivas $m_{1,q}$, $\delta_{1,q}$ e $\sigma_{1,q}$ que dependem de Ω, tais que

$$|\nabla \phi_{1,q}|^q - \lambda_{1,q}\phi_{1,q}^q \geq m_{1,q} \quad \text{em} \quad \overline{\Omega}_{\delta_{1,q}} \tag{3.5}$$

e

$$\phi_{1,q} \geq \sigma_{1,q} \quad \text{em} \quad \Omega_2 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_{\delta_{1,q}}. \tag{3.6}$$

Onde $\overline{\Omega}_{\delta_{1,q}} = \{x \in \Omega; \quad d(x, \partial\Omega) \leq \delta_{1,q}\}$. Fazendo $\delta_m = \min\{\delta_{1,p}, \delta_{1,q}\}$, $\delta_M = \max\{\delta_{1,p}, \delta_{1,q}\}$, $m = \min\{m_{1,p}, m_{1,q}\}$ e $\sigma = \min\{\sigma_{1,p}, \sigma_{1,q}\}$ podemos concluir que dependendo de Ω temos

$$|\nabla \phi_1, r|^r - \lambda_{1,r}\phi_{1,r}^r \geq m \quad \text{em} \quad \overline{\Omega}_{\delta_m} \tag{3.7}$$

e

$$\phi_{1,r} \geq \sigma \quad \text{em} \quad \Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_{\delta_M}. \tag{3.8}$$

Para $r = p, q$, onde $\overline{\Omega}_{\delta_m} = \{x \in \Omega;\ \ d(x, \partial\Omega) \leq \delta_m\}$.

Por outro lado, na obtenção de uma supersolução fraca para o sistema (3.1), vamos considerar a única solução positiva $\zeta \in W_0^{1,r}(\Omega)$ do problema

$$\begin{cases} -\Delta_r \zeta_r &= 1, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \zeta_r &= 0, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.9}$$

para $r = p, q$. Que é garantida pelo Teorema 1.11. Pelo Lema de Hopf, temos que $\frac{\partial \zeta_r(x)}{\partial \eta} < 0$ em $\partial\Omega$.

Para o nosso resultado principal assumiremos as seguintes hipóteses à respeito das funções peso, existem constantes positivas a_0, a_1, b_0 e b_1 tais que,

$$a(x) \geq -a_0, \quad b(x) \geq -b_0 \quad \text{em} \quad \overline{\Omega}_{\delta_m} \tag{3.10}$$

e

$$a(x) \geq a_1, \quad b(x) \geq b_1 \quad \text{em} \quad \Omega_0. \tag{3.11}$$

3.2 O Método de Sub e Supersolução

Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(x, v), \quad \text{em} \quad \Omega, \\ -\Delta_q v &= g(x, u), \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u = v &= 0, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.12}$$

Onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e regular. As funções $f, g : \Omega \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções de carathéodory com $f(x, .)$, $g(x, .)$ não decrescentes, e $f(., v(.))$, $g(., u(.)) \in L^\infty(\Omega)$ para $u, v \in L^\infty(\Omega)$.

Definição 3.1 *O par de funções* $(\underline{u}, \underline{v})$ *é dito* **subsolução fraca** *de (3.12) se* $\underline{u}, \underline{v} \equiv 0$ *em* $\partial\Omega$, $\underline{u} \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\underline{v} \in W_0^{1,q}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *e verifica*

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \cdot \nabla \varphi dx \leq \int_\Omega f(x, \underline{v}) \cdot \varphi dx$$

e

$$\int_\Omega |\nabla \underline{v}|^{q-2}\nabla \underline{v}\cdot\nabla\psi dx \leq \int_\Omega g(x,\underline{u})\cdot\psi dx$$

Para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ *e* $\psi \in W_0^{1,q}(\Omega)$ *com* $\psi \geq 0$.
O par de funções $(\overline{u},\overline{v})$ *é dito* **supersolução fraca** *de (3.12) se* $\overline{u},\overline{v} \equiv 0$ *em* $\partial\Omega$, $\overline{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$, $\overline{v} \in W_0^{1,q}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ *e verifica*

$$\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla \overline{u}\cdot\nabla\varphi dx \geq \int_\Omega f(x,\overline{v})\cdot\varphi dx$$

e

$$\int_\Omega |\nabla \overline{v}|^{q-2}\nabla \overline{v}\cdot\nabla\psi dx \geq \int_\Omega g(x,\overline{u})\cdot\psi dx$$

Para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ *e* $\psi \in W_0^{1,q}(\Omega)$ *com* $\psi \geq 0$.

Definição 3.2 *O par de funções* (u,v) *é dito* **solução fraca** *de (3.12) se* $u,v \equiv 0$ *em* $\partial\Omega$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$, $v \in W_0^{1,q}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ *e verifica*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi dx = \int_\Omega f(x,v)\cdot\varphi dx$$

e

$$\int_\Omega |\nabla v|^{q-2}\nabla v\cdot\nabla\psi dx = \int_\Omega g(x,u)\cdot\psi dx.$$

Para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *e* $\psi \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

Lema 3.1 *Suponha a existência de sub e supersoluções* $(\underline{u},\underline{v})$ *e* $(\overline{u},\overline{v})$ *respectivamente de (3.12) tais que* $\underline{u} \leq \overline{u}$ *e* $\underline{v} \leq \overline{v}$. *Então (3.12) admite uma solução fraca* (u,v) *tal que* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ *e* $\underline{v} \leq v \leq \overline{v}$.

Demonstração. Seja $v_0 = \underline{v} \in C(\overline{\Omega})$. logo existe $M > 0$ tal que $|v(x)| \leq M$ para todo $x \in \Omega$. Segue que

$$f(x,v_0) = f(x,\underline{v}) \in L^\infty(\Omega)$$

e daí,

$$f(x,v_0) \in L^s(\Omega), \text{ para todo } s > 1.$$

Como é conhecido do Capítulo 1, mais especificamente do Teorema 1.11 que o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x, v_0), & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.13}$$

admite única solução fraca $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso podemos observar que

$$-\Delta_p u_1 = f(x, v_0) = f(x, \underline{v}) \geq -\Delta_p \underline{u} \text{ em } \Omega$$

e

$$\underline{u} = u_1 = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Pelo Princípio da Comparação Fraca temos

$$\underline{u} \leq u_1 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{3.14}$$

Por outro lado

$$-\Delta_p u_1 = f(x, \underline{v}) \leq f(x, \overline{v}) \leq -\Delta_p \overline{u} \text{ em } \Omega$$

e

$$u_1 = \overline{u} = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Novamente pelo Princípio da Comparação Fraca temos

$$u_1 \leq \overline{u} \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{3.15}$$

Então de (3.14) e (3.15) segue que

$$\underline{u} \leq u_1 \leq \overline{u}, \quad \text{em} \quad \overline{\Omega}. \tag{3.16}$$

Dai segue que $u_1 \in L^\infty(\Omega)$, pois está entre duas funções limitadas. Pelo Lema 2.1 temos que $u_1 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Agora considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_q v = g(x, u_1), & \text{em} \quad \Omega \\ v = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.17}$$

onde $g(x, u_1) \in L^s(\Omega)$, para todo $s > 1$. logo existe única solução $v_1 \in W_0^{1,q}(\Omega)$ de (3.17). Além disso, por (3.16) temos o seguinte

$$-\Delta_q v_1 = g(x, u_1) \geq g(x, \underline{u}) \geq -\Delta_q \underline{v} \text{ em } \Omega$$

e

$$v_1 = \underline{v} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Então pelo Princípio da Comparação Fraca temos que

$$\underline{v} \leq v_1, \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{3.18}$$

Por outro lado

$$-\Delta_q v_1 = g(x, u_1) \leq g(x, \overline{u}) \leq -\Delta_q \overline{v} \text{ em } \Omega$$

e

$$v_1 = \overline{v} = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Então pelo Princípio da Comparação Fraca temos

$$v_1 \leq \overline{v} \quad \text{em} \quad \Omega \tag{3.19}$$

De (3.18) e (3.19) temos

$$\underline{v} \leq v_1 \leq \overline{v}. \tag{3.20}$$

Segue que $v_1 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ sendo solução de (3.17), pelo Lema 2.1 temos $v_1 \in C^{1,\alpha}(\Omega)$. Outra vez consideremos o problema do tipo

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(x, v_1), & \text{em} & \Omega \\ u &= 0, & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.21}$$

que admite única solução $u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Notemos que

$$-\Delta_p u_2 = f(x, v_1) \geq f(x, v_0) = -\Delta_p u_1 \text{ em } \Omega$$

e

$$u_2 = u_1 = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Então pelo Princípio da Comparação Fraca temos

$$u_1 \leq u_2, \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{3.22}$$

Por outro lado temos que

$$-\Delta_p u_2 = f(x, v_1) \leq f(x, \overline{v}) \leq -\Delta_p \overline{u} \text{ em } \Omega.$$

Pelo Princípio da Comparação Fraca temos

$$u_2 \leq \overline{u}, \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{3.23}$$

De 3.22 e de 3.23 temos que

$$u_1 \leq u_2 \leq \overline{u}. \tag{3.24}$$

Daí $u_2 \in L^\infty(\Omega)$, sendo solução de 3.21 pelo Lema 2.1 segue que $u_2 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.
Seja o problema

$$\begin{cases} -\Delta_q v &= g(x, u_2), & \text{em} & \Omega \\ v &= 0, & \text{sobre} & \partial\Omega \end{cases} \tag{3.25}$$

temos que $g(x, u_2) \in L^s(\Omega)$ e $s > 1$. Logo existe única solução $v_2 \in W_0^{1,q}(\Omega)$.
Além disso por (3.24) temos

$$-\Delta_q v_2 = g(x, u_2) \geq g(x, u_1) = -\Delta_q v_1 \text{ em } \Omega$$

e

$$v_2 = v_1 = 0. \text{ em } \partial\Omega.$$

Pelo Princípio da Comparação Fraca temos

$$v_1 \leq v_2 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{3.26}$$

Por outro lado

$$-\Delta_q v_2 = g(x, u_2) \leq g(x, \overline{u}) \leq -\Delta_q \overline{v}, \text{ em } \Omega$$

e

$$v_2 = \overline{v} = 0 \text{ em } \partial\Omega$$

Novamente por Princípio de Comparação Fraca temos

$$v_2 \leq \overline{v}, \quad \text{em} \;\; \Omega. \tag{3.27}$$

Concluímos até o momento que

$$\begin{cases} \underline{u} & \leq & u_1 \leq u_2 \leq \overline{u} \\ \underline{v} & \leq & v_1 \leq v_2 \leq \overline{v}. \end{cases} \tag{3.28}$$

Continuando com este raciocínio, obtemos duas sequências de problemas

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n & = & f(x, v_{n-1}), & \text{em} & \Omega \\ u_n & = & 0, & \text{sobre} & \partial\Omega \end{cases} \tag{3.29}$$

Cujas soluções $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\Omega)$ e verificam o seguinte

$$\underline{u} \leq \cdots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \cdots \leq \overline{u} \tag{3.30}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta_q v_n & = & g(x, u_n), & \text{em} & \in \Omega \\ v_n & = & 0, & \text{sobre} & \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.31}$$

Cujas soluções $v_n \in W_0^{1,q}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\Omega)$ e verificam o seguinte

$$\underline{v} \leq \cdots \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \cdots \leq \overline{v}. \tag{3.32}$$

Como toda sequência monótona e limitada é convergente, segue que podemos definir as funções

$$\begin{aligned} u : \; \overline{\Omega} \; & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \; & \longmapsto u(x) = \lim_{n \to \infty} u_n(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} v: \ \overline{\Omega} \ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \ &\longmapsto v(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x) \end{aligned}$$

Passando o limite em (3.30) e (3.32) ficamos com:

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \quad \text{e} \quad \underline{v} \leq v \leq \overline{v}$$

De $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ e $f(x, v_{n-1}) \in L^\infty(\Omega)$ e uma função de Carathéodory temos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(x, v_{n-1})dx = \int_\Omega f(x, v)dx \tag{3.33}$$

de forma similar temos também que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g(x, u_n)dx = \int_\Omega g(x, u)dx. \tag{3.34}$$

Por outro lado temos

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \varphi dx = \int_\Omega f(x, v_{n-1}) \cdot \varphi dx,$$

e

$$-\|\underline{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \underline{u} \leq u_1 \leq \cdots \leq u_{n+1} \leq \cdots \leq \overline{u} \leq \|\overline{u}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Daí,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p = \int_\Omega f(x, v_{n-1}) \cdot u_n dx \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\|\underline{u}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\overline{u}\|_{L^\infty(\Omega)}\right) |\Omega|.$$

Portanto (u_n) é uma sequência limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Sem perda de generalidade temos

(i) $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$

(ii) $u_n \longrightarrow u$ em $L^p(\Omega)$, (imersão de Sobolev)

(iii) $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ q.t.p em Ω.

Se $p \geq 2$ e usando a Observação B.1 temos

$$\begin{aligned}
0 &\leq c_p \int_\Omega |\nabla u_n - u_m|^p dx \leq \int_\Omega \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m, \nabla u_n - \nabla u_m\rangle dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot (\nabla u_n - \nabla u_m)dx - \int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \cdot (\nabla u_n - \nabla u_m)dx \\
&= \int_\Omega f(x, v_{n-1}) \cdot (u_n - u_m)dx - \int_\Omega f(x, v_{m-1}) \cdot (u_n - u_m)dx. \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

Agora pela Desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega f(x, v_{n-1}) \cdot (u_n - u_m)dx \right| &\leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |u_n - u_m| dx \\
&\leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_n - u_m\|_{L^p(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{p'}}. \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

Então de (3.35) e (3.36), concluímos que (∇u_n) é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$.

Logo $\nabla u_n \longrightarrow \nabla u$ em $L^p(\Omega)$. Ou seja $u_n \longrightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Pela continuidade do operador $-\Delta_p$ provada no Teorema 1.1, segue que

$$-\Delta_p u_n \longrightarrow -\Delta_p u.$$

Se $1 < p < 2$ pela Observação B.1 temos

$$\begin{aligned}
0 \leq c_p \frac{\|u_n - u_m\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)}}{(2C)^{2-p}} &\leq c_p \frac{\|u_n - u_m\|^2}{(\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u_m\|_{W_0^{1,p}(\Omega)})^{2-p}} \\
&\leq \int_\Omega \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m, \nabla u_n - \nabla u_m\rangle dx,
\end{aligned}$$

pois de $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, tem-se que $\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C$. De uma forma inteiramente análoga ao caso em que $p \geq 2$ temos que

$$-\Delta_p u_n \longrightarrow -\Delta_p u.$$

Com os mesmos argumentos usados anteriormente pode-se mostrar que

$$-\Delta_q v_n \longrightarrow -\Delta_q v.$$

Portanto podemos concluir que o par (u, v) é solução fraca de (3.12). Como $u, v \in L^\infty(\Omega)$, pois $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ e $\underline{v} \leq v \leq \overline{v}$, segue que $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e $v \in W_0^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, sendo (u, v) solução fraca de (3.12) segue que $\Delta_p u \in L^\infty(\Omega)$ e $\Delta_q v \in L^\infty(\Omega)$, então pelo Lema 2.1 $u, v \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. $\square$

3.3 O Resultado Principal de Existência

Nesta seção, vamos estabelecer a existência de soluções para o sistema (3.1) via o método de sub e supersoluções.

Definição 3.3 *O par de funções não negativas $(\underline{u}, \underline{v})$ é dito* **subsolução fraca** *de (3.1) se $(\underline{u}, \underline{v}) \equiv 0$ em $\partial\Omega$, $\underline{u} \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\underline{v} \in W_0^{1,q}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e verifica*

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \cdot \nabla w dx \leq \lambda \int_\Omega a(x) f(\underline{v}) \cdot w dx,$$

e

$$\int_\Omega |\nabla \underline{v}|^{q-2} \nabla \underline{v} \cdot \nabla w dx \leq \lambda \int_\Omega b(x) g(\underline{u}) \cdot w dx.$$

Para todo $w \in W$ onde $W = \{w \in C_0^\infty(\Omega); w \geq 0 \quad em \quad \Omega\}$.

O par de funções não negativas $(\overline{u}, \overline{v})$ é dito **supersolução fraca** *de (3.1) se $(\overline{u}, \overline{v}) \equiv 0$ em $\partial\Omega$, $\overline{u} \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\overline{v} \in W_0^{1,q}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e verifica*

$$\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u} \cdot \nabla w dx \geq \lambda \int_\Omega a(x) f(\overline{v}) \cdot w dx,$$

e

$$\int_\Omega |\nabla \overline{v}|^{q-2} \nabla \overline{v} \cdot \nabla w dx \geq \lambda \int_\Omega b(x) g(\overline{u}) \cdot w dx.$$

Para todo $w \in W$ onde $W = \{w \in C_0^\infty(\Omega); w \geq 0 \quad em \quad \Omega\}$.

Definição 3.4 *O par de funções não negativas (u, v) é dita* **solução fraca** *do sistema (3.1) se satisfaz $(u, v) = (0, 0)$ em $\partial\Omega$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $v \in W_0^{1,q}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e verifica*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \lambda \int_\Omega a(x) f(v) \cdot \varphi dx,$$

$$\int_\Omega |\nabla v|^{q-2} \nabla v \cdot \nabla \psi dx = \lambda \int_\Omega b(x) g(u) \cdot \psi dx.$$

Para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, e $\psi \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

Para enunciar o resultado principal deste capítulo assumiremos as seguintes hipóteses.

(H_1) $f, g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ são funções de classe C^1 não decrescentes tais que $f(s), g(s) > 0$ para $s > 0$.

(H_2) Para Todo $M > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(Mg(x)^{\frac{1}{q-1}})}{x^{p-1}} = 0$$

.

(H_3) Suponha que existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$\frac{\lambda_{1,p}a_0}{m} f\big(\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\big) < min\left\{ b_1 g\left(\left(\frac{p-1}{p}\right)\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\sigma^{\frac{p}{p-1}}\right), a_1 f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\sigma^{\frac{q}{q-1}}\right)\right\}, \tag{3.37}$$

$$\frac{\lambda_{1,q}b_0}{m} g\big(\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\big) < min\left\{ b_1 g\left(\left(\frac{p-1}{p}\right)\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\sigma^{\frac{p}{p-1}}\right), a_1 f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\sigma^{\frac{q}{q-1}}\right)\right\}, \tag{3.38}$$

$$\max\left\{ \frac{\epsilon\lambda_{1,q}}{b_1 g\left(\left(\frac{p-1}{p}\right)\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\sigma^{\frac{p}{p-1}}\right)}, \frac{\epsilon\lambda_{1,p}}{a_1 f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\sigma^{\frac{q}{q-1}}\right)}\right\} \leq \frac{1}{\|b\|_{L^\infty(\Omega)}}. \tag{3.39}$$

Onde m, σ, a_0, a_1, b_0 e b_1 são dados respectivamente em (3.7), (3.8), (3.10) e (3.11).

Agora apresentaremos nosso resultado de existência de soluções.

Teorema 3.5 *Suponha que* (H_1)-(H_3) *são verificadas. Então existe uma solução positiva de 3.1 para* $\lambda \in [\lambda_*(\epsilon), \lambda^*(\epsilon)]$, *onde*

$$\lambda^*(\epsilon) = \min\left\{ \frac{\epsilon m}{a_0 f\left(\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\right)}, \frac{\epsilon m}{b_0 g\left(\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right)}, \frac{1}{\|b\|_{L^\infty(\Omega)}}\right\},$$

$$\lambda_*(\epsilon) = \max\left\{ \frac{\epsilon\lambda_{1,q}}{b_1 g\left(\left(\frac{p-1}{p}\right)\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\sigma^{\frac{p}{p-1}}\right)}, \frac{\epsilon\lambda_{1,p}}{a_1 f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\sigma^{\frac{p}{q-1}}\right)}\right\}.$$

Observação 3.1 *A hipótese* (H_3) *implica que* $\lambda_*(\epsilon) < \lambda^*(\epsilon)$.

Com efeito, se $\lambda^*(\epsilon) = \frac{1}{\|b\|_\infty}$ é imediato de (3.39). Suponha agora que

$$\lambda_*(\epsilon) = \frac{\epsilon\lambda_{1,q}}{b_1 g\left(\left(\dfrac{p-1}{p}\right)\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\sigma^{\frac{p}{p-1}}\right)} \quad \text{e} \quad \lambda^*(\epsilon) = \frac{\epsilon m}{b_0 g\left(\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right)}.$$

Dai, observe que de (3.38) temos

$$\frac{\lambda_{1,q} b_0}{m} g\big(\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\big) < b_1 g\left(\left(\frac{p-1}{p}\right)\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\sigma^{\frac{p}{p-1}}\right),$$

daí

$$\frac{\epsilon\lambda_{1,q}}{b_1 g\left(\left(\dfrac{p-1}{p}\right)\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\sigma^{\frac{p}{p-1}}\right)} < \frac{\epsilon\lambda_{1,q} m}{\lambda_{1,q} b_0 g\left(\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right)} = \frac{\epsilon m}{b_0 g\left(\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right)}. \tag{3.40}$$

Agora se,

$$\lambda_*(\epsilon) = \frac{\epsilon\lambda_{1,q}}{b_1 g\left(\left(\dfrac{p-1}{p}\right)\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\sigma^{\frac{p}{p-1}}\right)} \quad \text{e} \quad \lambda^*(\epsilon) = \frac{\epsilon m}{a_0 f\left(\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right)}.$$

Se $\lambda_{1,p} \geq \lambda_{1,q}$, de (3.37) temos

$$\frac{\lambda_{1,p} a_0}{m} f(\epsilon^{\frac{1}{q-1}}) < b_1 g\left(\frac{p-1}{p}\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\sigma^{\frac{p}{p-1}}\right),$$

o que implica,

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon m}{a_0 f(\epsilon^{\frac{1}{q-1}})} &> \frac{\lambda_{1,p}\epsilon}{b_1 g\left((\frac{p-1}{p})\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\sigma^{\frac{p}{p-1}}\right)} \\
&\geq \frac{\lambda_{1,p}\epsilon}{b_1 g\left((\frac{p-1}{p})\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\sigma^{\frac{p}{p-1}}\right)} \cdot \frac{\lambda_{1,q}}{\lambda_{1,p}} \\
&= \frac{\epsilon\lambda_{1,q}}{b_1 g\left((\frac{p-1}{p})\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\sigma^{\frac{p}{p-1}}\right)}.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Se $\lambda_{1,q} > \lambda_{1,p}$, suponha por contradição que

$$\frac{\lambda_{1,p} a_0}{m} f\left(\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\right) \geq b_1 g\left(\left(\frac{p-1}{p}\right)\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\sigma^{\frac{p}{p-1}}\right).$$

Como, $\frac{\lambda_{1,q}}{\lambda_{1,p}} < 1$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon m}{a_0 f\left(\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\right)} &\leq \frac{\epsilon \lambda_{1,p}}{b_1 g\left(\left(\frac{p-1}{p}\right)\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\sigma^{\frac{p}{p-1}}\right)} \\
&= \frac{\epsilon \lambda_{1,p}}{b_1 g\left(\left(\frac{p-1}{p}\right)\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\sigma^{\frac{p}{p-1}}\right)}\frac{\lambda_{1,q}}{\lambda_{1,p}} \\
&< \frac{\epsilon \lambda_{1,q}}{b_1 g\left(\left(\frac{p-1}{p}\right)\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\sigma^{\frac{p}{p-1}}\right)},
\end{aligned} \tag{3.42}$$

ou seja,

$$\frac{\epsilon m}{a_0 f\left(\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\right)} < \frac{\epsilon \lambda_{1,q}}{b_1 g\left(\left(\frac{p-1}{p}\right)\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\sigma^{\frac{p}{p-1}}\right)}.$$

Portanto

$$\frac{\epsilon \lambda_{1,q}}{b_1 g\left(\left(\dfrac{p-1}{p}\right)\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\sigma^{\frac{p}{p-1}}\right)} < \frac{\epsilon m}{a_0 f(\epsilon^{\frac{1}{p-1}})}. \tag{3.43}$$

Caso ocorra,

$$\lambda_*(\epsilon) = \frac{\epsilon \lambda_{1,p}}{a_1 f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\sigma^{\frac{q}{q-1}}\right)} \quad \text{e} \quad \lambda^*(\epsilon) = \frac{\epsilon m}{a_0 f\left(\frac{1}{q-1}\right)}.$$

De (3.37) temos

$$\frac{\lambda_{1,p} a_0}{m} f(\epsilon^{\frac{1}{q-1}}) < a_1 f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\sigma^{\frac{q}{q-1}}\right),$$

logo,

$$\frac{\epsilon \lambda_{1,p}}{a_1 f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\sigma^{\frac{q}{q-1}}\right)} < \frac{\epsilon m}{a_0 f\left(\frac{1}{q-1}\right)}. \tag{3.44}$$

Por fim suponha que,

$$\lambda_*(\epsilon) = \frac{\epsilon \lambda_{1,p}}{a_1 f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\sigma^{\frac{q}{q-1}}\right)} \quad \text{e} \quad \lambda^*(\epsilon) = \frac{\epsilon m}{b_0 g\left(\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right)}.$$

Se $\lambda_{1,q} \geq \lambda_{1,p}$ de (3.38) temos

$$\frac{\lambda_{1,q}}{m} b_0 g\left(\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right) < a_1 f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\sigma^{\frac{q}{q-1}}\right).$$

O que implica,

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon m}{b_0 g\left(\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right)} &> \frac{\epsilon\lambda_{1,q}}{a_1 f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\sigma^{\frac{q}{q-1}}\right)} \\
&> \frac{\epsilon\lambda_{1,q}}{a_1 f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\sigma^{\frac{q}{q-1}}\right)}.\frac{\lambda_{1,p}}{\lambda_{1,q}} \\
&= \frac{\epsilon\lambda_{1,p}}{a_1 f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\sigma^{\frac{q}{q-1}}\right)} \qquad (3.45)
\end{aligned}$$

Se ocorrer $\lambda_{1,q} < \lambda_{1,p}$, suponha por contradição que

$$\frac{\lambda_{1,q} b_0}{m} f\left(\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right) \geq a_1 f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\sigma^{\frac{q}{q-1}}\right).$$

Daí temos o seguinte

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon m}{b_0 g\left(\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right)} &\leq \frac{\epsilon\lambda_{1,q}}{a_1 f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\sigma^{\frac{q}{q-1}}\right)} \\
&= \frac{\epsilon\lambda_{1,q}}{a_1 f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\sigma^{\frac{q}{q-1}}\right)}\frac{\epsilon\lambda_{1,p}}{\lambda_{1,p}} \\
&< \frac{\epsilon\lambda_{1,p}}{a_1 f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\sigma^{\frac{q}{q-1}}\right)}. \qquad (3.46)
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{\epsilon m}{b_0 g\left(\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right)} < \frac{\epsilon\lambda_{1,p}}{a_1 f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\sigma^{\frac{q}{q-1}}\right)}.$$

Portanto

$$\frac{\epsilon\lambda_{1,p}}{a_1 f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\sigma^{\frac{q}{q-1}}\right)} < \frac{\epsilon m}{b_0 g\left(\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right)}.$$

Portanto $\lambda_*(\epsilon) < \lambda^*(\epsilon)$.

Demonstração. Do Teorema 3.5

Provemos que o par de funções

$$(\underline{u}, \underline{v}) = \left(\left(\frac{p-1}{p}\right) \epsilon^{\frac{1}{p-1}} \phi_{1,p}^{\frac{p}{p-1}}, \left(\frac{q-1}{q}\right) \epsilon^{\frac{1}{q-1}} \phi_{1,q}^{\frac{q}{q-1}} \right),$$

é uma subsolução de (3.1).

Inicialmente temos que

$$\begin{aligned} \nabla \underline{u} &= \nabla \left(\left(\frac{p-1}{p}\right) \epsilon^{\frac{1}{p-1}} \cdot \phi_{1,p}^{\frac{p}{p-1}} \right) \\ &= \frac{p-1}{p} \epsilon^{\frac{1}{p-1}} \cdot \frac{p}{p-1} \cdot \phi_{1,p}^{\frac{1}{p-1}} \cdot \nabla \phi_{1,p} \\ &= \epsilon^{\frac{1}{p-1}} \cdot \phi_{1,p}^{\frac{1}{p-1}} \cdot \nabla \phi_{1,p}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

e que

$$\begin{aligned} |\nabla \underline{u}|^{p-2} &= \left| \epsilon^{\frac{1}{p-1}} \cdot \phi_{1,p}^{\frac{1}{p-1}} \nabla \phi_{1,p} \right|^{p-2} \\ &= |\nabla \phi_{1,p}|^{p-2} \cdot \left(\epsilon^{\frac{1}{p-1}} \cdot \phi_{1,p}^{\frac{1}{p-1}} \right)^{p-2} \\ &= |\nabla \phi_{1,p}|^{p-2} \cdot \epsilon^{\frac{p-2}{p-1}} \cdot \phi_{1,p}^{\frac{p-2}{p-1}}. \end{aligned} \tag{3.48}$$

De (3.47) e (3.48) podemos concluir que

$$|\nabla \underline{u}|^{p-2} \cdot \nabla \underline{u} = \epsilon \cdot |\nabla \phi_{1,p}|^{p-2} \cdot \nabla \phi_{1,p} \cdot \phi_{1,p}. \tag{3.49}$$

Seja $w \in W$, a partir de 3.49 e usando a regra do produto para o gradiente temos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}|\nabla \underline{u}| \cdot \nabla w dx &= \epsilon \int_\Omega |\nabla \phi_{1,p}|^{p-2} \nabla \phi_{1,p} \cdot \phi_{1,p} \nabla w dx \\
&= \epsilon \int_\Omega |\nabla \phi_{1,p}|^{p-2} \nabla \phi_{1,p} \cdot \left[\nabla(\phi_{1,p}.w) - w \cdot \nabla \phi_{1,p}\right] dx \\
&= \epsilon \left[\int_\Omega |\nabla \phi_{1,p}|^{p-2} \nabla \phi_{1,p} \nabla(\phi_{1,p} \cdot w) dx - \int_\Omega |\nabla \phi_{1,p}|^{p-2} \nabla \phi_{1,p} \nabla \phi_{1,p} \cdot w dx\right] \\
&= \epsilon \left[\int_\Omega |\nabla \phi_{1,p}|^{p-2} \nabla \phi_{1,p} \nabla(\phi_{1,p} \cdot w) dx - \int_\Omega |\nabla \phi_{1,p}|^{p} \cdot w dx\right] \\
&= \epsilon \int_\Omega \left[\lambda_{1,p} \phi_{1,p}^p - |\nabla \phi_{1,p}|^p\right] \cdot w dx. \qquad (3.50)
\end{aligned}
$$

De forma inteiramente análoga se prova que

$$
\int_\Omega |\nabla \underline{v}|^{q-2}|\nabla \underline{v}| \cdot \nabla w dx = \epsilon \int_\Omega \left[\lambda_{1,q} \phi_{1,q}^q - |\nabla \phi_{1,q}|^q\right] \cdot w dx. \qquad (3.51)
$$

Primeiro analisaremos o caso em que $x \in \overline{\Omega}_{\delta_m}$. Temos por (3.7) que $|\nabla \phi_r|^r - \lambda_1 \phi_r^r \geq m$ em $\overline{\Omega}_{\delta_m}$ para $r = p, q$ e temos por hipótese que $\lambda \leq \lambda^*(\epsilon)$, então

$$
\lambda \leq \frac{m\epsilon}{a_0 f\left(\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\right)}. \qquad (3.52)
$$

Agora usando a monotonicidade da função f e (3.52), como $\|\phi_{1,q}\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$ temos

$$
\begin{aligned}
\epsilon(\lambda_{1,p} \phi_{1,p}^p - |\nabla \phi_{1,p}|^p) &\leq -m\epsilon \\
&\leq -\lambda.a_0 f\left(\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\right) \\
&\leq -\lambda.a_0 f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}.\phi_{1,q}^{\frac{q}{q-1}}\right) \\
&\leq \lambda a(x) f(\underline{v}).
\end{aligned} \qquad (3.53)
$$

Ou seja,

$$
\epsilon[\lambda_{1,p} \phi_{1,p}^p - |\nabla \phi_{1,p}|^p] \leq \lambda a(x) f(\underline{v}). \qquad (3.54)
$$

Analogamente temos

$$\epsilon[\lambda_{1,q}\phi_{1,q}^q - |\nabla \phi_{1,q}|^q] \leq \lambda b(x)g(\underline{u}). \tag{3.55}$$

Para todo $x \in \overline{\Omega}_{\delta_m}$.

Vamos considerar o caso agora em que $x \in \Omega_0$. Temos $\phi_{1,r} \geq \sigma$, para $r = p, q$, e também $a(x) \geq a_1$, $b(x) \geq b_1$ e $\lambda(\epsilon) \geq \lambda_*(\epsilon)$. Logo

$$\lambda \geq \frac{\epsilon\lambda_{1,p}}{a_1 f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\sigma^{\frac{q}{q-1}}\right)}. \tag{3.56}$$

Como $\|\phi_{1,p}\|_\infty = 1$, $a(x) \geq a_1$ e de (3.56) temos para todo $x \in \Omega_0$ que

$$\begin{aligned}
\epsilon(\lambda_{1,p}\phi_{1,p}^p - |\nabla \phi_{1,p}|^p) &\leq \epsilon\lambda_{1,p} \\
&\leq \lambda.a_1 f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}.\phi_{1,q}^{\frac{q}{q-1}}\right) \\
&\leq \lambda a(x)f(\underline{v}).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\epsilon(\lambda_{1,p}\phi_{1,p}^p - |\nabla \phi_{1,p}|^p) \leq \lambda a(x)f(\underline{v}). \tag{3.57}$$

De uma forma inteiramente análoga obtemos

$$\epsilon(\lambda_{1,q}\phi_{1,q}^q - |\nabla \phi_{1,q}|^q) \leq \lambda b(x)g(\underline{u}), \tag{3.58}$$

para todo $x \in \Omega_0$.

Observe que de (3.54) e de (3.57) temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}|\nabla \underline{u}|.\nabla w dx &= \epsilon\int_\Omega \left[\lambda_{1,p}\phi_{1,p}^p - |\nabla \phi_{1,p}|^p\right].w dx \\
&\leq \int_\Omega \lambda a(x).f(\underline{v}).w dx, \qquad (3.59)
\end{aligned}$$

e de (3.55) e (3.58) temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla \underline{v}|^{q-2}|\nabla \underline{v}|.\nabla w dx &= \epsilon \int_\Omega \left[\lambda_{1,q}\phi_{1,q}^q - |\nabla \phi_{1,q}|^q\right].w dx \\ &\leq \int_\Omega b(x).g(\underline{u}).w dx. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Portanto de (3.59) e de (3.60) par $(\underline{u}, \underline{v})$ é subsolução fraca do sistema (3.1).

Provaremos agora a existência de uma constante c suficientemente grande tal que,

$$(\overline{u}, \overline{v}) = \left(\frac{c}{\|\zeta_p\|_{L^\infty(\Omega)}}\zeta_p, g(c)^{\frac{1}{q-1}}\zeta_q\right),$$

é uma supersolução fraca do sistema (3.1), onde ζ_r é a única solução fraca positiva de (3.9), para $r = p, q$.

Inicialmente temos o seguinte

$$\nabla \overline{u} = \nabla\left(\frac{c \cdot \zeta_p}{\|\zeta_p\|_{L^\infty(\Omega)}}\right) = \frac{c}{\|\zeta_p\|_{L^\infty(\Omega)}} \cdot \nabla \zeta_p, \tag{3.61}$$

e

$$|\nabla \overline{u}|^{p-2} = \left(\frac{c}{\|\zeta_p\|_{L^\infty(\Omega)}}\right)^{p-2} \cdot |\nabla \zeta_p|^{p-2}, \tag{3.62}$$

de (3.61) e de (3.62) temos

$$\begin{aligned}|\nabla \overline{u}|^{p-2}.\nabla \overline{u} &= \left(\frac{c}{\|\zeta_p\|_{L^\infty(\Omega)}}\right)^{p-2} \cdot |\nabla \zeta_p|^{p-2}.\frac{c}{\|\zeta_p\|_{L^\infty(\Omega)}} \cdot \nabla \zeta_p \\ &= \left(\frac{c}{\|\zeta_p\|_{L^\infty(\Omega)}}\right)^{p-1} \cdot |\nabla \zeta_p|^{p-2} \cdot \nabla \zeta_p, \end{aligned} \tag{3.63}$$

então de (3.63) para todo $w \in W$ temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla \overline{u} \cdot \nabla w dx &= \left(\frac{c}{\|\zeta_p\|_{L^\infty(\Omega)}}\right)^{p-1} \cdot \int_\Omega |\nabla \zeta_p|^{p-2}\nabla \zeta_p \cdot \nabla w dx \\ &= \left(\frac{c}{\|\zeta_p\|_{L^\infty(\Omega)}}\right)^{p-1} \cdot \int_\Omega 1 \cdot w dx. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Pela hipótese (H_2) escolha c suficientemente grande tal que

$$c^{p-1}\left(\lambda\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\|\zeta_p\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)}\right)^{-1} \geq f\left(\|\zeta_q\|_{L^\infty(\Omega)} g(c)^{\frac{1}{q-1}}\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\left(\frac{c}{\|\zeta_p\|_{L^\infty(\Omega)}}\right)^{p-1} &\geq \lambda\|a\|_{L^\infty(\Omega)} f\left(\|\zeta_q\|_{L^\infty(\Omega)} g(c)^{\frac{1}{q-1}}\right) \\ &\geq \lambda a(x) f\left(\zeta(x) g(c)^{\frac{1}{q-1}}\right) \\ &= \lambda a(x) f(\overline{v}). \end{aligned} \tag{3.65}$$

Portanto substituindo (3.65) em (3.64) ficamos com o seguinte

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla \overline{u}\cdot\nabla w dx &= \left(\frac{c}{\|\zeta_p\|_{L^\infty(\Omega)}}\right)^{p-1}\cdot\int_\Omega 1\cdot w dx \\ &\geq \int_\Omega \lambda a(x) f(\overline{v})\cdot w dx. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Por outro lado, desde que $\lambda \leq \lambda^*$ e $\lambda \leq \frac{1}{\|b\|_{L^\infty(\Omega)}}$ segue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla \overline{v}|^{q-2}\nabla \overline{v}\cdot\nabla w dx &= \int_\Omega |\nabla g(c)^{\frac{1}{q-1}}\zeta_q|^{q-2}\nabla(g(c)^{\frac{1}{q-1}}\zeta_q)\cdot\nabla w dx \\ &= \int_\Omega g(c)^{\frac{q-2}{q-1}}|\nabla\zeta_q|^{q-2} g(c)^{\frac{1}{q-1}}\nabla\zeta_q\cdot\nabla w dx \\ &= g(c)\int_\Omega |\nabla\zeta_q|^{q-2}\nabla\zeta_q\cdot\nabla w dx \\ &= \int_\Omega g(c)\cdot w dx \\ &\geq \int_\Omega g\left(c\frac{\zeta_p}{\|\zeta_p\|_{L^\infty(\Omega)}}\right)\cdot w dx \\ &\geq \lambda\|b\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega g\left(\frac{c}{\|\zeta_p\|_{L^\infty(\Omega)}}\zeta_p\right)\cdot w dx \\ &\geq \lambda\int_\Omega b(x) g(\overline{u})\cdot w dx, \end{aligned} \tag{3.67}$$

pois $\|b\|_{L^\infty(\Omega)} \geq b(x)$.

Portanto de (3.66) e de (3.67) segue que o par $(\overline{u}, \overline{v})$ é supersolução fraca do problema (3.1). Vejamos que se considerarmos c suficientemente grande teremos $\underline{u} \leq \overline{u}$ e $\underline{v} \leq \overline{v}$.

De fato de (3.50) e (3.64) podemos escolher c suficientemente grande de forma que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla \overline{u}\cdot \nabla w dx &= \left(\frac{c}{\|\zeta_p\|_{L^\infty(\Omega)}}\right)^{p-1}\cdot \int_\Omega 1\cdot w dx\\ &\geq \epsilon \int_\Omega \left[\lambda_{1,p}\phi_{1,p}^p - |\nabla \phi_{1,p}|^p\right]\cdot w dx\\ &= \int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}\cdot \nabla w dx.\end{aligned}$$

Ou ainda, $-\Delta_p \overline{u} \geq -\Delta_p \underline{u}$ em Ω sendo $\overline{u} = \underline{u} = 0$ em $\partial\Omega$ pelo Princípio da Comparação Fraca temos $\overline{u} \geq \underline{u}$.

Por outro lado pela monotonicidade da função g, usando (3.51) e (3.67) temos para c suficientemente grande que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla \overline{v}|^{q-2}\nabla \overline{v}\cdot \nabla w dx &= \int_\Omega g(c)\cdot w dx\\ &\geq \epsilon \int_\Omega \left[\lambda_{1,q}\phi_{1,q}^q - |\nabla \phi_{1,q}|^q\right]\cdot w dx\\ &= \int_\Omega |\nabla \underline{v}|^{q-2}\nabla \underline{v}\cdot \nabla w dx.\end{aligned}$$

Ou ainda, $-\Delta_q \overline{v} \geq -\Delta_q \underline{v}$ em Ω sendo $\overline{v} = \underline{v} = 0$ em $\partial\Omega$ pelo Princípio da Comparação Fraca, temos $\overline{v} \geq \underline{v}$.

Portanto pelo Lema 3.1 existe uma solução fraca positiva do Sistema 3.1 que denotaremos por (u, v) e satisfaz, $(\underline{u}, \underline{v}) \leq (u, v) \leq (\overline{u}, \overline{v})$. □

Exibiremos agora um exemplo como aplicação do teorema acima.

Exemplo 3 *O Sistema*

$$\left\{\begin{array}{rclcc} -\Delta_p u &=& \lambda a(x) e^{\frac{\alpha . v}{\alpha + v}}, & em & \Omega,\\ -\Delta_q v &=& \lambda b(x) e^u, & em & \Omega,\\ u = v &=& 0, & sobre & \partial\Omega.\end{array}\right. \tag{3.68}$$

Onde $\alpha > 0$ é uma constante, admite uma solução fraca positiva.

Demonstração. Com efeito, fazendo $f(v) = e^{\frac{\alpha . v}{\alpha + v}}$ e $g(u) = e^u$. Temos que f, g satisfazem (H_1), (H_2) e (H_3)

(H_1) : é satisfeita trivialmente.

(H_2) : temos o seguinte

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(Mg(x)^{\frac{1}{q-1}})}{x^{p-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{\alpha M e^{\frac{x}{q-1}}}{\alpha+Me^{\frac{x}{q-1}}}}}{x^{p-1}}.$$

Note que

$$\alpha+Me^{\frac{\alpha}{q-1}}\geq Me^{\frac{\alpha}{q-1}}.$$

Daí,

$$\frac{1}{\alpha+Me^{\frac{\alpha}{q-1}}}\leq\frac{1}{Me^{\frac{\alpha}{q-1}}}.$$

Como a função exponencial é uma função monótona não decrescente, temos o seguinte

$$e^{\frac{\alpha Me^{\frac{x}{q-1}}}{\alpha+Me^{\frac{\alpha}{q-1}}}}\leq e^{\frac{\alpha Me^{\frac{x}{q-1}}}{Me^{\frac{\alpha}{q-1}}}}=e^{\alpha}.$$

Aplicando o teorema do confronto

$$0\leq\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{\alpha Me^{\frac{x}{q-1}}}{\alpha+Me^{\frac{\alpha}{q-1}}}}}{x^{p-1}}\leq\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\alpha}}{x^{p-1}}=0.$$

Portanto (H_2) é satisfeita.

(H_3) : Inicialmente observemos que

$$\lim_{\epsilon\to0}f\big(\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\big)=\lim_{\epsilon\to0}g\left(\left(\frac{p-1}{p}\right)\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\sigma^{\frac{p}{p-1}}\right)=\lim_{\epsilon\to0}f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\sigma^{\frac{q}{q-1}}\right)=1,\quad(3.69)$$

e

$$\lim_{\epsilon\to0}g\big(\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\big)=\lim_{\epsilon\to0}g\left(\left(\frac{p-1}{p}\right)\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\sigma^{\frac{p}{p-1}}\right)=\lim_{\epsilon\to0}f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\sigma^{\frac{q}{q-1}}\right)=1.\quad(3.70)$$

Para $f=e^{\frac{\alpha u}{\alpha+u}}$ e $g=e^{u}$.

Logo se $\dfrac{a_0}{m}$ e $\dfrac{b_0}{m}$ forem suficientemente pequenos de modo que $\dfrac{\lambda_{1,p}a_0}{m}<\min\{b_1,a_1\}$ e $\dfrac{\lambda_{1,q}b_0}{m}<\min\{b_1,a_1\}$, por (3.69) e (3.70) podemos escolher ϵ suficientemente pequeno de modo que

$$\frac{\lambda_{1,p}a_0}{m}f\big(\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\big) < min\left\{b_1 g\left(\left(\frac{p-1}{p}\right)\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\sigma^{\frac{p}{p-1}}\right), a_1 f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\sigma^{\frac{q}{q-1}}\right)\right\},$$

e

$$\frac{\lambda_{1,q}b_0}{m}g\big(\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\big) < min\left\{b_1 g\left(\left(\frac{p-1}{p}\right)\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\sigma^{\frac{p}{p-1}}\right), a_1 f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\sigma^{\frac{q}{q-1}}\right)\right\}.$$

Por outro lado,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon\lambda_{1,q}}{b_1 g\left(\left(\frac{p-1}{p}\right)\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\sigma^{\frac{p}{p-1}}\right)} = 0 = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon\lambda_{1,p}}{a_1 f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\sigma^{\frac{q}{q-1}}\right)}. \tag{3.71}$$

para $f = e^{\frac{\alpha u}{\alpha+u}}$ e $g = e^v$.

Logo por (3.71) podemos escolher ϵ suficientemente pequeno de modo que

$$max\left\{\frac{\epsilon\lambda_{1,q}}{b_1 g\left(\left(\frac{p-1}{p}\right)\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\sigma^{\frac{p}{p-1}}\right)}, \frac{\epsilon\lambda_{1,p}}{a_1 f\left(\left(\frac{q-1}{q}\right)\epsilon^{\frac{1}{q-1}}\sigma^{\frac{q}{q-1}}\right)}\right\} \le \frac{1}{\|b\|_{L^\infty(\Omega)}},$$

para $f = e^{\frac{\alpha u}{\alpha+u}}$ e $g = e^u$.

Portanto pelo Teorema 3.5 o Sistema 3.68 admite solução fraca positiva.

$\square$

Apêndice A

Alguns Resultados Sobre Medida e Integração, Espaços de Sobolev e Análise Funcional

Apresentaremos agora alguns resultados e definições de medida e integração que foram utilizados no decorrer do texto.

A.1 Medida e Integração

Definição A.1 *O limite superior de uma sequência de conjuntos mensuráveis* $A_n \subset X$ *é definido como sendo*

$$\limsup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left[\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n \right].$$

Definição A.2 *Se* $1 \leq p < \infty$ *o espaço* $L^p = L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ *consiste de todas as classes* $\mu-$*equivalentes de funções reais* $\mathcal{A}$*-mensuráveis* f *tal que* $|f|^p$ *é integrável com respeito a* μ *sobre* X*. A norma em* L^p *é dada por*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \tag{A.1}$$

Lema A.1 (Lema de Fatou) *Se* (f_n) *pertence a* $M^+(X, \mathcal{A})$*, onde* $M^+(X, \mathcal{A})$ *é o conjunto de todas as funções não negativas* $\mathcal{A}$*-mensuráveis, definidas de* X *em* $\mathbb{R}$*. Então*

$$\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu. \tag{A.2}$$

Demonstração: Ver [3].

Teorema A.3 (Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja* (f_n) *uma sequência de funções integráveis que converge q.t.p para uma função real mensurável* f. *Se existe uma função integrável* g *tal que* $|f_n| \leq g$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então* f *é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \tag{A.3}$$

Demonstração: Ver [3].

Teorema A.4 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}^N$, *tem-se* $|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|$. *Vale a igualdade se, e somente se, um dos vetores* x, y *é múltiplo escalar do outro.*

Demonstração: Ver [17].

Teorema A.5 (Desigualdade de Hölder) *Seja* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$ *onde* $p > 1$ *e*
$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e* $\|fg\|_{L^1(\Omega))} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}$.

Demonstração: Ver [3].

Lema A.2 *Seja* (f_n) *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e seja* $f \in L^p(\Omega)$ *tal que* $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. *Então existe uma subsequência* (f_{nk}) *de* (f_n) *e uma função* $h \in L^p(\Omega)$ *tal que*

(a) $f_{nk}(x) \to f(x)$ *q.t.p em* Ω

(b) $|f_{nk}(x)| \leq h(x)$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *q.t.p em* Ω

Demonstração: Ver [3].

A.2 Os espaços $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ e $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$

Apresentaremos aqui alguns resultados e definições à respeito do espaço de Sobolev $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$. Que é definido como sendo

$$\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^p(\Omega), j = 1, ..., N \right\},$$

Para cada $u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ denota a j-ésima derivada fraca de u ou seja

$$\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\varphi dx$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dada $u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$, definimos

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

Então podemos escrever o espaço $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ como sendo

$$\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega); |\nabla u| \in L^p(\Omega)\right\}.$$

Neste espaço faremos uso da seguinte norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Enunciaremos agora um resultado que fornece as principais propriedades do espaço em questão.

Teorema A.6 *O espaço* $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$, *é um espaço de Banach, reflexivo e separável se* $1 < p < \infty$.

Demonstração: Ver [11].

Definição A.7 *O espaço* $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ *é definido como sendo o fecho de* $C_0^\infty(\Omega)$ *com respeito à norma de* $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$.

Da definição de $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ e das propriedades de $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ temos o seguinte

Teorema A.8 *O espaço* $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$, *é um espaço de Banach, reflexivo e separável se* $1 < p < \infty$.

Demonstração: Ver [11].

Observação A.1 *O dual do espaço* $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ *é denotado por* $\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$.

Teorema A.9 (Desigualdade de Poincaré) *Suponha que* Ω *seja um domínio limitado em uma direção. Então existe uma constante* C *tal que para todo* $u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ *vale :*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [15].

Observação A.2 *Da Desigualdade de Poincaré, segue imediatamente que*

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq (C+1)\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

para todo $u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$*. Portanto as normas* $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ *e* $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ *são equivalentes em* $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$*.*

Teorema A.10 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado com fronteira suave, se* $1 \leq p \leq \infty$ *as seguintes imersões são contínuas*

(i) $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$*, onde* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$*, se* $p < N$

(ii) $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)\ \forall q \quad \in [p, +\infty)$*, se* $p = N$

(iii) $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$*, se* $p > N$*.*

Demonstração: Ver [4].

Teorema A.11 (Rellich-Kondrachov) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado com fronteira suave, se* $1 \leq p \leq \infty$ *as seguintes imersões são compactas*

(i) $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$*,* $\forall q \in [1, p^*)$*, onde* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$*, se* $p < N$

(ii) $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)\ \forall q \quad \in [p, +\infty)$*, se* $p = N$

(iii) $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$*, se* $p > N$*.*

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ *compactamente para todo* p *e* N*.*

Demonstração: Ver [4].

A.3 Multiplicadores de Lagrange

Definição A.12 *Sejam* X *um espaço de Banach,* $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ *e um conjunto de vínculos*

$$S := \{u \in X : F(u) = 0\}.$$

Suponhamos que para todo $u \in S$ *temos que* $F'(u) \neq 0$*. Seja* $J \in C^1(X, \mathbb{R})$*. Dizemos que* $c \in \mathbb{R}$ *é um valor crítico de* J *sobre* S *se existem* $u \in S$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tais que* $J(u) = c$ *e* $J'(u) = \lambda F'(u)$*. O ponto* u *é um ponto crítico de* J *sobre* S *e o numero real* λ *é chamado Multiplicador de Lagrange para o valor crítico* c*.*

Teorema A.13 (Multiplicadores de Lagrange) *Sob as hipóteses e notações da definição acima, suponhamos que $u_0 \in S$ é tal que*

$$J(u_0) = \inf_{u \in S} J(u).$$

Então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

Demonstração: Ver [15].

Teorema A.14 (Desigualdade de Clarkson) *Seja $2 \leq p < \infty$. Podemos afirmar que*

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \frac{1}{2}\big(\|f\|_{L^p(\Omega)}^p + \|g\|_{L^p(\Omega)}^p \big) \quad \forall \quad f, g \in L^p(\Omega).$$

Demonstração: Ver [4].

Teorema A.15 *Sejam X um espaço de Banach e (x_n) uma sequência em X. Então $x_n \rightharpoonup x$ em X se, e somente se, $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$ para todo $f \in X'$.*

Demonstração: Ver [4].

Teorema A.16 *Sejam X um espaço de Banach e (x_n) uma sequência em X. Se $x_n \rightharpoonup x$ em X, então $\|x_n\|$ é limitada e*

$$\|x\| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|x_n\|.$$

Demonstração: Ver [4].

Teorema A.17 *Sejam X um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma sequência limitada em X, então existe uma subsequência (x_{nk}) que converge na topologia fraca de X.*

Demonstração: Ver [4].

Apêndice B

Algumas Desigualdades Importantes e a Derivada do Funcional Energia

B.1 Desigualdades importantes

Neste apêndice, demonstraremos algumas desigualdades que foram utilizadas nos capítulos anteriores. Começaremos com o seguinte resultado que pode ser visto de forma bem sucinta em [23].

Lema B.1 *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$ e $<,>$ o produto escalar em $\mathbb{R}^N$. Então*

$$\left\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y \right\rangle \geq \begin{cases} c_{1p}|x-y|^p, & se \quad p \geq 2. \\ c_{2p}\dfrac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}, & se \quad 1 < p < 2. \end{cases}$$

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$. Suponha ainda que $|x| = 1$ e $|y| \leq 1$. Pois caso contrário se ocorrer $|x| > |y|$, é suficiente considerar $\tilde{x} = \frac{x}{|x|}$ e $\tilde{y} = \frac{y}{|x|}$.

Suponha agora que $x = (1, 0, \cdots, 0)$ e $y = (y_1, y_2, 0, \cdots, 0)$ para uma base conveniente de $\mathbb{R}^N$. Pois dados $x, y \in R^N$ não colineares, então x, y determinam um plano $P \subset \mathbb{R}^N$, digamos que este plano tenha base $\beta = \{x, y\}$. Por outro lado o conjunto $\beta' = \{x = (1,0), y = (y_1, y_2,)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$. Então por resultados de algebra linear podemos mudar as coordenadas dos vetores x, y da base β, para a base β'.

Daí, temos para $1 < p < 2$,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\left\langle |x|^{p-2}x-|y|^{p-2}y,x-y|\right\rangle}{\dfrac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}} = \\
=\ & \frac{\left\langle 1.(1,0,\cdots,0)-|y|^{p-2}(y_1,y_2,0,\cdots,0),(1,0,\cdots,0)-(y_1,y_2,0,\cdots,0)\right\rangle}{\dfrac{|(1,0,\cdots,0)-(y_1,y_2,0,\cdots,0)|^2}{(|(1,0,\cdots,0)|-|(y_1,y_2,0,\cdots,0)|)^{2-p}}} \\
=\ & \frac{1-y_1-(\sqrt{y_1^2+y_2^2})^{p-2}\cdot y_1+(\sqrt{y_1^2+y_2^2})^p}{\dfrac{\sqrt{(1-y_1)^2+y_2^2}}{\left(1+\sqrt{y_1^2+y_2^2}\right)^{2-p}}} \\
=\ & \left[1-y_1-(y_1^2+y_2^2)^{\frac{p-2}{2}}\cdot y_1+(y_1^2+y_2^2)^p\right]\cdot\frac{\left(1-\sqrt{y_1^2+y_2^2}\right)^{2-p}}{\sqrt{(1-y_1)^2+y_2^2}} \\
=\ & \left[1-y_1-\frac{y_1}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}}+\frac{y_1^2}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}}+\frac{y_2^2}{(y_2^2+y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}}\right]\cdot\frac{\left(1-\sqrt{y_1^2+y_2^2}\right)^{2-p}}{\sqrt{(1-y_1)^2+y_2^2}} \\
=\ & \left[\left(1-\frac{y_1}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}}\right)(1-y_1)+\frac{y_2^2}{(y_2^2+y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}}\right].\frac{\left(1-\sqrt{y_1^2+y_2^2}\right)^{2-p}}{\sqrt{(1-y_1)^2+y_2^2}}. \qquad \text{(B.1)}
\end{aligned}
$$

Se $0 \leq y_1 \leq 1$, temos

$$
\begin{aligned}
1-\frac{y_1}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}} \geq 1-\frac{y_1}{(|y_1|^{2-p}} &= (1-y_1).\left(1+\frac{1}{|y_1|^{2-p}}\right)+y_1-\frac{1}{|y_1|^{2-p}} \\
&\geq (1-y_1)p+y_1-1 \\
&= (1-y_1)\cdot(p-1). \qquad \text{(B.2)}
\end{aligned}
$$

Se ocorrer $y_1 < 0$ temos

$$
\begin{aligned}
1-\frac{y_1}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}} \geq 1-y_1 &\geq (1-y_1)p \\
&\geq (1-y_1)p+y_1-1 \\
&= (1-y_1)\cdot(p-1). \qquad \text{(B.3)}
\end{aligned}
$$

Então de (B.3) e (B.2) temos

$$
1-\frac{y_1}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}} \geq (1-y_1)\cdot(p-1). \qquad \text{(B.4)}
$$

Agora de (B.4) e de (B.1) temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{\left\langle |x|^{p-2}x-|y|^{p-2}y,x-y|\right\rangle}{\dfrac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}} = \\
= &\left[\left(1-\frac{y_1}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}}\right)(1-y_1)+\frac{y_2^2}{(y_2^2+y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}}\right]\cdot\frac{\left(1-\sqrt{y_1^2+y_2^2}\right)^{2-p}}{\sqrt{(1-y_1)^2+y_2^2}} \\
\geq &\left[(1-y_1)^2\cdot(p-1)+\frac{y_2^2}{(y_2^2+y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}}\right]\cdot\frac{1}{(1-y_1)^2+y_2^2} \\
\geq &\left[(1-y_1)^2.(p-1)+(p-1)y_2^2\right]\cdot\frac{1}{(1-y_1)^2+y_2^2} \\
= &(p-1)\left[(1-y_1)^2+y_2^2\right]\cdot\frac{1}{(1-y_1)^2+y_2^2} \\
= &(p-1). \qquad \text{(B.5)}
\end{aligned}
$$

Portanto de (B.5) concluímos que

$$\left\langle |x|^{p-2}x-|y|^{p-2}y,x-y\right\rangle \geq c_{2p}\frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}.$$

Onde $c_{2p}=(p-1)$.

Para o caso $p\geq 2$ temos

$$\frac{\left\langle |x|^{p-2}x-|y|^{p-2}y,x-y\right\rangle}{|x-y^p|}=\frac{1-y_1(y_1^2+y_2^2)^{\frac{p-2}{2}}(1-y_1)+y_2^2(y_1^2+y_2^2)^{\frac{p-2}{2}}}{((1-y_1)^2+y_2^2)^{\frac{p}{2}}}. \qquad \text{(B.6)}$$

Denote $t=\frac{|y|}{|x|}$ e $s=\frac{\langle x,y\rangle}{|x|.|y|}$. Então provaremos que a função

$$f(t,s)=\frac{1-(t^{p-1}+t)s+t^p}{(1-2ts+t^2)^{\frac{p}{2}}}, \qquad \text{(B.7)}$$

coincide com (B.6) e é limitada inferiormente.

De fato, para $t=\frac{|y|}{|x|}$ e $s=\frac{\langle x,y\rangle}{|x|.|y|}$ temos o seguinte

$$\begin{aligned}
f(t,s) &= \frac{1-(t^{p-1}+t)s+t^p}{(1-2ts+t^2)^{\frac{p}{2}}} = \frac{1-\left(\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^{p-1}+\frac{|y|}{|x|}\right)\frac{\langle x,y\rangle}{|x|\cdot|y|}+\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^p}{\left(1-2\frac{|y|}{|x|}\cdot\frac{\langle x,y\rangle}{|x|\cdot|y|}+\frac{|x|^2}{|y|^2}\right)^{\frac{p}{2}}}\\
&= \frac{\dfrac{|x|^p-\langle x,y\rangle|y|^{p-2}+|x|^{p-2}\langle x,y\rangle+|y|^p}{|x|^p}}{\left(\dfrac{|x|^2-2\langle x,y\rangle}{|x|^2}+\dfrac{|y|^2}{|x|^2}\right)^{\frac{p}{2}}}\\
&= \frac{|x|^{p-2}\langle x,x\rangle-\langle x,y\rangle|y|^{p-2}+|x|^{p-2}\langle x,y\rangle+|y|^{p-2}\langle y,y\rangle}{|x-y|^p}\\
&= \frac{\left\langle |x|^{p-2}x-|y|^{p-2}y, x-y\right\rangle}{|x-y^p|}.
\end{aligned}$$

Provaremos agora que a função f é limitada inferiormente. Fixando t e derivando a função f em relação a s obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{(-t^{p-1}-t).(1-2ts+t^2)^{\frac{p}{2}}+\frac{p}{2}(1-2ts+t^2)^{\frac{p}{2}-1}\cdot(2t)\cdot(1-(t^{p-1}+t)s+t^p)}{(1-2ts+t^2)^p}\\
&= \frac{(-t^{p-1}-t)\cdot(1-2ts+t^2)^{\frac{p}{2}}+pt(1-2ts+t^2)^{\frac{p}{2}-1}.(1-(t^{p-1}+t)s+t^p)}{(1-2ts+t^2)^p},
\end{aligned}$$

igualando $\dfrac{\partial f}{\partial s}=0$, temos

$$(t^{p-1}+t)\cdot(1-2ts+t^2)^{\frac{p}{2}} = pt(1-2ts+t^2)^{\frac{p}{2}-1}\cdot(1-(t^{p-1}+t)s+t^p),$$

O que implica

$$(t^{p-1}+t) = pt(1-2ts+t^2)^{-1}.(1-(t^{p-1}+t)s+t^p),$$

ou ainda,

$$\frac{(t^{p-1}+t)}{p}\cdot pt(1-2ts+t^2) = (1-(t^{p-1}+t)s+t^p). \tag{B.8}$$

Logo se s_0 é um ponto crítico de f, substituindo (B.8) em (B.7) e usando a hipótese que $p\geq 2$ e para $t\geq 0$ temos

$$
\begin{aligned}
f(t, s_0) = \frac{1 - (t^{p-1} + t)s_0 + t^p}{(1 - 2ts_0 + t^2)^{\frac{p}{2}}} &= \frac{t^{p-2} + 1}{p(1 - 2ts_0 + t^2)^{\frac{p-2}{2}}} \\
&\geq \frac{t^{p-2} + 1}{p(1 + t)^{\frac{p-2}{2}}} \\
&\geq \frac{1}{p} \min_{t \in [0,1]} \frac{1 + t^{p-2}}{(1 + t)^{p-2}}.
\end{aligned}
$$

O mínimo da última função ocorre quando

$$
\frac{d}{dt}\left[\frac{1 + t^{p-2}}{p(1 + t)^{p-2}}\right] = 0,
$$

ou seja, quando

$$
0 = \frac{(p-2)t^{p-3}(p(1+t)^{p-2}) - (p-2) \cdot p(1+t)^{p-3} \cdot (1 + t^{p-2})}{p^2((1+t)^{p-2})^2}.
$$

O que implica

$$
t^{p-3}(p(1+t)^{p-2}) = p(1+t)^{p-3} \cdot (1 + t^{p-2}),
$$

resolvendo esta igualdade obtemos $t = 1$. Pois,

$$
1^{p-3}(p(1+1)^{p-2}) = p2^{p-2}
$$

e

$$
p(1+1)^{p-3} \cdot (1 + 1^{p-2}) = p2^{p-3}2 = p2^{p-2}.
$$

Logo,

$$
f(t, s_0) \geq \frac{2}{p \cdot 2^{p-2}} = \frac{2^{3-p}}{p}.
$$

Donde segue o resultado. $\square$

Corolário B.1 *Sejam* u_1 *e* $u_2 \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ *então*

$$
\int_\Omega \langle |\nabla u_1|^{p-2}\nabla_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla_2, \nabla(u_1 - u_2)\rangle dx \geq \begin{cases} c_p \displaystyle\int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^p dx & , \quad p \geq 2. \\ c_p \dfrac{\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}}{\left(\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^p dx\right)^{\frac{2-p}{p}}} & , \quad 1 < p < 2. \end{cases}
$$

Demonstração. Inicialmente iremos tratar o caso em que $p \geq 2$, que é uma aplicação direta do Lema B.1. Suponha agora que $1 < p < 2$, e fazendo so da Desigualdade de Hölder temos

$$\int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^p dx = \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^p \cdot \frac{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{\frac{p(p-2)}{2}}}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{\frac{p(p-2)}{2}}} dx$$

$$\leq \left(\int_\Omega \left(\frac{|\nabla(u_1 - u_2)|^p}{|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{\frac{p(p-2)}{2}}} \right)^{\frac{2}{p}} dx \right)^{\frac{p}{2}} \cdot \left(\int_\Omega \left((|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{\frac{p(p-2)}{2}} \right)^{\frac{2}{2-p}} dx \right)^{\frac{2-p}{2}}$$

$$= \left(\int_\Omega \frac{|\nabla(u_1 - u_2)|^2}{|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{2-p}} dx \right)^{\frac{p}{2}} \cdot \left(\int_\Omega (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^p dx \right)^{\frac{2-p}{2}}.$$

Então usando o Lema B.1, temos

$$\begin{aligned} \frac{\left(\int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^p dx \right)^{\frac{2}{p}}}{\left(\int_\Omega (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^p dx \right)^{\frac{2-p}{p}}} &\leq \int_\Omega \frac{|\nabla(u_1 - u_2)|^2}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{2-p}} dx \\ &\leq \int_\Omega \langle |\nabla u_1|^{p-2}\nabla_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla_2, \nabla(u_1 - u_2)\rangle dx. \end{aligned}$$

□

Observação B.1 *O lema acima pode ser escrito em termos de norma em* $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$, *neste caso temos*

$$\int_\Omega \Big\langle |\nabla u_1|^{p-2}\nabla_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla_2, \nabla(u_1 - u_2) \Big\rangle dx \geq \begin{cases} c_p \|u_2 - u_1\|^p dx, & se \quad p \geq 2. \\ c_p \dfrac{\|u_2 - u_1\|^2}{(\|u_2\| + \|u_1\|)^{2-p}}, & se \quad 1 < p < 2. \end{cases} \tag{B.9}$$

Demonstração. De fato, como

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \| |\nabla u_1| + |\nabla u_2| \|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|\nabla u_1\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u_2\|_{L^p(\Omega)}, \end{aligned}$$

o que implica,

$$\frac{1}{\left(\int_\Omega (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|) \right)^{\frac{1}{p}}} \geq \frac{1}{\|u_1\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}}.$$

Logo,

$$\frac{\left(\int_{\Omega}|\nabla(u_1-u_2)|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}}{\left(\|u_1\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}+\|u_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right)^{2-p}} \leq \frac{\left(\int_{\Omega}|\nabla(u_1-u_2)|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}}{\left(\int_{\Omega}(|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^p dx\right)^{\frac{2-p}{p}}}$$
$$\leq \int_{\Omega}\big\langle|\nabla u_1|^{p-2}\nabla_1-|\nabla u_2|^{p-2}\nabla_2,\nabla(u_1-u_2)\big\rangle dx.$$

Portanto

$$\int_{\Omega}\big\langle|\nabla u_1|^{p-2}\nabla_1-|\nabla u_2|^{p-2}\nabla_2,\nabla(u_1-u_2)\big\rangle dx \geq \begin{cases} c_p\|u_2-u_1\|^p dx, & se \quad p\geq 2. \\ c_p\dfrac{\|u_2-u_1\|^2}{(\|u_2\|+\|u_1\|)^{2-p}}, & se \quad 1<p<2. \end{cases}$$

□

O nosso próximo resultado nos fornece uma caracterização de funções convexas diferenciáveis.

Teorema B.2 *Sejam $C\subset H$ um conjunto convexo e aberto, onde H é um espaço de Hilbert, e $f: C \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em C. Então as propriedades são equivalentes:*

(i) A função f é convexa em C.

(ii) Para todos $x,y\in C$ temos

$$f(y)\geq f(x)+\langle\nabla f(x),x-y\rangle.$$

(iii) Para todos $x,y\in C$ temos

$$\langle\nabla f(y)-\nabla f(x),x-y\rangle\geq 0.$$

Demonstração. Provaremos primeiramente que $(i)\Rightarrow(ii)\Rightarrow(iii)$. Suponha f convexa, para $x,y\in C$ e $\alpha\in[0,1]$ definindo $d=x-y$, temos que

$$f(x+\alpha d)=f(\alpha y+(1-\alpha)x)\leq \alpha f(y)+(1-\alpha)f(x),$$

daí,

$$\alpha(f(y)-f(x))\geq f(x+\alpha d)-f(x). \tag{B.10}$$

Dividindo ambos os membros de (B.10) por $\alpha > 0$, e passando ao limite quando $\alpha \to 0^+$ obtemos

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &\geq \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{f(x+\alpha d) - f(x)}{\alpha} \\ &= \langle \nabla f(x), d \rangle \\ &= \langle \nabla f(x), x - y \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(y) \geq f(x) \langle \nabla f(x), x - y \rangle.$$

Logo obtemos (ii).

Invertendo x e y no item (ii), temos o seguinte

$$f(x) \geq f(x) + \langle \nabla f(y), y - x \rangle. \tag{B.11}$$

Somando (B.11) com a desigualdade de (ii), temos o seguinte,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \\ &= \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), x - y \rangle. \end{aligned}$$

Donde obtemos (iii).

Provaremos agora que $(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$ Sejam $x, y \in C$. Pelo teorema do valor médio existe $\alpha \in (0,1)$, tal que,

$$f(y) - f(x) = \langle \nabla f(x + \alpha(y - x)), y - x \rangle. \tag{B.12}$$

Usando (iii) para os pontos $(x + \alpha(y - x))$ e x obtemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(x + \alpha(y - x)), y - x \rangle &= \alpha^{-1} \langle \nabla f(x + \alpha(y - x)), \alpha(y - x) \rangle \\ &\geq \alpha^{-1} \langle \nabla f(x), \alpha(y - x) \rangle \\ &= \langle \nabla f(x), y - x \rangle. \end{aligned} \tag{B.13}$$

Combinando (B.12) e (B.13) obtemos

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \langle \nabla f(x + \alpha(y - x)), y - x\rangle \\ &\geq \langle \nabla f(x), y - x\rangle. \end{aligned}$$

Donde obtemos (ii).

Definindo novamente $d = y - x$, temos

$$f(x) \geq f(x + \alpha d) - \alpha\langle \nabla f(x + \alpha d), d\rangle \tag{B.14}$$

e

$$f(y) \geq f(x + \alpha d) + (1 - \alpha)\langle \nabla f(x + \alpha d), d\rangle, \tag{B.15}$$

onde usamos (ii) nos pontos x e $x + \alpha d$, y e $x + \alpha d$, respectivamente. Multiplicando (B.14) por $1 - \alpha \geq 0$ e (B.15) por $\alpha \geq 0$ e somando as duas desigualdades obtemos

$$\begin{aligned} (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) &\geq (1-\alpha)f(x+\alpha d) - \alpha\langle \nabla(fx + \alpha d), d\rangle + \alpha(f(x + \alpha d)) \\ &+ (1-\alpha)\langle f(x+\alpha d), d\rangle \\ &= f(x + \alpha d) \\ &= f((1-\alpha)x + \alpha y). \end{aligned}$$

Portanto f é convexa. □

Lema B.2 *Sejam w_1 e w_2 elementos de $\mathbb{R}^N$.*
Se $p \geq 2$, então

$$|w_2|^p \geq |w_1|^p + p|w_1|^{p-2}w_1.(w_2 - w_1) + \frac{|w_2 - w_1|}{2^{p-1} - 1}. \tag{B.16}$$

Se $1 < p < 2$, então

$$|w_2|^p \geq |w_1|^p + p|w_1|^{p-2}w_1.(w_2 - w_1) + c(p)\frac{|w_2 - w_1|^2}{(|w_1| + |w_2|)^{2-p}}. \tag{B.17}$$

Demonstração. Iniciaremos a demonstração para o caso em que $p \geq 2$. Faremos uso da desigualdade de Clarkson.

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}|a|^p + \frac{1}{2}|b|^p, \tag{B.18}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}^N$.

Usando o Teorema B.2, temos

$$\left|\frac{w_1+w_2}{2}\right|^p \geq |w_1|^p + \frac{1}{2}p|w_1|^{p-2}w_1(w_2-w_1). \tag{B.19}$$

Combinando (B.18) e (B.19) temos o seguinte

$$|w_1|^p + \frac{1}{2}p|w_1|^{p-2}w_1(w_2-w_1) \leq \frac{1}{2}|w_1|^p + \frac{1}{2}|w_2|^p - \left|\frac{w_1-w_2}{2}\right|^p,$$

ou seja,

$$|w_2|^p \geq |w_1|^p + p|w_1|^{p-2}w_1(w_2-w_1) + 2\left|\frac{w_1-w_2}{2}\right|^p. \tag{B.20}$$

Podemos observar então que obtemos a desigualdade (B.16) com constante 2^{1-p} em vez de $\frac{1}{2^{p-1}-1}$.

Usando (B.20) para os pontos $\dfrac{w_1+w_2}{2}$ e w_1 temos

$$2\left|\frac{w_1+w_2}{2}\right|^p \geq 2|w_1|^p + p|w_1|^{p-2}\cdot w_1(w_2-w_1) + 2.2\left|\frac{w_2-w_1}{2\cdot 2}\right|^p. \tag{B.21}$$

De (B.18) e (B.21), temos

$$|w_1|^p + |x_2|^p - \frac{1}{2}\left|\frac{w_1-w_2}{2}\right| \geq 2|w_1|^p + p|w_1|^{p-2}\cdot w_1(w_2-w_1) + 2\cdot 2\left|\frac{w_2-w_1}{2.2}\right|^p,$$

logo

$$|w_2|^p + |w_1|^p \geq 2|w_1|^p + 2\left|\frac{w_1-w_2}{2}\right|^p + p|w_1|^{p-2}w_1.(w_2-w_1) + 2\cdot 2\left|\frac{w_1-w_2}{2.2}\right|^p,$$

donde segue que

$$|w_2|^p \geq |w_1|^p + p|w_1|^{p-2}w_1\cdot(w_2-w_1) + 2\left|\frac{w_2-w_1}{2}\right|^P + 4\left|\frac{w_2-w_1}{2.2}\right|^P. \tag{B.22}$$

Assim conseguimos a desigualdade (B.16) para uma constante $2^{1-p} + 4^{1-p}$ em vez de $\frac{1}{2^{p-1}-1}$.

Continuando com este raciocínio obtemos a constante

$$2^{1-p} + 4^{1-p} + 8^{1-p} + \cdots = \frac{1}{2^{p-1} - 1}.$$

Provaremos agora o caso em que $1 < p < 2$. Fixando w_1 e w_2 e fazendo a expansão da série de Maclaurin na função

$$f(t) = |w_1 + t(w_2 - w_1)|^p, \tag{B.23}$$

temos

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \int_0^1 (1-t) \cdot f''(t)dt. \tag{B.24}$$

Logo de (B.23) e de (B.24) temos

$$|w_2|^p = |w_1|^p + p|w_1|^{p-2} w_1 \cdot (w_2 - w_1) + \int_0^1 (1-t) \cdot f''(t)dt, \tag{B.25}$$

isto se, $|w_1 + t(w_2 - w_1)| \neq 0$ com $0 \leq t \leq 1$. Se $w_1 + t(w_2 - w_1) = 0$ para algum $t \in [0, 1]$ é imediato que (B.17) ocorra.

Agora observe que

$$\begin{aligned} f''(t) &= ((|w_1 + t(w_2 - w_1)|^p)')' \\ &= p \cdot (|w_1 + t(w_2 - w_1)|^{p-2} \cdot (w_1 + t(w_2 - w_1)).(w_2 - w_1))' \\ &= p(p-2) \cdot |w_1 + t(w_2 - w_1)|^{p-4}. \left[(w_1 + t(w_2 - w_1)).(w_2 - w_1)\right]^2 \\ &\quad + p \cdot |w_1 + t(w_2 - w_1)|^{p-2} \cdot |w_2 - w_1|^2. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} f''(t) &\geq p(p-2) \cdot |w_1 + t(w_2 - w_1)|^{p-4} \cdot |w_1 + t(w_2 - w_1)|^2 \cdot |w_2 - w_1|^2 \\ &+ p \cdot |w_1 + t(w_2 - w_1)|^{p-2} \cdot |w_2 - w_1|^2 \\ &= p(p-1)|w_1 + t(w_2 - w_1)|^{p-2} \cdot |w_2 - w_1|^2. \end{aligned} \tag{B.26}$$

Agora de (B.25) temos

$$\int_0^1 (1-t)\cdot f''(t)dt \geq \frac{3}{4}\int_0^{\frac{1}{4}} f''(t)dt. \tag{B.27}$$

Note que $|w_1| + |w_2| \geq |w_1 + t(w_2 - w_1)|$.

Pois pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} |w_1 + t(w_2 - w_1)| &\leq (1-t)|w_1| + t|w_2| \\ &\leq |w_1| + t|w_2| \\ &\leq |w_1| + |w_2|. \end{aligned}$$

Usando (B.26)e a hipótese que $1 < p < 2$, temos

$$\begin{aligned} f''(t) &\geq p(p-1)\frac{|w_2 - w_1|^2}{|w_1 + t(w_2 - w_1)|^{2-p}} \\ &\geq p(p-1)\frac{|w_2 - w_1|^2}{(|w_1| + |w_2|)^{2-p}}. \end{aligned} \tag{B.28}$$

Então de (B.27) e (B.28) segue que

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}\int_0^{\frac{1}{4}} f''(t)dt &\geq \frac{3}{4}\int_0^{\frac{1}{4}} p(p-1)\frac{|w_2 - w_1|^2}{(|w_1| + |w_2|)^{2-p}}dt \\ &= \frac{3}{4^2}p(p-1)\frac{|w_2 - w_1|^2}{(|w_1| + |w_2|)^{2-p}}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\int_0^1 (1-t)\cdot f''(t)dt \geq \frac{3}{4}\int_0^{\frac{1}{4}} f''(t)dt \geq \frac{3}{4^2}p(p-1)\frac{|w_2 - w_1|^2}{(|w_1| + |w_2|)^{2-p}}. \tag{B.29}$$

Substituindo (B.29) em (B.25), temos

$$|w_2|^p \geq |w_1|^p + p|w_1|^{p-2}w_1\cdot(w_2 - w_1) + c_1(p)\frac{|w_2 - w_1|^2}{(|w_1| + |w_2|)^{2-p}},$$

onde $c_1(p) = \frac{3}{4^2}p(p-1)$. □

B.2 Derivada do Funcional Energia

Mostraremos agora a existência e continuidade de derivadas de dois funcionais que foram utilizados no Capítulo 1.

Definição B.3 *Seja $I : A \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional onde A é um subconjunto aberto de um espaço de Banach X. Dizemos que I tem uma derivada de* **Gateaux**, *$f \in X'$, em $u \in A$ se, para qualquer $h \in X$*

$$I'(u) \cdot h = \lim_{t \to 0} \frac{I(u+th) - I(u) - f(th)}{t} = 0.$$

Teorema B.4 *O funcional*

$$\begin{aligned} J : \ \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u \qquad &\longmapsto J(u) = \int_\Omega \frac{1}{p} |\nabla u|^p dx, \end{aligned}$$

é Gâteux-diferenciável com derivada

$$\langle J'(u), \phi \rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \phi dx, \quad \forall \ \ \phi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Sejam $t \in \mathbb{R}$ satisfazendo $0 < |t| < 1$ e $u, \phi \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Defina a seguinte função

$$\begin{aligned} \varphi : \ [0,1] \ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s \quad &\longmapsto \varphi(s) = \frac{1}{p} |\nabla u + st\nabla \phi|^p. \end{aligned}$$

Pela Regra da Cadeia temos

$$\varphi'(s) = |\nabla u + st\nabla\phi|^{p-2} (\nabla u + st\nabla\phi) \cdot t\nabla\phi.$$

Sendo φ contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$, pelo Teorema do Valor Médio existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) \cdot (1-0),$$

ou seja,

$$\frac{1}{p} |\nabla u + t\nabla\phi|^p - \frac{1}{p} |\nabla u|^p = t |\nabla u + \theta t \nabla\phi|^{p-2} \cdot (\nabla u + \theta t\nabla\phi) \cdot \nabla\phi.$$

Daí

$$\frac{1}{t}\left(\frac{1}{p}|\nabla u+t\nabla\phi|^p-\frac{1}{p}|\nabla u|^p\right)=|\nabla u+\theta t\nabla\phi|^{p-2}\cdot(\nabla u+\theta t\nabla\phi)\cdot\nabla\phi.$$

Consequentemente

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{1}{p}|\nabla u+t\nabla\phi|^p-\frac{1}{p}|\nabla u|^p\right)=|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\phi.$$

Por outro lado, temos o seguinte

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{t}\left(\frac{1}{p}|\nabla u+t\nabla\phi|^p-\frac{1}{p}|\nabla u|^p\right)\right| &= ||\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\phi| \\ &= |\nabla u|^{p-1}\cdot|\nabla\phi| \\ &\leq (|\nabla u|+|\nabla\phi|)^{p-1}\cdot|\nabla\phi|.\end{aligned}$$

Como

$$|\nabla u|,|\nabla\phi|\in L^p(\Omega).$$

Temos o seguinte

$$(|\nabla u|+|\nabla\phi|)^{p-1}\in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega).$$

Pela desigualdade de Hölder temos que

$$(|\nabla u|+|\nabla\phi|)^{p-1}\cdot|\nabla\phi|\in L^1(\Omega).$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue ficamos com o seguinte

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega\frac{1}{t}\left[\frac{|\nabla u+t\nabla\phi|^{p-2}-|\nabla u|^p}{p}\right]dx=\int_\Omega|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\phi dx.$$

Assim

$$\begin{aligned}\langle J'(u),\phi\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{J(u+t\phi)-J(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega\frac{1}{t}\left[\frac{|\nabla u+t\nabla\phi|^{p-2}-|\nabla u|^p}{p}\right]dx \\ &= \int_\Omega|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\phi dx.\end{aligned}$$

Portanto

$$\langle J'(u), \phi \rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \phi dx.$$

Quanto a continuidade da derivada segue do fato que $J'(u) = -\Delta_p u$ que já foi mostrada no Capítulo 1, mais especificamente no Teorema 1.1. $\square$

Teorema B.5 *O funcional*

$$\begin{aligned} F: \quad \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \quad & \longmapsto f(u) = \int_\Omega \frac{1}{p}|u|^p dx, \end{aligned}$$

é Gâteux-diferenciável com

$$\langle F'(u), \phi \rangle = \int_\Omega |u|^{p-2} u \cdot \phi dx, \quad \forall \ \ \phi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Quanto a existência de derivada de Gâteaux o procedimento é inteiramente análogo ao do Teorema B.4. Falta então provarmos a continuidade da derivada deste funcional.

Sabemos que $\langle F'(u), \phi \rangle = \int_\Omega |u|^{p-2} u \cdot \phi dx$, seja então $(u_n) \subset \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Pelo Lema A.2 existe uma subsequência que ainda denotaremos por (u_n) e uma função h em $L^p(\Omega)$ tal que,

$$u_n(x) \longrightarrow u(x) \quad \text{q.t.p em} \quad \Omega. \tag{B.30}$$

e

$$u_n(x) \leq h(x) \quad \text{q.t.p em} \quad \Omega. \tag{B.31}$$

Daí temos que

$$|u_n(x)| \longrightarrow |u(x)| \quad \text{q.t.p em} \quad \Omega. \tag{B.32}$$

Para toda $\phi \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} |\langle F'(u_n) - F'(u), \phi \rangle| &= \left| \int_\Omega |u_n|^{p-2} u_n . \phi dx - \int_\Omega |u|^{p-2} u \cdot \phi dx \right| \\ &= \left| \int_\Omega \left(|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u \right) \cdot \phi dx \right| \\ &\leq \int_\Omega \left| |u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u \right| \cdot |\phi| dx. \end{aligned} \tag{B.33}$$

Fazendo

$$g_n = ||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u|, \tag{B.34}$$

com $n \in \mathbb{N}$. Daí, temos imediatamente que

$$g_n \leq |u_n|^{p-1} + |u|^{p-1}. \tag{B.35}$$

Sabendo que $|u_n|^{p-1} + |u|^{p-1} \in L^q(\Omega)$, onde $q = \frac{p}{p-1}$. Então de (B.35) temos que $(u_n) \subset L^q(\Omega)$.

Aplicando a Desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} |\langle F'(u_n) - F'(u), \phi\rangle| &\leq \int_\Omega \left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right| \cdot |\phi| dx \\ &\leq \left[\int_\Omega (g_n)^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\int_\Omega |\phi|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|g_n\|_{L^q(\Omega)} \cdot \|\phi\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned} \tag{B.36}$$

Donde concluímos que

$$\|F'(u_n) - F'(u)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq \|g_n\|_{L^q(\Omega)}. \tag{B.37}$$

De (B.30) e de (B.32) temos

$$g_n(x) \longrightarrow 0 \quad q.t.p \quad em \quad \Omega. \tag{B.38}$$

Por (B.31) e (B.35) temos

$$g_n(x) \leq h(x)^{q-1} + |u(x)|^{q-1} \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Daí

$$g_n(x)^q \leq 2^q(h(x)^p + |u(x)|^p) \in L^1(\Omega) \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Então aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue em (B.38) temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (g_n)^q dx = 0.$$

Portanto

$$\|g_n\|_{L^q(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{B.39}$$

De (B.37) e de (B.39) temos que

$$\|F'(u_n) - F'(u)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

O que conclui a continuidade da derivada de Gâteaux F'. $\square$

Apêndice C

Princípio do Máximo e da Comparação e Lema de Hopf

No decorrer deste apêndice exibiremos algumas versões do principio do máximo e da comparação que foram utilizados em demonstrações nos capítulos anteriores.

C.1 Princípio do Máximo Forte

Lema C.1 (Desigualdade do Tipo Harnarck) *Suponha que exista* $v \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ *tal que*

$$\begin{cases} -\Delta_p v & \geq & 0, & em & \Omega \\ v & \geq & 0, & em & \Omega. \end{cases} \tag{C.1}$$

Seja $x_0 \in \Omega$, $\delta > 0$ satisfazendo

$$\overline{B(x_0, 5\delta)} \subseteq \Omega$$

e $s > 0$ onde $s < \frac{N(p-1)}{N-p}$ se $p \leq N$ e $s \leq \infty$ se $p > N$. Então existe uma constante $c > 0$ que depende de N, s, p e δ com a seguinte propriedade

$$||v||_{L^s(B(x_0,2\delta))} \leq c\delta^{\frac{N}{s}} \inf_{B(x_0,\delta)} v.$$

Demonstração. A prova deste lema pode ser vista em [7].

O nosso próximo resultado é uma versão do princípio do máximo.

Teorema C.1 (Princípio do Máximo Forte) *Suponha que Ω seja um domínio conexo em $\mathbb{R}^N$ e que $v \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\Omega)$ seja tal que*

$$\begin{cases} -\Delta_p v & \geq & 0, & em & \Omega \\ v & \geq & 0. & em & \Omega \end{cases} \tag{C.2}$$

Podemos concluir que ocorre apenas uma das alternativas

$$v \equiv 0 \text{ em } \Omega \text{ ou } v > 0 \text{ em } \Omega$$

Demonstração. Suponha a existência de um certo $x_0 \in \Omega$ tal que $v(x_0) = 0$, defina o seguinte conjunto

$$O = \{x \in \Omega; v(x) = 0\}.$$

Temos $O \neq \emptyset$ e sendo v uma função contínua segue que O é um conjunto fechado em Ω.

Sendo Ω aberto existe $\delta > 0$ tal que $\overline{B(x_0, 5\delta)} \subset \Omega$. Pela desigualdade do tipo Harnarck (C.1) existem $c > 0$ e $s > 0$ tais que

$$||v||_{L^s(B(x_0,2\delta))} \leq c\delta^{\frac{N}{s}} \inf_{B(x_0,\delta)} v.$$

Como $v \geq 0$ em Ω e $v(x_0) = 0$ segue que $\inf_{B(x_0,\delta)} v = 0$, daí

$$\int_{B(x_0,2\delta)} |v(s)|^2 ds = 0.$$

Sendo $v \geq 0$ e contínua segue que $v \equiv 0$ em $B(x_0, 2\delta)$. Portanto O é um conjunto aberto. Sendo Ω conexo devemos ter $O = \Omega$. Portanto $v \equiv 0$ em Ω ou $v > 0$ em Ω.

□

C.2 Princípio da Comparação Fraca

O resultado a seguir pode ser visto em [23].

Teorema C.2 (Princípio da Comparação Fraca) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e com fronteira suave. Sejam u_1, $u_2 \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo*

$$\begin{cases} -\Delta_p u_1 & \leq & -\Delta_p u_2, & em & \Omega \\ u_1 & \leq & u_2, & em & \partial\Omega, \end{cases} \tag{C.3}$$

no sentido fraco, isto é,

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \cdot \nabla\varphi dx \leq \int_\Omega |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \cdot \nabla\varphi dx,$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *com* $\varphi \geq 0$*. Então* $u_1 \leq u_2$ *em* Ω*.*

Demonstração. Por hipótese temos

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \cdot \nabla\varphi dx - \int_\Omega |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \cdot \nabla\varphi dx \leq 0,$$

daí

$$\int_\Omega \langle |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2, \nabla\varphi\rangle dx \leq 0.$$

Para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$.

Considere a função teste $\varphi = \max\{u_1 - u_2, 0\}$, que é não negativa e pertence a $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Então pelo Lema B.1, e usando a função teste φ temos

$$0 \leq \int_{u_1 > u_2} \langle |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2, (\nabla u_1 - \nabla u_2)\rangle dx \leq 0.$$

Portanto

$$\int_{u_1 > u_2} \langle |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2, (\nabla u_1 - \nabla u_2)\rangle dx = 0.$$

Seja $\Omega_0 = \{x \in \Omega; u_1(x) > u_2(x)\}$.

Então temos apenas duas alternativas para Ω_0

(i) $\Omega_0 = \emptyset$

(ii) Ω_0 é tal que $\nabla u_1 = \nabla u_2$.

O caso (ii) não ocorre pois caso contrário, teríamos $u_2 = u_1 + c$, onde c é constante.

Afirmamos que $c = 0$. De fato, se $c \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ então existe uma sequência $(v_n) \subset C_0^\infty$ tal que $v_n \longrightarrow c$ em $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Ou seja

$$\int_\Omega |\nabla(v_n - c)|^p dx \longrightarrow 0.$$

o que implica

$$\int_{\Omega} |\nabla v_n|^p dx \longrightarrow 0$$

logo, $v_n \longrightarrow 0$ em $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Portanto pela unicidade do limite segue que $c = 0$. Donde concluímos que $u_1 = u_2$ em Ω_0, o que contradiz o fato de $u_1 > u_2$.

Portanto $\Omega_0 = \emptyset$.

□

Para finalizar este apêndice enunciaremos uma versão do lema de Hopf.

Lema C.2 (Lema de Hopf) *Seja Ω um domínio limitado com fronteira suave. Se $u \in C^1(\Omega) \cap \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ e verifica*

$$\begin{cases} -\Delta_p u & \geq & 0, & em & \Omega \\ u & > & 0, & em & \Omega \\ u & = & 0. & em & \partial\Omega \end{cases} \tag{C.4}$$

Então $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} < 0$ em $\partial\Omega$. Onde η é a derivada normal exterior a $\partial\Omega$.

Demonstração. Ver [23].

Bibliografia

[1] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New york (1975).

[2] Anane, A.: *Simplicité, et isolation de la premiére valeur propre du p-laplacien avec poids*, C. R. Acad. Sci. Paris 305, Sér. I Math., 1987, pp. 725-728.

[3] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley e Sons, Inc., New York (1995).

[4] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Diferential Equations*, Springer (2010).

[5] Canada, A., Drabek, P. and Gamez, J.L. ,*Existence of positive solutions for some problems with nonlinear diffusion*, Trans. Amer. Math. Soc. 349, 4231-4249 (1997).

[6] Chhetri, M., Oruganti, S. and Shivaji,R., *Existence results for a class of p-Laplacian problems with sign-changing weight*, Differential Integral Equations 18, 991-996 (2005).

[7] Damascelli, L., *Comparison theorems for some quasilinear degenerate elliptic operators and applications to symmetry and monotonicity results*, Nonlineaire Analyse, vol. 15, nº4, 493-516 (1998).

[8] Di Benedetto, E., $C^{1,\alpha}$ *local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications 7, No 8, 827-850 (1983).

[9] Drabek, P., Hernandez, and J., *Existence and uniqueness of positive solutions for some quasilinear elliptic problem*, Nonlinear Analysis, 44, 189–204 (2001).

[10] Drabek, P., Krejic, P. and Takac, P., *Nonlinear Differential Equations*, Chapman and Hall/CRC (1999).

[11] Guimarães, C. J., *Sobre os Espaços de Lebesgue e Sobolev Generalizados e Aplicações Envolvendo o p(x)-Laplaciano*, Dissertação de mestrado, Campina Grande: UFCG(2006)

[12] Hurtado, E., J., *Semigrupos Gerados pelo p-Laplaciano e um estudo do limite* $p \longrightarrow \infty$, Dissertação de Mestrado, São Carlos, UFSCar (2012)

[13] Iriarte, E.A.A., *Sobre um par de soluções positivas para uma classe de problemas elípticos envolvendo o p-Laplaciano*, Tese de Doutorado, Campinas: UNICAMP (2004).

[14] John, L., *Capacitary Functions in Convex Rings*, University of Kentucky Lexington, Kentucky. January 12 (1977).

[15] Kavian, O., *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Prolémes Elliptiques* , Springer - Verlag, Heidelberg (1993).

[16] Liebermann, G. M.,*Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Analysis TMA, 12, 1988, 1203-1219.

[17] Lima, E. L., *Curso de Análise, Vol. 2*, Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[18] Lindqvist, P., *On a Nonlinear Eigenvalue Problem*, Department of Mathematics Norwegian University of Science and Technology N-7491 Trondheim, Norway, american mathematical society Volume 109. Number I. May 1990.

[19] Lindqvist, P., *On the equation* $\Delta_p u + \lambda|u|^{p-2}u = 0$, Proc. A.M.S. 109-1, 157-164 (1990).

[20] Martínez, S. and Rossi, J. D., *Isolation and Ssimplicity for the First Eignevalue of the p-Laplacian With a Nonlinear Boundary Ccondition*, Abstract and Applied Analysis, vol. 7, no. 5, 287-293 (2002).

[21] Martins, E., M.,*Obtenção do Primeiro Autovalor para o p-Laplaciano via Método das Potências Inverso*, Tese de Doutorado, Belo Horizonte:UFMG(2009).

[22] Oliveira, M., O., *Espaços de Lebesgue-Sobolev Generalizados e Problemas de Autovalor Envolvendo o p(x)-Laplaciano*, Dissertação de mestrado, Belém: UFPA(207).

[23] Peral Alonso I., *Multiplicity of Solutions for the p-Laplacian.* In: second school of nonlinear functional analysis and applications to diferential equation, Miramare-Trieste: International center for theoretical physics, 21 de abril - 9 de maio (1997).

[24] Rasouli, S.H., Halimi, Z. and Mashhadban, Z., *A remark on the existence of positive weak solution for a class of (p,q)-Laplacian nonlinear system with sign-changing weight*, Nonlinear Analysis, vol. 73, issue 2, July 15, 385-389 (2010).

[25] Renard, M. and Rogers, R. C., *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer - Verlag Heidelberg.

[26] Riesz, F. and Sz.-Nagy, B. *Vorlesungen über Funktionalanalysis, Deutscher Verlag der Wissenschaften*, Berlin, 1956.

[27] Sakaguchi, S. *Concavity properties of solutions to some degenerate quasilinear elliptic Dirichlet problems*, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa Cl. Sei. (4) (to appear).

[28] Schmitt, K., *Rvisting The Method of Sub-and Supersolutions For Nonlinear Elliptic Prolems*, Journal of Differential Equations, Conference 15, 377–385 (2007).

[29] Stoffel, Augusto R., *Soluções de equações p-sublineares envolvendo o operador p-Laplaciano via teoria de Morse*, Dissertação de Mestrado, Porto Alegre: UFRGS(2010).

[30] Sur, *l'espace propre associé à la première valeur propre du pseudo-laplacien*, C. R. Acad. Sei. Paris Sér. I. Math. 303 (1986), 355-358.

[31] Thélin, F. de, Quélques résultats d'existence et de non-existence pour une E.D.P. elliptique non linéaire, C. R. Acad. Sei. Paris. Sér. 1 Math. 299 (1984), 911-914.

[32] Tolksdorff, P., *On the Dirichlet problem for quasilinear equations in doma in with conical boundary points*, Comm. in P.D.E., 8 (7), 1983, 773-817.