Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Soluções para uma Equação de Schrödinger Quasilinear

por

José Marcos da Silva †

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES.

Soluções para uma Equação de Schrödinger Quasilinear

por

José Marcos da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto - UFCG

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Setembro/2012

Resumo

Neste trabalho, iremos mostrar a existência de soluções para uma equação de Schrödinger quasilinear. Usaremos o método de Nehari e, minimizando o funcional energia, encontraremos soluções positivas e soluções nodais (que mudam de sinal) para este problema. Provaremos ainda a existência de soluções positivas via Passo da Montanha, com diferentes hipóteses sobre o potencial.

Palavras Chave: Equação de Schrödinger quasilinear, soluções positivas e nodais, Método de Nehari, Teorema do Passo da Montanha.

Abstract

In this paper, we show the existence of solutions for a quasilinear Schrödinger equation. We will use Nehari Method and, minimizing the energy functional, we will find positive and nodal solutions (sign changing) to this problem. We prove also existence of positive solutions via the Mountain Pass Theorem, with different hypotheses on the potencial.

Keywords: Quasilinear Schrödinger equations, positive and nodal solutions, Nehari Method, Mountain Pass Theorem.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a DEUS, por ter me dado força, proteção, sabedoria e paciência para superar os muitos obstáculos que apareceram durante toda minha vida. Quero agradecer também pelas pessoas que ELE colocou no meu caminho. Em todos os momentos, principalmente nos de dificuldades, sempre havia alguém do meu lado para me ajudar. Agradeço ainda por ELE ter me proporcionado tantas alegrias. Muito obrigado por tudo, SENHOR!

Agradeço a meus avós, João Severo e Dona Lili, pois eles me criaram e me educaram. Foram exemplos de humildade, honestidade e muitos outros príncipios morais.

Agradeço a minha mãe, Socorro, que ajudou a me educar, deu amor e carinho e sempre esteve ao meu lado, mesmo quando estava fisicamente distante; aos meus irmãos, Júlio e Fernando, pois deste pequenos, permanecemos sempre juntos e unidos, um tentando ajudar o outro; a meu tio Ivanildo, que me deu condições para que eu viesse morar em Campina Grande; a comunidade do Sítio Riacho do Cariri, município de Amparo-PB, local onde nasci, cresci e vivi uma infância maravilhosa; a Jucelino e a Madson, grandes amigos e companheiros de todas as horas e de tantas batalhas; aos meus colegas Fabrício, Ailton, Michel Barros, Alex, Bruno Fontes, Rivaldo, Jéssica Lange, Aline, Maria Sousa, Ana Cláudia, Cládio, Arthur, Brito, Elizabete, Fábio, Luciano, Luiz, Romildo, Kelmen, Bruno Sérgio, Israel entre outros; a Matheus, pelo auxílio no uso do Latex; aos funcionários da UAME, em especial, dona Argentina(in memorian), dona Dú, Suênia e Andrezza; aos professores do Ensino Básico, em especial a professora Luciene, que foi a pessoa que me fez gostar de Matemática; aos professores da Graduação, em particular, Rosana, Arimateia, Mendes e Micheli; aos professores do Mestrado, Claudianor, Marco Antônio, Horácio e Angelo; aos colegas professores da UEPB - Monteiro e do IFPB - Cajazeiras, em especial Luiz Lima, Joselma, Luciano, Mazé, Doval e Luiz Carlos Gabi; aos meus queridos ex-alunos; aos professores Marco Aurélio e Uberlândio por terem aceitado participar da banca; à CAPES, pelo apoio financeiro.

Agradeço a minha esposa, Carla Rafaella, pela paciência, compreensão, companheirismo, por estar sempre do meu lado, seja nos momentos bons, seja nos momentos de dificuldades, e por ela ter me incentivado bastante a entrar no Mestrado.

Agradeço ao professor Daniel, que foi o principal responsável por eu ter condições de entrar e concluir o Mestrado. Durante o período em que fui seu aluno, amadureci muito e isso foi fundamental para que tivesse um bom desempenho nas atividades acadêmicas. Além disso, quero agradecer pela paciência, os conselhos e também pelos momentos em que eu estava estressado e ele sempre procurou me acalmar.

Por fim, faço minha homenagem a uma pessoa muito especial, pela qual tinha um enorme carinho e que se estive entre nós, estaria tão feliz quanto eu: professora Marisa. Obrigado por seus ensinamentos, em especial, por mostrar que a vida também tem seu lado alegre!

Obrigado a todos!

Dedicatória

Aos meus avós, João Severo e Dona Lili, à minha mãe, Socorro, e à minha esposa, Carla Rafaella.

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho, estamos interessados em encontrar soluções fracas para a equação de Schrödinger quasilinear da forma

$$-\Delta u + V(x)u - \frac{1}{2}(\Delta(|u|^2))u = \lambda |u|^{p-1}u \ \ em \ \ \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

onde $4 \leq p+1 < 2.2^* = \frac{4N}{N-2}, N \geq 3, \lambda > 0$ e $V = V(x), x \in \mathbb{R}^N$, é um potencial dado que é uma função Hölder contínua e satisfaz a condição

$$V_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) > 0. \tag{2}$$

A equação (1) é um caso particular da equação

$$i\partial_t z = -\Delta z + W(x)z - f(|z|^2)z - \kappa \Delta h(|z|^2)h'(|z|^2)z, \tag{3}$$

onde $W = W(x), x \in \mathbb{R}^N$, é um potencial dado, κ é uma constante real e f e h são funções reais. Este problema aparece em diversas áreas da Física Matemática, como por exemplo, Teoria dos Superfluidos e Mecânica Quântica Dissipativa (e. g., Hasse [11], 1980; Kurihura [15], 1981; Nakamura [23], 1977), e corresponde a modelos de fenômenos físicos .

Consideremos $h(s) = s, f(s) = \lambda s^{\frac{p-1}{2}}, \kappa = \frac{1}{2}$ e $z(t,x) = e^{-iFt}u(x)$, onde F é uma constante real. Notemos que

$$\partial_t z = -iFe^{-iFt}u(x),$$

implicando em

$$i\partial_t z = Fe^{-iFt}u(x). \tag{4}$$

Além disso,

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = e^{-iFt}\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Daí,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} = e^{-iFt}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Assim,

$$-\Delta z = e^{-iFt}(-\Delta u) \tag{5}$$

Temos também

$$f(|z|^2) = \lambda\left(|z|^2\right)^{\frac{p-1}{2}} z = \lambda|u|^{p-1}ue^{-iFt}, h(|z|^2) = |z|^2 = |u|^2 \quad \text{e} \quad h'(|z|^2) = 1.$$

Logo, sendo $\kappa = \frac{1}{2}$,

$$\kappa\Delta h(|z|^2)h'(|z|^2)z = \frac{1}{2}(\Delta|u|^2)u \;\; e^{-iFt}. \tag{6}$$

e

$$f(|z|^2) = \lambda|u|^{p-1}ue^{-iFt}. \tag{7}$$

Substituindo (4), (5), (6) e (7) em (3) e multiplicando a equação obtida por e^{iFt}, ficamos com

$$-\Delta u + [W(x) - F]\, u - \frac{1}{2}(\Delta(|u|^2))u = \lambda|u|^{p-1}u.$$

Tomando $V(x) = W(x) - F$, obtemos a equação (1).

Neste trabalho, mostraremos a existência de solução fraca para a equação (1), baseado nos artigos de Liu, Wang e Wang [21], publicado em 2004, e de Liu, Wang e Wang [20], publicado em 2003. A existência de solução fraca positiva para a equação (1) foi provado em 2002 (caso unidimensional, ou seja, $N = 1$) e em 2003 (dimensões maiores) por Poppennberg et al. [24] e Liu e Wang [19], respectivamente. Nesses trabalhos, é considerado um problema com vínculo associado a equação quasilinear (1) e, sob certas condições, prova-se que o problema em questão possui solução positiva para uma sequência (λ_n) satisfazendo $\lambda_n \to 0$ e para uma sequência (λ_n) verificando $\lambda_n \to +\infty$. Para $\lambda > 0$ qualquer, a existência de soluções estava em aberto e é este o caso que vamos tratar no nosso estudo.

Nos Capítulos 1, 2 e 3 desta dissertação, vamos supor que o potencial V satisfaz a seguinte condição:

$$V_\infty = \lim_{|x|\to+\infty} V(x) = \|V\|_\infty < +\infty, \quad V(x) \neq V_\infty \tag{8}$$

e no Capítulo 3, assumiremos também que existem constantes $M, A, m > 0$ tais que para $|x| \geq M$,

$$V(x) \leq V_\infty - \frac{A}{1+|x|^m}. \tag{9}$$

Nos capítulos citados acima, mostraremos a existência de uma solução fraca positiva e de uma solução fraca que muda de sinal para a equação (1). Para isto, utilizaremos o Método de Nehari. Essa técnica baseia-se em encontrar pontos críticos de um funcional $\phi : E \to \mathbb{R}$, definido em um espaço de Banach E e de classe C^1, no conjunto

$$\mathcal{N} = \{v \in E; \langle \phi'(v), v\rangle = 0\}, \tag{10}$$

onde $\phi'(v)$ é a derivada de Fréchet de ϕ em v. Este método foi usado, entre outros autores, por Castro et al. [5], em 1997, e Cerami et al. [6], em 1986, para obter soluções que mudam de sinal em domínios limitados, e mais recentemente, em 2003, por Ambrosetti e Wang [2], para encontrar solução positiva, com $N = 1$. Observemos, no entanto, que no nosso trabalho não teremos a suavidade do funcional I e a derivada que usaremos não é a derivada de Frechét.

A seguir, veremos a definição de solução fraca e de derivada que utilizaremos nos três primeiros capítulos desta dissertação. Além disso, fixaremos algumas notações. Notemos inicialmente que as técnicas adotadas em nosso trabalho independem de $\lambda > 0$. Por isso, assumiremos $\lambda = 1$. Além disso, vamos considerar X como sendo o conjunto

$$X = \left\{u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right); u^2 \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)\right\}. \tag{11}$$

Definição 0.1 *Dizemos que uma função $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma solução fraca de (1) se $u \in X$ e satisfaz*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1+u^2)\nabla u \nabla \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} u|\nabla u|^2 \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u\phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1}u\phi dx = 0, \tag{12}$$

para toda $\phi \in W$, onde

$$W = \left\{\phi \in X; \int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla\phi|^2 dx < +\infty \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\phi^2 dx < +\infty\right\}.$$

Seja $I : X \to \mathbb{R}$ o funcional dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx. \tag{13}$$

Temos que I está bem definido. De fato, dada uma função $u \in X$, temos $u^2 \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Consequentemente, $u^2 \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, pois $H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Assim, $u \in$

$L^{2.2^*}(\mathbb{R}^N)$. Desde que $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, já que $u \in X \subset H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N)$, pelo Teorema C.12 (Desigualdade de Interpolação), $u \in L^q\left(\mathbb{R}^N\right), \forall q \in [2, 2.2^*]$. Daí,

$$X \subset L^q\left(\mathbb{R}^N\right), \forall q \in [2, 2.2^*] \tag{14}$$

e, em particular, para $4 \leq p+1 < 2.2^*$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx < +\infty. \tag{15}$$

Temos ainda $\nabla(u^2) \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Sendo $\nabla(u^2) = 2u\nabla u$, segue que $|\nabla(u^2)|^2 = 4u^2|\nabla u|^2$ e assim

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 dx < +\infty. \tag{16}$$

Como $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx < +\infty, \tag{17}$$

e sabendo que V é limitada, pois é uma função contínua e satisfaz (8), temos ainda

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx < +\infty. \tag{18}$$

De (15) - (18), o funcional I está bem definido em X.

Agora vamos introduzir a definição de derivada que iremos usar. Dados $u \in X$ e $\phi \in W$, a derivada de I em u na direção de ϕ, denotada por $\langle I'(u), \phi\rangle$, é definida como

$$\langle I'(u), \phi\rangle = \lim_{t \to 0^+} \frac{I(u+t\phi) - I(u)}{t}.$$

No **Apêndice A**, mostraremos que $\langle I'(u), \phi\rangle$ está bem definida, ou seja, se $u \in X$ e $\phi \in W$, então $u + t\phi \in X$, e I é derivável, com

$$\begin{aligned} \langle I'(u), \phi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} (1+u^2)\nabla u \nabla\phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} u|\nabla u|^2 \phi dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u\phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} u\phi dx. \end{aligned} \tag{19}$$

De (12) e (19), segue que $u \in X$ é solução fraca de (1) se, e somente se,

$$\langle I'(u), \phi\rangle = 0, \forall \phi \in W. \tag{20}$$

Fixemos algumas notações. Seja $\gamma : X \to \mathbb{R}$ o funcional dado por

$$\gamma(u) = \langle I'(u), u\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \left[(1+2u^2)|\nabla u|^2 + Vu^2 - |u|^{p+1}\right] dx. \tag{21}$$

A Variedade de Nehari, neste caso, é o conjunto

$$S = \{u \in X; \gamma(u) = 0, u \neq 0\}. \tag{22}$$

Consideraremos também o conjunto

$$S^* = \{u \in S; u^+ \in S, u^- \in S\}, \tag{23}$$

onde

$$u^+(x) = \max\{u(x), 0\} \quad e \quad u^-(x) = \max\{-u(x), 0\}. \tag{24}$$

Notemos que u^+ e u^- são funções não negativas,

$$u = u^+ - u^- \quad e \quad |u| = u^+ + u^-. \tag{25}$$

Definamos ainda

$$c^0 = \inf_{u \in S} I(u) \tag{26}$$

e

$$c^* = \inf_{u \in S^*} I(u). \tag{27}$$

Neste contexto, iremos encontrar soluções positivas e soluções nodais (que mudam de sinal) para a equação (1), minimizando o funcional I em S e S^*, respectivamente. Os principais resultados que iremos provar são os seguintes:

Teorema 0.1 *Seja $4 \leq p+1 < 2.2^*$. Suponha que valem (2) e (8). Então, existe $u \in S$ tal que $I(u) = c^0$. Além disso, u é solução fraca positiva de (1).*

Teorema 0.2 *Seja $4 \leq p+1 < 2.2^*$. Suponha que valem (2), (8) e (9). Então, existe $u \in S^*$ tal que $I(u) = c^*$. Além disso, u é uma solução fraca de (1) que muda de sinal e que tem exatamente dois domínios nodais.*

Seja $y \in \mathbb{R}^N$, com $u(y) \neq 0$. Um domínuo nodal D de u é a componente conexa de y em $\mathbb{R}^N$ tal que $u(x) \neq 0$ e $u(x)$ tem o mesmo sinal de $u(y)$, para todo $x \in D$. Se $u(y) > 0$, dizemos que D é um domínio nodal positivo e se $u(y) < 0$, D é um domínio nodal negativo.

No **Capítulo 1**, apresentaremos os resultados preliminares e mostraremos a existência de soluções positivas e nodais para a equação (1) em domínio limitado, mais especificamente, na bola centrada na origem. No **Capítulo 2**, provaremos o **Teorema 0.1**, mostrando a existência de solução positiva. E no **Capítulo 3**, faremos a demonstração do **Teoreama 0.2**, provando a existência de uma solução nodal. Esses três primeiros capítulos serão baseados no artigo de Liu, Wang e Wang [21].

Já no **Capítulo 4**, provaremos a existência de solução positiva para a equação (1) supondo diferentes hipóteses sobre o potencial V. Para isto, definiremos um conjunto Y no qual queremos que a solução pertença e, neste caso, vemos que o funcional energia associado ao problema não está bem definido em Y. Por isso, faremos uma mudança de variável e obteremos um novo problema, do qual mostraremos a existência de solução fraca positiva. A partir desta solução, encontraremos a solução fraca positviva para a equação (1). Neste capítulo, as novidades são a introdução de um espaço de Orlicz adequado e a utilização do Teorema do Passo da Montanha. Neste último capítulo, estudaremos o trabalho de Liu, Wang e Wang [20].

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados mais gerais utilizados ao longo do nosso trabalho. Além disso, mostraremos a existência de solução fraca na bola $B_R = B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| < R\}$, com $R > 0$.

1.1 Resultados Iniciais

Na **Introdução**, definimos uma solução fraca para a equação (1) como sendo uma função $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ verificando (12), para toda $\phi \in W$. Recordemos que estamos assumindo $\lambda = 1$.

Antes de comerçarmos a ver os resultados, vejamos a motivação para esta definição. Suponhamos que $u \in C^2\left(\mathbb{R}^N\right)$ seja uma solução clássica para (1). Multiplicando ambos os membros da equação (1) por uma função $\phi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$, integrando sobre $\mathbb{R}^N$ e usando integração por partes, ficamos com

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u \phi dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(|u|^2) \nabla(u\phi) dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} u \phi dx. \quad (1.1)$$

Como

$$\nabla(|u|^2) = 2u\nabla u \quad \text{e} \quad \nabla(u\phi) = (\nabla u)\phi + u(\nabla\phi),$$

então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(|u|^2) \nabla(u\phi) dx &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} 2u\nabla u[(\nabla u)\phi + u(\nabla\phi)] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} u|\nabla u|^2 \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 \nabla u \nabla \phi dx. \quad (1.2) \end{aligned}$$

De (1.1) e (1.2), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N}(1+u^2)\nabla u\nabla\phi dx+\int_{\mathbb{R}^N}u|\nabla u|^2\phi dx+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u\phi dx=\int_{\mathbb{R}^N}\lambda|u|^{p-1}u\phi dx. \qquad (1.3)$$

Fazendo $\lambda = 1$, temos a igualdade dada em (12), para $\phi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$. A equação (1.3) motiva a definição de solução fraca para a equação (1).

No nosso estudo, estamos interessados em elementos que estão em S ou S^*, pois são nestes conjuntos que iremos minimizar o funcional I. Por isso, nas demonstrações dos resultados, a partir de um elemento em X ou de uma sequência de elementos em X, queremos encontrar elementos associados que pertencem a Variedade de Nehari S ou a S^*. Nos lemas abaixo, mostraremos como são e sob que condições obter tais elementos. Em geral, dado um elemento em X, encontramos um múltiplo dele que pertence a S. Por isso, vamos começar com o resultado a seguir, que é uma desigualdade envolvendo I aplicado em um ponto u de S e I aplicado em múltiplos de u.

Lema 1.1 *Sejam $u \in S$ e $t \in (0, +\infty)$. Então, para $t \neq 1$,*

$$I(tu) < I(u).$$

Demonstração: Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(t) = I(tu). \qquad (1.4)$$

Notemos que se $u \in X$, então $tu \in X, \forall t \in \mathbb{R}$. Logo, a função f está bem definida. De (1.4) e (13), temos

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(tu)|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(tu)^2|\nabla(tu)|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)(tu)^2dx\\
&- \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|(tu)|^{p+1}dx\\
&= \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left[|\nabla u|^2+V(x)u^2\right]dx+\frac{t^4}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2|\nabla u|^2dx-\frac{t^{p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$f'(t) = t\int_{\mathbb{R}^N}\left[|\nabla u|^2+V(x)u^2\right]dx+2t^3\int_{\mathbb{R}^N}u^2|\nabla u|^2dx-t^p\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}dx. \qquad (1.5)$$

Para $t < 1$, temos

$$t > t^3. \qquad (1.6)$$

Além disso, sendo $p \geq 3$, segue que $t^p \leq t^3$ e daí,

$$-t^p \geq -t^3. \tag{1.7}$$

Assim, de (1.5), (1.6) e (1.7),

$$\begin{aligned} f'(t) &> t^3 \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u|^2 + V(x)u^2 \right] dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx \right\} \\ &= t^3 \gamma(u). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Como $u \in S$, então

$$\gamma(u) = 0. \tag{1.9}$$

De (1.8) e (1.9), concluimos que, para $t < 1$,

$$f'(t) > 0.$$

Analogamente, para $t > 1$, temos $t < t^3 \quad$ e $\quad -t^p \leq -t^3$. Logo, usando (1.5), ficamos com

$$\begin{aligned} f'(t) &< t^3 \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u|^2 + V(x)u^2 \right] dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx \right\} \\ &= t^3 \gamma(u). \end{aligned} \tag{1.10}$$

De (1.9) e (1.10), segue que, para $t > 1$,

$$f'(t) < 0.$$

Observando que f' é uma função contínua, podemos afirmar que $f'(1) = 0$ e f assume máximo absoluto estrito em $t = 1$. (Ver Figura 1.1.)

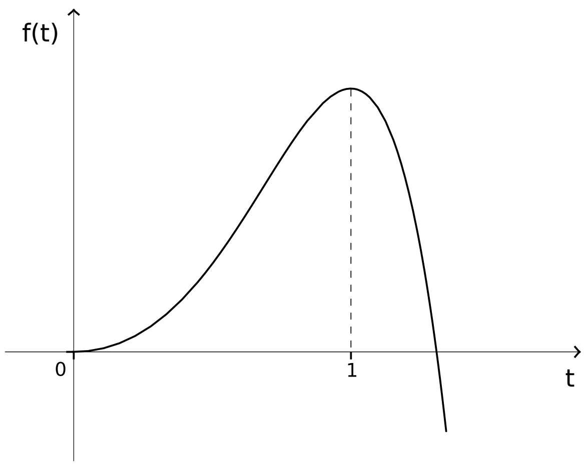

Figura 1.1: Gráfico de f.

Portanto, para $t \neq 1$,

$$f(t) < f(1),$$

ou seja,

$$I(tu) < I(u).$$

■

No próximo resultado, mostraremos a existência de um elemento em S a partir de um elemento em X.

Lema 1.2 *Seja $u \in X$, $u \neq 0$. Se $p+1>4$, então existe um único $t_0>0$ tal que $t_0u \in S$. A mesma conclusão vale quando $p+1=4$ e u satisfaz a condição*

$$2\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 dx < \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx. \tag{1.11}$$

Demonstração: Seja f a função dada em (1.4). Recordemos de (1.5) que

$$f'(t) = t\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right] dx + 2t^3\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 dx - t^p\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx. \tag{1.12}$$

Mostraremos inicialmente a existência de t_0. Para isto, consideraremos os casos a seguir.

1^o **CASO:** $p+1>4$.

Notemos que para t suficientemente pequeno,

$$t > t^3. \tag{1.13}$$

De (1.12) e (1.13),

$$\begin{aligned} f'(t) &> t^3\left\{\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right] dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 dx\right\} - t^p\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx \\ &= t^3\left\{\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u|^2 + V(x)u^2 + 2u^2|\nabla u|^2\right] dx - t^{p-3}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx\right\}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Logo, como $p-3>0$, pois $p+1>4$, para t suficientemente pequeno,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u|^2 + V(x)u^2 + 2u^2|\nabla u|^2\right] dx > t^{p-3}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx,$$

o que implica

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u|^2 + V(x)u^2 + 2u^2|\nabla u|^2\right] dx - t^{p-3}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx > 0. \tag{1.15}$$

Desde que $t^3>0$, de (1.14) e (1.15), temos, para t suficientemente pequeno,

$$f'(t) > 0. \tag{1.16}$$

Analogamente, para t suficientemente grande,

$$t < t^3. \tag{1.17}$$

De (1.12) e (1.17),

$$\begin{aligned} f'(t) &< t^3\left\{\int_{\mathbb{R}^N}\left[|\nabla u|^2+V(x)u^2\right]dx+2\int_{\mathbb{R}^N}u^2|\nabla u|^2dx\right\}-t^p\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}dx \\ &= t^3\left\{\int_{\mathbb{R}^N}\left[|\nabla u|^2+V(x)u^2+2u^2|\nabla u|^2\right]dx-t^{p-3}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}dx\right\} \qquad (1.18)\end{aligned}$$

Daí, sendo $p-3>0$, já que $p+1>4$, para t suficientemente grande, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left[|\nabla u|^2+V(x)u^2+2u^2|\nabla u|^2\right]dx<t^{p-3}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}dx.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left[|\nabla u|^2+V(x)u^2+2u^2|\nabla u|^2\right]dx-t^{p-3}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}dx<0. \qquad (1.19)$$

De (1.18) e (1.19),

$$f'(t)<0, \qquad (1.20)$$

para t suficientemente grande.

Como f' contínua, então de (1.16), (1.20) e do Teorema C.1 (Teorema do Valor Intermediário) existe $t_0>0$ tal que

$$f'(t_0)=0. \qquad (1.21)$$

Observemos agora que, de (21) e (1.12),

$$\begin{aligned} \gamma(t_0u) &= \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(t_0u)|^2dx+2\int_{\mathbb{R}^N}(t_0u)^2|\nabla(t_0u)|^2dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N}V(x)(t_0u)^2dx-\int_{\mathbb{R}^N}|(t_0u)|^{p+1}dx \\ &= t_0^2\int_{\mathbb{R}^N}\left[|\nabla u|^2+V(x)u^2\right]dx+2t_0^4\int_{\mathbb{R}^N}u^2|\nabla u|^2dx-t_0^{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}dx \\ &= t_0\left\{t_0\int_{\mathbb{R}^N}\left[|\nabla u|^2+V(x)u^2\right]dx+2t_0^3\int_{\mathbb{R}^N}u^2|\nabla u|^2dx-t_0^p\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}dx\right\} \\ &= t_0f'(t_0). \qquad (1.22)\end{aligned}$$

De (1.21) e (1.22), temos $\gamma(t_0u)=0$, implicando que

$$t_0u\in S$$

e concluindo o 1^o CASO.

2^o **CASO:** $p+1=4$, ou seja, $p=3$.

Para $p+1=4$, temos de (1.12),

$$\begin{aligned} f'(t) &= t\int_{\mathbb{R}^N}\left[|\nabla u|^2+V(x)u^2\right]dx+2t^3\int_{\mathbb{R}^N}u^2|\nabla u|^2dx-t^3\int_{\mathbb{R}^N}|u|^4dx \\ &= At+Bt^3, \end{aligned}$$

onde

$$A=\int_{\mathbb{R}^N}\left[|\nabla u|^2+V(x)u^2\right]dx \text{ e } B=\int_{\mathbb{R}^N}\left(2u^2|\nabla u|^2-|u|^4\right)dx.$$

De (1.11), $B<0$. Escrevendo

$$f'(t)=t^3\left(\frac{A}{t}+B\right),$$

vemos que

$$f'(t)\to-\infty \text{ quando } t\to+\infty.$$

Logo, para t sufientemente grande,

$$f'(t)<0.$$

Podemos escrever também

$$f'(t)=t(A+Bt^2). \tag{1.23}$$

Desta forma, para

$$t<\sqrt{-\frac{A}{B}},$$

temos

$$A+Bt^2>0. \tag{1.24}$$

Assim, como $t>0$, de (1.23) e (1.24), podemos afirmar que para t suficientemente pequeno,

$$f'(t)>0.$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_0>0$ tal que

$$f'(t_0)=0.$$

De maneira análoga ao 1^o $CASO$, temos $t_0u \in S$.

Agora mostraremos a unicidade de t_0. Suponhamos que existe $t_1 > 0$, $t_1 \neq t_0$, tal que $t_1u \in S$. Pelo Lema 1.1,

$$I(tt_0u) < I(t_0u) \quad e \quad I(tt_1u) < I(t_1u), \quad \forall t > 0, t \neq 1. \tag{1.25}$$

Sejam $t' = \dfrac{t_0}{t_1}$ e $t'' = \dfrac{t_1}{t_0}$.

Notemos que $t', t'' \neq 1$. Logo, de (1.25),

(i) $I(t't_1u) < I(t_1u)$;

(ii) $I(t''t_0u) < I(t_0u)$.

Mas

$$I(t''t_0u) = I\left(\frac{t_1}{t_0}t_0u\right) = I(t_1u) \quad \text{e} \quad I(t_0u) = I\left(\frac{t_0}{t_1}t_1u\right) = I(t't_1u).$$

De (ii) obtemos

$$I(t_1u) < I(t't_1u),$$

contrariando (i). Com isso, provamos a unicidade de t_0 e concluímos o Lema 1.2.

■

Vamos agora generalizar o lema anterior, no sentido de que dada uma sequência de pontos em X satisfazendo certas condições, podemos encontrar uma sequência de pontos em S.

Lema 1.3 *Seja $(u_n) \subset X$ uma sequência tal que*

$$\lim_{n\to+\infty} \gamma(u_n) = 0 \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}dx = c > 0. \tag{1.26}$$

Então, existe uma sequência $(t_n) \subset (0, +\infty)$ tal que $t_nu_n \in S$ e

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = 1.$$

Demonstração: Sejam

$$a_n = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + Vu_n^2\right) dx, b_n = \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2|\nabla u_n|^2 dx \quad \text{e} \quad c_n = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}dx.$$

Então,

$$\gamma(u_n) = a_n + 2b_n - c_n, \tag{1.27}$$

ou seja,

$$a_n + 2b_n = \gamma(u_n) + c_n.$$

Como $a_n, b_n \geq 0$, segue que

$$a_n, b_n \leq \gamma(u_n) + c_n. \tag{1.28}$$

Por (1.26), $\gamma(u_n)$ e (c_n) são sequências convergentes. Logo, $\gamma(u_n)$ e (c_n) são limitadas. Segue de (1.28) que (a_n) e (b_n) são limitadas e assim, a menos de subsequências, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$a_n \to a \quad \text{e} \quad b_n \to b, \quad \text{quando } n \to +\infty.$$

Passando ao limite $n \to +\infty$ em (1.27), obtemos

$$a + 2b - c = 0. \tag{1.29}$$

Afirmação 1: $a > 0$.

De fato, suponhamos por contradição que $a = 0$. Consideremos as funções

$$f(u) = |u|^{2(1-\theta)} \quad \text{e} \quad h(u) = |u|^{\frac{4N}{N-2}\theta}, u \in X,$$

onde $\theta = \dfrac{(p-1)(N-2)}{2(N+2)}$. Notemos que

$$f \in L^{\frac{1}{1-\theta}}(\mathbb{R}^N) \text{ e } h \in L^{\frac{1}{\theta}}(\mathbb{R}^N),$$

pois, usando (14) e o fato de que $u \in X$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(u)|^{\frac{1}{1-\theta}} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left[|u|^{2(1-\theta)}\right]^{\frac{1}{1-\theta}} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx < +\infty$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h(u)|^{\frac{1}{\theta}} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|u|^{\frac{4N}{N-2}\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{4N}{N-2}} dx < +\infty.$$

Observando que $\frac{1}{1-\theta}$ e $\frac{1}{\theta}$ são expoentes conjugados, já que

$$\frac{1}{\frac{1}{1-\theta}} + \frac{1}{\frac{1}{\theta}} = 1 - \theta + \theta = 1,$$

pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|f(u)||h(u)|dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(u)|^{\frac{1}{1-\theta}}dx\right)^{1-\theta}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|h(u)|^{\frac{1}{\theta}}dx\right)^{\theta}\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx\right)^{1-\theta}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{4N}{N-2}}dx\right)^{\theta}. \qquad (1.30)\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}2(1-\theta)+\frac{4N}{N-2}\theta &= 2-2\theta+\frac{4N}{N-2}\theta\\ &= 2-2\frac{(p-1)(N-2)}{2(N+2)}+\frac{4N}{N-2}\frac{(p-1)(N-2)}{2(N+2)}\\ &= 2-\frac{(p-1)(N-2)}{N+2}+\frac{2N(p-1)}{N+2}\\ &= \frac{2N+4-(p-1)(N-2)+2N(p-1)}{N+2}\\ &= \frac{2p+2+Np+N}{N+2}\\ &= \frac{2(p+1)+N(p+1)}{N+2}\\ &= \frac{(p+1)(N+2)}{N+2}\\ &= p+1.\end{aligned}$$

Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|f(u)||h(u)|dx=\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(1-\theta)}|u|^{\frac{4N}{N-2}\theta}dx=\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(1-\theta)+\frac{4N}{N-2}\theta}dx=\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}dx. \qquad (1.31)$$

De (1.30) e (1.31), ficamos com

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}dx\leq\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx\right)^{1-\theta}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{4N}{N-2}}dx\right)^{\theta}. \qquad (1.32)$$

Agora, para $u\in X$, seja $w=u^2$. Temos $w\in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e $\nabla w\in L^2(\mathbb{R}^N)$. Logo,

$$w\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)=\{v\in L^{2^*}(\mathbb{R}^N);\nabla v\in L^2(\mathbb{R}^N)\}.$$

Como, pelo Teorema C.18, $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, existe $C_1>0$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}|w|^{2^*}dx\right)^{\frac{1}{2^*}}\leq C_1\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|^2dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

ou seja,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{4N}{N-2}}dx\right)^{\frac{N-2}{2N}}\leq C_1\left(\int_{\mathbb{R}^N}4u^2|\nabla u|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}=C_2\left(\int_{\mathbb{R}^N}u^2|\nabla u|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (1.33)$$

com $C_2 = 2C_1$. Elevando à potência $\frac{N(p-1)}{N+2}$ ambos os membros de (1.33), obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{4N}{N-2}} dx\right)^{\theta} \leq C_3 \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{\theta N}{N-2}}, \tag{1.34}$$

onde $C_3 = C_2^{\frac{N(p-1)}{N+2}}$. De (1.32) e (1.34),

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx \leq C_3 \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx\right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{\theta N}{N-2}}, \forall u \in X. \tag{1.35}$$

Em particular,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx \leq C_3 \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx\right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx\right)^{\frac{\theta N}{N-2}}, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.36}$$

Como estamos supondo que $a_n \to a = 0$ e $V > 0$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_n^2 dx \to 0 \quad \text{quando } n \to +\infty.$$

Usando (2), temos

$$0 < V_0 \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_n^2 dx,$$

e podemos concluir que, quando $n \to +\infty$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx \to 0. \tag{1.37}$$

Observando que $b_n = \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx$ e (b_n) é limitada, segue de (1.36) e (1.37) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx \to 0, \text{ quando } n \to +\infty,$$

implicando que $c = 0$, o que é um absurdo, pois, de (1.26), $c > 0$.

Assim,

$$a_n \to a > 0,$$

concluindo a **Afirmação 1**.

De (1.29) e da **Afirmação 1**, obtemos $2b - c < 0$, ou seja, $2b < c$. Daí, para n suficientemente grande,

$$2b_n < c_n. \tag{1.38}$$

Logo, para cada n suficientemente grande, temos $c_n > 0$, pois $c_n \to c > 0$, e da definição de c_n, segue que $u_n \neq 0$. Temos ainda, pela desigualdade em (1.38), que a condição (1.11) é satisfeita. Assim, podemos usar o Lema 1.2 e garantir que existe $t_n \in (0, +\infty)$ tal que $t_n u_n \in S$, implicando que

$$\gamma(t_n u_n) = t_n^2 a_n + 2t_n^4 b_n - t_n^{p+1} c_n = 0. \tag{1.39}$$

Afirmação 2: Existem constantes $T_1, T_2 > 0$ tais que

$$0 < T_1 \leq t_n \leq T_2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suponhamos que não existe $T_1 > 0$ tal que $t_n \geq T_1, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, a menos de subsequências,

$$t_n \to 0.$$

Temos

$$a_n \to a > 0 \;\; e \;\; 2b_n - c_n \to 2b - c < 0. \tag{1.40}$$

Daí, para n suficientemente grande, existem constantes $C_4 > 0$ e $C_5 < 0$, tais que

$$a_n \geq C_4 \;\; e \;\; 2b_n - c_n \geq C_5. \tag{1.41}$$

Além disso, para t_n suficientemente pequeno, $t_n^4 \geq t_n^{p+1}$, implicando que

$$-t_n^{p+1} \geq -t_n^4. \tag{1.42}$$

Assim, usando (1.41) e (1.42),

$$\begin{aligned} a_n t_n^2 + 2b_n t_n^4 - c_n t_n^{p+1} &\geq a_n t_n^2 + 2b_n t_n^4 - c_n t_n^4 \\ &= a_n t_n^2 + t_n^4(2b_n - c_n) \\ &\geq C_4 t_n^2 + C_5 t_n^4 \\ &= t_n^2(C_4 + C_5 t_n^2). \end{aligned} \tag{1.43}$$

Segue de (1.39) e (1.43) que, para t_n suficientemente pequeno,

$$0 = a_n t_n^2 + 2b_n t_n^4 - c_n t_n^{p+1} > 0,$$

o que é um absurdo! Portanto, existe $T_1 > 0$ tal que $t_n \geq T_1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Suponhamos agora que não existe $T_2 > 0$ satisfazendo $t_n \leq T_2, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, a menos de subsequências, temos $t_n \to +\infty$. De (1.40), existem $C_6 > 0$ e $C_7 < 0$, tais que, para n suficientemente grande,

$$a_n \leq C_6 \quad e \quad 2b_n - c_n \leq C_7. \tag{1.44}$$

Temos ainda, para t_n suficientemente grande,

$$-t_n^{p+1} \leq -t_n^4. \tag{1.45}$$

De (1.39), (1.44) e (1.45), para t_n suficientemente grande,

$$\begin{aligned} 0 &= a_n t_n^2 + 2b_n t_n^4 - c_n t_n^{p+1} \\ &\leq a_n t_n^2 + 2b_n t_n^4 - c_n t_n^4 \\ &\leq t_n^2 (C_6 + C_7 t_n^2) \\ &< 0, \end{aligned}$$

o que é um absurdo! Com isso, mostramos a **Afirmação 2**.

Da **Afirmação 2**, (t_n) é limitada e, a menos de subsequência, existe $t_0 > 0$ tal que

$$t_n \to t_0, \quad quando \quad n \to +\infty. \tag{1.46}$$

Passando ao limite $n \to +\infty$ em (1.39) ficamos com

$$a t_0^2 + 2b t_0^4 - c t_0^{p+1} = 0. \tag{1.47}$$

Consideremos a função

$$g(t) = at^2 + 2bt^4 - ct^{p+1}, \quad t > 0. \tag{1.48}$$

De (1.47), seque que t_0 é raiz de g. Observemos ainda, de (1.29), que 1 é raiz de g, pois $g(1) = a + 2b - c = 0$. Além disso, para $t > 1$,

$$t^2 < t^4 \quad e \quad -t^{p+1} < -t^4. \tag{1.49}$$

Logo, de (1.29), (1.48) e (1.49),

$$g(t) < at^4 + 2bt^4 - ct^4 = t^4(a + 2b - c) = 0,$$

ou seja,

$$g(t) < 0, \forall t \in (1, +\infty). \tag{1.50}$$

Analogamente, para $t < 1$,

$$t^2 > t^4 \quad e \quad -t^{p+1} > -t^4$$

e segue de (1.48) que

$$\begin{aligned} g(t) &> at^4 + 2bt^4 - ct^4 \\ &= t^4(a + 2b - c) \\ &= 0, \end{aligned}$$

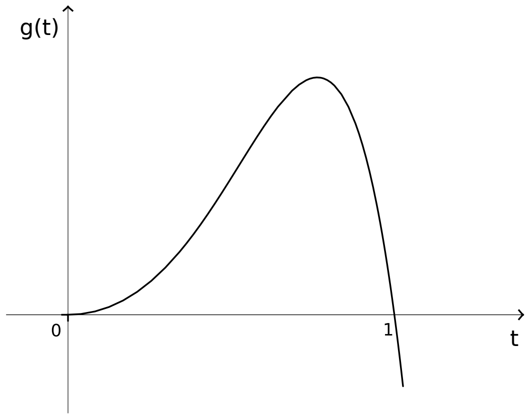

Figura 1.2: Gráfico de g.

isto é,

$$g(t) > 0, \forall t \in (0, 1). \tag{1.51}$$

De (1.50) e (1.51), podemos concluir que g não tem raiz positiva para $t \neq 1$ (Ver Figura 1.2). Assim, 1 é a única raiz positiva de g e, consequentemente, devemos ter $t_0 = 1$. Portanto, de (1.46),

$$t_n \to 1 \text{ quando } n \to +\infty.$$

■

Antes de continuarmos, recordemos que

$$c^0 = \inf_{u \in S} I(u) \quad \text{e} \quad c^* = \inf_{u \in S^*} I(u).$$

Lema 1.4 *Temos* $c^0 > 0$ *e* $c^* \geq 2c^0$.

Demonstração:

Seja $w \in X$. Denotemos

$$\rho^2 = \rho^2(w) = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + w^2)|\nabla w|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V w^2 dx. \tag{1.52}$$

De (1.35), para $\theta = \dfrac{(p-1)(N-2)}{2(N+2)}$, existe $C_1 > 0$ satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} |w|^{p+1} dx \leq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} w^2 dx \right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} w^2 |\nabla w|^2 dx \right)^{\frac{\theta N}{N-2}}. \tag{1.53}$$

De (2),

$$V_0 \leq V(x), \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Logo,

$$V_0 \int_{\mathbb{R}^N} w^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} V(x) w^2 dx,$$

implicando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} w^2 dx \leq \frac{1}{V_0} \int_{\mathbb{R}^N} V w^2 dx \leq \frac{1}{V_0} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(1 + w^2\right) |\nabla w|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V w^2 dx \right]. \tag{1.54}$$

Assim, de (1.52) e (1.54),

$$\int_{\mathbb{R}^N} w^2 dx \leq C_2 \rho^2, \tag{1.55}$$

onde $C_2 = \dfrac{1}{V_0}$.

Por outro lado,

$$\int_{\mathbb{R}^N} w^2 |\nabla w|^2 dx \leq \rho^2. \tag{1.56}$$

De (1.53), (1.55) e (1.56), para $C_3 = C_1 C_2$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{p+1} dx &\leq C_3 \rho^{2(1-\theta)} \rho^{2\frac{\theta N}{N-2}} \\ &= C_3 \rho^{2 - 2\theta + \frac{2\theta N}{N-2}} \\ &= C_3 \rho^{2 + \frac{4\theta}{N-2}}. \end{aligned}$$

Como $\theta = \dfrac{(p-1)(N-2)}{2(N+2)}$, então

$$\frac{4\theta}{N-2} = \frac{4}{N-2} \frac{(p-1)(N-2)}{2(N+2)} = \frac{2(p-1)}{N+2}.$$

Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |w|^{p+1} dx \leq C_3 \rho^{2 + \frac{2(p-1)}{N+2}}. \tag{1.57}$$

Desta forma, usando (1.57), temos

$$\begin{aligned} I(w) &= \frac{1}{2} \left[\int_{\mathbb{R}^N} (1 + w^2) |\nabla w|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V w^2 dx \right] - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{p+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{p+1} dx \\ &\geq \frac{1}{2} \rho^2 - \frac{C_3}{p+1} \rho^{2 + \frac{2(p-1)}{N+2}} \\ &= \rho^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{C_3}{p+1} \rho^{\frac{2(p-1)}{N+2}} \right], \end{aligned}$$

isto é,

$$I(w) \geq \rho^2(w) \left\{ \frac{1}{2} - \frac{C_3}{p+1} \left[\rho(w)\right]^{\frac{2(p-1)}{N+2}} \right\}. \tag{1.58}$$

Agora, seja $u \in S$. Pelo Lema 1.1,

$$I(tu) \leq I(u), \forall t \in (0, +\infty).$$

Temos, de (1.58), considerando $w = tu$,

$$I(tu) \geq \rho^2(tu) \left\{ \frac{1}{2} - \frac{C_3}{p+1} \left[\rho(tu)\right]^{\frac{2(p-1)}{N+2}} \right\}. \tag{1.59}$$

De (1.52), observemos que

$$\rho(tu) = t^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + Vu^2\right) dx + t^4 \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx.$$

Daí,

$$t \approx 0 \Rightarrow \rho(tu) \approx 0. \tag{1.60}$$

Logo, de (1.59) e (1.60), podemos escolher t suficientemente pequeno de modo que

$$I(tu) \geq C_4$$

para alguma constante $C_4 > 0$. Assim,

$$C_4 \leq I(tu) \leq I(u), \forall u \in S,$$

o que implica

$$C_4 \leq \inf_{u \in S} I(u) = c^0,$$

mostrando que

$$c^0 > 0.$$

Por fim, consideremos $u \in S^*$. Então, $u^+, u^- \in S$ e da definição de c^0

$$I(u^+) \geq c^0 \quad e \quad I(u^-) \geq c^0. \tag{1.61}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} Vu^2 dx &= \frac{1}{2}\int_{[u \geq 0]} Vu^2 dx + \frac{1}{2}\int_{[u<0]} Vu^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{[u \geq 0]} V(u^+)^2 dx + \frac{1}{2}\int_{[u<0]} V(-u^-)^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(u^+)^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(u^-)^2 dx.
\end{aligned}$$

Aplicando este mesmo processo para outros termos do funcional I, podemos concluir que

$$I(u) = I(u^+) + I(u^-). \tag{1.62}$$

Assim, de (1.61) e (1.62),

$$I(u) \geq c^0 + c^0 = 2c^0, \forall u \in S^*.$$

Portanto,

$$c^* = \inf_{u \in S^*} I(u) \geq 2c^0,$$

concluindo o lema.

■

Observação 1.1 *Provamos na demonstração do Lema 1.4 que* $I(u) = I(u^+) + I(u^-)$. *Procedendo de maneira análoga, podemos mostrar também que* $\gamma(u) = \gamma(u^+) + \gamma(u^-)$ *e* $I(u) = I(|u|)$.

Lema 1.5 *Sejam* $u, \phi \in X$ *tais que* $tu + s\phi \in X, \forall t, s \in \mathbb{R}$. *Então, a aplicação* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$F(t, s) = \langle I'(tu + s\phi), \phi \rangle$$

é contínua.

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned} \langle I'(tu + s\phi), \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[1 + (tu + s\phi)^2\right] \nabla(tu + s\phi)\nabla\phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} (tu + s\phi)|\nabla(tu + s\phi)|^2\phi \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} V(tu + s\phi)\phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |tu + s\phi|^{p-1}(tu + s\phi)\phi dx. \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever

$$F(t, s) = P(t, s) - Q(t, s),$$

onde P é uma função polinomial e

$$Q(t, s) = \int_{\mathbb{R}^N} |tu + s\phi|^{p-1}(tu + s\phi)\phi dx.$$

Mostremos que Q é contínua. Sejam $(t_n), (s_n) \subset \mathbb{R}$ e $t_0, s_0 \in \mathbb{R}$ tais que

$$t_n \to t_0 \text{ e } s_n \to s_0.$$

Dado $x \in \mathbb{R}^N$, temos

$$t_n u(x) \to t_0 u(x) \text{ e } s_n \phi(x) \to s_0 \phi(x).$$

Daí,

$$|t_n u(x) + s_n \phi(x)|^{p-1}(t_n u(x) + s_n \phi(x))\phi(x) \to |t_0 u(x) + s_0 \phi(x)|^{p-1}(t_0 u(x) + s_0 \phi(x))\phi(x)$$
$$\text{q. t. p. em } \mathbb{R}^N.$$

Além disso, seja C_1 uma constante positiva verificando

$$|t_n| \leq C_1 \text{ e } |s_n| \leq C_1, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

que existe pois (t_n) e (s_n) são convergentes.

Logo,

$$\begin{aligned}
\left||t_n u(x) + s_n \phi(x)|^{p-1}(t_n u(x) + s_n \phi(x))\phi(x)\right| &= |t_n u + s_n \phi|^p |\phi| \\
&\leq 2^p C_1^p \left(|u|^p + |\phi|^p\right)|\phi| \\
&= C_2 |u|^p |\phi| + C_2 |\phi|^{p+1},
\end{aligned}$$

com $C_2 = 2^p C_1^p$.

Notemos que $|u|^p \in L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$, pois $u \in X \subset L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. Como $\phi \in X \subset L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, temos $|\phi|^{p+1}$ integrável e, sendo $p+1$ e $\frac{p+1}{p}$ expoentes conjugados, segue que $|u|^p|\phi|$ é integrável. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |t_n u + s_n \phi|^{p-1}(t u_n + s_n \phi)\phi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |t_0 u + s_0 \phi|^{p-1}(t_0 u + s_0 \phi)\phi dx,$$

ou seja,

$$Q(t_n, s_n) \to Q(t_0, s_0),$$

mostrando que Q é contínua. Desde que P é contínua, podemos concluir que F também é contínua.

■

Observação 1.2 *No Lema 1.5, a função F está definida em $\mathbb{R}^2$, entretanto, de maneira análoga, podemos provar que esse resultado também vale para F definida em $\mathbb{R}^M$, com $M > 2$.*

Lema 1.6 *Sejam $u, \phi \in X$ funções satisfazendo*

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla\phi|^2 dx < +\infty \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\phi^2 dx < +\infty. \tag{1.63}$$

Então,

(i) $u + \phi \in X$;
(ii) $tu^+ - su^- \in X, \forall t, s \in \mathbb{R}$;
(iii) $tu^+ - su^- + r\phi \in X, \forall t, s, r \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Vamos provar (i). Notemos que

$$(u+\phi)^2 \leq 2(u^2 + \phi^2).$$

Daí,

$$(u+\phi)^4 \leq [2(u^2+\phi^2)]^2 = 4(u^2+\phi^2)^2 \leq 8(u^4+\phi^4).$$

De (14), $u, \phi \in X \subset L^q(\mathbb{R}^N), \forall q \in [2, 2.2^*]$. Em particular, $u, \phi \in L^4(\mathbb{R}^N)$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} [(u+\phi)^2]^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} (u+\phi)^4 dx \leq 8\int_{\mathbb{R}^N} u^4 dx + 8\int_{\mathbb{R}^N} \phi^4 dx < +\infty,$$

mostrando que $(u+\phi)^2 \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Temos ainda

$$\frac{\partial (u+\phi)^2}{\partial x_i} = 2(u+\phi)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right),$$

o que implica

$$\begin{aligned} |\nabla(u+\phi)^2|^2 &= 4(u+\phi)^2 \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)^2 \\ &\leq 4.2(u^2+\phi^2).2.\sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)^2\right] \\ &= 16\left(u^2+\phi^2\right)\left(|\nabla u|^2 + |\nabla\phi|^2\right) \\ &= 16\left(u^2|\nabla u|^2 + u^2|\nabla\phi|^2 + |\nabla u|^2\phi^2 + \phi^2|\nabla\phi|^2\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$|\nabla(u+\phi)^2|^2 \leq 16\left(u^2|\nabla u|^2 + u^2|\nabla\phi|^2 + |\nabla u|^2\phi^2 + \phi^2|\nabla\phi|^2\right). \tag{1.64}$$

Desde que $u, \phi \in X$, temos $u^2, \phi^2 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\nabla u^2 = 2u\nabla u, \nabla\phi^2 = 2\phi\nabla\phi \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 dx < +\infty \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^2\phi^2 dx < +\infty. \tag{1.65}$$

De (1.63), (1.64) e (1.65),

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u+\phi)^2|^2 dx < +\infty.$$

Logo, $\nabla\left[(u+\phi)^2\right] \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Assim, $(u+\phi)^2 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, de onde segue que $u+\phi \in X$, mostrando (i).

Agora provaremos (ii). Seja $u \in X$. Observemos que $u^+, u^- \in X$ e, consequentemente, $tu^+, su^- \in X, \forall t, s \in \mathbb{R}$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (tu^+)^2 |\nabla(-su^-)|^2 dx &= t^2s^2 \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^2 |\nabla(u^-)|^2 dx \\
&= t^2s^2 \int_{[u\geq 0]} (u^+)^2 |\nabla(u^-)|^2 dx + t^2s^2 \int_{[u<0]} (u^+)^2 |\nabla(u^-)|^2 dx.
\end{aligned}$$

De (24), temos $u^+ = 0$ em $[u < 0]$ e $\nabla u^- = 0$ em $[u \geq 0]$, já que $u^- = 0$ em $[u \geq 0]$. Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (tu^+)^2 |\nabla(-su^-)|^2 dx = 0 < +\infty.$$

Analogamente, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-su^-)^2 |\nabla(tu^+)|^2 dx = 0 < +\infty.$$

Pelo item (i),

$$tu^+ - su^- \in X, \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Para provar (iii), basta verificar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (tu^+ - su^-)^2 |\nabla(r\phi)|^2 dx < +\infty \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(tu^+ - su^-)|^2 (r\phi)^2 dx < +\infty.$$

Como, pelo item (ii), $tu^+ - su^- \in X$, e $r\phi \in X$, segue de (i) que $tu^+ - su^- + r\phi \in X$.

■

Lema 1.7 *Suponha que existe $u \in S$ satisfazendo $I(u) = c^0$ ou $u \in S^*$ com $I(u) = c^*$. Então, u é solução fraca de (1), ou seja,*

$$\begin{aligned}
\langle I'(u), \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} (1+u^2)\nabla u \nabla\phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} u|\nabla u|^2 \phi + \int_{\mathbb{R}^N} V u\phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} u\phi dx \\
&= 0 \qquad (1.66)
\end{aligned}$$

para toda $\phi \in W$.

Demonstração:

Vamos mostrar o resultado para c^*. Suponhamos que $u \in S^*$ e $I(u) = c^*$, mas a conclusão do lema não é verdadeira. Então, existe uma função $\phi \in W$ tal que

$$\langle I'(u), \phi\rangle \neq 0. \tag{1.67}$$

Logo, existe $C > 0$ tal que

$$\langle I'(u), \phi\rangle \leq -C \text{ ou } \langle I'(u), \phi\rangle \geq C.$$

Assumamos $\langle I'(u), \phi\rangle \leq -C$ e definamos $\phi_C = \frac{1}{C}\phi$. Temos que $\phi_C \in W$ e

$$\langle I'(u), \phi_C\rangle = \frac{1}{C}\langle I'(u), \phi\rangle \leq \frac{1}{C}(-C) = -1.$$

Analogamente, se $\langle I'(u), \phi\rangle \geq C$, tomando $\phi_C = -\frac{1}{C}\phi$, obtemos as mesmas conclusões.

Assim, de (1.67) e diante do que apresentamos acima, podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$\langle I'(u), \phi\rangle \leq -1. \tag{1.68}$$

Segue do Lema 1.6 que $tu^+ - su^- + \sigma\phi \in X, \forall t, s, \sigma \in \mathbb{R}$. Daí, a aplicação F dada por

$$F(t, s, \sigma) = \langle I'(tu^+ - su^- + \sigma\phi), \phi\rangle$$

está bem definida e, pelo Lema 1.5 e pela Observação 1.2, é contínua no ponto (1, 1, 0). De (1.68),

$$F(1, 1, 0) = \langle I'(u^+ - u^-), \phi\rangle = \langle I'(u), \phi\rangle \leq -1.$$

Daí, podemos escolher $\varepsilon > 0$ pequeno de modo que

$$\langle I'(tu^+ - su^- + \sigma\phi), \phi\rangle \leq -\frac{1}{2}, \tag{1.69}$$

para $|t - 1| + |s - 1| + |\sigma| \leq 3\varepsilon$.

Seja η a função corte dada por

$$\eta(t, s) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad |t-1| \leq \frac{1}{2}\varepsilon \text{ e } |s-1| \leq \frac{1}{2}\varepsilon \\ 0, & \text{se} \quad |t-1| \geq \varepsilon \text{ ou } |s-1| \geq \varepsilon \end{cases}.$$

Consideremos a função $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(\sigma) = I(tu^+ - su^- + \varepsilon\eta(t,s)\sigma\phi). \tag{1.70}$$

Pelo Teorema C.2,

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(\sigma)d\sigma. \tag{1.71}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \varphi'(\sigma) &= \langle I'(tu^+ - su^- + \varepsilon\eta(t,s)\sigma\phi), \varepsilon\eta(t,s)\phi\rangle \\ &= \varepsilon\eta(t,s)\langle I'(tu^+ - su^- + \varepsilon\eta(t,s)\sigma\phi), \phi\rangle. \end{aligned} \tag{1.72}$$

De (1.70), (1.71) e (1.72), ficamos com

$$\begin{aligned} &I(tu^+ - su^- + \varepsilon\eta(t,s)\phi) - I(tu^+ - su^-) \\ &= \int_0^1 \varepsilon\eta(t,s)\langle I'(tu^+ - su^- + \varepsilon\eta(t,s)\sigma\phi), \phi\rangle d\sigma \\ &= \varepsilon\eta(t,s) \int_0^1 \langle I'(tu^+ - su^- + \varepsilon\eta(t,s)\sigma\phi), \phi\rangle d\sigma. \end{aligned} \tag{1.73}$$

Para $|t-1| \leq \varepsilon$ e $|s-1| \leq \varepsilon$, temos

$$|t-1| + |s-1| + |\varepsilon\eta(t,s)\sigma| \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon\eta(t,s)\sigma \leq 3\varepsilon.$$

Logo, de (1.69),

$$\langle I'(tu^+ - su^- + \varepsilon\eta(t,s)\sigma\phi), \phi\rangle \leq -\frac{1}{2}. \tag{1.74}$$

De (1.73) e (1.74), para $|t-1| \leq \varepsilon$ e $|s-1| \leq \varepsilon$,

$$\begin{aligned} I(tu^+ - su^- + \varepsilon\eta(t,s)\phi) &\leq I(tu^+ - su^-) + \varepsilon\eta(t,s)\int_0^1 \left(-\frac{1}{2}\right) d\sigma \\ &= I(tu^+ - su^-) - \frac{1}{2}\varepsilon\eta(t,s)\sigma \\ &\leq I(tu^+ - su^-). \end{aligned} \tag{1.75}$$

A desigualdade em (1.75) vale para todo $(t,s) \in \mathbb{R}^2$, já que, para $|t-1| \geq \varepsilon$ ou $|s-1| \geq \varepsilon$, temos $\eta(t,s) = 0$ e a desigualdade em (1.75) é imediata.

Recordemos que $u \in S^*$, implicando que $u^+, u^- \in S$. Assim, usando a Observação 1.1 e o Lema 1.1, para $(t,s) \neq (1,1)$, temos

$$I(tu^+ - su^-) = I(tu^+) + I(su^-) < I(u^+) + I(u^-) = I(u). \tag{1.76}$$

Segue de (1.75) e (1.76) que

$$I(tu^+ - su^- + \varepsilon\eta(t,s)\phi) < I(u), \quad (t,s) \neq (1,1). \tag{1.77}$$

Se $(t,s) = (1,1)$, então

$$\begin{aligned} I(tu^+ - su^- + \varepsilon\eta(t,s)\phi) &= I(u^+ - u^- + \varepsilon\eta(1,1)\phi) \\ &\leq I(u^+ - u^-) - \frac{1}{2}\varepsilon\eta(1,1) \\ &= I(u) - \frac{1}{2}.\varepsilon.1 \\ &= I(u) - \frac{1}{2}\varepsilon \\ &< I(u), \end{aligned}$$

isto é,

$$I(u^+ - u^- + \varepsilon\eta(1,1)\phi) < I(u). \tag{1.78}$$

De (1.77) e (1.78), concluímos que

$$I(tu^+ - su^- + \varepsilon\eta(t,s)\phi) < I(u) = c^*, \forall t,s \in \mathbb{R}.$$

Vamos agora usar o Teorema B.9, chamado de Teorema de Poincaré-Miranda e mostrar que existe $(a,b) \in (0,2) \times (0,2)$ tal que $\bar{u} = au^+ - bu^- + \varepsilon\eta(a,b)\phi \in S^*$. Se isto ocorrer, teremos $I(\bar{u}) < c^*$, o que é um absurdo pela definição de c^*. Portanto, o lema estará concluído para c^*.

Podemos assumir $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Consideremos o produto cartesiano

$$P = [\varepsilon, 2-\varepsilon] \times [\varepsilon, 2-\varepsilon].$$

Então,

- $P_1^- = \{(t,s) \in P; t = \varepsilon\} = \{(\varepsilon, s); s \in [\varepsilon, 2-\varepsilon]\}$;
- $P_2^- = \{(t,s) \in P; s = \varepsilon\} = \{(t, \varepsilon); t \in [\varepsilon, 2-\varepsilon]\}$;
- $P_1^+ = \{(t,s) \in P; t = 2-\varepsilon\} = \{(2-\varepsilon, s); s \in [\varepsilon, 2-\varepsilon]\}$;

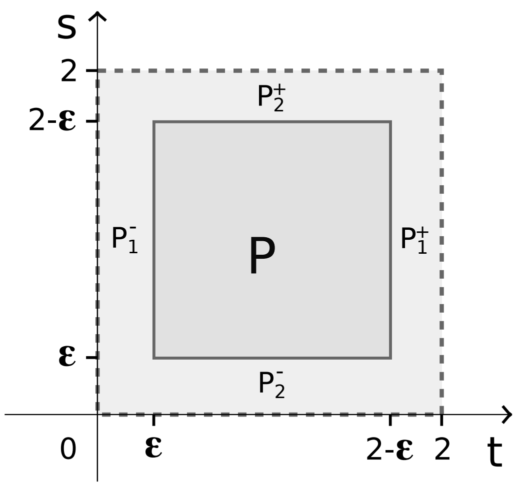

Figura 1.3: Região P.

- $P_2^+ = \{(t,s) \in P; s = 2-\varepsilon\} = \{(t, 2-\varepsilon); t \in [\varepsilon, 2-\varepsilon]\}$.

Observemos essas regiões na Figura 1.3. Para cada $(t,s) \in P$, seja

$$u_{t,s} = tu^+ - su^- + \varepsilon\eta(t,s)\phi.$$

Consideremos ainda a aplicação $f : P \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(t,s) = (f_1(t,s), f_2(t,s)), \tag{1.79}$$

onde

$$f_1(t,s) = -\gamma(u_{t,s}^+) \quad e \quad f_2(t,s) = -\gamma(u_{t,s}^-). \tag{1.80}$$

Usando um procedimento análogo ao que utilizamos no Lema 1.5, podemos afirmar que f_1 e f_2 são contínuas. Logo, de (1.79), f é contínua. Vamos provar que

$$f_i(t,s) \geq 0, \quad para \quad (t,s) \in P_i^+, \quad e \quad f_i(t,s) \leq 0, \quad para \quad (t,s) \in P_i^-, \tag{1.81}$$

com $i = 1, 2$.

Seja $(2-\varepsilon, s) \in P_1^+$. Observemos que

$$|(2-\varepsilon) - 1| = |1-\varepsilon| = 1-\varepsilon.$$

Como $\varepsilon < 1/2$, temos

$$1 - \varepsilon \geq \varepsilon,$$

o que implica

$$|(2-\varepsilon) - 1| \geq \varepsilon.$$

Assim,

$$\eta(2-\varepsilon, s) = 0,$$

de onde segue que

$$u_{2-\varepsilon,s} = (2-\varepsilon)u^+ - su^-.$$

Consequentemente,

$$u_{2-\varepsilon,s}^+ = (2-\varepsilon)u^+. \tag{1.82}$$

Sendo $2-\varepsilon>1$, temos

$$(2-\varepsilon)^2<(2-\varepsilon)^4 \quad e \quad -(2-\varepsilon)^{p+1}\leq -(2-\varepsilon)^4. \tag{1.83}$$

Logo, de (21), (1.82) e (1.83),

$$\begin{aligned}
\gamma(u^+_{2-\varepsilon,s}) &= \gamma((2-\varepsilon)u^+)\\
&= (2-\varepsilon)^2\int_{\mathbb{R}^N}\left[|\nabla u^+|^2+V(x)(u^+)^2\right]dx\\
&+ 2(2-\varepsilon)^4\int_{\mathbb{R}^N}(u^+)^2|\nabla u^+|^2dx-(2-\varepsilon)^{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u^+|^{p+1}dx\\
&\leq (2-\varepsilon)^4\left\{\int_{\mathbb{R}^N}\left[|\nabla u^+|^2+V(x)(u^+)^2\right]dx\right.\\
&+ \left.2\int_{\mathbb{R}^N}(u^+)^2|\nabla u^+|^2dx-\int_{\mathbb{R}^N}|u^+|^{p+1}dx\right\}\\
&= (2-\varepsilon)^4\gamma(u^+),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\gamma(u^+_{2-\varepsilon,s}) \leq (2-\varepsilon)^4\gamma(u^+). \tag{1.84}$$

Desde que $u^+\in S$, pois $u\in S^*$, segue que

$$\gamma(u^+)=0. \tag{1.85}$$

De (1.84) e (1.85),

$$\gamma(u^+_{2-\varepsilon,s})\leq 0.$$

Assim, usando (1.80),

$$f_1(2-\varepsilon,s)=-\gamma(u^+_{2-\varepsilon,s})\geq 0,\quad (2-\varepsilon,s)\in P_1^+. \tag{1.86}$$

Seja $(t,2-\varepsilon)\in P_2^+$. Então,

$$\eta(t,2-\varepsilon)=0,\quad u_{t,2-\varepsilon}=tu^+-(2-\varepsilon)u^- \quad \text{e} \quad u^-_{t,2-\varepsilon}=(2-\varepsilon)u^-.$$

Daí, concluimos que

$$\gamma(u^-_{t,2-\varepsilon})=\gamma((2-\varepsilon)u^-)\leq 0.$$

Logo,

$$f_2(t,2-\varepsilon)=-\gamma(u^-_{t,2-\varepsilon})\geq 0,\quad (t,2-\varepsilon)\in P_2^+. \tag{1.87}$$

Notemos agora que

$$\varepsilon^2 > \varepsilon^4 \quad \text{e} \quad -\varepsilon^{p+1} \geq -\varepsilon^4.$$

Como $\eta(\varepsilon, s) = 0$ e $\eta(t, \varepsilon) = 0$, então

$$\gamma(u^+_{\varepsilon,s}) = \gamma(\varepsilon u^+) \geq 0 \quad \text{e} \quad \gamma(u^-_{t,\varepsilon}) = \gamma(\varepsilon u^-) \geq 0,$$

de onde segue que

$$f_1(\varepsilon, s) = -\gamma(u^+_{\varepsilon,s}) \leq 0, \quad (\varepsilon, s) \in P_1^- \tag{1.88}$$

e

$$f_2(t, \varepsilon) = -\gamma(u^-_{t,\varepsilon}) \leq 0, \quad (\varepsilon, s) \in P_2^-. \tag{1.89}$$

De (1.86) - (1.89) temos (1.81) e, sabendo que f é contínua, podemos usar o Teorema de Poincaré - Miranda e concluir que f possui uma raiz em P, ou seja, existe $(a, b) \in P$ tal que $f(a, b) = (0, 0)$. Logo, de (1.79),

$$f_1(a, b) = 0 \quad \text{e} \quad f_2(a, b) = 0.$$

Daí, usando (1.80),

$$\gamma(u^+_{a,b}) = 0 \quad \text{e} \quad \gamma(u^-_{a,b}) = 0.$$

Assim, pondo $\bar{u} = u_{a,b} = u^+_{a,b} - u^-_{a,b}$, temos

$$\bar{u} = au^+ - bu^- + \varepsilon\eta(a, b)\phi \in S^*,$$

com $(a, b) \in P \subset (0, 2) \times (0, 2)$.

Com isso, concluímos o lema para o caso em que $u \in S^*$ e $I(u) = c^*$. De maneira análoga, podemos concluir o resultado para o caso em que temos $u \in S$ e $I(u) = c^0$.

■

Observação 1.3 *O Lema 1.7 afirma que que se c^0 é atingido, então a função $u \in S$ que satisfaz $I(u) = c^0$ é uma solução fraca de (1). Assim, nosso trabalho a partir de agora é mostrar que esse ínfimo é atingido. O mesmo vale para c^*.*

1.2 Resultados de Existência em Domínios Limitados

Nesta seção, trataremos do nosso problema em domínios limitados, mais especificamente na bola com centro na origem. Inicialmente, vamos fixar algumas notações. Seja $B_R = B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| < R\}$, com $R > 0$. Definiremos

$$S_R = S \cap H_0^1(B_R); \tag{1.90}$$

$$S_R^* = S^* \cap H_0^1(B_R); \tag{1.91}$$

$$c_R^0 = \inf_{S_R} I = \inf_{u \in S_R} I(u) \tag{1.92}$$

e

$$c_R^* = \inf_{S_R^*} I = \inf_{u \in S_R^*} I(u). \tag{1.93}$$

Mostraremos que os ínfimos c_R^0 e c_R^* são atingidos e, por um resultado análogo ao Lema 1.7, podemos garantir a existência de solução do nosso problema em B_R.

Lema 1.8 *c_R^0 e c_R^* decrescem e convergem, respectivamente, para c^0 e c^* quando $R \to +\infty$.*

Demonstração: Sejam $R_1, R_2 > 0$, com $R_1 < R_2$. Então,

$$B_{R_1} \subset B_{R_2},$$

o que implica

$$H_0^1(B_{R_1}) \subset H_0^1(B_{R_2}).$$

Daí,

$$S \cap H_0^1(B_{R_1}) \subset S \cap H_0^1(B_{R_2}) \quad \text{e} \quad S^* \cap H_0^1(B_{R_1}) \subset S^* \cap H_0^1(B_{R_2}),$$

ou seja,

$$S_{R_1} \subset S_{R_2} \quad e \quad S_{R_1}^* \subset S_{R_2}^*.$$

Assim,

$$\inf_{S_{R_2}} I \leq \inf_{S_{R_1}} I \quad \text{e} \quad \inf_{S^*_{R_2}} I \leq \inf_{S^*_{R_1}} I,$$

isto é,

$$c^0_{R_2} \leq c^0_{R_1} \quad \text{e} \quad c^*_{R_2} \leq c^*_{R_1},$$

mostrando que c^0_R e c^*_R são não crescentes em R.

Observando que $S_R \subset S$ e $S^*_R \subset S^*$, podemos concluir que

$$c^0 \leq c^0_R \quad \text{e} \quad c^* \leq c^*_R, \forall R > 0.$$

Logo, existem

$$\lim_{R\to+\infty} c^0_R \quad \text{e} \quad \lim_{R\to+\infty} c^*_R,$$

com

$$c^0 \leq \lim_{R\to+\infty} c^0_R \quad \text{e} \quad c^* \leq \lim_{R\to+\infty} c^*_R.$$

Resta-nos então mostrar que

(i) $c^0 \geq \lim_{R\to+\infty} c^0_R$;

(ii) $c^* \geq \lim_{R\to+\infty} c^*_R$.

Provemos (ii). De (27),

$$c^* = \inf_{S^*} I.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $u \in S^*$ tal que

$$I(u) \leq c^* + \varepsilon. \tag{1.94}$$

Fixado $R > 0$, seja $u_R = \eta_R u$, onde η_R é a função corte dada por:

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad |x| \leq \frac{1}{4}R \\ 0, & \text{se} \quad |x| \geq \frac{3}{4}R \end{cases}.$$

Afirmação 1: $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u^{\pm}_R|^{p+1}dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u^{\pm}|^{p+1}dx > 0.$

De fato, dado $x \in \mathbb{R}^N$, escolhamos $R_0 > 0$ de modo que

$$4|x| \leq R_0.$$

Desta forma,

$$|x| \leq \frac{1}{4}R_0.$$

Para $R \geq R_0$, temos

$$|x| \leq \frac{1}{4}R.$$

Daí,

$$\eta_R(x) = 1,$$

o que implica

$$u_R(x) = u(x).$$

Logo,

$$u_R^{\pm}(x) = u^{\pm}(x)$$

e assim, para $R \geq R_0$,

$$[u_R^{\pm}(x)]^{p+1} = [u^{\pm}(x)]^{p+1}.$$

Portanto,

$$\lim_{R \to +\infty} [u_R^{\pm}(x)]^{p+1} = [u^{\pm}(x)]^{p+1} \quad q.t.p. \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |u_R^{\pm}(x)|^{p+1} &\leq |u_R^{\pm}(x) + u_R^{\mp}(x)|^{p+1} \\ &= |u_R(x)|^{p+1} \\ &= |\eta_R(x) u(x)|^{p+1} \\ &\leq |u(x)|^{p+1}, \quad q.t.p. \;\; em \;\; \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Sendo $u \in S^* \subset S \subset X$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx < +\infty.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_R^{\pm}|^{p+1} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u^{\pm}|^{p+1} dx.$$

Desde que $u^{\pm} \in S$, pois $u \in S^*$, temos $u^{\pm} \neq 0$ e assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u^{\pm}|^{p+1} dx > 0,$$

concluindo a prova da **Afirmação 1**.

Analogamente, podemos concluir também que

$$\lim_{R\to+\infty} \gamma(u_R^{\pm}) = \gamma(u^{\pm}). \tag{1.95}$$

Como $u^{\pm} \in S$, pois $u \in S^*$, então

$$\gamma(u^{\pm}) = 0. \tag{1.96}$$

Segue de (1.95) e (1.96) que

$$\lim_{R\to+\infty} \gamma(u_R^{\pm}) = 0. \tag{1.97}$$

De (1.97) e da **Afirmação 1**, podemos usar o Lema 1.3 e garantir que existem $(t_R), (s_R) \subset (0, +\infty)$ tais que

$$t_R u_R^+, s_R u_R^- \in S \;\; e \;\; t_R, s_R \to 1 \;\; quando \;\; R \to +\infty. \tag{1.98}$$

Para cada $R > 0$, ponhamos

$$\tilde{u}_R = t_R u_R^+ - s_R u_R^-.$$

Logo,

$$\tilde{u}_R^+ = t_R u_R^+ \quad \text{e} \quad \tilde{u}_R^- = s_R u_R^-.$$

Agora, de (1.98), $\tilde{u}_R^+, \tilde{u}_R^-, \tilde{u}_R \neq 0$ e

$$\gamma(\tilde{u}_R^+) = \gamma(t_R u_R^+) = 0 \;\; e \;\; \gamma(\tilde{u}_R^-) = \gamma(s_R u_R^-) = 0. \tag{1.99}$$

Além disso, usando a Observação 1.1 e (1.99),

$$\gamma(\tilde{u}_R) = \gamma(\tilde{u}_R^+) + \gamma(\tilde{u}_R^-) = 0 + 0 = 0. \tag{1.100}$$

Assim, de (1.99) e (1.100),

$$\tilde{u}_R \in S \quad \text{e} \quad \tilde{u}_R^{\pm} \in S,$$

implicando que

$$\tilde{u}_R \in S^*. \tag{1.101}$$

Afirmação 2: $\tilde{u}_R \in H_0^1(B_R)$.

De fato, temos $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Então, $u \in H^1(B_R)$. Pelo Teorema C.17, existe $(u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\bar{u}_n \to u \quad em \quad H^1(B_R), \tag{1.102}$$

onde $\bar{u}_n = u_n|_{B_R}$.

Notemos que

$$\eta_R \bar{u}_n \in C^\infty(B_R), \tag{1.103}$$

pois $\eta_R, \bar{u}_n \in C^\infty(B_R)$.

Temos também

$$\text{supt } \eta_R \bar{u}_n \subset \text{supt } \eta_R \quad \text{e} \quad \text{supt } \eta_R \text{ é compacto.}$$

Como $\eta_R \bar{u}_n$ é contínua, então supt $\eta_R \bar{u}_n$ é fechado e temos, assim,

$$supt \quad \eta_R \bar{u}_n \quad compacto. \tag{1.104}$$

De (1.103) e (1.104),

$$\eta_R \bar{u}_n \in C_0^\infty(B_R).$$

Além disso, usando (1.102),

$$\|\eta_R \bar{u}_n - \eta_R u\|_{H_0^1(B_R)} = \|\eta_R\|_{H_0^1} \quad \|\bar{u}_n - u\|_{H_0^1(B_R)} \leq \|\eta_R\|_{H_0^1} \quad \|\bar{u}_n - u\|_{H^1(B_R)} \to 0.$$

Segue então que

$$\eta_R \bar{u}_n \to \eta_R u \text{ em } H_0^1(B_R).$$

Como isso, provamos que existe uma sequência em $C_0^\infty(B_R)$ que converge para $u_R = \eta_R u$. Consequentemente, $u_R \in H_0^1(B_R)$. Daí, $u_R^\pm \in H_0^1(B_R)$.

Portanto,

$$\tilde{u}_R = t_R u_R^+ - s_R u_R^- \in H_0^1(B_R),$$

mostrando a **Afirmação 2**.

De (1.101) e da **Afirmação 2**,

$$\tilde{u}_R \in S_R^* = S^* \cap H_0^1(B_R).$$

Usando (1.93) e a Observação 1.1 temos

$$\begin{aligned}
c_R^* = \inf_{S_R^*} I &\leq I(\tilde{u}_R) \\
&= I(|\tilde{u}_R|) \\
&= I(t_R u_R^+ + s_R u_R^-) \\
&= I(t_R u_R^+ + s_R u_R^-)\Big|_{B_{\frac{R}{4}}} + I(t_R u_R^+ + s_R u_R^-)\Big|_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R}{4}}} \\
&= I(t_R u^+ + s_R u^-)\Big|_{B_{\frac{R}{4}}} + I(t_R u_R^+ + s_R u_R^-)\Big|_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R}{4}}} \\
&= I(t_R u^+ + s_R u^-) - I(t_R u^+ + s_R u^-)\Big|_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R}{4}}} + I(t_R u_R^+ + s_R u_R^-)\Big|_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R}{4}}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$c_R^* \leq I(t_R u^+ + s_R u^-) - I(t_R u^+ + s_R u^-)\Big|_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R}{4}}} + I(t_R u_R^+ + s_R u_R^-)\Big|_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R}{4}}}. \quad (1.105)$$

Vamos mostrar que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$-I(t_R u^+ + s_R u^-)\Big|_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R}{4}}} \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R}{4}}} \left[(1+u^2)|\nabla u|^2 + V u^2 + |u|^{p+1}\right] dx. \quad (1.106)$$

Temos, de (1.98), que

$$t_R \to 1 \text{ e } s_R \to 1 \text{ quando } R \to +\infty.$$

Então, dado $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ existe $R_0 > 0$ tal que

$$R \geq R_0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \leq t_R, s_R \leq 1 + \frac{1}{2},$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \leq t_R, s_R \leq \frac{3}{2}. \quad (1.107)$$

Observemos de (1.107) que

$$t_R u^+ + s_R u^- \geq \frac{1}{2}(u^+ + u^-) = \frac{1}{2}|u|,$$

implicando que

$$\frac{1}{4}u^2 \leq (t_R u^+ + s_R u^-)^2. \quad (1.108)$$

Desde que $V(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$, temos

$$\frac{1}{4}Vu^2 \leq V(t_R u^+ + s_R u^-)^2. \tag{1.109}$$

Além disso, de (1.107),

$$0 \leq t_R u^+ + s_R u^- \leq \frac{3}{2}(u^+ + u^-) = \frac{3}{2}|u|,$$

de onde segue que

$$(t_R u^+ + s_R u^-)^{p+1} \leq \frac{3^{p+1}}{2^{p+1}}|u|^{p+1}. \tag{1.110}$$

Assim, de (1.109) e (1.110),

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{\frac{R}{4}}} V(t_R u^+ + s_R u^-)^2 dx \geq \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{\frac{R}{4}}} Vu^2 dx \tag{1.111}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{\frac{R}{4}}} (t_R u^+ + s_R u^-)^{p+1} dx \leq \frac{3^{p+1}}{2^{p+1}}\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{\frac{R}{4}}} |u|^{p+1} dx. \tag{1.112}$$

Usando (1.107), temos ainda

$$\begin{aligned}
|\nabla(t_R u^+ + s_R u^-)|^2 &= t_R^2|\nabla(u^+)|^2 + s_R^2|\nabla(u^-)|^2 + 2t_R s_R\langle\nabla(u^+), \nabla(u^-)\rangle \\
&\geq \frac{1}{4}|\nabla(u^+)|^2 + \frac{1}{4}|\nabla(u^-)|^2 + 2\frac{1}{2}\frac{1}{2}\langle\nabla(u^+), \nabla(u^-)\rangle \\
&= \frac{1}{4}\left(|\nabla(u^+)|^2 + |\nabla(u^-)|^2 + 2\langle\nabla(u^+), \nabla(u^-)\rangle\right) = \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4}|\nabla|u||^2 \\
&= \frac{1}{4}|\nabla u|^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|\nabla(t_R u^+ + s_R u^-)|^2 \geq \frac{1}{4}|\nabla u|^2,$$

o que implica

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{\frac{R}{4}}} |\nabla(t_R u^+ + s_R u^-)|^2 dx \geq \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{\frac{R}{4}}} |\nabla u|^2 dx$$

e, usando (1.108),

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{\frac{R}{4}}} (t_R u^+ + s_R u^-)^2|\nabla(t_R u^+ + s_R u^-)|^2 dx &\geq \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{\frac{R}{4}}} \left(\frac{1}{4}|\nabla u|^2\frac{1}{4}u^2\right) dx \\
&= \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{\frac{R}{4}}} u^2|\nabla u|^2 dx.
\end{aligned}$$

Portanto, de (13) e (1.111) - (1.113),

$$
\begin{aligned}
& I(t_Ru^+ + s_Ru^-)\Big|_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{4}}} \\
= \ & \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{4}}} |\nabla(t_Ru^+ + s_Ru^-)|^2dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{4}}} (t_Ru^+ + s_Ru^-)^2|\nabla(t_Ru^+ + s_Ru^-)|^2dx \\
+ \ & \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{4}}} V(t_Ru^+ + s_Ru^-)^2dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{4}}} |t_Ru^+ + s_Ru^-|^{p+1}dx \\
\geq \ & \frac{1}{8}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{4}}} |\nabla u|^2dx + \frac{1}{32}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{4}}} u^2|\nabla u|^2dx \\
+ \ & \frac{1}{8}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{4}}} Vu^2dx - \frac{3^{p+1}}{2^{p+1}}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{4}}} |u|^{p+1}dx \\
\geq \ & -\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{4}}} (1+u^2)|\nabla u|^2dx - \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{4}}} Vu^2dx - \frac{3^{p+1}}{2^{p+1}}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{4}}} |u|^{p+1}dx,
\end{aligned}
$$

de onde segue que

$$
-I(t_Ru^+ + s_Ru^-)\Big|_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{4}}} \leq C_1\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{4}}} \left[(1+u^2)|\nabla u|^2 + Vu^2 + |u|^{p+1}\right]dx, \quad (1.113)
$$

onde $C_1 = \frac{3^{p+1}}{2^{p+1}}$.

De maneira análoga, podemos encontrar $C_2 > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
I(t_Ru_R^+ + s_Ru_R^-)\Big|_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{4}}} \ \leq \ & C_2\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{4}}} \left[(1+u^2)|\nabla u|^2 + Vu^2 + |u|^{p+1}\right]dx \\
+ \ & C_2\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{4}}} u^4dx. \qquad (1.114)
\end{aligned}
$$

Escolhendo $C_3 = \max\{C_1, C_2\}$, de (1.113) e (1.114), temos

$$
\begin{aligned}
& -I(t_Ru^+ + s_Ru^-)\Big|_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{4}}} + I(t_Ru_R^+ + s_Ru_R^-)\Big|_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{4}}} \\
\leq \ & C_3\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{4}}} \left[(1+u^2)|\nabla u|^2 + Vu^2 + |u|^{p+1}\right]dx + C_3\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{4}}} u^4dx. \quad (1.115)
\end{aligned}
$$

Notemos que

$$
I(t_Ru^+ + s_Ru^-) = I(t_Ru^+) + I(s_Ru^-) \leq I(u^+) + I(u^-) = I(u). \qquad (1.116)
$$

Logo, de (1.105), (1.115), (1.116), (1.94) e usando a Observação C.1 (após o

Teorema C.26),

$$
\begin{aligned}
c_R^* &\leq I(u) + C_4 \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R}{4}}} [(1+u^2)|\nabla u| + Vu^2 + |u|^{p+1}]dx + C_3 \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R}{4}}} u^4 dx \\
&= I(u) + o(1) \\
&\leq c^* + \varepsilon + o(1),
\end{aligned}
$$

onde $o(1) \to 0$ quando $R \to +\infty$. Assim,

$$\lim_{R \to +\infty} c_R^* \leq c^* + \varepsilon.$$

Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, segue que

$$\lim_{R \to +\infty} c_R^* \leq c^*,$$

provando (ii).

Portanto,

$$\lim_{R \to +\infty} c_R^* = c^*.$$

Analogamente, podemos mostrar (i) e concluir que

$$\lim_{R \to +\infty} c_R^0 = c^0.$$

Com isso finalizamos a demonstração do lema.

■

Lema 1.9 *c_R^0 e c_R^* são atingidos.*

Demonstração: Provemos o resultado para c_R^*.

Fixemos $R > 0$. Como

$$c_R^* = \inf_{S_R^*} I,$$

então existe $(u_n) \subset S_R^*$ tal que

$$I(u_n) \to c_R^* \text{ quando } n \to +\infty.$$

Sendo $I(u_n)$ convergente, $u_n \in S$ e $c^0 = \inf\limits_{S} I$, temos

$$\gamma(u_n) = 0 \quad \text{e} \quad c_0 \leq I(u_n) \leq C_1,$$

para alguma constante $C_1 > 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

De (13) e (21),

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + 2u_n^2|\nabla u_n|^2 dx + V u_n^2 - |u_n|^{p+1}\right) dx = 0 \tag{1.117}$$

e

$$c_0 \le \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}|\nabla u_n|^2 + \frac{1}{2}u_n^2|\nabla u_n|^2 dx + \frac{1}{2}V u_n^2 - \frac{1}{p+1}|u_n|^{p+1}\right) dx \le C_1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Notemos que

$$c_0 \le I(u_n) = I(u_n) + 0 = I(u_n) + \gamma(u_n) \le C_1,$$

o que implica

$$c_0 \le \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{3}{2}|\nabla u_n|^2 + \frac{5}{2}u_n^2|\nabla u_n|^2 + \frac{3}{2}V u_n^2 - \frac{p+2}{p+1}|u_n|^{p+1}\right) dx \le C_1, \tag{1.118}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

De (1.117),

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + 2u_n^2|\nabla u_n|^2 + V u_n^2\right) dx. \tag{1.119}$$

Segue de (1.118) e (1.119) que

$$\begin{aligned} c_0 &\le \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{p+2}{p+1}\right)|\nabla u_n|^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{p+2}{p+1}\right) u_n^2|\nabla u_n|^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{p+2}{p+1}\right) V u_n^2\right] dx \\ &\le C_1. \end{aligned} \tag{1.120}$$

Como

$$\frac{3}{2} - \frac{p+2}{p+1} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{5}{2} - \frac{p+2}{p+1} > 0$$

para $p + 1 \ge 4$, podemos concluir de (1.120) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx, \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2|\nabla u_n|^2 dx \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} V u_n^2 dx$$

são limitados e de (1.119) $\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx$ também é limitado.

Em particular,

$$\int_{B_R} |\nabla u_n|^2 dx, \int_{B_R} u_n^2|\nabla u_n|^2 dx, \int_{B_R} V u_n^2 dx \text{ e } \int_{B_R} |u_n|^{p+1} dx$$

são limitados.

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \in S_R^* = S^* \cap H_0^1(B_R). \tag{1.121}$$

Daí, $u_n \in S^*$ e, consequentemente,

$$u_n^{\pm} \in S, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.122}$$

Além disso, de (1.121),

$$u_n \in H_0^1(B_R),$$

de onde segue que

$$|u_n| \in H_0^1(B_R).$$

Desde que

$$u_n^+ = \frac{1}{2}(|u_n| + u_n) \text{ e } u_n^- = \frac{1}{2}(|u_n| - u_n),$$

temos

$$u_n^{\pm} \in H_0^1(B_R), \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.123}$$

Assim, de (1.122) e de (1.123),

$$u_n^{\pm} \in S \cap H_0^1(B_R) = S_R. \tag{1.124}$$

De (1.122) e da definição de c_0, obtemos

$$c_0 \leq I(u_n^{\pm}) \quad \text{e} \quad \gamma(u_n^{\pm}) = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Temos ainda

$$c_0 \leq I(u_n) = I(u_n^+) + I(u_n^-) \leq C_1.$$

Logo,

$$c_0 \leq I(u_n^+), I(u_n^-) \leq C_1.$$

Desta forma, ficamos com

$$c_0 \leq I(u_n^{\pm}) \leq C_1 \quad \text{e} \quad \gamma(u_n^{\pm}) = 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

e podemos afirmar que

$$\int_{B_R} |\nabla u_n^{\pm}|^2 dx, \int_{B_R} (u_n^{\pm})^2 |\nabla u_n^{\pm}|^2 dx, \int_{B_R} V(u_n^{\pm})^2 dx \text{ e } \int_{B_R} |u_n^{\pm}|^{p+1} dx$$

são limitados.

Observemos que

$$c_0 \leq I(u_n^{\pm}) \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^{\pm}|^2 + 2\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^{\pm})^2 |\nabla u_n^{\pm}|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(u_n^{\pm})^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n^{\pm}|^{p+1}$$

ou seja,

$$c_0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u_n^{\pm}|^{p+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como estamos em domínio limitado, podemos assumir, pelos teoremas de imersão de Sobolev, que a menos de subsequências, existe $u \in H_0^1(B_R)$ satisfazendo

(i) $u_n^{\pm} \to u^{\pm} \neq 0$ em $L^{p+1}(B_R)$;

(ii)$u_n^{\pm} \rightharpoonup u^{\pm}$ em $H_0^1(B_R)$;

(iii)$\nabla(u_n^{\pm})^2 \rightharpoonup \nabla(u^{\pm})^2$ em $L^2(B_R)$.

De fato, temos $\int_{B_R} |\nabla u_n|^2 dx$ limitada. Logo, (u_n) é limitada em $H_0^1(B_R)$. Sendo $H_0^1(B_R)$ reflexivo, a menos de subsequências, existe $u \in H_0^1(B_R)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \quad em \quad H_0^1(B_R). \tag{1.125}$$

Daí, pelo Teorema C.19, em particular,

$$u_n \to u \text{ em } L^2(B_R),$$

e, usando o Teorema C.15, a menos de subsequências,

$$u_n(x) \to u(x) \quad q.t.p. \quad em \quad B_R. \tag{1.126}$$

Consequentemente,

$$u_n^2(x) \to u^2(x) \quad q.t.p. \quad em \quad B_R. \tag{1.127}$$

Mostremos agora que (u_n^2) é limitada em $H^1(B_R)$.

Como $p+1 \geq 4$ e estamos em domínio limitado, então, pelo Teorema C.28,

$$L^{p+1}(B_R) \hookrightarrow L^4(B_R).$$

Logo, existe $C_2 > 0$ tal que

$$\left(\int_{B_R} |u_n|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \leq C_2 \left(\int_{B_R} |u_n|^{p+1} dx\right)^{\frac{1}{p+1}},$$

de onde segue que (u_n^2) é limitada em $L^2(B_R)$, já que $\int_{B_R} |u_n|^{p+1}dx$ é limitada.

Temos ainda

$$|\nabla(u_n^2)|^2_{L^2(B_R)} = \int_{B_R} |\nabla(u_n^2)|^2 dx = 4\int_{B_R} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx.$$

Sendo $\int_{B_R} u_n^2 |\nabla u|^2 dx$ limitada, concluimos que $|\nabla(u_n^2)|_{L^2(B_R)}$ é limitada.

Assim, (u_n^2) é limitada em $H^1(B_R)$. A menos de subsequências, existe $v \in H^1(B_R)$ tal que

$$u_n^2 \rightharpoonup v \text{ em } H^1(B_R).$$

Daí, usando imersão compacta,

$$u_n^2 \to v \text{ em } L^2(B_R),$$

implicando que, a menos de subsequências,

$$u_n^2(x) \to v(x) \quad q.t.p. \quad em \quad B_R. \tag{1.128}$$

De (1.127) e (1.128),

$$v(x) = u^2(x) \text{ q. t. p. em } B_R.$$

Assim,

$$u^2 \in H^1(B_R),$$

mostrando que $u \in X$ e

$$u_n^2 \rightharpoonup u^2 \text{ em } H^1(B_R).$$

Pelo Teorema C.19,

$$u_n^2 \to u^2 \text{ em } L^{\frac{p+1}{2}}(B_R).$$

Logo, usando o Teorema C.15, a menos de subsequências, existe $g \in L^{\frac{p+1}{2}}(B_R)$ tal que

$$|u_n^2(x)| \leq g, \forall x \in B_R.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} |u_n(x) - u(x)|^{p+1} &\leq [|u_n(x)| + |u(x)|]^{p+1} \\ &\leq 2^{p+1}\left[|u_n(x)|^{p+1} + |u(x)|^{p+1}\right] \\ &\leq 2^{p+1}\left[g^{\frac{p+1}{2}} + |u(x)|^{p+1}\right], \end{aligned}$$

isto é,

$$|u_n(x) - u(x)|^{p+1} \leq \tilde{g},$$

onde

$$\tilde{g} = 2^{p+1}\left[g^{\frac{p+1}{2}} + |u(x)|^{p+1}\right].$$

Desde que $g \in L^{\frac{p+1}{2}}(B_R)$ e $u \in L^{p+1}(B_R)$, temos $\tilde{g}$ integrável.

Por outro lado, dado $x \in \mathbb{R}^N$, de (1.126), obtemos

$$|u_n(x) - u(x)|^{p+1} \to 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$u_n \to u \quad em \quad L^{p+1}(B_R).$$

Agora, sabendo que $(u_n^{\pm})$ é limitada em $H_0^1(B_R)$, a menos de subsequências, existem $v_1, v_2 \in H_0^1(B_R)$ tais que

$$u_n^+ \rightharpoonup v_1 \quad \text{e} \quad u_n^- \rightharpoonup v_2 \text{ em } H_0^1(B_R).$$

Usando imersão compacta,

$$u_n^+ \to v_1 \;\; e \;\; u_n^- \to v_2 \;\; em \;\; L^2(B_R). \tag{1.129}$$

Desde que $u_n \to u$ em $L^{p+1}(B_R)$ e, pelo Teorema C.27, a aplicação $h^{\pm} : L^{p+1}(B_R) \to L^{p+1}(B_R)$, dada por $h^{\pm}(u) = u^{\pm}$, é contínua, segue que

$$u_n^{\pm} \to u^{\pm} \quad \text{em} \quad L^{p+1}(B_R).$$

Como $L^{p+1}(B_R) \hookrightarrow L^2(B_R)$, então

$$u_n^{\pm} \to u^{\pm} \ \ em \ \ L^2(B_R). \tag{1.130}$$

De (1.129), (1.130) e pela unicidade do limite,

$$u^+ = v_1 \quad \text{e} \quad u^- = v_2.$$

Assim, a menos de subsequências, ficamos com

$$u_n^{\pm} \rightharpoonup u^{\pm} \quad \text{em} \quad H_0^1(B_R) \quad \text{e} \quad u_n^{\pm} \to u^{\pm} \quad \text{em} \quad L^{p+1}(B_R),$$

mostrando (i) e (ii).

Vamos provar (iii). Temos

$$(u_n^2) \subset H^1(B_R) \quad \text{e} \quad u^2 \in H^1(B_R).$$

Por definição de derivada fraca,

$$-\int_{B_R} u_n^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_{B_R} \frac{\partial (u_n^2)}{\partial x_i} \varphi dx \quad \text{e} \quad -\int_{B_R} u^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_{B_R} \frac{\partial (u^2)}{\partial x_i} \varphi dx,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(B_R)$.

Note que

$$\left| \frac{\partial (u_n^2)}{\partial x_i} \right|_{L^2(B_R)} \leq |\nabla (u_n^2)|_{L^2(B_R)}, \forall i = 1, 2, ..., N \quad \text{e} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sendo $|\nabla (u_n^2)|_{L^2(B_R)}$ limitada, segue que $\left(\dfrac{\partial (u_n^2)}{\partial x_i} \right)$ é limitada em $L^2(B_R)$, para todo $i = 1, 2, ..., N$. Desde que $L^2(B_R)$ é reflexivo, para cada $i \in \{1, 2, ..., N\}$, a menos de subsequências, existe v_i tal que

$$\frac{\partial (u_n^2)}{\partial x_i} \rightharpoonup v_i \quad \text{em} \quad L^2(B_R).$$

Dada $\varphi \in C_0^\infty(B_R)$, temos

$$\varphi \in L^2(B_R).$$

Consideremos o funcional $F : L^2(B_R) \to \mathbb{R}$, dado por

$$F(v) = \langle v, \varphi \rangle_{L^2(B_R)} = \int_{B_R} v \varphi dx.$$

Daí, $F \in (L^2(B_R))'$. Consequentemente, usando definição de convergência fraca,

$$F\left(\frac{\partial(u_n^2)}{\partial x_i}\right) \to F(v_i),$$

o que implica

$$\int_{B_R} \frac{\partial(u_n^2)}{\partial x_i}\varphi dx \to \int_{B_R} v_i \varphi dx. \tag{1.131}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{B_R} \frac{\partial(u_n^2)}{\partial x_i}\varphi dx - \int_{B_R} \frac{\partial(u^2)}{\partial x_i}\varphi dx\right| &= \left|\int_{B_R} u_n^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx - \int_{B_R} u^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx\right| \\
&\leq \int_{B_R} |u_n^2 - u^2| \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| dx \\
&\leq C_3 \int_{B_R} |u_n^2 - u^2| dx,
\end{aligned} \tag{1.132}$$

onde C_3 é uma constante positiva satisfazendo

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| \leq C_3,$$

que existe pois $\varphi \in C_0^\infty(B_R)$.

Como

$$u_n^2 \rightharpoonup u^2 \text{ em } H^1(B_R),$$

então, por imersão compacta,

$$u_n^2 \to u^2 \text{ em } L^2(B_R),$$

e, por imersão contínua,

$$u_n^2 \to u^2 \text{ em } L^1(B_R).$$

Logo,

$$\int_{B_R} |u_n^2 - u^2| dx \to 0. \tag{1.133}$$

De (1.132) e (1.133), concluimos que

$$\int_{B_R} \frac{\partial(u_n^2)}{\partial x_i}\varphi dx \to \int_{B_R} \frac{\partial(u^2)}{\partial x_i}\varphi dx. \tag{1.134}$$

Assim, de (1.131), (1.134) e pela unidade do limite, temos

$$\int_{B_R} \frac{\partial(u^2)}{\partial x_i}\varphi dx = \int_{B_R} v_i \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(B_R).$$

Portanto, pelo Teorema C.21 (Lema Fundamental das Distribuições),

$$\frac{\partial(u^2)}{\partial x_i} = v_i, \forall i = 1, 2, ..., N,$$

e, consequentemente,

$$\frac{\partial(u_n^2)}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial(u^2)}{\partial x_i}, \forall i \in 1, ..., N \text{ em } L^2(B_R),$$

implicando que

$$\nabla(u_n^2) \rightharpoonup \nabla(u^2) \text{ em } L^2(B_R),$$

mostando (iii).

De (i), existem $(u_{n_j}^{\pm}) \subset (u_n^{\pm})$ e $g \in L^{p+1}(B_R)$ tais que

$$u_{n_j}^{\pm}(x) \to \; u^{\pm}(x) \text{ q. t. p. em } B_R \quad \text{e} \quad |u_{n_j}^{\pm}(x)| \leq g.$$

Daí

$$[u_{n_j}^{\pm}(x)]^{p+1} \to [u^{\pm}(x)]^{p+1} \text{ q. t. p. em } B_R \quad \text{e} \quad |u_{n_j}^{\pm}(x)|^{p+1} \quad \leq g^{p+1} \quad \in L^1(B_R).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, podemos concluir que, a menos de subsequências:

$$\int_{B_R} |u_n^{\pm}|^{p+1} dx \to \int_{B_R} |u^{\pm}|^{p+1} dx. \tag{1.135}$$

Seja $f : H_0^1(B_R) \to \mathbb{R}$ o funcional dado por

$$f(v) = \int_{B_R} |\nabla v|^2 dx.$$

Então, f é semi–contínua inferiormente (pois f é contínua) e convexa. Logo, pelo Teorema C.13, f é fracamente semi–contínua inferiormente. De (ii), segue que

$$\liminf_{n \to +\infty} f(u_n^{\pm}) \geq f(u^{\pm}),$$

ou seja,

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_{B_R} |\nabla u_n^{\pm}|^2 dx \geq \int_{B_R} |\nabla u^{\pm}|^2 dx. \tag{1.136}$$

Seja agora h a função definida por

$$h(v) = v^2, v \in H_0^1(B_R).$$

Notemos que h é contínua e convexa. Logo, a função H dada por

$$H(v) = Vv^2, v \in H_0^1(B_R)$$

também é contínua e convexa.

De (ii), segue que

$$\liminf_{n\to+\infty} H(u_n^\pm) \geq H(u^\pm),$$

ou seja,

$$\liminf_{n\to+\infty} V(u_n^\pm)^2 \geq V(u^\pm)^2.$$

Daí,

$$\int_{B_R} \liminf_{n\to+\infty} V(u_n^\pm)^2 dx \geq \int_{B_R} V(u^\pm)^2 dx. \tag{1.137}$$

Pelo Teorema C.7 (Lema de Fatou), temos

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{B_R} V(u_n^\pm)^2 dx \geq \int_{B_R} \liminf_{n\to+\infty} V(u_n^\pm)^2 dx. \tag{1.138}$$

De (1.137) e (1.138), obtemos

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{B_R} V(u_n^\pm)^2 dx \geq \int_{B_R} V(u^\pm)^2 dx. \tag{1.139}$$

De maneira análoga, definindo a função

$$G(v) = |v|^2$$

e usando (iii) obtemos

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{B_R} |\nabla(u_n^\pm)^2|^2 dx \geq \int_{B_R} |\nabla(u^\pm)^2|^2 dx.$$

Desde que

$$|\nabla(u_n^\pm)^2|^2 = 4(u_n^\pm)^2|\nabla(u_n^\pm)|^2 \quad \text{e} \quad |\nabla(u^\pm)^2|^2 = 4(u^\pm)^2|\nabla(u^\pm)|^2,$$

podemos concluir que

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{B_R} (u^\pm)^2|\nabla(u_n^\pm)|^2 dx \geq \int_{B_R} (u^\pm)^2|\nabla(u^\pm)|^2 dx. \tag{1.140}$$

Assim, das propriedades de limite inferior, de (1.135), (1.136), (1.139) e (1.140), temos

$$\liminf_{n\to+\infty} \gamma(u_n^\pm) \geq \gamma(u^\pm). \tag{1.141}$$

Como $u_n^\pm \in S$, então

$$\gamma(u_n^{\pm}) = 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

implicando que

$$\liminf_{n\to+\infty} \gamma(u_n^{\pm}) = 0. \tag{1.142}$$

De (1.141) e (1.142), ficamos com

$$\gamma(u^{\pm}) \leq 0.$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u^{\pm}|^2 + 2(u^{\pm})^2|\nabla u^{\pm}|^2 + V(u^{\pm})^2 - |u^{\pm}|^{p+1}\right] dx \leq 0.$$

Logo,

$$2\int_{\mathbb{R}^N} (u^{\pm})^2|\nabla u^{\pm}|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u^{\pm}|^{p+1} dx < 0,$$

isto é,

$$2\int_{\mathbb{R}^N} (u^{\pm})^2|\nabla u^{\pm}|^2 dx < \int_{\mathbb{R}^N} |u^{\pm}|^{p+1} dx.$$

Pelo Lema 1.2, existem $t, s > 0$ tais que

$$tu^+, \quad su^- \in S.$$

Sejam

$$\tilde{u} = tu^+ - su^- \quad \text{e} \quad \tilde{u}_n = tu_n^+ - su_n^-.$$

Notemos que

$$\tilde{u}_n^+ = tu_n^+, \quad \tilde{u}_n^- = su_n^- \quad \text{e} \quad \tilde{u}_n, \tilde{u} \in H_0^1(B_R).$$

Além disso,

$$\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u} \ \ em \ \ H_0^1(B_R). \tag{1.143}$$

De fato, dado $\phi \in (H_0^1(B_R))'$, temos

$$\phi(\tilde{u}_n) = \phi(tu_n^+ - su_n^-) = t\phi(u_n^+) - s\phi(u_n^-)$$

e

$$\phi(\tilde{u}) = \phi(tu^+ - su^-) = t\phi(u^+) - s\phi(u^-).$$

De (ii),

$$\phi(u_n^+) \to \phi(u^+) \text{ e } \phi(u_n^-) \to \phi(u^-),$$

o que implica

$$\phi(\tilde{u}_n) \to \phi(\tilde{u}), \forall \phi \in (H_0^1(B_R))',$$

mostrando que

$$\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u} \quad \text{em} \quad H_0^1(B_R).$$

Assim, podemos afirmar que

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{B_R} V\tilde{u}_n^2 dx \geq \int_{B_R} V\tilde{u}^2 dx \tag{1.144}$$

e

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{B_R} |\nabla \tilde{u}_n|^2 dx \geq \int_{B_R} |\nabla \tilde{u}|^2 dx. \tag{1.145}$$

De (iii), temos também

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{B_R} \tilde{u}_n^2 |\nabla \tilde{u}_n|^2 dx \geq \int_{B_R} \tilde{u}^2 |\nabla \tilde{u}|^2 dx. \tag{1.146}$$

e de (i),

$$\int_{B_R} |\tilde{u}_n|^{p+1} dx \to \int_{B_R} |\tilde{u}|^{p+1} dx. \tag{1.147}$$

Das propriedades de limite inferior e de (1.144) - (1.147), obtemos

$$I(\tilde{u}) \leq \liminf_{n\to+\infty} I(\tilde{u}_n). \tag{1.148}$$

Mas

$$I(\tilde{u}_n) = I(\tilde{u}_n^+ - \tilde{u}_n^-) = I(tu_n^+ - su_n^-) = I(tu_n^+) + I(su_n^-) \leq I(u_n^+) + I(u_n^-) = I(u_n).$$

Logo,

$$\liminf_{n\to+\infty} I(\tilde{u}_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} I(u_n) = \lim_{n\to+\infty} I(u_n) = c_R^*,$$

ou seja,

$$\liminf_{n\to+\infty} I(\tilde{u}_n) \leq c_R^*. \tag{1.149}$$

De (1.148) e (1.149),

$$I(\tilde{u}) \leq c_R^*. \tag{1.150}$$

Por outro lado,

$$\tilde{u}^+ = tu^+ \quad \text{e} \quad \tilde{u}^- = tu^-.$$

Então,

$$\gamma(\tilde{u}^+) = \gamma(\tilde{u}^-) = 0 \quad \text{e} \quad \gamma(\tilde{u}) = \gamma(\tilde{u}^+) - \gamma(\tilde{u}^-) = 0,$$

implicando que

$$\tilde{u}, \tilde{u}^\pm \in S.$$

Daí,

$$\tilde{u} \in S^*.$$

Como $\tilde{u} \in H_0^1(B_R)$, segue que

$$\tilde{u} \in S_R^* = S^* \cap H_0^1(B_R).$$

Assim,

$$c_R^* = \inf_{S_R^*} I \leq I(\tilde{u}). \tag{1.151}$$

Portanto, de (1.150) e (1.151),

$$c_R^* = I(\tilde{u}),$$

mostrando o lema para c_R^*.

Analogamente, podemos provar que c_R^0 é atingido.

■

Lema 1.10 *Suponha que $u \in S_R$ satisfaz $I(u) = c_R^0$ ou $u \in S_R^*$ com $I(u) = c_R^*$. Então, u é solução fraca da equação quasilinear no domínio limitado B_R, isto é, para toda $\phi \in C_0^\infty(B_R)$,*

$$\int_{B_R} [(1+u^2)\nabla u \nabla \phi + u|\nabla u|^2 \phi + V u \phi - |u|^{p-1} u \phi] dx = 0. \tag{1.152}$$

Além disso, a equação (1.152) vale para toda $\phi \in X \cap H_0^1(B_R)$ com a propriedade

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla \phi|^2 dx < +\infty \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \phi^2 dx < +\infty.$$

Demonstração: A demonstração é a mesma do Lema 1.7.

■

Observação 1.4 *Os dois últimos resultados mostram a existência de solução fraca para a equação quasilinear no domínio limitado B_R. De fato, pelo Lema 1.9, para cada $R > 0$, existem $u_R \in S$ e u_R^* tais que $I(u_R) = c_R^0$ e $I(u_R^*) = c_R^*$. Pelo Lema 1.10, $u_R \in S$ e u_R^* são soluções fracas da equação quasilinear em B_R.*

No que segue, precisamos estudar o problema quasilinear obtido substituindo $V(x)$ por V_∞. Para $u \in X$, seja

$$I^\infty(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(1+u^2)|\nabla u|^2dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}dx. \tag{1.153}$$

Temos ainda

$$\gamma^\infty(u) = \int_{\mathbb{R}^N}(1+2u^2)|\nabla u|^2dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}dx; \tag{1.154}$$

$$S^\infty = \{u \in X; \gamma^\infty(u) = 0, u \neq 0\}; \tag{1.155}$$

e

$$c^\infty = \inf_{u \in S^\infty} I^\infty(u). \tag{1.156}$$

Para o domínio limitado B_R, definimos

$$S_R^\infty = S^\infty \cap H_0^1(B_R) \;\; e \;\; c_R^\infty = \inf_{u \in S_R^\infty} I^\infty(u). \tag{1.157}$$

Observemos que, para o problema envolvendo V_∞, valem resultados análogos aos apresentados nas Seções 1.1 e 1.2. Em particular, $c_R^\infty \to c^\infty$, quando $R \to +\infty$, pelo Lema 1.8, e c_R^∞ é atingido, pelo Lema 1.9. Assim, por um resultado análogo ao Lema 1.10, o problema obtido substituindo $V = V(x)$ por V_∞ possui solução no domínio limitado B_R.

Capítulo 2

Existência de Solução Positiva

Neste capítulo, apresentaremos a demonstração do **Teorema 0.1**, que mostra a existência de uma solução positiva para a equação (1). Para isto, precisamos do resultado a seguir.

Lema 2.1 *Seja $u_R \in S_R$ uma solução da equação quasilinear no domínio limitado B_R, isto é,*

$$\int_{B_R} \left[\left(1 + u_R^2\right) \nabla u_R \nabla \phi + u_R |\nabla u_R|^2 \phi + V u_R \phi - |u_R|^{p-1} u_R \phi \right] dx = 0, \tag{2.1}$$

para toda $\phi \in X \cap H_0^1(B_R)$ com a propriedade

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_R^2 |\nabla \phi|^2 dx < +\infty \ \ e \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_R|^2 \phi^2 dx < +\infty.$$

Suponha que

$$\int_{B_R} \left(1 + u_R^2\right) |\nabla u_R|^2 dx, \int_{B_R} V u_R^2 dx \quad e \quad \int_{B_R} |u_R|^{p+1} dx. \tag{2.2}$$

são limitados. Assuma para uma subsequência $R_n \to +\infty$,

$$\int_{B_{R_n}} |u_n|^{p+1} dx \to A \in (0, +\infty), \tag{2.3}$$

onde $u_n = u_{R_n}$. Então, se

$$\liminf_{n \to +\infty} I(u_n) < c^0 + c^\infty, \tag{2.4}$$

existe $(x_n) \in \mathbb{R}^N$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $r > 0$ satisfazendo

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_{B_r(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq A - \varepsilon.$$

Demonstração: Observamos inicialmente que, pela obtenção das funções u_R, temos $u_R = 0$ em $\mathbb{R}^N \backslash B_R$. Disto e de (2.2), segue que (u_n) é limitado em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Seja $w_n = u_n^2$ e defina

$$\rho_n = \frac{A|w_n|^{\frac{p+1}{2}} \chi_{B_{R_n}}}{\int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{\frac{p+1}{2}} \chi_{B_{R_n}} dx}.$$

Notemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n dx = A.$$

Vamos mostrar que a nulidade no **Teorema C.23 (Princípio de Concentração - Compacidade)** não pode ocorrer. Suponhamos que existe $(\rho_{n_k}) \subset (\rho_n)$ tal que

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} \rho_{n_k}(x) dx = 0, \forall r \in (0, +\infty).$$

Vejamos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(y)} \rho_{n_k}(x) dx &= \int_{B_r(y)} \frac{A|w_{n_k}|^{\frac{p+1}{2}} \chi_{B_{R_{n_k}}}}{\int_{\mathbb{R}^N} |w_{n_n}|^{\frac{p+1}{2}} \chi_{B_{R_{n_k}}} dx} dx \\
&= \frac{A}{\int_{B_{R_{n_k}}} |w_{n_k}|^{\frac{p+1}{2}} dx} \int_{B_R(y)} |w_{n_k}|^{\frac{p+1}{2}} \chi_{B_{R_{n_k}}} dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} \rho_{n_k}(x) dx = \frac{A}{\int_{B_{R_{n_k}}} |w_{n_k}|^{\frac{p+1}{2}} dx} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |w_{n_k}|^{\frac{p+1}{2}} \chi_{B_{R_{n_k}}} dx,$$

o que implica

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{k\to+\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} \rho_{n_k}(x) dx \\
&= \lim_{k\to+\infty} \frac{A}{\int_{B_{R_{n_k}}} |w_{n_k}|^{\frac{p+1}{2}} dx} \lim_{k\to+\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |w_{n_k}|^{\frac{p+1}{2}} \chi_{B_{R_{n_k}}} dx \\
&= \lim_{k\to+\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |w_{n_k}|^{\frac{p+1}{2}} \chi_{B_{R_{n_k}}} dx.
\end{aligned}$$

Daí, pelo Teorema C.22, observando que (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$w_{n_k} \chi_{B_{R_{n_k}}} \to 0 \text{ em } L^q(\mathbb{R}^N),$$

para $2 < q < 2^*$, e assim,

$$\int_{B_{R_{n_k}}} |u_{n_k}|^{p+1}dx \to 0,$$

para $4 < p+1 < 2.2^*$, o que é um absurdo!

Vamos supor que vale a dicotomia no Teorema C.23. Então, para alguma subsequência de (ρ_n), que continuaremos denotando por (ρ_n), existe $\alpha \in (0, A)$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existem $n_0 \geq 1$ e $\rho_n^1, \rho_n^2 \in L^1_+(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo para $n \geq n_0$,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n^1 dx - \alpha\right| \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad \left|\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n^2 dx - (A-\alpha)\right| \leq \varepsilon.$$

Dado $\varepsilon > 0$, escolhamos r_ε e $(x_n) \in \mathbb{R}^N$ como na demonstração do Teorema 4.1 e definamos

$$\rho_n^1 = \rho_n \chi_{B_{r_\varepsilon}(x_n)}.$$

Em particular, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n^1 dx \geq \alpha - \varepsilon,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \chi_{B_{r_\varepsilon}(x_n)} dx = \int_{B_{r_\varepsilon}(x_n)} \rho_n dx \geq \alpha - \varepsilon.$$

Logo,

$$\int_{B_{r_\varepsilon}(x_n)} \frac{A|w_n|^{\frac{p+1}{2}} \chi_{B_{R_n}}}{\int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{\frac{p+1}{2}} \chi_{B_{R_n}} dx} dx \geq \alpha - \varepsilon,$$

implicando que

$$\begin{aligned}
\int_{B_{r_\varepsilon}(x_n)} |w_n|^{\frac{p+1}{2}} dx &\geq \int_{B_{r_\varepsilon}(x_n)} |w_n|^{\frac{p+1}{2}} \chi_{B_{R_n}} dx \\
&\geq \frac{\alpha}{A} \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{\frac{p+1}{2}} \chi_{B_{R_n}} dx - \frac{\varepsilon}{A} \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{\frac{p+1}{2}} \chi_{B_{R_n}} dx.
\end{aligned}$$

Para $r \geq r_\varepsilon$,

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_{B_r(x_n)} |w_n|^{\frac{p+1}{2}} dx \quad \geq \quad \alpha - \varepsilon.$$

Como $\alpha \in (0, A)$, então $\dfrac{\alpha}{A} \in (0,1)$. Seja $\beta = \dfrac{\alpha}{A}$. Daí, $\beta \in (0,1), \alpha = \beta A$ e podemos escrever

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_{B_r(x_n)} |w_n|^{\frac{p+1}{2}} dx \quad \geq \quad \beta A - \varepsilon,$$

isto é,

$$\liminf_{n\to+\infty}\int_{B_r(x_n)}|u_n|^{p+1}dx \quad\geq\quad \beta A-\varepsilon.$$

Temos ainda

$$\rho_n^2=\rho_n\chi_{\mathbb{R}^N\backslash B_{r_\varepsilon}(x_n)}.$$

Assim, de maneira análoga, obtemos para $r'\geq r$,

$$\liminf_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{r'}(x_n)}|u_n|^{p+1}dx \quad\geq\quad (A-\alpha)-\varepsilon=(1-\beta)A-\varepsilon.$$

Vamos provar que, neste caso,

$$\liminf_{n\to+\infty}I(u_n)\geq c^0+c^\infty.$$

Usando propriedades de limite inferior, a menos de subsequência, podemos escolher $\varepsilon_n\to 0$ e $r_n'\geq r_n\to+\infty$ tal que

$$\int_{B_{r_n}(x_n)}|u_n|^{p+1}dx\geq\beta A-\varepsilon_n \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{r_n'}(x_n)}|u_n|^{p+1}dx\geq(1-\beta)A-\varepsilon_n.$$

Daí,

$$\int_{B_{r_n}(x_n)}|u_n|^{p+1}dx+\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{r_n'}(x_n)}|u_n|^{p+1}dx\geq A-2\varepsilon_n.$$

Logo, para $r_n'=4r_n$,

$$\begin{aligned}\int_{B_{4r_n}(x_n)\backslash B_{r_n}(x_n)}|u_n|^{p+1}dx &= \int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p+1}dx\\ &- \left[\int_{B_{r_n}(x_n)}|u_n|^{p+1}dx+\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{4r_n}(x_n)}|u_n|^{p+1}dx\right]\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p+1}dx-A+2\varepsilon_n.\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{B_{4r_n}(x_n)\backslash B_{r_n}(x_n)}|u_n|^{p+1}dx=o(1). \tag{2.5}$$

Seja ξ a função corte dada por

$$\xi(s)=\begin{cases}0, & \text{se} \quad s\leq 1 \text{ ou } s\geq 4\\ 1, & \text{se} \quad 2\leq s\leq 3\end{cases}$$

e $|\xi'(s)|\leq 2, \forall s\in\mathbb{R}$.

Fixemos $n\in\mathbb{N}$ e definamos

$$\phi_n(x) = \xi\left(\frac{|x - x_n|}{r_n}\right)u_n(x).$$

Temos $\phi_n \in X \cap H_0^1(B_{R_n})$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \phi_n^2 dx < +\infty \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla \phi_n|^2 dx < +\infty.$$

De fato, para provar que $\phi_n \in H_0^1(B_{R_n})$, basta usar um raciocínio análogo ao usado na demonstração do Lema 1.8. Mostremos que $\phi_n \in X$.

Notemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\phi_n^2\right)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \xi^4 u_n^4 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} u_n^4 dx < +\infty.$$

Logo, $\phi_n^2 \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Temos ainda

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi}{\partial x_i} u_n + \xi \frac{\partial u_n}{\partial x_i}, \tag{2.6}$$

implicando que

$$\left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x_i}\right)^2 \leq 2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\right)^2 u_n^2 + 2\xi^2 \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)^2, \tag{2.7}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \phi_n^2}{\partial x_i}\right) &= 4\left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x_i}\right)^2 \phi_n^2 \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x_i}\right)^2 \\
&\leq 8\xi^2 u_n^4 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\right)^2 + 8\xi^4 u_n^2 \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)^2 \\
&\leq C_1 \left[u_n^4 + u_n^2 \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)^2\right],
\end{aligned}$$

para alguma constante $C_1 > 0$.

Como $u \in X \subset L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\partial \phi_n^2}{\partial x_i}\right) dx < +\infty,$$

mostrando que $\dfrac{\partial \phi_n^2}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Logo, $\phi_n^2 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e, consequentemente, $\phi_n^2 \in X$.

Observemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \phi_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \xi^2 u_n^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 u_n^2 dx.$$

Como $u \in X$, podemos afirmar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \phi_n^2 dx < +\infty$$

Temos, de (2.7),

$$|\nabla \phi_n|^2 \leq 2|\nabla \xi|^2 u_n^2 + 2\xi^2 |\nabla u_n|^2. \tag{2.8}$$

Logo, de (2.8),

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla \phi_n|^2 dx &\leq 2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \xi|^2 u_n^4 dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} \xi^2 |\nabla u_n|^2 u_n^2 dx \\ &\leq C_2 \int_{\mathbb{R}^N} u_n^4 dx + C_2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 u_n^2 dx.\end{aligned}$$

Como $u \in X \subset L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla \phi_n|^2 dx < +\infty.$$

Substituindo ϕ_n em (2.1) e sabendo que $u_n = 0$ em $\mathbb{R}^N \backslash B_{R_n}$ e $\phi_n = 0$ em $\big(\mathbb{R}^N \backslash B_{4r_n}(x_n)\big) \cap B_{r_n}(x_n)$, segue que

$$\begin{aligned}0 &= \int_{B_{R_n}} \left[\left(1+u_n^2\right) \nabla u_n \nabla \phi_n + u_n |\nabla u_n|^2 \phi_n + V u_n \phi_n - |u_n|^{p-1} u_n \phi_n\right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(1+u_n^2\right) \nabla u_n \nabla \phi_n + u_n |\nabla u_n|^2 \phi_n + V u_n \phi_n - |u_n|^{p-1} u_n \phi_n\right] dx \\ &= \int_{C_n} \left[\left(1+u_n^2\right) \nabla u_n \nabla \phi_n + u_n |\nabla u_n|^2 \phi_n + V u_n \phi_n - |u_n|^{p-1} u_n \phi_n\right] dx,\end{aligned} \tag{2.9}$$

onde $C_n = B_{4r_n}(x_n) \backslash B_{r_n}(x_n)$.

De (2.6), obtemos

$$\nabla u_n \nabla \phi_n = u_n \nabla \xi \nabla u_n + \xi |\nabla u_n|^2. \tag{2.10}$$

Observemos ainda que

$$|\nabla \xi| = \frac{1}{r_n} |\xi'| \leq \frac{2}{r_n},$$

e daí, usando o fato de $|u_n||\nabla u_n| \leq \frac{u_n^2}{2} + \frac{|\nabla u_n|^2}{2}$, temos

$$\begin{aligned}\int_{C_n} (1+u_n^2) u_n \nabla \xi \nabla u_n dx &\leq \int_{C_n} (1+u_n^2)|u_n||\nabla \xi||\nabla u_n| dx \\ &\leq \frac{2}{r_n} \int_{C_n} (1+u_n^2)|u_n||\nabla u_n| dx \\ &\leq \frac{1}{r_n} \int_{C_n} (1+u_n^2) u_n^2 dx + \int_{C_n} (1+u_n^2) |\nabla u_n|^2 dx.\end{aligned}$$

Desde que $\int_{C_n}(1+u_n^2)u_n^2dx$ e $\int_{C_n}(1+u_n^2)|\nabla u_n|^2dx$ são limitados, segue que

$$\int_{C_n}(1+u_n^2)u_n\nabla\xi\nabla u_n dx = o(1). \tag{2.11}$$

De (2.5), (2.9), (2.10) e (2.11), ficamos com

$$\int_{C_n}\left[(1+2u_n^2)|\nabla u_n|^2\xi + Vu_n^2\xi\right]dx = o(1). \tag{2.12}$$

Notemos agora que

$$\begin{aligned}\int_{C_n}\left[(1+2u_n^2)|\nabla u_n|^2\xi + Vu_n^2\xi\right]dx &\leq \int_{D_n}\left[(1+2u_n^2)|\nabla u_n|^2\xi + Vu_n^2\xi\right]dx \\ &= \int_{D_n}\left[(1+2u_n^2)|\nabla u_n|^2 + Vu_n^2\right]dx, \end{aligned}\tag{2.13}$$

onde $D_n = B_{3r_n}(x_n)\backslash B_{2r_n}(x_n)$.

De (2.5), (2.12) e (2.13), obtemos

$$\int_{B_{3r_n}(x_n)\backslash B_{2r_n}(x_n)}[(1+2u_n^2|\nabla u_n|^2)+Vu_n^2+|u_n|^{p+1}]dx = o(1), \tag{2.14}$$

Consideremos agora a função corte η dada por

$$\eta(s) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad s\geq 3 \\ 1, & \text{se} \quad s\leq 2 \end{cases}$$

e $|\eta'(s)|\leq 2, \forall s\in\mathbb{R}$.

Definamos as funções

$$w_n(x) = \eta\left(\frac{|x-x_n|}{r_n}\right)u_n(x) \quad \text{e} \quad v_n(x) = \left[1-\eta\left(\frac{|x-x_n|}{r_n}\right)\right]u_n(x).$$

Então,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|w_n(x)|^{p+1}dx &\geq \int_{B_{r_n}(x_n)}|w_n(x)|^{p+1}dx \\ &= \int_{B_{r_n}(x_n)}|u_n(x)|^{p+1}dx \\ &\geq \beta A-\varepsilon_n\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|v_n(x)|^{p+1}dx &\geq \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{4r_n}(x_n)}|v_n(x)|^{p+1}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{4r_n}(x_n)}|u_n(x)|^{p+1}dx \\ &\geq (1-\beta)A-\varepsilon_n,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |w_n(x)|^{p+1}dx \geq \beta A - \varepsilon_n \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^N} |v_n(x)|^{p+1}dx \geq (1-\beta)A - \varepsilon_n. \tag{2.15}$$

Temos ainda

$$I(u_n) = I(w_n) + I(v_n) + o(1). \tag{2.16}$$

Para ver isto, observe inicialmente que em $\mathbb{R}^N \backslash B_{3r_n}(x_n)$, temos $\eta = 0$ e daí,

$$w_n = 0 \quad \text{e} \quad v_n = u_n.$$

Em $B_{2r_n}(x_n)$, $\eta = 1$ e

$$w_n = u_n \quad \text{e} \quad v_n = 0.$$

Assim, se $E_n = B_{3r_n}(x_n) \backslash B_{2r_n}(x_n)$, então

$$I(u_n)\Big|_{E_n^C} = I(w_n)\Big|_{E^C} + I(v_n)\Big|_{E^C}.$$

Resta-nos provar

$$I(u_n)\Big|_{E_n} = I(w_n)\Big|_{E_n} + I(v_n)\Big|_{E_n} + o(1).$$

Temos

$$\begin{aligned} V(u_n^2 - w_n^2 - v_n^2) &= V\left(u_n^2 - \eta)^2 u_n^2 - (1-\eta^2)u_n^2\right) \\ &= V u_n^2 \left(1 - \eta^2 - (1-\eta)^2\right). \end{aligned}$$

Notemos que

$$1 - \eta^2 - (1-\eta)^2 = 2(1-\eta)\eta.$$

Logo,

$$0 \leq 1 - \eta^2 - (1-\eta)^2 \leq 2,$$

de onde segue que

$$0 \leq V(u_n^2 - w_n^2 - v_n^2) \leq 2Vu_n^2.$$

Assim,

$$0 \leq \int_{E_n} V(u_n^2 - w_n^2 - v_n^2)dx \leq 2\int_{E_n} Vu_n^2.$$

Temos também

$$
\begin{aligned}
|w_n|^{p+1} + |v_n|^{p+1} &= \eta^{p+1}|u_n|^{p+1}(1-\eta)^{p+1} + |u_n|^{p+1} \\
&= \left[\eta^{p+1} + (1-\eta)^{p+1}\right]|u_n|^{p+1} \\
&\leq [\eta + (1-\eta)]\,|u_n|^{p+1} \\
&= |u_n|^{p+1}.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$0 \leq |u_n|^{p+1} - |w_n|^{p+1} - |v_n|^{p+1},$$

implicando que

$$0 \leq \int_{E_n} \left(|u_n|^{p+1} - |w_n|^{p+1} - |v_n|^{p+1}\right) dx \leq \int_{E_n} |u_n|^{p+1} dx.$$

Observemos agora que

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \frac{\partial \eta}{\partial x_i} u_n + \eta \frac{\partial u_n}{\partial x_i}.$$

Daí,

$$|\nabla w_n|^2 = u^2|\nabla \eta|^2 + \eta^2|\nabla u|^2 - 2u_n\nabla\eta\nabla u_n\eta \leq 2u^2|\nabla\eta|^2 + 2\eta^2|\nabla u|^2.$$

Analogamente, temos

$$|\nabla v_n|^2 \leq 2u_n^2|\nabla\eta|^2 + 2(1-\eta)^2|\nabla u_n|^2.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\left||\nabla u_n|^2 - |\nabla w_n|^2 - |\nabla v_n|^2\right| &\leq |\nabla u_n|^2 + |\nabla w_n|^2 + |\nabla v_n|^2 \\
&\leq 5|\nabla u_n|^2 + 4u_n^2|\nabla\eta|^2,
\end{aligned}
$$

de onde segue que

$$\int_{E_n} \left||\nabla u_n|^2 - |\nabla w_n|^2 - |\nabla v_n|^2\right| dx \leq 5\int_{E_n} |\nabla u_n|^2 dx + C_3 \int_E u_n^2 dx,$$

onde C_3 é uma constante positiva satisfazendo

$$4|\nabla\eta|^2 \leq C_3.$$

Por fim,

$$\begin{aligned}\left|u_n^2|\nabla u_n|^2 - w_n^2|\nabla w_n|^2 - v_n^2|\nabla v_n|^2\right| &\leq u_n^2|\nabla u_n|^2 + w_n^2|\nabla w_n|^2 + v_n^2|\nabla v_n|^2 \\ &\leq u_n^2\left(|\nabla u_n|^2 + |\nabla w_n|^2 + |\nabla v_n|^2\right) \\ &\leq 5u_n^2|\nabla u_n|^2 + 4u_n^4|\nabla \eta|^2.\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{E_n}\left|u_n^2|\nabla u_n|^2 - w_n^2|\nabla w_n|^2 - v_n^2|\nabla v_n|^2\right|dx \leq 5\int_{E_n} u_n^2|\nabla u_n|^2dx + C_3\int_{E_n} u_n^4dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}&\left|I(u_n)\Big|_{E_n} - I(w_n)\Big|_{E_n} - I(v_n)\Big|_{E_n}\right| \\ \leq\ & \frac{1}{2}\int_{E_n}\left||\nabla u_n|^2 - |\nabla w_n|^2 - |\nabla v_n|^2\right|dx + \frac{1}{2}\int_{E_n}\left|u_n^2|\nabla u_n|^2 - w_n^2|\nabla w_n|^2 - v_n^2|\nabla v_n|^2\right|dx \\ +\ & \frac{1}{2}\int_{E_n} V(u_n^2 - w_n^2 - v_n^2)dx + \frac{1}{p+1}\int_{E_n}\left(|u_n|^{p+1} - |w_n|^{p+1} - |v_n|^{p+1}\right)dx \\ \leq\ & \frac{5}{2}\int_{E_n}|\nabla u_n|^2dx + \frac{5}{2}\int_{E_n} u_n^2|\nabla u_n|^2dx + \frac{1}{2}\int_{E_n} Vu_n^2dx \\ +\ & \frac{1}{p+1}\int_{E_n}|u_n|^{p+1}dx + \frac{C_1}{2}\int_{E_n}\left(u_n^2 + u_n^4\right)dx,\end{aligned}$$

implicando que

$$\begin{aligned}\left|I(u_n)\Big|_{E_n} - I(w_n)\Big|_{E_n} - I(v_n)\Big|_{E_n}\right| &\leq C_2\left\{\int_{E_n}\left[(1+u_n^2)|\nabla u_n|^2 + Vu_n^2 + |u_n|^{p+1}\right]dx\right\} \\ &+ \frac{C_1}{2}\int_{E_n} u_n^4dx,\end{aligned}$$

com $C_2 = \max\{\frac{1}{2}, \frac{C_1}{2}\}$.

Segue de (2.5) e (2.14) que

$$I(u_n)\Big|_{E_n} = I(w_n)\Big|_{E_n} + I(v_n)\Big|_{E_n} = o(1).$$

e podemos concluir (2.16).

Além disso, fazendo $\phi = w_n$ em (2.1), usando um procedimento análogo ao que fizemos para obter (2.37) e (2.35), encontramos, respectivamente,

$$\gamma(w_n) = \langle I'(u_n), w_n\rangle + o(1) \text{ e } \langle I'(u_n), w_n\rangle = o(1).$$

Logo,

$$\gamma(w_n) = \langle I'(u_n), w_n \rangle + o(1) = o(1). \tag{2.17}$$

De maneira análoga, podemos obter também

$$\gamma(v_n) = \langle I'(u_n), v_n \rangle + o(1) = o(1). \tag{2.18}$$

Para $\beta \in (0,1)$, de (2.15),

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |w_n(x)|^{p+1} dx \geq \lim_{n\to+\infty} (\beta A - \varepsilon_n) = \beta A > 0$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n(x)|^{p+1} dx \geq \lim_{n\to+\infty} [(1-\beta)A - \varepsilon_n] = (1-\beta)A > 0.$$

Pelo Lema 1.3, existem sequências $(t_n), (s_n) \subset (0, +\infty)$ tais que

$$\bar{w}_n = t_n w_n, \quad \bar{v}_n = s_n v_n \in S, \quad t_n \to 1 \quad \text{e} \quad s_n \to 1.$$

Suponhamos que (x_n) é limitada. Então, existe $M > 0$ tal que

$$|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fixemos $R > 0$ de modo que $R - M > 0$. Como $r_n \to +\infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, $R < 2r_n$. Provemos que

$$\text{supt} \quad \bar{v}_n \subset (B_{R-M})^C.$$

De fato, seja $x \in B_{R-M}$. Logo, $|x| \leq R - M$, ou seja,

$$|x| + M \leq R.$$

Daí,

$$|x - x_n| \leq |x| + |x_n| \leq |x| + M \leq R,$$

de onde segue que $|x - x_n| < 2r_n$, isto é,

$$x \in B_{2r_n}(x_n).$$

Como $v_n(x) = 0 \quad \text{em} \quad B_{2r_n}(x_n)$, temos

$$\bar{v}_n(x) = 0 \quad \text{em} \quad B_{2r_n}(x_n).$$

Consequentemente,

$$x \in (\text{supt} \quad \bar{v}_n)^C.$$

Com isso, mostramos que

$$B_{R-M} \subset (\text{supt } \bar{v}_n)^C.$$

Portanto,

$$\text{supt} \quad \bar{v}_n \subset (B_{R-M})^C.$$

Por outro lado, sabemos que

$$\lim_{|x| \to +\infty} V(x) = V_\infty.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $|x| \geq \delta$,

$$0 \leq V_\infty - V(x) < \varepsilon.$$

Fixemos $R > 0$ de modo que $R - M \geq \delta$. Desta forma, para $|x| \geq R - M$, também temos

$$0 \leq V_\infty - V(x) < \varepsilon.$$

Além disso, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \text{supt} \quad \bar{v}_n \subset (B_{R-M})^C..$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\gamma^\infty(\bar{v}_n) - \gamma(\bar{v}_n) &= \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V(x))\bar{v}_n^2 dx \\
&= \int_{supt \quad \bar{v}_n} (V_\infty - V(x))\bar{v}_n^2 dx \\
&\leq \int_{(B_{R-M})^C} (V_\infty - V(x))\bar{v}_n^2 dx \\
&< \varepsilon \int_{(B_{R-M})^C} \bar{v}_n^2 dx \\
&= \varepsilon s_n^2 \int_{(B_{R-M})^C} v_n^2 dx \\
&= \varepsilon s_n^2 \int_{(B_{R-M})^C} (1-\eta)^2 u_n^2 dx \\
&\leq \varepsilon s_n^2 \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx.
\end{aligned}$$

Sabendo que (s_n) e $\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx$ são limitados, podemos concluir que

$$\gamma^\infty(\bar{v}_n) - \gamma(\bar{v}_n) < C_3\varepsilon,$$

para alguma constante $C_3 > 0$.

Logo,

$$\gamma^\infty(\bar{v}_n) - \gamma(\bar{v}_n) = o(1).$$

Desde que $\gamma(\bar{v}_n) = 0$, ficamos com

$$\gamma^\infty(\bar{v}_n) = o(1).$$

Novamente pelo Lema 1.3, existe $\bar{s}_n \in (0, +\infty)$ tal que

$$\bar{s}_n\bar{v}_n \in S^\infty \quad \text{e} \quad \bar{s}_n \to 1.$$

Daí, usando o Lema (1.1),

$$c^\infty \leq I^\infty(\bar{s}_n\bar{v}_n) = I(\bar{s}_n\bar{v}_n) + o(1) \leq I(\bar{v}_n) + o(1), \forall n \in \mathbb{N},$$

mostrando que

$$c^\infty \leq \liminf_{n\to+\infty} I(\bar{v}_n). \tag{2.19}$$

Como $\bar{w}_n \in S$, então

$$c^0 \leq I(\bar{w}_n), \forall n \in \mathbb{N},$$

implicando que

$$c^0 \leq \liminf_{n\to+\infty} I(\bar{w}_n). \tag{2.20}$$

Portanto, se (x_n) é limitada, de (2.19) e (2.20), temos

$$c^0 + c^\infty \leq \liminf_{n\to+\infty} I(\bar{w}_n) + \liminf_{n\to+\infty} I(\bar{v}_n).$$

Suponhamos agora (x_n) ilimitada. Observemos que

$$\begin{aligned}
\gamma^\infty(\bar{w}_n) - \gamma(\bar{w}_n) &= \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V(x))\bar{w}_n^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V(x))t_n^2 w_n^2 dx \\
&= t_n^2 \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V(x))\eta^2 u_n^2 dx \\
&\leq C_2 \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V(x))u_n^2 dx \to 0.
\end{aligned}$$

Desde que $\gamma(\bar{w}_n) = 0$, podemos concluir que

$$\gamma^{\infty}(\bar{w}_n) = o(1).$$

Pelo Lema 1.3, existe $\bar{t}_n \in (0, +\infty)$ tal que

$$\bar{t}_n \bar{w}_n \in S^{\infty} \text{ e } \bar{t}_n \to 1.$$

Logo, usando o Lema (1.1),

$$c^{\infty} \leq I^{\infty}(\bar{t}_n \bar{w}_n) = I(\bar{t}_n \bar{w}_n) + o(1) \leq I(\bar{w}_n) + o(1),$$

implicando que

$$c^{\infty} \leq \liminf_{n \to +\infty} I(\bar{w}_n). \tag{2.21}$$

Como $\bar{v}_n \in S$, então

$$c^0 \leq I(\bar{v}_n), \forall n \in \mathbb{N},$$

de onde segue que

$$c^0 \leq \liminf_{n \to +\infty} I(\bar{v}_n). \tag{2.22}$$

Assim, se (x_n) é ilimitada, de (2.21) e (2.22), temos

$$c^0 + c^{\infty} \leq \liminf_{n \to +\infty} I(\bar{w}_n) + \liminf_{n \to +\infty} I(\bar{v}_n).$$

Em ambos os casos, concluimos que

$$c^0 + c^{\infty} \leq \liminf_{n \to +\infty} I(\bar{w}_n) + \liminf_{n \to +\infty} I(\bar{v}_n).$$

Sendo as integrais

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 dx, \int_{\mathbb{R}^N} w_n^2 |\nabla w_n|^2 dx, \int_{\mathbb{R}^N} V w_n^2 dx \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{p+1} dx$$

limitadas e sabendo que $t_n \to 1$, podemos afirmar que

$$I(\bar{w}_n) - I(w_n) = o(1). \tag{2.23}$$

De maneira análoga, obtemos

$$I(\bar{v}_n) - I(v_n) = o(1). \tag{2.24}$$

De (2.16), (2.23) e (2.24),

$$I(u_n) = I(w_n) + I(v_n) + o(1) = I(\bar{w}_n) + I(\bar{v}_n) + o(1).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty} I(u_n) &= \liminf_{n\to+\infty}[I(\bar{w}_n)+I(\bar{v}_n)+o(1)] \\
&\geq \liminf_{n\to+\infty} I(\bar{w}_n)+\liminf_{n\to+\infty} I(\bar{v}_n) \\
&\geq c^0+c^\infty,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\liminf_{n\to+\infty} I(u_n) \geq c^0+c^\infty.$$

Como, de (2.4),

$$\liminf_{n\to+\infty} I(u_n) < c^0+c^\infty,$$

podemos concluir que a dicotomia no Teorema 4.1 não ocorre.

Portanto, vale a compacidade, ou seja, para alguma subsequência $(\rho_{n_k}) \subset (\rho_n)$, existe $(x_k) \subset \mathbb{R}^N$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $r < +\infty$ satisfazendo

$$\int_{B_r(x_k)} \rho_{n_k} dx \geq A-\varepsilon.$$

Temos

$$\int_{B_r(x_k)} \rho_{n_k}(x)dx = \frac{A}{\int_{\mathbb{R}^N} |w_{n_k}|^{\frac{p+1}{2}} \chi_{B_{R_{n_k}}} dx} \int_{B_r(x_k)} |w_{n_k}|^{\frac{p+1}{2}\chi_{B_{R_{n_k}}}} dx.$$

Daí,

$$\int_{B_r(x_k)} |w_{n_k}|^{\frac{p+1}{2}} dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |w_{n_k}|^{\frac{p+1}{2}} \chi_{B_{R_{n_k}}} dx - \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |w_{n_k}|^{\frac{p+1}{2}} \chi_{B_{R_{n_k}}} dx}{A},$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\to+\infty} \int_{B_r(x_k)} |w_{n_k}|^{\frac{p+1}{2}} dx &\geq \liminf_{k\to+\infty} \int_{B_r(x_k)} |w_{n_k}|^{\frac{p+1}{2}} \chi_{B_{R_{n_k}}} dx \\
&\geq A-\varepsilon,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\liminf_{k\to+\infty} \int_{B_r(x_k)} |u_{n_k}|^{p+1} dx \geq A-\varepsilon.$$

Com isso, concluimos o lema.

$\blacksquare$

Lema 2.2 *Existe $u \in S^\infty$ tal que $I^\infty(u) = c^\infty$ e podemos assumir $u(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$.*

Demonstração: Seja (u_n) uma sequência tal que

$$u_n \in S_n^\infty, \quad I^\infty(u_n) = c_n^\infty \to c^\infty,$$

que existe pelos Lemas 1.8 e 1.9.

Notemos que $I^\infty(u_n)$ é limitada e $\gamma^\infty(u_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, podemos concluir, como fizemos na demonstração do Lema 1.9, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx, \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx, \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_n^2 dx \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx$$

são todos limitados e existe $C_1 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx \geq C_1.$$

Em particular,

$$\int_{B_n} |\nabla u_n|^2 dx, \int_{B_n} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx, \int_{B_n} V_\infty u_n^2 dx \text{ e } \int_{B_n} |u_n|^{p+1} dx$$

são limitados e podemos assumir

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx \to A \in (0, +\infty).$$

Como $c^0 > 0$, temos

$$\liminf_{n \to +\infty} I^\infty(u_n) = c^\infty < c^0 + c^\infty.$$

Pelo Lema 2.1, existe $(x_n) \in \mathbb{R}^N$, tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $r > 0$ satisfazendo

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_{B_r(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq A - \varepsilon. \tag{2.25}$$

Pela invariância por translação, podemos supor (x_n) limitada. Assim,

(i) $u_n \to u \neq 0$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$;

(ii)$u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\mathbb{R}^N)$;

(iii) $\nabla(u_n^2) \rightharpoonup \nabla(u^2)$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

De fato, a prova de (iii) é análoga ao que fizemos no caso de domínio limitado, no Lema 1.9. Mostremos (i) e (ii).

Sendo (x_n) limitada, existe $K > 0$ tal que

$$|x_n| \leq K, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dado $x \in B_r(x_n)$, temos

$$|x - x_n| < r.$$

Logo,

$$|x| \leq |x - x_n| + |x_n| < r + K,$$

ou seja,

$$x \in B_R,$$

onde $R = r + K$.

Daí,

$$B_r(x_n) \subset B_R, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por hipótese,

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_{B_r(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq A - \varepsilon,$$

o que implica

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_{B_R} |u_n|^{p+1} dx \geq A - \varepsilon.$$

Por propriedade de limite inferior, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > n_1$,

$$\int_{B_R} |u_n|^{p+1} dx \geq \liminf_{n \to +\infty} \int_{B_R} |u_n|^{p+1} dx - \varepsilon,$$

de onde segue que

$$\int_{B_R} |u_n|^{p+1} dx \geq A - 2\varepsilon.$$

Assim, para $n > n_1$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |u_n|^{p+1} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx - \int_{B_R} |u_n|^{p+1} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} - A + 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx \to A,$$

então existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > n_2$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx - A < \varepsilon. \tag{2.27}$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, de (2.26) e (2.27), para $n > n_0$, ficamos com

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} |u_n|^{p+1} dx < 3\varepsilon,$$

implicando que

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} |u_n|^{p+1} dx \to 0,$$

isto é,

$$u_n \to 0 \quad \text{em} \quad L^{p+1}(\mathbb{R}^N \backslash B_R).$$

Em particular,

$$u_n \to 0 \ \ em \ \ L^4(\mathbb{R}^N \backslash B_R). \tag{2.28}$$

Por outro lado, desde que (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $H^1(\mathbb{R}^N)$ reflexivo, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de subsequências,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^N),$$

mostranto (i), e por imersão compacta,

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^2(\mathbb{R}^N).$$

Daí, a menos de subsequências,

$$u_n(x) \to u(x) \quad \text{q. t. p.} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

implicando que

$$u_n^2(x) \to u^2(x) \ \ q.t.p. \ \ em \ \ \mathbb{R}^N. \tag{2.29}$$

Usando (2.28) e o fato de que $L^{p+1}(B_R) \hookrightarrow L^4(B_R)$, podemos mostrar, como fizemos na demonstração do Lema 1.9 que (u_n^2) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Logo, a menos de subsequências, existe $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n^2 \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^N).$$

Por imersão compacta,

$$u_n^2 \to v \quad \text{em} \quad L^2(\mathbb{R}^N),$$

e a menos de subsequências,

$$u_n^2(x) \to v(x) \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \mathbb{R}^N. \tag{2.30}$$

De (2.29) e (2.30), concluimos que $v = u^2$. Desta forma, $u^2 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, mostrando que $u \in X$. Além disso,

$$u_n^2 \rightharpoonup u^2 \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^N).$$

Logo, de maneira análoga ao que fizemos no Lema 1.9, podemos mostrar que

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^{p+1}(\mathbb{R}^N),$$

provando (i).

De (i), obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx, \tag{2.31}$$

enquanto de (ii), temos

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \tag{2.32}$$

e

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_n^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u^2 dx. \tag{2.33}$$

Por fim, de (iii),

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx. \tag{2.34}$$

Das propriedades de limite inferior e de (2.31)-(2.34), obtemos

$$\gamma^\infty \leq \liminf_{n\to+\infty} \gamma^\infty(u_n)(u).$$

Desde que $u_n \in S^\infty$, segue que

$$\gamma^\infty(u_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

o que implica

$$\liminf_{n\to+\infty} \gamma^{\infty}(u_n) = 0.$$

Assim,

$$\gamma^{\infty}(u) \leq 0.$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + 2u^2|\nabla u|^2 + V_\infty u^2 - |u|^{p+1}\right) dx \leq 0.$$

Daí,

$$2\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 dx \quad < \quad \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx.$$

Sendo $u \neq 0$, segue do Lema 1.2 que existe $t > 0$ tal que

$$tu \in S^{\infty}.$$

Logo,

$$c^{\infty} = \inf_{S^{\infty}} I^{\infty} \leq I^{\infty}(tu). \tag{2.35}$$

Sejam $w_n = tu_n$ e $w = tu$. Então,

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{p+1} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{p+1} dx;$
- $\displaystyle\liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx;$
- $\displaystyle\liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty w_n^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty w^2 dx;$
- $\displaystyle\liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} w_n^2|\nabla w_n|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} w^2|\nabla w|^2 dx.$

Usando propriedades de limite inferior, obtemos

$$I^{\infty}(w) \leq \liminf_{n\to+\infty} I^{\infty}(w_n),$$

isto é,

$$I^{\infty}(tu) \leq \liminf_{n\to+\infty} I^{\infty}(tu_n), \tag{2.36}$$

Como $u_n \in S^{\infty}$, pelo Lema 1.1, temos

$$\liminf_{n\to+\infty} I^{\infty}(tu_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} I^{\infty}(u_n) = c^{\infty}. \tag{2.37}$$

De (2.35), (2.36) e (2.37),

$$I^\infty(tu) = I^\infty(w) = c^\infty.$$

Observemos que a sequência minimizante (u_n) pode ser considerada não negativa, trocando, se necessário, u_n por $|u_n|$. Podemos supor, então, que $u(x) \geq 0$ e daí, $w(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Pela Teoria da Regularidade Elíptica, $w \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Vamos mostrar que $w(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Temos que w satisfaz a igualdade

$$-\Delta w + V^\infty w - \frac{1}{2}(\Delta(w^2))w = \lambda |w|^p. \tag{2.38}$$

Notemos que

$$-\Delta(w^2) = 2|\nabla w|^2 + 2w(-\Delta w).$$

Daí,

$$-\frac{1}{2}(\Delta(w^2))w = w|\nabla w|^2 + w^2(-\Delta w) \tag{2.39}$$

De (2.38) e (2.39), ficamos com

$$-(1 + w^2)\Delta w = w^p - V^\infty w - w|\nabla w|^2 \leq w^p - V^\infty w. \tag{2.40}$$

Suponha que existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $w(x_0) = 0$. Pela continuidade de w podemos escolher $r_0 > 0$ de modo que w é não nula em $B_{r_0}(x_0)$ e $w^p - V^\infty w \leq 0$. Logo, de (2.40),

$$-(1 + w^2)\Delta w \leq 0,$$

ou seja,

$$-\Delta w \leq 0.$$

Pelo Teorema C.25, segue que w é constante em $B_{r_0}(x_0)$. Como $w(x_0) = 0$, temos que $w = 0$ em $B_{r_0}(x_0)$, o que é absurdo!

Portanto, $w(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

■

Vamos agora provar o **Teorema 0.1**.

Demonstração do Teorema 0.1 Observemos inicialmente que

$$c^0 < c^\infty.$$

De fato, seja $u \in S^\infty$ a função obtida no Lema 2.2, ou seja, u é uma função que satisfaz

$$I^\infty(u) = c^\infty \quad \text{e} \quad \gamma^\infty(u) = 0.$$

Desde que $u > 0$ e V é uma função contínua verificando $V(x) \leq V_\infty, \forall x \in \mathbb{R}^N$, e $V \neq V_\infty$, podemos afirmar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx < \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u^2 dx. \tag{2.41}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \gamma(u) &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + 2u^2|\nabla u|^2 + Vu^2 - |u|^{p+1} \right) dx \\ &< \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + 2u^2|\nabla u|^2 + V_\infty u^2 - |u|^{p+1} \right) dx \\ &= \gamma^\infty(u) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + 2u^2|\nabla u|^2 + Vu^2 - |u|^{p+1} \right) dx < 0,$$

de onde segue que

$$2\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 dx < \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx.$$

Pelo Lema 1.2, existe $t > 0$ tal que $tu \in S$.

De (2.41),

$$t^2\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx < t^2\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u^2 dx. \tag{2.42}$$

Logo, de (13), (1.153) e (2.42),

$$c^0 \leq I(tu) < I^\infty(tu) \leq I^\infty(u) = c^\infty,$$

mostrando que

$$c^0 < c^\infty.$$

Seja (u_n) uma sequência tal que

$$u_n \in S_n, \quad I(u_n) = c_n^0 \to c^0,$$

que existe pelos Lemas 1.8 e 1.9.

Sendo $I(u_n)$ limitada e $\gamma(u_n) = 0$, podemos afirmar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx, \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx, \int_{\mathbb{R}^N} V u_n^2 dx \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx$$

são todos limitados e existe $C_1 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx \geq C_1.$$

Em particular,

$$\int_{B_n} |\nabla u_n|^2 dx, \int_{B_n} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx, \int_{B_n} V u_n^2 dx \text{ e } \int_{B_n} |u_n|^{p+1} dx$$

são limitados e podemos assumir

$$\int_{B_n} |u_n|^{p+1} dx \to A \in (0, +\infty).$$

Notemos que

$$\liminf_{n \to +\infty} I(u_n) = c^0 < c^0 + c^\infty.$$

Pelo Lema 2.1, existe $(x_n) \in \mathbb{R}^N$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $r > 0$ satisfazendo

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_{B_r(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq A - \varepsilon.$$

Afirmação: (x_n) é limitada.

De fato, suponhamos que (x_n) é ilimitada, ou seja,

$$|x_n| \to +\infty.$$

Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V(x))\, u_n^2 dx = o(1).$$

Daí,

$$\gamma^\infty(u_n) - \gamma(u_n) = o(1),$$

e consequentemente,

$$\gamma^\infty(u_n) \to 0,$$

já que $\gamma(u_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Pelo Lema 1.3, existe $(t_n) \subset (0, +\infty)$ tal que

$$t_n u_n \in S^\infty \quad \text{e} \quad t_n \to 1.$$

Temos ainda

$$I^\infty(t_n u_n) = I(t_n u_n) + o(1).$$

Logo,

$$c^\infty = I^\infty(u) \leq I^\infty(t_n u_n) = I(t_n u_n) + o(1) \leq I(u_n) + o(1).$$

Passanso ao limite $n \to +\infty$, obtemos

$$c^\infty \leq c^0,$$

o que é um absurdo pois $c^\infty > c^0$.

Com isso, concluimos que (x_n) é limitada. De maneira análoga ao fizemos no Lema 2.2, podemos afirmar que

- $u_n \to u \neq 0 \quad \text{em} \quad L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$;
- $u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H_0^1(\mathbb{R}^N)$;
- $\nabla(u_n^2) \rightharpoonup \nabla(u^2) \quad \text{em} \quad L^2(\mathbb{R}^N)$.

Daí,

$$\gamma(u) \leq \liminf_{n \to +\infty} \gamma(u_n). \tag{2.43}$$

Como $u_n \in S$, segue que

$$\gamma(u_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

o que implica

$$\liminf_{n \to +\infty} \gamma(u_n) = 0. \tag{2.44}$$

Logo, de (2.43) e (2.44),

$$\gamma(u) \leq 0.$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + 2u^2|\nabla u|^2 + Vu^2 - |u|^{p+1})dx \leq 0.$$

Assim, observando que $\int_{\mathbb{R}^N} Vu^2dx > 0$, temos

$$2\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 dx \quad < \quad \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}dx.$$

Sendo $u \neq 0$, segue do Lema 1.2 que existe $s > 0$ tal que

$$v = su \in S.$$

implicando

$$c^0 = \inf_S I \leq I(v) \leq \liminf_{n\to+\infty} I(su_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} I(u_n) = c^0,$$

isto é,

$$I(v) = c^0.$$

Portanto, do Lema 1.7, v é uma solção de (1). Podemos supor, substituindo u_n por $|u_n|$ se necessário, $u \geq 0$. Logo, $v \leq 0$. Sendo V Hölder contínua, pela Teoria da Regularidade Elíptica, $v \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Por um procedimento análogo ao que usamos no Lema 2.2, podemos afirmar que $v(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Portanto, v é uma solução positiva do problema quasilinear, concluindo o **Teorema 0.1**.

■

Capítulo 3

Existência de Solução Nodal

Neste capítulo, provaremos o Teorema 0.2, que mostra a existência de uma solução nodal, isto é, que muda de sinal, para a equação (1). No que segue, em alguns momentos precisaremos que certas integrais possuam um determinado tipo de decrescimento. Por isso, enunciaremos o resultado a seguir, que mostra que a integral abaixo tem um decaimento exponencial a partir de um R suficientemente grande.

Lema 3.1 *Seja u uma solução fraca do problema quasilinear (1). Então, u e suas derivadas são limitadas e possuem decaimento exponencial no infinito, ou seja, existem constantes $R_0, C, \delta > 0$ tais que, para $R \geq R_0$,*

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \left(u^2 + |\nabla u|^2\right) \leq Ce^{-\delta R}.$$

Demonstração: Seja u uma solução da equação (1). Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[(1+u^2)\nabla u \nabla \phi + u|\nabla u|^2 \phi + Vu\phi - |u|^{p-1}u\phi\right] dx = 0, \tag{3.1}$$

para toda $\phi \in X$ com a propriedade

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla \phi|^2 dx < +\infty \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \phi^2 dx < +\infty.$$

Neste caso, vamos provar apenas o decaimento exponencial e assumir a limitação de u e suas derivadas. Observemos ainda que vale

$$\lim_{|x| \to +\infty} |u(x)| = 0. \tag{3.2}$$

Fixemos $R > 0$ e consideremos a função corte η_R dada por

$$\eta_R(s) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad s \le R \\ 1, & \text{se} \quad s \ge R+1 \end{cases}.$$

Seja $\phi_R : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por

$$\phi_R(x) = \eta_R^2(|x|)u(x).$$

Notemos que $\phi_R \in X$ e satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla \phi_R|^2 dx < +\infty \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \phi_R^2 dx < +\infty.$$

Logo, a igualdade em (3.1) vale em particular para $\phi = \phi_R$. Como

$$\nabla u \nabla \phi_R = 2u\eta_R \nabla u \nabla \eta_R + \eta_R^2 |\nabla u|^2,$$

obtemos, de (3.1),

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[(1+2u^2)|\nabla u|^2 \eta_R^2 + V u^2 \eta_R^2 - |u|^{p+1}\eta_R^2 + 2(1+u^2)u\eta_R \nabla u \nabla \eta_R \right] dx = 0.$$

Desde que $\eta_R = 0$ em B_R e $\nabla \eta_R = 0$ em $\mathbb{R}^N \backslash B_{R+1}$, ficamos com

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} \left[(1+2u^2)|\nabla u|^2 \eta_R^2 + V u^2 \eta_R^2 - |u|^{p+1}\eta_R^2 \right] dx + \int_{B_{R+1} \backslash B_R} \left[2(1+u^2)u\eta_R \nabla u \nabla \eta_R \right] dx = 0. \tag{3.3}$$

Sendo

$$0 < V_0 = \inf_{\mathbb{R}^N} V \le V(x),$$

segue que

$$\frac{1}{2} V_0 < V(x), \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Escolhamos $\varepsilon > 0$ de modo que

$$\frac{1}{2} V_0 \le V(x) - \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.4}$$

De (3.2), existe $R_0 > 0$ tal que, para $R \ge R_0$,

$$|u(x)|^{p-1} \le \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}^N \backslash B_R,$$

implicando que

$$-\varepsilon \leq -|u(x)|^{p-1}, \forall x \in \mathbb{R}^N \backslash B_R. \tag{3.5}$$

De (3.4) e (3.5), temos

$$\frac{1}{2}V_0 \leq V(x) - |u(x)|^{p-1}, \forall x \in \mathbb{R}^N \backslash B_R. \tag{3.6}$$

Multiplicando a desigualdade em (3.6) por $u^2\eta^2$ ficamos com

$$\frac{1}{2}V_0 u^2 \eta_R^2 \leq V u^2 \eta_R^2 - |u|^{p+1}\eta_R^2, \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.7}$$

De (3.3) e (3.7), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} \left[(1+2u^2)|\nabla u|^2 \eta_R^2 + \frac{1}{2}V_0 u^2 \eta_R^2\right] dx \leq -2\int_{B_{R+1}\backslash B_R} \left[(1+u^2)u\eta_R \nabla u \nabla \eta_R\right] dx. \tag{3.8}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} \left[(1+2u^2)|\nabla u|^2 \eta_R^2 + \frac{1}{2}V_0 u^2 \eta_R^2\right] dx \\
\geq \ & \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} \left[|\nabla u|^2 \eta_R^2 + \frac{1}{2}V_0 u^2 \eta_R^2\right] dx \\
\geq \ & \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{R+1}} \left[|\nabla u|^2 \eta_R^2 + \frac{1}{2}V_0 u^2 \eta_R^2\right] dx \\
= \ & \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{R+1}} (|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}V_0 u^2) dx \\
\geq \ & C_1 \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{R+1}} (|\nabla u|^2 + u^2) dx,
\end{aligned}$$

onde $C_1 = \min\left\{1, \frac{1}{2}V_0\right\}$. Ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} \left[(1+2u^2)|\nabla u|^2 \eta_R^2 + \frac{1}{2}V_0 u^2 \eta_R^2\right] dx \geq C_1 \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{R+1}} (|\nabla u|^2 + u^2) dx. \tag{3.9}$$

Por outro lado,

$$-2\int_{B_{R+1}\backslash B_R} \left[(1+u^2)u\eta_R \nabla u \nabla \eta_R\right] dx \leq 2\int_{B_{R+1}\backslash B_R} \left[(1+u^2)|u|\eta_R |\nabla u||\nabla \eta_R|\right] dx. \tag{3.10}$$

Como $\eta_R \leq 1$, u é limitada e $\nabla \eta_R$ também é limitado em $B_{R+1}\backslash B_R$, então existe $C_2 > 0$ tal que

$$2\int_{B_{R+1}\backslash B_R} \left[(1+u^2)|u|\eta_R |\nabla u||\nabla \eta_R|\right] dx \leq C_2 \int_{B_{R+1}\backslash B_R} |u||\nabla u| dx. \tag{3.11}$$

De (3.8)-(3.11), para $C_3 = \frac{C_2}{C_1}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R+1} \left(u^2 + |\nabla u|^2\right) dx \leq C_3 \int_{B_{R+1}\setminus B_R} |u||\nabla u| dx. \tag{3.12}$$

Desde que

$$|u||\nabla u| \leq \frac{u^2}{2} + \frac{|\nabla u|^2}{2},$$

podemos concluir de (3.12) que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R+1}} \left(u^2 + |\nabla u|^2\right) dx \leq C_4 \int_{B_{R+1}\setminus B_R} \left(u^2 + |\nabla u|^2\right) dx, \tag{3.13}$$

onde $C_4 = \frac{C_3}{2}$.

Seja (R_n) a sequência definida por $R_1 = R$ e $R_{n+1} = R_n + 1$ e consideremos (a_n) a sequência dada por

$$a_n = \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R_n}} \left(u^2 + |\nabla u|^2\right) dx. \tag{3.14}$$

Então, usando (3.13), temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R_{n+1}}} \left(u^2 + |\nabla u|^2\right) dx &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R_n+1}} \left(u^2 + |\nabla u|^2\right) dx \\ &\leq C_4 \int_{B_{R_n+1}\setminus B_{R_n}} \left(u^2 + |\nabla u|^2\right) dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$a_{n+1} \leq C_4 \int_{B_{R_n+1}\setminus B_{R_n}} \left(u^2 + |\nabla u|^2\right) dx. \tag{3.15}$$

No entanto, de (3.14),

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R_n}} \left(u^2 + |\nabla u|^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R_{n+1}}} \left(u^2 + |\nabla u|^2\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R_n+1}} \left(u^2 + |\nabla u|^2\right) dx + \int_{B_{R_n+1}\setminus B_{R_n}} \left(u^2 + |\nabla u|^2\right) dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R_n+1}} \left(u^2 + |\nabla u|^2\right) dx \\ &= \int_{B_{R_n+1}\setminus B_{R_n}} \left(u^2 + |\nabla u|^2\right) dx, \end{aligned}$$

isto é,

$$a_n - a_{n+1} = \int_{B_{R_n+1}\setminus B_{R_n}} \left(u^2 + |\nabla u|^2\right) dx. \tag{3.16}$$

De (3.15) e (3.16), ficamos com

$$a_{n+1} \leq C_4\,(a_n - a_{n+1}).$$

Logo,

$$a_{n+1} \leq \theta a_n,$$

com $\theta = \dfrac{C_4}{C_4 + 1}$, e assim,

$$a_n \leq C\theta^n, \forall n \in \mathbb{N},$$

para alguma constante $C > 0$.

Em particular, para $n = 1$ temos

$$a_1 = \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} \left(u^2 + |\nabla u|^2\right) dx \leq C\theta. \tag{3.17}$$

Como $\theta \in (0, 1)$, então $\frac{1}{\theta} > 1$. Daí, $\ln \frac{1}{\theta} > 0$. Assim, podemos escolher $\delta > 0$ de modo que

$$\delta < \frac{1}{R}\ \ ln\left(\frac{1}{\theta}\right).$$

Desta forma

$$\theta < e^{-\delta R},$$

implicando que

$$C\theta < Ce^{-\delta R}. \tag{3.18}$$

Portanto, de (3.17) e (3.18),

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} \left(u^2 + |\nabla u|^2\right) dx \leq Ce^{-\delta R},$$

concluindo o Lema 3.1.

■

Agora, sejam u e ψ funções tais que $I(u) = c^0$ e $I^\infty(\psi) = c^\infty$. Então, u e ψ são soluções fracas positivas de suas equações quasilineares correspondentes. Além disso, pelo Lema 3.1, u, ψ e suas respectivas derivadas são limitadas e existem $R_0, C, \delta > 0$, tais que, para $R \geq R_0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} (u^2 + |\nabla u|^2) \leq Ce^{-\delta R}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} (\psi^2 + |\nabla \psi|^2) \leq Ce^{-\delta R}.$$

Fixemos $R > 0$ e definamos $\psi_R(x) = \psi(x + 2Re_1)$, onde $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^N$. Nestas condições, temos o seguinte resultado:

Lema 3.2 $c^* \leq \sup_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2} I(\alpha u + \beta\psi_R) < c^0 + c^\infty$ *para R suficientemente grande.*

Demonstração: A demonstração divide-se em três passos.
1^o **PASSO:** Expandir $I(\alpha u + \beta\psi_R)$ e verificar que todos os termos mistos envolvendo u e ψ_R possuem decaimento exponencial.

Notemos que

$$\begin{aligned} I(\alpha u + \beta\psi_R) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\alpha u + \beta\psi_R)| dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (\alpha u + \beta\psi_R)^2 |\nabla(\alpha u + \beta\psi_R)|^2 dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} V(\alpha u + \beta\psi_R)^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |\alpha u + \beta\psi_R|^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Mostraremos o decrescimento exponencial de um dos termos e o restante é análogo. No desenvolvimento do produto $(\alpha u + \beta\psi_R)^2 |\nabla(\alpha u + \beta\psi_R)|^2$, entre os termos mistos, está a parcela $2\alpha^3\beta u^2 \nabla u \nabla\psi_R$. Então, devemos provar que existem $R_0, C, \delta > 0$ tais que, para $R \geq R_0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2 \nabla u \nabla \psi_R dx \leq Ce^{-\delta R}.$$

Usando desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla\psi_R dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u||\nabla\psi_R| dx \\ &= \int_{B_R} |\nabla u||\nabla\psi_R| dx + \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R} |\nabla u||\nabla\psi_R| dx \\ &\leq \left(\int_{B_R} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R} |\nabla\psi_R|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left(\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R} |\nabla\psi_R|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R} |\nabla\psi_R|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left(\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\psi_R|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \psi_R dx \leq |u|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{B_R} |\nabla \psi_R|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + |\psi_R|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.19}$$

Do Teorema C.5 (Teorema de Mudança de Variável), segue que

$$|\psi_R|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = |\psi|_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{3.20}$$

De (3.19) e (3.20), ficamos com

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \psi_R dx \leq |u|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{B_R} |\nabla \psi_R|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + |\psi|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.21}$$

Pelo Lema 3.1, existem $R_1, C_1, \delta_1 > 0$ tais que, para $R \geq R_1$,

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} \left(u^2 + |\nabla u|^2 \right) dx \leq C_1 e^{-\delta_1 R_1},$$

implicando que

$$\begin{aligned} |\psi|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} &\leq |\psi|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \left[\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} \left(u^2 + |\nabla u|^2 \right) dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_2 e^{-\delta_2 R_1}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

onde $C_2 = C_1^2 |\psi|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ e $\delta_2 = \dfrac{\delta_1}{2}$.

Por outro lado, usando uma mudança de variável e sabendo que $B(2Re_1) \subset \mathbb{R}^N \backslash B_R$, temos

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |\nabla \psi_R|^2 dx &= \int_{B_R} |\nabla \psi(x + 2Re_1)|^2 dx \\ &= \int_{B_R(2Re_1)} |\nabla \psi(x)|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} |\nabla \psi|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} \left(\psi^2 + |\nabla \psi|^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Novamente pelo Lema 3.1, existem $C_3, R_2, \delta_3 > 0$ tais que, para $R \geq R_2$,

$$|u|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{B_R} |\nabla \psi_R|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_3 e^{-\delta_3 R_2}. \tag{3.23}$$

Sabemos ainda que u é limitada. Daí, existe $C_4 > 0$ tal que

$$u^2(x) \leq C_4, \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.24}$$

Tomando $C_5 = \max\{C_2, C_3\}$, $R_0 = \max\{R_1, R_2\}$, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_3\}$ e $C = C_4 C_5$, de (3.21)-(3.24), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2 \nabla u \nabla \psi_R dx \leq Ce^{-\delta R}.$$

para $R \geq R_0$, concluindo o 1^o PASSO.

2^o **PASSO:** Mostrar que existem $R_0 > 0$ e $r_0 > 0$ tais que, para todo $R \geq R_0$ e $r \geq r_0$, com $r^2 = \alpha^2 + \beta^2$, temos

$$I(\alpha u + \beta \psi_R) \leq 0.$$

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sejam

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{r}, \quad \bar{\beta} = \frac{\beta}{r} \quad e \quad w = \bar{\alpha} u + \bar{\beta} \psi_R. \tag{3.25}$$

Vamos provar que existe $R_1 > 0$ tal que, para todo $R \geq R_1$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx, \int_{\mathbb{R}^N} w^2 |\nabla w|^2 dx, \int_{\mathbb{R}^N} V w^2 dx \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{p+1} dx$$

são todos limitados superiormente e inferiormente por duas constantes positivas.

Notemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx = \bar{\alpha}^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \bar{\beta}^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \psi_R|^2 dx + 2\bar{\alpha}\bar{\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \psi_R dx. \tag{3.26}$$

De (3.25), temos $|\bar{\alpha}|, |\bar{\beta}| \leq 1$ e, daí, a limitação superior é imediata. Observemos agora que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que $|\bar{\alpha}| \geq C_1$ ou $|\bar{\beta}| \geq C_1$, já que $\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 = 1$. Suponha, sem perda de generalidade, que $|\bar{\alpha}| \geq C_1$. Daí, $\bar{\alpha}^2 \geq C_1^2$ e de (3.26)

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx \geq C_2 + 2\bar{\alpha}\bar{\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \psi_R dx, \tag{3.27}$$

com $C_2 = C_1^2 |\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$.

Se $\bar{\alpha}\bar{\beta} < 0$, a limitação inferior segue facilmente do 1^o PASSO. Essa limitação também é imediata se $\bar{\alpha}\bar{\beta} = 0$ e se $\bar{\alpha}\bar{\beta} > 0$ com $\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \psi_R dx \geq 0$. Provemos a limitação inferior para $\bar{\alpha}\bar{\beta} > 0$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \psi_R dx < 0$. Temos

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \psi_R dx &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \psi_R dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| |\nabla \psi_R| dx. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Usando o 1^o PASSO, para R suficientemente grande, podemos afirmar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| |\nabla \psi_R| dx \leq \frac{C_2}{4}, \tag{3.29}$$

e de (3.27), (3.28) e (3.29), e usando o fato de que $\bar{\alpha}\bar{\beta} \leq 1$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx \geq C_2 - 2\bar{\alpha}\bar{\beta}\frac{C_2}{4} \geq C_2 - \frac{C_2}{2} = \frac{C_2}{2}.$$

De maneira análoga podemos provar a limitação inferior de $\int_{\mathbb{R}^N} w^2|\nabla w|^2 dx$ e $\int_{\mathbb{R}^N} V w^2 dx$, restando-nos mostrar essa limitação para o termo $\int_{\mathbb{R}^N} |w|^{p+1} dx$.

Notemos que, para R suficientemente grande,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |w|^{p+1} dx &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1} |\bar{\alpha}u + \bar{\beta}\psi_R|^{p+1} dx + \int_{B_1} |\bar{\alpha}u + \bar{\beta}\psi_R|^{p+1} dx \\
&\geq \int_{B_1} |\bar{\alpha}u + \bar{\beta}\psi_R|^{p+1} dx \\
&\geq \left[\left(\int_{B_1} |\bar{\alpha}u|^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{p+1}} - \left(\int_{B_1} |\bar{\beta}\psi_R|^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{p+1}} \right]^{p+1} \\
&\geq \left[C_1 |u|_{L^{p+1}(B_1)} - \left(\int_{B_1} |\bar{\beta}\psi_R|^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{p+1}} \right]^{p+1} \\
&\geq \left[C_1 |u|_{L^{p+1}(B_1)} - \left(\int_{B_R} |\bar{\beta}\psi_R|^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{p+1}} \right]^{p+1}. \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

Usando o Teorema de Mudança de Variável, temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} |\bar{\beta}\psi_R(x)|^{p+1} dx &= \int_{B_R} |\bar{\beta}\psi(x + 2Re_1)|^{p+1} dx \\
&= \int_{B_R(2Re_1)} |\bar{\beta}\psi(x)|^{p+1} dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |\psi(x)|^{p+1} dx. \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Pela Observação C.1 (após o Teorema C.26),

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |\psi(x)|^{p+1} dx \to 0. \qquad (3.32)$$

Assim, de (3.31) e (3.32),

$$\int_{B_R} |\bar{\beta}\psi_R(x)|^{p+1} dx \to 0 \qquad (3.33)$$

e de (3.30) e (3.33) podemos concluir que $\int_{\mathbb{R}^N} |w|^{p+1} dx$ é limitada inferiormente por uma constante positiva.

Observemos agora que

$$\begin{aligned}
I(\alpha u + \beta\psi_R) &= \frac{r^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx + \frac{r^4}{2} \int_{\mathbb{R}^N} w^2 |\nabla w|^2 dx \\
&+ \frac{r^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V w^2 dx - \frac{r^{p+1}}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{p+1} dx. \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

Suponhamos $p+1>4$. Então, para r suficientemente grande, temos

$$r^2 < r^4. \tag{3.35}$$

Logo, de (3.34) e (3.35), para r suficientemente grande,

$$I(\alpha u+\beta\psi_R) < \frac{r^4}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla w|^2+w^2|\nabla w|^2+Vw^2\right)dx - \frac{r^{p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|w|^{p+1}dx. \tag{3.36}$$

Como $\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|^2dx, \int_{\mathbb{R}^N}w^2|\nabla w|^2dx$ e $\int_{\mathbb{R}^N}Vw^2dx$ são limitados superiormente e $\int_{\mathbb{R}^N}|w|^{p+1}dx$ é limitado inferiormente por uma constante positiva, existem $A_1, B_1>0$ tais que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla w|^2+w^2|\nabla w|^2+Vw^2\right)dx \le A_1 \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^N}|w|^{p+1}dx \ge B_1. \tag{3.37}$$

De (3.36) e (3.37),

$$\begin{aligned} I(\alpha u+\beta\psi_R) &< \frac{A_1}{2}r^4 - \frac{B_1}{p+1}r^{p+1} \\ &= r^4\left(\frac{A_1}{2}-\frac{B_1}{p+1}r^{p-3}\right). \end{aligned}$$

Como $p-3>0$, pois $p+1>4$, então, para r suficientemente grande,

$$I(\alpha u+\beta\psi_R)\le 0.$$

Suponhamos agora $p+1=4$. Temos $\gamma(u)=0$, já que $u\in S$. Além disso, usando uma mudança de variável e sabendo que $\gamma^\infty(\psi)=0$, podemos afirmar $\gamma^\infty(\psi_R)=0$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^2+2u^2|\nabla u|^2+Vu^2-|u|^4\right)dx = 0 \tag{3.38}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla\psi_R|^2+2\psi_R^2|\nabla\psi_R|^2+V\psi_R^2-|\psi_R|^4\right)dx = 0. \tag{3.39}$$

Desde que u,ψ_R,V são funções positivas e $V_\infty>0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}Vu^2dx>0 \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^N}V\psi_R^2dx>0. \tag{3.40}$$

De (3.38), (3.39) e (3.40),

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(2u^2|\nabla u|^2-|u|^4\right)dx<0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N}\left(2\psi_R^2|\nabla\psi_R|^2-|\psi_R|^4\right)dx<0.$$

Assim, existem $C_3, C_4 > 0$ tais que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(2u^2|\nabla u|^2 - |u|^4\right) dx \leq -C_3 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \left(2\psi_R^2|\nabla \psi_R|^2 - |\psi_R|^4\right) dx \leq -C_4.$$

Seja $C_5 = \min\{C_3, C_4\}$. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(2u^2|\nabla u|^2 - |u|^4\right) dx \leq -C_5 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \left(2\psi_R^2|\nabla \psi_R|^2 - |\psi_R|^4\right) dx \leq -C_5,$$

implicando que

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^4 dx \leq -C_6 \tag{3.41}$$

e

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \psi_R^2|\nabla \psi_R|^2 - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} |\psi_R|^4 dx \leq -C_6, \tag{3.42}$$

onde $C_6 = \dfrac{C_5}{4}$.

Usando o 1^o PASSO, podemos escrever

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} w^2|\nabla w|^2 dx = \frac{\bar{\alpha}^4}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 dx + \frac{\bar{\beta}^4}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \psi_R^2|\nabla \psi_R|^2 dx + O(e^{-\delta R}) \tag{3.43}$$

e

$$\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} w^4 dx = \frac{\bar{\alpha}^4}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^4 dx + \frac{\bar{\beta}^4}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \psi_R^4 dx + O(e^{-\delta R}). \tag{3.44}$$

Subtraindo (3.44) de (3.43) e usando (3.41) e (3.42), temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} w^2|\nabla w|^2 dx - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} w^4 dx &= \bar{\alpha}^4\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 dx - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} u^4 dx\right) \\
&+ \bar{\beta}^4\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \psi_R^2|\nabla \psi_R|^2 dx - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \psi_R^4 dx\right) + O(e^{-\delta R}) \\
&\leq (\bar{\alpha}^4 + \bar{\beta}^4)(-C_6) + O(e^{-\delta R}) \\
&\leq -C_7 C_6 + O(e^{-\delta R}), \qquad (3.45)
\end{aligned}$$

onde C_7 é uma constante positiva que satisfaz

$$\bar{\alpha}^4 + \bar{\beta}^4 \geq C_7.$$

De (3.45), para R suficientemente grande, existe $B_2 > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} w^2|\nabla w|^2 dx - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} w^4 dx \leq -B_2. \tag{3.46}$$

Assim, de (3.34) e (3.46),

$$
\begin{aligned}
& I(\alpha u+\beta\psi_R)\\
= \;& \frac{r^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|^2dx+\frac{r^4}{2}\int_{\mathbb{R}^N}w^2|\nabla w|^2dx+\frac{r^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}Vw^2dx-\frac{r^4}{4}\int_{\mathbb{R}^N}|w|^4dx\\
= \;& r^2\left[\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla w|^2+Vw^2\right)dx\right]+r^4\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}w^2|\nabla w|^2dx-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}|w|^4dx\right)\\
\leq \;& A_2r^2-B_2r^4\\
= \;& r^2(A_2-B_2r^2),
\end{aligned}
$$

onde A_2 é uma constante positiva verificando

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla w|^2+Vw^2\right)dx\leq A_2.$$

Sendo $B_2>0$ segue que, para R suficientmente grande,

$$I(\alpha u+\beta\psi_R)\leq 0.$$

3^o **PASSO:** Concluir a estimativa de $\sup_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}} I(\alpha u+\beta\psi_R)$.

Pelo 1^o PASSO,

$$I(\alpha u+\beta\psi_R)=I(\alpha u)+I(\beta\psi_R)+O(e^{-\delta R}). \tag{3.47}$$

Temos também

$$\gamma(\psi_R)\to 0 \text{ quando } R\to+\infty.$$

De fato, para verificar isto, observemos que

$$
\begin{aligned}
\gamma^\infty(\psi_R)-\gamma(\psi_R) &= \int_{\mathbb{R}^N}(V^\infty-V(x))\psi_R^2(x)dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}(V^\infty-V(x))\psi^2(x+2Re_1)dx.
\end{aligned}
$$

Como $\gamma^\infty(\psi_R)=0$, basta mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N}(V^\infty-V(x))\psi^2(x+2Re_1)dx\to 0 \;\; \textit{quando} \;\; R\to+\infty. \tag{3.48}$$

Usando a condição $(V1)$, dado $\varepsilon>0$, existe $R_1>0$ tal que

$$0\leq V_\infty-V(x)\leq\varepsilon, \forall x\in\mathbb{R}^N\backslash B_{R_1}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R_1}}(V^\infty - V(x))\psi^2(x+2Re_1)dx &\leq \varepsilon\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R_1}}\psi^2(x+2Re_1)dx\\ &\leq \varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}\psi^2(x+2Re_1)dx,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R_1}}(V^\infty - V(x))\psi^2(x+2Re_1)dx \leq \varepsilon|\psi|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Daí, para $R > R_1$,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R}}(V^\infty - V(x))\psi^2(x+2Re_1)dx \leq \varepsilon|\psi|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

mostrando que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R}}(V^\infty - V(x))\psi^2(x+2Re_1)dx \to 0 \quad quando \quad R \to +\infty. \tag{3.49}$$

Por outro lado, dado $R > 0$, sendo $V_\infty - V$ contínua em $\mathbb{R}^N$, existe $C_8 > 0$ tal que

$$V^\infty - V(x) \leq C_8, \forall x \in B_R(2Re_1). \tag{3.50}$$

Usando mudança de variável e (3.50), seque que

$$\begin{aligned}\int_{B_R}(V^\infty - V(x))\psi^2(x+2Re_1)dx &= \int_{B_R(2Re_1)}(V_\infty - V(x-2Re_1))\psi^2(x)dx\\ &\leq C_8\int_{B_R(2Re_1)}\psi^2(x)dx\\ &\leq C_8\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R}\psi^2(x)dx\\ &\leq C_8\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R}\left(\psi^2+|\nabla\psi|^2\right)dx. \end{aligned}\tag{3.51}$$

Pelo Lema 3.1, existem $C_9, R_2, \delta > 0$ tais que, para $R \geq R_2$,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R}\left(\psi^2+|\nabla\psi|^2\right)dx \leq C_9e^{-\delta R}. \tag{3.52}$$

Assim, de (3.51) e (3.52), para $C_{10} = C_8C_9$,

$$\int_{B_R}(V^\infty - V(x))\psi^2(x+2Re_1)dx \leq C_{10}e^{-\delta R},$$

implicando que

$$\int_{B_R}(V^\infty - V(x))\psi^2(x+2Re_1)dx \to 0 \quad quando \quad R \to +\infty. \tag{3.53}$$

De (3.49) e (3.53), obtemos (3.48) e podemos concluir que

$$\gamma(\psi_R) \to 0 \quad \text{quando} \quad R \to +\infty.$$

Daí, pelo Lema 1.3, existe $t_R \in (0, +\infty)$ tal que

$$t_R\psi_R \in S \;\; e \;\; t_R \to 1 \;\; quando \;\; R \to +\infty. \tag{3.54}$$

Usando o Lema 1.1, segue que

$$I(\beta\psi_R) = I\left(\frac{\beta}{t_R} t_R\psi_R\right) \leq I(t_R\psi_R). \tag{3.55}$$

De (3.47) e (3.55),

$$\begin{aligned} I(\alpha u + \beta\psi_R) &= I(\alpha u) + I(\beta\psi_R) + O(e^{-\delta R}) \\ &\leq I(\alpha u) + I(t_R\psi_R) + O(e^{-\delta R}) \\ &\leq I(u) + I(t_R\psi_R) + O(e^{-\delta R}). \end{aligned} \tag{3.56}$$

Observemos agora que

$$\begin{aligned} I^\infty(t_R u_R) - I(t_R u_R) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V(x))\,(t_R\psi_R(x))^2 dx \\ &= \frac{t_R^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V(x))\,\psi_R^2(x) dx. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Como $t_R \to 1$, então

$$t_R^2 \to 1.$$

Assim, para R suficientemente grande,

$$t_R^2 \geq 1 - e^{-\delta R}. \tag{3.58}$$

De (3.56), (3.57) e (3.58), obtemos

$$I(\alpha u + \beta\psi_R) \leq I(u) + I^\infty(t_R u_R) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V(x))\,\psi_R^2(x) dx + O(e^{-\delta R}). \tag{3.59}$$

Usando uma mudança de variáveis, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V(x))\,\psi_R^2(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V(x - 2Re_1))\,\psi^2(x) dx \\ &\geq \int_{B_1} (V_\infty - V(x - 2Re_1))\,\psi^2(x) dx. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Logo, de (3.59) e (3.60),

$$\begin{aligned} I(\alpha u + \beta\psi_R) &\leq I(u) + I^\infty(t_R u_R) - \frac{1}{2}\int_{B_1} (V_\infty - V(x - 2Re_1))\, \psi^2(x)dx \\ &+ O(e^{-\delta R}). \end{aligned} \tag{3.61}$$

Para R suficientemente grande, temos

$$|x - 2Re_1| \geq M, \tag{3.62}$$

onde M é a constante dada em (9). De (9) e (3.62), segue que

$$V(x - 2Re_1) \leq V_\infty - \frac{A}{1 + |x - 2Re_1|^m}$$

e daí,

$$\frac{1}{2}\int_{B_1} (V_\infty - V(x - 2Re_1))\, \psi^2(x)dx \geq \frac{A}{2}\int_{B_1} \frac{\psi^2(x)}{1 + |x - 2Re_1|^m}. \tag{3.63}$$

Seja $x \in B_1$. Usando desigualdade triangular, obtemos

$$|x - 2Re_1|^m \leq (1 + 2R)^m$$

Logo, para $R > 1$, temos $R^m > 1$ e ficamos com

$$\begin{aligned} 1 + |x - 2Re_1|^m &\leq R^m + (1 + 2R)^m \\ &\leq R^m + (R + 2R)^m \\ &= (1 + 3^m)R^m. \end{aligned}$$

Como existe $C_{11} > 0$ verificando

$$\psi(x) \geq C_{11}, \forall x \in B_1,$$

segue que

$$\begin{aligned} \frac{A}{2}\int_{B_1} \frac{\psi^2(x)}{1 + |x - 2Re_1|^m}dx &\geq \frac{AC_{11}^2}{2(1 + 3^m)R^m}\int_{B_1} dx \\ &= \frac{C_{12}}{R^m}, \end{aligned} \tag{3.64}$$

onde $C_{12} = \dfrac{AC_{11}^2 VolB_1}{2(1 + 3^m)}$.

De (3.61), (3.63) e (3.64), temos

$$\begin{aligned} I(\alpha u+\beta\psi_R) &\leq I(u)+I^\infty(t_R\psi_R)-\frac{C_{12}}{R^m}+O(e^{-\delta R}) \\ &\leq I(u)+I^\infty(\psi)-\frac{C_{12}}{R^m}+O(e^{-\delta R}) \\ &= c^0+c^\infty-\frac{C_{12}}{R^m}+O(e^{-\delta R}). \end{aligned}$$

Para R suficientemente grande, podemos afirmar que

$$I(\alpha u+\beta\psi_R)<c^0+c^\infty.$$

Provaremos agora que existe $a>0$ e b <0 tais que $au+b\psi_R\in S^*$. Se isso ocorrer, então teremos

$$c^*\leq I(au+b\psi_R)<c^0+c^\infty$$

e o lema estará provado.

Pelo 2^o PASSO, existem $R_0>0$ e $r_0>0$ tais que para todo $R\geq R_0$ e $r\geq r_0$, com $r^2=\alpha^2+\beta^2$, temos

$$I(\alpha u+\beta\psi_R)\leq 0.$$

Observemos que se $r_1\geq r_0$, para $r^2=\alpha^2+\beta^2\geq r_1^2$ também temos

$$I(\alpha u+\beta\psi_R)\leq 0.$$

Logo, podemos supor r_0 grande, se necessário. Notemos ainda que não existem $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tais que $\alpha u+\beta\psi_R\in S^*$ quando $R\geq R_0$ e $r\geq r_0$, pois se existisse, em particular, teríamos $\alpha u+\beta\psi_R\in S$, e consequentemente,

$$0<c^0\leq I(\alpha u+\beta\psi_R)\leq 0,$$

o que é um absurdo!

Assim, basta verificarmos a existência de $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ satisfazendo $\alpha u+\beta\psi_R\in S^*$ em B_{r_0}.

Fixado $0<\varepsilon<1/2$, podemos supor r_0 (tomando r_0 maior, se necessário) de modo que

$$P=[\varepsilon,2-\varepsilon]\times[-\varepsilon,-2+\varepsilon]\subset B_{r_0},$$

como podemos ver na Figura 3.1.

Para $\alpha, \beta \in P$, seja

$$u_{\alpha,\beta} = \alpha u + \beta \psi_R.$$

Temos

$$u_{\alpha,\beta}^{+} = \alpha u \quad \text{e} \quad u_{\alpha,\beta}^{-} = -\beta \psi_R.$$

Consideremos $f : P \to \mathbb{R}^2$ a aplicação dada por

$$f(\alpha, \beta) = (f_1(\alpha, \beta), f_2(\alpha, \beta)),$$

onde

$$f_1(\alpha, \beta) = -\gamma(u_{\alpha,\beta}^{+}) \text{ e } f_2(\alpha, \beta) = \gamma(u_{\alpha,\beta}^{-}).$$

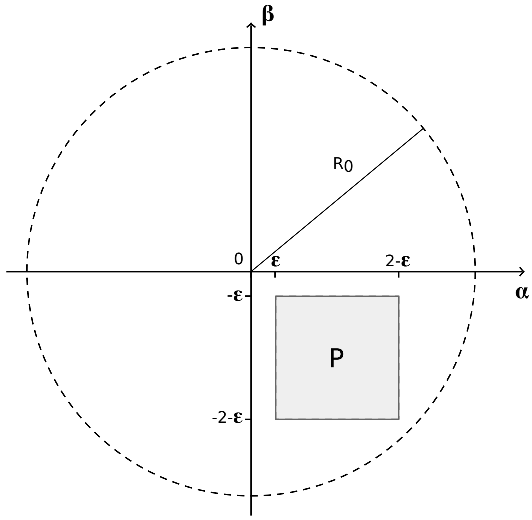

Figura 3.1: Região P.

De maneira análoga ao que fizemos na demonstração do Lema 1.7, usando Teorema de Poincaré-Miranda, podemos mostrar que existe $(a, b) \in P$ tal que

$$f(a, b) = 0,$$

ou seja,

$$f_1(a, b) = 0 \text{ e } f_2(a, b) = 0.$$

Daí,

$$\gamma(u_{a,b}^{+}) = 0 \text{ e } \gamma(u_{a,b}^{-}) = 0.$$

Assim, pondo $\bar{u} = u_{a,b} = u_{a,b}^{+} - u_{a,b}^{-}$, temos

$$\bar{u} = au^{+} + bu^{-} \in S^{*}.$$

Portanto, o lema está demonstrado.

$\blacksquare$

Vamos agora provar o Teorema 0.2.

Demonstração do Teorema 0.2 Seja (u_n) uma sequência tal que

$$u_n \in S_n^*, \quad I(u_n) = c_n^* \to c^*, \tag{3.65}$$

que existe pelos Lemas 1.8 e 1.9.

Como $I(u_n)$ é limitada e $\gamma(u_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, podemos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx, \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx, \int_{\mathbb{R}^N} V u_n^2 dx \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx$$

são todos limitados e existe $C_1 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx \geq C_1.$$

Em particular,

$$\int_{B_n} |\nabla u_n|^2 dx, \int_{B_n} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx, \int_{B_n} V u_n^2 dx \text{ e } \int_{B_n} |u_n|^{p+1} dx$$

são limitados e podemos assumir

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx \to A \in (0, +\infty).$$

Pelo Lema 3.2, temos

$$c^* < c^0 + c^\infty.$$

Logo,

$$\liminf_{n \to +\infty} I(u_n) = c^* < c^0 + c^\infty.$$

Segue do Lema 2.1 que dado $\varepsilon > 0$, existem $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ e $r > 0$ tais que

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_{B_r(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq A - \varepsilon.$$

Afirmação: (x_n) é limitada.

Suponha por contradição que (x_n) não é limitada. Então,

$$\gamma^\infty(u_n) - \gamma(u_n) = o(1),$$

de onde segue que

$$\gamma^\infty(u_n) \to 0,$$

já que $\gamma(u_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observemos também que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^\pm|^2 dx, \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^\pm)^2 |\nabla u_n^\pm|^2 dx, \int_{\mathbb{R}^N} V(u_n^\pm)^2 dx \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} |u_n^\pm|^{p+1} dx$$

são limitados e existe $C_2 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^\pm|^{p+1} dx \geq C_2.$$

Em particular,

$$\int_{B_n} |\nabla u_n^\pm|^2 dx, \int_{B_n} (u_n^\pm)^2 |\nabla u_n^\pm|^2 dx, \int_{B_n} V(u_n^\pm)^2 dx \text{ e } \int_{B_n} |u_n^\pm|^{p+1} dx$$

são limitados e podemos assumir

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^\pm|^{p+1} dx \to A^\pm \in (0, +\infty).$$

Pelo Lema 1.3, existem $(t_n), (s_n) \subset (0, +\infty)$ tais que

$$t_n \to 1, s_n \to 1 \quad \text{e} \quad t_n u_n^+, s_n u_n^- \in S^\infty.$$

Assim,

$$\begin{aligned} c^0 + c^\infty < c^\infty + c^\infty &\leq I^\infty(t_n u_n^+) + I^\infty(s_n u_n^-) \\ &= I(t_n u_n^+) + I(s_n u_n^-) + o(1) \\ &\leq I(u_n^+) + I(u_n^-) + o(1) \\ &= I(u_n) + o(1), \end{aligned}$$

implicando que

$$c^0 + c^\infty \leq \liminf_{n \to +\infty} I(u_n) = c^*,$$

ou seja,

$$c^0 + c^\infty \leq c^*,$$

o que é um absurdo pelo Lema 3.2.

Portanto, (x_n) é limitada. Segue então que

$$u_n^\pm \to u^\pm \quad \text{em} \quad L^{p+1}(\mathbb{R}^N).$$

Temos ainda

$$u_n^\pm \rightharpoonup u^\pm \quad \text{em} \quad H_0^1(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad \nabla((u_n^\pm)^2) \rightharpoonup \nabla((u^\pm)^2) \quad \text{em} \quad L^2(\mathbb{R}^N).$$

Logo,

$$\gamma(u^{\pm}) \leq \liminf_{n\to+\infty} \gamma(u_n^{\pm}) = 0$$

e assim,

$$2\int_{\mathbb{R}^N} (u^{\pm})^2 |\nabla u^{\pm}|^2 dx \quad < \quad \int_{\mathbb{R}^N} |u^{\pm}|^{p+1} dx.$$

Pelo Lema 1.2, existem $t, s \in (0, +\infty)$ tais que $tu^+, su^- \in S$.

Sejam

$$w_n = tu_n^+ - su_n^- \quad \text{e} \quad w = tu^+ - su^-.$$

Daí, $w \in S^*$. Além disso, usando a Observação 1.1 e o Lema 1.1, temos

$$I(w_n) = I(tu_n^+ - su_n^-) = I(tu_n^+) + I(su_n^-) \leq I(u_n^+) + I(u_n^-) = I(u_n)$$

e assim,

$$c^* \leq I(w) \leq \liminf_{n\to+\infty} I(w_n) \leq \lim_{n\to+\infty} I(u_n) = c^*,$$

implicando que

$$I(w) = c^*.$$

Pelo Lema 1.7, w é solução de (1). Por fim, mostraremos que w possui exatamente dois domínios nodais. De fato, suponha que w tem mais de dois domínios nodais, digamos D_1 e D_2, domínios nodais positivos, e D_3 um domínio nodal negativo. Sejam

$$w_i(x) = \begin{cases} w(x), & \text{se} \quad x \in D_i \\ 0, & \text{se} \quad x \notin D_i \end{cases},$$

com $i = 1, 2, 3$.

Então, $w_1, w_2, w_3 \in X$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 w_i^2 dx < +\infty \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} w^2 |\nabla w_i|^2 dx < +\infty,$$

com $i = 1, 2, 3$. Daí,

$$\begin{aligned} \langle I'(w), w_i \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla w_i dx + \int_{\mathbb{R}^N} w^2 \nabla w \nabla w_i dx + \int_{\mathbb{R}^N} w |\nabla w|^2 w_i dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} V(x) w w_i dx - \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{p-1} w w_i dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $i = 1, 2, 3$.

Notemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla w_i dx &= \int_{D_i} \nabla w \nabla w_i dx \\ &= \int_{D_i} |\nabla w_i|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_i|^2 dx.\end{aligned}$$

Repetindo este procedimento para os outros termos de $\langle I'(v), v_i \rangle$, obtemos

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + 2w_i^2)|\nabla w_i|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V w_i^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |w_i|^{p+1} dx = \gamma(w_i),$$

isto é,

$$\gamma(w_i) = 0, \forall i \in \{1, 2, 3\}. \tag{3.66}$$

Definamos agora $u_1 = w_1 + w_3$. Observemos que $u_1^+ = w_1$ e $u_1^- = w_2$. De (3.66), $u_1^+ \in S$ e $u_1^- \in S$, implicando que $u_1 \in S^*$. Como, de (3.66), $w_2 \in S$, então

$$c^* = I(w) = I(u_1 + w_2) = I(u_1) + I(w_2) \geq c^* + c^0,$$

ou seja,

$$c^* \geq c^* + c^0,$$

de onde segue que

$$c^* \leq 0,$$

o que é um absurdo!

Portanto, w possui exatamente dois domínios nodais e concluímos a demonstração do **Teorema 0.2**.

$\blacksquare$

Capítulo 4

Existência de Soluções Positivas via Passo da Montanha

Neste capítulo, vamos considerar a equação de Schrödinger quasilinear

$$-\Delta u + V(x)u - \frac{1}{2}(\Delta(|u|^2))u = \lambda |u|^{p-1}u \quad em \quad \mathbb{R}^N, \tag{4.1}$$

onde $4 \leq p+1 < 2.2^* = \frac{4N}{N-2}, N \geq 3, \lambda > 0$ e o potencial $V = V(x), x \in \mathbb{R}^N$, é uma função localmente Hölder contínua e satisfaz

$$V_0 = \inf_{\mathbb{R}^N} V > 0.$$

Mostramos no Capítulo 2 que (4.1) tem uma solução positiva e no Capítulo 3, uma solução nodal. Para isto, impomos algumas hipóteses sobre V e usamos o Método de Nehari.

Neste capítulo, iremos usar o Teorema do Passo da Montanha para provar a existência de soluções positivas para (4.1), com outras hipóteses sobre o potencial V.

As hipóteses que vamos supor sobre V são as seguintes:

(H1) $\lim\limits_{|x| \to +\infty} V(x) = +\infty$;

(H2) V é radialmente simétrico, isto é, $V(x) = V(|x|)$;

(H3) V é periódico em todas as variáveis $x_1, x_2, ..., x_N$;

(H4) $V_\infty = \lim\limits_{|x| \to +\infty} V(x) = \|V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < +\infty$.

Para este caso, definimos uma solução fraca para (4.1) da seguinte forma:

Definição 4.1 *Dizemos que uma função* $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *é uma solução fraca de (1) se* $u \in Y$*, onde* Y *é um conjunto que será definido mais adiante, e satisfaz*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1+u^2)\nabla u \nabla \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} u|\nabla u|^2 \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u\phi dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} u\phi dx = 0, \quad (4.2)$$

para toda $\phi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$.

O principal resultado que iremos mostrar neste capítulo é o

Teorema 4.1 *Seja* $4 \leq p+1 < 2.2^*$*. Então, para qualquer* $\lambda > 0$*, (4.1) tem solução positiva, desde que uma das seguintes condições sejam válidas: (H1); (H2); (H3); (H4).*

Uma das novidades deste capítulo é a introdução de um Espaço de Orlicz. Por isso, dedicamos a próxima seção para tratar dos conceitos básicos envolvendo estes espaços. Nas seções seguintes, reformularemos o problema, fazendo uma mudança de variável, e provaremos o **Teorema 4.1**.

Vale destacar que não demonstraremos todos os resultados detalhadamente. Em alguns casos, daremos apenas uma ideia e em outros, omitiremos a prova.

4.1 Espaços de Orlicz

Antes de continuarmos o nosso estudo, faremos uma breve introdução aos Espaços de Orlicz. Veremos as definições básicas e alguns teoremas, dos quais omitiremos as demonstrações. No entanto, para mais detalhes, consultar, por exemplo, [1], [12] e [14].

Definição 4.2 *Seja* Ω *um subconjunto de* $\mathbb{R}^N$*. Seja* $\phi = \phi(t)$ *uma função não negativa definida em* $[0, +\infty)$*. Denotamos por* $\tilde{L}_\phi(\Omega)$ *o conjunto de todas as funções mensuráveis a Lebesgue definidas em quase todo ponto de* Ω *tais que*

$$\int_\Omega \phi(|u(x)|)dx < +\infty.$$

O conjunto $\tilde{L}_\phi(\Omega)$ *é chamado classe de Orlicz e usaremos a notação*

$$\rho(u;\phi) = \int_\Omega \phi(|u(x)|)dx < +\infty.$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1 *Consideremos* $\phi(t) = Ct^p$*, onde* $p \geq 1$ *e* C *é uma constante positiva arbitrária. Notemos que*

$$\int_{\Omega} \phi(|u(x)|)dx = C \int_{\Omega} |u(x)|^p dx.$$

Logo, $\tilde{L_\phi}(\Omega) = L^p(\Omega), 1 \leq p < +\infty$.

Exemplo 2 *Sejam* $\phi(t) = |sen \quad t|$, $t \in [0, +\infty)$ *e* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma função mensurável. Então,*

$$\int_{\Omega} \phi(|u(x)|)dx = \int_{\Omega} |sen \quad |u(x)||dx \leq \int_{\Omega} dx = \mu(\Omega).$$

Assim, se $\mu(\Omega) < +\infty$, *toda função mensurável pertence a* $\tilde{L_\phi}(\Omega)$.

Exemplo 3 *Consideremos* $N = 1$, $\Omega = (0, 1)$ *e* $\phi(t) = e^t$. *Então, a função* $u(x) = -\frac{1}{2} \ln x$ *pertence a* $\tilde{L_\phi}(\Omega)$, *enquanto* $v(x) = -\ln x = 2u(x)$ *não pertence.*

De fato, notemos que $u(x) = \ln x^{-\frac{1}{2}}$ *e*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi\left(|u(x)|\right) dx = \int_0^1 e^{|u(x)|} dx = \int_0^1 e^{lnx^{-\frac{1}{2}}} dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2.$$

Por outro lado, $v(x) = \ln x^{-1}$ *e*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi\left(|v(x)|\right) dx = \int_0^1 e^{|u(x)|} dx = \int_0^1 e^{lnx^{-1}} dx = \int_0^1 x^{-1} dx = +\infty.$$

Observação 4.1 *O Exemplo 3 mostra que nem sempre uma classe de Orlicz é um espaço vetorial.*

Definição 4.3 *Dizemos que uma função* Φ *é uma N-função se podemos escrever*

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds, t \geq 0,$$

onde φ *é uma função definida em* $[0, +\infty)$ *satisfazendo*

(i) $\varphi(0) = 0$;
(ii) $\varphi(s) > 0$ *para* $s > 0$;
(iii) φ *é contínua a direita em qualquer* $s \geq 0$;
(iv) φ *é não decrescente em* $(0, +\infty)$;
(v) $\lim_{s \to +\infty} \varphi(s) = +\infty$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4 *Consideremos* $\Phi(t) = \dfrac{t^p}{p}$, *com* $p > 1$ *e* $t \geq 0$. *Observemos que* $\Phi'(t) = t^{p-1}$ *e podemos escrever*

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds,$$

onde $\varphi(s) = t^{p-1}$. *Desde que* φ *satisfaz as condições de (i)-(v) da Definição 4.3, podemos concluir que* Φ *é uma N-função.*

Exemplo 5 *Consideremos a função* $\Phi(t) = e^t - t - 1, t \geq 0$. *Então,* Φ *é uma N-função. De fato, basta verificarmos que*

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds,$$

com $\varphi(s) = e^t - 1$, *e* φ *satisfaz os itens (i)-(v) da Definição 4.3.*

Exemplo 6 *Seja* Φ *a função dada por* $\Phi(t) = e^{t^2} - 1, t \geq 0$. *Então,*

$$\Phi'(t) = 2te^{t^2}.$$

Daí,

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds,$$

onde $\varphi(s) = 2se^{s^2}$. *As condições (i)-(iii) e (v) são claramente satisfeitas. Além disso,*

$$\varphi'(s) = (2 + 4s^2)e^{s^2}.$$

Como $\varphi' > 0$, *temos* φ *crescente e assim,* φ *satisfaz (iv). Portanto,* Φ *é uma N-função.*

Exemplo 7 *A função* $\Phi = t, t \geq 0$, *que corresponde ao espaço* $L^1(\Omega)$ *não é uma N-função. De fato, temos*

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds,$$

onde $\varphi(s) = 1, \forall s \in (0, +\infty)$. *Observemos que*

$$\varphi(0) = 1 \ e \lim_{s \to +\infty} \varphi(s) = 1,$$

mostrando que φ *não satisfaz os itens (i) e (v) da Definição 4.3. Assim,* Φ *não é uma N-função.*

Definição 4.4 *Seja* Φ *uma N-função com*

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds.$$

Ponhamos

$$\psi(t) = \sup_{\varphi(s) \leq t} s, t \geq 0, \ e \ \Psi(t) = \int_0^t \psi(s)ds.$$

A função Ψ *é chamada uma função complementar para* Φ.

Observação 4.2 *Ψ é também uma N-função e dizemos que Φ e Ψ são N-funções complementares. Para mais detalhes, ver [12].*

Exemplo 8 *Para $p > 1$ e $\Phi(t) = \dfrac{t^p}{p}$, uma função complementar é dada por $\Psi(t) = \dfrac{t^q}{q}$, onde $q = \dfrac{p}{p-1}$, ou seja, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Com efeito, temos*

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds,$$

com $\varphi(s) = s^{p-1}$. Dado $t > 0$, seja $s_0 > 0$ tal que $\varphi(s_0) = t$. Daí, $s_0^{p-1} = t$ e, consequentemente, $s_0 = t^{\frac{1}{p-1}}$. Notemos que

$$\psi(t) = \sup_{\varphi(s) \leq t} s = s_0.$$

Assim,

$$\psi(t) = t^{\frac{1}{p-1}},$$

de onde segue que

$$\Psi(t) = \int_0^t \psi(s)ds = \int_0^t s^{\frac{1}{p-1}} ds = \frac{t^{\frac{p}{p-1}}}{\frac{p}{p-1}},$$

isto é,

$$\Psi(t) = \frac{t^q}{q},$$

com $q = \dfrac{p}{p-1}$.

Exemplo 9 *As funções $\Phi(t) = e^t - t - 1$ e $\Psi(t) = (1+t)\ln(1-t) - t$ são N-funções complementares. De fato, temos*

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds,$$

onde $\varphi(s) = e^s - 1$. Então, dado $t > 0$, seja $s_0 > 0$ tal que $\varphi(s_0) = t$. Daí, $e^{s_0} - 1 = t$, implicando que $s_0 = \ln(t+1)$. Sendo

$$\psi(t) = \sup_{\varphi(s) \leq t} s = s_0,$$

segue que

$$\psi(t) = \ln(t+1),$$

implicando que

$$\Psi(t) = \int_0^t \ln(s+1)ds = (t+1)\ln(t+1) - t.$$

Definição 4.5 *Dizemos que uma N-função Φ satisfaz a condição Δ_2, e denotamos por $\Phi \in \Delta_2$, se existem constantes $k > 0$ e $T \geq 0$ tais que*

$$\Phi(2t) \leq k\Phi(t), \forall t \geq T.$$

Exemplo 10 *Consideremos $\Phi(t) = t^p, p > 1$. Então,*

$$\Phi(2t) = (2t)^p = 2^p t^p.$$

Tomando $k = 2^p$ e $T = 0$, temos que Φ satisfaz a condição Δ_2.

Definição 4.6 *Sejam Φ e Ψ N-funções complementares e u uma função mensurável definida em quase todo ponto de $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. O número*

$$\|u\|_\Phi = \sup_v \int_\Omega |u(x)v(x)|dx,$$

onde o supremo é tomado sobre todas as funções $v \in \tilde{L}_\Psi(\Omega)$ tais que

$$\rho(v; \Psi) \leq 1,$$

é chamado a norma de Orlicz de u. O conjunto

$$L_\Phi(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \ \ mensurvel; \|u\|_\Phi < +\infty\}$$

é chamado Espaço de Orlicz.

Vejamos alguns resultados envolvendo Classes de Orlicz e Espaços de Orlicz. A demonstração dos Teoremas 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5 podem ser encontrada em [14], enquanto a do Teorema 4.6, em [12].

Teorema 4.2 *(i) Suponha $\mu(\Omega) < +\infty$. Então, $\tilde{L}_\Phi(\Omega)$ é um espaço vetorial se, e somente se, $\Phi \in \Delta_2$;*
(ii) Suponha $\mu(\Omega) = +\infty$ e $\phi \in \Delta_2$ com $T = 0$. Então, $\tilde{L}_\Phi(\Omega)$ é um espaço vetorial.

Teorema 4.3 *O conjunto $L_\Phi(\Omega)$ é um espaço vetorial e $\|.\|_\Phi$ é uma norma em $L_\Phi(\Omega)$.*

Teorema 4.4 *Seja Φ uma N-função satisfazendo a condição Δ_2 (com $T = 0$ se $\mu(\Omega) = +\infty$). Então,*

$$L_\Phi(\Omega) = \tilde{L}_\Phi(\Omega).$$

Teorema 4.5 *O Espaço de Orlicz $L_\Phi(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Teorema 4.6 *Seja Φ uma N-função e $u \in L_\Phi(\Omega)$. Então, vale*

$$\|u\|_\Phi = \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left[1 + \int_\Omega \Phi(ku(x))dx\right]. \tag{4.3}$$

Observação 4.3 *Pelos teoremas 4.4, 4.5 e 4.6, se Φ uma N-função satisfazendo a condição Δ_2 (com $T = 0$ se $\mu(\Omega) = +\infty$), então $\tilde{L}_\Phi(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma dada em (4.3). De fato, pelo Teorema 4.4, $L_\Phi(\Omega) = \tilde{L}_\Phi(\Omega)$. Mas, pelos Teoremas 4.5 e 4.6, $L_\Phi(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma dada em (4.3). Consequentemente, $\tilde{L}_\Phi(\Omega)$ também é um espaço de Banach com a norma dada em (4.3).*

Vejamos agora definições de convergência em $L_\Phi(\Omega)$.

Definição 4.7 *Dizemos que uma sequência $(u_n) \subset L_\Phi(\Omega)$ converge para $u \in L_\Phi(\Omega)$ em $L_\Phi(\Omega)$ quando*

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_\Phi = 0.$$

Definição 4.8 *Uma sequência $(u_n) \subset L_\Phi(\Omega)$ converge em média para $u \in L_\Phi(\Omega)$ quando*

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(u_n - u, \Phi) = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \Phi(|u_n(x) - u(x)|)dx = 0.$$

Teorema 4.7 *Seja Φ uma N-função satisfazendo a condição Δ_2 (com $T = 0$ se $\mu(\Omega) = +\infty$). Então,*

$$\|u_n - u\|_\Phi \to 0 \Leftrightarrow \rho(u_n - u, \Phi) \to 0.$$

Demonstração: Ver [14]. ∎

4.2 Reformulação do Problema e Resultados Preliminares

No que segue, os métodos adotados independem de $\lambda > 0$. Por isso, vamos supor $\lambda = 1$. Além disso, assumiremos

$$0 < V_0 = \inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) = 1. \tag{4.4}$$

Consideremos o funcional $J : Y \to \mathbb{R}$ dado por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx, \tag{4.5}$$

onde Y é o espaço vetorial fechado dado por

- $Y = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx \right\}$, sob a condição (H1);

- $Y = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); u \text{ é radial}\}$, sob a condição (H2);
- $Y = H^1(\mathbb{R}^N)$, sob as condições (H3) ou (H4).

Observemos que J não está bem definido nestes espaços. A ideia, neste caso, é fazer uma mudança de variável.

Seja $v = h(u) = \dfrac{1}{2}u\sqrt{1+u^2} + \dfrac{1}{2}\ln(u + \sqrt{1+u^2})$. Reescrevendo h como

$$h(u) = \frac{1}{2}u\sqrt{1+u^2} + \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

obtemos $h'(u) = \sqrt{1+u^2} > 0$, que podemos esvrever ainda $dv = \sqrt{1+u^2}du$.

Então, h é estritamente crescente, tem uma função inversa $u = f(v)$ e

$$f'(v) = \frac{1}{h'(u)} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+f^2(v)}}. \tag{4.6}$$

Vejamos algumas propriedades envolvendo as funções h e f. Inicialmente, notemos que

$$\lim_{|u|\to+\infty} \frac{\ln(u+\sqrt{1+u^2})}{u\sqrt{1+u^2}} = 0.$$

Daí, para $|u| >> 1$,

$$h(u) \sim \frac{1}{2}u\sqrt{1+u^2}.$$

Mas

$$\frac{1}{2}u\sqrt{1+u^2} \sim \frac{1}{2}u\sqrt{u^2} = \frac{1}{2}u|u|,$$

quando $|u| >> 1$. Logo, para $|u| >> 1$,

$$h(u) \sim \frac{1}{2}u|u|,$$

ou seja,

$$v \sim \frac{1}{2}f(v)|f(v)|$$

Assim,

$$f(v) \sim \sqrt{2|v|} \quad \text{e} \quad f^2(v) \sim 2|v|.$$

Agora, para $|u| << 1$,

$$h(u) \sim u,$$

ou seja,

$$f(v) \sim v \text{ e } f^2(v) \sim v^2.$$

Observemos que

$$|u| << 1 \Leftrightarrow |v| << 1$$

pois $h(0) = 0$ e h é contínua, e

$$|u| >> 1 \Leftrightarrow |v| >> 1.$$

Portanto, resumidamente, temos

$$h(u) \sim \begin{cases} u, & \text{se} \quad |u| << 1 \\ \frac{1}{2}u|u|, & \text{se} \quad |u| >> 1 \end{cases},$$

$$f(v) \sim \begin{cases} v, & \text{se} \quad |v| << 1 \\ \sqrt{2|v|}, & \text{se} \quad |v| >> 1 \end{cases}$$

e

$$G(v) = f^2(v) \sim \begin{cases} v^2, & \text{se} \quad |v| << 1 \\ 2|v|, & \text{se} \quad |v| >> 1 \end{cases}.$$

Seja $r(v) = \dfrac{G(2v)}{G(v)}$. Notemos que, para $|v| \sim \infty$,

$$r(v) \sim \frac{4v^2}{v^2} = 4.$$

Logo, r é limitado no infinito, ou seja, existem $C_1 > 0$ e $M > 0$ tais que

$$r(v) \leq C_1, \text{ para } |v| > M.$$

Por outro lado, sendo r contínua, pois G é contínua, existe $C_2 > 0$ tal que

$$r(v) \leq C_2, \text{ para } |v| \leq M.$$

Tomando $C_0 = \max\{C_1, C_2\}$, temos

$$r(v) \leq C_0,$$

ou seja,

$$G(2v) \leq C_0 G(v). \tag{4.7}$$

Observemos agora que

$$G'(v) = \frac{2f(v)}{\sqrt{1+f^2(v)}}. \tag{4.8}$$

Além disso,

$$G''(v) = \frac{2}{[1+f^2(v)]^2}. \tag{4.9}$$

Como $G'' > 0$, então G' é crescente e, consequentemente, G é convexa.

Afirmamos agora que existe $C_3 > 0$ tal que

$$f(t) \geq C_3 t, \text{ para } t \in [0,1].$$

De fato, se isso não ocorresse, então existiria uma sequência $(t_n) \subset [0,1]$ tal que

$$\frac{f(t_n)}{t_n} \to 0. \tag{4.10}$$

Logo,

$$f(t_n) \to 0. \tag{4.11}$$

Desde que (t_n) limitada, a menos de subsequências, existe $t_0 \geq 0$ tal que

$$t_n \to t_0.$$

Sendo f contínua, segue que

$$f(t_n) \to f(t_0). \tag{4.12}$$

De (4.11) e (4.12), $f(t_0) = 0$ e, assim, $t_n \to t_0 = 0$, já que $f(0) = 0$ e f é uma bijeção.

Por outro lado, usando o Teorema do Valor Médio, temos

$$\frac{f(t_n)}{t_n} = \frac{f(t_n) - f(0)}{t_n - 0} = f'(\theta t_n) = \frac{1}{\sqrt{1+f^2(\theta t_n)}},$$

para algum $\theta \in (0,1)$.

Usando novamente a continuidade de f, podemos concluir que, quando $t_n \to 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+f^2(\theta t_n)}} \to 1,$$

ou seja,

$$\frac{f(t_n)}{t_n} \to 1, \tag{4.13}$$

quando $t_n \to 0$, contrariando (4.10).

Portanto, existe $C_3 > 0$ tal que

$$f(t) \geq C_3 t, \quad para \quad t \in [0,1]. \tag{4.14}$$

Suponhamos $t \geq 1$. Desde que

$$f^2(t) \sim 2t$$

existem $C_4, C_5 > 0$ tais que

$$\frac{f^2(t)}{t} \geq C_4, \quad para \quad t > C_5. \tag{4.15}$$

Afirmamos que existe $C_6 > 0$ tal que

$$\frac{f^2(t)}{t} \geq C_6, \text{ para } t \in [1, C_5].$$

Se isso não ocorresse, então existiria $(t_n) \subset [1, C_5]$ tal que

$$\frac{f^2(t_n)}{t_n} \to 0,$$

e daí,

$$f(t_n) \to 0. \tag{4.16}$$

Agora, observando que (t_n) é limitada, a menos de subsequências, existe $t_1 \in [1, C_5]$ tal que $t_n \to t_1$. Pela continuidade de f,

$$f(t_n) \to f(t_1). \tag{4.17}$$

De (4.16) e (4.17), $f(t_1) = 0$ e daí, $t_1 = 0$, o que é um absurdo, pois $t_1 \geq 1$.

Portanto, existe $C_6 > 0$ tal que

$$\frac{f^2(t_n)}{t_n} \geq C_6, \quad para \quad t \in [1, C_5]. \tag{4.18}$$

Assim, de (4.14), (4.15) e (4.18), tomando $C_7 = \min\{C_4, C_6\}$, ficamos com

$$f(t) \geq \begin{cases} C_3 t, & \text{se} \quad t \in [0,1] \\ C_7 t^{\frac{1}{2}}, & \text{se} \quad t \geq 1 \end{cases}.$$

Após apresentadas algumas propriedades de f, h e G, vamos considerar I como sendo o funcional dado por $I(v) = J(f(v))$. De (4.5),

$$I(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v) dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |f(v)|^{p+1} dx.$$

Então, I está bem definido no espaço

$$H_G^1 = \left\{ v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}; \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx < +\infty \;\; e \;\; \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v) dx < +\infty \right\}.$$

Introduzimos neste momento o espaço de Orlicz

$$E_G = \left\{ v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}; \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v) dx < +\infty \right\},$$

com a norma

$$|v|_{E_G} = \inf_{\xi > 0} \xi \left\{ 1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) G[\xi^{-1} v(x)] dx \right\}.$$

Temos também que H_G^1 é um espaço vetorial normado cuja norma é dada por

$$\|v\|_{H_G^1} = |\nabla v|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + |v|_{E_G}.$$

Agora, estamos interessados em encontrar solução para a equação semilinear

$$-\Delta v = |f(v)|^{p-1} f(v) f'(v) - V(x) f(v) f'(v) \;\; em \;\; \mathbb{R}^N. \tag{4.19}$$

Neste caso, temos a seguinte definição:

Definição 4.9 *Uma solução fraca para a equação (4.19) é uma função $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tal que $v \in H_G^1$ e safisfaz*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f(v) f'(v) \phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |f(v)|^{p-1} f(v) f'(v) \phi dx = 0, \tag{4.20}$$

para toda $\phi \in H_G^1$.

Para simplicar um pouco a notação, no que segue denotaremos $\|.\|_{H_G^1}$ por $\|.\|$.

O primeiro resultado que veremos se refere ao espaço de Orlicz E_G.

Proposição 4.8 *(1) Se $v_n \to v$ em E_G, então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|G(v_n) - G(v)|dx \to 0 \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(v_n) - f(v)|^2 dx \to 0;$$

(2) Se $v_n(x) \to v(x)$ q.t.p. e

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)G(|v_n|)dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)G(|v|)dx,$$

então

$$v_n \to v \text{ em } E_G;$$

(3) Se $v \in E_G$ e $g(v) = G'(v) = 2f(v)f'(v)$, então a aplicação $T_v : H^1_G \to \mathbb{R}$ dado por

$$T_v(\phi) = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)g(v)\phi dx$$

é um funcional linear contínuo e

$$|T_v|_{E_G^*} = \sup_{|\phi|\le 1} \langle T_v, \phi\rangle \le C\left(1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)G(v)dx\right).$$

para alguma constante C, que independe de v.

Demonstração: Vamos mostrar os itens **(2)** e **(3)**. Vejamos a prova de **(2)**.

Neste caso, pelo Teorema 4.7, é suficiente mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)G(|v_n - v|)dx \to 0 \text{ quando } n \to +\infty.$$

Por hipótese, $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Usando o Lema de Fatou e a continuidade de G, para todo $A \subset \mathbb{R}^N$, temos

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to+\infty} \int_A V(x)G(|v_n|)dx &\ge \int_A \liminf_{n\to\infty} V(x)G(|v_n|)dx \\ &= \int_A V(x)G(|v|)dx. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Analogamente, podemos obter

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N\setminus A} V(x)G(|v_n|)dx \ge \int_{\mathbb{R}^N\setminus A} V(x)G(|v|)dx. \tag{4.22}$$

Afirmamos que a desigualdade estrita em (4.21) e (4.22) não pode ocorrer. De fato, se uma das desigualdades ocorre, então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)G(|v|)dx &= \int_A V(x)G(|v|)dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus A} V(x)G(|v|)dx \\ &< \liminf_{n\to\infty} \int_A V(x)G(|v_n|)dx + \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N\setminus A} V(x)G(|v_n|)dx \\ &\le \liminf_{n\to\infty} \left[\int_A V(x)G(|v_n|)dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus A} V(x)G(|v_n|)dx\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)G(|v_n|)dx \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)G(|v|)dx < \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)G(|v_n|)dx,$$

o que é um absurdo, pois, por hipótese,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)G(|v_n|)dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)G(|v|)dx.$$

Assim,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_A V(x)G(|v_n|)dx = \int_A V(x)G(|v|)dx, \forall A \subset \mathbb{R}^N.$$

Temos ainda que

Afirmação: Para todo $\varepsilon > 0$, existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$ tais que, para $n \geq n_0$ e $\forall A \subset \mathbb{R}^N$, com $|A| < \delta$, temos

$$\int_A V(x)G(|v_n|)dx < \varepsilon.$$

Suponhamos que a **Afirmação** é falsa para algum $\varepsilon_0 > 0$. Sabemos que existe $\delta > 0$ tal que, se $A \subset \mathbb{R}^N$, com $|A| < \delta$, então:

$$\int_A V(x)G(|v|)dx < \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{4.23}$$

Negando a **Afirmação**, temos que para $\delta_j = \dfrac{\delta}{2^j}$, $j = 1, 2, ...$, existem $n_j \geq j$ e $A_j \subset \mathbb{R}^N$, com $|A_j| < \delta_j$, tais que

$$\int_{A_j} V(x)G(|v_{n_j}|)dx \geq \varepsilon_0.$$

Tomando $A = \displaystyle\bigcup_{J=1}^{\infty} A_j$, segue que

$$\mu(A) \leq \sum_{J=1}^{\infty} \mu(A_j) < \sum_{J=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^j} = \delta.$$

Além disso,

$$\int_A V(x)G(|v_n|)dx \geq \int_{A_j} V(x)G(|v_n|)dx \geq \varepsilon_0,$$

o que implica

$$\int_A V(x)G(|v_n|)dx \geq \varepsilon_0.$$

Passando ao limite de $n \to \infty$, obtemos

$$\int_A V(x)G(|v|)dx \geq \varepsilon_0,$$

contrariando (4.23).

Com isto, a **Afirmação** está provada.

Agora consideremos A um conjunto limitado satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus A} V(x)G(|v|)dx \leq \varepsilon.$$

Para n suficientemente grande,

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus A} V(x)G(|v_n|)dx \leq \varepsilon.$$

Usando o fato de que G é convexa e satisfaz a condição Δ_2, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N \setminus A} V(x)G(|v_n - v|)dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus A} V(x)G(|v_n| + |v|)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N \setminus A} V(x)G\left(\frac{1}{2}2|v_n| + \frac{1}{2}2|v|\right)dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N \setminus A} V(x)G(2|v_n|)dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N \setminus A} V(x)G(2|v|)dx \\
&\leq \frac{C_0}{2}\int_{\mathbb{R}^N \setminus A} V(x)G(|v_n|)dx + \frac{C_0}{2}\int_{\mathbb{R}^N \setminus A} V(x)G(|v|)dx \\
&\leq \frac{C_0}{2}\varepsilon + \frac{C_0}{2}\varepsilon \\
&= C_0\varepsilon.
\end{aligned}$$

Para a integral $\int_A V(x)G(|v_n - v|)dx$, dividimos A em dois subconjuntos. Dados $n \in \mathbb{N}$ e $a > 0$, sejam

$$A_{1,n} = \{x \in A; |v_n(x) - v(x)| \leq a\} \text{ e } A_{2,n} = \{x \in A; |v_n(x) - v(x)| > a\}.$$

Notemos que

$$\int_{A_{1,n}} V(x)G(|v_n - v|)dx = \int_A V(x)G(|v_n - v|)\chi_{A_{1,n}}(x)dx$$

Por outro lado, como

$$v_n(x) - v(x) \to 0 \text{ q.t.p. em A},$$

e G é contínua, então

$$V(x)G(|v_n(x) - v(x)|)\chi_{A,n}(x) \to 0 \text{ q.t.p. em A}.$$

Além disso,

$$V(x)G(|v_n(x) - v(x)|)\chi_{A,n}(x) \leq V(x)G(a)$$

e, para alguma constante $C_1 > 0$,

$$\int_A V(x)G(a)dx = G(a)\int_A V(x)dx \leq C_1 G(a) < +\infty.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_A V(x)G(|v_n(x) - v(x)|)\chi_{A,n}(x)dx \to 0,$$

ou seja

$$\int_{A_{1,n}} V(x)G(|v_n(x) - v(x)|)\chi_{A,n}(x)dx \to 0.$$

Observemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)G(|v_n(x) - v(x)|)dx \leq \frac{C_0}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)G(|v_n(x)|)dx + \frac{C_0}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)G(|v(x)|)dx.$$

Como $\int_{\mathbb{R}^N} V(x)G(|v_n(x)|)dx$ é convergente, existe $C_2 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)G(|v_n - v|)dx \leq C_2.$$

Por outro lado,

$$G(a)|A_{2,n}| = \int_{A_{2,n}} G(a)dx \leq \int_{A_{2,n}} V(x)G(a)dx \leq \int_{A_{2,n}} V(x)G(|v_n - v|)dx \leq C_2.$$

isto é,

$$|A_{2,n}| \leq \frac{C_2}{G(a)}.$$

Desde que G é crescente, para $a \approx +\infty$,

$$|A_{2,n}| \approx 0.$$

Escolhamos a de modo que

$$|A_{2,n_0}| < \delta,.$$

para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Então,

$$|A_{2,n}| < \delta,\ \forall n \geq n_0.$$

Ou seja, existem $\delta > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que para $n \geq n_0$,

$$\int_{A_{2,n}} V(x)G(|v_n|)dx < \varepsilon \text{ e } \int_{A_{2,n}} V(x)G(|v|)dx < \varepsilon.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{A_{2,n}} V(x)G(|v_n - v|)dx &\leq \frac{C_0}{2}\int_{A_{2,n}} V(x)G(|v_n|)dx + \frac{C_0}{2}\int_{A_{2,n}} V(x)G(|v|)dx \\ &\leq C_0\varepsilon.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)G(|v_n - v|)dx \to 0,$$

e pelo Teorema 4.7,

$$v_n \to v \text{ em } E_G,$$

mostrando **(2)**.

Agora provaremos **(3)**. Seja $g(v) = G'(v) = 2f(v)f'(v)$. Então,

$$g(v) = \frac{2f(v)}{\sqrt{1 + f^2(v)}}.$$

Logo,

$$|g(v)| = \frac{2|f(v)|}{\sqrt{1 + f^2(v)}} \leq 2. \tag{4.24}$$

Além disso,

$$[g(v)]^2 = \frac{4f^2(v)}{1 + f^2(v)} \leq 4[f(v)]^2. \tag{4.25}$$

Sejam $\phi \in H^1_G$ e $\lambda > 0$. Usando (4.24) e (4.25), temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)g(v)\phi dx &= \int_{\lambda|\phi|\leq 1} V(x)g(v)\phi dx + \int_{\lambda|\phi|\geq 1} V(x)g(v)\phi dx \\ &\leq \int_{\lambda|\phi|\leq 1} V(x)g(v)\phi dx + 2\int_{\lambda|\phi|\geq 1} V(x)|\phi| dx \\ &\leq \left(\int_{\lambda|\phi|\leq 1} V(x)g^2(v)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\lambda|\phi|\leq 1} V(x)\phi^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + 2\int_{\lambda|\phi|\geq 1} V(x)|\phi| dx \\ &\leq 2\left(\int_{\lambda|\phi|\leq 1} V(x)f^2(v)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\lambda|\phi|\leq 1} V(x)\phi^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ 2\int_{\lambda|\phi|\geq 1} V(x)|\phi| dx,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)g(v)\phi dx &\leq 2\left(\int_{\lambda|\phi|\leq 1} V(x)f^2(v)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\lambda|\phi|\leq 1} V(x)\phi^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ 2\int_{\lambda|\phi|\geq 1} V(x)|\phi|dx \end{aligned} \tag{4.26}$$

Sabemos que existe uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$f(t) \geq C_3 t^{\frac{1}{2}}, t \geq 1,$$

o que implica

$$f^2(t) \geq C_3^2 t, t \geq 1.$$

Daí,

$$G(\lambda|\phi|) = f^2(\lambda|\phi|) \geq C_3^2 \lambda|\phi|,$$

de onde segue que

$$|\phi| \leq C_4 \frac{1}{\lambda} G(\lambda|\phi|),$$

com $C_4 = \frac{1}{C_3^2}$.

Logo,

$$\int_{\lambda|\phi|\geq 1} V(x)|\phi|dx \leq C_4 \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda|\phi|\geq 1} V(x)G(\lambda|\phi|)dx. \tag{4.27}$$

Temos também que existe $C_5 > 0$ tal que

$$f(t) \geq C_5 t, 0 \leq t \leq 1,$$

implicando

$$f^2(t) \geq C_5^2 t^2, 0 \leq t \leq 1.$$

Assim,

$$G(\lambda|\phi|) = f^2(\lambda|\phi|) \geq C_5^2 \lambda^2 |\phi|^2,$$

mostrando que

$$|\phi|^2 \leq \tfrac{1}{C_5^2}\tfrac{1}{\lambda^2} G(\lambda|\phi|).$$

Daí,

$$\left(\int_{\lambda|\phi|\leq 1} V(x)\phi^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_6 \frac{1}{\lambda}\left(\int_{\lambda|\phi|\leq 1} V(x)G(\lambda|\phi|)dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.28}$$

com $C_6 = \frac{1}{C_5}$.

Obvervemos ainda que

$$\begin{aligned} 2\left(\int_{\lambda|\phi|\leq 1} V(x)f^2(v)dx\right)^{\frac{1}{2}} &\leq 2\left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v)dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\left(1+\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v)dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\left(1+\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v)dx\right) \end{aligned} \tag{4.29}$$

De (4.26)-(4.29), ficamos com

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} V(x)g(v)\phi dx \\ \leq\ & 2\left(1+\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v)dx\right)\left(\int_{\lambda|\phi|\leq 1} V(x)G(\lambda|\phi|)dx\right)^{\frac{1}{2}} + 2\int_{\lambda|\phi|\geq 1} V(x)|\phi|dx \\ \leq\ & 2\left(1+\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v)dx\right)\left(\int_{\lambda|\phi|\leq 1} V(x)G(\lambda|\phi|)dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ +\ & 2\left(\int_{\lambda|\phi|\geq 1} V(x)|\phi|dx\right)\left(1+\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v)dx\right) \\ =\ & 2\left(1+\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v)dx\right)\left[\left(\int_{\lambda|\phi|\leq 1} V(x)G(\lambda|\phi|)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\lambda|\phi|\geq 1} V(x)|\phi|dx\right)\right] \\ \leq\ & 2C_8\left(1+\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v)dx\right)\left[\frac{1}{\lambda}\left(\int_{\lambda|\phi|\leq 1} V(x)G(\lambda|\phi|)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda|\phi|\geq 1} V(x)G(\lambda|\phi|)dx\right] \\ \leq\ & C_9\left(1+\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v)dx\right)\frac{1}{\lambda}\left[1+\int_{\mathbb{R}^N} V(x)G(\lambda|\phi|)dx\right], \end{aligned}$$

onde $C_8 = \max\{C_4, C_6\}$ e $C_9 = 2C_8$.

Daí,

$$T_v(\phi) = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)g(v)\phi dx \leq C_9\left(1+\int_{\mathbb{R}^N} V(x)G(v)dx\right)\|\phi\|.$$

Portanto, T_v é um funcional linear e contínuo. Além disso,

$$|T_v|_{E_G^*} = \sup_{|\phi|\leq 1}\langle w,\phi\rangle \leq C\left(1+\int_{\mathbb{R}^N} V(x)G(v)dx\right),$$

concluindo o resultado.

Proposição 4.9 ***(1)*** *A aplicação* $v \mapsto f(v)$ *de* H^1_G *em* $L^q(\mathbb{R}^N)$ *é contínua para* $q \in [2, 22^*]$*;*
(2) *A aplicação* $v \mapsto f(v)$ *de* H^1_G *em* $L^q(\mathbb{R}^N)$ *é compacta para:*
(i) $q \in [2, 22^*)$ *quando vale* $(H1)$*;*
(ii) $q \in (2, 22^*)$ *quando vale* $(H2)$*;*
(iii) $q \in [2, 22^*)$ *quando vale* $(H3)$ *ou* $(H4)$ *e considerando* $v \mapsto f(v)$ *de* H^1_G *em* $L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$*.*

Iremos omitir a demonstração dessa proposição.

Proposição 4.10 *(1)* I *é contínuo em* H^1_G*;*
(2) I *é diferenciável a Gautteaux e*

$$\langle I'(v), \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f(v) f'(v) \phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |f(v)|^{p-1} f(v) f'(v) \phi dx \tag{4.30}$$

para toda $\phi \in H^1_G$*;*
(3) Para $v \in H^1_G$*,* $I'(v)$ *é um funcional linear contínuo;*
(4) $I'(v)$ *é contínuo em* v *na topologia forte-fraca, isto é,*

$$v_n \to v \text{ em } H^1_G \Rightarrow I'(v_n) \rightharpoonup I'(v).$$

Demonstração:

Provemos **(1)**. Sejam $\{v_n\} \subset H^1_G$ e $v \in H^1_G$ tais que

$$v_n \to v \text{ em } H^1_G,$$

ou seja,

$$\|v_n - v\|_{H^1_G} \to 0.$$

Vamos provar que

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx$;
(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) dx \to \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v) dx$
(iii) $\displaystyle\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |f|^p(v_n) dx \to \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |f|^p(v) dx$.

Provemos (ii). Notemos que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v) dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |f^2(v_n) - f^2(v)| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |G(v_n) - G(v)| dx.
\end{aligned}$$

Observando que, em particular, $v_n \to v$ em E_G, segue da Proposição 4.8(1) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|G(v_n) - G(v)|dx \to 0.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_n)dx \to \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v)dx,$$

mostrando (ii).

Notemos que

$$|f(v_n)|^{p+1} - |f(v)|^{p+1} = (p+1)\int_0^1 |f|^{p-1}ff'(v + t(v_n - v))(v_n - v)dt.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{p+1}dx - \frac{1}{p+1}|f(v)|^{p+1}dx\right| \\
= & \left|\int_{\mathbb{R}^N} dx \int_0^1 |f|^{p-1}ff'(v + t(v_n - v))(v_n - v)dt\right| \\
= & \left|\int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}^N} |f|^{p-1}ff'(v + t(v_n - v))(v_n - v)dx\right| \\
\leq & \int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}^N} |f|^{p-1}|f|f'(v + t(v_n - v))|v_n - v|dx.
\end{aligned}$$

Desde que

$$|f(w)|f'(w) = \frac{|f(w)|}{\sqrt{1 + f^2(w)}} \leq 1, \forall w \in H_G^1,$$

podemos afirmar que

$$\left|\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{p+1}dx - \frac{1}{p+1}|f(v)|^{p+1}dx\right| \leq \int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}^N} |f(v+t(v_n-v))|^{p-1}|v_n-v|dx \tag{4.31}$$

Observemos que, para $p+1 < \frac{4N}{N-2}$, temos $(p-1)\frac{2N}{N+2} < \frac{4N}{N-2}$. Consequentemente,

$$|f|^{p-1} \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\mathbb{R}^N).$$

Além disso, $H_G^1 \subset L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Sendo 2^* e $\frac{2N}{N+2}$ expoentes conjugados, usando a desigualdade de Hölder, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(v+t(v_n-v))|^{p-1}|v_n-v|dx \leq \left[\int_{\mathbb{R}^N} |f|^{(p-1\frac{2N}{N+2})}(v + t(v_n - v))dx\right]^{\frac{N+2}{2N}} |v_n - v|_{L^{2^*}}. \tag{4.32}$$

Como $v \in D^{1,2} \hookrightarrow L^{2^*}$, então existe $C_1 > 0$ tal que

$$|v_n - v|_{L^{2^*}} \leq C_1|\nabla(v_n - v)|_{L^2} \leq C_1\|v_n - v\|, \tag{4.33}$$

De (4.31), (4.32) e (4.33),

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|f(v_n)|^{p+1}dx-\frac{1}{p+1}|f(v)|^{p+1}dx\right|\\
\leq\ & C_1\left[\int_{\mathbb{R}^N}|f|^{(p-1\frac{2N}{N+2})}(v+t(v_n-v))dx\right]^{\frac{N+2}{2N}}\|v_n-v\|. \qquad (4.34)
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
f^2(v+t(v_n-v)) &= G(v+t(v_n-v))\\
&= G((1-t)v+tv_n)\\
&\leq (1-t)G(v)+tG(v_n)\\
&\leq G(v)+G(v_n)\\
&= f^2(v)+f^2(v_n).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|f(v+t(v_n-v))|^{(p-1)\frac{2N}{N+2}} &= \left[f^2(v+t(v_n-v))\right]^{(p-1)\frac{N}{N+2}}\\
&\leq \left[f^2(v)+f^2(v_n)\right]^{(p-1)\frac{N}{N+2}}\\
&\leq 2^{(p-1)\frac{N}{N+2}}\left[|f(v)|^{(p-1)\frac{2N}{N+2}}+|f(v_n)|^{(p-1)\frac{2N}{N+2}}\right],
\end{aligned}$$

implicando que

$$\begin{aligned}
&\left[\int_{\mathbb{R}^N}|f(v+t(v_n-v))|^{(p-1)\frac{2N}{N+2}}dx\right]^{\frac{N+2}{2N}}\\
\leq\ & 2^{\frac{p-1}{2}}\left[\int_{\mathbb{R}^N}|f(v)|^{(p-1)\frac{2N}{N+2}}+|f(v_n)|^{(p-1)\frac{2N}{N+2}}dx\right]^{\frac{N+2}{2N}}\\
\leq\ & C_2 2^{\frac{p-1}{2}}\left[\|v\|^{\frac{2N}{N+2}}+\|v_n\|^{\frac{2N}{N+2}}\right]^{\frac{N+2}{2N}},
\end{aligned}$$

onde C_2 é uma constante obtida da continuidade da aplicação da Proposição 4.9(1).

Observando que $\|v_n\|$ é limitada, pois $\{v_n\}$ é convergente, concluimos de

$$\left[\int_{\mathbb{R}^N}|f(v+t(v_n-v))|^{(p-1)\frac{2N}{N+2}}\right]^{\frac{2N}{N+2}}$$

é limitado, e de (4.34), podemos afirmar que vale (iii).

Portanto, I é contínuo.

Agora mostraremos **(2)**.

Seja $v \in H^1_G$. Vamos provar que I é diferenciável a Gauteaux. Para isto, escreveremos

$$I(v) = J_1(v) + \frac{1}{2} J_2(v) - J_3(v), \tag{4.35}$$

onde

$$J_1(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx, J_2(v) = \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v) dx \text{ e } \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |f(v)|^{p+1} dx.$$

Dado $\phi \in H^1_G$, temos

$$J_1'(v)\phi = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \phi dx. \tag{4.36}$$

Provemos que

$$J_2'(v)\phi = 2\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f(v) f'(v)\phi dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(x) g(v)\phi dx,$$

com $g(v) = 2f(v)f'(v)$.

Notemos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t}\left[J_2(v+t\phi) - J_2(v)\right] - \int_{\mathbb{R}^N} V(x) g(v)\phi dx \\ = \; & \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)[G(v+t\phi) - G(v)]dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(x) g(v)\phi dx. \end{aligned}$$

Usando o Teorema do Valor Médio para Integrais, segue que

$$G(v+t\phi) - G(v) = t\int_0^1 G'(v+st\phi)\phi ds = t\int_0^1 g(v+st\phi)\phi ds.$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t}\left[J_2(v+t\phi) - J_2(v)\right] - \int_{\mathbb{R}^N} V(x) g(v)\phi dx \\ = \; & \int_{\mathbb{R}^N} dx \int_0^1 V(x)[g(v+st\phi) - g(v)]\phi ds \\ = \; & \int_0^1 ds \int_{\mathbb{R}^N} V(x)[g(v+st\phi) - g(v)]\phi dx. \end{aligned}$$

Sabemos que $|g(s)| \leq 2$ e $|g'(s)| = |G''(s)| \leq 2$. Daí,

$$|[g(v+ts\phi) - g(v)]\phi| \leq 4|\phi|.$$

Além disso,

$$|g(v+ts\phi) - g(v)| = st\left|\int_0^1 g'(v+\sigma st\phi)\phi d\sigma\right| \leq 2|\phi|,$$

implicando que

$$|g(v+ts\phi)-g(v)||\phi| \leq 2|\phi|^2.$$

Podemos escrever então,

$$|g(v+ts\phi)-g(v)||\phi| \leq \begin{cases} 2|\phi|^2, & \text{se} \quad |\phi|^2 \leq 1 \\ 4|\phi|, & \text{se} \quad |\phi| \geq 1 \end{cases}.$$

Assim, existe $C_3 > 0$ tal que

$$|[g(v+ts\phi)-g(v)]\phi| \leq C_3 G(\phi),$$

de onde segue que

$$V(x)|[g(v+ts\phi)-g(v)]\phi| \leq C_3 V(x) G(\phi).$$

Como $\phi \in H^1_G$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)G(\phi)dx < +\infty.$$

Usando a continuidade de g, podemos afirmar que

$$V(x)[g(v(x)+ts\phi(x))-g(v(x))]\phi(x) \to 0 \text{ q. t. p. em } \mathbb{R}^N,$$

quando $t \to 0^+$, para todo $s \in [0,1]$.

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)[g(v(x)+ts\phi(x))-g(v(x))]\phi(x)dx \to 0$$

quando $t \to 0^+$, para todo $s \in [0,1]$.

Daí,

$$\int_0^1 ds \int_{\mathbb{R}^N} V(x)[g(v(x)+ts\phi(x))-g(v(x))]\phi(x)dx \to 0$$

e podemos concluir que

$$J_2'(v)\phi = 2\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f(v)f'(v)\phi dx. \tag{4.37}$$

Observemos agora que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{t}[J_3(v+t\phi)-J_3(v)] - \int_{\mathbb{R}^N} |f|^{p-1}ff'(v)\phi dx \\
= & \frac{1}{t(p+1)}\left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(|f|^{p+1}(v+t\phi) - |f|^{p+1(v)}\right) dx\right] - \int_{\mathbb{R}^N} |f|^{p-1}ff'(v)\phi dx \\
= & \int_0^1 ds \int_{\mathbb{R}^N} \left[|f|^{p-1}ff'(v+ts\phi) - |f|^{p-1}ff'(v)\right]\phi dx \\
\leq & \int_0^1 ds \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(|f|^{p-1}ff'(v+ts\phi) - |f|^{p-1}ff'(v)\right)^{\frac{2N}{N+2}} dx\right]^{\frac{N+2}{2N}} |\phi|_{L^{2^*}}.
\end{aligned}$$

Temos que existe $C_4 > 0$ tal que

$$\left||f|^{p-1}ff'(v+ts\phi)-|f|^{p-1}ff'(v)\right|^{\frac{2N}{N+2}}\leq C_4\left[|f|^{(p-1)\frac{2N}{N+2}}(v+\phi)+|f|^{(p-1)\frac{2N}{N+2}}(v)\right].$$

Por outro lado,

$$[|f|^{p-1}ff'(v(x)+ts\phi(x))-|f|^{p-1}ff'(v(x))]^{\frac{2N}{N+2}}\to 0 \text{ q. t. p. em } \mathbb{R}^N,$$

quando $t\to 0^+$, para todo $s\in[0,1]$.

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(|f|^{p-1}ff'(v+ts\phi)-|f|^{p-1}ff'(v)\right)^{\frac{2N}{N+2}}dx\to 0,$$

quando $t\to 0^+$, para todo $s\in[0,1]$, e podemos concluir que

$$J_3'(v)\phi=\int_{\mathbb{R}^N}|f|^{p-1}ff'(v)\phi dx. \tag{4.38}$$

De (4.35), (4.36), (4.37) e (4.38),

$$\begin{aligned} I'(v)\phi &= J_1'(v)\phi+\frac{1}{2}J_2'(v)\phi-J_3'(v)\phi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\nabla v\nabla\phi dx+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)f(v)f'(v)\phi dx-\int_{\mathbb{R}^N}|f|^{p-1}ff'(v)\phi dx. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Com isso, mostramos **(2)**.

■

Provemos **(3)**. De (4.39) é fácil ver que, dado $v\in H_G^1$, $I'(v)$ é linear. Mostremos que $I'(v)$ é um funcional contínuo.

Seja $\phi\in H_G^1$. Então,

$$|J_1'(v)\phi|\leq\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v||\nabla\phi|dx\leq|\nabla u|_{L^2}|\nabla\phi|_{L^2}\leq|\nabla u|_{L^2}\|\phi\|,$$

mostrando que $J_1'(v)$ é contínuo.

Observemos que

$$\begin{aligned} |J_3'(v)\phi| &\leq \int_{\mathbb{R}^N}|f|^{p-1}ff'(v)\phi dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N}|f(v)|^{p-1}\phi dx \\ &\leq |f^{p-1}|_{L^{\frac{2N}{N+2}}}|\phi|_{L^{2^*}} \\ &\leq C_1|f^{p-1}|_{L^{\frac{2N}{N+2}}}|\nabla\phi|_{L^2} \\ &\leq C_1|f^{p-1}|_{L^{\frac{2N}{N+2}}}\|\phi\|, \end{aligned}$$

para alguma constante $C_5>0$.

Daí, $J_3'(v)$ é um funcional contínuo.

Por fim, pela Proposição 4.8(3), existe $C_6>0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)g(v)\phi dx \leq C_6\|\phi\|,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f(v)f'(v)\phi dx \leq C_7\|\phi\|,$$

com $C_7 = \frac{C_6}{2}$, mostrando que $J_2'(v)$ é contínuo.

Portanto, $I'(v)$ é um funcional linear contínuo.

Por fim, a convergência na topologia forte-fraco, segue do fato de que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[V(x)f(v_n)f'(v_n) - V(x)f(v)f'(v)\right]\phi dx \to 0,$$

para qualquer $\phi \in H_G^1$, quando $\|v_n - v\| \to 0$.

■

Observação 4.4 *Da Proposição (4.10)(2) e da Definição (4.9), temos que $v \in H_G^1$ é solução fraca de (4.19) se, e somente se,*

$$\langle I'(v), \phi\rangle = 0, \forall \phi \in H_G^1.$$

Proposição 4.11 *Se $v \in H_G^1$ é uma solução fraca positiva de (4.19), então $u = f(v)$ é uma solução fraca positiva de (4.1).*

Demonstração: Seja v uma solução fraca de (4.19). Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \psi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f(v)f'(v)\psi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |f(v)|^{p-1}f(v)f'(v)\psi dx = 0, \quad (4.40)$$

para toda $\psi \in H_G^1$.

Observemos que $u = f(v) \in Y$. Agora, dada $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, escolhamos $\psi = \frac{\phi}{f(v)}$. Desta forma, $\psi \in H_G^1$. Substituindo ψ em (4.40), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N}(1+u^2)\nabla u \nabla \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} u|\nabla u|^2 \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u\phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1}u\phi dx = 0. (4.41)$$

Assim, a igualdade (4.41) vale para toda $\phi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$, e daí, u é solução fraca de (4.1). Se v é uma função positiva, usando o fato de que f é estritamente crescente e $f(0) = 0$, podemos afirmar que $u = f(v)$ também é positiva. Com isso finalizados a prova da proposição.

■

4.3 Resultados de Existência

Nesta seção, apresentaremos mais alguns resultados e demonstraremos o **Teorema 4.1**

Proposição 4.12 **(1)** *Sejam* $c \in \mathbb{R}$ *e* $\{v_n\}$ *uma sequência* $(PS)_c$ *para* I. *Então,* $\{v_n\}$ *é limitada (em* H_G^1*);*
(2) *Se* $\{v_n\}$ *é uma sequência* $(PS)_c$ *e* $u_n = f(v_n)$ *converge em* L^{p+1}, *então existe* $v \in H_G^1$ *tal que*

$$v_n \to v \text{ em } H_G^1.$$

Consequentemente,

$$I(v) = \lim_{n\to+\infty} I(v_n) \text{ e } I'(v) = 0.$$

Demonstração: Vamos provar **(1)**. Seja $\{v_n\}$ uma sequência $(PS)_c$, para algum $c \in \mathbb{R}$. Então,

$$I(v_n) \to c \quad \text{e} \quad I'(v_n) \to 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Daí, podemos escrever

$$\begin{aligned} I(v_n) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)G(v_n)dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{p+1} dx \\ &= c + o(1). \end{aligned} \tag{4.42}$$

Além disso,

$$0 \le \frac{|\langle I'(v_n),\phi\rangle|}{\|\phi\|} \le \sup_{\phi\neq 0}\frac{|\langle I'(v_n),\phi\rangle|}{\|\phi\|} = \|I'(v_n)\|_{(H_G^1)^*} \to 0.$$

Logo,

$$\frac{\langle I'(v_n),\phi\rangle}{\|\phi\|} \to 0 \text{ quando } n \to +\infty, \forall \phi \in H_G^1\backslash\{0\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle I'(v_n),\phi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f(v_n)f'(v_n)\phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{p-1} f(v_n)f'(v_n)\phi dx \\ &= o(\|\phi\|), \forall \phi \in H_G^1. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Escolhamos $\phi_n = \dfrac{f(v_n)}{f'(v_n)} = \sqrt{1+f^2(v_n)}f(v_n)$. Então,

$$|\phi_n| \le C_1|v_n| \quad \text{e} \quad |\nabla\phi_n| \le 2|\nabla v_n|,$$

para alguma constante $C_1 > 0$. Daí, $\phi_n \in H_G^1$ e

$$\|\phi_n\| \leq C_2\|v_n\|, \tag{4.44}$$

onde $C_2 = \max\{2, C_1\}$.

Substituindo ϕ_n em (4.43), obtemos

$$\begin{aligned} \langle I'(v_n), \phi_n\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(1+\frac{f^2(v_n)}{1+f^2(v_n)}\right)|\nabla v_n|^2dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_n)dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N}|f(v_n)|^{p+1}dx. \end{aligned} \tag{4.45}$$

De (4.44), temos

$$\frac{1}{C_2\|v_n\|} \leq \frac{1}{\|\phi_n\|},$$

o que implica

$$0 \leq \frac{|\langle I'(v_n), \phi_n\rangle|}{C_2\|v_n\|} \leq \frac{|\langle I'(v_n), \phi_n\rangle|}{\|\phi_n\|} \to 0,$$

Logo,

$$\frac{|\langle I'(v_n), \phi_n\rangle|}{\|v_n\|} \to 0,$$

e podemos escrever

$$\langle I'(v_n), \phi\rangle = o(\|v_n\|). \tag{4.46}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} c + o(1) + o(\|v_n\|) &= I(v_n) - \frac{1}{p+1}\langle I'(v_n), \phi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\left(1+\frac{f^2(v_n)}{1+f^2(v_n)}\right)\right]|\nabla v_n|^2dx \\ &+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_n)dx. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Vamos considerar inicialmente $4 < p+1 < 2.2^*$.

De (4.47), temos que $\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_n)dx$ é limitado e, consequentemente, $\{v_n\}$ é limitada em H_G^1.

Suponhamos agora $p+1 = 4$. De (4.47), obtemos

$$\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\nabla v_n|^2}{1+f^2(v_n)}dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} v(x)f^2(v_n) = c + o(1) + o(\|v_n\|). \tag{4.48}$$

Seja $u_n = f(v_n)$. Então,

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} = f'(v_n)\frac{\partial v_n}{\partial x_i},$$

e daí,

$$|\nabla u_n|^2 = \frac{|\nabla u_n|^2}{1+f^2(v_n)}.$$

De (4.45) e (4.48), ficamos com

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}\left(1+2u_n^2\right)|\nabla u_n|dx + \int_{\mathbb{R}^N} Vu_n^2dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^4dx \\ = \;& o\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(1+2u_n^2\right)|\nabla u_n|dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} Vu_n^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\right] \qquad (4.49)\end{aligned}$$

e

$$\frac{1}{8}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2dx + \frac{1}{8}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)v_n^2dx \le c + o\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2|\nabla u_n|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]. \qquad (4.50)$$

Suponhamos $\|v_n\|$ limitada. Então, (4.49) e (4.50) implicam que, para n suficientemente grande,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2|\nabla u_n|^2dx < c + \int_{\mathbb{R}^N} u_n^4dx. \qquad (4.51)$$

Usando desigualdade de Hölder, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^4dx \le \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2dx\right)^{\frac{4}{N+2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{\frac{4N}{N-2}}dx\right)^{\frac{N-2}{N+2}}. \qquad (4.52)$$

De fato, para $\theta = \frac{N-2}{N+2}$ e $u = f(v), v \in H_G^1$, consideremos

$$F(u) = |u|^{2(1-\theta)} \quad \text{e} \quad G(u) = |u|^{\frac{4N}{N-2}\theta}$$

Logo, $F(u) \in L^{\frac{1}{1-\theta}}$ e $G(u) \in L^{\frac{1}{\theta}}$. Como $\frac{1}{1-\theta}$ e $\frac{1}{\theta}$ são expoentes conjugados, segue da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|F(u)||G(u)|dx &\le \left(\int_{\mathbb{R}^N}|F(u)|^{\frac{1}{1-\theta}}\right)^{1-\theta}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|G(u)|^{\frac{1}{\theta}}\right)^{\theta} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2\right)^{1-\theta}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{4N}{N-2}}\right)^{\theta} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2\right)^{\frac{4}{N+2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{4N}{N-2}}\right)^{\frac{N-2}{N+2}}. \qquad (4.53)\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$|F(u)||G(u)| = |u|^4. \qquad (4.54)$$

De (4.53) e (4.54), para $u = u_n$, obtemos (4.52).

Tomando $w_n = u_n^2$, temos $\nabla w_n \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e, consequentemente,

$$w_n \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N).$$

Logo, existe $C_3 > 0$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \leq C_3 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

isto é,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{\frac{4N}{N-2}} dx\right)^{\frac{N-2}{2N}} \leq C_4 \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

com $c_4 = 2C_3$.

Elevando ambos os membros a potência $\frac{2N}{N+2}$, ficamos com

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{\frac{4N}{N-2}} dx\right)^{\frac{N-2}{N+2}} \leq C_5 \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx\right)^{\frac{N}{N+2}}, \tag{4.55}$$

onde $C_5 = (C_4)^{\frac{2N}{N+2}}$.

De (4.52) e (4.55),

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^4 dx &\leq C_5 \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx\right)^{\frac{4}{N+2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx\right)^{\frac{N}{N+2}} \\ &\leq C_5 + o\left(\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx\right). \end{aligned} \tag{4.56}$$

Usando (4.51) e (4.56), podemos afirmar que $\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx$ é limitada e assim, $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx, \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_n^2 dx$ são limitados. Consequentemente, $\{u_n\}$ é limitada em H_G^1, o que é uma contradição, pois

$$\|v_n\| \to +\infty \Leftrightarrow \|u_n\| \to +\infty.$$

Portanto, $\{v_n\}$ é limitada em H_G^1.

Agora mostraremos **(2)**. Sendo $\{u_n\}$ convergente em L^{p+1}, existe $u \in L^{p+1}$ tal que $u_n \to u$ em L^{p+1}. Seja v tal que $u = f(v)$. A menos de subsequências, temos

(i) $v_n(x) \to v(x)$ q.t.p.;

(ii) $v_n \rightharpoonup v$ em L^{2^*};

(iii) $\nabla v_n \rightharpoonup \nabla v$ em L^2;

(iv) $f(v_n) \to f(v)$ em L^{p+1}.

Usando (ii) e a convexidade de G, temos

$$
\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)G(v)dx\right]-\left[\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)G(v_n)dx\right] \\
\geq\ & \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla v-\nabla v_n)\nabla v_n dx+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)f(v_n)f'(v_n)(v-v_n)dx \\
=\ & \int_{\mathbb{R}^N}|f|^{p-1}ff'(v_n)(v-v_n)dx+o(\|v-v_n\|)\to 0,
\end{aligned}
$$

implicando que, para n suficientemente grande,

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)G(v)dx\geq\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)G(v_n)dx.$$

Daí,

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)G(v)dx\geq\liminf_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)G(v_n)dx\right]. \tag{4.57}$$

Por outro lado, de (i), (iii) e do Lema de Fatou, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2dx\leq\liminf_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2dx \tag{4.58}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N}V(x)G(v)dx\leq\liminf_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)G(v_n)dx. \tag{4.59}$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)G(v)dx\leq\liminf_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)G(v_n)dx\right]. \tag{4.60}$$

De (4.57) e (4.60),

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)G(v)dx=\liminf_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)G(v_n)dx\right]. \tag{4.61}$$

Na verdade, em (4.58) e (4.59), valem as igualdades, pois do contrário, não poderia ocorrer (4.61). Como $v_n(x)\to v(x)$ q.t.p. e

$$\int_{\mathbb{R}^N}V(x)G(v)dx=\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)G(v_n)dx,$$

pela Proposição 4.8(3),

$$v_n\to v \text{ em } E_G.$$

Temos ainda

$$\nabla v_n \to \nabla v \text{ em } L^2.$$

Portanto,

$$v_n \to v \text{ em } H^1_G.$$

■

Agora vamos construir uma sequência (PS). Para isto, utilizaremos o Teorema de Passo da Montanha. Seja

$$c_0 = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H^1_G); \gamma(0) = 0 \ \ e \ \ I(\gamma(1)) \leq 0, \gamma(1) \neq 0\}$.

Para mostrar que c_0 está bem definido, precisamos provar que existe $v \in H^1_G \backslash \{0\}$ tal que $I(v) < 0$. E para que isto ocorra, é suficiente encontrar $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ verificando $J(u) < 0$ e considerar $v = h(u)$.

Sejam $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $t \in (0, +\infty)$. Notemos que J está bem definito em $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Suponhamos $4 < p+1 < 2.2^*$. Podemos mostrar, como fizemos no Lema 1.2, que para t suficientemente grande, $J(tw) < 0$. Logo, basta tomar $u = tw$.

Para $p + 1 = 4$, seja $w_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e considere $w_s(x) = w_0(sx)$. Então, $w_s \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e para $s > 0$ pequeno, obtemos

$$4 \int_{\mathbb{R}^N} w_s^2 |\nabla w_s|^2 dx < 2 \int_{\mathbb{R}^N} w_s^4 dx.$$

Fixemos tal $s > 0$. Daí,

$$J(tu_s) = t^2 A + t^4 B = t^4 \left(\frac{A}{t^2} + B \right),$$

onde

$$A = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_s|^2 + V(x) u_s^2 \right) dx \text{ e } B = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u_s^2 |\nabla u_s|^2 dx - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} u_s^4 dx.$$

Note que $A > 0$ e $B < 0$. Logo,

$$\lim_{t + \infty} J(tu_s) = -\infty,$$

Assim, para t grande $J(tw_s) < 0$. Tomando $u = tw_s$, temos o que desejamos.

O próximo resultado nos diz que o número c_0 construído acima é positivo.

Proposição 4.13 $c_0 > 0$.

Demonstração: Denote

$$S_\rho = \left\{ v \in H^1_G; \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V f^2(v) dx \right\} = \rho^2(v).$$

Sejam $v \in S_\rho$ e $w = f(v)|f(v)|$. Então,

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = 2|f(v)|f'(v)\frac{\partial v}{\partial x_i},$$

implicando que

$$|\nabla w|^2 = 4f^2(v)[f'(v)]^2|\nabla v|^2 = 4\frac{f^2(v)}{1+f^2(v)}|\nabla v|^2,$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx &= 4\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f^2(v)}{1+f^2(v)}|\nabla v|^2 dx \\
&\leq 4\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx \\
&\leq 4\left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V f^2(v) dx\right] \\
&= 4\rho^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx \leq 4\rho^2.$$

Além disso, como estamos supondo

$$V_0 = \inf_{\mathbb{R}^N} V = 1,$$

temos

$$1 \leq V(x), \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |w| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|w| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v) dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v) dx \\
&= \rho^2.
\end{aligned}$$

Procedendo de maneira análoga ao que fizemos no Lema 1.4, podemos provar que existe $C_1 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(v)|^{p+1}dx \leq C_1\rho^{2+\frac{2(p-1)}{N+2}}.$$

Logo,

$$I(v) \geq \rho^2\left(\frac{1}{2} - \frac{C_1}{p+1}\rho^{\frac{2(p1)}{N+2}}\right).$$

Para ρ suficientemente pequeno, existe $C_2 \geq 0$ tal que

$$I(v) \geq C_2.$$

Sejam $v \in H_G^1$ e $\gamma \in C([0,1], H_G^1)$, tal que

$$\gamma(0) = 0, \gamma(1) = v \text{ e } I(\gamma(1)) < 0.$$

Vamos provar que

$$t \to 0 \Rightarrow \rho(\gamma(t)) \to 0. \tag{4.62}$$

De fato, se $t \to 0$, pela continuidade de γ, temos

$$\gamma(t) \to \gamma(0) = 0.$$

Seja $\varphi = \gamma(t)$. Sendo I contínuo, segue que

$$I(\varphi) \to I(0) = 0.$$

Daí,

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^2dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(\varphi)dx \to \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |f(\varphi)|^{p+1}dx.$$

Da continuidade de f e da norma, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(\varphi)|^{p+1}dx \to 0 \text{ quando } \varphi \to 0.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^2dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(\varphi)dx \to 0 \text{ quando } \varphi \to 0$$

e podemos garantir a validade de (4.62).

De (4.62), existe $t > 0$ satisfazendo

$$I(\gamma(t)) \geq C_2.$$

Desta forma,

$$\sup_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \geq C_2,$$

e podemos concluir que

$$c_0 = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \geq C_2 > 0,$$

com $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H^1_G); \gamma(0) = 0, \gamma(1) \neq 0 \text{ e } I(\gamma(1)) < 0\}$.

Portanto, $c_0 > 0$.

■

O próximo resultado garante a existência da sequência $(PS)_{c_0}$.

Proposição 4.14 *Existe uma subsequência $\{v_n\} \subset H^1_G$ tal que $\{v_n\}$ é $(PS)_{c_0}$ para I com c_0 definido como*

$$c_0 = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H^1_G); \gamma(0) = 0, \gamma(1) \neq 0$ *e* $I(\gamma(1)) < 0\}$.

Demonstração: Este resultado segue de um argumento do Princípio Variacional de Eckeland e da continuidade forte-fraco da derivada de Gauteaux $I'(v)$. Iremos omitir os detalhes da demonstração.

■

Agora, vamos provar o **Teorema 4.1** quando valem $(H1)$ ou $(H2)$.

Prova do Teorema 4.1: Caso (H1) ou (H2).

Seja $\{v_n\} \subset H^1_G$ uma sequência $(PS)_{c_0}$ para o valor do Passo da Montanha $c_0 > 0$, que existe pela Proposição 4.14. Então,

$$I(v_n) \to c_0 \text{ e } I'(v_n) \to 0 \text{ quando } n \to +\infty.$$

Pela Proposição 4.12(1), $\{v_n\}$ é limitada. Sendo a aplicação $v \to f(v)$ compacta pela Proposição (4.9)(2), a menos de subsequências, segue que $\{f(v_n)\}$ é convergente em L^{p+1}. Pela Proposição 4.12(2), existe $v \in H^1_G$ satisfazendo

$$v_n \to v \text{ em } H^1_G.$$

Logo, pela Proposição 4.10(4),

$$I(v_n) \to I(v) \text{ e } I'(v_n) \rightharpoonup I(v),$$

implicando que

$$I(v) = c_0 \text{ e } I'(v) = 0.$$

Podemos supor $v(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$, substituindo v_n por $|v_n|$, se necessário. Sendo V localmente Hölder contínua, pela Teoria da Regularidade Elíptica, temos que v é suave. Além disso, podemos afirmar que

$$v(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

De fato, temos que v satisfaz a igualdade

$$-\Delta v + V(x)f(v(x))f'(v(x)) = |f(v(x))|^{p-1}f(v(x))f'(v(x)), x \in \mathbb{R}^N,$$

ou seja,

$$-\Delta v + \left[V(x) - |f(v(x))|^{p-1}\right] f(v(x))f'(v(x)), x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.63}$$

Suponhamos que existisse $y \in \mathbb{R}^N$ tal que $v(y) = 0$. Então, próximo de y, temos $f(v) \sim 0$ e, consequentemente, $f'(v) \sim 1$. Ao mesmo tempo, $f(v) \sim v$. Logo, podemos reescrever a equação (4.63) como

$$-\Delta v + k(x)v = 0,$$

onde $k = V(x) - |f(v(x))|^{p-1}$ pode ser considerada positiva em uma vizinhança $B_r(y)$ de y em que $v \neq 0$. Daí,

$$-\Delta v \leq 0.$$

Pelo Teorema C.25, v é constante em $B_r(y)$. Desde que $v(y) = 0$, temos $v = 0$ em $B_r(y)$, o que é um absurdo!

Portanto, $v(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, ou seja, v é uma solução fraca positiva de (4.19). Pela Proposição 4.11, $u = f(v)$ é uma solução fraca positiva de (4.1) e com isso concluimos o **Teorema 4.1**, casos $(H1)$ e $(H2)$.

■

Para provarmos o **Teorema 4.1**, sob as hipóteses $(H3)$ ou $(H4)$, precisaremos de mais alguns argumentos, obtidos a partir do Teorema C.23 (Princípio de Concentração - Compacidade) devido a P. L. Lions. Temos o seguinte lema:

Lema 4.1 *Seja* $\{v_n\} \subset H^1_G$ *uma sequência* $(PS)_{c_0}$ *para* I. *Então, passando a uma subsequência se necessário, temos*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{p+1} dx = A > 0.$$

Além disso, existe $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^N$ *tal que, para qualquer* $\varepsilon > 0$, *existe* $R > 0$ *satisfazendo*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(x_n)} |f(v_n)|^{p+1} dx \geq A - \varepsilon.$$

Demonstração: Sendo $\{v_n\}$ é uma sequência $(PS)_{c_0}$, segue da Proposição 4.12(1) que $\{v_n\}$ é limitada. Pela continuidade da aplicação $v \mapsto f(v)$ de H^1_G em L^{P+1}, podemos afirmar que $\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{p+1} dx$ é limitada. Daí, a menos de subsequêcias, existe $A \geq 0$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{p+1} dx = A.$$

Se supormos $A = 0$, então $f(v_n) \to 0$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. Usando a Proposição 4.12(2) e a continuidade de I, podemos obter

$$I(v_n) \to I(0) = 0,$$

implicando que $c_0 = 0$. Absurdo!

Portanto, devemos ter $A > 0$.

Seja $w_n = f^2(v_n)$. Pela Proposição 4.9(1), em particular, temos que a aplicação $v \mapsto f(v)$ de H^1_G em L^4 é contínua. Sendo $\{v_n\}$ limitada em H^1_G, seque que $\{f(v_n)\}$ é limitada em L^4 e assim, $\{w_n\}$ é limitada em L^2.

Além disso, temos

$$|\nabla w_n|^2 \leq 4|\nabla v_n|^2.$$

Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 dx \leq 4 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx \leq 4\|v_n\|,$$

de onde segue que $|\nabla w_n|_{L^2}$ é limitada. Assim, $\{w_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Definamos agora

$$\rho_n = \frac{A|w_n|^{\frac{p+1}{2}}}{\int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{\frac{p+1}{2}} dx}.$$

Observemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n dx = A.$$

Se ocorresse a nulidade no Teorema C.23, então de maneira análoga ao que fizemos no Lema 2.1, podemos concluir que existe $\{\rho_{n_k}\} \subset \{\rho_n\}$ tal que

$$w_{n_k} \to 0 \text{ em } L^q(\mathbb{R}^N), q \in (2, 2^*),$$

o que é um absurdo!

Assim, a nulidade não pode ocorrer.

Além disso, a dicotomia também não ocorre. De fato, suponha que ela ocorra. Então, analogamente ao que fizemos na demonstração do Lema (2.1), podemos concluir que, dado $\varepsilon > 0$, existem $\beta \in (0, 1]$ e $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tais que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$, verificando para todo $R' \geq R$,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(x_n)} |f(v_n)|^{p+1} dx \geq \beta A - \varepsilon$$

e

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R'}(x_n)} |f(v_n)|^{p+1} dx \geq (1 - \beta)A - \varepsilon.$$

Sejam η e ξ funções suaves definidas por

$$\eta(s) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad s \leq 2R \\ 0, & \text{se} \quad s \geq 3R \end{cases}$$

e

$$\xi(s) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad 2R \leq s \leq 3R \\ 0, & \text{se} \quad s \leq R \quad \text{ou} \quad s \geq 4R \end{cases}.$$

Afirmamos que

$$\int_{T_R} |\nabla v_n| dx + \int_{T_R} V f^2(v_n) dx + \int_{T_R} |f(v_n)|^{p+1} dx = o_R(1) + o_n(1) + O(\varepsilon), \tag{4.64}$$

onde $T_R = T_R(x_n) = \{x \in \mathbb{R}^N; 2R \leq |x - x_n| \leq 3R\}$.

Para ver isto, consideremos a aplicação

$$\phi_n(x) = \xi^2(|x - x_n|) f(v_n(x)) \sqrt{1 + f^2(v_n(x))}.$$

Usando o fato de que $\nabla \xi = O\left(\frac{1}{R}\right)$, temos $\|\phi_n\|$ limitado e $\langle I'(v_n), \phi_n \rangle = o_n(1)$.

Um cálculo direto mostra que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \xi^2 |\nabla v_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\xi^2 f^2(v_n) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \xi^2 |f(v_n)|^{p+1} dx + O\left(\frac{1}{R}\right) + o_n(1),$$

de onde segue (4.64). Usamos o fato de que

$$\int_{B_{4R}(x_n)\setminus B_R(x_n)} |f(v_n)|^{p+1} dx \leq 2\varepsilon.$$

Agora, definamos

$$w_n = \eta\left(|x - x_n|\right) v_n \text{ e } z_n = \left[1 - \eta\left(|x - x_n|\right)\right] v_n.$$

Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(w_n)|^{p+1} dx \geq \beta A - \varepsilon \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^N} |f(z_n)|^{p+1} dx \geq (1-\beta)A - \varepsilon, \tag{4.65}$$

com

$$A = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{p+1} dx.$$

Além disso, usando a estimativa em (4.65), obtemos

$$I(v_n) = I(w_n) + I(z_n) + o_R(1) + o_n(1) + O(\varepsilon). \tag{4.66}$$

Afirmação: $I(w_n) \geq c_0 + o(1)$ e $I(z_n) \geq c_0 + o(1)$.

Para mostrar a **Afirmação**, vamos construir uma curva $\gamma : [0,1] \to H^1_G$ verificando $\gamma(0) = 0, \gamma(1) < 0$ e

$$\sup_{t\in[0,1]} I\left(\gamma(t)\right) = I(w_n) + o(1).$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $\psi_n = \dfrac{f(w_n)}{f'(w_n)} = \sqrt{1 + f^2(w_n)} f(w_n)$. Então,

$$\begin{aligned} o(1) &= \langle I'(w_n), \psi_n \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[1 + \frac{f^2(w_n)}{1 + f^2(w_n)} |\nabla w_n|^2 dx\right] + \int_{\mathbb{R}^N} V f^2(w_n) dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} |f(w_n)|^{p+1} dx. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Isto segue de

$$\begin{aligned} o(1) &= \langle I'(v_n), \eta^2 \sqrt{1 + f^2(v_n)} f(v_n) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \eta^2 \left(1 + \frac{f^2(v_n)}{1 + f^2(v_n)}\right) |\nabla v_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \eta^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} \eta^2 |f(v_n)|^{p+1} dx \end{aligned}$$

e do fato de que $w_n = v_n$ para $|x - x_n| \leq 2R$ e $w_n = 0$ quando $|x - x_n| \geq 3R$.

Daí, substituindo $u_n = f(w_n)$ em (4.67), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(1+2u_n^2\right)|u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx = o(1).$$

Agora, vamos mostrar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um único $t_n \in (0,+\infty)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[1+2(t_n u_n)^2\right]|\nabla(t_n u_n)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(t_n u_n)^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |t_n u_n|^{p+1} dx = 0 \qquad (4.68)$$

e, além disso, $t_n \to 1$.

Sejam

$$a_n = \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2\right] dx, \quad b_n = 2\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx \quad \text{e} \quad c_n = \int_{\mathbb{R}^N} u_n|^{p+1} dx.$$

Então,

$$a_n + b_n - c_n = o(1). \qquad (4.69)$$

Pelo Lema 4.1,

$$c_n = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{p+1} dx \to c_* > 0.$$

Daí, (c_n) é limitada. Consequentemente, (a_n) e (b_n) são limitadas e podemos assumir

$$a_n \to a_* \text{ e } b_n \to b_*,$$

com $a_*, b_* \geq 0$.

Analogamente ao que fizemos na demonstração do Lema 1.3, podemos mostrar que $a_* > 0$.

Passando ao limite de $n \to +\infty$ em (4.69), obtemos

$$a_* + b_* - c_* = 0,$$

implicando que $b_* < c_*$ e daí, para n suficientemente grande,

$$b_n < c_n.$$

Novamente usando raciocínio análogo ao que utilizamos na demonstração do Lema 1.3, podemos mostrar que, para $n \in \mathbb{N}$, existe um único $t_n > 0$ tal que

$$a_n + t_n^2 b_n - t_n^{p-1} c_n = 0. \qquad (4.70)$$

e (t_n) é limitada e podemos assumir

$$t_n \to t_*,$$

para algum $t_* > 0$.

Daí, passando ao limite de $n \to +\infty$ em (4.70), ficamos com

$$a_* + b_* t_*^2 - c_* t_*^{p-1} = 0.$$

Definindo $g(t) = a_* + b_* t^2 - c_* t^{p-1}, t > 0$, observamos que 1 é a única raiz de g. Desta forma, $t_* = 1$ e $t_n \to 1$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \left[1 + 2(t_n u_n)^2\right] |\nabla (t_n u_n)|^2 dx &+ \int_{\mathbb{R}^N} V (t_n u_n)^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |t_n u_n|^{p+1} dx \\
&= t_n^2 a_n + t_n^4 - t_n^{p+1} c_n \\
&= t_n^2 (a_n + t_n^2 b_n - t_n^{p-1} c_n) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $\gamma : [0,1] \to H_G^1$ a aplicação dada por

$$\gamma(t) = h(tu_n).$$

Então,

$$\begin{aligned}
I(\gamma(t)) &= J(tu_n) \\
&= \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + V u_n^2\right) dx + \frac{t^4}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx,
\end{aligned}$$

implicando que

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} J(tu_n) \\
&= t \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + V u_n^2\right) dx + 2t^2 \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx - t^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx \right],
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + V u_n^2\right) dx + 2t^2 \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx - t^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx = 0. \tag{4.71}$$

Multiplicando (4.71) por t^2, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[1 + 2(tu_n)^2\right] |\nabla (tu_n)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V (tu_n)^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |tu_n|^{p+1} dx = 0. \tag{4.72}$$

De (4.72) e da unicidade de t_n satisfazendo (4.70), podemos concluir que $t = t_n$, ou seja,

$$I(\gamma(t)) = J(t_n u_n), \forall t \in [0,1].$$

Assim,

$$\sup_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) = J(t_n u_n).$$

Por outro lado, sabendo que $t_n \to 1$, temos

$$J(t_n u_n) - J(u_n) = o(1),$$

isto é,

$$J(t_n u_n) = J(u_n) + o(1).$$

Consequentemente,

$$c^0 = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \leq J(t_n u_n) = J(u_n) + o(1) = I(w_n) + o(1),$$

ou seja,

$$I(w_n) \geq c_0 + o(1).$$

Analogamente, podemos provar que

$$I(z_n) \geq c_0 + o(1).$$

Com isso, concluimos a demonstração da **Afirmação**.

De (4.66) e da **Afirmação**, obtemos

$$c_0 \leq 2c_0,$$

o que implica

$$c_0 \leq 0,$$

o que é um absurdo!

Assim, a dicotomia no Teorema C.23 também não ocorre.

Portanto, vale a compacidade no Teorema C.23 e a conclusão do lema é obtido de maneira análoga ao que fizemos na prova do Lema 2.1.

■

Agora, demonstraremos o **Teorema 4.1**, para os casos **(H3)** e **(H4)**.

Prova do Teorema 4.1: Caso (H3).

Seja $\{v_n\} \subset H^1_G$ uma sequência $(PS)_{c_0}$, que existe pela Proposição 4.14. Então,

$$I(v_n) \to c_0 \text{ e } I'(v_n) \to 0 \text{ quando } n \to +\infty.$$

Pelo Lema (4.1), existe $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$, verificando

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{B_R(y_n)} |f(v_n)|^{p+1} dx \geq \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{p+1} dx - \varepsilon.$$

Desde que $V = V(x)$ é periódica em toda variável de $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$, podemos assumir que $\{y_n\}$ é limitada. Daí, existe $M > 0$ tal que $|y_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$, e podemos mostrar que

$$f(v_n) \to 0 \text{ em } L^{p+1}(\mathbb{R}^N \backslash B_{\tilde{R}}),$$

com $\tilde{R} = M + R$.

Sabendo que $\{v_n\}$ é limitada em H^1_G, pela compacidade da aplicação $v \mapsto f(v)$ de $H^1_G \to L^{p+1}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, temos, a menos de subsequências, $\{f(v_n)\}$ convergente em $L^{p+1}(B_{\tilde{R}})$.

Logo, $\{f(v_n)\}$ converge em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$.

Pela Proposição 4.12(2), existe $v \in H^1_G$ tal que

$$v_n \to v \text{ em } H^1_G.$$

Assim, pela Proposição 4.10(4),

$$I(v_n) \to I(v) \text{ e } I'(v_n) \rightharpoonup I(v),$$

implicando que

$$I(v) = c_0 \text{ e } I'(v) = 0.$$

A conclusão segue como na prova do **Teorema 4.1**, caso **(H1)** ou **(H2)**.

■

Prova do Teorema 4.1: Caso (H4).

Seja $\{v_n\} \subset H^1_G$ uma sequência $(PS)_{c_0}$. Então,

$$I(v_n) \to c_0 \text{ e } I'(v_n) \to 0 \text{ quando } n \to +\infty.$$

Antes de continuarmos, precisamos tratar do problema obtido substituindo V por V_∞. Recordemos que, $V_\infty = \|V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$. Seja

$$I_\infty(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty f^2(v) dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |f(v)|^{p+1} dx.$$

Da mesma forma que fizemos para c_0, podemos definir

$$c_\infty = \inf_{\gamma \in \Gamma_\infty} \sup_{t\in[0,1]} I_\infty\left(\gamma(t)\right),$$

com

$$\Gamma_\infty = \{\gamma \in C([0,1], H_G^1); \gamma(0) = 0, I_\infty\left(\gamma(1)\right) < 0, \gamma(1) \neq 0\}.$$

Pelo Teorema 4.1 sob a condição (H3), I_∞ tem um ponto crítico $v_\infty \in H_G^1$ satisfazendo

$$I_\infty(v_\infty) = c_\infty \text{ e } I'(v_\infty) = 0.$$

Sejam $u_\infty = f(v_\infty)$ e $\gamma : [0,1] \to H_G^1$ a aplicação definida por

$$\gamma(t) = h(tu_\infty).$$

Vamos mostrar que

$$\sup_{t\in[0,1]} I_\infty\left(\gamma(t)\right) = I_\infty\left(\gamma(1)\right) = c_\infty.$$

Como γ é contínua,

$$\gamma(t) \to \gamma(1) \text{ quando } t \to 1^-.$$

Daí, pela continuidade de I_∞,

$$I_\infty(\gamma(t)) \to I_\infty(\gamma(t)) = I_\infty(v_\infty) \text{ quando } t \to 1^-.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < 1 - t < \delta \Rightarrow |I_\infty(\gamma(t)) - I_\infty(v_\infty)| < \varepsilon.$$

Em particular,

$$I_\infty(\gamma(t)) < I_\infty(v_\infty) + \varepsilon, \forall t \in (1-\delta, 1].$$

Assim,

$$\sup_{t\in(1-\delta,1]} I_\infty(\gamma(t)) \leq I_\infty(v_\infty) + \varepsilon.$$

Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, podemos concluir que

$$\sup_{t\in(1-\delta,1]} I_\infty(\gamma(t)) \leq I_\infty(v_\infty) = c_\infty.$$

Se $\delta \geq 1$, então

$$1-\delta \leq 0,$$

implicando que

$$\{t \in [0,1]; t \in (1-\delta,1]\} = [0,1],$$

pois

$$[0,1] \subset (1-\delta,1].$$

Daí,

$$\sup_{t\in[0,1]} I_\infty(\gamma(t)) \leq I_\infty(v_\infty) = c_\infty.$$

Suponhamos agora $\delta < 1$. Então, $1-\delta > 0$ e

$$(1-\delta,1] \subset [0,1].$$

Definindo $g(t) = I_\infty(\gamma(t))$, temos

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\gamma(t))|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(\gamma(t)) dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{N}^N} |\gamma(t)|^{p+1} dx \\ &= \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u_\infty|^2 + V(x) u_\infty^2 dx\right] + \frac{t^4}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_\infty^2 |\nabla u_\infty|^2 dx - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{N}^N} |u_\infty|^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Analogamente ao que fizemos no Lema 1.1, podemos afirmar que g é crecente em $[0,1]$. Logo,

$$\sup_{t\in[0,1]} I_\infty(\gamma(t)) = \sup_{t\in(1-\delta,1]} I_\infty(\gamma(t)) \leq c_\infty.$$

Em ambos os casos, obtemos

$$\sup_{t\in[0,1]} I_\infty(\gamma(t)) \leq c_\infty.$$

Por outro lado, da definição de c_∞ temos

$$\sup_{t\in[0,1]} I_\infty(\gamma(t)) \geq c_\infty.$$

Portanto,

$$\sup_{t\in[0,1]} I_\infty(\gamma(t)) = c_\infty.$$

Como V é contínua, $V(x) \leq V_\infty, \forall x \in \mathbb{R}^N$, e $V \neq V_\infty$, então

$$I(\gamma(t)) < I_\infty(\gamma(t)), \forall t \in [0,1].$$

Observemos que $I(\gamma)$ e $I_\infty(\gamma)$ são contínuas e definidas no compacto [0, 1]. Logo, podemos afirmar que

$$c_0 \leq \sup_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) < \sup_{t\in[0,1]} I_\infty(\gamma(t)) = c_\infty,$$

onde

$$c_0 = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)),$$

o que implica

$$c_0 < c_\infty.$$

Sendo $\{v_n\}$ uma sequência $(PS)_{c_0}$, existe $\{y_n\} \in \mathbb{R}^N$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ satisfazendo

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{B_R(y_n)} |f(v_n)|^{p+1}dx \geq \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{p+1}dx - \varepsilon.$$

Vamos mostrar que $\{y_n\}$ é limitada. Temos

$$I(v_n) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} Vf^2(v_n)dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{p+1}dx = c_0 + o(1).$$

Além disso, dado $n \in \mathbb{N}$, sabendo que $I'(v_n)\phi = o(1), \forall \phi \in H_G^1$, segue, para $\phi_n = \frac{f(v_n)}{f'(v_n)}$, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[1 + \frac{f^2(v_n)}{1+f^2(v_n)}|\nabla v_n|^2dx\right] + \int_{\mathbb{R}^N} Vf^2(v_n)dx - \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{p+1}dx = o(1).$$

Suponhamos que $y_n \to +\infty$. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty f^2(v_n)dx - \int_{\mathbb{R}^N} Vf^2(v_n)dx = o(1).$$

Daí,

$$I_\infty(v_n) = I(v_n) + o(1) = c_0 + o(1).$$

Temos ainda

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[1 + \frac{f^2(v_n)}{1 + f^2(v_n)}|\nabla v_n|^2 dx\right] + \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty f^2(v_n)dx - \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{p+1}dx = o(1). \quad (4.73)$$

Seja $u_n = f(v_n)$. De (4.73), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 + 2u_n^2)|u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}dx = o(1).$$

Procedendo de maneira análoga ao que fizemos na demonstração do Lema 4.1, temos

$$\sup_{t\in[0,1]} I_\infty(\gamma(t)) = J_\infty(u_n) + o(1),$$

onde $\gamma(t) = h(tu_n)$ e

$$J_\infty(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2)|\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}dx.$$

Assim,

$$c_\infty \le \sup_{t\in[0,1]} I_\infty(\gamma(t)) = J_\infty(u_n) + o(1) = I_\infty(v_n) + o(1) = c_0 + o(1),$$

isto é,

$$c_\infty \le c_0 + o(1).$$

Passando ao limite de $n \to +\infty$, obtemos

$$c_\infty \le c_0,$$

o que é um absurdo, já que $c_0 < c_\infty$.

Assim, $\{y_n\}$ é limitada. O restante da demonstração segue pelo mesmo argumento do **Teorema 4.1**, caso **(H3)**.

■

Apêndice A

Diferenciabilidade do Funcional Energia

Neste Apêndice, vamos mostrar que a derivada de I em $u \in X$ está bem definida e encontrar sua expressão.

Sejam $u \in X$ e $\phi \in W$. A derivada de I em u na direção de ϕ é dada por

$$\langle I'(u), \phi \rangle = \lim_{t \to 0^+} \frac{I(u + t\phi) - I(u)}{t}.$$

Para provar que a derivada de I está bem definida, mostraremos que, para $u \in X$ e $\phi \in W$, $u + t\phi \in X, \forall t \in (0, +\infty)$, ou seja,

$$(u + t\phi)^2 \in H^1(\mathbb{R}^N), \forall t \in (0, +\infty).$$

De fato, notemos que

$$(u + t\phi)^2 \leq 2(u^2 + t^2\phi^2).$$

Daí,

$$\left[(u + t\phi)^2\right]^2 \leq 4(u^2 + t^2\phi^2)^2 \leq 8u^4 + 8t^4\phi^4.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[(u + t\phi)^2\right]^2 dx \leq 8 \int_{\mathbb{R}^N} u^4 dx + 8t^4 \int_{\mathbb{R}^N} \phi^4 dx.$$

De (14), $u \in X \subset L^q(\mathbb{R}^N), \forall q \in [2, 22^*]$. Em particular, $u \in L^4(\mathbb{R}^N)$. Temos ainda que $\phi \in W \subset X \subset L^4(\mathbb{R}^N)$. Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[(u+t\phi)^2\right]^2 dx < +\infty,$$

mostrando que $(u+t\phi)^2 \in L^2(\mathbb{R}^N), \forall t \in (0,+\infty)$.

Observemos agora que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u+t\phi)^2 = 2(u+t\phi)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + t\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right).$$

Sabendo que

$$(u+t\phi)^2 \leq 2u^2 + 2t^2\phi^2 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + t\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)^2 \leq 2\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + 2t^2\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)^2,$$

temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial}{\partial x_i}(u+t\phi)^2\right|^2 dx &\leq 8\int_{\mathbb{R}^N} u^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx + 8t^2\int_{\mathbb{R}^N} u^2\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)^2 dx \\ &+ 8t^2\int_{\mathbb{R}^N} \phi^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx + 8t^4\int_{\mathbb{R}^N} \phi^2\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)^2 dx. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Como $u \in X$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx < +\infty.$$

Além disso, sabendo que $\phi \in W \subset X$, podemos afirmar que as outras integrais do segundo membro em (A.1) também são finitas.

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial}{\partial x_i}(u+t\phi)^2\right|^2 dx < +\infty,$$

implicando que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u+t\phi)^2 \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

Portanto, $(u+\phi t)^2 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e, consequentemente, $u + t\phi \in X$.

Agora, escreveremos o funcional I da forma

$$I(u) = J_1(u) + J_2(u) + J_3(u) - J_4(u), u \in X, \tag{A.2}$$

onde

- $J_1(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx;$
- $J_2(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 dx;$

- $J_3(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} Vu^2dx;$
- $J_4(u) = \dfrac{1}{p+1}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}dx.$

Sejam $u \in X$ e $\phi \in W$. Então,

$$J_1(u+t\phi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u+t\phi)|^2dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + 2t\nabla u\nabla\phi + t^2|\nabla\phi|^2\right)dx.$$

Logo,

$$J_1(u+t\phi) - J_1(u) = t\left(\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\nabla\phi dx + \frac{t}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^2dx\right),$$

o que implica

$$\frac{J_1(u+t\phi) - J_1(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\nabla\phi dx + \frac{t}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^2dx.$$

Assim,

$$\langle J_1'(u), \phi\rangle = \lim_{t\to 0^+} \frac{J_1(u+t\phi) - J_1(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\nabla\phi dx. \tag{A.3}$$

Temos ainda

$$\begin{aligned} J_2(u+t\phi) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (u+t\phi)^2\,|\nabla(u+t\phi)|^2dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (u^2|\nabla u|^2 + 2tu^2\nabla u\nabla\phi + t^2u^2|\nabla\phi|^2 + 2tu\phi|\nabla u|^2 + 4t^2u\phi\nabla u\nabla\phi \\ &+ 2t^3u\phi|\nabla\phi|^2 + t^2|\nabla u|^2\phi^2 + 2t^3\phi^2\nabla u\nabla\phi + t^4\phi^2|\nabla\phi|^2)dx. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{J_2(u+t\phi) - J_2(u)}{t} &= t\int_{\mathbb{R}^N} (u^2\nabla u\nabla\phi + \frac{t}{2}u^2|\nabla\phi|^2 + u\phi|\nabla u|^2 + 2tu\phi\nabla u\nabla\phi \\ &+ t^2|\nabla\phi|^2 + \frac{t}{2}\phi^2|\nabla u|^2 + t^2\phi^2\nabla u\nabla\phi + \frac{t^3}{2}\phi^2|\nabla\phi|^2)dx, \end{aligned}$$

implicando que

$$\langle J_2'(u), \phi\rangle = \lim_{t\to 0^+} \frac{J_2(u+t\phi) - J_2(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^N} u^2\nabla u\nabla\phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} u|\nabla u|^2\phi dx. \tag{A.4}$$

Temos também

$$J_3(u+t\phi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(u+t\phi)^2dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (Vu^2 + 2Vtu\phi + Vt^2\phi^2)dx.$$

Logo,

$$J_3(u+t\phi)-J_3(u)=t\left[\int_{\mathbb{R}^N}\left(Vu\phi+\frac{t}{2}V\phi^2\right)dx\right],$$

de onde segue que

$$\langle J_3'(u),\phi\rangle=\lim_{t\to 0^+}\frac{J_3(u+t\phi)-J_3(u)}{t}=\int_{\mathbb{R}^N}Vu\phi dx. \quad \text{(A.5)}$$

Por fim, mostraremos que

$$\langle J_4'(u),\phi\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p-1}u\phi dx.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\frac{J_2(u+t\phi)-J_2(u)}{t} &= \frac{1}{(p+1)t}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|u+t\phi|^{p+1}-|u|^{p+1}\right)dx\\ &= \frac{1}{(p+1)t}\int_{\mathbb{R}^N}dx\int_0^1\left[(p+1)t|u+t\xi\phi|^{p-1}(u+ts\phi)\phi\right]ds\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}dx\int_0^1|u+ts\phi|^{p-1}(u+ts\phi)\phi ds. \quad \text{(A.6)}\end{aligned}$$

Pelo Teorema C.9 (Teorema de Fubini),

$$\int_{\mathbb{R}^N}dx\int_0^1\left[|u+t\xi\phi|^{p-1}(u+ts\phi)\phi\right]ds=\int_0^1 ds\int_{\mathbb{R}^N}|u+ts\phi|^{p-1}(u+ts\phi)\phi dx. \quad \text{(A.7)}$$

De (A.6) e (A.7),

$$\frac{J_2(u+t\phi)-J_2(u)}{t} = \int_0^1 ds\int_{\mathbb{R}^N}|u+ts\phi|^{p-1}(u+ts\phi)\phi dx.$$

No entanto,

$$|u(x)+ts\phi(x)|^{p-1}\to|u(x)|^{p-1}\text{ q. t. p. em }\mathbb{R}^N,\ \forall s\in[0,1],\text{ quando }t\to 0^+,$$

e

$$u(x)+ts\phi(x)\to u(x)^{p-1}\text{ q. t. p. em }\mathbb{R}^N,\ \forall s\in[0,1],\text{ quando }t\to 0^+,$$

mostrando que, quando $t\to 0^+$,

$$|u(x)+ts\phi(x)|^{p-1}[u(x)+ts\phi(x)]\phi(x)\to|u(x)|^{p-1}u(x)\phi(x)\text{ q. t. p. em }\mathbb{R}^N,$$

para todo $s\in[0,1]$.

Além disso, para $t\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}||u+ts\phi|^{p-1}(u+ts\phi)\phi| &\leq |u+ts\phi|^p|\phi|\\ &\leq 2^p(|u|^p+|\phi|^p)|\phi|\\ &= 2^p|u|^p|\phi|+|\phi|^{p+1}.\end{aligned}$$

Observemos que $|u|^p \in L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$, pois $u \in X \subset L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. Desde que $\phi \in W \subset X$, temos $\phi \in L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. Sendo $p+1$ e $\dfrac{p+1}{p}$ expoentes conjugados, segue que

$$|u|^p|\phi| \in L^1(\mathbb{R}^N) \text{ e } |\phi|^{p+1} \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u+ts\phi|^{p-1}(u+ts\phi)\phi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1}u\phi dx \text{ quando } t \to 0^+,$$

para todo $s \in [0,1]$.

Assim,

$$\langle J_4'(u), \phi\rangle = \lim_{t\to 0^+} \frac{J_4(u+t\phi) - J_4(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1}u\phi dx. \tag{A.8}$$

Portanto, de (A.2), (A.3), (A.4), (A.5) e (A.8),

$$\begin{aligned}\langle I'(u), \phi\rangle &= \langle J_1'(u), \phi\rangle + \langle J_2'(u), \phi\rangle + \langle J_3'(u), \phi\rangle - \langle J_4'(u), \phi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(1+u^2\right) \nabla u \nabla \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} u|\nabla u|^2 \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V u\phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1}u\phi dx,\end{aligned}$$

para toda $\phi \in W$.

Apêndice B

Grau Topológico de Brouwer

Nesta seção, iremos mostrar como é construído o Grau Topológico de Brouwer. Utilizaremos este conceito para demonstrar o Teorema B.9 (Teorema de Poincaré-Miranda), que foi uma das ferramentas usadas no nosso trabalho. Iremos provar alguns resultados e outros citaremos uma referência onde podemos encontrar a prova.

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$. Para uma aplicação f de Ω em $\mathbb{R}^N$ diferenciável, denotamos por $J_f(x)$ o valor do jacobiano de f no ponto $x \in \Omega$, ou seja,

$$J_f(x) = det[f'(x)].$$

No que segue, consideraremos Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ e denotaremos por $C^k(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ o espaço das funções a valores em $\mathbb{R}^N$, k vezes diferenciáveis em Ω, que são contínuas sobre $\bar{\Omega}$ e todas as derivadas até a ordem k são restrições de aplicações contínuas sobre $\bar{\Omega}$. Este espaço será munido da topologia usual.

Sejam $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N), S = \{x \in \Omega; J_\varphi(x) = 0\}$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cap \varphi(S)$. Observemos que $\varphi^{-1}(b)$ é um conjunto limitado, pois $\varphi^{-1}(b) \subset \bar{\Omega}$ e $\bar{\Omega}$ é limitado, e é fechado, já que é a imagem inversa do conjunto fechado $\{b\}$ pela aplicação contínua φ. Logo, $\varphi^{-1}(b)$ é compacto.

Dado $\xi \in \varphi^{-1}(b)$, temos que $J_\varphi(\xi) \neq 0$, pois $b \notin \varphi(S)$. Pelo Teorema C.4 (Teorema da Aplicação Inversa), existe $r_\xi > 0$ tal que

$$\varphi|_{B_{r_\xi}(\xi)} : B_{r_\xi}(\xi) \to \varphi(B_{r_\xi}(\xi))$$

é um difeomorfismo. Notemos que

$$B_{r_\xi}(\xi) \cap \varphi^{-1}(b) = \{\xi\},$$

visto que $\xi \in B_{r_\xi}(\xi), \varphi(\xi) = b$ e $\varphi|_{B_{r_\xi}(\xi)}$ é uma bijeção.

Por outro lado,

$$\varphi^{-1}(b) \subset \bigcup_{\xi \in \varphi^{-1}(b)} B_{r_\xi}(\xi).$$

Sendo $\varphi^{-1}(b)$ compacto e usando o Teorema de Borel-Lebesgue, podemos afirmar que existem $\xi_1, ..., \xi_k \in \varphi^{-1}(b)$ satisfazendo

$$\varphi^{-1}(b) \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{r_{\xi_i}}(\xi_i).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(b) &\subset \left[\bigcup_{i=1}^{k} B_{r_{\xi_i}}(\xi_i)\right] \bigcap \varphi^{-1}(b) \\ &= \bigcup_{i=1}^{k} \left[B_{r_{\xi_i}}(\xi_i) \cap \varphi^{-1}(b)\right] \\ &= \bigcup_{i=1}^{k} \{\xi_i\} \\ &= \{\xi_1, ..., \xi_k\}. \end{aligned}$$

Assim, $\varphi^{-1}(b) \subset \{\xi_1, ..., \xi_k\}$ e $J_\varphi(\xi_i) \neq 0$ para todo $i = 1, ..., k$.

Pelo que fizemos acima, fica bem posta a seguinte definição, que é a definição de Grau Topológico de Brouwer para o caso regular.

Definição B.1 *Sejam $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cap \varphi(S)$. Definimos o Grau Topológico de Brouwer da aplicação φ em relação a Ω no ponto b, denotado por $d(\varphi, \Omega, b)$, como sendo o número inteiro*

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{\xi \in \varphi^{-1}(b)} sgn(J_\varphi(\xi)),$$

onde $sgn(t) = 1$, se $t > 0$, e $sgn(t) = -1$, se $t < 0$.

Exemplo 1: Sejam $\Omega = (-1, 1)$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ a função dada por $\varphi(x) = x^2 - a^2$, para algum $0 < a < 1$. Encontre $d(\varphi, \Omega, 0)$.

Solução: Notemos que $\partial\Omega = \{-1, 1\}$. Assim, $\varphi(\partial\Omega) = \{1 - a^2\}$.

Além disso, $\varphi'(x) = 2x$. Então,

$$S = \{x \in \Omega; J_\varphi(x) = 0\} = \{0\} \text{ e } \varphi(S) = \{-a^2\}.$$

Logo,

$$\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S) = \{-a^2, 1 - a^2\},$$

o que implica

$$0 \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S).$$

Daí,

$$\varphi^{-1}(0) = \{x \in \Omega; \varphi(x) = 0\} = \{-a, a\}.$$

Observemos que

$$\varphi'(a) = 2a \quad \text{e} \quad \varphi'(-a) = -2a.$$

Portanto,

$$d(\varphi, \Omega, 0) = \sum_{\xi \in \varphi^{-1}(0)} sgn(J_\varphi(\xi)) = sgnJ_\varphi(a) + sgnJ_\varphi(-a) = (+1) + (-1) = 0.$$

Exemplo 2: Considere a aplicação $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(x, y) = (sen \;\; x, cos \;\; y)$, onde $\Omega = \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \subset \mathbb{R}^2$. Encontre $d(\varphi, \Omega, (1/2, 1/2))$.

Solução: Seja $\varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$,

onde

$$\varphi_1(x, y) = sen \;\; x \quad \text{e} \quad \varphi_2(x, y) = cos \;\; y.$$

Notemos que

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = cos \;\; x, \;\; \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0, \;\; \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = -sen \;\; y.$$

Logo,

$$\varphi'(x, y) = \begin{bmatrix} cos \;\; x & 0 \\ 0 & -sen \;\; y \end{bmatrix}.$$

Temos

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S).$$

Além disso,

$$\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \varphi(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\} = \left\{\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)\right\}.$$

Assim,

$$d(\varphi, \Omega, (1/2, 1/2)) = sgn J_\varphi(\pi/6, \pi/3) = sgn \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = -1.$$

Agora vamos ver a definição de grau topológico por meio de integrais. Sejam $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cap \varphi(S)$. Consideremos $\varphi^{-1}(b) = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k\}$. Então, $J_\varphi(\xi_i) \neq 0, \forall i \in \{1, 2, ..., k\}$. Pelo Teorema da Função Inversa, existem $\varepsilon > 0$ e vizinhanças $B_\varepsilon(b)$ de b e $\mathcal{U}_i$ de ξ_i, com $i = 1, 2, ..., k$, tais que $\varphi_i = \varphi|_{\mathcal{U}_i} : \mathcal{U}_i \to B_\varepsilon(b) = \varphi(\mathcal{U}_i)$ é um difeomorfismo.

Suponhamos, diminuindo $\varepsilon > 0$ se necessário, que $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_n = \emptyset$, para $i \neq n$ e $i, n \in \{1, 2, ..., k\}$, e $J_\varphi(\xi_i) = J_\varphi(x)$, para todo $x \in \mathcal{U}_i$, com $i = 1, ..., k$.

Consideremos uma aplicação $j_\varepsilon \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ tal que

$$\text{supt } j_\varepsilon \subset B_\varepsilon(b) \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} j_\varepsilon(x)dx = 1.$$

Definamos

$$I_\varepsilon = \int_{\bar{\Omega}} j_\varepsilon(\varphi(x)) J_\varphi(x) dx.$$

Logo, desde que supt $j_\varepsilon \subset B_\varepsilon(b)$,

$$I_\varepsilon = \int_A j_\varepsilon(\varphi(x)) J_\varphi(x) dx,$$

onde $A = \{x \in \Omega; |\varphi(x) - b| < \varepsilon\}$.

Sendo $A = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{U}_i$, podemos escrever

$$I_\varepsilon = \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathcal{U}_i} j_\varepsilon(\varphi_i(x)) J_{\varphi_i}(x) dx.$$

Como $\varphi(\mathcal{U}_i) = B_\varepsilon(b)$, temos $\mathcal{U}_i = \varphi^{-1}(B_\varepsilon(b))$. Assim,

$$I_\varepsilon = \sum_{i=1}^{k} \int_{\varphi^{-1}(B_\varepsilon(b))} j_\varepsilon(\varphi_i(x)) J_{\varphi_i}(x) dx.$$

Usando o Teorema de Mudança de Variáveis, ficamos com

$$I_\varepsilon = \sum_{i=1}^{k} \int_{B_\varepsilon(b)} J_\varepsilon(x) J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x)) |J_{\varphi_i^{-1}}(x)| dx.$$

Da Regra da Cadeia obtemos

$$|J_{\varphi_i^{-1}}(x)| = \frac{1}{|J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))|}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \sum_{i=1}^{k} \int_{B_\varepsilon(b)} j_\varepsilon(x) sgn\left[J_{\varphi_i}\left(\varphi_i^{-1}(x)\right)\right] dx \\ &= \sum_{i=1}^{k} sgn\left[J_{\varphi_i}\left(\varphi_i^{-1}(x)\right)\right] \int_{B_\varepsilon(b)} j_\varepsilon(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^{k} sgn\left[J_\varphi(\xi_i)\right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$I_\varepsilon = d(\varphi, \Omega, b).$$

O número I_ε é denominado a Forma Integral do Grau Topológico de Brouwer de φ com relação a Ω no ponto b. Usando esta definição, podemos mostrar o

Teorema B.1 *Sejam $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cap \varphi(S)$. Então,*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi - b, \Omega, 0).$$

Vamos agora construir a definição de grau topológico para aplicações contínuas. Começaremos com o seguinte resultado:

Teorema B.2 *Sejam $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e b_1, b_2 pontos de $\mathbb{R}^N$ que não pertencem a $\varphi(\partial\Omega) \cap \varphi(S)$. Se b_1 e b_2 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$, então*

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

Demonstração: Ver [Beresticki], p. I-13.

■

Definição B.2 *Sejam $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ e $b \in \varphi(S)$. Considere C_b a componente conexa de b em $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$. Então, C_b é um aberto e, como $\varphi(S)$ tem medida nula, C_b possui pontos de $\mathbb{R}^N$ que não pertencem a $\varphi(S)$. Pelo Teorema B.2, para todo $x, y \in C_b \backslash \varphi(S)$, temos*

$$d(\varphi, \Omega, x) = d(\varphi, \Omega, y).$$

Definimos o grau topológico de Brouwer de φ em relação a Ω em b como

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, x), \quad x \in C_b \backslash \varphi(S).$$

Teorema B.3 (Invariância por homotopia de classe C^2) *Seja $H(x,t) \in C^2(\Omega \times [0,1], \mathbb{R}^N)$. Se $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1], \mathbb{R}^N)$, então*

$$d(H(.,t), \Omega, b) = constante, \forall t \in [0,1].$$

Demonstração: Ver [Beresticki], p. I-15.

■

Veremos agora a definição do Grau Topológico de Brouwer para aplicações contínuas. Sejam $\varphi \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ e $r = dist\{b, \varphi(\partial\Omega)\} > 0$. Pelo Teorema da Aproximação de Weierstrass, existe $\psi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que

$$\|\varphi - \psi\|_\infty < \frac{r}{2}.$$

Para essa tal ψ temos que $b \notin \psi(\partial\Omega)$ e daí $d(\psi, \Omega, b)$ está bem definido. Mostraremos agora que o grau não depende da escolha da ψ, ou seja, se $\psi_1, \psi_2 \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ com

$$\|\varphi - \psi_1\|_\infty < \frac{r}{2} \text{ e } \|\varphi - \psi_2\|_\infty < \frac{r}{2}.$$

então

$$d(\psi_1, \Omega, b) = d(\psi_2, \Omega, b).$$

De fato, seja $H : \bar{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$ a homotopia dada por

$$H(x,t) = t\psi_1(x) + (1-t)\psi_2(x).$$

Temos $H \in C^2(\bar{\Omega} \times [0,1], \mathbb{R}^N)$. Além disso, $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Para provar isto, vemos inicialmente que, para cada $t \in [0,1]$ fixado, temos

$$|H(x,t) - \varphi(x)| < \frac{r}{2}, \forall \in \bar{\Omega}.$$

Logo, se $b \in H(\partial\Omega \times [0,1])$, então existem $x_0 \in \partial\Omega$ e $t_0 \in [0,1]$ tal que $H(x_0,t_0) = b$. Daí,

$$|b - \varphi(x_0)| = |H(x_0,t_0) - \varphi(x_0)| < \frac{r}{2},$$

de onde segue que

$$r = dist\{b, \varphi(\partial\Omega)\} \leq \frac{r}{2},$$

o que é um absurdo!

Assim, $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Pelo Teorema $B.3$,

$$d(H(.,t),\Omega,b) = constante, \forall t \in [0,1].$$

Em particular,

$$d(H(.,0),\Omega,b) = d(H(.,1),\Omega,b),$$

isto é,

$$d(\psi_1,\Omega,b) = d(\psi_2,\Omega,b).$$

Com isso, fica bem posta a definição de grau topológico de Brouwer para funções contínuas, que é a seguinte:

Definição B.3 *Definimos o grau topológico de Brouwer de $\varphi \in C(\Omega,\mathbb{R}^N)$ relativamente a Ω em $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ como*

$$d(\varphi,\Omega,b) = d(\psi,\Omega,b),$$

para toda $\psi \in C^2(\bar{\Omega},\mathbb{R}^N)$ satisfazendo

$$\|\varphi - \psi\|_\infty < \frac{r}{2}.$$

onde $r = dist\{b,\varphi(\partial\Omega)\}$.

O primeiro resultado decorrente da definição acima é o seguinte:

Teorema B.4 *Se $\varphi \in C(\Omega,\mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, então*

$$d(\varphi,\Omega,b) = d(\varphi - b,\Omega,0).$$

Demonstração: Por definição,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b), \tag{B.1}$$

para toda $\psi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ verificando

$$\|\varphi - \psi\|_\infty < \frac{r}{2}. \tag{B.2}$$

Fixemos $\psi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ satisfazendo (B.2). Dado $x \in \bar{\Omega}$, temos

$$\varphi(x) = b \Leftrightarrow \varphi(x) - b = 0 \Leftrightarrow (\varphi - b) = 0,$$

ou seja,

$$x \in \varphi^{-1}(b) \Leftrightarrow x \in (\varphi - b)^{-1}(0).$$

Como $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, então $0 \notin (\varphi - b)^{-1}(\partial\Omega)$. Além disso,

$$\|\psi - \varphi\|_\infty < \frac{r}{2},$$

onde

$$r = dist\{0, (\varphi - b)(\partial\Omega)\} = dist\{b, \varphi(\partial\Omega)\} > 0.$$

Desta forma,

$$\|(\psi - b) - (\varphi - b)\|_\infty < \frac{r}{2}.$$

Assim, pela Definição $B.3$,

$$d(\varphi - b, \Omega, 0) = d(\psi - b, \Omega, 0). \tag{B.3}$$

Observemos que se $b \in \psi(\partial\Omega)$, então existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $\psi(x_0) = b$. Por outro lado, temos

$$|\psi(x_0) - \varphi(x_0)| < \frac{r}{2},$$

ou seja,

$$|b - \varphi(x_0)| < \frac{r}{2},$$

de onde segue que

$$r = dist\{b, \varphi(\Omega)\} \leq \frac{r}{2},$$

o que é um absurdo! Logo, devemos ter

$$b \notin \psi(\partial\Omega).$$

Consideremos agora $b_1 \in \psi(S)$ tal que b_1 está na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \psi(\partial\Omega)$ que contém b. Assim, pela Definição $B.2$ e Teorema B.1,

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b_1) = d(\psi_1 - b, \Omega, 0). \tag{B.4}$$

Notemos que

$$\|(\psi - b) - (\psi - b_1)\|_\infty = \|b - b_1\|_\infty = |b - b_1|.$$

Tomemos $\varepsilon > 0$ de modo que $\varepsilon < \frac{r}{2}$ e escolha b_1 suficientemente próximo de b de maneira que

$$|b - b_1| < \varepsilon.$$

Daí,

$$\|(\psi - b) - (\psi - b_1)\|_\infty < \frac{r}{2},$$

e pela Definição $B.3$

$$d(\psi - b, \Omega, 0) = d(\psi - b_1, \Omega, 0). \tag{B.5}$$

Portanto, de (B.1), (B.3), (B.4) e (B.5),

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b_1) = d(\psi - b_1, \Omega, 0) = d(\psi - b, \Omega, 0) = d(\varphi - b, \Omega, 0),$$

ou seja,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi - b, \Omega, 0).$$

■

Teorema B.5 (Continuidade) *Para $\varphi \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, existe uma vizinhança V de φ em $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que, $\forall \psi \in V$, temos:*

(i) $b \notin \psi(\partial\Omega)$;
(ii) $d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$;

Demonstração: Ver [Beresticki], pp. I-17 - I-18.

■

Teorema B.6 (Invariância do grau por homotopia) *Sejam* $H \in C(\Omega \times [0,1], \mathbb{R}^N)$ *e* $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$, *então* $d(H(.,t), \Omega, b)$ *é constante, para todo* $t \in [0,1]$.

Demonstração:

Fixemos $\tau \in [0,1]$. Como H é uniformemente contínua em $\bar{\Omega} \times [0,1]$, então dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$t \in [0,1], |t - \tau| < \delta \Rightarrow \|H(.,t) - H(.,\tau)\| < \varepsilon.$$

Escolhendo ε suficientemente pequeno de modo que $H(.,t), H(.,\tau) \in V$ e usando o Teorema B.5, temos

$$d(H(.,t), \Omega, b) = d(H(.,\tau), \Omega, b),$$

ou seja, a função $t \mapsto d(H(.,t), \Omega, b)$ é localmente constante. Sendo $[0,1]$ conexo, segue que a função $t \mapsto d(H(.,t), \Omega, b)$ é constante, isto é,

$$d(H(.,t), \Omega, b) = constante, \forall t \in [0,1].$$

■

Teorema B.7 *Seja* $I : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ *a aplicação dada por* $I(x) = x$. *Então,*

$$d(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in \Omega \\ 0, & se \quad x \notin \bar{\Omega} \end{cases} .$$

Demonstração: Seja $b \in \Omega$. Então,

$$d(I, \Omega, b) = \sum_{\xi \in \varphi^{-1}(b)} sgn(J_\varphi(\xi)) = sgn J_I(b) = sgn \;\; det I = 1,$$

ou seja,

$$d(I, \Omega, b) = 1.$$

Suponhamos agora que $b \notin \bar{\Omega}$. Seja $r = dist\{b, \bar{\Omega}\}$. Tomemos $\varepsilon = \frac{r}{2} > 0$. Então,

$$A = \{x \in \Omega; |\varphi(x) - b| < \varepsilon\} = \emptyset.$$

De fato, se existisse $x_0 \in \Omega$ tal que

$$|\varphi(x_0) - b| < \varepsilon,$$

teríamos

$$r \leq |\varphi(x_0) - b| < \varepsilon = \frac{r}{2},$$

o que é um absurdo!

Assim, $A = \emptyset$. Usando a definição de grau topológico por integrais, temos

$$d(I, \Omega, b) = \sum_{\xi \in \varphi^{-1}(b)} sgn(J_\varphi(\xi)) = \int_A J_\varepsilon(I(x)) J_I(x) dx = 0,$$

isto é,

$$d(I, \Omega, b) = 0.$$

■

Teorema B.8 *Se $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, então existe $x_1 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_1) = b$.*

Demonstração: Sejam $\varphi \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N), b \notin \varphi(\partial\Omega)$ e $r = dist\{b, \varphi(\partial\Omega)\} > 0$.

Consideremos $\psi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que

$$\|\psi - \phi\|_\infty < \frac{r}{2},$$

que existe pelo Teorema de Aproximação de Weierstress. Então,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b).$$

Escolhendo b_1 suficientemente próximo de b de modo que $b_1 \in C_b \backslash \psi(\partial\Omega)$, temos

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b_1).$$

Sendo $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, por hipótese, devemos ter $d(\psi, \Omega, b_1) \neq 0$. Logo, pela definição de grau topológico, caso regular, $\psi^{-1}(b_1) \neq \emptyset$. Daí, existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\psi(x_0) = b_1$, implicando que

$$\psi(\bar{\Omega}) \cup \{b_1\} \neq \emptyset. \tag{B.6}$$

Afirmamos que $b \in \varphi(S)$. De fato, suponha que $b \notin \varphi(S)$ e seja $\tilde{r} = dist\{b, \varphi(\bar{\Omega})\} > 0$. Fixemos $\delta > 0$ de modo que

$$0 < \delta < \frac{1}{2} dist\{b, \partial\left(\varphi(\bar{\Omega})\right)\}$$

e consideremos o conjunto

$$\big(\varphi(\bar{\Omega})\big)_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N; dist(x, \varphi(\bar{\Omega}))\},$$

que é uma δ-vizinhança de $\varphi(\bar{\Omega})$.

Logo,

$$\psi(\bar{\Omega}) \subset \big(\varphi(\bar{\Omega})\big)_\delta,$$

o que implica

$$\psi(\bar{\Omega}) \cap \{b_1\} = \emptyset,$$

contrariando (B.6).

Portanto, $b \in \varphi(S)$ e podemos concluir que existe $x_1 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_1) = b$.

$\blacksquare$

Diante do apresentamos sobre o grau topológico, podemos enunciar e demonstrar o Teorema de Poincaré-Miranda.

Teorema B.9 (Teorema de Poincaré-Miranda) *Toda aplicação contínua* $f : P \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$*, de um bloco fechado N-dimensional* $P = \prod_{i=1}^{N}[a_i, b_i], a_i \neq b_i$*, com faces*

$$P_i^- = \{x \in P; x_i = a_i\} \quad e \quad P_i^+ = \{x \in P; x_i = b_i\},\ i = 1, 2, ..., N,$$

tal que

$$f_i(x) \leq 0, x \in P_i^-, \quad e \quad f_i(x) \geq 0, x \in P_i^+, 1 \leq i \leq N,$$

tem uma raiz em P*.*

Demonstração: Se $f = (f_1, ..., f_N)$ possui uma raiz em $\partial P = \bigcup_{i=1}^{N}(P_i^+ \cup P_i^-)$, o resultado está provado.

Suponhamos que f não possui raiz em ∂P, ou seja,

$$f(x) \neq 0, \forall x \in \partial P$$

e definamos a homotopia

$$\begin{aligned} H : P \times [0,1] &\to \mathbb{R}^N \\ (x,t) &\mapsto H(x,t) = (H_1(x,t), ..., H_N(x,t)), \end{aligned}$$

onde

$$H_i(x,t) = (1-t)\left(x_i - \frac{a_i+b_i}{2}\right) + tf_i(x), 1 \leq i \leq N.$$

Notemos que

$$H(x,1) = f(x) \neq 0, \forall x \in \partial P. \tag{B.7}$$

Seja $t \in [0,1)$. Se $x \in \partial P$, então $x \in P_i^-$ ou $x \in P_i^+$, para algum $1 \leq i \leq N$. Suponhamos que $x \in P_i^-$. Logo, $x_i = a_i$. Daí,

$$\begin{aligned} H_i(x,t) &= (1-t)\left(a_i - \frac{a_i+b_i}{2}\right) + tf_i(x) \\ &= (1-t)\left(\frac{a_i-b_i}{2}\right) + tf_i(x). \end{aligned}$$

Usando o fato de que $a_i < b_i$ e $f_i(x) \leq 0$, segue que

$$H_i(x,t) < 0.$$

Analogamente, para $x \in P_i^+$, sabendo que $x_i = b_i$ e $f_i(x) \geq 0$, temos

$$H_i(x,t) = (1-t)\left(\frac{b_i-a_i}{2}\right) + tf_i(x) > 0,$$

de onde segue que $H_i(x,t) \neq 0$. Assim, para todo $t \in [0,1)$,

$$H(x,t) \neq 0, \forall x \in \partial P. \tag{B.8}$$

De (B.7) e (B.8),

$$H(x,t) \neq 0, \forall x \in \partial P, \forall t \in [0,1],$$

implicando que

$$0 \notin H(\partial P \times [0,1]).$$

Observando que $H(.,0) = I - \frac{a+b}{2}$, com $a = (a_1, ..., a_n)$ e $b = (b_1, ..., b_N)$, $f(x) = H(x,1)$ e usando o Teorema B.6 e Teorema B.4, temos

$$\begin{aligned} d(f, intP, 0) &= d(H(.,1), intP, 0) \\ &= d(H(.,0), intP, 0) \\ &= d\left(I - \frac{a+b}{2}, intP, 0\right) \\ &= d\left(I, intP, \frac{a+b}{2}\right). \end{aligned}$$

Como $\frac{a+b}{2} \in intP$, então, pelo Corolário B.7,

$$d(f, intP, 0) = 1.$$

Segue do Corolário B.8 que existe $x_0 \in intP$ tal que

$$f(x_0) = 0,$$

concluindo o teorema.

■

Apêndice C

Resultados e Definições Utilizados

Neste apêndice apresentaremos as principais definições e os principais resultados utilizados no nosso trabalho.

Teorema C.1 (Teorema do Valor Intermediário) *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$.*

Demonstração: Ver Lima[13], pp. 234 e 235. ∎

Teorema C.2 (Teorema Fundamental do Cálculo) *Se uma função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ possui derivada integrável, então*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)dt.$$

Demonstração: Ver Lima[13], p. 324. ∎

Definição C.1 *Seja $x \in X \subset \mathbb{R}^N$. A componente conexa do ponto x no conjunto X é a reunião C_x de todos os subconjuntos conexos de X que contém o ponto x.*

Para mais detalhes, ver Lima[14], pp. 63 e 64.

Teorema C.3 *Seja $f : X \to \mathbb{R}^N$ uma aplicação definida no subconjunto $X \subset \mathbb{R}^M$. Então, f é contínua se, e somente se, a imagem inversa $f^{-1}(F)$ de todo conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto fechado em X.*

Demonstração: Ver Lima[14], p. 42. ∎

Teorema C.4 (Teorema da Função Inversa) *Sejam* $f : U \to \mathbb{R}^N$, *definida no aberto* $U \subset \mathbb{R}^N$, *fortemente diferenciável no ponto* $a \in U$ *e* $f'(a) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *um isomorfismo. Então,* f *é um homeomorfismo de um aberto* V *contendo* a *sobre um aberto* W *contendo* $f(a)$.

Demonstração: Ver Lima[14], p. 282. ∎

Teorema C.5 (Teorema de Mudança de Variável) *Sejam* $h : U \to V$ *um difeomorfismo de classe* C^1 *entre os abertos* $U, V \subset \mathbb{R}^M$, $X \subset U$ *um compacto J-mensurável e* $f : h(X) \to \mathbb{R}$ *uma função integrável. Então,* $foh : X \to \mathbb{R}$ *é integrável e*

$$\int_{h(X)} f(y)dy = \int_X f(h(x))|det \quad h'(x)|dx.$$

Demonstração: Ver Lima[14], p. 386. ∎

Teorema C.6 (Teorema de Aproximação de Weierstrass) *O conjunto* W *de todos os polinômios com coeficientes reais é denso em* $C([a,b], \mathbb{R})$.

Demonstração: Ver Kreyszig[12], pp. 280 - 282. ∎

Teorema C.7 (Lema de Fatou) *Seja* (f_n) *uma sequência de funções em* $L^1(\Omega)$ *tal que*

(i) *para cada* $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \geq 0$, *q. t. p. sobre* Ω;

(ii) $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \int f_n < +\infty$.

Para cada $x \in \Omega$, *ponha* $f(x) = \liminf\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$. *Então,* $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int f \leq \liminf_{n \to +\infty} \int f_n.$$

Demonstração: Ver Brezis[4], pp. 54 e 55. ∎

Teorema C.8 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja* (f_n) *uma sequência de função em* $L^1(\Omega)$. *Suponha que*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ *q. t. p. sobre* Ω;

(ii) *existe uma função* $g \in L^1(\Omega)$ *tal que*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \text{ q. t. p. em } \Omega, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então, $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\|f_n - f\|_{L^1} \to 0.$$

Demonstração: Ver Brezis[4], p. 54. ∎

Teorema C.9 (Teorema de Fubini) *Sejam $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^N$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^M$ subconjuntos abertos e $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Suponha que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então, para quase todo $x \in \Omega_1$,*

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \ \text{ e } \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

Da mesma forma, para quase todo $y \in \Omega_2$,

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \ \text{ e } \int_{\Omega_1} F(x,y)dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y)dxdy.$$

Demonstração: Ver Brezis[4], p. 55. ■

Teorema C.10 (Desigualdade de Young) *Sejam $a, b \geq 0$ e p e q expoentes conjugados. Então,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Ver Brezis[4], p. 56. ■

Teorema C.11 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$, com p e q expoentes conjugados. Então, $f.g \in L^1$ e*

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Demonstração: Ver Brezis[4], p. 56. ■

Teorema C.12 (Desigualdade de Interpolação) *Se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então $f \in L^r(\Omega)$, para todo $r \in [p,q]$ e*

$$|f|_{L^r} \leq |f|^{\alpha}_{L^p} |f|^{1-\alpha}_{L^q},$$

onde $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{1-\alpha}{q}$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Demonstração: Ver Brezis[4], p. 57. ■

Teorema C.13 *Sejam E um espaço de Banach e $\varphi : E \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa e semi-contínua inferiormente. Então, φ é fracamente semi-contínua inferiormente. Logo,*

$$x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \varphi(x) \leq \lim \inf_{n \to +\infty} \varphi(x_n).$$

Demonstração: Ver Brezis[4], p. 38. ■

Teorema C.14 *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma sequência limitada em E. Então, existe $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ tal que (x_{n_j}) é fracamente convergente.*

Demonstração: Ver Brezis[4], p. 50. ■

Teorema C.15 *Sejam $\Omega \in \mathbb{R}^N$, (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que*

$$\|f_n - f\|_{L^p} \to 0.$$

Então, existe uma subsequência (f_{n_j}) tal que

(a) $f_{n_j}(x) \to f(x)$ *q. t. p. em* Ω;
(b) $|f_{n_j}(x)| \leq h(x)$, *q. t. p. em* Ω *e* $\forall j \in \mathbb{N}$, *para alguma* $h \in L^p(\Omega)$.

Demonstração: Ver Brezis[4], pp. 58 e 59. ■

Teorema C.16 *L^p é reflexivo para $1 < p < +\infty$.*

Demonstração: Ver Brezis[4], pp. 59 e 60. ■

Teorema C.17 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de classe C^1 e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então, existe uma sequência (u_n) em $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$u_n|_\Omega \to u \text{ em } W^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: Ver Brezis[4], p. 162. ■

Teorema C.18 (Imersão de Sobolev) *As imersões a seguir são contínuas:*

- $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), 2 \leq p < +\infty$, *se* $N = 1, 2$;
- $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), 2 \leq p \leq 2^*$, *se* $N \geq 3$;
- $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N), N \geq 3$.

Demonstração: Ver Willen[22], p. 9. ■

Teorema C.19 (Imersão de Rellich) *Se $\mu(\Omega) < \infty$, então a imersão a seguir é compacta*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), 1 \leq p < 2^*.$$

Demonstração: Ver Willen[22], p. 9. ■

Teorema C.20 (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg) *Seja* $1 \leq p < N$, *então* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ *onde* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$, *e existe uma constante* $C = C(p, N)$ *tal que*

$$|u|_{L^{p^*}} \leq C|\nabla u|_{L^p}, \quad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração: Ver Brezis[4], p. 162. ■

Definição C.2 (Suporte de uma função) *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto e* f *uma função definida em* Ω *à valores reais. Considere a família* $(\vartheta_i)_I, \vartheta_i \subset \Omega$, *de todos os abertos tais que, para cada* $i \in I$, $f = 0$ *q.t.p. em* ϑ_i. *Ponha* $\Theta = \bigcup_{i \in I} \vartheta_i$. *Então, o suporte de* f, *denotado por supt f, é definido como sendo o conjunto*

$$supt f = \Omega \backslash \Theta.$$

Quando f *é uma função contínua, o suporte de* f *é o fecho do conjunto* $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$.

Teorema C.21 (Lema Fundamental das Distribuições) *Seja* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega f\phi dx = 0, \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Então, $f = 0$ *q.t.p. em* Ω.

Demonstração: Ver Brezis[4], pp. 61 e 62. ■

Teorema C.22 (P.L. Lions, 1984) *Sejam* $r > 0$ *e* $2 \leq q < 2^*$. *Se* (u_n) *é limitada em* $H^1(\mathbb{R}^N)$ *e se*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |u_n|^q \to 0, n \to +\infty,$$

então

$$u_n \to 0 \text{ em } L^p(\mathbb{R}^N) \text{ para } 2 < p < 2^*.$$

Demonstração: Ver Willen[22], p. 16. ■

Teorema C.23 (Princípio de Concentração - Compacidade) *Seja* (ρ_n) *uma sequência em* $L^1(\mathbb{R}^N)$ *satisfazendo*

$$\rho_n \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n dx = \lambda,$$

para algum $\lambda > 0$ *fixado. Então, existe uma subsequência* (ρ_{n_k}) *de* (ρ_n) *verificando uma das três possibilidades a seguir:*
(i) (compacidade) *existe* $y_k \in \mathbb{R}^N$ *tal que, para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $R > 0$ *satisfazendo*

$$\int_{y_k+B_R} \rho_{n_k}(x)dx \geq \lambda - \varepsilon;$$

(ii) (nulidade) $\lim\limits_{k\to+\infty} \sup\limits_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{y_k+B_R} \rho_{n_k}(x)dx = 0, \forall R < +\infty;$

(iii) (dicotomia) *existe* $\alpha \in (0,\lambda)$ *tal que, para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $k_0 \geq 1$ *e* $\rho_k^1, \rho_k^2 \in L_+^1(\mathbb{R}^N)$ *satisfazendo, para* $k \geq k_0$:

- $\|\rho_{n_k} - (\rho_k^1 + \rho_k^2)\|_{L^1} \leq \varepsilon;$
- $\left|\int_{\mathbb{R}^N} \rho_k^1 dx - \alpha\right| \leq \varepsilon;$
- $\left|\int_{\mathbb{R}^N} \rho_k^2 dx - (\lambda - \alpha)\right| \leq \varepsilon;$
- $dist(supt \;\; \rho_k^1, supt \;\; \rho_k^2) \to +\infty, k \to +\infty.$

Demonstração: Ver Lions[16], pp. 115 - 117. ■

Teorema C.24 (Teorema do Passo da Montanha) *Sejam* E *um espaço de Banach real e* $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ *satisfazendo a condição (PS). Suponha* $I(0) = 0$ *e*
(I_1) *existem constantes* $\rho, \alpha > 0$ *tais que* $I\Big|_{\partial B_\rho} \geq \alpha;$
(I_2) *existe* $e \in E \backslash \bar{B}_\rho$ *tal que* $I(e) \leq 0$.

Então, I *possui um valor crítico* $c \geq \alpha$. *Além disso,* c *é caracterizado como*

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max t \in [0,1] I(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1]); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Demonstração: Ver Rabinowitz[25], pp. 7 e 8.

■

Teorema C.25 *Seja* $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \leq 0$ *em* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *e suponha que existe* $y \in \Omega$ *verificando* $u(y) = \inf\limits_{\Omega} u$. *Então,* u *é constante.*

Demonstração: Ver Gilbarg-Trudinger[10], p. 15. ■

C.1 Resultados Demonstrados

Teorema C.26 *Sejam* $R > 0, B_R = B_R(0)$ *e* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *uma função integrável. Então,*

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{B_R} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx.$$

Demonstração: Consideremos a aplicação $\chi_{B_R} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por

$$\chi_{B_R}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in B_R \\ 0, & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash B_R \end{cases}.$$

Então, $f\chi_{B_R}$ é integrável, para todo $R > 0$, e

$$\int_{B_R} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\chi_{B_R}(x)dx. \tag{C.1}$$

Dado $x \in \mathbb{R}^N$, escolha $R_0 > 0$ de modo que

$$|x| \leq R_0.$$

Desta forma, para $R \geq R_0$, temos $x \in B_R$ e, consequentemente,

$$f(x)\chi_{B_R}(x) = f(x),$$

o que implica

$$f(x)\chi_{B_R}(x) \to f(x) \text{ q. t. p. em } \mathbb{R}^N \text{ quando } R \to +\infty.$$

Além disso,

$$|f(x)\chi_{B_R}(x)| \leq |f(x)| \text{ q. t. p. em } \mathbb{R}^N \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|dx < +\infty.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\chi_{B_R}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx. \tag{C.2}$$

De (C.1) e (C.2),

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{B_R} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx.$$

■

Observação C.1 *Do Teorema (C.26) , segue que*

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} f(x)dx = 0.$$

Teorema C.27 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $h : L^q(\Omega) \to L^q(\Omega)$ a aplicação dada por $h(u) = u^+$, onde $u^+(x) = max\{u(x), 0\}$. Então, h é contínua.*

Demonstração: Observemos inicialmente que se $u \in L^q(\Omega)$, então $u^+ \in L^q(\Omega)$, mostrando que h está bem definida.

Sejam $(u_n) \subset L^q(\Omega)$ e $u \in L^q(\Omega)$ tais que

$$u_n \to u \ \ em \ \ L^q(\Omega). \tag{C.3}$$

Notemos que $u^+(x) = j(u(x))u(x)$, onde

$$j(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad t \geq 0 \\ 0, & \text{se} \quad t < 0 \end{cases}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|h(u_n) - h(u)\|_{L^q}^q &= \int_\Omega |u_n^+ - u^+|^q dx \\
&= \int_\Omega |h(u_n)u_n - j(u)u|^q dx \\
&\leq 2^q \left(\int_\Omega |j(u_n)|^q |u_n - u|^q dx + \int_\Omega |u|^q |j(u_n) - j(u)|^q dx \right) \\
&\leq 2^q \int_\Omega |u_n - u|^q dx + 2^q \int_\Omega |u|^q |j(u_n) - j(u)|^q dx.
\end{aligned}$$

De (C.1), segue que

$$\int_\Omega |u_n - u|^q dx \to 0$$

e usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, podemos mostrar que

$$\int_\Omega |u|^q |j(u_n) - j(u)|^q dx \to 0.$$

Portanto,

$$h(u_n) \to h(u) \text{ em } L^q(\Omega),$$

mostrando que h é contínua. ∎

Observação C.2 *De maneira análoga, podemos mostrar que a aplicação $H : L^p \to L^p$ dada por $H(u) = u^-$ é contínua.*

Teorema C.28 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um conjunto aberto e limitado. Se* $p \geq q$*, então*

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Demonstração: Seja $f \in L^p(\Omega)$.

Observe que $|f|^q \in L^{\frac{p}{q}}(\Omega)$ e $g \in L^{\frac{p}{p-q}}(\Omega)$, onde g é dada por $g(x) = 1, \forall x \in \Omega$. Sendo $\frac{p}{q}$ e $\frac{p}{p-q}$ expoentes conjugados, segue da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f|^q dx &= \int_\Omega 1.|f|^q dx \\ &\leq \left(\int_\Omega 1dx\right)^{\frac{p-q}{p}} \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{q}{p}} \\ &= [\mu(\Omega)]^{\frac{p-q}{p}} \|f\|^q_{L^p(\Omega)} < +\infty. \end{aligned}$$

Assim, $f \in L^q(\Omega)$ e

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq [\mu(\Omega)]^{\frac{p-q}{pq}} \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Portanto,

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

■

Bibliografia

[1] Adams, R. A. *Sobolev Spaces.* New York: Academic Press, 1975.

[2] Ambrosetti A., Wang, Z.-Q. *Positive Solutions to a class of quasilinear elliptic equations on* $\mathbb{R}$. Discrete and Continuos Dynamical Systems 9:55-68. (2003)

[3] Berestycki, H. *Methodes Topologiques et Problemes Aux limites non lineares*. These de Docteur. Soutenue, 1975.

[4] Brezis, H. *Analyse Fonctionnelle* Paris: Dunod. (1999)

[5] Castro A.,Cossio J., Neuberger, J. *A sign-changing solution for a superlinear Dirichlet problem.* Rocky. J. Math. 27: 1041-1053 (1997).

[6] Cerami, G., Solimini, S., Struwe, M. *Some existence results for superlinear boundary value problems involving critical exponentece.* J. Funct. Anal. 69: 289-306. (1986)

[7] Colin, M., Jeanjean L. *Solutions for a quasilinear Schrödinger equation: A dual approach.* Nonlinear Anal. 56(2): 213-226 (2004).

[8] Drinca G., Mawhin, J. *Brouwer Degree and Applications.* 2009.

[9] Evans, L. C. *Partial Differential Equations* American Mathematical Society, 1998.

[10] Gilbarg D., Trudinger N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Berlin: Springer-Verlang, 1998.

[11] Hasse, R. W. *A general method for the solution of nonlinear soliton and kink Schrödinger equations.* Z. Physik B 37:83-87 (1980).

[12] Krasnosel'skiĭ, M. A., Rutickiĭ, Y. B. *Convex Functions and Orlicz Spaces*. Groningen: P. Noordhoff LTD, 1961.

[13] Kreiszig E. O. *Introductory Functional Analysis wilh Applications* Wiley, 1989.

[14] Kufner A., Fučík, S., A., John, O. *Functions Spaces.* Groningen: P. Noordhoff LTD, 1977.

[15] Kurihura, S. *Large-amplitude quasi-solitons in superfuid films.* J. Phys. Soc. Japan, 50: 3262-3267. (1981)

[16] Lima, E. L. *Curso de Análise.* Vol. 1, Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[17] Lima, E. L. *Curso de Análise.* Vol. 2, Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[18] Lion P. L. *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case.* Analyse Nonlinéarie 1:109-145, 223-283. (1984)

[19] Liu, J.-Q., Wang Z.-Q. *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations.* Proc. A.M.S. 131: 441-448. (2003)

[20] Liu, J.-Q., Wang, Y., Wang Z.-Q. *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations, II.* J. Diff. Equal. 187: 473-493. (2003)

[21] Liu, J.-Q., Wang, Y., Wang Z.-Q. *Solutions for quasilinear Schrödinger equations via the Nehari Method.* Comm. in Partial Diff. Equations, 29: 5, 879 - 901. (2004)

[22] Medeiros L.A., Miranda M. M. *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Eliticos Não Homogêneos),* Editora IM-UFRJ, 5ª edição, 2006.

[23] Nakamura, A. *Damping and modification of exciton solitary waves.* J. Phys. Soc. Japan, 42:1824-1835. (1977)

[24] Poppenberg, M., Schmitt, K., Wang, Z.-Q. *On the of soliton solutions to quasilinear quasilinear Schrödinger equations.* Calculus of Variations and PDEs. 14: 329-344. (2002)

[25] Rabinowitz, P. H. *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations* Miami, 1984.

[26] Willem, M. *Minimax Theorems.* Boston: Birkhäuser. (1996)