Resumo

Neste trabalho mostraremos a existência de soluções não triviais para a seguinte classe de sistemas Hamiltonianos

$$\ddot{q}(t) - \nabla F(t, q(t)) = f(t)$$

e

$$\frac{d}{dt}(|\dot{u}(t)|^{p-2}\dot{u}(t)) = \nabla F(t, u(t)) + f(t).$$

A principal ferramenta usada é o método variacional, mais precisamente, argumentos de minimização e teoremas de minimax como o passo da montanha com a condição de Cerami.

Palavras-chaves: Soluções Homoclínicas, Soluções Periódicas e Métodos Variacionais.

Abstract

In this work we show the existence of nontrivial solution for the following class of Hamiltonian systems

$$\ddot{q}(t) - \nabla F(t, q(t)) = f(t)$$

and

$$\frac{d}{dt}(|\dot{u}(t)|^{p-2}\dot{u}(t)) = \nabla F(t, u(t)) + f(t).$$

The main tool used is the variational methods, more precisely, minimization arguments and minimax theorems like mountain pass theorem with Cerami condition.

Keywords: Homoclinic solutions, Periodic solutions and variational methods.

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência de Soluções Periódicas e Homoclínicas para uma Classe de Sistemas Hamiltonianos

por

Kelmem da Cruz Barroso †

sob orientação do

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes-Reuni

Existência de Soluções Homoclínicas para uma classe de Sistemas Hamiltonianos

por

Kelmem da Cruz Barroso

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Luciana Roze de Freitas

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Setembro/2011

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço A Jeová O Deus de Abraão Isaac e Jacó pelas bençãos concedidas.

A minha família e a minha namorada Elifaleth Sabino pela compreensão e apóio.

Ao professor Claudianor pela paciência, amizade e por mostrar significativamente o sentido da palavra orientador.

Ao professor Giovany Figueiredo pela enorme contribuição acadêmica e pela amizade.

Aos professores do departamento: Horácio, Brandão, Júlio, Daniel, Marco Aurélio, Aparecido, Alânnio, Lindomberg e aos demais.

Aos amigos: Denilson, Hildênio, Cládio, Jussie, Ailton, Marcos, Fabrício, Annaxsuel, Alex e aos demais colegas.

A Capes-Reuni pelo apoio financeiro.

Dedicatória

A minha família.

Notações

(1) $(.,.)$ produto interno usual em $\mathbb{R}^N$.

(2) [.] referência bibliográfica.

(3) X^* espaço dual de X.

(4) $\rightharpoonup$ convergência fraca.

(5) $q.t.p.$ quase todo ponto.

(6) $A_\delta = \{u \in X : dist(u, A) \leq \delta\}$.

(7) $dist(u, A) = inf\{\|u - v\|; v \in A\}$ distância do ponto u ao conjunto A.

(8) $X - A$ ou A^c denota o complementar de A em relação a X.

(9) $W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p; \frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i \in L^p(\Omega), i = 1, 2, \ldots, N\}$, onde $p \in [1, \infty)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}$.

(10) $\|.\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|.\|$ norma em $W^{1,p}(\Omega)$

(11) $C^p([0, T], \mathbb{R}^N) = C(0, T; \mathbb{R}^N)$ denota o espaço das funções contínuas definidas em $[0, T]$ e assumindo valores em $\mathbb{R}^N$, cujas derivadas até a ordem p são contínuas.

(12) $\|.\|_\infty$ Norma do espaço $C([0, T], \mathbb{R}^N)$.

(13) $B_r(x)$ irá denotar a bola aberta de centro x e raio r.

(14) $\bar{B}_r(x)$ irá denotar a bola fechada de centro x e raio r.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estamos interessados em encontrar soluções homoclínicas para o sistema Hamiltoniano

$$\ddot{q}(t) + \nabla F(t, q(t)) = f(t). \tag{1}$$

Por um sistema Hamiltoniano entendemos como sendo um sistema de $2N$ equações diferenciais ordinárias da forma

$$\dot{q} = H_p, \quad \dot{p} = -H_q$$

onde a função $H = H(q, p, t)$ é chamada de Hamiltoniano, é uma função diferenciável a valores reais definida sobre um aberto de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ e os vetores p e q são tradicionalmente denominados de vetor posição e momento (ver [13]). No nosso caso trataremos com sistemas mecânicos dados por

$$\ddot{q} = \nabla V(q)$$

onde $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável chamado de função potencial e a função hamiltoniana é dada por

$$H(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2 - V(q).$$

Cujo sistema associado a este problema é

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = \nabla V(q).$$

Desde que J. Mawhin e M. Willem estudaram soluções periódicas para sistemas Hamiltonianos e obtiveram uma série de resultados (ver [1]) uma extensiva literatura para a existência de soluções periódicas obtidas por um argumento de minimização e pelo uso do Teorema do Passo da Montanha tem surgido. O método consiste em considerar uma sequência de sistemas de equações diferenciais para (1), isto é,

$$\ddot{q}(t) + \nabla F(t, q(t)) = f_k(t). \tag{2}$$

onde $f_k(t)$ é uma restrição de f restrita a um intervalo do tipo $[-kT, kT)$ e as soluções de (2) formam uma sequência cujo limite na topologia $C^1_{Loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ é uma solução homoclínica para (1). Dizemos que uma solução q_0 é homoclínica em $x \in \mathbb{R}^N$, se $q_0(t) \to x$ e $\dot{q}_0(t) \to x$, quando $|t| \to \infty$.

No Capítulo 1, estudamos os teoremas que nos possibilitarão encontrar soluções para (1), onde destacamos o Lema de Deformação e o Teorema do Passo da Montanha com a condição de Cerami. Além do estudo de algumas propriedades sobre funções semi-contínuas inferiormente e convexas.

O Capítulo 2 é dedicado ao estudo da existência de solução periódica do seguinte problema

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = \nabla F(t, u(t)) \quad q.t.p. \quad sobre \quad [0, T] \\ u(0) - u(T) = \dot{u}(0) - \dot{u}(T) = 0. \end{cases}$$

Onde o potencial F assume caráter periódico e convexo.

O Capítulo 3 trata da existência de solução homoclínica não trivial para sistemas do tipo (1) com um potencial coercivo.

O Capítulo 4 trata de sistemas com o p-Laplaciano dado por

$$\frac{d}{dt}(|\dot{q}(t)|^{p-2}\dot{q}(t)) = \nabla F(t, q(t)) + f(t)$$

onde $p > 1$, $t \in \mathbb{R}$ e iremos generalizar alguns resultados obtidos no Capítulo 3. Nos Capítulos 3 e 4 o método utilizado para obter tais soluções foi o de minimização global.

No Capítulo 5 voltamos a tratar com a equação (1), porém retiramos todas as condições de periodicidade sobre o potencial e utilizamos metódos minimax para obter solução para (1).

Por fim os apêndices trazem resultados sobre os espaços de Sobolev, séries de Fourier e resultados importantes que foram utilizados ao longo desta dissertação.

Capítulo 1

Pontos Críticos via Minimização e o Teorema do Passo da Montanha

O nosso objetivo neste capítulo é estabelecer resultados sobre minimização de funcionais e a demonstração do Teorema do Passo da Montanha com a condição de Cerami. Neste capítulo iremos seguir as ideias apresentadas em [1], [8] e [12].

Definição 1.1 *Seja X um espaço topológico. Dizemos que $\phi : X \to \mathbb{R}$ é semicontínuo inferiormente (s.c.i.) se $\phi^{-1}(a, \infty)$ é aberto em X, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$ (isto é, $\phi^{-1}(-\infty, a]$ é fechado em X para todo $a \in \mathbb{R}$).*

Teorema 1.1 *Seja X um espaço topológico compacto e seja $\phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente. Então ϕ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in X$ tal que*

$$\phi(u_0) = \inf_X \phi.$$

Demonstração: Observe que podemos escrever

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \phi^{-1}(-n, \infty).$$

Uma vez que, por hipótese, cada conjunto $\phi^{-1}(-n, \infty)$ é aberto, da compacidade de X podemos extrair uma subcobertura finita, isto é,

$$X = \bigcup_{n=1}^{n_0} \phi^{-1}(-n, \infty)$$

para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\phi(u) > -n_0 \text{ para todo } u \in X,$$

donde temos que ϕ é limitada inferiormente. Seja

$$c = \inf_X \phi > -\infty$$

e suponha por contradição, que

$$\phi(u) > c, \text{ para todo } u \in X \ ,$$

isto é, que o ínfimo não seja atingido. Então

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \phi^{-1}\Big(c + \frac{1}{n}, \infty\Big)$$

é uma cobertura para X e pela compacidade de X, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\phi(u) > c + \tfrac{1}{k_0} \text{ para todo } u \in X.$$

Como c é o ínfimo devemos ter

$$c \geq c + \tfrac{1}{k_0},$$

o que é um absurdo. Portanto o ínfimo deve ser atingido.

■

Teorema 1.2 *Seja E um espaço de Hilbert (ou um espaço de Banach reflexivo) e suponha que um funcional $\phi : E \to \mathbb{R}$ satisfaça as seguintes condições:*

i) *fracamente semicontínuo inferiormente (f.s.c.i.), isto é, ϕ é s.c.i. considerando-se E com sua topologia fraca.*

ii) *coercivo, isto é,*

$$\phi(u) \to +\infty \text{ quando } \|u\| \to \infty.$$

Então ϕ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in E$ tal que

$$\phi(u_0) = \inf_E \phi.$$

Demonstração: Pela coercividade de ϕ, escolhemos $R > 0$ tal que

$$\phi(u) \geq \phi(0) \ \forall u \in E \text{ com } \|u\| > R.$$

Como a bola fechada $\bar{B}_R(0)$ é compacta na topologia fraca e ϕ é f.s.c.i., a restrição $\phi : \bar{B}_R(0) \to \mathbb{R}$ também é f.s.c.i.. Logo pelo Teorema 1.1 temos que existe $u_0 \in \bar{B}_R(0)$ tal que

$$\phi(u_0) = \inf_{\bar{B}_R(0)} \phi.$$

Assim,

$$\phi(u) \geq \phi(0) \geq \phi(u_0) \ \forall u \in E,$$

mostrando que

$$\phi(u_0) = \inf_E \phi.$$

■

Teorema 1.3 *Sob as hipóteses* **(i)** *e* **(ii)** *do Teorema* 1.2*, dado um conjunto fechado e convexo* $C \subset E$*, existe* $\hat{u} \in C$ *tal que*

$$\phi(\hat{u}) = \inf_C \phi.$$

Demonstração: Fixe $p \in C$ e escolha R suficientemente grande tal que

$$\phi(u) \geq \phi(p) \ \ \forall u \in C \ \ com \ \ \|u\| \geq R.$$

Desde que $\bar{B}_R(0) \bigcap C$ é um conjunto fechado, convexo e limitado, temos que $\bar{B}_R(0) \bigcap C$ é fracamente compacto pelo Corolário $B.2$, desta forma o resultado segue pelo Teorema 1.1.

■

1.1 Funções Semi-Contínuas Inferiormente

Uma sequência minimizante para uma função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é uma sequência $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\varphi(u_k) \to \inf_X \varphi \text{ quando } k \to \infty.$$

Dizemos que $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é sequencialmente semi-contínua inferiormente (s.s.c.i) se

$$u_k \to u \Rightarrow \underline{lim}\varphi(u_k) \geq \varphi(u)$$

e fracamente sequencialmente semi-contínuo inferiormente (f.s.s.c.i.) se

$$u_k \rightharpoonup u \Rightarrow \underline{lim}\varphi(u_k) \geq \varphi(u).$$

No entanto como a definição 1.1 é equivalente a definição dada acima (ver [18]) ao longo da dissertação iremos nos referir a uma função sequencialmente s.c.i. (respc. f.s.s.c.i.) simplesmente por s.c.i. (respc. f.s.c.i.).

Propriedades:

i) A soma de duas funções s.c.i. (resp. f.s.c.i) é s.c.i. (resp. f.s.c.i.).

ii) O produto de uma função s.c.i. (resp. f.s.c.i.) por uma constante positiva é s.c.i. (resp. f.s.c.i.).

iii) Se $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma família de funções s.c.i. (resp. f.s.c.i.) a função $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda$ definida por

$$(\sup_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda)(u) = \sup_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda(u)$$

é s.c.i. (resp. f.s.c.i.).

Demonstração: Prova de **i)** e **ii)**. Segue diretamente das propriedades de limite inferior.

Prova de **iii)**

Seja $u_k \to u$ e $\epsilon > 0$. Então, existem λ_0 e $k_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\varphi_{\lambda_0}(u) \geq \sup_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(u) - \epsilon$$

e

$$\varphi_{\lambda_0}(u_k) \geq \underline{lim}\varphi_{\lambda_0}(u_k) - \epsilon \quad \forall k \geq k_0.$$

Desde que φ é s.c.i.

$$\varphi_{\lambda_0}(u_k) \geq \varphi_{\lambda_0}(u) - \epsilon \quad \forall k \geq k_0.$$

Donde temos

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda(u_k) \geq \varphi_{\lambda_0}(u) - \epsilon \quad \forall k \geq k_0$$

ou seja,

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda(u_k) \geq \sup_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda(u) - 2\epsilon \quad \forall \epsilon > 0.$$

Portanto

$$\underline{lim}\sup_{\lambda}\varphi_\lambda(u_k) \geq \sup_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda(u).$$

■

Teorema 1.4 *Se φ é f.s.c.i. sobre um espaço de Banach reflexivo X e possui uma sequência minimizante limitada, então φ possui um mínimo sobre X.*

Demonstração: Seja $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência minimizante limitada. Passando se necessário a uma subsequência, podemos assumir pela reflexividade de X, que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para $u \in X$. Assim

$$u_k \rightharpoonup u \Rightarrow \varphi(u) \leq \underline{lim}\varphi(u_k) = lim\varphi(u_k) = \inf_X \varphi. \quad (1.1)$$

A igualdade entre os limites acontece devido ao fato de $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ser uma sequência minimizante. Sendo

$$\varphi(u) \geq \inf_X \varphi,$$

a desigualdade (1.1) implica que

$$\varphi(u) = \inf_X \varphi.$$

Como o ínfimo é atingido, concluímos que φ possui um minímo.

■

1.2 Funções Convexas

A função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é convexa se

$$\varphi((1-\lambda)u + \lambda v) \leq (1-\lambda)\varphi(u) + \lambda\varphi(v)$$

para todo $\lambda \in]0,1[$ e $u, v \in X$.

Propriedades:

i) A soma de funções convexas é uma função convexa.

ii) O produto de uma função convexa por uma constante positiva é uma função convexa.

iii) Se $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma família de funções convexas então $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda$ é uma função convexa.

Demonstração: Prova de **i)**

Sejam φ e ψ funções convexas, então

$$(\varphi+\psi)((1-\lambda)u+\lambda v) = \varphi((1-\lambda)u+\lambda v)+\psi((1-\lambda)u+\lambda v) \leq (1-\lambda)(\varphi+\psi)(u)+\lambda(\varphi+\psi)v.$$

Prova de **ii)**

Sejam φ uma função convexa e $c > 0$ então

$$c\varphi((1-\lambda)u+\lambda v) \leq (1-\lambda)c\varphi(u)+\lambda c\varphi(v).$$

Prova de **iii)**

$$\varphi_\lambda((1-\lambda)u+\lambda v) \leq (1-\lambda)\varphi_\lambda(u)+\lambda\varphi_\lambda(v) \leq sup[(1-\lambda)\varphi_\lambda(u)]+sup[\lambda\varphi_\lambda(v)].$$

Portanto

$$\varphi_\lambda((1-\lambda)u+\lambda v) \leq (1-\lambda)sup[\varphi_\lambda(u)]+\lambda sup[\varphi_\lambda(v)]$$

logo a última desigualdade é uma cota superior para $\varphi_\lambda((1-\lambda)u+\lambda v)$ donde temos a conclusão.

$\blacksquare$

Teorema 1.5 (de Mazur) *Se $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em um espaço normado X tal que $u_k \rightharpoonup u$, existe uma sequência de combinações convexas*

$$v_k = \sum_{j=1}^{k}\alpha_{k_j}u_j, \sum_{j=1}^{k}\alpha_{k_j} = 1, \quad \alpha_{k_j} \geq 0 \quad (k\in\mathbb{N}^*)$$

tal que $v_k \to u$ em X.

Demonstração: Ver [1]

Teorema 1.6 *Se X é um espaço normado e $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é s.c.i. e convexa, então φ é f.s.c.i.*

Demonstração: Assuma que

$$u_i \rightharpoonup u \text{ e seja } c > \underline{lim}\varphi(u_i).$$

Passando se necessário a uma subsequência, podemos assumir que

$$c > \varphi(u_i) \quad \forall i \in \mathbb{N}^*,$$

caso contrário existe $i_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $c \leq \varphi(u_i)$ para todo $i \geq i_0$ o que é uma contradição. Pelo Teorema de Mazur, existe uma sequência (v_k) com

$$v_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{k_j} u_j, \sum_{j=1}^{k} \alpha_{k_j} = 1, \quad \alpha_{k_j} \geq 0$$

tal que $v_k \to u$. Dai, usando o fato de que φ é s.c.i. e convexa temos

$$\varphi(u) \leq \underline{lim}\varphi(v_k) \leq \underline{lim}\Big(\sum_{j=1}^{k} \alpha_{k_j}\varphi(u_j)\Big) \leq \Big(\sum_{j=1}^{k} \alpha_{k_j}\Big)c = c$$

Desde que "c"é arbitrário, considere uma sequência $c_n \to \underline{lim}\varphi(u_i)$, para concluir

$$\varphi(u) \leq \underline{lim}\varphi(u_i).$$

Mostrando que φ é f.s.c.i..

■

1.3 Equação de Euler

O seguinte teorema mostra que, para resolver a equação

$$\varphi'(u) = 0$$

para uma função diferenciável $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é suficiente encontrar um mínimo local (ou máximo) de φ.

Teorema 1.7 *Se $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é diferenciável, todo ponto de mínimo local u (respectivamente máximo) satisfaz a equação de Euler*

$$\varphi'(u) = 0.$$

Demonstração: Seja $u \in X$ um ponto de mínimo e $r > 0$. Então,

$$\varphi(u) \leq \varphi(w) \quad \forall w \in \overline{B}_r(u),$$

ou equivalentemente

$$\varphi(u) \leq \varphi(u+v) \text{ para } \|v\| \leq r.$$

Fixando $v \in X - \{0\}$ e $0 < \lambda < \frac{r}{\|v\|}$,

$$\varphi(u) \leq \varphi(u+\lambda v)$$

donde segue

$$0 \leq \frac{\varphi(u+\lambda v) - \varphi(u)}{\lambda}.$$

Passando ao limite de $\lambda \to 0$, ficamos com

$$0 \leq \langle \varphi'(u), v \rangle.$$

Desde que v é arbitrário, $\varphi'(u) = 0$.

■

1.4 Teorema do Passo da Montanha

Seja $(X, \|.\|)$ um espaço de Banach. No que segue designaremos por I^c o conjunto de todos os pontos em níveis menores do que ou iguais a c, isto é,

$$I^c = \{u \in X; I(u) \leq c\}.$$

Definição 1.2 *Um campo pseudo gradiente para $\phi \in C^1(X, R)$ é uma aplicação localmente lipschitziana $V : Y \to X$, onde $Y = \{u \in X; \phi'(u) \neq 0\}$, satisfazendo as seguintes condições:*

$$\|V(u)\| \leq 2\|\phi'(u)\| \tag{1.2}$$

e

$$\phi'(u)V(u) \geq \|\phi'(u)\|^2 \tag{1.3}$$

para todo $u \in Y$.

Lema 1.1 *Sob as condições da Definição* 1.2*, existe um campo pseudo-gradiente para ϕ em Y.*

Demonstração: Dado $u \in Y$, temos $\phi'(u) \neq 0$ e

$$\|\phi'(u)\| = sup\{\langle \phi', w \rangle : \|w\| = 1\}.$$

Segue da definição de supremo que dado $\epsilon = \frac{\|\phi'(u)\|}{3} > 0$, existe $w_u \in X$ com $\|w_u\| = 1$ e

$$\langle \phi', w_u \rangle > \|\phi'(u)\| - \epsilon$$

implicando

$$\langle \phi', w_u \rangle > \frac{2}{3}\|\phi'(u)\|.$$

Considerando a função $v : Y \to X$ dada por

$$v(u) = \frac{3}{2}\|\phi'(u)\| w_u$$

e denotando $v = v(u)$, temos

$$\|v\| = \frac{3}{2}\|\phi'(u)\| < 2\|\phi'(u)\|.$$

Por outro lado,

$$\langle \phi'(u), v \rangle = \frac{3}{2}\|\phi'(u)\| \langle \phi'(u), w_u \rangle$$

de onde segue,

$$\langle \phi'(u), v \rangle > \frac{3}{2}\|\phi'(u)\| \frac{2}{3}\|\phi'(u)\| = \|\phi'(u)\|^2.$$

Visto que ϕ' é contínua, existe uma vizinhança aberta N_u de u em Y tal que

$$\|v\| < 2\|\phi'(w)\|, \quad \forall w \in N_u$$

e

$$\langle \phi'(u), v \rangle > \|\phi'(u)\|^2 \quad \forall w \in N_u.$$

Desde que a família $\{N_u, u \in Y\}$ é uma cobertura aberta de Y, existe um refinamento localmente finito N_{u_i} de Y (Ver [15]).

No que segue, consideramos

$$\rho_i(u) = dist(u, (N_{u_i})^c), \quad \forall u \in Y$$

e

$$V(u) = \sum_i \frac{\rho_i(u)}{\sum_j \rho_j(u)} v_i, \quad \forall u \in Y \tag{1.4}$$

onde

$$v_i = \frac{3}{2}\|\phi'(u_i)\| w_{u_i}.$$

Sendo N_{u_i} localmente finita, cada $u \in Y$ pertence apenas a um número finito de N_{u_i} (Ver [15]). Logo as somas definidas em (1.4) são finitas, pois ρ_i se anula fora de N_{u_i}. Assim $V(u)$ é uma combinação convexa dos $v_i's$, que verificam

$$\|v_i\| < 2\|\phi'(u)\|, \forall u \in N_{u_i}$$

e

$$\langle \phi'(u), v_i \rangle > \|\phi'(u)\|^2 \quad \forall u \in N_{u_i}.$$

Logo, dado $u \in Y$

$$V(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i(u)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} v_i = \frac{\rho_1(u)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} v_1 + \ldots + \frac{\rho_n(u)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} v_n$$

implicando que,

$$\|V(u)\| \leq \frac{\rho_1(u)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} \|v_1\| + \ldots + \frac{\rho_n(u)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} \|v_n\|$$

e portanto,

$$\|V(u)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i(u)}{\sum_{j=1}^{N} \rho_j(u)} \|v_i\| = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} \sum_{i=1}^{n} \rho_i(u) \|v_i\|.$$

Sendo as somas acima finitas para cada u, segue que

$$\|V(u)\| \leq 2\|\phi'(u)\|$$

e

$$\langle \phi'(u), V(u) \rangle \geq \|\phi'(u)\|^2.$$

Para mostrar que V é localmente lipschitziana, basta mostrar que cada parcela

$$\frac{\rho_i(u)}{\sum_{i=1}^{n} \rho_j(u)} \|v_i\|$$

é localmente lipschitziana. Observando que para cada i, $\|v_i\|$ é constante, vamos mostrar no caso de duas parcelas que a função

$$g(u) = \frac{\rho_1(u)}{\rho_1(u) + \rho_2(u)}$$

é localmente lipschitziana. Para tanto, considerando arbitrário u, $v \in U_z$, temos

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_1(u)}{\rho_1(u) + \rho_2(u)} - \frac{\rho_1(v)}{\rho_1(v) + \rho_2(v)}$$

implicando que,

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_1(u)\rho_1(v) + \rho_1(u)\rho_2(v) - \rho_1(u)\rho_1(v) - \rho_1(v)\rho_2(u)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)][\rho_1(v) + \rho_2(v)]}$$

ou simplesmente

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_1(u)\rho_2(v) - \rho_1(v)\rho_2(u)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)][\rho_1(v) + \rho_2(v)]}.$$

Assim,

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_1(u)\rho_2(v) - \rho_1(u)\rho_2(v) + \rho_1(u)\rho_2(v) - \rho_1(v)\rho_2(u)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)][\rho_1(v) + \rho_2(v)]}$$

de onde segue que,

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_2(v)[\rho_1(u) - \rho_1(v)]}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)][\rho_1(v) + \rho_2(v)]} + \frac{\rho_1(v)[\rho_2(v) - \rho_2(u)]}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)][\rho_1(v) + \rho_2(v)]}$$

e consequentemente,

$$|g(u) - g(v)| \leq \frac{\rho_2(v)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)][\rho_1(v) + \rho_2(v)]}|\rho_1(u) - \rho_1(v)| +$$

$$\frac{\rho_1(v)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)][\rho_1(v) + \rho_2(v)]}|\rho_2(v) - \rho_2(u)|.$$

Sendo ρ_1 e ρ_2 funções lipschitzianas, existem K_1 e K_2 tais que $|\rho_1(u) - \rho_1(v)| \leq K_1\|u - v\|$ e $|\rho_2(u) - \rho_2(v)| \leq K_2\|u - v\|$, logo

$$|g(u) - g(v)| \leq \frac{\rho_2(v)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)][\rho_1(v) + \rho_2(v)]}K_1\|u - v\| +$$

$$\frac{\rho_1(v)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)][\rho_1(v) + \rho_2(v)]}K_2\|u - v\|.$$

Desde que $\rho_1(u) + \rho_2(u) > 0$, existe $a > 0$ tal que $\rho_1(u) + \rho_2(u) > a > 0$ e como ρ_1 e ρ_2 são funções contínuas, existe uma vizinhança U_x de u tal que

$$\rho_1(u) + \rho_2(u) > a, \quad \forall v \in U_z.$$

Portanto,

$$|g(u) - g(v)| \leq \frac{1}{a}K_1\|u - v\| + \frac{1}{a}K_2\|u - v\|$$

pois,

$$\frac{\rho_1(v)}{\rho_1(v)+\rho_2(v)} \leq 1, \quad \frac{\rho_2(v)}{\rho_1(v)+\rho_2(v)} \leq 1.$$

Logo,

$$|g(u)-g(v)| \leq \frac{1}{a}(K_1+K_2)\|u-v\|, \quad \forall u, v \in U_z$$

mostrando que g é localmente lipschitziana. Concluindo assim que V é um campo vetorial pseudo-gradiente para ϕ em Y.

■

Lema 1.2 *Seja X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, $\epsilon > 0$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que*

$$(1+\|u\|)\|I'(u)\| \geq 8\epsilon \ \forall u \in I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]).$$

Então existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ verificando:

(1) *$\eta(t,u) = u$ se $t = 0$ ou se para todo $u \notin I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$.*

(2) *$I(\eta(.,u))$ é não crescente em $[0,1]$.*

(3) *$\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$.*

(4) *$\eta(t,.)$ é um homeomorfismo para $t \in [0,1]$.*

Demonstração: No que segue considere os seguintes subconjuntos de Y,

$$A = I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \ \ e \ \ B = I^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]).$$

Usando A e B, definimos a função

$$\Psi(u) = \frac{dist(u, X-A)}{dist(u, X-A) + dist(u, B)}$$

a qual é localmente Lipschitziana com $\Psi \equiv 0$ em $X - A$ e $\Psi \equiv 1$ em B. Note que Ψ está bem definida, isto é, seu denominador é sempre diferente de zero. De fato, suponha por contradição que

$$dist(u, X-A) + dist(u, B) = 0.$$

Logo existem $w_n \in X - A$ e $v_n \in B$ tais que

$$w_n \to u \ \ e \ \ v_n \to u.$$

Segue da definição de A que

$$I(w_n) > c + 2\epsilon \ \ ou \ \ I(w_n) < c - 2\epsilon,$$

implicando

$$I(u) > c + 2\epsilon \;\; ou \;\; I(u) < c - 2\epsilon.$$

Por outro lado, segue da definição de B que

$$c - 2\epsilon \leq I(v_n) \leq c + 2\epsilon$$

de onde obtemos por passagem ao limite

$$c - 2\epsilon \leq I(u) \leq c + 2\epsilon,$$

o que é um absurdo, portanto

$$dist(u, X - A) + dist(u, B) \neq 0.$$

Considere a função localmente Lipschitziana $F : X \to X$ dada por

$$F(u) = \begin{cases} \frac{-\Psi(u)V(u)}{\|V(u)\|^2}, & se \quad u \in A \\ 0 & se \quad u \in X - A. \end{cases}$$

Note que

$$\|F(u)\| \leq \frac{1}{\|V(u)\|} \leq \frac{1}{\|I'(u)\|} \leq \frac{1 + \|u\|}{8\epsilon}$$

pois de (1.3) temos

$$\|I'(u)\|^2 \leq \|I'(u)V(u)\| \leq \|I'(u)\|\|V(u)\|$$

assim

$$\|F(u)\| \leq a_\epsilon + a_\epsilon\|u\|$$

onde $a_\epsilon = 1/8\epsilon$. Logo $F(u)$ satisfaz $(B.5)$, isto é, o problema de Cauchy abaixo tem uma solução definida num intervalo maximal (ver apêndice B). Como F é localmente Lipschitz, segue pelo Teorema de Existência e unicidade que o problema de valor inicial

$$(PVI) \quad \begin{cases} \dot{\sigma}(t) = F(\sigma(t)) \;\; t \in [0, \infty) \\ \sigma(0) = u \end{cases}$$

tem uma única solução σ definida no intervalo $[0, \infty)$. Desta forma, fica bem definida a função $\eta : [0, 1] \times X \to X$ tal que $\eta(t, u) = \sigma(8\epsilon t, u)$, a qual deve verificar

$$\eta(0, u) = \sigma(0, u) = u.$$

Se $u \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$, defina $\sigma_1(t) = u$ e note que

$$\sigma_1'(t) = 0 = F(\sigma_1(t)) \text{ e } \sigma_1(0) = u.$$

Segue da unicidade de solução para o (PVI) que

$$\sigma_1(t) = \sigma(t,u) = u \quad \forall \quad u \notin A$$

mostrando (1).

Vejamos agora, que $I(\eta(.,u))$ é não crescente em $[0,1]$, isto é, mostraremos que a sua derivada é menor do que ou igual a zero. Note que

$$\frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) = I'(\sigma(t,u))\sigma'(t,u) = I'(\sigma(t,u))F(\sigma(t,u)).$$

Se $\sigma(t,u) \notin A$, temos $F(\sigma(t,u)) = 0$, daí

$$\frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) = 0.$$

Se $\sigma(t,u) \in A$, temos

$$\frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) = I'(\sigma(t,u))\frac{-\Psi(\sigma(t,u))}{\|V(\sigma(t,u))\|^2}V(\sigma(t,u)) \le \frac{-\Psi(\sigma(t,u))}{\|V(\sigma(t,u))\|^2}\|I'(\sigma(t,u))\|^2 \le 0.$$

Logo a função $I(\sigma(.,u)) : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é não crescente.

Seja $u \in I^{c+\epsilon}$, isto é,

$$I(u) \le c + \epsilon$$

e suponha que existe $t_0 \in [0, 8\epsilon]$ tal que

$$I(\sigma(t_0,u)) < c - \epsilon$$

ou equivalentemente que existe $t_1 \in [0,1]$ tal que

$$I(\sigma(8\epsilon t_1, u)) < c - \epsilon.$$

Usando a monotonicidade de $I(\sigma(.,u))$,

$$I(\eta(1,u)) = I(\sigma(8t\epsilon,u)) \le I(\sigma(8t_1\epsilon,u)) < c - \epsilon,$$

mostrando que $\eta(1,u) \in I^{c-\epsilon}$. Por outro lado, se

$$c - \epsilon \le I(\sigma(8\epsilon t, u))$$

para todo $t \in [0,1]$, temos

$$c - \epsilon \le I(\sigma(8\epsilon t,u)) \le I(\sigma(0,u)) = I(u) \le c + \epsilon,$$

implicando que

$$\eta(t,u) = \sigma(8\epsilon t, u) \in B \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Assim

$$I(\eta(1,u)) = I(\sigma(8\epsilon,u)) = I(\sigma(0,u)) + \int_0^{8\epsilon} \frac{d}{ds}(I(\sigma(s,u)))ds$$

ou seja,

$$I(\eta(1,u)) = I(u) + \int_0^{8\epsilon} I'(\sigma(s,u))\sigma'(s,u)ds \leq I(u) - \int_0^{8\epsilon} \frac{\Psi(\sigma(t,u))}{\|V(\sigma(t,u))\|^2}\|I'(\sigma(t,u))\|^2 ds.$$

Como $\sigma(s,u) \in B$, segue que $\Psi(\sigma(t,u)) = 1$ e portanto

$$I(\eta(1,u)) \leq c + \epsilon - \int_0^{8\epsilon} \frac{\|I'(\sigma(t,u))\|^2}{\|V(\sigma(t,u))\|^2} ds$$

implicando que

$$I(\eta(1,u)) \leq c + \epsilon - \frac{1}{4}\int_0^{8\epsilon} ds = c + \epsilon - 2\epsilon = c - \epsilon,$$

mostrando que $\eta(1,u) \in I^{c-\epsilon}$. O item (4) segue da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias.

$\blacksquare$

Teorema 1.8 (Teorema do Passo da montanha) *Seja E um espaço de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 verificando:*

(I_1) $I(0) = 0$.

(I_2) Existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tal que $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$.

(I_3) Existe $e \in E - \overline{B}_\rho(0)$ tal que $I(e) \leq 0$.

Considerando

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{s \in [0,1]} I(g(s)) \tag{1.5}$$

onde

$$\Gamma = \{g \in C([0,1],E); g(0) = 0, \quad g(1) = e\},$$

para cada $\epsilon > 0$ existe $u \in E$ tal que

a) $c - 2\epsilon \leq I(u) \leq c + 2\epsilon$.

b) $(1 + \|u\|)\|I'(u)\| < 8\epsilon$.

Demonstração: Vejamos que

$$c \geq \alpha.$$

Seja $\gamma \in C([0,1],E)$ com

$$\gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e.$$

Defina a função $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por

$$h(t) = \|\gamma(t)\|.$$

Note que $h \in C([0, 1], \mathbb{R})$, com

$$h(0) = \|\gamma(0)\| = \|0\| = 0 < \rho$$

e

$$h(1) = \|\gamma(1)\| = \|e\| > \rho.$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que

$$h(t_0) = \|\gamma(t_0)\| = \rho,$$

logo

$$I(\gamma(t_0)) \geq \alpha.$$

Consequentemente

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \geq I(\gamma(t_0)) \geq \alpha \quad \forall \gamma \in \Gamma,$$

mostrando que

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \geq \alpha > 0.$$

Por (1.5),

$$c \leq \max_{s\in[0,1]} I(g(s)).$$

Suponha que para algum ϵ suficientemente pequeno, a conclusão do teorema não é verdadeira. Podemos assumir que

$$c - 2\epsilon \geq I(0) \geq I(e). \tag{1.6}$$

Pela definição de c, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\max_{s\in[0,1]} I(\gamma(s)) \leq c + \epsilon. \tag{1.7}$$

Considere $\beta := \eta \circ \gamma$, onde η é dado pelo Lema de Deformação, pelo item (1) do mesmo teorema e por (1.6) segue que

$$0, e \notin I^{-1}[(c-2\epsilon, c+2\epsilon)],$$

logo

$$\beta(0) = \eta(\gamma(0)) = \gamma(0) = 0$$

e

$$\beta(1) = \eta(\gamma(1)) = \gamma(1) = e$$

mostrando que $\beta \in \Gamma$. Segue de (1.7) que $\gamma \in I^{c+\epsilon}$ e como $\eta(I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$, concluímos que

$$c \leq \max_{s\in[0,1]} I(\beta(t)) \leq c - \epsilon,$$

o que é uma contradição, logo o teorema é verdadeiro.

■

1.5 A condição Cerami

Seja X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe $C^1(X, \mathbb{R})$.

Definição 1.3 *Diremos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ é uma sequência de Cerami no nivel $c \in \mathbb{R}$, quando*

$$I(u_n) \to c \;\; e \;\; (1 + \|u_n\|)I'(u_n) \to 0.$$

Definição 1.4 *Diremos que I verifica a condição de Cerami quando toda sequência de Cerami, denotada por (C), no nível c para $c \in \mathbb{R}$, admitir uma subsequência que converge forte em X, isto é,*

$$I(u_n) \to c \;\; e \;\; (1 + \|u_n\|)I'(u_n) \to 0$$

existem $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$ e $u_0 \in X$ tal que

$$u_{n_j} \to u_0 \; em \; X.$$

Nas hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, existe uma sequência de Cerami associado ao nivel do Passo da Montanha.

Corolário 1.1 *Sob as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, se I verifica a condição de Cerami, o nivel do Passo da Montanha é valor crítico.*

Demonstração: Quando a condição (C) ocorre, observamos que

$$I(u_0) = c \text{ e } I'(u_0) = 0.$$

Mostrando que c é um valor crítico para I e que u_0 é um ponto crítico de I no nivel c.

$\blacksquare$

Capítulo 2

O Metódo Direto do Cálculo das Variações

O nosso objetivo neste capítulo é estabelecer uma teoria que irá nos auxiliar a encontrar solução para sistemas periódicos. No decorrer desta discursão X denotará um espaço normado. Neste capítulo iremos seguir as idéias apresentadas em [1].

2.1 O Cálculo das Variações com Condições de Contorno Periódicas

Seja C_T^∞ o espaço das funções T-periódicas infinitamente diferenciáveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^N$.
Lema Fundamental *Sejam* $u, v \in L^1(0, T; R^N)$*. Se para toda* $f \in C_T^\infty$

$$\int_0^T (u(t), f'(t))dt = -\int_0^T (v(t), f(t))dt \tag{2.1}$$

então

$$\int_0^T v(s)ds = 0 \tag{2.2}$$

e existe $c \in \mathbb{R}^N$ *tal que*

$$u(t) = \int_0^t v(s)ds + c \quad q.t.p. \quad em \quad [0, T]. \tag{2.3}$$

Demonstração: Se $\{e_j\}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^N$, podemos escolher $f = e_j$ em

(2.1), obtendo

$$\int_0^T (v(t), e_j)dt = 0 \;\; (1 \leq j \leq N).$$

Logo

$$\int_0^T v_j(t)dt = 0 \;\; (1 \leq j \leq N)$$

ou equivalentemente

$$\int_0^T v(t)dt = 0.$$

Definindo $w \in C(0,T;\mathbb{R}^N)$ por

$$w(t) = \int_0^t v(s)ds,$$

tem-se que

$$\int_0^T (w(t), f'(t))dt \;\; = \;\; \int_0^T \Big[\sum_{j=1}^N \Big(\int_0^t v_j(s)ds\Big) f_j'(t)\Big]dt \;\; = \;\; \int_0^T \Big(\sum_{j=1}^N \int_0^t v_j(s) f_j'(t)ds\Big)dt.$$

Desde que

$$\int_0^T \Big(\int_0^t \sum_{j=1}^N v_j(s) f_j'(t)ds\Big)dt = \int_0^T \Big(\int_0^t (v(s), f'(t))ds\Big)dt,$$

fazendo uma mudança de variável e usando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\int_0^T (w(t), f'(t))dt \;\; = \;\; \int_0^T \Big(\int_s^T (v(s), f'(t))dt\Big)ds \;\; = \;\; \int_0^T \Big(\int_s^T \sum_{j=1}^N v_j(s) f_j'(t)dt\Big)ds.$$

Logo

$$\int_0^T \Big(\sum_{j=1}^N v_j(s)(f_j(T) - f_j(s))\Big)ds = \int_0^T \Big((v(s), f(T)) - (v(s), f(s))\Big)ds.$$

Usando (2.1) e (2.2),

$$\int_0^T (w(t), f'(t))d = -\int_0^T (v(s), f(s))ds \;\; = \;\; \int_0^T (u(s), f'(s))ds \;\; \forall f \in C_T^\infty$$

ou seja,

$$\int_0^T (w(t), f'(s))dt = \int_0^T (u(t), f'(s))dt$$

implicando que

$$\int_0^T (u(s) - w(s), f'(s))ds = 0 \;\; \forall f \in C_T^\infty.$$

Em particular, podemos escolher

$$f(t) = \begin{cases} sen(\frac{2\pi tk}{T})e_j & , \quad k \in \mathbb{N} - \{0\}, 1 \leq j \leq N \\ cos(\frac{2\pi tk}{T})e_j & , \quad k \in \mathbb{N} - \{0\}, 1 \leq j \leq N. \end{cases}$$

Daí,

$$0 = \int_0^T (u(s) - w(s), \frac{2k\pi}{T} cos\Big(\frac{2\pi sk}{T}\Big)e_j)ds = \frac{2k\pi}{T}\int_0^T (u_j(s) - w_j(s), cos\Big(\frac{2\pi sk}{T}\Big)ds$$

mostrando que

$$\frac{2k\pi}{T}\int_0^T u_j(s) cos\Big(\frac{2\pi sk}{T}\Big)ds = \frac{2k\pi}{T}\int_0^T w_j(s) cos\Big(\frac{2\pi sk}{T}\Big)ds.$$

Assim, os coeficientes de Fourier de u e w coincidem e portanto

$$u(s) - w(s) = \frac{1}{T}\int_0^T u(s)ds - \frac{1}{T}\int_0^T w(s)ds = c$$

q.t.p. sobre $[0, T]$ para algum $c \in \mathbb{R}^N$.

■

Observações:

1) A função v satisfazendo (2.1) é chamada a derivada fraca de u. A derivada fraca se existir será única e será denotada por $\dot{u}$.

2)Pelo Lema Fundamental

$$u(t) = \int_0^t \dot{u}(s)ds + c$$

q.t.p. sobre $[0, T]$. Como de costume vamos identificar a classe de equivalência de u e sua representante contínua por

$$\hat{u}(t) = \int_0^t \dot{u}(s)ds + c. \tag{2.4}$$

Em particular, por (2.2)

$$u(0) = u(T) = c$$

e

$$u(t) - u(k) = \int_0^t \dot{u}(s)ds - \int_0^k \dot{u}(s)ds = \int_0^t \dot{u}(s)ds + \int_k^0 \dot{u}(s)ds = \int_k^t \dot{u}(s)ds$$

para k e $t \in [0, T]$.

3) Se $\dot{u}$ é contínua sobre $[0, T]$, então por (2.4)

$$u'(t) = \frac{d}{dt}\Big(\int_0^t \dot{u}(s)ds + c\Big) = \dot{u}(t).$$

4) Desde que $\dot{u}$ é integrável sobre $[0, T]$ e por (2.4). Temos que $u'(t) = \dot{u}(t)$ q.t.p. sobre $[0, T]$.

Seja $1 < p < \infty$. O espaço de Sobolev $W_T^{1,p}$ é o espaço das funções $u \in L^p(0,T;\mathbb{R}^N)$ que possuem uma derivada fraca $\dot{u} \in L^p(0,T;\mathbb{R}^N)$ (ver Apêndice A). A norma sobre $W_T^{1,p}$ é definida por

$$\|u\|_{W_T^{1,p}} = \left(\int_0^T |u(t)|^p dt + \int_0^T |\dot{u}(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

Denotaremos por H_T^1 o espaço $W_T^{1,2}$ com o produto interno

$$((u,v)) = \int_0^T [(u(t),v(t)) + (\dot{u}(t),\dot{v}(t))]dt$$

e a norma correspondente $\|u\| = \|u\|_{W_T^{1,2}}$. Recordemos que

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_0^T |u(t)|^p dt\right)^{1/p} \text{ e } \|u\|_\infty = \max_{t\in[0,T]} |u(t)|.$$

Proposição 2.1 *Existe $c > 0$ tal que, se $u \in W_T^{1,p}$, então*

$$\|u\|_\infty \leq c\|u\|_{W_T^{1,p}}. \tag{2.5}$$

Além disso, se $\int_0^T u(t)dt = 0$, tem-se

$$\|u\|_\infty \leq c\|\dot{u}\|_{L^p}. \tag{2.6}$$

Demonstração: Trabalhando com as componentes de u, podemos assumir que $N = 1$. Se $u \in W_T^{1,p}$, decorre do Teorema do Valor Médio que

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(s)ds = u(k)$$

para algum $k \in [0,T]$. Consequentemente, para $t \in [0,T]$,

$$|u(t)| = \left|u(k) + \int_k^t \dot{u}(s)ds\right| \leq |u(k)| + \int_k^t |\dot{u}(s)|ds.$$

Pela Desigualdade de Hölder com expoentes p e q, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$|u(t)| \leq \tfrac{1}{T}\left|\int_0^T u(s)ds\right| + \|1\|_{L^q}\|\dot{u}\|_{L^p} = \frac{1}{T}\left|\int_0^T u(s)ds\right| + T^{1/q}\|\dot{u}\|_{L^p}.$$

Se $\displaystyle\int_0^T u(s)ds = 0$, obtemos (2.6). No caso geral, temos para $t \in [0,T]$,

$$|u(t)| \leq \tfrac{1}{T}\int_0^T |u(s)|ds + T^{1/q}\|\dot{u}\|_{L^p}$$

donde segue

$$|u(t)| \leq \frac{1}{T}\|u\|_{L^p}T^q + T^{1/q}\|\dot{u}\|_{L^p}$$

ou seja,

$$|u(t)| \leq \|u\|_{L^p}T^{(1/q)-1} + T^{1/q}\|\dot{u}\|_{L^p} \leq (T^{1/q-1} + T^{1/q})\|u\|_{W_T^{1,p}}.$$

Portanto

$$\|u\|_\infty \leq c\|u\|_{W_T^{1,p}}.$$

■

Proposição 2.2 *Se a sequência* $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *converge fracamente para* u *em* $W_T^{1,p}$*, então* $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente para* u *sobre* $[0,T]$.

Demonstração: Pela Proposição 2.1, a aplicação inclusão

$$i : \Big(W_T^{1,p}, \|.\|_{W^{1,p}}\Big) \to \Big(C(0,T;\mathbb{R}^N), \|.\|_\infty\Big)$$

é contínua. Desde que

$$u_k \rightharpoonup u \text{ em } W_T^{1,p},$$

segue da Proposição $B.1$ que

$$u_k \rightharpoonup u \text{ em } C(0,T;\mathbb{R}^N).$$

Como

$$u_k \rightharpoonup u \text{ em } W_T^{1,p},$$

$\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada em $W_T^{1,p}$ e consequentemente em $C(0,T;\mathbb{R}^N)$. Além disso, a sequência $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é equi-uniformemente contínua, pois para $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$|u_k(t) - u_k(s)| \;=\; \Big|\int_s^t \dot{u}_k(\tau)d\tau\Big| \leq \int_s^t |\dot{u}_k(\tau)|d\tau \leq \|1\|_q\|\dot{u}_k\|_p$$

ou seja,

$$|u_k(t) - u_k(s)| = (t-s)^{1/q}\|\dot{u}_k\|_p \leq (t-s)^{1/q}\|u_k\|_{W_T^{1,p}} \leq c(t-s)^{1/q}.$$

Pelo Teorema de Ascoli-Arzelá, existem

$$\{u_{k_j}\} \subset \{u_k\} \text{ e } u \in C(0,T;\mathbb{R}^N)$$

tais que

$$u_{k_j} \to u \text{ uniformemente em } C(0,T;\mathbb{R}^N).$$

Suponha por contradição que $u_k \not\to u$ em $C(0,T;\mathbb{R}^N)$. Então existe $\epsilon > 0$ e $\{u_{k_i}\} \subset \{u_k\}$ tais que

$$\|u_{k_i} - u\|_\infty \geq \epsilon \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Repetindo a argumento anterior teriamos $\{u_{k_{i_j}}\} \subset \{u_{k_i}\}$ tal que

$$u_{k_{i_j}} \to u \text{ em } C(0,T;\mathbb{R}^N),$$

mas devido $\{u_{k_{i_j}}\} \subset \{u_{k_i}\}$, temos

$$\|u_{k_{i_j}} - u\|_\infty \geq \epsilon \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

O que é uma contradição, portanto (u_k) converge uniformemente sobre $[0,T]$ para u.

■

No caso dos espaços de Hilbert H^1_T, temos o seguinte resultado

Proposição 2.3 *Se $u \in H^1_T$ e $\int_0^T u(t) = 0$, então*

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \leq \left(\frac{T^2}{4\pi^2}\right) \int_0^T |\dot{u}(t)|^2 dt \text{ (Desigualdade de Wirtinger)}$$

e

$$\|u\|^2_\infty \leq \left(\frac{T}{12}\right) \int_0^T |\dot{u}(t)|^2 dt \text{ (Desigualdade de Sobolev).}$$

Demonstração: Seja

$$u(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}} c_k e^{2ik\pi t/T}$$

a expansão da série de Fourier com coeficientes complexos. A identidade de Parseval implica que

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |u|^2 dt$$

e

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}} |c'_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |\dot{u}|^2 dt.$$

Tendo em vista que os coeficientes de Fourier complexos de u e u' satisfazem

$$c'_k = \frac{i2k\pi}{T} c_k, \forall k \in \mathbb{Z},$$

e da seguinte desigualdade

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}} k^2 |c_k|^2 \geq \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}} |c_k|^2,$$

temos

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\dot{u}|^2 dtT = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}} \frac{4k^2\pi^2}{T^2}|c_k|^2 \geq \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}} \frac{4\pi^2}{T^2}|c_k|^2. \tag{2.7}$$

Observe que

$$|u(t)|^2 \leq \left(\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}} |c_k|\right)^2 = \left(\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}} \frac{T^{1/2}}{2k\pi}\frac{2k\pi}{T^{1/2}}|c_k|\right)^2.$$

Desde que $\frac{T^{1/2}}{2k\pi} \in l^2$ e $\frac{2k\pi}{T^{1/2}}|c_k| \in l^2$, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e (2.7) conduz a

$$|u(t)|^2 \leq \left(\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}} \frac{T}{4\pi^2 k^2}\right)\left(\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}} \frac{4\pi^2 k^2}{T}|c_k|^2\right) \leq \frac{T}{12}\int_0^T |\dot{u}(t)|^2 dt$$

onde estamos usando o fato de que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3}$.

■

Teorema 2.1 *Seja $L : [0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, (t,x,y,) \to L(t,x,y)$ mensurável em t para cada $[x,y] \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ e continuamente diferenciável em $[x,y]$ q.t.p. para $t \in [0,T]$. Se existe $a \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $b \in L^1(0,T;\mathbb{R}^+)$ e $c \in L^q(0,T;\mathbb{R}^+)$, $1 < q < \infty$, q.t.p. para $t \in [0,T]$ e todo $[x,y] \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, tais que*

$$\begin{aligned} |L(t,x,y)| &\leq a(|x|)(b(t) + |y|^p) \\ |D_x L(t,x,y)| &\leq a(|x|)(b(t) + |y|^p) \\ |D_y L(t,x,y)| &\leq a(|x|)(c(t) + |y|^{p-1}) \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, o funcional φ definido por

$$\varphi(u) = \int_0^T L(t, u(t), \dot{u}(t))dt$$

é continuamente diferenciável sobre $W_T^{1,p}$ e

$$< \varphi'(u), v > = \int_0^T [(D_x L(t,u(t),\dot{u}(t)), v(t)) + (D_y L(t,u(t),\dot{u}(t)), \dot{v}(t))]. \tag{2.9}$$

Demonstração: O resultado segue mostrando que φ possui em todo ponto u uma derivada direcional $\varphi'(u) \in (W_T^{1,p})^*$ dada por (2.9) e que a aplicação

$$\varphi' : W_T^{1,p} \to (W_T^{1,p})^*, u \to \varphi'(u)$$

é contínua. Observe que por (2.8) φ assume valores reais em $W_T^{1,p}$, isto é,

$$|\varphi(u)| \leq \int_0^T |L(t, u(t), \dot{u}(t))|dt \leq \int_0^T a(|u|)(b(t)+|\dot{u}(t)|^p)dt \leq M \int_0^T (b(t)+|\dot{u}(t)|^p) < +\infty$$

pois $b \in L^1$ e $u \in L^p$ e $M = \max\limits_{t\in[0,T]} a(|u(t)|) < \infty$. Para u e v fixados em $W_T^{1,p}$, $t \in [0, T]$, $\lambda \in [-1, 1]$, definimos a aplicação

$$F(\lambda, t) = L(t, u(t) + \lambda v(t), \dot{u} + \lambda \dot{v}(t))$$

e o funcional

$$\psi(\lambda) = \int_0^T F(\lambda, t)dt = \varphi(u + \lambda v).$$

Usando a regra da cadeia,

$$|D_\lambda F(\lambda, t)| = |(D_x L(t, u + \lambda v, \dot{u} + \lambda \dot{v}), v) + (D_y L(, u + \lambda v, \dot{u} + \lambda \dot{v}), \dot{v})|.$$

Usando agora, a desigualdade triangular, Cauchy-Schwarz e a condição (2.8), encontramos

$$|D_\lambda F(\lambda, t)| \quad \leq \quad a_0[(b(t) + (|\dot{u}| + |\dot{v}|)^p)|v| + (c(t) + (|\dot{u}| + |\dot{v}|)^{p-1})|\dot{v}|],$$

onde

$$a_0 = \max_{(\lambda,t)\in[-1,1]\times[0,T]} a(|u(t) + \lambda v(t)|).$$

Desde que $b \in L^1$, $(|\dot{u}| + |\dot{v}|)^p \in L^1$, $c \in L^q$, $|\dot{v}| \in L^p$ e v é contínua sobre $[0, T]$, temos

$$\Big|\int_0^T b(t)|v|dt\Big| \leq \int_0^T |b(t)||v|dt = M \int_0^T |b(t)|dt < \infty,$$

$$\Big|\int_0^T (|\dot{u}| + |\dot{v}|)^p|v|dt\Big| \leq \int_0^T (|\dot{u}| + |\dot{v}|)^p|v|dt = M \int_0^T (|\dot{u}| + |\dot{v}|)^p dt < \infty,$$

$$\Big|\int_0^T c(t)|\dot{v}|dt\Big| \leq \int_0^T |c(t)||\dot{v}|dt \leq \|c\|_{L^q}\|\dot{v}\|_{L^p} < \infty$$

e

$$\Big|\int_0^T (|\dot{u}| + |\dot{v}|)^{p-1})|\dot{v}|dt\Big| \leq \int_0^T (|\dot{u}| + |\dot{v}|^{p-1}|v|dt \leq \|\dot{u} + \lambda\dot{v}\|^{L^q}\|\dot{v}\|_{L^p} < \infty.$$

Daí

$$|D_\lambda F(\lambda,t)| \leq d(t) \in L^1(0,T;\mathbb{R}^+)$$

onde $d(t) = a_0[(b(t) + (|\dot{u}| + |\dot{v}|)^p)|v| + (c(t) + (|\dot{u}| + |\dot{v}|)^{p-1})|\dot{v}|]$.

Segue do Corolário $B.1$,

$$\dot{\psi}(0) = \int_0^T D_\lambda F(0,t)dt = \int_0^T [(D_x L(t,u(t),\dot{u}(t)), v(t)) + (D_y L(t,u(t),\dot{u}(t)),\dot{v}(t))]dt.$$

Além disso,

$$|D_x L(t,u,\dot{u})| \leq a(|u|)(b(t) + |\dot{u}|^p) \in L^1(0,T;\mathbb{R}^+)$$

e

$$|D_y L(t,u,\dot{u})| \leq a(|u|)(c(t) + |\dot{u}|^{p-1}) \in L^q(0,T;\mathbb{R}^+).$$

Assim pelas desigualdades acima,

$$|\varphi'(u)v| \leq \int_0^T |D_\lambda F(0,t)|dt = \int_0^T [(D_x L(t,u(t),\dot{u}(t)), v(t)) + (D_y L(t,u(t),\dot{u}(t)),\dot{v}(t))]dt$$

ou seja,

$$|\varphi'(u)v| \leq \int_0^T a(|u|)(b(t) + |\dot{u}|^p)|v|dt + \int_0^T a(|u|)(c(t) + |\dot{u}|^{p-1})|\dot{v}|dt.$$

Pela desigualdade de Hölder e pela Proposição 2.1

$$c_3\|v\|_\infty + c_4\|\dot{v}\|_{L^p} \leq c_5\|v\|_{W_T^{1,p}}$$

ou seja,

$$|\varphi'(u)v| \leq c_5\|v\|_{W_T^{1,p}},$$

mostrando que φ possui em u, uma derivada direcional $\varphi'(u) \in (W_T^{1,p})^*$ dada por (2.9).

Observe que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} W_T^{1,p} & \to & L^1 \times L^p \\ u & \to & (D_x L(.,u,\dot{u}), D_y L(.,u,\dot{u})) \end{array}$$

é contínua. Considere $u_n \to u$ em $W_T^{1,p}$. Então

$$u_n \to u \text{ em } L^p \text{ e } \dot{u}_n \to u \text{ em } L^p,$$

logo existem $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$ e $h, h_1 \in L^p$ tais que

$$u_{n_j} \to u \quad q.t.p. \quad e \quad |u_{n_j}| \leq h \quad q.t.p.$$

e

$$\dot{u}_{n_j} \to \dot{u} \quad q.t.p. \quad e \quad |\dot{u}_{n_j}| \leq h_1 \quad q.t.p..$$

Suponha por contradição que

$$D_x L(., u_n, \dot{u}_n) \not\to D_x L(., u, \dot{u}) \text{ em } L^1,$$

logo existe $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$ tal que

$$\int_0^T |D_x L(., u_{n_j}, \dot{u}_{n_j})| > \epsilon \quad \forall n_j \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

Escolha uma subsequência de $\{u_{n_j}\}$ que denotaremos por $\{u_k\}$ tal que

$$|D_x L(., u_k, \dot{u}_k) - D_x L(., u, \dot{u})| \leq \eta \in L^1.$$

Nosso único problema para obter a desigualdade acima é para o termo $|D_x L(., u_k, \dot{u}_k)|$ pois para $|D_x L(., u, \dot{u})|$ basta usar (2.8) diretamente. Note que

$$|D_x L(., u_k, \dot{u}_k)| \leq a(|u_k|)(c(t) + |\dot{u}_k|^{p-1}).$$

Da imersão contínua de $W_T^{1,p} \hookrightarrow C([0,T])$

$$\max_{t\in[0,T]} |u_k(t)| = \|u_k\|_\infty \leq c\|u_k\|_{W_T^{1,p}} \leq \hat{c} \quad \forall k.$$

Logo

$$|u_k(t)| \leq \hat{c} \quad \forall k \quad e \quad \forall t \in [0,T].$$

Desde que, $a(s) \leq M \quad \forall s \in [0, \hat{c}]$, temos a limitação

$$a(|u_k(t)|) \leq M \quad \forall k \quad \forall t \in [0,T].$$

Uma vez que

$$u_n \to u \text{ em } W_T^{1,p}, \text{ então } \dot{u}_n \to \dot{u} \text{ em } L^p,$$

logo temos

$$|D_xL(.,u_k,\dot{u}_k) - D_xL(.,u,\dot{u})| \leq \eta \in L^1.$$

Sendo $L(.,x,y)$ continuamente diferenciável,

$$D_xL(.,u_k,\dot{u}_k) \to D_xL(.,u,\dot{u}) \ \ q.t.p. \ \ em \ \ \Omega,$$

segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_0^T |D_xL(.,u_k,\dot{u}_k) - D_xL(.,u,\dot{u})| \to 0,$$

contradizendo (2.10). Portanto

$$D_xL(.,u_n,\dot{u}_n) \to D_xL(.,u,\dot{u}).$$

Note que

$$|\varphi'(u_n)v - \varphi'(u)v| = \Big|\int_0^T [(D_xL(.,u_n,\dot{u}_n) - D_xL(.,u,\dot{u}),v)$$
$$+(D_yL(.,u_n,\dot{u}_n) - D_yL(.,u,\dot{u}),\dot{v})]dt\Big|.$$

Usando a desigualdade triangular,

$$|\varphi'(u_n)v - \varphi'(u)v| \leq \int_0^T |(D_xL(.,u_n,\dot{u}_n) - D_xL(.,u,\dot{u}),v)|$$
$$+|(D_yL(.,u_n,\dot{u}_n) - D_yL(.,u,\dot{u}),\dot{v})|dt$$

e por Cauchy-Schwarz,

$$|\varphi'(u_n)v - \varphi'(u)v| \leq \int_0^T [|D_xL(.,u_n,\dot{u}_n) - D_xL(.,u,\dot{u}))||v|$$
$$+|D_yL(.,u_n,\dot{u}_n) - D_yL(.,u,\dot{u})|\dot{v}|]dt.$$

Desde que $v \in W_T^{1,p}$ e usando a desigualdade de Hölder (onde 1/p+1/q=1), obtemos

$$|\varphi'(u_n)v - \varphi'(u)v| \leq \|v\|_\infty \int_0^T |D_xL(.,u_n,\dot{u}_n) - D_xL(.,u,\dot{u}))|dt$$
$$+\|D_yL(.,u_n,\dot{u}_n) - D_yL(.,u,\dot{u})\|_{L^q}\|\dot{v}\|_{L^p}.$$

Pela Proposição 2.1

$$|\varphi'(u_n)v - \varphi'(u)v| \leq \|v\|_{W_T^{1,p}} \left(\int_0^T |D_x L(., u_n, \dot{u}_n) - D_x L(., u, \dot{u}))| dt \right.$$

$$\left. + \|D_y L(., u_n, \dot{u}_n) - D_y L(., u, \dot{u})\|_{L^q} \right),$$

implicando que

$$\sup_{\|v\| \leq 1} |\varphi'(u_n)v - \varphi'(u)v| \leq \int_0^T |D_x L(., u_n, \dot{u}_n) - D_x L(., u, \dot{u}))| dt$$

$$+ \|D_y L(., u_n, \dot{u}_n) - D_y L(., u, \dot{u})\|_{L^q} \Big) \to 0,$$

ou seja,

$$\|\varphi'(u_n) - \varphi'(u)\| \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Mostrando assim que $\varphi \in C^1(W_T^{1,p}, \mathbb{R})$.

■

Corolário 2.1 *Seja* $L : [0, T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$L(t, x, y) = \frac{1}{2}|y|^2 + F(t, x)$$

onde $F : [0, T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *é mensurável em* t *para cada* $x \in \mathbb{R}^N$*, continuamente diferenciável em* x *para q.t.p.* $t \in [0, T]$ *e satisfaz as seguintes condições*

$$|F(t, x)|, |\nabla F(t, x)| \leq a(|x|)b(t) \text{ q.t.p. para } t \in [0, T],$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$*, para algum* $a \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *e* $b \in L^1(0, T; \mathbb{R}^+)$*. Se* $u \in H_T^1$ *é uma solução da correspondente equação de Euler* $\varphi'(u) = 0$*, então* $\dot{u}$ *possui uma derivada fraca* $\ddot{u}$ *e*

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = \nabla F(t, u(t)) & \text{q.t.p. sobre } [0, T] \\ u(0) - u(T) = \dot{u}(0) - \dot{u}(T) = 0. \end{cases}$$

Demonstração: Observe que

$$|L(t, x, y)| \leq \frac{1}{2}|y|^2 + |F(t, x)| \leq \frac{1}{2}|y|^2 + a(|x|)b(t) \leq (\frac{1}{2} + a(|x|))(b(t) + |y|^2),$$

$$|D_x L(t, x, y)| = |\nabla F(t, x)| \leq a(|x|)b(t) \leq a(|x|)(b(t) + |y|^2)$$

e

$$|D_y L(t,x,y)| = |y| \leq a(|x|)(c(t) + |y|).$$

Assim

$$L(t,x,y) = \frac{1}{2}|y|^2 + F(t,x)$$

satisfaz as condições do Teorema 2.1 e portanto por (2.9)

$$0 = \langle \varphi'(u), v \rangle = \int_0^T [(D_x L(t,u(t),\dot{u}(t)),v) + (D_y L(t,u(t),\dot{u}(t)),\dot{v})]dt \quad \forall v \in H_T^1.$$

Donde temos

$$0 = \int_0^T [(\nabla F(t,u(t)),v) + (\dot{u}(t),\dot{v})]dt \quad \forall v \in H_T^1$$

isto é,

$$\int_0^T [(\nabla F(t,u(t)),v)dt = -\int_0^T (\dot{u}(t),\dot{v})dt \; \forall v \in H_T^1.$$

Recordando que $C_T^\infty \subset W_T^{1,2}$, a última igualdade mostra que $\dot{u}$ possui derivada fraca e

$$\ddot{u}(t) = \nabla F(t,u(t)) \; q.t.p. \text{ sobre } [0,T].$$

Observe que $\nabla F(t,u(t)) \in L^p$ donde segue que $\ddot{u} \in L^p$. Recorde que se $\dot{u} \in W_T^{1,p}$, então

$$\dot{u}(t) = \int_0^t \ddot{u}(s)ds + c$$

e $\dot{u}(0) = \dot{u}(T)$. Uma vez que u também possui derivada fraca, pelo Lema Fundamental tem-se também $u(0) = u(T)$.

■

2.2 Soluções Periódicas de Sistemas de Segunda Ordem Não Autonômos com Não Linearidade Limitada

Consideremos o problema introduzido no Corolário 2.1

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = \nabla F(t,u(t)) \quad q.t.p. \;\; sobre \;\; [0,T] \\ u(0) - u(T) = \dot{u}(0) - \dot{u}(T) = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

onde $F : [0,T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes afirmações:

(A) $F(t,x)$ é mensurável em t para cada $x \in \mathbb{R}^N$, contínuamente diferenciável em x para *q.t.p.* $t \in [0,T]$ e existe $a \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ e $b \in L^1(0,T;\mathbb{R}^+)$ tal que

$$|F(t,x)| \leq a(|x|)b(t), |\nabla F(t,x)| \leq a(|x|)b(t)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ para *q.t.p.* $t \in [0,T]$. O funcional de Euler associado a (2.11), denotado por φ, é dado por

$$\varphi(u) = \int_0^T \Big[\frac{|\dot{u}(t)|^2}{2} + F(t,u(t))\Big]dt \ \forall u \in H^1_T.$$

Ao longo deste Capítulo quando mencionarmos φ estaremos nos referindo a este funcional. Pelo Teorema 2.1, φ é continuamente diferenciável e f.s.c.i. sobre H^1_T, pois se

$$u_n \to u \text{ em } H^1_T \text{ então } u_n \to u \text{ em } L^2.$$

Logo

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T |u(t)|^2 dt$$

é contínua e convexa. Pelo Teorema 1.6 J é f.s.c.i..

Seja $u_n \rightharpoonup u$ em H^1_T. Então, pela Proposição 2.2

$$u_n \to u \text{ uniformemente em } [0,T].$$

Observando que

$$|F(t,x)| \leq a(|x|)b(t),$$

existe uma função integrável g tal que

$$|F(t,u_n(t))| \leq g.$$

Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que

$$\int_0^T F(t,u(t))dt$$

é f.s.c.i.. Desde que a soma de funções f.s.c.i. é f.s.c.i., temos que $\varphi(u)$ é f.s.c.i.. Se φ possui uma sequência minimizante limitada então pelo Teorema 1.4, φ possui um mínimo e como todo ponto de mínimo satisfaz

$$\varphi'(u) = 0$$

de modo que pelo Corolário 2.1, (2.11) possui solução. Resta portanto encontrar as condições em que φ possui uma sequência minimizante.

Quando ∇F é limitado por uma função em L^1 para todo $u \in \mathbb{R}^N$, é suficiente exigir a condição de coercividade, como mostra o Teorema.

Teorema 2.2 *Assuma que F satisfaça a condição (A) e existe $g \in L^1(0,T)$ tal que*

$$|\nabla F(t,x)| \leq g(t)$$

q.t.p. sobre $t \in [0,T]$ e todo $x \in \mathbb{R}^N$. Se

$$\int_0^T F(t,x)dt \to +\infty \quad quando \quad |x| \to \infty, \tag{2.12}$$

o problema (2.11) *possui pelo menos uma solução que minimiza φ sobre H_T^1.*

Demonstração: Para $u \in H_T^1$, considere $u = \bar{u} + \hat{u}$, onde $\bar{u} = 1/T \int_0^T u(t)dt$ e observe que

$$\int_0^T \hat{u}dt = \int_0^T u(t)dt - \int_0^T \bar{u}dt = T\bar{u} - \bar{u}T = 0,$$

pois no decorrer desta dissertação todas as vezes que fizermos esta escolha poderemos usar as desigualdades de Hölder e Wirtinger para $\hat{u}$. Mais ainda, como $\bar{u}$ não depende de t segue que a derivada de u coincide com a de $\hat{u}$. Note que

$$\varphi(u) \quad = \quad \int_0^T \frac{|\dot{u}(t)|^2}{2}dt + \int_0^T F(t,\bar{u}) + \int_0^T [F(t,u(t)) - F(t,\bar{u})]dt.$$

Defina $h(s) = F(t, \bar{u} + s\hat{u})$ e observe que

$$F(t,\bar{u}+\hat{u})-F(t,\bar{u}) = h(1)-h(0) = \int_0^1 h'(s)ds = \int_0^1 F'(t,\bar{u}+s\hat{u})\hat{u} = \int_0^1 (\nabla F(t,\bar{u}+s\hat{u}),\hat{u}).$$

Daí

$$\varphi(u) = \int_0^T \frac{|\dot{u}(t)|^2}{2}dt + \int_0^T F(t,\bar{u}) + \int_0^T \int_0^1 (\nabla F(t,\bar{u}+s\hat{u}),\hat{u}(t))dsdt.$$

Desde que

$$|(\nabla F(t,\bar{u}+s\hat{u}),\hat{u}(t))| \leq |\nabla F(t,\bar{u}+s\hat{u})||\hat{u}|$$

e

$$-g(t)|\hat{u}(t)| \leq (\nabla F(t,\bar{u}+s\hat{u}),\hat{u}(t))$$

tem-se

$$\varphi(u) \quad \geq \quad \int_0^T \frac{|\dot{u}(t)|^2}{2}dt + \int_0^T F(t,\bar{u}) - \int_0^T \int_0^1 g(t)|\hat{u}(t)|dsdt$$

ou seja,

$$\varphi(u) \geq \int_0^T \frac{|\dot{u}(t)|^2}{2} dt + \int_0^T F(t, \bar{u}) - \|\hat{u}\|_\infty \int_0^T g(t) dt.$$

Segue da desigualdade de Sobolev (Proposição 2.3) que

$$-\|\hat{u}\|_\infty \geq -c\Big(\int_0^T |\dot{u}|^2 dt\Big)^{1/2}.$$

Logo

$$\varphi(u) \geq \int_0^T \frac{|u(t)|^2}{2} dt + \int_0^T F(t, \bar{u}) - c\Big(\int_0^T |\dot{u}(t)|^2 dt\Big)^{1/2}. \tag{2.13}$$

Observe que

$$\|u\| \to \infty \text{ se, e somente se, } \Big(|\bar{u}|^2 + \int_0^T |\dot{u}(t)|^2 dt\Big)^{1/2} \to \infty.$$

De fato, suponha que

$$\Big(|\bar{u}|^2 + \int_0^T |\dot{u}(t)|^2 dt\Big)^{1/2} \to \infty.$$

Se

$$\int_0^T |\dot{u}(t)|^2 dt \to \infty \text{ então } \|u\| \to \infty.$$

Usando a desigualdade de Hölder com 1 e u,

$$|\bar{u}| \leq \int_0^T |u(t)| dt \leq \Big(\int_0^T 1^2 dt\Big)^{1/2} \Big(\int_0^T |u(t)|^2 dt\Big)^{1/2} \leq T^{1/2} \|u\|_{L^2}.$$

Se $|\bar{u}|^2 \to \infty$, então $\|u\|_{L^2} \to \infty$ e consequentemente $\|u\| \to \infty$.

Reciprocamente, assuma que

$$\|u\| \to \infty.$$

Se

$$\int_0^T |\dot{u}(t)|^2 dt \to \infty,$$

então

$$|\bar{u}|^2 + \int_0^T |\dot{u}(t)|^2 dt \to \infty.$$

Considere agora que

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \to \infty$$

e suponha por contradição que

$$|\bar{u}|^2 + \int_0^T |\dot{u}(t)|^2 dt \leq M.$$

Logo com um argumento semelhante ao da Proposição 2.1, temos

$$|u(t)| \leq \frac{1}{T}\Big|\int_0^T u(s)ds\Big| + T^{1/2}\|\dot{u}\|_{L^2} = \frac{1}{T}|\bar{u}| + T^{1/2}\|\dot{u}\|_{L^2} \leq c_1(|\bar{u}|^2 + \|\dot{u}\|_{L^2}) \leq M_1,$$

mostrando

$$\|u\|_{L^2} \leq M_1,$$

o que é uma contradição, portanto

$$\Big(|\bar{u}|^2 + \int_0^T |\dot{u}(t)|^2 dt\Big)^{1/2} \to \infty.$$

Logo as desigualdades (2.13) e (2.12) implicam que

$$\varphi(u) \to \infty \text{ quando } \|u\| \to \infty,$$

mostrando que φ é coercivo, consequentemente toda sequência minimizante é limitada. Usando o Teorema 1.4 temos a conclusão.

■

Exemplo: Considere o problema escalar

$$\begin{cases} \ddot{u} = a[sen(u - bsgnu) + sen(bsgnu)] + e(t) \\ u(0) - u(T) = \dot{u}(0) - \dot{u}(T) = 0 \end{cases}$$

onde $a > 0$, $0 < b < \pi$, $e \in L^1(0,T)$ e $\displaystyle\int_0^T e(t)dt = 0$. Usando o Teorema 2.2 mostraremos que este problema possui pelo menos uma solução que minimiza φ sobre H^1_T. Considere

$$F(t,u) = a[(senb)|u| - cos(|u| - b) + cosb] + e(t),$$

então,

$$F_u(t,u) = a[(senb)sgnu + sen(|u| - b)sgnu] + e(t).$$

Onde $sgnu$ é a função

$$sgnu = \begin{cases} 1 & se \quad u > 0 \\ -1 & se \quad u < 0 \end{cases}$$

e observe que

$$a[sen(u - bsgnu) + sen(bsgnu)] + e(t) = a\Big[sen\Big(sgnu\Big(\frac{u}{sgnu} - b\Big)\Big) + sen(b)sgnu\Big] + e(t)$$

isto é,

$$F_u(t,u) = a[sen(|u|-b)sgnu + sen(b)sgnu] + e(t).$$

Consequentemente

$$|F_u(t,u)| \leq |a|(|sen(b)sgnu| + |sen(|u|-b)sgnu|) + |e(t)| \leq 2a + |e(t)|$$

mostrando que existe $g = 2a + |e(t)| \in L^1(0,T)$. Note que

$$\int_0^T F(t,x)dt = \int_0^T a|x|senbdt - \int_0^T a[cos(|x|-b) + cosb]dt + \int_0^T e(t)xdt.$$

Donde temos

$$\int_0^T F(t,x)dt = Ta|x|senb - T(acos(|x|-b) + cosb).$$

Observando que

$$Ta|x|senb - Ta - cosb \leq Ta|x|senb - T(acos(|x|-b) + cosb) \to \infty \text{ se } |x| \to \infty,$$

o resultado segue pelo Teorema 2.2.

2.3 Soluções Periódicas de Sistemas de Segunda Ordem Não Autonômos com Potencial Periódico.

Mostraremos nesta seção que (2.11) possui solução quando F é periódica em cada variável x_i. Considere $(e_i)(1 \leq i \leq N)$ como sendo a base canônica de $\mathbb{R}^N$.

Teorema 2.3 *Assuma que F satisfaz a condição (A) e que exista $T_i > 0$, tal que*

$$F(t, x + T_i e_i) = F(t,x) \quad (1 \leq i \leq N) \tag{2.14}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ q.t.p. sobre $t \in [0,T]$. Então o problema (2.11) *tem pelo menos uma solução que minimiza φ sobre H_T^1.*

Demonstração: Sendo F contínua a condição (2.14) implica que existe um bloco N-dimensional formado por N intervalos compactos $[0,T_i]$, de maneira que existe $h \in L^1(0,T)$ tal que

$$F(t,x) \geq h(t) = \min_{x \in \prod_{i=1}^N [0,T_i]} F(t,x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ $q.t.p.$ sobre $t \in [0,T]$. Logo se, $\displaystyle\int_0^T h(t)dt = c_1$

$$\varphi(u) = \int_0^T \Big[\frac{|\dot{u}(t)|^2}{2} + F(t,u(t))\Big]dt \geq \int_0^T \Big[\frac{|\dot{u}(t)|^2}{2} + c_1\Big]dt \geq c_1 \quad \forall u \in H_T^1.$$

Sendo $\inf_{H_T^1} \varphi(u) > -\infty$, segue desta desigualdade que se $\{u_k\}$ é uma sequência minimizante para φ existirá $c_2 > 0$ tal que

$$\int_0^T |\dot{u_k}(t)|^2 \leq c_2 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.15}$$

Seja $u_k = \bar{u}_k + \hat{u}_k$ com $\bar{u}_k = \frac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u_k(s)ds$. De (2.15) e da desigualdade de Wirtinger,

$$\|\hat{u}_k\| = \Big(\int_0^T |\hat{u}_k|^2 dt + \int_0^T |\dot{\hat{u}_k}|^2 dt\Big)^{1/2} \leq \Big(\frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |\dot{\hat{u}_k}|^2 dt + \int_0^T |\dot{\hat{u}_k}|^2 dt\Big)^{1/2} \leq c_3$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e algum $c_3 > 0$. Por outro lado, segue de (2.14) que

$$\varphi(u + T_i e_i) = \int_0^T |\dot{u}(t) + T_i \dot{e}_i|^2 + F(t, u + T_i e_i) = \int_0^T [|\dot{u}(t)|^2 + F(t,u(t))]dt = \varphi(u)$$

para todo $u \in H_T^1$ e consequentemente se (u_k) é uma sequência minimizante para φ,

$$([(\bar{u}_k, e_1) + k_1 T_1 + (\hat{u}_k, e_1), \ldots, (\bar{u}_k, e_N) + k_1 T_N + (\hat{u}_k, e_N)])$$

também será uma sequência minimizante de φ. Definindo

$$v_k = ((u_k, e_1) - k_1 T_1, \ldots, (u_k, e_N) - k_N),$$

usando que $\varphi(u + T_i e_i) = \varphi(u)$, temos

$$\varphi(v_k) = \varphi(u_k).$$

Note que

$$(\bar{v}_k, e_1) = \frac{1}{T}\int_0^T (v_k, e_1)dt = \frac{1}{T}\int_0^T [(u_k, e_1) - k_1 T_1]$$

ou seja,

$$0 \leq (\bar{v}_k, e_1) = (\bar{u}_k, e_1) - k_1 T_1 \leq T_1.$$

Podemos portanto assumir que

$$0 \leq (\bar{v}_k, e_i) \leq T_i \quad 1 \leq i \leq N.$$

Logo

$$\|u_k\| \leq \|\hat{u}_k\| + \|\bar{u}_k\| \leq c_4.$$

Consequentemente φ admite uma sequência minimizante limitada e temos a conclusão invocando o Teorema 1.4. ■

Podemos obter, a seguir, uma extensão útil do Teorema 2.3 para alguns sistemas forçados de segunda ordem. Para $e \in L^1(0, T; \mathbb{R}^N)$, o problema linear

$$\begin{cases} \ddot{v}(t) = e(t) \\ v(0) - v(T) = \dot{v}(0) - \dot{v}(T) = 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

possui solução se, e somente se,

$$\int_0^T e(t)dt = 0. \tag{2.17}$$

Se o problema (2.16) possui solução temos integrando a primeira igualdade de (2.16) sobre $[0, T]$

$$\int_0^T \ddot{v}(t)dt = \int_0^T e(t)dt.$$

Usando as condições de contorno

$$0 = \dot{v}(T) - \dot{v}(0) = \int_0^T \ddot{v}(t)dt = \int_0^T e(t)dt.$$

Reciprocamente, se

$$\int_0^T e(t)dt = 0,$$

considere o funcional $\varphi : H_T^1 \to \mathbb{R}$ associado a (2.16) dado por

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\int_0^T |\dot{u}(t)|^2 dt + \int_0^T e(t)u(t)dt.$$

Seja $u(t) = \hat{u}(t) + \bar{u}$. Logo

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\int_0^T |\dot{u}(t)|^2 dt + \int_0^T e(t)\hat{u}(t)dt + \int_0^T e(t)\bar{u}dt = \varphi(\hat{u}).$$

Usando que

$$\int_0^T e(t)\hat{u}(t)dt \geq -\|e\|_{L^1_{[0,T]}}\|\ \hat{u}\|_\infty \geq -\|e\|_{L^1_{[0,T]}}\|\ \dot{\hat{u}}\|_{L^2_{[0,T]}},$$

existe $M > 0$ tal que

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\|\dot{\hat{u}}\|^2_{L^2_{[0,T]}} - c\|\dot{\hat{u}}\|_{L^2_{[0,T]}} \geq -M.$$

Logo φ admite uma sequência minimizante e da desigualdade acima segue que existe c_1 tal que

$$\|\dot{\hat{u}}_k\|_{L^2_{[0,T]}} \leq c_1.$$

Usando a desigualdade de Wirtinger's existe c_2 tal que

$$\|\hat{u}_k\|_{L^2_{[0,T]}} < c_2.$$

Portanto

$$\|\hat{u}_k\|_{W^{1,p}_T} < c_3.$$

Mostrando assim que φ possui uma sequência minimizante limitada $\{\hat{u}_k\}$. Segue pelo Teorema 1.4 que (2.16) admite solução.

Pelo Lema Fundamental

$$\dot{v}(t) = \int_0^t \ddot{v}(s)ds + c,$$

donde temos,

$$\dot{v}(T) = \int_0^T e(s)ds + c = c$$

e $\dot{v}(0) = c$. Por outro lado

$$v(t) = \int_0^t \dot{v}(s)ds + c.$$

Então

$$v(T) = \int_0^t \dot{v}(s)ds + c$$

e usando (2.2), temos que $v(T) = v(0) = c$. Esta solução será única se impormos que

$$\int_0^T v(t)dt = 0. \tag{2.18}$$

De fato, suponha que a solução não seja única, então existem v e w satisfazendo (2.16), donde obtemos que

$$\begin{cases} \ddot{v}(t) - \ddot{w}(t) = 0 \\ v(0) - w(0) - v(T) + w(T) = \dot{v}(0) - \dot{w}(0) - \dot{v}(T) + \dot{w}(T) = 0. \end{cases}$$

Logo

$$\int_0^T |\ddot{v}(t) - \ddot{w}(t)|^2 dt = 0.$$

Observe que usando o Teorema Fundamental do Cálculo e as condições de contorno de v e w temos

$$\int_0^T (\dot{v}(t) - \dot{w}(t))dt = 0,$$

e portanto pela desigualdade de Sobolev

$$\|\dot{v} - \dot{w}\|_\infty \leq \|\ddot{v} - \ddot{w}\|_{L^2} = 0,$$

implicando que

$$\dot{v}(t) - \dot{w}(t) = 0$$

ou seja,

$$v(t) - w(t) = c.$$

Assim

$$\int_0^T (v(t) - w(t))dt = cT = 0.$$

Portanto $c = 0$. Denotaremos por E a única solução de (2.16) satisfazendo (2.18). Então se considerarmos o problema

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = \nabla F(t, u(t)) + e(t) \\ u(0) - u(t) = \dot{u}(0) - \dot{u}(t) = 0, \end{cases} \tag{2.19}$$

onde $e \in L^1(0, T; \mathbb{R}^N)$ satisfaz (2.17), obtemos considerando

$$u(t) = v(t) + E(t) \tag{2.20}$$

o problema equivalente

$$\begin{cases} \ddot{v}(t) + \ddot{E}(t) = \nabla F(t, v(t) + E(t)) + e(t) \\ v(0) + E(0) - v(T) - E(T) = \dot{v}(0) + \dot{E}(T) - \dot{v}(T) + \dot{E}(T) = 0, \end{cases}$$

ou equivalentemente

$$\begin{cases} \ddot{v}(t) = \nabla F(t, v(t) + E(t)) \\ v(0) - v(T) = \dot{v}(0) - \dot{v}(T) = 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Agora, se F satisfaz as condições de periodicidade do Teorema 2.3, o mesmo é verdade para $F^* : [0, T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $(t, x) \to F(t, x + E(t))$ e portanto, o Teorema 2.2 pode ser aplicado em (2.21) implicando no seguinte resultado.

Corolário 2.2 *Sobre as condições do Teorema* 2.3 *para* F, *o problema* (2.19) *possui, para cada* $e \in L^1(0, T; \mathbb{R}^N)$ *verificando* (2.17), *pelo menos uma solução que minimiza sobre* H_T^1 *o funcional* φ_e

$$\varphi_e(u) = \int_0^T \Big[\frac{|\dot{u}(t)|^2}{2} + F(t, u(t)) + (e(t), u(t))\Big] dt.$$

Demonstração: Aplicando o Teorema 2.3 o problema

$$\begin{cases} \ddot{v}(t) = \nabla F(t, v(t) + E(t)) \\ v(0) - v(T) = \dot{v}(0) - \dot{v}(T) = 0, \end{cases}$$

possui uma solução v de que minimiza sobre H_T^1 o funcional ψ definido por

$$\psi(v) = \int_0^T \Big[\frac{|\dot{v}(t)|^2}{2} + F(t, v(t) + E(t))\Big] dt.$$

Além disso, u definida por (2.20) resolve (2.19) e minimiza $\psi(. - E)$ sobre H_T^1. Lembre que (2.21) é obtido de (2.19) fazendo

$$u(t) = v(t) + E(t).$$

Note que

$$\psi(u - E) = \int_0^T \Big[\frac{|\dot{u}(t) - \dot{E}(t)|^2}{2} + F(t, u(t))\Big] dt$$

isto é,

$$\psi(u - E) = \int_0^T \Big[\frac{|\dot{u}(t)|}{2} - (\dot{u}(t), \dot{E}(t)) + \frac{|\dot{E}(t)|^2}{2} + F(t, u(t))\Big] dt.$$

Integrando por partes o termo

$$\int_0^T (u(t), \ddot{E}(t)) dt = (u(t), \dot{E}(t))|_0^T - \int_0^T (\dot{u}, \dot{E}(t)) dt,$$

e usando que $\ddot{E}(t) = e(t)$, temos

$$\psi(u - E) = \int_0^T \Big[\frac{|\dot{u}(t)|}{2} + (u(t), e(t)) + F(t, u(t))\Big] dt + \frac{1}{2}\|\dot{E}\|_{L^2}^2 = \varphi_e + \frac{1}{2}\|\dot{E}\|_{L^2}^2$$

Consequentemente u minimiza φ_e sobre H_T^1.

■

2.4 Soluções Periódicas de Sistemas de Segunda Ordem Não-Autonômos com Potencial convexo

Quando F é convexo em x, podemos eliminar a condição de limitação sobre ∇F no Teorema 2.2 e deduzir uma condição necessária e suficiente de existência quando F é estritamente convexa em x ou quando $N = 1$. Enunciaremos e demonstraremos alguns resultados sobre funções convexas.

Proposição 2.4 *Seja $G \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ uma função convexa. Então, para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$,*

$$G(x) \geq G(y) + (\nabla G(y), x - y). \tag{2.22}$$

Demonstração: Pela convexidade de G, para cada $x, y \in \mathbb{R}^N$ e cada $\lambda \in (0,1)$, tem-se

$$G((1-\lambda)y + \lambda x) \leq (1-\lambda)G(y) + \lambda G(x).$$

Donde temos

$$G((1-\lambda)y + \lambda x) \leq G(y) - \lambda G(y) + \lambda G(x)$$

isto é,

$$\frac{G((1-\lambda)y + \lambda x) - G(y)}{\lambda} \leq G(x) - G(y).$$

Passando ao limite com $\lambda \to 0$, ficamos com

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{G(y + \lambda(x-y)) - G(y)}{\lambda} = \frac{\partial G(y)}{\partial(x-y)} = \langle \nabla G(y), x - y \rangle,$$

obtendo (2.22).

■

Uma função $G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é estritamente convexa se,

$$G((1-\lambda)x + \lambda y) < (1-\lambda)G(x) + \lambda G(y) \quad \forall \lambda \in (0,1) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Proposição 2.5 *Seja $G \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ uma função extritamente convexa. As seguintes propriedades são equivalentes:*

a) Existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ tal que $\nabla G(\bar{x}) = 0$.

b) $G(x) \to +\infty$ quando $|x| \to \infty$.

Demonstração: Se

$$\nabla G(\bar{x}) = 0,$$

segue de (2.22) com $y = \bar{x}$ que $\bar{x}$ minimiza G sobre $\mathbb{R}^N$, isto é, $G(x) > G(\bar{x})$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Desde que G é estritamente convexa, $\bar{x}$ é única, consequentemente

$$\delta = \min_{|x|=1} [G(\bar{x} + x) - G(\bar{x})] > 0.$$

A convexidade de G implica que, quando $|x| \geq 1$

$$\delta \leq G\left(\bar{x} + \frac{x}{|x|}\right) - G(\bar{x}) = G\left(\bar{x} - \frac{\bar{x}}{|x|} + \frac{\bar{x}}{|x|} + \frac{x}{|x|}\right) - G(\bar{x}) = G\left(\left(1 - \frac{1}{|x|}\right)\bar{x} + \frac{1}{|x|}(x + \bar{x})\right) - G(\bar{x})$$

isto é,

$$\delta \leq \left(1 - \frac{1}{|x|}\right) G(\bar{x}) + \frac{1}{|x|} G(\bar{x} + x) - G(\bar{x}) = \frac{1}{|x|}(G(\bar{x} + x) - G(\bar{x})).$$

Consequentemente

$$\delta |x| \leq G(\bar{x} + x) - G(\bar{x}).$$

Donde temos,

$$\delta |x| + G(\bar{x}) \leq G(\bar{x} + x),$$

para $|x| \geq 1$. Fazendo $\bar{x} + x = y$, temos

$$\delta |y - \bar{x}| + G(\bar{x}) \leq G(y),$$

isto é,

$$\delta(|y| - |\bar{x}|) + G(\bar{x}) \leq G(y),$$

implicando que

$$\delta |y| + G(\bar{x}) - \delta |\bar{x}| \leq G(y).$$

Assim,

$$G(y) \to +\infty \text{ quando } |y| \to \infty.$$

Se G satisfaz (b), como $G \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, segue que G possui um minimo $\bar{x}$, o qual é ponto crítico, ou seja

$$\frac{\partial G(\bar{x})}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, N,$$

provando (a).

■

Teorema 2.4 *Assuma que $F : [0, T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição (A), que $F(t, .)$ é convexa q.t.p. para $t \in [0, T]$ e que*

$$\int_0^T F(t, x) dt \to +\infty \quad se \quad |x| \to \infty. \tag{2.23}$$

Então o problema (2.11) *possui pelo menos uma solução que minimiza φ sobre H_T^1.*

Demonstração: Desde que F é convexa, a função

$$G(x) = \int_0^T F(t,x)dt$$

possui pela Proposição 2.5 um minimo $\bar{x}$ tal que

$$\nabla G(\bar{x}) = 0.$$

Como F é continuamente diferenciável sobre x, podemos permutar o sinal de integração com cada derivada parcial do gradiente, donde temos

$$\nabla G(\bar{x}) = \int_0^T \nabla F(t,\bar{x})dt = 0. \tag{2.24}$$

Seja $\{u_k\}$ uma sequência minimizante para φ e tal sequência existe devido à Proposição 2.5. Da convexidade de F temos por (2.22)

$$F(t,u_k(t)) \geq F(t,\bar{x}) + (\nabla F(\bar{x}), u_k(t) - \bar{x})$$

e

$$\varphi(u_k) = \int_0^T \Big[\frac{|\dot{u}_k(t)|^2}{2} + F(t,u_k(t))\Big]dt \geq \int_0^T \frac{|\dot{u}_k(t)|^2}{2}dt + \int_0^T F(t,\bar{x})dt$$
$$+ \int_0^T (\nabla F(\bar{x}), u_k(t) - \bar{x})dt,$$

ou seja,

$$\varphi(u_k) = \int_0^T \frac{|\dot{u}_k(t)|^2}{2}dt + \int_0^T F(t,\bar{x})dt - \int_0^T (\nabla F(\bar{x}), u_k(t))dt + \int_0^T (\nabla F(t,\bar{x}), \bar{x})dt.$$

Seja $u_k = \hat{u}_k + \bar{u}_k$ com $\bar{u}_k = \frac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u_k dt$. Uma vez que

$$|(\nabla F(t,\bar{x}), \hat{u}_k)| \leq |\nabla F(t,\bar{x})||\hat{u}_k|,$$

temos

$$(\nabla F(t,\bar{x}), \hat{u}_k) \geq -|\nabla F(t,\bar{x})||\hat{u}_k| \geq -|\nabla F(t,\bar{x})|\|\hat{u}_k\|_\infty,$$

e portanto

$$\varphi(u_k) \geq \int_0^T \frac{|\dot{u}_k(t)|^2}{2}dt + \int_0^T F(t,\bar{x})dt - \Big(\int_0^T |\nabla F(t,\bar{x})|dt\Big)\|\hat{u}_k\|_\infty.$$

Usando a desigualdade de Sobolev, ficamos com

$$\varphi(u_k) \geq \int_0^T \frac{|\dot{u}_k(t)|^2}{2}dt + \int_0^T F(t,\bar{x})dt - \Big(\int_0^T |\nabla F(t,\bar{x})|dt\Big)\Big(\frac{T}{12}\int_0^T |\dot{u}(t)|^2 dt\Big)^{1/2}.$$

Usando o fato que

$$|F(t,x)| \leq a(|x|)b(t) \text{ e } |\nabla F(t,x)| \leq a(|x|)b(t),$$

encontramos c_1 e c_2 tais que

$$-c_1 \leq \int_0^T F(t,\bar{x})dt \quad e \quad -\int_0^T |\nabla F(t,\bar{x})|dt \geq -c_2.$$

Desta forma

$$\varphi(u_k) \geq \int_0^T \frac{|\dot{u}_k(t)|^2}{2}dt - \bar{c}_3.$$

Desde que $\{u_k\}$ uma sequência minimizante para φ, então existe uma constante c_3 tal que

$$\int_0^T |\dot{u}_k(t)|^2 dt \leq c_3.$$

Pela desigualdade de Sobolev

$$\|\hat{u}_k\|_\infty \leq c_4 \tag{2.25}$$

para alguma constante c_4. Agora, temos pela convexidade de F que

$$F(t,\bar{u}_k/2) = F(t,(1/2)(u_k(t) - \hat{u}_k(t))) \leq (1/2)F(t,u_k(t)) + (1/2)F(t,-\hat{u}_k(t))$$

$q.t.p.$ para $t \in [0,T]$ e para todo $k \in \mathbb{N}$, daí

$$F(t,\bar{u}_k/2) - (1/2)F(t,-\hat{u}_k(t)) \leq (1/2)F(t,u_k(t)).$$

Consequentemente

$$\varphi(u_k) = \int_0^T |\dot{u}_k(t)|^2 dt + \int_0^T F(t,u_k(t)) \geq \int_0^T |\dot{u}_k(t)|^2 dt + 2\int_0^T F(t,\bar{u}_k/2) -$$
$$- \int_0^T F(t,-\hat{u}_k(t)).$$

Por (2.25)

$$\int_0^T F(t,-\hat{u}_k(t)) < c_5$$

o que implica

$$\varphi(u_k) \geq 2\int_0^T F(t,\hat{u}_k/2)dt - c_5$$

para algum $c_5 > 0$. Suponha por contradição que

$$|\bar{u}_k| \to \infty, \text{ logo } \int_0^T F(t,\bar{u}_k/2)dt \to \infty$$

o que contradiz a desigualdade acima, donde segue que $(\bar{u}_k)$ é limitada, portanto (u_k) é limitada e usando o Teorema 1.4 temos o resultado desejado.

■

Teorema 2.5 *Assuma que F satisfaz a condição (A) e que $F(t,.)$ é estritamente convexa q.t.p. para $t \in [0,T]$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

i) O problema (2.11) *possui solução.*

ii) Existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_0^T \nabla F(t,\bar{x})dt = 0.$$

iii) $\displaystyle\int_0^T \nabla F(t,x)dt \to \infty$ *quando* $|x| \to \infty$.

Demonstração: Se u é uma solução de (2.11), integrando a equação diferencial sobre $[0,T]$ e usando as condições de fronteira, encontramos

$$\int_0^T \ddot{u}(t)dt = \int_0^T \nabla F(t,u(t))dt = 0. \tag{2.26}$$

Seja $u = \hat{u}+\bar{u}$ onde $\bar{u} = (1/T)\displaystyle\int_0^T u(t)dt$ e defina funções G e $\hat{G}$ sobre $\mathbb{R}^N$ extritamente convexas por

$$G(x) = \int_0^T F(t,x)dt \quad e \quad \hat{G}(x) = \int_0^T F(t,x+\hat{u}(t))dt.$$

Por (2.26),

$$\nabla\hat{G}(\bar{u}) = \int_0^T \nabla F(t,\bar{u}+\hat{u}(t)) = 0.$$

Logo pela Proposição 2.5

$$\hat{G}(x) \to \infty \quad qdo \quad |x| \to \infty. \tag{2.27}$$

Pela convexidade de $F(t,.)$,

$$\hat{G}(x) = \int_0^T F(t,(1/2)2x+(1/2)2\hat{u}(t))dt \le \frac{1}{2}\int_0^T F(t,2x) + \frac{1}{2}\int_0^T F(t,2\hat{u}(t))dt,$$

isto é,

$$\hat{G}(x) \le \frac{1}{2}G(2x) + c. \tag{2.28}$$

Segue de (2.27) e (2.28) que

$$G(x) \to +\infty \text{ quando } |x| \to \infty,$$

consequentemente, existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ tal que $\nabla G(\bar{x}) = 0$, isto é,

$$\int_0^T \nabla F(t, \bar{x}) = 0$$

e i) implica em ii). Pela Proposição 2.5 aplicada a função G definida acima, ii) implica iii). Pelo Teorema 2.4, iii) implica em i).

■

Vamos, agora, retornar ao caso em que $F(t, .)$ é convexa mas com $N = 1$. Definindo

$$f(t, x) = \frac{d}{dx}(F(t, x)),$$

vemos que $f(t, .)$ é não decrescente *q.t.p.* para $t \in [0, 1]$. Isto implica em uma condição necessária para a existência de uma solução de

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t, u(t)) \\ u(0) - u(T) = \dot{u}(0) - \dot{u}(T) = 0. \end{cases} \tag{2.29}$$

Lema 2.1 *Se* (2.29) *possui uma solução, existe* $\bar{a}$ *tal que*

$$\int_0^T f(t, \bar{a}) = 0. \tag{2.30}$$

Em outras palavras, a função real

$$a \to \int_0^T F(t, a)dt$$

possui um ponto crítico $\bar{a}$*.*

Demonstração: Se (2.29) possui uma solução u, então, integrando ambos os menbros da equação sobre $[0, T]$ e usando as condições de fronteira, obtemos

$$\int_0^T f(t, u(t)) = 0.$$

Portanto, se

$$m \leq u(t) \leq M \ \forall t \in [0, T],$$

temos pela monotonicidade de $f(t, .)$

$$\int_0^T f(t, m)dt \leq 0 \leq \int_0^T f(t, M)dt$$

e como

$$J(x) = \int_0^T f(t,x)dt$$

é contínua, segue do Teorema do Valor Intermediário que existe $\bar{a} \in (m, M)$ tal que

$$\int_0^T f(t,\bar{a}) = 0.$$

$\blacksquare$

Teorema 2.6 *Se $f(t,.)$ é não decrescente q.t.p. para $t \in [0,T]$, então o problema* (2.29) *possui pelo menos uma solução se, e somente se, existe algum $\bar{a} \in \mathbb{R}$ satisfazendo* (2.30), *isto é, se e somente se, a função real*

$$a \to \int_0^T F(t,a)dt$$

possui um ponto crítico.

Demonstração: A condição necessária foi provada no Lema 2.1. Para a suficiência, iremos trabalhar com três casos. No primeiro caso vamos assumir que

$$\int_0^T f(t,a)dt = 0$$

sempre que $a \geq \bar{a}$. Então, por (2.30) e como $f(t,.)$ é não decrescente temos

$$0 = \int_0^T f(t,\bar{a})dt \leq \int_0^T f(t,a)dt = 0$$

isto é,

$$\int_0^T [f(t,a) - f(t,\bar{a})]dt = 0.$$

Logo

$$f(t,a) = f(t,\bar{a}) \ q.t.p. \ \forall t \in [0,T]$$

para todo $a \geq \bar{a}$. Seja v uma solução T-periódica do problema linear

$$\begin{cases} \ddot{v}(t) = f(t,\bar{a}) \\ v(0) - v(T) = \dot{v}(0) - \dot{v}(T) = 0 \end{cases}$$

e a solução existe devido a (2.16) e seja $b \in \mathbb{R}$ suficientemente grande tal que

$$v(t) + b \geq \bar{a}, \quad t \in [0,T].$$

Se considerarmos $u(t) = v(t) + b$, então

$$u(0) - u(t) = \dot{u}(0) - \dot{u}(T) = 0$$

e

$$\ddot{u}(t) = \ddot{v}(t) = f(t, \bar{a}) = f(t, v(t) + b) = f(t, u(t))$$

isto é, u é uma solução para (2.29). O segundo caso é similar ao primeiro, isto é, se

$$\int_0^T f(t, a) = 0$$

sempre que $a \leq \bar{a}$. Resta, portanto, considerar o caso onde existe $a_1 < \bar{a} < a_2$ tal que

$$c_1 \equiv \int_0^T f(t, a_1)dt < 0 < \int_0^T f(t, a_2)dt \equiv c_2.$$

Defina

$$H(s) = F(t, (1 - s)a_2 + sa),$$

então

$$H'(s) = \nabla F(t, (1 - s)a_2 + sa)(a - a_2) = f(t, (1 - s)a_2 + sa)(a - a_2).$$

Note que

$$\int_0^T f(t, (1 - s)a_2 + sa)(a - a_2)ds = H(1) - H(0) = F(t, a) - F(t, a_2).$$

Daí

$$\int_0^T F(t, a)dt = \int_0^T \left[F(t, a_2) + \int_0^1 f(t, (1 - s)a_2 + sa)(a - a_2)ds \right] dt.$$

Assim,

$$\int_0^T F(t, a)dt = \int_0^T F(t, a_2)dt + c_2(a - a_2),$$

implicando que

$$\int_0^T F(t, a)dt \to +\infty \quad quando \quad a \to +\infty.$$

Similarmente para $a \to -\infty$ e a existência de solução segue do Teorema 2.4.

■

Capítulo 3

Soluções Homoclínicas para Sistemas Hamiltonianos de Segunda Ordem Não-Autonômos com um Potencial Coercivo

Este capítulo é dedicado a encontrar soluções homoclínicas para o sistema Hamiltoniano de segunda ordem

$$\ddot{q} - V_q(t,q) = f(t)$$

onde $t \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}^N$. Vamos mostrar que existe uma solução $q_0 \in W^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ tal que $q_0(t) \to 0$ e $\dot{q}_0(t) \to 0$. Embora $q \equiv 0$ não seja uma solução do nosso sistema, q_0 é denominada solução homoclínica. Seguindo as ideias contidas em [2], as soluções homoclínicas serão obtidas como um limite de órbitas periódicas de periódo $2kT$. Consideremos o sistema Hamiltoniano de segunda ordem

$$\ddot{q} - V_q(t,q) = f(t) \tag{3.1}$$

onde $t \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}^N$ com $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ satisfazendo as seguintes condições:

(A1) V é C^1 suave, T-periódica com respeito a t, para algum $T > 0$.

(A2) Existe uma constante $b > 0$ tal que para todo $(t,q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$

$$V(t,q) \geq V(t,0) + b|q|^2$$

(A3) $\int_0^T V(t,0)dt = 0.$
(A4) $f \neq 0$ é uma função contínua e limitada tal que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty.$$

Aqui e subsequentemente, $|.| : \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$ é a norma induzida pelo produto interno usual

$$\begin{array}{rcl} (.,.) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & \displaystyle\sum_{i=1}^N x_i y_i \end{array}$$

onde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$.

Definição 3.1 *Dizemos que uma solução $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ de* (3.1) *é homoclínica em $x \in \mathbb{R}^N$, se $q(t) \to x$ e $\dot{q}(t) \to x$, quando $|t| \to \infty$.*

Neste Capítulo estudaremos a existência de soluções homoclínicas para $x = 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, denominaremos $E_k := W^{1,2}_{2kT}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$, o espaço de Hilbert das funções $2kT-$periódicas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^N$ sobre a norma

$$\|q\|_{E_k} = \Big(\int_{-kT}^{kT} (|\dot{q}(t)|^2 + |q(t)|^2)\Big)^{1/2}.$$

Consideremos a sequência de sistemas de equações diferenciais

$$\ddot{q} - V_q(t,q) = f_k(t) \tag{3.2}$$

onde para todo $k \in \mathbb{N}$, $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ é uma extensão $2kT-$periódica de uma restrição de f ao intervalo $[-kT, kT)$. Observemos que f_k não é necessariamente contínua nos pontos $kT + 2kT_j$ $j \in \mathbb{Z}$. Seja $I_k : E_k \to \mathbb{R}$ definido por

$$I_k(q) := \int_{-kT}^{kT} \Big(\frac{1}{2}|\dot{q}(t)|^2 + V(t,q(t)) + (f_k(t), q(t))\Big) dt \tag{3.3}$$

Então $I_k \in C^1(E_k, \mathbb{R})$ e podemos verificar pelo estudo feito no Capítulo 2 que

$$I'_k(q)v = \int_{-kT}^{kT} \Big((\dot{q}(t), \dot{v}(t)) + (V_q(t,q(t)), v(t)) + (f_k(t), v(t))\Big) dt \tag{3.4}$$

Além disso, pontos críticos de I_k são soluções clássicas $2kT-$periódicas de (3.2).

Lema 3.1 *Se as condições* (A1)-(A4) *ocorrem, então para todo $k \in \mathbb{N}$ o sistema* (3.2) *possui uma solução $2kT-$periódica.*

Demonstração: Sejam

$$\beta := min\{1, 2b\} \quad e \quad M := \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt\Big)^{1/2}.$$

Segue de $(A4)$ que M é finito com

$$\|f_k\|_{L^2_{2kT}} = \Big(\int_{-kT}^{kT} |f_k(t)|^2 dt\Big)^{1/2} \leq \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt\Big)^{1/2} = M. \tag{3.5}$$

Por (A2),

$$I_k(q) \geq \int_{-kT}^{kT} \Big(\frac{1}{2}|\dot{q}(t)|^2 + V(t, 0) + b|q(t)|^2 + (f_k(t), q(t))\Big) dt.$$

Usando (A3) e o fato que V é T-periódica, mostra-se que

$$\int_{-kT}^{kT} V(t, 0) dt = 0$$

logo,

$$I_k(q) \geq \int_{-kT}^{kT} \Big(\frac{1}{2}|\dot{q}(t)|^2 + \frac{2b}{2}|q(t)|^2 + (f_k(t), q(t))\Big) dt.$$

Segue da definição de β que

$$I_k(q) \geq \int_{-kT}^{kT} \Big(\frac{\beta}{2}|\dot{q}(t)|^2 + \frac{\beta}{2}|q(t)|^2 + (f_k(t), q(t))\Big) dt.$$

Uma vez que

$$-\int_{-kT}^{kT} (f_k(t), q(t)) \leq \int_{-kT}^{kT} |(f_k(t), q(t))| \leq \|f_k\|_{L^2_{2kT}} \|q\|_{L^2_{2kT}} \leq \|f_k\|_{L^2_{2kT}} \|q\|_{E_k}$$

ficamos com

$$I_k(q) \geq \frac{\beta}{2}\|q\|^2_{E_k} - \|f_k\|_{L^2_{2kT}} \|q\|_{E_k},$$

ou mais precisamente

$$I_k(q) \geq \frac{\beta}{2}\|q\|^2_{E_k} - M\|q\|_{E_k}. \tag{3.6}$$

Observando que a função $g(t) = \frac{\beta}{2}t^2 - Mt$ possui um mínimo, concluímos que I_k é um funcional limitado inferiormente. Mostraremos agora que I_k satisfaz a condição de Cerami. Assuma que $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ em E_k é uma sequência tal que

$$\{I_k(u_j)\}_{j\in\mathbb{N}} \text{ é limitada e } (1 + \|u_j\|_{E_k})I'_k(u_j) \to 0, \text{ quando } j \to \infty.$$

Então existe $c_k > 0$ tal que

$$|I_k(u_j)| \leq c_k \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

Combinando (3.6) e (3.7), obtemos

$$-M\|u_j\|_{E_k} + \frac{\beta}{2}\|u_j\|_{E_k}^2 \leq I_k(u_j) \leq |I_k(u_j)| \leq c_k$$

$$-2M\|u_j\|_{E_k} + \beta\|u_j\|_{E_k}^2 - 2c_k \leq 0 \tag{3.8}$$

Desde que $\beta > 0$, por (3.8) concluímos que $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em E_k. Portanto sendo $W_{2kT}^{1,2}$ reflexivo, existe $u \in W_{2kT}^{1,2}$ tal que

$$u_j \rightharpoonup u, \text{ quando } j \to \infty,$$

o que implica que

$$u_j \to u \text{ uniformemente sobre } [-kT, kT],$$

pela Proposição 2.2. Assim

$$\|u_j - u\|_{L^2_{2kT}} \to 0 \quad , \quad I_k'(u)(u_j - u) \to 0$$

e devido a convergência uniforme

$$\int_{-kT}^{kT} (V_q(t, u_j(t)) - V_q(t, u(t)), u_j(t) - u(t))dt \to 0 \text{ quando } j \to \infty.$$

Além disso, desde que $(1 + \|u_j\|_{E_k})I_k'(u_j) \to 0$ quando $j \to \infty$, temos

$$|I_k'(u_j)(u_j - u)| \leq \|I_k'(u_j)\|_{E_k^*}\|u_j - u\|_{E_k} \to 0.$$

Finalmente, usando (3.4)

$$I_k'(u_j)(u_j - u) = \int_{-kT}^{kT} [(\dot{u}(t), \dot{u}_j(t) - u(t)) + (V_q(t, u_j(t)), u_j(t) - u(t)) +$$

$$+ (f_k(t), u_j(t) - u(t))]dt$$

e

$$I_k'(u)(u_j - u) = \int_{-kT}^{kT} [(\dot{u}(t), \dot{u}(t) - u(t)) + (V_q(t, u(t)), u_j(t) - u(t)) + (f_k(t), u_j(t) - u(t))]dt.$$

Logo

$$(I_k'(u_j) - I_k'(u))(u_j - u) - \int_{-kT}^{kT} [(V_q(t, u_j(t)) - V_q(t, u(t)), u_j(t) - u(t))]dt = \|\dot{u}_j - \dot{u}\|_{L^2_{2kT}}^2$$

Consequentemente

$$\|\dot{u}_j - \dot{u}\|^2_{L^2_{2kT}} \to 0,$$

mostrando que

$$\|u_j - u\|_{E_k} \to 0, \quad quando \quad j \to 0.$$

Pelo Teorema $B.4$, concluímos que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $q_k \in E_k$ tal que

$$I_k(q_k) = \inf_{q \in E_k} I_k(q) \quad e \quad I'_k(q_k) = 0. \tag{3.9}$$

Note que por (3.6), $I_k(q)$ é coercivo e que $I_k(0) = 0$. Usando novamente (3.6)

$$\tfrac{\beta}{2}\|q_k\|^2_{E_k} - M\|q_k\|_{E_k} \quad \leq \quad I_k(q_k) \leq I_k(0) = 0$$

portanto

$$\|q_k\|_{E_k} \leq \frac{2M}{\beta} := \rho.$$

■

Observação: Segue da Proposição 2.1 que existe $c > 0$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ e para cada $q \in E_k$,

$$\|q\|_{L^\infty_{2kT}} \leq c\|q\|_{E_k}. \tag{3.10}$$

$L^\infty_{2kT}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ denotará o espaço das funções mensuráveis, essencialmente limitadas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^N$ com a norma

$$\|q\|_{L^\infty_{2kT}} := ess \quad sup\{|q(t)| : t \in [-kT, kT]\}.$$

Lema 3.2 *Seja* $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *a sequência obtida em* (3.9). *Então, existe uma subsequência* $\{q_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ *convergente para um certo* q_0 *em* $C^1_{Loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$.

Demonstração: Primeiro, mostraremos que $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{\dot{q}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{\ddot{q}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ são sequências equilimitadas. Como $\|q_k\|_{E_k} \leq \rho$, por (3.10), temos

$$\|q_k\|_{L^\infty_{2kT}} \leq \|q_k\|_{E_k} < c\rho \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.11}$$

Desde que q_k é uma solução $2kT$-periódica de (3.2), para todo $t \in [-kT, kT)$ vale a igualdade

$$\ddot{q}_k(t) = V_q(t, q_k(t)) + f_k(t).$$

Sendo f uma extensão de f_k,

$$|\ddot{q}_k(t)| \leq |V_q(t, q_k(t))| + |f_k(t)| = |V_q(t, q_k(t))| + |f(t)|.$$

Como $V \in C^1$, por (3.11) e sendo f é limitada, concluímos que existe uma constante M_1 independente de k tal que

$$\|\ddot{q}_k(t)\|_{L^\infty_{2kT}} \leq M_1. \tag{3.12}$$

Finalmente, para cada $k \in \mathbb{N}$ e $t \in \mathbb{R}$, existe $t_k \in [t-1, t]$ tal que

$$\dot{q}_k(t_k) = \int_{t-1}^{t} \dot{q}_k(s)ds = q_k(t) - q_k(t-1)$$

e

$$\dot{q}_k(t) = \int_{t_k}^{t} \ddot{q}_k(s)ds + \dot{q}_k(t_k).$$

Assim

$$|\dot{q}_k(t)| \quad \leq \quad \int_{t_k}^{t} |\ddot{q}_k(s)|ds + |\dot{q}_k(t_k)| = \int_{t_k}^{t} |\ddot{q}_k(s)|ds + |q_k(t) - q_k(t-1)|.$$

Usando (3.12)

$$|\dot{q}_k(t)| \leq \int_{t-1}^{t} M_1 ds + |q_k(t)| + |q_k(t-1)| \leq M_1 + c\rho + c\rho$$

ou seja,

$$|\dot{q}_k(t)| \leq M_2. \tag{3.13}$$

Para finalizar a prova é suficiente observar que $\{\dot{q}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ são equicontinuas. De fato, para todo $k \in \mathbb{N}$ e para $t, s \in \mathbb{R}$ com $t > s$, temos

$$|\dot{q}_k(t) - \dot{q}_k(s)| = \left|\int_{s}^{t} \ddot{q}_k(\delta)d\delta\right| \leq \int_{s}^{t} |\ddot{q}_k(\delta)|d\delta \leq M_1|t-s|.$$

Similarmente

$$|q_k(t) - q_k(s)| \leq M_2|t-s|.$$

Aplicando o Teorema de Arzelá-Ascoli, existe uma subsequência uniformemente convergente para um $q_0 \in C^1_{Loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$.

$\blacksquare$

Lema 3.3 *Seja* $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ *uma aplicação contínua tal que* $\dot{q}$ *é localmente de quadrado integrável. Então*

$$|q(t)| \leq \sqrt{2}\Big(\int_{t-1/2}^{t+1/2} (|q(s)|^2 + |\dot{q}(s)|^2)ds\Big)^{1/2} \tag{3.14}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Fixe $t \in \mathbb{R}$. Para todo $\tau \leq t$,

$$|q(t)| \leq |q(\tau)| + \Big|\int_\tau^t \dot{q}(s)ds\Big|.$$

Integrando de $[t - \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2}]$, obtemos

$$|q(t)| \leq \int_{t-1/2}^{t+1/2} \Big(|q(\tau)| + \Big|\int_\tau^t \dot{q}(s)ds\Big|\Big) d\tau.$$

Usando a desigualdade de Hölder

$$|q(t)| \leq \Big(\int_{t-1/2}^{t+1/2} \Big(|q(\tau)| + \Big|\int_\tau^t \dot{q}(s)ds\Big|\Big)^2 d\tau\Big)^{1/2} \Big(\int_{t-1/2}^{t+1/2} 1^2\Big)^{1/2},$$

donde temos

$$|q(t)| \leq \Big(2\int_{t-1/2}^{t+1/2} \Big(|q(\tau)|^2 + \Big|\int_\tau^t \dot{q}(s)ds\Big|^2\Big) d\tau\Big)^{1/2}.$$

Desde que

$$\int_{t-1/2}^{t+1/2} \Big(\int_\tau^t |\dot{q}(s)|^2 ds\Big) d\tau \leq \int_{t-1/2}^{t+1/2} \Big(\int_{t-1/2}^{t+1/2} |\dot{q}(s)|^2 ds\Big) d\tau = \int_{t-1/2}^{t+1/2} |\dot{q}(s)|^2 ds$$

Então

$$|q(t)| \leq \sqrt{2}\Big(\int_{t-1/2}^{t+1/2} |q(\tau)|^2 + \int_{t-1/2}^{t+1/2} |\dot{q}(s)|^2 ds\Big)^{1/2}.$$

$\blacksquare$

Lema 3.4 *Seja* $q_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ *a função dada pelo Lema* 3.2. *Então,* q_0 *é uma solução de* (3.1) *tal que* $q_0(t) \to 0$ *e* $\dot{q}_0(t) \to 0$, *quando* $|t| \to \infty$, *isto é,* q_0 *é uma solução homoclínica com relação a origem.*

Demonstração : Primeiro mostraremos que q_0 satisfaz (3.1). Pelos Lemas 3.1 e 3.2,

$$q_{k_j} \to q_0 \text{ em } C^1_{Loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N), \text{ quando } j \to \infty$$

e

$$\ddot{q}_{k_j}(t) = V_q(t, q_{k_j}(t)) + f_{kj}(t) \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } t \in [-k_jT, k_jT).$$

Considere $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Então existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j > j_0$ e para todo $t \in [a, b]$ temos

$$\ddot{q}_{k_j}(t) = V_q(t, q_{k_j}(t)) + f(t).$$

Consequentemente, para $j > j_0$, $\ddot{q}_{k_j}$ é contínuo em $[a, b]$ com

$$\ddot{q}_{k_j}(t) \to V_q(t, q_0(t)) + f(t)$$

uniformemente sobre $[a, b]$. Além disso, desde que a e b são arbitrários, concluímos que q_0 satisfaz (3.1). Resta mostrar que q_0 é homoclínica. Observe que para $l \in \mathbb{N}$ tal que $l < k_j$ e $j > j_0$, temos

$$\int_{-lT}^{+lT} (|q_{k_j}(s)|^2 + |\dot{q}_{k_j}(s)|^2)ds \leq \int_{-k_jT}^{+k_jT} (|q_{k_j}(s)|^2 + |\dot{q}_{k_j}(s)|^2)ds \leq \rho^2$$

e fazendo $l \to \infty$ e $j \to \infty$ respectivamente, obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (|q_0(s)|^2 + |\dot{q}_0(s)|^2)ds \leq \rho^2.$$

Usando o Lema $B.1$,

$$\int_{|t|\geq r} (|q_0(s)|^2 + |\dot{q}_0(s)|^2)ds \to 0 \quad quando \quad r \to \infty. \tag{3.15}$$

Por (3.14)

$$|q_0(t)| \leq \sqrt{2}\Big(\int_{t-1/2}^{t+1/2} (|q_0(s)|^2 + |\dot{q}_0(s)|^2)ds\Big)^{1/2}$$

implicando que $q_0(t) \to 0$ quando $|t| \to \infty$. Novamente por (3.14),

$$|\dot{q}_0(t)| \leq \sqrt{2}\Big(\int_{t-1/2}^{t+1/2} (|\dot{q}_0(s)|^2 + |\ddot{q}_0(s)|^2)ds\Big)^{1/2} \forall t \in \mathbb{R}.$$

De (3.15), temos

$$\int_{t-1/2}^{t+1/2} |\dot{q}_0(s)|^2 ds \to 0 \quad quando \quad |t| \to \infty.$$

Portanto é suficiente mostrar que

$$\int_{t-1/2}^{t+1/2} |\ddot{q}_0(s)|^2 ds \to 0 \quad quando \quad |t| \to \infty.$$

Desde que q_0 é uma solução de (3.1),

$$\int_{t-1/2}^{t+1/2} |\ddot{q}_0(s)|^2 ds = \int_{t-1/2}^{t+1/2} |V_q(s, q_0(s)) + f(s)|^2 ds,$$

ou seja,

$$\int_{t-1/2}^{t+1/2} |\ddot{q}_0(s)|^2 ds = \int_{t-1/2}^{t+1/2} |V_q(s, q_0(s))|^2 ds + 2\int_{t-1/2}^{t+1/2} (V_q(s, q_0(s)), f(s)) ds$$

$$+ \int_{t-1/2}^{t+1/2} |f(s)|^2 ds.$$

Segue da desigualdade de Hölder

$$\int_{t-1/2}^{t+1/2} |\ddot{q}_0(s)|^2 ds = \int_{t-1/2}^{t+1/2} |V_q(s, q_0(s)|^2 + 2\Big(\int_{t-1/2}^{t+1/2} |V_q(s, q_0(s))|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Big(\int_{t-1/2}^{t+1/2} |f(s)|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}} + \int_{t-1/2}^{t+1/2} |f(s)|^2 ds.$$

Por (A_4),

$$\int_{t-1/2}^{t+1/2} |f(s)|^2 ds \to 0 \quad quando \quad |t| \to \infty.$$

Segue por (A2) que

$$V(t, q) \geq V(t, 0) \quad \forall q \in \mathbb{R}^N$$

isto é,

$$V(t, 0) = \min_{q \in \mathbb{R}^N} V(t, q).$$

Portanto

$$V_q(t, 0) = 0.$$

Usando o fato que $V \in C^1$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $t \in \mathbb{R}$

$$|q| < \delta \quad \Rightarrow |V_q(t, q)| < \epsilon.$$

Além disso, existe $r > 0$ tal que se $|t| \geq r$, então $|q_0(t)| < \delta$. Consequentemente, se $|t| \geq r + 1/2$

$$\int_{t-1/2}^{t+1/2} |V_q(s, q_0(s))|^2 ds < \epsilon^2$$

mostrando assim que q_0 é homoclínica em 0. Observe que $q_0 \equiv 0$ não é solução de (3.1), caso contrário teriamos

$$-V_q(t, 0) = f(t)$$

mas como já foi visto $V_q(t, 0) = 0$ e por hipótese $f \not\equiv 0$, o que completa a prova

$\blacksquare$

Capítulo 4

Soluções Homoclínicas para Sistemas com o p-Laplaciano com Potêncial Coercivo

Neste capítulo apresentaremos um estudo de existência de soluções homoclínicas para o sistema de segunda ordem não autonômo com o p-Laplaciano

$$\frac{d}{dt}(|\dot{u}(t)|^{p-2}\dot{u}(t)) = \nabla F(t, u(t)) + f(t), \tag{4.1}$$

seguindo as idéias contidas em [3], onde $p > 1$, $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^N$ com $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ verificando as seguintes condições:

(B1) $F \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ é T-periódica com respeito a t, $T > 0$.

(B2) Existem constantes $b > 0$ e $\mu > 1$ tal que para todo $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N$

$$F(t, x) \geq F(t, 0) + b|x|^{\mu}.$$

(B3) $f \neq 0$ é uma função contínua e limitada tal que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(s)|^{\mu/\mu-1} ds < \infty.$$

Observe que a condição (A3) foi removida e (A2) e (A4) foram substituidas por condições mais gerais (B2) e (B3) respectivamente. O método utilizado para obtermos solução para (4.1) será o mesmo apresentado no Capítulo 3, ou seja, consideraremos uma sequência de equações diferenciais

$$\frac{d}{dt}(|\dot{u}(t)|^{p-2}\dot{u}(t)) = \nabla F(t, u(t)) + f_k(t) \tag{4.2}$$

onde $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ é uma extensão $2kT-$periódica de f ao intervalo $[-kT, kT)$, $k \in \mathbb{N}$ e soluções de (4.1) são limites de soluções $2kT$-periódicas de (4.2). No que segue, consideraremos $I_k : E_k \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_k(u) = \int_{-kT}^{kT} \Big[\frac{1}{p}|\dot{u}(t)|^p + F(t, u(t)) + (f_k(t), u(t))\Big]dt.$$

Mostra-se que $I_k \in C^1(E_k, \mathbb{R})$ é fracamente semi-contínua com

$$I_k'(u)v = \int_{-kT}^{kT} \Big[(|\dot{u}(t)|^{p-2}\dot{u}(t), \dot{v}(t)) + (\nabla F(t, u(t)), v(t)) + (f_k(t), v(t))\Big]dt \quad \forall u, v \in E_k,$$

onde $E_k = W^{1,p}_{2kT}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ é o espaço de Banach das funções $2kT-$periódicas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^N$ com a seguinte norma

$$\|u\|_{E_k} := \Big[\int_{-kT}^{kT} (|\dot{u}(t)|^p + |u(t)|^p)dt\Big]^{1/p}.$$

Lema 4.1 *Assuma que F e f satisfazem (B1), (B2) e (B3). Então para todo $k \in \mathbb{N}$, o sistema* (4.2) *possui uma solução $2kT-$periódica $u_k \in E_k$ tal que*

$$\frac{1}{p}\int_{-kT}^{kT} |\dot{u}_k(t)|^p dt + b\int_{-kT}^{kT} |u_k(t)|^\mu dt \leq M\Big(\int_{-kT}^{kT} |u_k(t)|^\mu dt\Big)^{1/\mu} \tag{4.3}$$

onde

$$M = \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^{\mu/\mu-1}dt\Big)^{(\mu-1)/\mu}.$$

Demonstração: Seja $c_0 = \displaystyle\int_0^T F(t, 0)dt$. Por (B2)

$$I_k(u) \geq \int_{-kT}^{kT} \Big[\frac{1}{p}|\dot{u}(t)|^p + F(t, 0) + b|u(t)|^\mu + (f_k(t), u(t))\Big]dt.$$

Usando o fato que F é T-periódica e a desigualdade de Hölder

$$I_k(u) \geq \int_{-kT}^{kT} \frac{1}{p}|\dot{u}(t)|^p dt + b\int_{-kT}^{kT} |u(t)|^\mu dt - \Big(\int_{-kT}^{kT} |f_k(t)|^{\mu/\mu-1}dt\Big)^{\frac{\mu-1}{\mu}}\Big(\int_{-kT}^{kT} |u(t)|^\mu dt\Big)^{1/\mu}$$
$$+2kc_0$$

ou seja,

$$I_k(u) \geq \int_{-kT}^{kT} \frac{1}{p}|\dot{u}(t)|^p dt + b\int_{-kT}^{kT} |u(t)|^\mu dt - M\Big(\int_{-kT}^{kT} |u(t)|^\mu dt\Big)^{1/\mu} + 2kc_0. \tag{4.4}$$

Observando que

$$\frac{b}{2}x^\mu - Mx \geq -\frac{b}{2}(\mu - 1)\Big(\frac{2M}{b\mu}\Big)^{\mu/\mu-1} := -D \quad \forall x \geq 0$$

a desigualdade acima combinada com (4.4) implica que

$$I_k(u) \geq \frac{1}{p}\int_{-kT}^{kT} |\dot{u}(t)|^p dt + \frac{b}{2}\int_{-kT}^{kT} |u(t)|^\mu dt - D + 2kc_0. \tag{4.5}$$

Considerando

$$\bar{u} = \frac{1}{2kT}\int_{-kT}^{kT} u(t)dt \text{ e } \hat{u}(t) = u(t) - \bar{u},$$

temos pela desigualdade de Sobolev que

$$\|\hat{u}\|_\infty \leq c_1 \|\dot{u}\|_{L^p_{2kT}} \quad e \quad |\hat{u}\|_{L^p_{2kT}} \leq c_2 \|\dot{u}\|_{L^p_{2kT}}. \tag{4.6}$$

Observe que para $k \in \mathbb{N}$, as seguintes condições são equivalentes:

i) $\|u\|_{E_k} \to \infty$.

ii) $|\bar{u}|^p + \displaystyle\int_{-kT}^{kT} |\dot{u}(t)|^p dt \to \infty$.

iii) $\displaystyle\int_{-kT}^{kT} |\dot{u}(t)|^p dt + \int_{-kT}^{kT} |\dot{u}(t)|^\mu dt \to \infty$.

No Teorema 2.2 mostramos que as condições **i)** e **ii)** são equivalentes e usando os mesmos argumentos mostra-se que **ii)** e **iii)** são equivalentes. Usando o Teorema 1.2 concluímos que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $u_k \in E_k$ tal que

$$I_k(u_k) = \inf_{u \in E_k} I_k(u).$$

Desde que

$$I_k(0) = \int_{-kT}^{kT} F(t, 0) = 2kc_0$$

temos

$$I_k(u_k) \leq 2kc_0,$$

de onde segue

$$2kc_0 \geq I_k(u_k) \geq \frac{1}{p}\int_{-kT}^{kT} |\dot{u}_k(t)|^p dt + b\int_{-kT}^{kT} |u_k(t)|^\mu dt - M\Big(\int_{-kT}^{kT} |u_k(t)|^\mu dt\Big)^{1/\mu} + 2kc_0$$

obtendo a desigualdade

$$M\Big(\int_{-kT}^{kT} |u_k(t)|^\mu dt\Big)^{1/\mu} \geq \frac{1}{p}\int_{-kT}^{kT} |\dot{u}_k(t)|^p dt + b\int_{-kT}^{kT} |u_k(t)|^\mu dt,$$

finalizando a demonstração do lema.

■

Lema 4.2 *Sejam* $a, b \geq 0$ *e* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$. *Então para todo* $t \in \mathbb{R}$ *a seguinte desigualdade é verdadeira*

$$|u(t)| \leq (a+b)^{-1/\mu}\Big(\int_{t-a}^{t+b}|u(t)|^{\mu}ds\Big)^{1/\mu}+\frac{2max\{a,b\}}{(a+b)^{1/p}}\Big(\int_{t-a}^{t+b}|\dot{u}(t)|^{p}ds\Big)^{1/p}. \tag{4.7}$$

Demonstração: Fixe $t \in \mathbb{R}$ e note que para todo $\tau \in \mathbb{R}$, vale a desigualdade

$$|u(t)| \leq |u(\tau)| + \Big|\int_{\tau}^{t}\dot{u}(s)ds\Big|. \tag{4.8}$$

Integrando (4.8) sobre $[t-a, t+b] \supset [t, \tau]$, obtemos

$$(a+b)|u(t)| \leq \int_{t-a}^{t+b}|u(\tau)|d\tau + \int_{t-a}^{t+b}\Big|\int_{\tau}^{t}\dot{u}(s)ds\Big|d\tau$$

ou ainda,

$$(a+b)|u(t)| \leq \int_{t-a}^{t+b}|u(\tau)|d\tau + \int_{t-a}^{t+b}\int_{\tau}^{t}|\dot{u}(s)|dsd\tau.$$

Usando a desigualdade de Hölder

$$(a+b)|u(t)| \leq (a+b)^{(\mu-1)/\mu}\Big(\int_{t-a}^{t+b}|u(s)|^{\mu}ds\Big)^{1/\mu}+$$

$$+2max\{a,b\}(a+b)^{(p-1)/p}\Big(\int_{t-a}^{t+b}|u(s)|^{p}ds\Big)^{1/p}$$

Logo (4.7) é verdadeiro.

■

Corolário 4.1 *Seja* $a > 0$ *e* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Então para todo* $t \in \mathbb{R}$ *a seguinte desigualdade é válida:*

$$|u(t)| \leq (2a)^{-1/\mu}\Big(\int_{t-a}^{t+a}|u(s)|^{\mu}ds\Big)^{1/\mu}+a(2a)^{-1/p}\Big(\int_{t-a}^{t+a}|\dot{u}(s)|^{p}ds\Big)^{1/p}. \tag{4.9}$$

Demonstração: Basta fazer $a = b$ no Lema acima.

■

Corolário 4.2 *Seja* $u \in E_k$. *Então a seguinte desigualdade é verdadeira:*

$$\|u\|_{L^{\infty}_{[-kT,kT]}} \leq T^{-1/\mu}\Big(\int_{-kT}^{kT}|u(s)|^{\mu}ds\Big)^{1/\mu}+T^{(p-1)/p}\Big(\int_{-kT}^{kT}|\dot{u}(s)|^{p}ds\Big)^{1/p}. \tag{4.10}$$

Demonstração: Desde que $u(t)$ é contínua em $[-kT, kT]$, podemos escolher $t^* \in [-kT, kT]$ tal que

$$|u(t^*)| = \max_{t\in[-kT,kT]} |u(t)|.$$

Sejam $a \in [0, T]$ e $b = T - a$ tais que

$$-kT \leq t^* - a \leq t^* \leq t^* + b \leq kT.$$

Se $t^* = -kT$, escolha $a = 0$ e $b = T$ e se $t^* = kT$, escolha $a = T$ e $b = 0$. Por (4.7),

$$|u(t^*)| \leq (a+b)^{-1/\mu}\Big(\int_{t^*-a}^{t^*+b} |u(s)|^\mu ds\Big)^{1/\mu} + 2max\{a,b\}(a+b)^{-1/p}\Big(\int_{t^*-a}^{t^*+b} |\dot{u}(s)|^p ds\Big)^{1/p}$$

ou seja,

$$|u(t^*)| \leq (T)^{-1/\mu}\Big(\int_{-kT}^{kT} |u(s)|^\mu ds\Big)^{1/\mu} + 2T(T)^{-1/p}\Big(\int_{-kT}^{kT} |\dot{u}(s)|^p ds\Big)^{1/p}.$$

Portanto (4.10) é verdadeiro.

■

Lema 4.3 *Seja $u_k \in E_k$ solução do sistema* (4.2) *que satisfaz* (4.3) *para $k \in \mathbb{N}$. Então existe uma constante positiva c independente de k tal que*

$$\|u_k\|_{L^\infty_{[-kT,kT]}} \leq c. \tag{4.11}$$

Demonstração: Por (4.3),

$$b\int_{-kT}^{kT} |u_k(s)|^\mu ds \leq M\Big(\int_{-kT}^{kT} |u_k(s)|^\mu ds\Big)^{1/\mu}$$

isto é,

$$\int_{-kT}^{kT} |u_k(s)|^\mu ds \leq \Big(\frac{M}{b}\Big)^{\mu/\mu-1}. \tag{4.12}$$

Novamente por (4.3)

$$\frac{1}{p}\int_{-kT}^{kT} |\dot{u}_k(t)|^p dt \leq M\Big(\int_{-kT}^{kT} |u_k(s)|^\mu ds\Big)^{1/\mu},$$

logo por (4.12)

$$\frac{1}{p}\int_{-kT}^{kT} |\dot{u}_k(t)|^p dt \leq pM\Big(\frac{M}{b}\Big)^{1/\mu-1}. \tag{4.13}$$

Segue de (4.10)

$$\|u_k\|_{L^\infty_{[-kT,kT]}} \leq T^{-1/\mu}\Big(\int_{-kT}^{kT} |u_k(s)|^\mu ds\Big)^{1/\mu} + T^{(p-1)/p}\Big(\int_{-kT}^{kT} |\dot{u}_k(s)|^p ds\Big)^{1/p},$$

e assim por (4.12) e (4.13),

$$\|u_k\|_{L^\infty_{[-kT,kT]}} \leq T^{-1/\mu}\Big(\frac{M}{b}\Big)^{1/\mu-1} + T^{(p-1)/p}(pM)^{1/p}\Big(\frac{M}{b}\Big)^{1/p(\mu-1)} := c,$$

mostrando que (4.11) é verdadeira.

$\blacksquare$

Lema 4.4 *Seja $u_k \in E_k$ solução do sistema (4.2) satisfazendo (4.11) para $k \in \mathbb{N}$. Então existe uma subsequência $\{u_{k_j}\}$ de $\{u_k\}$ convergente para algum $u_0 \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)$ em $C^1_{Loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração: Pelo Lema 4.3 sabemos que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência uniformemente limitada. Iremos mostrar que $\{\dot{u}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e

$$\tfrac{d}{dt}(|\dot{u}_k(t)|^{p-2}\dot{u}_k(t)) = \nabla F(t,u_k(t)) + f_k(t)$$

são também uniformemente limitadas. Segue de (4.11), (B1) e (B3) que $|\nabla F(t,u_k(t))|$ e $|f_k(t)|$ são limitados, logo

$$\Big|\frac{d}{dt}(|\dot{u}_k(t)|^{p-2}\dot{u}_k(t))\Big| \leq |\nabla F(t,u_k(t))| + |f_k(t)|$$

obtendo

$$\Big|\frac{d}{dt}(|\dot{u}_k(t)|^{p-2}\dot{u}_k(t))\Big| \leq \sup_{(t,x)\in[0,T]\times[-c,c]} |\nabla F(t,u_k(t))| + \sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t)| \equiv M_1, \quad t\in[-kT,kT).$$

ou ainda,

$$\Big\|\frac{d}{dt}(|\dot{u}_k(t)|^{p-2}\dot{u}_k(t))\Big\|_{L^\infty_{[-kT,kT]}} \leq M_1, \quad k\in\mathbb{N}. \tag{4.14}$$

Para $i=-k,-k+1,\ldots,k-1$, segue da continuidade de $\dot{u}_k(t)$ que podemos escolher $t_{k_i}\in[iT,(i+1)T]$ tal que

$$\dot{u}_k(t_{k_i}) = \frac{1}{T}\int_{iT}^{(i+1)T}\dot{u}_k(s)ds = \frac{1}{T}u_k((i+1)T) - u_k(iT). \tag{4.15}$$

Segue que para todo $t\in[iT,(i+1)T]$, $i=-k,-k+1,\ldots,k-1$

$$\Big||\dot{u}(t)|^{p-2}\dot{u}_k(t)\Big| \;=\; \Big|\int_{t_{k_i}}^{t}\frac{d}{ds}(|\dot{u}_k(s)|^{p-2}\dot{u}_k(s))ds + \dot{u}(t_{k_i})|^{p-2}\dot{u}_k(t_{k_i})\Big|$$

ou seja,

$$\Big||\dot{u}(t)|^{p-2}\dot{u}_k(t)\Big| \leq \int_{t_{k_i}}^{t}\Big|\frac{d}{ds}(|\dot{u}_k(s)|^{p-2}\dot{u}_k(s))\Big|ds + |\dot{u}(t_{k_i})|^{p-1}.$$

Usando (4.14) e (4.15) obtemos

$$|\dot{u}(t)|^{p-1} \leq TM_1 + [T^{-1}|u_k((i+1)T) - u_k(iT)|]^{p-1} \leq M_1 T + (T^{-1}2c)^{p-1} \equiv M_2^{p-1}.$$

Consequentemente

$$\|\dot{u}_k\|_{L^\infty_{[-kT,kT]}} \leq M_2 \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.16}$$

Observe que $\{\dot{u}_k(t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ é também equicontinua. Caso contrário, existiria um $\epsilon_0 > 0$ e duas sequências $\{t_i^1\}_{i\in\mathbb{N}}$ e $\{t_i^2\}_{i\in\mathbb{N}}$ tais que

$$0 < t_i^2 - t_i^1 < \frac{1}{i} \quad e \quad |\dot{u}_k(t_i^2) - \dot{u}_k(t_i^1)| \geq \epsilon_0 \quad i \in \mathbb{N}. \tag{4.17}$$

Note que $\dot{u}_{k_i}(t_i^1)$, $\dot{u}_{k_i}(t_i^2) \in \mathbb{R}^N$ e $|\dot{u}_{k_i}(t_i^1)| \leq M_1$,$|\dot{u}_{k_i}(t_i^2)| \leq M_2$. Passando para duas subsequências se necessário, podemos assumir que

$$\dot{u}_{k_i}(t_i^1) \to w_1 \quad e \quad \dot{u}_{k_i}(t_i^2) \to w_2 \quad quando \quad i \to \infty. \tag{4.18}$$

Combinando (4.17) com (4.18),

$$|w_2 - w_1| \geq \epsilon_0 \tag{4.19}$$

Por outro lado,

$$||\dot{u}_{k_i}(t_i^2)|^{p-2}\dot{u}_{k_i}(t_i^2) - |\dot{u}_{k_i}(t_i^1)|^{p-2}\dot{u}_{k_i}(t_i^1)| = \Big|\int_{t_i^2}^{t_i^1} \frac{d}{ds}(|\dot{u}_k(s)|^{p-2}\dot{u}_k(s))ds\Big|$$

ou seja,

$$||\dot{u}_{k_i}(t_i^2)|^{p-2}\dot{u}_{k_i}(t_i^2) - |\dot{u}_{k_i}(t_i^1)|^{p-2}\dot{u}_{k_i}(t_i^1)| \leq \int_{t_i^2}^{t_i^1} |\frac{d}{ds}(|\dot{u}_k(s)|^{p-2}\dot{u}_k(s))|ds.$$

Usando (4.14) obtemos

$$||\dot{u}_{k_i}(t_i^2)|^{p-2}\dot{u}_{k_i}(t_i^2) - |\dot{u}_{k_i}(t_i^1)|^{p-2}\dot{u}_{k_i}(t_i^1)| \leq M_1(t_i^2 - t_i^1) \leq \frac{M_1}{i} \quad i \in \mathbb{N}$$

Passando ao limite de $i \to +\infty$ na última desigualdade encontramos

$$||w_2|^{p-2}w_2 - |w_1|^{p-2}w_1| = 0,$$

portanto $w_1 = w_2$, pois caso contrário, teriamos pelo Lema $B.2$ que

$$0 = \langle |w_2|^{p-2}w_2 - |w_1|^{p-2}w_1, w_1 - w_2\rangle \geq c_p|w_1 - w_2|^p \geq c_p\epsilon_0^p > 0 \quad (p \geq 2)$$

ou

$$0 = \langle |w_2|^{p-2}w_2 - |w_1|^{p-2}w_1, w_1 - w_2\rangle \geq c_p \frac{|w_1 - w_2|^2}{(|w_1| + |w_2|)^{2-p}} \quad (1 < p < 2)$$

obtendo um absurdo. Assim $\{\dot{u}_k(t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ é equicontínua.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $C_k^1 = C^1([-kT, kT], \mathbb{R}^N)$ com a seguinte norma

$$\|u\|_{C_k^1} = \max_{t\in[-kT,kT]}[|\dot{u}(t)| + |u(t)|]$$

Afirmamos que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente $\{u_{k_j}\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $C^1_{Loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$. Considere $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ restrita a $[-T, T]$. Sabemos que $\{u_k\}$ e $\{\dot{u}_k\}$ são uniformente limitados e $\{\dot{u}_k\}$ é equicontínuo,

$$|u_k(t) - u_k(s)| = \left|\int_s^t \dot{u}_k(\tau)d\tau\right| \leq \int_s^t |\dot{u}_k(\tau)|d\tau \leq M_2|t - s|.$$

Logo $\{u_k\}$ também é equicontínua e pelo Teorema de Arzelá-Ascoli existe uma subsequência $\{u_k^1\}$ de $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $u^1 \in C([-T, T], \mathbb{R}^N)$ e $v^1 \in C([-T, T], \mathbb{R}^N)$ tais que

$$\|u_k^1 - u^1\|_{C([-T,T],\mathbb{R}^N)} \to 0 \ \ e \ \ \|\dot{u}_k^1 - v^1\|_{C([-T,T],\mathbb{R}^N)} \to 0 \ \ quando \ \ k \to \infty. \qquad (4.20)$$

Observe que para $t \in [-T, T]$,

$$u_k^1(t) = u_k^1(-T) + \int_{-T}^t \dot{u}_k^1(s)ds, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Logo, passando ao limite em k e usando o fato da convergência ser uniforme, ficamos com

$$u^1(t) = u^1(-T) + \int_{-T}^t v^1(s)ds, \quad \forall t \in [-T, T],$$

mostrando que $v^1(t) = \dot{u}(t)$ para $t \in [-T, T]$ e $u^1 \in C_1^1$. Além disso segue de (4.20) que

$$\|u_k^1 - u^1\|_{C_1^1} \to 0 \ \ quando \ \ k \to \infty.$$

Segundo, seja $\{u_k^1\}$ restrita a $[-2T, 2T]$, logo $\{u_k^1\}$ e $\{\dot{u}_k^1\}$ são uniformemente limitadas e equicontínuas e do Teorema de Arzelá-Ascoli existem subsequências $\{u_k^2\} \subset \{u_k^1\}$ satisfazendo $u^2 \in C_2^1$ tal que

$$\|u_k^2 - u^2\|_{C_2^1} \to 0 \ \ quando \ \ k \to \infty$$

Seguindo este metódo iterativo. Em geral existe $\{u_k^j\} \subset \{u_k^{j-1}\}$ e $u^j \in C_j^1$ tal que

$$\|u_k^j - u^j\|_{C_j^1} \to 0 \ \ quando \ \ k \to \infty, \quad j = 1, 2, \ldots \qquad (4.21)$$

Além disso, temos

$$\|u^{j+1} - u^j\|_{C^1_j} = \|u^{j+1} - u_k^{j+1} + u_k^{j+1} - u_k^j + u_k^j - u^j\|_{C^1_j}$$

de (4.21), $\{u_k^j\} \subset \{u_k^{j-1}\}$ e passando ao limite em k

$$\|u^{j+1} - u^j\|_{C^1_j} \leq \|u^{j+1} - u_k^{j+1}\|_{C^1_j} + \|u_k^j - u^j\|_{C^1_j} + \|u_k^{j+1} - u_k^j\|_{C^1_j} \to 0.$$

Logo

$$u^{j+1}(t) = u^j(t) \;\; \forall \;\; t \in [-jT, jT], \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{4.22}$$

Seja

$$u_0(t) = u^j(t) \;\; \forall \;\; t \in [-jT, jT], \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{4.23}$$

Então

$$u_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \text{ e } u^j \to u_0 \text{ quando } j \to \infty.$$

Agora, considere a sequência diagonal $\{u_{k_j}\}$ consistindo de $u_1^1, u_2^2, \ldots$ para qualquer $j \in \mathbb{N}$, desde que $\{u_j^j\}_{i=j}^{\infty} \subset \{u_j^k\}$ segue de (4.21) e (4.23) que

$$\|u_j^j - u_0\|_{C^1_j} = \|u_j^j - u^j\|_{C^1_j} \to 0 \text{ quando } j \to \infty \;\; j = 1, 2, \ldots.$$

Isto é,

$$u_{k_j} \to u_0 \;\; quando \;\; j \to \infty, \;\; em \;\; C^1_{Loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N). \tag{4.24}$$

Finalizando a demonstração.

■

Lema 4.5 *Seja $u_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ determinado pelo Lema 4.4. Então u_0 é uma solução de (4.1) tal que $u_0(t) \to 0$ e $\dot{u}_0(t) \to 0$ quando $|t| \to \infty$.*

Demonstração: Vejamos que u_0 satisfaz (4.1). Pelos Lemas 4.1 e 4.4

$$\frac{d}{dt}(|\dot{u}_{k_j}(t)|^{p-2}\dot{u}_{k_j}(t)) = \nabla F(t, u_{k_j}(t)) + f_{k_j}(t) \tag{4.25}$$

$t \in [-k_jT, k_jT]$ $j \in \mathbb{N}$. Considere $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $[-k_jT, k_jT] \supset [a, b]$ e

$$\frac{d}{dt}(|\dot{u}_{k_j}(t)|^{p-2}\dot{u}_{k_j}(t)) = \nabla F(t, u_{k_j}(t)) + f(t) \;\; \forall t \in [a, b] \tag{4.26}$$

Integrando (4.26) de a até $t \in [a,b]$, temos

$$|\dot{u}_{k_j}(t)|^{p-2}\dot{u}_{k_j}(t) - |\dot{u}_{k_j}(a)|^{p-2}\dot{u}_{k_j}(a) = \int_a^t [\nabla F(t, u_{k_j}(t)) + f(t)]ds. \tag{4.27}$$

Por (4.24), $u_{k_j} \to u_0$ uniformemente sobre $C^1[a,b]$ quando $j \to \infty$ e desta forma por(4.27), temos

$$|\dot{u}_0(t)|^{p-2}\dot{u}_0(t) - |\dot{u}_0(a)|^{p-2}\dot{u}_0(a) = \int_a^t [\nabla F(t, u_0(t)) + f(t)]ds \ \ \forall t \in [a,b]. \tag{4.28}$$

Desde que a, b são arbitrários (4.28), mostra que $u_0(t)$ é uma solução de (4.1). Mostraremos, agora, que $u_0(t) \to 0$ quando $|t| \to \infty$. De (4.3) e (4.12), obtemos

$$\int_{-kT}^{kT} \frac{1}{p}|\dot{u}_k(t)|^p dt + b\int_{-kT}^{kT} |u_k(t)|^\mu dt \leq M\Big(\frac{M}{b}\Big)^{1/(\mu-1)} \equiv M_3 \tag{4.29}$$

$k \in \mathbb{N}$. Para todo $l \in \mathbb{N}$ tal que $l < k_j$, existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $j > j_1$

$$\int_{-lT}^{lT} \frac{1}{p}|\dot{u}_{k_j}(t)|^p dt + b\int_{-lT}^{lT} |u_{k_j}(t)|^\mu dt \leq \int_{-k_jT}^{k_jT} |\dot{u}_{k_j}(t)|^p dt + b\int_{-k_jT}^{k_jT} |u_{k_j}(t)|^\mu dt \leq M_3.$$

Usando novamente (4.24), segue que para cada $l \in \mathbb{N}$

$$\int_{-lT}^{lT} \frac{1}{p}|\dot{u}_0(t)|^p dt + b\int_{-lT}^{lT} |u_0(t)|^\mu dt \leq M_3.$$

Fazendo $l \to \infty$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big[\frac{1}{p}|\dot{u}_0(t)|^p dt + b|u_0(t)|^\mu dt\Big] \leq M_3, \tag{4.30}$$

consequentemente

$$\int_{|t|\geq r} \Big[\frac{1}{p}|\dot{u}_0(t)|^p + b|u_0(t)|^\mu\Big] dt \to 0 \ \ \textit{quando} \ \ r \to \infty. \tag{4.31}$$

Por (4.9), obtemos a desigualdade

$$|u_0(t)| \leq 2^{-1/\mu}\Big(\int_{t-1}^{t+1} |u_0(s)|^\mu ds\Big)^{1/\mu} + \Big(\int_{t-1}^{t+1} |\dot{u}_0(s)|^p ds\Big)^{1/p}, \tag{4.32}$$

que combinada com (4.31) implica que

$$u_0(t) \to 0 \text{ quando } |t| \to \infty\ .$$

Finalmente mostraremos que

$$\dot{u}_0(t) \to 0 \ \ \textit{quando} \ \ |t| \to \infty. \tag{4.33}$$

De (4.11) e (4.24)

$$|u_0(t)| \leq c \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Como u_0 satisfaz (4.1), temos

$$\left|\frac{d}{dt}(|\dot{u}_0(t)|)^{p-2}\dot{u}_0(t)\right| \leq |\nabla F(t, u_0(t))| + |f(t)| \leq \sup_{(t,x)\in[0,T]\times[-c,c]} |\nabla F(t,x)| + \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| = M_1.$$

Se (4.33) não é verdadeiro, existe $\epsilon_0 \in (0, 1/2)$ e uma sequência $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ com $|t_1| < |t_2| < |t_3| < \ldots,\ |t_k| + 1 < |t_{k+1}|$, $k = 1, 2, \ldots$ e

$$|\dot{u}_0(t_k)| \geq (2\epsilon_0)^{1/(p-1)} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Para $t \in \left[t_k, t_k + \frac{\epsilon_0}{1+M_1}\right]$, tem-se

$$|\dot{u}_0(t)|^{p-1} = \left||\dot{u}_0(t_k)|^{p-2}\dot{u}_0(t_k) + \int_{t_k}^{t} \frac{d}{dt}(|\dot{u}_0(s)|)^{p-2}\dot{u}_0(s)ds\right|$$

ou seja,

$$|\dot{u}_0(t)|^{p-1} \geq |\dot{u}_0(t_k)|^{p-1} - \int_{t_k}^{t} \left|\frac{d}{dt}(|\dot{u}_0(s)|)^{p-2}\dot{u}_0(s)\right|ds$$

mostrando que

$$|\dot{u}_0(t)|^{p-1} \geq 2\epsilon_0 - M_1\Big(t_k + \frac{\epsilon_0}{M_1+1} - t_k\Big) \geq \epsilon_0.$$

Note que pelo fato de $\epsilon \in (0, 1/2)$ e dos intervalos $\left[t_k, t_k + \frac{\epsilon_0}{1+M_1}\right]$ serem disjuntos, podemos concluir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{u}_0(t)|^p dt \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_k}^{t_k+\epsilon_0/(1+M_1)} |\dot{u}_0(t)|^p dt = \infty$$

contradizendo (4.30), logo (4.33) é verdadeiro mostrando assim que nossa solução é homoclínica.

$\blacksquare$

4.1 Soluções Homoclínicas para um Sistema não Linear de Segunda Ordem com o p-Laplaciano

Nesta seção iremos seguir as ideias contidas em [4]. O método apresentado será semelhante ao dois problemas já estudados, a diferença é que enfraqueceremos a condição de coercividade sobre $F(t, x)$. As condições sobre F e f são as seguintes:

(C1) $F \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ é T-periódica com respeito a t, $T > 0$ é uma constante.

(C2) Existe uma constante $\rho > \frac{1-\mu}{\mu} T^{(1-\mu)/\mu} + \frac{T(p-1)}{p}$ tal que

$$F(t, x) \geq F(t, 0) + b_0 |x|^\mu$$

para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ com $|x| \leq \rho$, onde $b_0 > 0$ e $\mu > 1$ são constantes.

(C3) $f \not\equiv 0$ é uma função contínua e limitada tal que $\int_R |f(t)|^{\mu/\mu-1} dt < +\infty$.

Suponha que

$$\frac{\rho - \frac{\mu-1}{\mu} T^{(1-\mu)/\mu} - \frac{T(p-1)}{p}}{max\{\frac{1}{\mu}, \frac{1}{p}\}} min\{\frac{1}{p}, \frac{b_0}{2}\} - \frac{b_0}{2}(\mu - 1)\left[\frac{2M}{\mu b_0}\right]^{\mu/\mu-1} > 0 \tag{4.34}$$

onde $M = (\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^{\mu/\mu-1} dt)^{\mu-1/\mu}$.

Lema 4.6 *Seja X um espaço de Banach reflexivo e $\Omega \subset X$ um conjunto convexo fechado e limitado. Suponha que $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é um funcional f.s.c.i. e que existe um ponto $x_0 \in \Omega - \partial\Omega$ tal que*

$$\varphi(x) > \varphi(x_0), \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Então existe $x^* \in \Omega - \partial\Omega$ tal que

$$\varphi(x^*) = \inf_{u \in \Omega} \varphi(u).$$

Demonstração: Pelo Corolário $B.2$, Ω é compacto na topologia fraca. Pelo Teorema 1.1 existe $x^* \in \Omega$ tal que

$$\varphi(x^*) = \inf_{u \in \Omega} \varphi(u).$$

Desde que

$$\varphi(x) > \varphi(x_0) \;\; \forall x \in \partial\Omega$$

temos que $x^* \notin \partial\Omega$, pois caso contrário

$$\inf_{u \in \Omega} \varphi(u) = \varphi(x^*) > \varphi(x_0)$$

o que é uma contradição. Portanto $x^* \in \Omega - \partial\Omega$.

■

Lema 4.7 *Considere que as hipóteses* $(C1)$-$(C3)$ *e a condição* (4.34) *sejam verdadeiras. Então para cada* $k \in \mathbb{N}$, *a equação*

$$\frac{d}{dt}[|\dot{u}(t)|^{p-2}\dot{u}(t)] = \nabla F(t, u(t)) + f_k(t) \tag{4.35}$$

possui uma solução $2kT$*-periódica* $u_k \in E_k$ *tal que*

$$\int_{-kT}^{kT} |\dot{u}(t)|^p dt + \int_{-kT}^{kT} |\dot{u}(t)|^\mu dt < \frac{\rho - \frac{\mu-1}{\mu}T^{(1-\mu)/\mu} - \frac{T(p-1)}{p}}{max\{\frac{1}{\mu}, \frac{1}{p}\}}, \tag{4.36}$$

onde ρ *é uma constante determinada por (C2) e* (4.34)*. Além disso,*

$$\frac{\rho - \frac{\mu-1}{\mu}T^{(1-\mu)/\mu} - \frac{T(p-1)}{p}}{max\{\frac{1}{\mu}, \frac{1}{p}\}}$$

é uma constante independente de k.

Demonstração: Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $\varphi_k : E_k \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi_k(u) = \int_{-kT}^{kT} \Big[\frac{1}{p}|\dot{u}(t)|^p + F(t, u(t)) + (f_k(t), u(t))\Big] dt.$$

Então $\varphi_k \in C^1(E_k, \mathbb{R})$ e mostra-se que

$$\varphi_k'(u)v = \int_{-kT}^{kT} [(|\dot{u}(t)|^{p-2}\dot{u}(t), \dot{v}(t)) + (\nabla F(t, u(t)), v(t)) + (f_k(t), u(t))]dt \quad \forall v \in E_k.$$

Vejamos que φ_k possui um ponto crítico. Sejam

$$C_0 = \int_0^T F(t, 0)dt \text{ e } \Omega = \Big\{u \in E_k : \int_{-kT}^{kT} |\dot{u}(t)|^p dt + \int_{-kT}^{kT} |u(t)|^\mu dt \leq \rho_1\Big\},$$

onde

$$\rho_1 = \frac{\rho - \frac{\mu-1}{\mu}T^{(1-\mu)/\mu} - \frac{T(p-1)}{p}}{max\{\frac{1}{\mu}, \frac{1}{p}\}} \tag{4.37}$$

e $\rho > 0$ é a constante definida pela hipótese (C2) e (4.34). Vejamos que Ω é um subconjunto fechado de E_k. Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ e $x_n \to x_0$ em E_k. Como

$$\|x_n - x_0\|_{L^\infty_{2kT}} \leq c\|x_n - x_0\|_{E_k}$$

temos $x_n \to x_0$ em L^∞_{2kT}, implicando que

$$\int_{-kT}^{kT} |x_n(t)|^p dt \to \int_{-kT}^{kT} |x_0(t)|^p dt \tag{4.38}$$

e

$$\int_{-kT}^{kT} |x_n(t)|^\mu dt \to \int_{-kT}^{kT} |x_0(t)|^\mu dt. \tag{4.39}$$

Além disso, de $x_n \to x_0$ em E_k, temos
$$\int_{-kT}^{kT} |\dot{x}_n(t)|^p dt \to \int_{-kT}^{kT} |\dot{x}_0(t)|^p dt$$
Disto e de (4.39),
$$\int_{-kT}^{kT} |\dot{x}_n(t)|^p dt + \int_{-kT}^{kT} |x_n(t)|^\mu dt \to \int_{-kT}^{kT} |\dot{x}_0(t)|^p dt + \int_{-kT}^{kT} |x_0(t)|^\mu dt.$$
Como $\{x_n\} \subset \Omega$,
$$\int_{-kT}^{kT} |\dot{x}_0(t)|^p dt + \int_{-kT}^{kT} |x_0(t)|^\mu dt \leq \rho_1.$$
Logo $x_0 \in \Omega$, implicando que Ω é um subconjunto fechado. Note que a limitação de Ω decorre diretamente da seguinte equivalência
$$\|u_n\|_{E_k} \to \infty \Leftrightarrow \int_{-kT}^{kT} |\dot{u}_n(t)|^p dt + \int_{-kT}^{kT} |u_n(t)|^\mu dt \to \infty$$
que já foi apresentada no Lema 4.1. Vejamos agora, que Ω é convexo, isto é, que
$$\{(1-t)x + ty; 0 \leq t \leq 1\} \subset \Omega \quad \forall x, y \in \Omega,$$
ou seja,
$$\int_{-kT}^{kT} |(1-t)\dot{x} + t\dot{y}|^p dt + \int_{-kT}^{kT} |(1-t)x + ty|^\mu dt \leq \rho_1.$$
Sendo a função $f(t) = t^\eta$ para $\eta > 1$ convexa em $[0, \infty)$, temos que
$$\int_{-kT}^{kT} |(1-t)\dot{x} + t\dot{y}|^p dt + \int_{-kT}^{kT} |(1-t)x + ty|^\mu dt \leq (1-t) \int_{-kT}^{kT} [|\dot{x}|^p + |x|^\mu] dt$$
$$+t \int_{-kT}^{kT} [|\dot{y}|^p + |y|^\mu] dt \leq \rho_1$$
mostrando assim que Ω é convexo. Portanto Ω é um subconjunto fechado limitado e convexo de E_k. Se $u \in \partial\Omega$ então
$$\int_{-kT}^{kT} |\dot{u}(t)|^p dt + \int_{-kT}^{kT} |u(t)|^\mu dt = \rho_1.$$
Por (4.10)
$$\|u\|_{L^\infty_{[2kT]}} \leq T^{-1/\mu} \Big(\int_{-kT}^{kT} |u(s)|^\mu ds \Big)^{1/\mu} + T^{(p-1)/p} \Big(\int_{-kT}^{kT} |\dot{u}(s)|^p ds \Big)^{1/p},$$
donde temos
$$\|u\|_{L^\infty_{[2kT]}} \leq \frac{1}{\mu} \int_{-kT}^{kT} |u(s)|^\mu ds + \frac{1}{p} \int_{-kT}^{kT} |\dot{u}(s)|^p ds + \frac{\mu - 1}{\mu} T^{1/1-\mu} + \frac{(p-1)T}{p}$$
ou seja,
$$\|u\|_{L^\infty_{[2kT]}} \leq max\{1/\mu, 1/p\}\rho_1 + \frac{\mu - 1}{\mu} T^{1/1-\mu} + \frac{(p-1)T}{p}.$$
Aqui usamos a seguinte desigualdade

$$ab \leq \frac{a^\mu}{\mu} + \frac{b^{\frac{\mu}{\mu-1}}}{\frac{\mu}{\mu-1}} \text{ onde } \frac{1}{\mu} + \frac{\mu-1}{\mu} = 1.$$

Substituindo ρ_1 em (4.37), encontramos

$$\|u\|_{L^\infty_{[2kT]}} \leq \rho \ \ \forall u \in \partial\Omega.$$

Com isso podemos usar $(C2)$ para $u \in \partial\Omega$, obtendo

$$\varphi_k(u) \geq \int_{-kT}^{kT} [(1/p)|\dot{u}(t)|^p + F(t,0) + b_0|u(t)|^\mu]dt - M\Big(\int_{-kT}^{kT} |u(t)|^\mu dt\Big)^{1/\mu}.$$

Assim,

$$\varphi_k(u) \geq \int_{-kT}^{kT} (1/p)|\dot{u}(t)|^p dt + \int_{-kT}^{kT} \frac{b_0}{2}|u(t)|^\mu dt + \int_{-kT}^{kT} \frac{b_0}{2}|u(t)|^\mu dt - M\Big(\int_{-kT}^{kT} |u(t)|^\mu dt\Big)^{1/\mu}$$
$$+2kC_0,$$

ou seja,

$$\varphi_k(u) \geq min\Big\{\frac{1}{p}, \frac{b_0}{2}\Big\}\Big(\int_{-kT}^{kT} (1/p)|\dot{u}(t)|^p dt + \int_{-kT}^{kT} |u(t)|^\mu dt\Big) + \frac{b_0}{2}\int_{-kT}^{kT} |u(t)|^\mu dt$$
$$-M\Big(\int_{-kT}^{kT} |u(t)|^\mu dt\Big)^{1/\mu} + 2kC_0. \tag{4.40}$$

Usando a seguinte desigualdade

$$\frac{a}{2}x^m - Mx \geq -\frac{a}{2}(m-1)\Big(\frac{2M}{am}\Big)^{m/(m-1)} \tag{4.41}$$

para todo $x \in [0, \infty)$, onde $a > 0$, $m > 1$ são constantes. Segue que para todo $u \in \partial\Omega$

$$\varphi_k(u) \geq min\Big\{\frac{1}{p}, \frac{b_0}{2}\Big\}\Big(\int_{-kT}^{kT} (1/p)|\dot{u}(t)|^p dt + \int_{-kT}^{kT} |u(t)|^\mu dt\Big) - \frac{b_0}{2}(\mu-1)\Big(\frac{2M}{a\mu}\Big)^{\frac{\mu}{(\mu-1)}} + 2kC_0$$

isto é,

$$\varphi_k(u) \geq min\Big\{\frac{1}{p}, \frac{b_0}{2}\Big\}\frac{\rho - \frac{\mu-1}{\mu}T^{(1-\mu)/\mu} - \frac{T(p-1)}{p}}{max\{\frac{1}{\mu}, \frac{1}{p}\}} - \frac{b_0}{2}(\mu-1)\Big(\frac{2M}{a\mu}\Big)^{\frac{\mu}{(\mu-1)}} + 2kC_0$$

e por (4.34) temos

$$\varphi_k(u) > 2kC_0 = \varphi_k(0).$$

Pelo Lema 4.6, temos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe um ponto

$$u_k \in \Omega_1 := \Big\{x \in E_k : \int_{-kT}^{kT} (1/p)|\dot{u}(t)|^p dt + \int_{-kT}^{kT} |u(t)|^\mu dt < \rho_1\Big\}$$

tal que

$$\varphi_k(u_k) = \inf_{u \in \Omega} \varphi(u).$$

Desde que Ω_1 é um subconjunto aberto de E_k, segue que

$$\varphi'_k(u_k) = 0,$$

finalizando a demonstração.

■

Lema 4.8 *Suponha que as seguintes hipóteses sejam verdadeiras:*

(C1) $F \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ é T- periódica com respeito a t, $T > 0$ é uma constante.

(D2) Existe uma constante $\rho > 0$ tal que

$$F(t,x) \geq F(t,0) + b_0|x|^p$$

para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ com $|x| \leq \rho$ onde $b_0 > 0$ é uma constante.

(D3) $f \not\equiv 0$ é uma função contínua limitada tal que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^{p/p-1} dt < \infty$$

e que

$$min\{1/p, b_0/2\}\rho^p(T^{1-q} + T)^{1-p} - \frac{b_0}{2}(p-1)\Big(\frac{2M_0}{pb_0}\Big)^{\frac{p}{p-1}} > 0 \tag{4.42}$$

onde

$$M_0 = \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^{p/p-1}\Big)^{(p-1)/p}.$$

Então para cada $k \in \mathbb{N}$, a equação (4.35) *possui uma solução $2kT$-periódica $u_k \in E_k$ tal que*

$$\|u_k\|_{E_k} < \rho(T^{1-q} + T)^{-\frac{1}{q}} \tag{4.43}$$

onde $\rho > 0$ é uma constante determinada por (D2) e (4.42)*, $q > 1$ é uma constante tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Demonstração: Considere

$$\Gamma = \{x \in E_k : \|x\|_{E_k} \leq \rho(T^{1-q} + T)^{-\frac{1}{q}}\}.$$

Do mesmo modo que no Lema 4.7 temos que Γ é um subconjunto convexo, limitado e fechado de E_k. Resta então mostrar que para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_k(u) > \varphi_k(0)$$

para todo $u \in \partial\Gamma$. Se $u \in \partial\Gamma$, então $\|x\|_{E_k} = \rho(T^{1-q} + T)^{-\frac{1}{q}}$. Por (4.10), temos

$$\|u\|_{L^\infty_{2kT}} \leq (T^{1-q} + T)^{\frac{1}{q}} \|u\|_{E_k} = (T^{1-q} + T)^{\frac{1}{q}} \rho (T^{1-q} + T)^{-\frac{1}{q}} = \rho \tag{4.44}$$

Além disso para todo $u \in \partial\Gamma$, e devido a (4.44) podemos usar (D2). Logo

$$\varphi_k(u) \geq \int_{-kT}^{kT} (1/p)|\dot{u}(t)|^p dt + \int_{-kT}^{kT} [F(t,0) + b_0|u(t)|^p] dt + \int_{-kT}^{kT} (f_k(t), u(t)) dt.$$

Donde

$$\varphi_k(u) \geq min\{1/p, b_0/2\}\|u\|^p_{E_k} + \frac{b_0}{2}\int_{-kT}^{kT} |u(t)|^p dt - M_0\Big(\int_{-kT}^{kT} |u(t)|^p\Big)^{1/p} + 2kC_0$$

e pela desigualdade (4.41),

$$\varphi_k(u) \geq min\{1/p, b_0/2\}\|u\|^p_{E_k} - \frac{b_0}{2}(p-1)\Big(\frac{2M_0}{b_0 p}\Big)^{p/(p-1)} + 2kC_0$$

isto é,

$$\varphi_k(u) \geq min\{1/p, b_0/2\}\rho^p(T^{1-q} + T)^{1-p} - \frac{b_0}{2}(p-1)\Big(\frac{2M_0}{b_0 p}\Big)^{p/(p-1)} + 2kC_0$$

e usando (4.42)

$$\varphi_k(u) \geq 2kC_0 = \varphi_k(0).$$

Usando o Lema 4.6 temos a conclusão.

■

Teorema 4.1 *Se (C1)-(C3) e* (4.34) *são satisfeitas, então* (4.1) *possui uma solução homoclínica não trivial.*

Demonstração: Pelo Lema 4.4 temos que u_{k_j} é uma solução $2kT$-periódica para (4.35)

$$\frac{d}{dt}[|\dot{u}_{k_j}(t)|^{p-2}\dot{u}_{k_j}(t)] = \nabla F(t, u_{k_j}(t)) + f_{k_j}(t). \tag{4.45}$$

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Então para $j > j_0$ e $[a,b] \subset [-k_jT, k_jT]$ e integrando de a até $t \in [a,b]$, temos

$$|\dot{u}_{k_j}(t)|^{p-2}\dot{u}_{k_j}(t) - |\dot{u}_{k_j}(a)|^{p-2}\dot{u}_{k_j}(a) = \int_a^t [\nabla F(t, u_{k_j}(s)) + f(s)] ds$$

e desde que a convegência é uniforme temos

$$|\dot{u}_0(t)|^{p-2}\dot{u}_0(t) - |\dot{u}_0(a)|^{p-2}\dot{u}_0(a) = \int_a^t [\nabla F(t, u_0(s)) + f(s)]ds.$$

Como a e b são arbitrários temos que $u_0(t)$ é uma solução de (4.1). Para $i \in \mathbb{N}$ se $k_j > i$, temos

$$\int_{-iT}^{iT} [|u_{k_j}|^\mu + |\dot{u}_{k_j}|^p]dt \leq \int_{-k_jT}^{k_jT} [|u_{k_j}|^\mu + |\dot{u}_{k_j}|^p]dt < \rho_1.$$

Passando ao limite de $i \to +\infty$ e $j \to +\infty$, ficamos com

$$\int_{-\infty}^{\infty} [|u_0|^\mu + |\dot{u}_0|^p]dt \leq \rho_1$$

Consequentemente

$$\int_{|t|\geq r} [|\dot{u}_0|^p dt, \int_{|t|\geq r} [|u_0|^\mu dt \to 0$$

quando $r \to \infty$. Usando (4.10) concluímos que $u_0(t) \to 0$ quando $|t| \to \infty$. O restante da demonstração é análogo ao que foi feito no Lema 4.5.

$\blacksquare$

O Teorema 4.1 vale se trocarmos (C1)-(C3) por (C1), (D2) e (D3) e (4.34) por (4.42).

Capítulo 5

Soluções Homoclínicas para Sistemas Hamiltonianos Superquadráticos sem a Condição de Periodicidade

Até o presente momento só estudamos Sistemas Hamiltonianos com potencial periódico e obtemos solução através de minimização. Neste capítulo iremos retirar as hipóteses de periódicidade sobre a F e iremos encontrar uma solução homoclínica através do Teorema do Passo da Montanha com a condição de Cerami. Neste capítulo iremos seguir as idéias de Adel Daouas ver [5]. Consideraremos o sistema de segunda ordem

$$\ddot{q}(t) + \nabla V(t, q(t)) = f(t) \tag{5.1}$$

onde $V(t,x) = -K(t,x) + W(t,x)$, $\nabla V(t,x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)(t,x)$, $K, W : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ é uma função contínua e limitada. As condições sobre W e K são as seguintes:

(H1) Existem $\gamma \in (1,2]$, $a > 0$ tal que

$$K(t,x) \geq a|x|^\gamma \ \ \forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N.$$

(H2) Existe $\rho \in (1,2]$ tal que

$$K(t,x) \leq (x, \nabla K(t,x)) \leq \rho K(t,x) \ \ \forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N.$$

(H3) $W(t,0) \equiv 0$ e $\nabla W(t,x) = o(|x|)$ quando $x \to 0$ uniformemente em t, isto é,

$$\frac{\nabla W(t,x)}{|x|} \to 0 \text{ quando } x \to 0.$$

(H4) Existem constantes $r > 2$ e $b > 0$ tais que

$$W(t,x) \leq b|x|^r, \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N.$$

(H5) Existem constantes $\mu > 1$, $c > 0$ e $\beta \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ tal que $\mu > r - \gamma$ e

$$(\nabla W(t,x), x) - 2W(t,x) \geq c|x|^\mu - \beta(t) \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N.$$

(H6) $a > b$, $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{\mu}{\mu-1}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ e $\|f\|_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)} < \sqrt{2} min(1/4, (a - b/2))$.

Além da condição de superquadráticidade sobre W, isto é,

$$W(t,x)/|x|^2 \to +\infty \tag{5.2}$$

quando $|x| \to \infty$ uniformemente em $t \in [-T_0, T_0]$.

Se estas condições são satisfeitas mostraremos no Lema 5.3 que o sistema (5.1) possui uma solução homoclínica não trivial $q \in W^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$.

Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} \ddot{q}(t) + \nabla V(t, q(t)) = f_T(t) & t \in [-T, T] \\ q(-T) = q(T) = 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

onde f_T é a função definida sobre $\mathbb{R}$ por

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t), & se \quad t \in [-T, T] \\ 0, & se \quad t \in \mathbb{R} - [-T, T]. \end{cases}$$

Para cada $T > 0$, seja $E_T = W^{1,2}([-T,T], \mathbb{R}^N)$ onde $W^{1,2}([-T,T], \mathbb{R}^N)$ é o espaço de Hilbert das funções absolutamente contínuas com, $q(-T) = q(T) = 0$ e $\dot{q} \in L^2([-T,T], \mathbb{R}^N)$ com a seguinte norma

$$\|q\| = \Big(\int_{-T}^{T} [|q(t)|^2 + |\dot{q}(t)|^2] dt \Big)^{1/2}.$$

Além disso, para $\alpha \geq 1$, seja $L_T^\alpha = L^\alpha([-T,T], \mathbb{R}^N)$ e $L_T^\infty = L^\infty([-T,T], \mathbb{R}^N)$ com as normas usuais. Relembre de (3.14) que se $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ é uma aplicação contínua tal que $\dot{q}$ é de quadrado integrável a desigualdade

$$\|q\|_{L_T^\infty} \leq c\|q\|$$

é válida com a constante $c = \sqrt{2}$. Ao longo deste capítulo assumiremos esta condição cumprida. Seja $\eta : E_T \to [0, +\infty)$ dado por

$$\eta(q) = \Big(\int_{-T}^{T} [|\dot{q}(t)|^2 dt + 2K(t, q(t))] \Big)^{1/2}$$

e $I : E_T \to \mathbb{R}$ definida por

$$I(q) = \int_{-T}^{T} [\frac{1}{2}|\dot{q}(t)|^2 - V(t, q(t))]dt + \int_{-T}^{T} (f_T(t), q(t))dt.$$

Usando a definição de V, podemos escrever $I(q)$ em função de $\eta(q)$

$$I(q) = \int_{-T}^{T} [\frac{1}{2}|\dot{q}(t)|^2 + K(t, q(t)) - W(t, q(t))]dt + \int_{-T}^{T} (f_T(t), q(t))dt$$

ou seja,

$$I(q) = \frac{1}{2}\eta^2(q) - \int_{-T}^{T} W(t, q(t)) + \int_{-T}^{T} (f_T(t), q(t))dt. \tag{5.4}$$

Então $I \in C^1(E_T, \mathbb{R})$ e para $q, v \in E_T$ temos

$$I'(q)v = \int_{-T}^{T} [(\dot{q}(t), v(t)) - (\nabla V(t, q(t)), v(t))]dt + \int_{-T}^{T} (f_T(t), q(t))dt. \tag{5.5}$$

Consequentemente pontos críticos de I são soluções clássicas do Problema (5.3). Obteremos pontos críticos usando o Teorema do Passo da Montanha. Note também que (H3) implica que existe $0 < \rho_0 < 1$ tal que

$$W(t, x) \leq \frac{a}{2}|x|^2, \quad \forall |x| \leq \rho_0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.6}$$

De fato, segue do Teorema do Valor Médio que que existe $\tau \in (0, 1)$ tal que

$$W(t, x) - W(t, 0) \leq (\nabla W(t, \tau x), x)$$

logo por (H3)

$$W(t, x) \leq |\tau x| \frac{|\nabla W(\tau x)|}{|\tau x|}|x| \leq \frac{a}{2}|x|^2.$$

Lema 5.1 *suponha (H2) verdadeira. Então*

$$K(t, x) \leq K\left(t, \frac{x}{|x|}\right)|x|^\rho$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ *e* $|x| \geq 1$.

Demonstração : Defina

$$F(r) = K(t, rq)$$

e observe que

$$F'(r) = (q, \nabla K(t, rq)).$$

Segue de (H2),

$$rF'(r) = (rq, \nabla K(t, rq)) \leq \rho K(t, rq) = \rho F(r),$$

donde temos,

$$\frac{F'(r)}{F(r)} \leq \frac{\rho}{r}.$$

Integrando de 1 até t, obtemos

$$\int_1^t \frac{F'(r)}{F(r)} dr \leq \rho \int_1^t \frac{dr}{r}$$

ou seja,

$$ln(F(t)) - ln(F(1)) \leq lnt^{\rho}.$$

Implicando em

$$\frac{F(t)}{F(1)} \leq t^{\rho}.$$

Desta forma

$$K(t, rq) \leq K(t, q) r^{\rho},$$

de onde segue

$$K(t, x) = K(t, |x| \frac{x}{|x|}) \leq K\left(t, \frac{x}{|x|}\right) |x|^{\rho}.$$

■

Lema 5.2 *Suponha (H1) verdadeira. Então para todo* $q \in E_T - \{0\}$,

$$\eta^2(q) \geq min\{\|q\|^2, 2^{\gamma/2} a \|q\|^{\gamma}\}.$$

Demonstração: Da definição de η e por (H1),

$$\eta^2(q) = \int_{-T}^{T} [|\dot{q}(t)|^2 dt + 2K(t, q(t))] \geq \int_{-T}^{T} [|\dot{q}(t)|^2 dt + 2a|q(t)|^{\gamma}] dt.$$

Note que

$$\int_{-T}^{T} |q(t)|^{\gamma} dt = \int_{-T}^{T} |q(t)|^{\gamma - 2} |q(t)|^2 dt$$

logo de (3.14)

$$\int_{-T}^{T} |q(t)|^{\gamma} dt \geq (\sqrt{2}\|q\|)^{\gamma-2} \int_{-T}^{T} |q(t)|^2 dt,$$

o que implica

$$\eta^2(q) \geq min\{1, 2^{\gamma/2} a \|q\|^{\gamma-2}\} \|q\|^2,$$

ou seja,

$$\eta^2(q) \geq min\{\|q\|^2, 2^{\gamma/2} a \|q\|^{\gamma}\}.$$

■

Lema 5.3 *Suponha que as condições de (H1)-(H6) sejam satisfeitas. Então o problema* (5.3) *possui uma solução não trivial.*

Demonstração: Provaremos que o funcional I satisfaz todas as condições do Teorema do Passo da Motanha com a condição Cerami (C). O funcional I satisfaz a condição (C), isto é, para toda constante c e uma sequência $\{q_n\} \subset E_T$ tal que

$$I(q_n) \to c \ \ e \ \ (1 + \|q_n\|)I'(q_n) \to 0$$

quando $n \to \infty$, $\{q_n\}$ possui uma subsequência convergente. Observe que devido a condição de Cerami como $I'(q_n)$ é contínua temos

$$|I'(q_n)q_n| \leq |I'(q_n)|\|q_n\| \leq |I'(q_n)|(1 + \|q_n\|) \to 0$$

quando $n \to \infty$, logo $I'(q_n)q_n \to 0$. Suponha que $\{q_n\} \subset E_T$ é uma sequência (C) de I, então existe $M_T > 0$ tal que

$$M_T \geq 2I(q_n) - I'(q_n)q_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto

$$2I(q_n) - I'(q_n)q_n = 2\Big(\int_{-T}^{T}[\frac{1}{2}|\dot{q}_n(t)|^2 - V(t, q_n(t))]dt + \int_{-T}^{T}(f_T(t), q_n(t))dt\Big) -$$

$$-\Big(\int_{-T}^{T}[\frac{1}{2}|\dot{q}_n(t)|^2 - (\nabla V(t, q_n(t)), q_n(t))]dt + \int_{-T}^{T}(f_T(t), q_n(t))dt\Big)$$

ou seja,

$$2I(q_n) - I'(q_n)q_n = -2\int_{-T}^{T}V(t, q_n(t))dt + \int_{-T}^{T}(f_T(t), q_n(t))dt + \int_{-T}^{T}(\nabla V(t, q_n(t)), q_n(t)),$$

obtendo que

$$2I(q_n) - I'(q_n)q_n = 2\int_{-T}^{T}[K(t, q_n(t))dt - W(t, q_n(t))]dt + \int_{-T}^{T}(f_T(t), q_n(t))dt$$

$$+\int_{-T}^{T}(\nabla V(t, q_n(t)), q_n(t)).$$

Desde que

$$(\nabla V(t, q_n(t)), q_n(t)) = -(\nabla K(t, q_n(t)), q_n(t)) + (\nabla W(t, q_n(t)), q_n(t))$$

segue de (H2) que

$$(\nabla V(t,q_n(t)),q_n(t)) \geq -\rho K(t,q_n(t)) + (\nabla W(t,q_n(t)),q_n(t)).$$

Então,

$$M_T \geq (2-\rho)\int_{-T}^{T} K(t,q_n(t))dt + \int_{-T}^{T}[(\nabla W(t,q_n(t)),q_n(t)) - 2W(t,q_n(t))]dt+$$

$$+\int_{-T}^{T}(f_T(t),q_n(t))dt$$

Desde que $\rho \leq 2$ e $K(t,x) \geq 0$, por (H5) temos

$$M_T \geq c\int_{-T}^{T}|q_n(t)|^{\mu}dt - \int_{-T}^{T}\beta(t)dt + \int_{-T}^{T}(f_T(t),q_n(t))dt,$$

ou equivalentemente

$$c\|q_n\|^{\mu}_{L^{\mu}_T} \leq M_T + \int_{-T}^{T}\beta(t)dt - \int_{-T}^{T}(f_T(t),q_n(t))dt.$$

Usando a desigualdade de Hölder,

$$c\|q_n\|^{\mu}_{L^{\mu}_T} \leq M_T + \int_{-T}^{T}\beta(t)dt + \|f_T\|_{L^{\mu'}_T}\|q_n\|_{L^{\mu}_T}.$$

Desde que $\mu > 1$, existe uma constante C_T tal que

$$\|q_n\|_{L^{\mu}_T} \leq C_T \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5.7}$$

Por outro lado, de (5.4)

$$\eta^2(q_n) = 2I(q_n) + 2\int_{-T}^{T}W(t,q_n(t))dt - 2\int_{-T}^{T}(f_T(t),q_n(t))dt$$

e por (H4) e da desigualdade de Hölder

$$\eta^2(q_n) \leq 2I(q_n) + 2b\int_{-T}^{T}|q_n(t)|^r dt + 2C_T\|f_T\|_{L^{\mu'}_T}. \tag{5.8}$$

Considere os seguintes conjuntos

$$X = \{t \in [-T,T]; |q_n(t)| \leq 1\} \text{ e } Y = \{t \in [-T,T]; |q_n(t)| > 1\}.$$

Logo

$$\int_{-T}^{T}|q_n(t)|^r dt = \int_X |q_n(t)|^r dt + \int_Y |q_n(t)|^r dt.$$

Usando as definições de X, Y e sendo $\mu > r$ e $\gamma \leq 2 < r$, temos

$$\int_{-T}^{T} |q_n(t)|^r dt \leq \int_X |q_n(t)|^\gamma dt + \int_Y |q_n(t)|^\mu dt$$

ou seja,

$$\int_{-T}^{T} |q_n(t)|^r dt \leq \int_{-T}^{T} |q_n(t)|^\gamma dt + \int_{-T}^{T} |q_n(t)|^\mu dt. \tag{5.9}$$

Disto e de (5.8),

$$\eta^2(q_n) \leq 2I(q_n) + 2b\int_{-T}^{T} |q_n(t)|^\gamma dt + 2bC_T^\mu + 2C_T\|f_T\|_{L_T^{\mu'}}. \tag{5.10}$$

Da definição de $\eta(q)$ e de (H1)

$$\eta^2(q_n) = \int_{-T}^{T} [|\dot{q}_n(t)|^2 dt + 2K(t, q_n(t))]dt \geq 2a\int_{-T}^{T} |q_n(t)|^\gamma. \tag{5.11}$$

Combinando (5.10) e (5.11) obtemos

$$2(a-b)\int_{-T}^{T} |q_n(t)|^\gamma dt \leq 2I(q_n) + 2bC_T^\mu + 2C_T\|f_T\|_{L_T^{\mu'}}.$$

Desde que $a > b$ e $I(q_n(t))$ é limitado, segue que $\displaystyle\int_{-T}^{T} |q_n(t)|^\gamma dt$ é limitado . Assim, por (5.10), concluímos que $\eta(q_n(t))$ é limitado. Finalmente pelo Lema 5.2, temos a limitação de $\{q_n\}$. Considere agora $\mu < r$, então

$$\int_{-T}^{T} |q_n(t)|^r dt = \int_{-T}^{T} |q_n(t)|^{r-\mu} |q_n(t)|^\mu dt.$$

Segue de (2.13) que

$$\int_{-T}^{T} |q_n(t)|^r dt \leq c^{r-\mu}\|q_n\|^{r-\mu}\int_{-T}^{T} |q_n(t)|^\mu dt$$

e por (5.7)

$$\int_{-T}^{T} |q_n(t)|^r dt \leq c^{r-\mu} c_T^\mu \|q_n\|^{r-\mu}. \tag{5.12}$$

Do Lema 5.2

$$min\{\|q_n\|^2, 2^{\gamma/2}a\|q_n\|^\gamma\} \leq \eta^2(q_n)$$

usando (5.8) e (5.12)

$$min\{\|q_n\|^2, 2^{\gamma/2}a\|q_n\|^\gamma\} \leq 2I(q_n) + 2bc^{r-\mu}c_T^\mu\|q_n\|^{r-\mu} + 2c_T\|f\|_{L^{\mu'}(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)}$$

Desde que $r - \mu < \gamma \leq 2$ por (H5) e $I(q_n)$ é limitado, então $\{q_n\}$ também será limitado. De fato, suponha por contradição que $\{q_n\}$ não seja limitado, então existe $\{q_{n_j}\} \subset \{q_n\}$ tal que

$$\|q_{n_j}\| \to \infty \text{ quando } n_j \to \infty.$$

Logo

$$1 \leq \frac{2I(q_n)}{min\{\|q_n\|^2, 2^{\gamma/2}a\|q_n\|^\gamma\}} + c_1\frac{\|q_n\|^{r-\mu}}{min\{\|q_n\|^2, 2^{\gamma/2}a\|q_n\|^\gamma\}} +$$

$$+2c_T\frac{\|f\|_{L^{\mu'}}}{min\{\|q_n\|^2, 2^{\gamma/2}a\|q_n\|^\gamma\}} \to 0$$

quando $n \to \infty$. Um absurdo, portanto $\{q_n\}$ é limitado. Como no Lema 3.1, podemos provar que $\{q_n\}$ possui uma subsequência convergente. Consequentemente I satisfaz a condição (C). Vejamos agora, que o funcional I satisfaz a condição (I_2) do Teorema do Passo da Montanha. Seja $\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $q \in E_T$ tal que $\|q\| = \rho_1$, então $0 < \|q\|_{L_T^\infty} \leq 1$. Usando (H4) temos

$$I(q) \geq \frac{1}{2}\eta^2(q) - b\int_{-T}^{T}|q(t)|^2dt - \|f\|_{L^2_{[-T,T]}}\|q\|_{L^2_{[-T,T]}}.$$

Por (H1)

$$I(q) \geq \frac{1}{2}\int_{-T}^{T}[|\dot{q}(t)|^2 + 2a|q(t)|^\gamma]dt - b\int_{-T}^{T}|q(t)|^2dt - \|f\|_{L^2_{[-T,T]}}\|q\|_{L^2_{[-T,T]}}.$$

Com um argumento semelhante ao usado no Lema 5.2

$$\int_{-T}^{T}\frac{|q(t)|^2}{|q(t)|^{2-\gamma}}dt \geq \frac{1}{\|q\|^{2-\gamma}}\int_{-T}^{T}|q(t)|^2dt.$$

Daí

$$I(q) \geq \frac{1}{2}\int_{-T}^{T}[|\dot{q}(t)|^2dt + a(\sqrt{2}\|q\|)^{\gamma-2}\int_{-T}^{T}|q(t)|^2dt - b\int_{-T}^{T}|q(t)|^2dt - \|f\|_{L^2_{[-T,T]}}\|q\|_{L^2_{[-T,T]}}$$

donde temos

$$I(q) \geq \frac{1}{2}\int_{-T}^{T}[|\dot{q}(t)|^2dt + (a-b)\int_{-T}^{T}|q(t)|^2dt - \|f\|_{L^2_{[-T,T]}}\|q\|_{L^2_{[-T,T]}}.$$

Ou seja,

$$I(q) \geq min\left\{\frac{1}{2}, a-b\right\}\|q\|^2 - \|f\|_{L^2_{[-T,T]}}\|q\|_{L^2_{[-T,T]}}.$$

Segue da definição de ρ_1

$$I(q) \geq min\{\frac{1}{2}, a-b\}\frac{1}{2} - \|f\|_{L^2_{-T,T}}\frac{1}{\sqrt{2}} := \alpha. \tag{5.13}$$

De (H6) segue que $\alpha > 0$ e (5.13) mostra que

$$I(q) \geq \alpha \text{ para } \|q\| = \rho_1.$$

O funcional I satisfaz a condição (I_3) do Teorema do Passo da Montanha. Seja

$$q_0 \in E_{T_0} - \{0\},\ M = \max_{|t|\leq T_0, |x|\leq 1} K(t,x) \text{ e } A > \tfrac{(2M+1)\|q_0\|^2}{2\|q_0\|^2_{L^2_{T_0}}}.$$

Por (5.2), existe $B > 0$ tal que

$$W(t,x) \geq A|x|^2 - B \quad \forall t \in [-T_0, T_0], \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{5.14}$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $T \geq T_0$. Defina $\hat{q} \in E_T$ por

$$\hat{q}(t) = \begin{cases} q_0(t), & se \quad t \in [-T_0, T_0] \\ 0, & se \quad t \in [-T, T] - [-T_0, T_0] \end{cases}$$

Desde que por (H2) $K(t,0) = 0$ e por (H3) $W(t,0) = 0$, segue da definição de $\hat{q}(t)$ que

$$I(s\hat{q}) = I(sq_0)\ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Usando (5.14) na igualdade

$$I(s\hat{q}) = \frac{1}{2}\eta^2(s\hat{q}) - \int_{-T}^{T} W(t, s\hat{q}(t))dt + \int_{-T}^{T} (f_T(t), s\hat{q}(t))dt,$$

obtemos

$$I(s\hat{q}) \leq \frac{1}{2}\eta^2(s\hat{q}) - As^2\|q_0\|^2_{L^2_{t_0}} + |s|\|f\|_{L^2_{T_0}}\|q_0\|_{L^2_{T_0}} + B2T_0. \tag{5.15}$$

Por outro lado, escrevendo

$$X' = \{t \in [-T_0, T_0]; |sq_0(t)| \leq 1\} \text{ e } Y' = \{t \in [-T_0, T_0]; |sq_0(t)| > 1\},$$

temos

$$\eta^2(s\hat{q}) = \int_{-T}^{T} [|s\dot{q}_0(t)|^2 + 2K(t, sq_0(t))]dt.$$

Das definições de X' e Y', sendo $\rho \leq 2$

$$\eta^2(s\hat{q}) = s^2 \int_{-T}^{T} |\dot{q}_0(t)|^2 + 2\int_{X'} K(t, sq_0(t))dt + 2\int_{Y'} K(t, sq_0(t))dt.$$

Pelo Lema 5.1

$$\eta^2(s\hat{q}) \leq s^2 \int_{-T}^{T} |\dot{q}_0(t)|^2 + 4MT_0 + 2M\int_{Y'} |sq_0(t)|^\rho dt$$

ou seja,

$$\eta^2(s\hat{q}) \leq s^2 \int_{-T}^{T} |\dot{q}_0(t)|^2 + 4MT_0 + 2M\int_{-T_0}^{T_0} |sq_0(t)|^\rho dt.$$

Isto é,

$$\eta^2(s\hat{q}) \leq (1+2M)s^2\|q_0\|^2 + 4MT_0. \tag{5.16}$$

Segue de (5.15) e (5.16),

$$I(s\hat{q}) \leq \Big(\frac{1+2M}{2}s^2\|q_0\|^2 + 4MT_0 - As^2\|q_0\|^2_{L^2_{T_0}} + |s|\|f\|_{L^2_{T_0}}\|q_0\|_{L^2_{T_0}} + 2T_0B\Big)$$

ou ainda,

$$I(s\hat{q}) \leq s^2\Big[\frac{1+2M}{2}\|q_0\|^2 + A\|q_0\|^2_{L^2_{T_0}}\Big] + |s|\|f\|_{L^2_{T_0}}\|q_0\|_{L^2_{T_0}} + T_0(2B+4M).$$

Pela escolha de A,

$$\frac{1+2M}{2}\|q_0\|^2 + A\|q_0\|^2_{L^2_{T_0}} < 0$$

e como a função $h(t) = t^2a + tb_1 + b_2$ possui concavidade voltada para baixo, temos que existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que a função $e = s_0\hat{q}$ verifica

$$\|e\| > \rho \text{ e } I(e) < 0.$$

Pelo Teorema do Passo da montanha existe um ponto crítico $q_T \in E_T$ de I tal que $I(q_T) \geq \alpha$ para todo $T \geq T_0$.

■

Lema 5.4 *(q_T) é uniformemente limitada em $T \geq T_0$.*

Demonstração: Defina o conjunto de caminhos

$$\Gamma_T = \{g \in C([0,1], E_T) : g(0) = 0, g(1) = e\}$$

Pelo Lema 5.3, sabemos que existe uma solução q_T de (5.3) no nível do passo da montanha

$$N_T \equiv \inf_{g\in\Gamma_T}\max_{s\in[0,1]} I(g(s)).$$

Note que

$$N_T \leq \max_{s\in[0,1]} I(g_0(s)) := C_{T_0},$$

onde $g_0(t) = te$. Logo para toda solução q_T de (5.3), temos

$$I(q_T) = N_T \leq C_{T_0}. \tag{5.17}$$

Usando o fato que $I'(q_T) = 0$ e (5.17) o restante da prova é identica ao da verificação da condição Cerami (C). Consequentemente existe $M_0 > 0$ independente de T tal que

$$\|q_T\| \leq M_0 \tag{5.18}$$

para todo $T \geq T_0$.

Considerando uma sequência $T_n \to \infty$ e o problema (5.3) sobre o intervalo $[-T_n, T_n]$. Pela conclusão do Lema 5.3 existe uma solução não trivial $q_n := q_{T_n}$ de (5.3).

■

Segue dos Lemas 3.2 e 3.4 que $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente para uma certa função $q_0 \in C^1_{Loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ e que q_0 é uma solução homoclínica de (5.1). Vejamos que q_0 é não trivial considerando $f \equiv 0$. De (H3) existe $\delta > 0$ tal que

$$|\nabla W(t,x)| < \epsilon |x|,$$

daí

$$|(\nabla W(t,x), x)| \leq |x|^2 \ \forall t \in \mathbb{R} \text{ e } |x| < \delta.$$

Defina a função Y sobre o intervalo $[0, \delta]$ como sendo $Y(0) = 0$ e

$$Y(s) = \max_{t\in\mathbb{R}, 0<|x|\leq s} \frac{|(\nabla W(t,x), x)|}{|x|^2}$$

para $0 < s \leq \delta$. Como

$$\frac{|(\nabla W(t,x), x)|}{|x|^2} \leq \frac{|\nabla W(t,x)|}{|x|}$$

segue que Y é contínua no 0. Afirmamos que existe $d > 0$ satisfazendo

$$\|q_n\| \geq d \ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5.19}$$

Caso contrário podemos obter uma subsequência $\{q_{n_k}\}$ tal que

$$\|q_{n_k}\| \to 0 \ \ quando \ \ k \to \infty. \tag{5.20}$$

Por (3.14)

$$\|q_{n_k}\|_{L^\infty_{T_{n_k}}} \to 0 \ \ quando \ \ k \to \infty.$$

Da definição de Y,

$$\int_{-T_n}^{T_n} (\nabla W(t, q_{n_k}(t)), q_{n_k}) dt \leq Y(\|q_{n_k}\|_{L^\infty_{T_n}}) \int_{-T_n}^{T_n} |q_{n_k}(t)|^2 dt \leq Y(\|q_{n_k}\|_{L^\infty_{T_n}}) \|q_{n_k}\|^2 \tag{5.21}$$

Desde que $I'(q_{n_k})q_{n_k} = 0$, temos

$$\int_{-T_n}^{T_n} (\nabla W(t, q_{n_k}(t)), q_{n_k}) dt = \int_{-T_n}^{T_n} |\dot{q}_{n_k}(t)|^2 dt + \int_{-T_n}^{T_n} (\nabla K(t, q_{n_k}(t)), q_{n_k}) dt. \tag{5.22}$$

Combinando (5.21), (5.22) e (H2)

$$Y(\|q_{n_k}\|_{L^\infty_{T_n}}) \|q_{n_k}\|^2 \geq \int_{-T_n}^{T_n} |\dot{q}_{n_k}(t)|^2 dt + \int_{-T_n}^{T_n} K(t, q_{n_k}(t)) dt,$$

ou seja,

$$Y(\|q_{n_k}\|_{L^\infty_{T_n}}) \|q_{n_k}\|^2 \geq \int_{-T_n}^{T_n} \frac{|\dot{q}_{n_k}(t)|^2}{2} dt + \int_{-T_n}^{T_n} K(t, q_{n_k}(t)) dt.$$

implicando que

$$Y(\|q_{n_k}\|_{L^\infty_{T_n}}) \|q_{n_k}\|^2 \geq \eta^2(q_{n_k}(t))/2.$$

Pelo lema 5.2 e do fato que $\gamma \leq 2$, obtemos

$$Y(\|q_{n_k}\|_{L^\infty_{T_n}}) \|q_{n_k}\|^2 \geq \frac{min\{1, a2^{\gamma/2}\}}{2} \|q_{n_k}\|^2$$

ou seja,

$$Y(\|q_{n_k}\|_{L^\infty_{T_n}}) \geq \frac{min\{1, a2^{\gamma/2}\}}{2} > 0$$

passando ao limite

$$Y(0) > 0,$$

o que é uma contradição, logo (5.19) é verdadeira. Suponha , agora, $q_0 = 0$ e seja $\{q_{n_j}\}$ a sequência que converge para q_0 uniformemente. Sabemos que

$$\int_{-T_n}^{T_n} |\dot{q}_{n_k}(t)|^2 dt + \int_{-T_n}^{T_n} (\nabla K(t, q_{n_k}(t), q_{n_k}(t)) dt \leq Y(\|q_{n_k}\|_{L^\infty_{T_n}}) \|q_{n_k}\|^2$$

donde temos

$$\int_{-T_n}^{T_n} K(t, q_{n_k}(t)) dt \leq Y(\|q_{n_k}\|_{L^\infty_{T_n}}) \|q_{n_k}\|^2.$$

Desde que $\{q_{n_j}\}$ converge uniformemente para 0, obtemos as seguintes convergências

$$\int_{-T_n}^{T_n} K(t, q_{n_k}(t)) dt \to 0.$$

Por (H4)

$$\int_{-T_n}^{T_n} W(t, q_{n_k}(t))dt \leq b \int_{-T_n}^{T_n} |q_{n_k}(t)|^2 dt \to 0.$$

Segue destes dois fatos que

$$I(q_{n_k}) = \frac{1}{2}\int_{-T_n}^{T_n} |q_{n_k}(t)|^2 dt + \int_{-T_n}^{T_n} K(t, q_{n_k}(t))dt - \int_{-T_n}^{T_n} W(t, q_{n_k}(t))dt$$

ou seja,

$$N_{T_k} = I(q_{n_k}) \to 0,$$

o que é um absurdo, pois $N_{T_k} \geq \alpha > 0$.

Suponha agora $f \not\equiv 0$ e usando que $\nabla V(t,0) = 0$, temos por (5.1)

$$\nabla V(t, 0) = f(t),$$

o que é uma contradição. Consequentemente o problema (5.1) possui uma solução homoclínica não trivial.

Vejamos que $\nabla V(t,0) = 0$. Segue de (H3) que

$$\nabla W(t, x) = \frac{\nabla W(t, x)}{|x|}|x|$$

e passando ao limite quando $x \to 0$, obtemos $\nabla W(t,x) = 0$.

Uma vez que

$$K(t, 0) = \min\{K(t, q(t)); q \in \mathbb{R}^N\}$$

concluimos que

$$\nabla K(t, 0) = 0,$$

concluindo assim a demonstração.

■

Teorema 5.1 *Assuma que W e K satisfaçam (H1), (H3) e as seguintes condições:*
$(H'2)$ Existe $\rho > 1$ tal que

$$K(t, x) \leq (x, \nabla K(t, x)) \leq \rho K(t, x)$$

para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

$(H'4)$ Existem constantes $\mu > max\{\rho, 2\}$, R, T_0 e $b > 0$ tal que

$$W(t, x) \geq b|x|^\mu$$

para todo $t \in [-T_0, T_0]$, $|x| \geq R$.

$(H'5)$ *Existem constantes* $0 < c < \mu - \rho$ *e* $\beta \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ *tal que*

$$\mu W(t,x) - (\nabla W(t,x), x) \leq cK(t,x) + \beta(t)$$

para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

$(H'6)$ $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ *e* $\|f\|_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)} < \sqrt{2} min(1/4, a/4)\rho_0$. *Então o sistema* (5.1) *possui uma solução homoclínica não trivial* $q \in W^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$.

Demonstração: Vejamos que I satisfaz todas as condições do Teorema do Passo da Montanha com a condição (C). Suponha que $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E_T$ é uma sequência (C) de I, isto é,

$$\{I(q_n)\} \text{ é limitado e } (1 + \|q_n\|)\|I'(q_n)\|_{E_T^*} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Então por (5.4) existe $M_T > 0$ tal que

$$M_T \geq \mu I(q_n) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

onde

$$\mu I(q_n) = \frac{\mu}{2}\eta^2(q_n) - \mu \int_{-T}^{T} W(t, q_n(t))dt + \mu \int_{-T}^{T} (f_T(t), q_n(t))dt.$$

Desde que $\rho > 1$,

$$-I'(q_n)q_n \geq \int_{-T}^{T} [-2\rho|\dot{q}_n(t)|^2 - 4\rho K(t, q_n(t))]dt + \int_{-T}^{T} (\nabla W(t, q_n(t)), q_n(t))dt -$$

$$- \int_{-T}^{T} (f_T(t), q_n(t))dt.$$

Logo

$$M_T \geq \Big(\frac{\mu - \rho}{2}\Big)\eta^2(q_n) + \int_{-T}^{T} [(\nabla W(t, q_n(t)), q_n(t)) - \mu W(t, q_n(t))]dt$$

$$+(\mu - 1)\int_{-T}^{T} (f_T(t), q_n(t))dt.$$

Por $(H'5)$

$$\Big(\frac{\mu - \rho}{2}\Big)\eta^2(q_n) \leq M_T + c\int_{-T}^{T} K(t, q_n(t))dt + \int_{-T}^{T} \beta(t)dt - (\mu - 1)\int_{-T}^{T} (f_T(t), q_n(t))dt$$

donde temos

$$\Big(\frac{\mu - \rho}{2}\Big)\eta^2(q_n) \leq M_T + \frac{c}{2}\eta^2(q_n) + \int_{-T}^{T} \beta(t)dt - (\mu - 1)\int_{-T}^{T} (f_T(t), q_n(t))dt.$$

Pela desigualdade de Hölder

$$\Big(\frac{\mu-\rho-c}{2}\Big)\eta^2(q_n) \leq M_T + \int_{-T}^{T}\beta(t)dt + (\mu-1)\|f\|_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}\|q_n\|$$

Segue do Lema 5.2

$$\Big(\frac{\mu-\rho-c}{2}\Big)min\{\|q_n\|^2, 2^{\gamma/2}a\|q_n\|^[\gamma]\} \leq M_T + \int_{-T}^{T}\beta(t)dt + (\mu-1)\|f\|_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}\|q_n\|.$$

Desde que $\mu-\rho-c>0$ e $\gamma>1$, $\{q_n\}$ é limitada e como no lema 3.1 segue que $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente, satisfazendo assim a condição (C). O funcional I satisfaz a condição I_2 do Teorema do Passo da Montanha. Seja $\rho_1 = \frac{\rho_0}{\sqrt{2}}$ e $q \in E_T$ tal que

$$\|q\| = \rho_1, \text{ então } 0 < \|q\|_{L^\infty_T} \leq \rho_0.$$

Por (5.6) temos

$$\int_{-T}^{T} W(t,q(t))dt \leq \frac{a}{2}\int_{-T}^{T}|q(t)|^2dt. \tag{5.23}$$

Por outro lado, desde que $\gamma \leq 2$ e por (H1) temos

$$\int_{-T}^{T} K(t,q(t))dt \geq a\int_{-T}^{T}|q(t)|^\gamma dt \geq a\int_{-T}^{T}|q(t)|^2dt. \tag{5.24}$$

De (5.4), (5.23) e da desigualdade de Hölder,

$$I(q) \geq \frac{1}{2}\eta^2(q) - \frac{a}{2}\int_{-T}^{T}|q(t)|^2dt - \Big(\int_{-T}^{T}|f_T(t)|^2dt\Big)^{1/2}\Big(\int_{-T}^{T}|q(t)|^2dt\Big)^{1/2}.$$

Assim

$$I(q) \geq \frac{1}{2}\int_{-T}^{T}[|q(t)|^2+2K(t,q(t))]dt - \frac{a}{2}\int_{-T}^{T}|q(t)|^2dt - \Big(\int_{\mathbb{R}}|f_T(t)|^2dt\Big)^{1/2}\Big(\int_{-T}^{T}|q(t)|^2dt\Big)^{1/2}$$

isto é,

$$I(q) \geq min\Big(\frac{1}{2},\frac{a}{2}\Big)\|q\|^2 - \|f\|_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)}\|q\|.$$

Obtendo

$$I(q) \geq min\Big(\frac{1}{2},\frac{a}{2}\Big)(\rho_1)^2 - \|f\|_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)}\rho_1 := \alpha \tag{5.25}$$

por $(H'6)$ $\alpha > 0$ e (5.25) mostra que

$$I(q) \geq \alpha \text{ para } \|q\| = \rho$$

O funcional I satisfaz a condição I_3 do Teorema do Passo da Montanha. Seja $T \geq T_0$, $q_0 \in E_{T_0} - \{0\}$ e defina $\hat{q} \in E_T$ por

$$\hat{q}(t) = \begin{cases} q_0(t), & se \quad t \in [-T_0, T_0] \\ 0, & se \quad t \in [-T, T] - [-T_0, T_0]. \end{cases}$$

Desde que $K(t,0) = W(t,0) = 0$, temos

$$I(s\hat{q}) = I(sq_0) \ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Logo

$$I(s\hat{q}) = \frac{1}{2}\eta^2(sq_0) - \int_{-T_0}^{T_0} W(t, sq_0(t))dt + \int_{-T_0}^{T_0} (f_T(t), sq_0(t)).$$

Considerando

$$X = \{s \in [-T_0, T_0]; |sq_0| \geq R\} \text{ e } Y = \{s \in [-T_0, T_0]; |sq_0| \leq R\}$$

temos

$$I(s\hat{q}) = \frac{1}{2}\eta^2(sq_0) - \int_X W(t, sq_0(t))dt + \int_Y W(t, sq_0(t))dt + \int_{-T_0}^{T_0} (f_T(t), sq_0(t)).$$

Por $(H'4)$

$$I(s\hat{q}) = \frac{1}{2}\eta^2(sq_0) - b\int_X |sq_0(t)|^\mu dt + \int_Y W(t, sq_0(t))dt + \int_{-T_0}^{T_0} (f_T(t), sq_0(t)),$$

donde segue que existe $d > 0$ tal que

$$I(s\hat{q}) = \frac{1}{2}\eta^2(sq_0) - bs^\mu \int_{-T_0}^{T_0} |q_0(t)|^\mu dt + |s| \|f\|_{L^2_{T_0}} \|q_0\|_{L^2_{T_0}} + d. \tag{5.26}$$

Pelo Lema 5.1 com a condição $(H'2)$ no lugar de (H2), obtemos

$$K(t,x) \leq M(|x|^\rho + 1) \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ \forall t \in [-T_0, T_0],$$

onde

$$M = max_{|t| \leq T_0, |x| \leq 1} K(t,x).$$

Então para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$\eta^2(sq_0) = \int_{-T_0}^{T_0} [|s\dot{q}_0(t)|^2 + 2K(t, sq_0(t))],$$

isto é,

$$\eta^2(sq_0) \leq s^2 \int_{-T_0}^{T_0} |\dot{q}_0(t)|^2 dt + 2M \int_{-T_0}^{T_0} |sq_0(t)|^\rho dt + 4MT_0. \tag{5.27}$$

Substituindo (5.27) em (5.26)

$$I(s\hat{q}) \leq \frac{s^2}{2}\int_{-T_0}^{T_0} |\dot{q}_0(t)|^2 dt + Ms^\rho \int_{-T_0}^{T_0} |q_0(t)|^\rho dt - b|s|^\mu \int_{-T_0}^{T_0} |q_0(t)|^\mu dt + |s| \|f\|_{L^2_{T_0}} \|q_0\|_{L^2_{T_0}} + 2MT_0 + d$$

Desde que $\mu > max(2, \rho)$ existe $s \in \mathbb{R}$ tal que se

$$e := s\hat{q}, \text{ então } \|e\| > \rho \text{ e } I(e) < 0.$$

Terminando assim a demonstração. Usando $(H'2)$ e $(H'6)$ no lugar de (H2) e (H6) respectivamente o restante da demonstração é análogo ao Lema 5.3.

■

Apêndice A

Introdução aos Espaços de Sobolev

A.1 Alguns resultados sobre Distribuições

Este Apêndice será destinado a fixar notações e mencionar resultados sobre a teoria das distribuições, resultados estes que foram usados ao longo do texto. Representaremos pela letra $\mathbb{K}$, o corpo dos números reais ou o corpo dos numeros complexos. Por $\mathbb{N}$ representaremos o conjunto dos números naturais e por $\mathbb{Z}$ o anel dos inteiros. Dado $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^N$ e $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) \in \mathbb{K}^N$, define-se

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n; \quad Z^\alpha = Z_1.Z_2.\ldots.Z_n; \quad \alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_n!$$

Por D^α, representa-se o operador de derivação de ordem α definido por

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}.\partial x_2^{\alpha_2}.\ldots.\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

A.2 Suporte de funções.

Seja $u : \Omega \to \mathbb{K}$ uma função mensurável e $(O_i)_{i\in I}$ a familia de todos os abertos $O_i \subset \Omega$ tais que $u = 0$ $q.t.p.$ em O_i. Defina

$$O = \bigcup_{i\in I} O_i$$

e observe que $O \subset \Omega$ é o maior aberto tal que $u = 0$ $q.t.p.$. O suporte de u, denotado por $supp\ \ u$, é definido como sendo

$$supp\ \ u = \Omega - O = \Omega \bigcap O^c.$$

Note que *supp* u é um fechado relativo em Ω. Se u é uma função contínua, o suporte de u é dado por

$$supp \;\; u = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}} \bigcap \Omega.$$

A.3 Espaço de Funções Teste

Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Por $C_0^\infty(\Omega)$ representa-se o espaço vetorial de todas as funções númericas em Ω, com suporte compacto em Ω, possuindo aí derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes. Observe que

$$C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$$

no sentido de que se $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, então

$$\overline{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x) & , \quad x \in \Omega \\ 0 & , \quad c.c. \end{cases}$$

pertence a $C_0^\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

A.4 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Diremos que $(\phi_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ quando:

i) Existe K compacto contido em Ω com *supp* ϕ_n, *supp* $\phi \subset K$, para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, os suportes de todas as funções ϕ_n, para todo $n \in \mathbb{N}$ estão contidos em um compacto K contido em Ω.

ii) Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, temos

$$D^\alpha \phi_n \to D^\alpha \phi$$

uniformemente em K, isto é, todas as derivadas convergem para zero uniformemente em Ω. No que segue $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência anterior será chamado o espaço das funções testes, sendo denotado por $D(\Omega)$.

A.5 Distribuições sobre $D(\Omega)$

Uma distribuição sobre $D(\Omega)$, é uma transformação linear $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ que é contínua segunda a convergência em $D(\Omega)$, isto é,

i) $\langle T, \varphi + \lambda\psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \lambda \langle T, \psi \rangle, \forall \ \ \varphi, \Phi \in D(\Omega) \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

ii) $\varphi_n \to \varphi$ em $D(\Omega)$ implicar em

$$\langle T, \varphi_n \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \text{ em } \mathbb{R}.$$

Exemplo: Dado $u \in L^1_{Loc(\Omega)}$, a função

$$\begin{array}{rcl} T_u : D(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ \varphi & \to & \langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u\varphi \end{array}$$

é uma distribuição.

Notação: $D'(\Omega) : \{T; T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ é uma distribuição$\}$.

Convegência em $D'(\Omega)$

Sejam $(T_n) \subset D'(\Omega)$ e $T \in D'(\Omega)$, diremos que (T_n) converge para T em $D'(\Omega)$, e denotamos por

$$T_n \to T \ \ em \ \ D'(\Omega)$$

quando, para cada $\varphi \in D(\Omega)$, tivermos

$$\langle T_n, \varphi \rangle \ \ \to \ \ \langle T, \varphi \rangle \ \ em \ \ \mathbb{R}.$$

Quando $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, é comum dizer que u é uma distribuição, neste caso, devemos perceber que estamos identificando u com T_u. Toda distribuição tem derivada de todas as ordens. Assim, todas as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ tem derivada de todas as ordens no sentido das distribuições.

A derivada de uma Distribuição

Considere $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ uma distribuição e $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Definimos a derivada $D^\alpha T$ como sendo a seguinte distribuição

$$\begin{array}{rcl} D^\alpha T : D(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ \varphi & \to & \langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle. \end{array}$$

Produto de Funções por Distribuições

Se $\rho \in C^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in D(\Omega)$, então $\rho\varphi \in D(\Omega)$. Quando $\rho \in C^\infty(\Omega)$ e $T \in D'(\Omega)$, então defini-se o produto ρT do seguinte modo

$$\langle \rho T, \varphi \rangle = \langle T, \rho\varphi \rangle.$$

Mostra-se que para a distribuição ρT vale a regra do produto

$$D^\alpha(\rho T) = D^\alpha \rho T + \rho D^\alpha T.$$

A.6 Derivada Fraca de Funções em $L^1_{loc}(\Omega)$

Para cada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, sabemos que existem as distribuições T_u e $D^\alpha T_u$. No entanto, pode ou não existir uma função $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$D^\alpha T_u \cong v_\alpha \tag{A.1}$$

Fazendo a identificação $u \equiv T_u$, (A.1) representa

$$D^\alpha u = v_\alpha$$

isto é,

$$\langle D^\alpha u, \varphi \rangle = \langle v_\alpha, \varphi \rangle \Leftrightarrow (-1)^{|\alpha|}\langle u, D^\alpha \varphi \rangle = \langle v_\alpha, \varphi \rangle$$

ou seja,

$$(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u D^\alpha \varphi = \int_\Omega v_\alpha \varphi.$$

Assim quando (A.1) ocorre, dizemos que v_α é a derivada fraca de u em $L^1_{loc}(\Omega)$ e denotaremos por

$$D^\alpha := v_\alpha.$$

A.7 Espaços de Sobolev

Seja $p \in [1, +\infty)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ um aberto. Definimos o espaço $W^{1,p}(\Omega)$ como sendo

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p; \frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i \in L^p(\Omega).i = 1, 2, \ldots, N \right\}$$

cuja norma

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p.$$

Para $p = +\infty$, temos $W^{1,\infty}(\Omega)$ dado por

$$W^{1,\infty}(\Omega) = \{u \in L^\infty(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} := v_i \in L^\infty\}$$

e

$$\|u\|_{1,\infty} = \|u\|_\infty + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_\infty.$$

Para $k \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, \infty)$, definimos

$$W^{k,p}(\Omega) = \{x \in L^p(\Omega); D^\alpha u := v_\alpha \in L^p, \forall \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} com \ \ |\alpha| \leq k\}$$

munido da norma

$$\|u\|_{k,p} = \|u\|_p + \sum_{1\leq|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_p.$$

De modo análogo, definimos

$$W^{k,\infty}(\Omega) = \{u \in L^\infty(\Omega); D^\alpha u := v_\alpha \in L^\infty, \forall \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} com \quad |\alpha| \leq k \ \}$$

e

$$\|u\|_{k,\infty} = \|u\|_\infty + \sum_{1\leq|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_\infty.$$

Iremos trabalhar com o espaço de Sobolev $W_T^{1,p}$ que é o espaço de funções $u \in L^p(0,T;\mathbb{R}^N)$ que possuem uma derivada fraca $\dot{u} \in L^p(0,T;\mathbb{R}^N)$. Observe que se $u \in W_T^{1,p}$,temos

$$u(t) = \int_0^t \dot{u}(s)ds + c$$

e $u(0) = u(T)$. A norma sobre $W_T^{1,p}$ é dada por

$$\|u\|_{W_T^{1,p}} = \Big(\int_0^T |u(t)|^p dt + \int_0^T |\dot{u}(t)|^p dt\Big)^{1/p}.$$

Denotaremos por H_T^1 o espaço de Hilbert $W_T^{1,2}$ com o produto interno

$$(u,v) = \int_0^T [(u(t),v(t)) + (\dot{u}(t),\dot{v}(t))]dt$$

cuja norma correspondente é

$$\|u\|_{W_T^{1,p}} = \|u\|.$$

Fatos Importantes

1) $W^{k,p}(\Omega)$ é reflexivo para $1 \leq p < \infty$.

2) $W^{k,p}(\Omega)$ é separável para $1 < p < \infty$.

3) $W^{k,\infty}(\Omega)$ não é separável e nem reflexivo.

A.8 Imersões nos Espaços de Sobolev

Imersão Contínua

Diremos que $(X, \|.\|_X)$ está imerso continuamente em $(Y, \|.\|_Y)$ quando:

$i)$ X é subespaço vetorial de Y.

$ii)$ A identidade $i : (X, \|.\|_X) \to (Y, \|.\|_Y)$ é contínua.

Imersão Compacta Diremos que $(X, \|.\|_X)$ está imerso compactamente em $(Y, \|.\|_Y)$ quando:

$i)$ X é subespaço vetorial de Y.

$ii)$ A identidade $i : (X, \|.\|_X) \to (Y, \|.\|_Y)$ é linear compacta, ou seja, se $\{x_n\}$ é limitada em $(X, \|.\|_X)$, isto é, existe $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$, então existem $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ e $z \in Y$ tais que

$$\|x_{n_j} - z\|_Y \to 0 \text{ quando } n_j \to \infty$$

ou seja $x_{n_j} \to z$ em Y.

Teorema A.1 *Seja Ω um domínio regular, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. Então, para qualquer $j \in \mathbb{N}$ as imersões abaixo são contínuas:*

- *Se $m < \frac{N}{P}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $p \leq q \leq \frac{Np}{N-mp}$.*
- *Se $m = \frac{N}{P}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $p \leq q < \infty$.*
- *Se $m > \frac{N}{P}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j_B(\Omega)$.*
- *Se $m - 1 < \frac{N}{p} < m$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\Omega)$, $0 < \alpha < m - \frac{N}{p}$ onde $C^j_B(\Omega)$ é o subespaço de $C^j(\Omega)$ formado pelas funções que juntamente com as suas derivadas até a ordem j são limitadas em Ω. Neste espaço usamos a norma*

$$\|u\|_{C^j_B(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq j} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|$$

Importante: Se $N = 1$, $p > 1$ e $I \subset \mathbb{R}$, os dois últimos itens do teorema de imersão asseguram que as funções que estão em $W^{1,p}(\Omega)$ são contínuas.

Teorema A.2 *Seja Ω um domínio regular limitado, $j \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_*$ e $1 \leq p < \infty$. Então, as imersões abaixo são compactas:*

- *Se $m < \frac{N}{p}$, $\quad W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $\quad 1 \leq q \leq \frac{Np}{N-mp}$.*
- *Se $m = \frac{N}{p}$, $\quad W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $\quad 1 \leq q \leq \frac{Np}{N-mp}$.*
- *Se $m > \frac{N}{p} < m$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}_B(\Omega)$.*
- *Se $m - 1 < \frac{N}{p} < m$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\Omega)$, $0 < \alpha < m - \frac{N}{p}$.*

Importante

Se I é um intervalo limitado da reta, temos que a imersão de $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$ é compacta para $p > 1$, isto é, se $\{\varphi_n\} \subset W^{1,p}(I)$ é limitada, existem $\{\varphi_{n_j}\} \subset \{\varphi_n\}$ e $\varphi \in C(I)$ tais que

$$\|\varphi_{n_j} - \varphi\| \to 0.$$

A.9 O espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$

Para Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, sabemos que

$$C_0^\infty \subset W^{k,p}(\Omega).$$

Definimos

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty}(\Omega)^{\|\|_{k,p}}.$$

Assim, $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ se, e somente se, existe $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty$ tal que

$$\|\varphi_{n_j} - u\| \to 0.$$

Mostra-se que se $u \in W^{k,p}(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$, então

$$u \in W_0^{k,p}(\Omega) \Leftrightarrow u = 0 \ \ em \ \ \partial\Omega.$$

Assim, se $I \subset \mathbb{R}$ é um aberto, temos que

$$u \in W_0^{k,p}(I) \Leftrightarrow u = 0 \ \ em \ \ \partial I.$$

Se $\Omega = \mathbb{R}^N$, temos $W_0^{k,p}(\mathbb{R}^N) = W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$. Em particular,

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R}).$$

Se $|\Omega^c| > 0$, então

$$W_0^{k,p}(\Omega) \neq W^{k,p}(\Omega).$$

Apêndice B

Resultados Importantes

Proposição B.1 *Sejam* $(X, \|.\|_X)$ $(Y, \|.\|_Y)$ *espeços vetoriais normados com*

$$(X, \|.\|_X) \hookrightarrow (Y, \|.\|_Y)$$

continuamente. Se $(x_n) \subset X$ *é tal que* $x_n \rightharpoonup x$ *em* X*, então* $x_n \rightharpoonup x$ *em* Y

Demonstração: Dado $f \in Y'$ então

$$|f(x)| \leq c\|x\|_Y \quad \forall x \in Y.$$

Da imersão contínua

$$|f(x)| \leq c\|x\|_Y \leq \hat{c}\|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Logo $f \in X'$ e daí

$$f(x_n) \to f(x) \text{ em Y}$$

uma vez que $Y' \subset X'$.

Teorema B.1 *(Ascoli-Arzelá) (Ver [11])Seja* $K \subset \mathbb{R}$ *um compacto. Toda sequência equicontínua e simplesmente limitada de funções* $f_n : K \to \mathbb{R}^N$ *possui uma subsequência uniformemente convergente.*

Corolário B.1 *(Ver [9]) Suponha que para algum* $t_0 \in [a, b]$*, a função* $x \to f(x, t_0)$ *é integrável sobre* X*, que* $\partial f/\partial t$ *exista sobre* $X \times [a, b]$*, e que exista um função integrável* g *sobre* X *tal que*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| \leq g(x)$$

Então a função $F = \int f(x,t)d\eta$ *é diferenciável sobre* $[a,b]$ *e*

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\int f(x,t)d\eta(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)d\eta(x)$$

onde $t \to f(x,t)$ *é ontínua sobre* $[a,b]$ *para cada* $x \in X$.

Teorema B.2 (Representação de Riesz) *(Ver [17]) Dado um funcional linear contínuo* $f : H \to \mathbb{R}$*, onde* H *é um espaço de Hilbert, existe um único elemento* $u \in H$ *tal que*

$$f_u(v) = \langle u, v\rangle, \quad \forall v \in H$$

e

$$\|f\|_{H^*} = \|u\|.$$

Teorema B.3 *Suponha que* $\phi \in C^1(X,\mathbb{R})$ *satisfaz a condição de Cerami. Se* $c \in \mathbb{R}$ *não é um valor crítico de* ϕ *então para todo* $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeno, existe* $\eta \in C([0,1]\times X, X)$ *tal que para qualquer* $u \in X$ *e* $t \in [0,1]$*:*

i) $\eta(0,u) = u$,

ii) $\eta(t,u) = u$ *se* $u \notin \phi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$,

iii) $\eta(1, \phi^{c+\epsilon} \subset \phi^{c-\epsilon})$.

Demonstração: Note que existem constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que

$$u \in \phi^{-1}([c-2\alpha, c+\alpha]) \text{ implica } (1+\|u_n\|)\|\phi'(u)\| > \beta,$$

caso contrário, existe uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com

$$c - \frac{1}{n} \leq \phi(u_n) \leq c + \frac{1}{n}, \quad (1+\|u_n\|)\|\phi'(u_n)\| \leq \frac{1}{n},$$

ou seja,

$$\phi(u_n) \to c \text{ e } (1+\|u_n\|)\|\phi'(u_n)\| \to 0.$$

Pela condição de Cerami, c seria um valor crítico de ϕ, contrariando a hipótese. Agora o resultado segue do Lema de Deformação com $S = X$, $\epsilon \in (0,\alpha]$ fixado e $\delta = \frac{4\epsilon}{\beta}$.

■

Teorema B.4 *Seja X um espaço de Banach e seja $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Se*

i) *ϕ é limitado inferiormente, c=$\inf_X \phi$,*

ii) *ϕ satisfaz a condição de Cerami,*

então existe $u_0 \in X$ tal que

$$\phi(u_0) = c = \inf_X \phi.$$

Logo c é um valor crítico de ϕ.

Demonstração : Suponha por contradição que c não é valor crítico de ϕ. Então pelo Teorema $B.3$ existem $\epsilon > 0$ e $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tais que

$$\eta(1, \phi^{c+\epsilon}) \subset \phi^{c-\epsilon},$$

o que é um absurdo pois

$$\phi^{c-\epsilon} = \emptyset.$$

Finalizando a demonstração.

$\blacksquare$

Lema B.1 *Seja $f \in L^p(\Omega)$ então,*

$$\int_{B_t^c(0)} |f(t)|^p dt \to 0 \quad quando \quad t \to \infty,$$

onde $B_t(0)$ é a bola de centro 0 e raio t.

Demonstração: Note que

$$\int_{B_t^c(0)} |f(t)|^p dt = \int_{\Omega} I_{B_t^c(0)} |f(t)|^p dt$$

onde I é a função característica de $B_t^c(0)$. Considerando

$$g(t) = I_{B_t^c(0)} |f(t)|^p,$$

temos:

i) $g(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

ii) $|I_{B_t^c(0)} |f(t)|^p| \leq |f(t)|^p$.

O lema segue usando o teorema da convergência Dominada de Lebesgue.

$\blacksquare$

Lema B.2 *(Ver [10]) Sejam x, $y \in \mathbb{R}^N$ e $\langle .,. \rangle$ o produto interno usual no $\mathbb{R}^N$. Então*

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y \rangle \geq \begin{cases} c_p|x-y|^p, & se \quad p \geq 2 \\ c_p\frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}, & se \quad 1 < p < 2 \end{cases}$$

Demonstração: Vejamos primeiramente o caso onde $p \geq 2$. Seja $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_N) \in \mathbb{R}^N$ e

$$a_j(\eta) = |\eta|^{p-2}\eta_j, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Seja $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ e

$$a_{i,j}(\eta) = \frac{\partial}{\partial \eta_i} a_j(\eta).$$

Suponha $\eta \neq 0$. Daí

$$\sum_{i,j}^N a_{i,j}(\eta) = \sum_{i,j}^N (\frac{\partial}{\partial \eta_i}(|\eta|^{p-2}\eta_j))$$

e como

$$a_{i,j}(\eta) = \Big((\eta_1^2+, \ldots, \eta_N^2)^{(p-2)/2}\eta_j\Big) = (p-2)|\eta|^{p-4}\eta_i\eta_j + |\eta|^{p-2}\delta_{i,j}$$

onde $\delta_{i,j} = 1$ para $i = j$ e $\delta_{i,j} = 0$ para $i \neq j$. Usando que

$$\sum_{i,j}^N \eta_i\eta_j x_i x_j = \Big(\sum_{i,j}^N \eta_i x_i\Big)^2 \geq 0$$

temos

$$\sum_{i,j}^N a_{i,j}(\eta) x_i x_j \geq |\eta|^{p-2}|x|^2 \tag{B.1}$$

Além disso,

$$\frac{1}{4}|\eta - \eta'| \leq |\eta' + t(\eta - \eta')| \tag{B.2}$$

para $|\eta'| \geq |\eta|$, $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$. De fato, Como

$$|\eta'| = |\eta' - \eta + \eta| \geq |\eta' - \eta| - |\eta| \geq |\eta' - \eta| - |\eta'|$$

Logo $|\eta'| \geq |\eta' - \eta|/2$ Note que

$$|\eta' + t(\eta - \eta')| \geq |\eta'| - t|\eta - \eta'| \geq \frac{|\eta' - \eta|}{2} - \frac{1}{4}|\eta - \eta'| = \frac{1}{4}|\eta - \eta'|$$

Consequentemente

$$[a_j(\eta' + t(\eta - \eta'))(\eta_i - \eta_j)]_0^1 = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \eta_j}(a_j(\eta' + t(\eta - \eta'))(\eta_i - \eta_i')(\eta_j - \eta_j')dt$$

$$\sum_{j=1}^{N}(a_j(\eta)-a_j(\eta'))(\eta_j-\eta'_j)=\int_0^1\sum_{j,i}^{N}a_{i,j}(\eta'+t(\eta-\eta'))(\eta_i-\eta'_i)(\eta_j-\eta'_j)dt$$

Usando $(B.1)$ e $(B.2)$ temos

$$\sum_{j=1}^{N}(a_j(\eta)-a_j(\eta'))(\eta_j-\eta'_j)\geq c\int_0^{1/4}|\eta-\eta'|^p=c|\eta-\eta'|^p.$$

Caso $1<p<2$.

Por homogeneidade podemos assumir que $|x|=1$ e $|y|\leq 1$. Além disso, escolhendo uma base conveniente para o $\mathbb{R}^N$ temos

$$x=(1,0,\ldots,0),\ y=(y_1,y_2,\ldots,0)\ \text{e}\ \sqrt{y_1^2+y_2^2}\leq 1.$$

Note que

$$\langle |x|^{p-2}x-|y|^{p-2}y,x-y\rangle\geq c\frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}$$

ou seja,

$$\left[\left(1-\frac{y_1}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}}\right)(1-y_1)+\frac{y_2^2}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}}\right]\frac{(1+\sqrt{y_1^2+y_2^2})^{2-p}}{(1-y_1)^2+y_2^2}. \tag{B.3}$$

Considerando primeiramente $y_1\leq 0$, temos

$$1-\frac{y_1}{|y|^{2-p}}\geq 1-y_1\geq(1-y_1)(p-1). \tag{B.4}$$

Para $0\leq y_1\leq 1$. Considere a função

$$f(t)=1-t^{p-1}-(p-1)(1-t)$$

que é crescente para $0\leq t\leq 1$. De fato

$$f'(t)=-(p-1)t^{p-2}+(p-1)=(p-1)(1-t^{p-2})\geq 0.$$

Daí

$$f(t)\geq f(0)=2-p\geq 0.$$

Donde obtemos

$$1-\frac{y_1}{|y_1|^{2-p}}=1-y_1^{p-1}\geq(p-1)(1-y_1).$$

Concluindo assim a demonstração.

Corolário B.2 *(Ver Brézis) Seja E um espaço de Banach reflexivo. Seja $K\subset E$ um subconjunto convexo, fechado e limitado. Então K é compacto na topologia fraca*

B.1 O problema de Cauchy

Recordaremos uma versão do Teorema de Existência e Unicidade locais para equações diferenciais ordinárias em espaços de Banach. Ver [14]

Seja $F : X \to E$ uma aplicação contínua definida num aberto X de um espaço de Banach E e fixemos $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times X$ e $r > 0$ tal que

$$B_r(u_0) := \{u \in E : \|u - u_0\| < r\} \subset X.$$

Defina

$$M := \sup_{u \in B_r(u_0)} \|F(u)\| \text{ e } K := \sup_{u,v \in B_r(u_0)} \frac{\|F(u) - F(v)\|}{u - v}$$

Teorema B.5 *Se $Ml < r$ e $K < \infty$ então o problema de Cauchy*

$$\dot{\sigma}(t) = F(\sigma(t)), \quad \sigma(t_0) = u_0$$

possui uma única solução $\sigma(.)$ definida em $I := [t_0 - l, t_0 + l]$ e com imagem em $B_r(u_0)$

Proposição B.2 *Seja $F : X \to E$ uma aplicação localmente lipschitziana definida num aberto $X \subset E$. Então, para cada $u \in X$ o problema de Cauchy*

$$\dot{\sigma}(t) = F(\sigma(t)), \quad \sigma(0) = u_0$$

possui uma única solução definida num intervalo maximal $(w_-(u), w_+(u))$ com $w_-(u) < 0 < w_+(u)$. O conjunto

$$\Omega := \{(t, u) \in: u \in X, t \in (w_-(u), w_+(u))\}$$

é aberto e a aplicação $\sigma \equiv \sigma(t, u) : \Omega \to X$ é localmente lipschitziana. Além disso, se para algum $u \in X$ o conjunto $\sigma(., u)$ varia num fechado de X, tem-se

$$w_+(u) < \infty \Longrightarrow \int_0^{w_+(u)} \|F(\sigma(s))\| ds = \infty.$$

Proposição B.3 *Seja $F : X \to E$ uma aplicação localmente lipschitziana definida num aberto $X \subset E$ e considere o fluxo $\sigma \equiv \sigma(t, u)$ definido na Proposição B.2. Se existirem constantes positivas A e B tais que*

$$\|F(u)\| \leq A\|u\| + B \quad \forall \quad u \in X \tag{B.5}$$

então $w_+(u) = \infty$ para todo $u \in X$, $\sigma(t, .)$ é um homeomorfismo de X para todo t e $\sigma[0, \infty[\times X \to X$ transforma conjuntos limitados em conjuntos limitados.

B.2 Séries de Fourier

Enunciaremos alguns resultados sobre séries de Fourier usados ao longo da dissertação, para mais detalhes ver [16]. Seja $u : [0,T] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, a sua série de Fourier é a série dada por

$$S[u] = \frac{a}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k cos\Big(\frac{2k\pi}{T}t\Big) + b_k sen\Big(\frac{2k\pi}{T}t\Big)\Big). \tag{B.6}$$

Cuja série complexa pode ser escrita como

$$S[u] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\frac{i2k\pi}{T}t}$$

onde

$$c_0 = \tfrac{a_0}{2},\ c_k = \Big(\tfrac{a_k - ib_k}{2}\Big) \text{ e } c_{-k} = \Big(\tfrac{a_k + ib_k}{2}\Big),\ k \in \mathbb{K}.$$

e a_0, b_k e a_k são obtidos da seguinte maneira:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt,$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)cos\Big(\frac{2k\pi}{T}t\Big)dt$$

e

$$b_k = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)sen\Big(\frac{2k\pi}{T}t\Big)dt.$$

Além disso, os coeficientes de Fourier complexos de u e u' satisfazem

$$c'_k = \frac{i2k\pi}{T}c_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Teorema B.6 *Sejam f e g funções periódicas de periódo T com $f \in C^1(-T,T)$ a menos de um número finito de pontos . Então*

$$\frac{1}{T}\langle f, g\rangle = \sum_{-\infty}^{+\infty} \dot{f}(t)\dot{g}(t).$$

Em particular vale a identidade de Parseval

$$\frac{1}{T}\|f\|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |\dot{f}(t)|^2.$$

Referências Bibliográficas

[1] Mawhin, J. Willem, M., *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, New York, Berlim.

[2] M. Izydorek, J. Janczewska., *Homoclinic solutions for nonautonomous second order Hamiltonian systems with a coercive potential*, J. Mathematical Analysis and Applications, 2007.

[3] X.H. Tang, Li Xiao., *Homoclinic solutions for ordinary p-Laplacian systems with a coercive potential*, Nonlinear Analysis, 2008 .

[4] Shiping Lu.; *Homoclinic solutions for a nonlinear second order differential systems with p-Laplacian operator*, Department of Mathematics, Anhui Normal University, 2010.

[5] Adel Daouas.; *Homoclinic orbits for a superquadratic Hamiltonian systems witouth a periodicity assumption*, Nonlinear Analysis, 2011.

[6] M. Izydorek, J. Janczewska.; *Homoclinic solutions for a class of the second order Hamiltonian systems*,Journal of Differential Equations, 2005 .

[7] P.H. Rabinowitz.; *Homoclinic orbtis for a class of Hamiltonian systems*,Proc. Roy. Soc. Edinburg, 1990 .

[8] D. Goldstein.; *Tópicos em analíse não Linear e plicações as Equações Diferenciais*,CNPQq, Rio de Janeiro, 1986 .

[9] R.G. Batle.; *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*,Willey Classic Library, 1995 .

[10] I. Peral.; *Multiplicity of solutions for the p-Laplacian*,Departamento de Matemáticas Universidade Autônoma de Madrid, Spain, 1997.

[11] Lima, Elon Lages.; *Análise Real*,Rio de Janeiro: IMPA, 2002 .

[12] M. Willem.; *Minimax Theorems*,Boston: Birkhauser, 1996 .

[13] C. Vidal.; *Notas sobre sistemas hamiltonianos e aplicações a mecânica celeste*,Universidad del Bío, Chile, 2009 .

[14] Ramos, M. P. N. Ramos.; *Teoremas de Enlace na Teoria dos Pontos Críticos*,Textos de Matemática, v.2. Faculdade da Universidade de Lisboa, Departamento de Matemática, 1993 .

[15] Lima, Elon Lages.; *Espaços Métricos*, Projeto Euclides: CNPQ-IMPA, 1977.

[16] Iorio, Valeria.; *EDP, um curso de graduação*,Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro, 2007.

[17] Kreyszig, Erwin.; *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley & Sons, United States of America, 1989.

[18] Figueiredo, Djairo.; *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*, Springer-Verlag, New York, 1989.