

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

O problema de Riemann para um modelo de injeção de polímero

por

Keytt Amaral da Silva

sob orientação do

Prof. Dr. Aparecido Jesuíno de Souza

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

S586p Silva, Keytt Amaral da.
O problema de Riemann para um modelo de injeção de polímero / Keytt Amaral da Silva. – Campina Grande, 2015.
96 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2015.

"Orientação: Prof. Dr. Aparecido Jesuíno de Souza".
Referências.

1. Leis de Conservação. 2. Problema de Riemann. 3. Injeção de Polímero. 4. Onda de Contato. 5. Onda de Rarefação.
I. Souza, Aparecido Jesuíno. II. Título.

CDU 517.518.12(043)

O problema de Riemann para um modelo de injeção de polímero

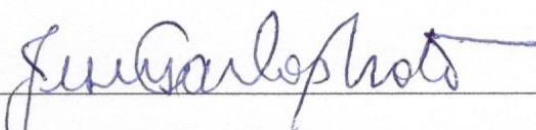
por

Keytt Amaral da Silva

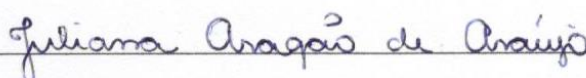
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Aprovada por:



Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota - UFG



Prof.ª Dr.ª Juliana Aragão de Araújo - UFPB



Prof. Dr. Aparecido Jesuíno de Souza - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Agosto/2015

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por cuidar de todas as áreas da minha vida. Por me dar sonhos e oportunidades para que os mesmos se realizem. Por ser bom comigo em todo tempo e por fazer a minha vida ter sentido.

Agradeço aos meus pais por acreditarem na minha capacidade de alcançar os meus objetivos, por me apoiarem e por me darem ânimo e força para ir sempre em frente.

Agradeço aos meus irmãos Júnior e Eduarda, à minha cunhada Dalila e ao meu sobrinho Calebe, por se fazerem presente em minha vida e por sempre me proporcionarem momentos de muita alegria.

Agradeço a meu amor Ygor por toda amizade, companheirismo e confiança depositadas em mim. Obrigada por nunca desistir de mim, por sua paciência e por acreditar que sou forte e capaz, mesmo quando meus sentimentos dizem o contrário.

Agradeço a todos os meus colegas de graduação e pós graduação, em especial, aos meus amigos Anna Karla, Jonas e Jamilly, pela amizade que me oferecem, algo que vai muito além da matemática e que nem a falta de tempo ou a distância conseguem diminuir. Agradeço a Deus pela vida de vocês.

Agradeço também ao meu “irmão” de orientação, Erivaldo, pela oportunidade de estudarmos juntos, desde as disciplinas do mestrado à dissertação. Obrigado por sua amizade e por estar sempre comigo.

Ainda agradeço a oportunidade oferecida pelo PPGMat/UFMG para que este trabalho pudesse ser concluído. Agradeço a todos os funcionários e a todos os professores deste programa, dos quais tive o prazer de ser aluna, por todo conhecimento oferecido. Em especial, ao professor Aparecido por sua orientação e paciência, e por seu excelente profissionalismo.

Agradeço aos professores Jesus e Juliana por aceitarem o convite de participar da minha banca e por disponibilizarem tempo para a avaliação deste trabalho.

Por fim, agradeço a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para a concretização deste trabalho.

Dedicatória

Aos meus pais, Antônio Francisco
e Maria José.

Resumo

Neste trabalho apresentamos a construção detalhada da solução do Problema de Riemann associado à um sistema de leis de conservação de um problema não estritamente hiperbólico, proveniente da modelagem matemática de um escoamento unidimensional bifásico num meio poroso em que as fases são óleo e água com polímero dissolvido, para dados iniciais arbitrários no espaço de estados. A construção da solução do sistema é baseada na solução da equação de Buckley–Leverett para cada nível de concentração constante de polímero e nas curvas integrais de um campo característico linearmente degenerado que dá origem as chamadas ondas de contato.

Palavras chave: Leis de Conservação. Problema de Riemann. Injeção de Polímero. Onda de Contato. Onda de Rarefação.

Abstract

We present the detailed construction of the Riemann problem solution associate to a system of conservation laws of a non–strictly hyperbolic problem, from mathematical modeling of a one-dimensional two-flow in a porous medium filled by oil and water with dissolved polymer, for arbitrary initial data in the state space. The construction of the system solution is based on the solution Buckley–Leverett equation for each level constant polymer concentration and on the integral curves of a linearly degenerated field characteristic that gives rise to the so-called contact waves.

Keywords: Conservation laws. Riemann problem. Polymer Injection. Contact wave. Rarefaction wave.

Nomenclatura

- s_w, s_p, s_o : saturação das componentes água, polímero e óleo, respectivamente.
- $c = \frac{s_p}{s}$: concentração de polímero na fase aquosa.
- v_w, v_p, v_o : velocidades das partículas de água, polímero e óleo, respectivamente.
- Q_w, Q_p, Q_o : termos de fonte de água, polímero e óleo, respectivamente.
- $s = s_w + s_p$: saturação da fase aquosa.
- $Q_a = Q_w + Q_p$: termo de fonte da fase aquosa.
- ϕ : porosidade.
- v_a, v_o : taxa de fluxo das fases aquosa e oleosa, respectivamente.
- $v = v_a + v_o$: vazão total do fluido.
- K : permeabilidade absoluta do meio poroso.
- k_a, k_o : permeabilidades relativas das fases aquosa e oleosa, respectivamente.
- μ_a, μ_o : viscosidades das fases aquosa e oleosa, respectivamente.
- $\kappa(s, c) = \left(\frac{k_a(s)}{\mu_a(c)} + \frac{k_o(s)}{\mu_o} \right)$: adição das razões entre as permeabilidades relativas e as saturações da fase aquosa e oleosa, respectivamente.
- $f(s, c) = \frac{k_a(s)/\mu_a(c)}{\kappa(s, c)}$: função de fluxo fracionário da fase aquosa.
- $r(c) = \frac{\mu_a(c)}{\mu_o}$: razão entre as viscosidades das fases aquosa e oleosa.
- $u^L = (s^L, c^L), u^R = (s^R, c^R)$: estados constantes fixados.
- λ^s, λ^c : velocidades características (autovalores).
- e^s, e^c : campos característicos (autovetores).
- ε : função extensão que define pontos de Welge.

- σ : velocidade de propagação de descontinuidades.
- $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$: espaço de estados.
- \mathcal{C} : curva dos pontos de coincidência.
- \mathcal{I} : curva dos pontos de inflexão da família– s .
- $\Phi^c(u^L)$: curva de contato que passa pelo estado u^L .
- \mathcal{E} : curva de extensão da fronteira $s = 1$.
- $\varepsilon^{-1}(\Phi^c(u^L))$: imagem inversa pela extensão ε da curva de contato $\Phi^c(u^L)$.
- \mathcal{L}^k –regiões: subregiões do espaço de estados para estados à esquerda u^L .
- \mathcal{R} –regiões: subregiões do espaço de estados para estados à direita u^R .

Conteúdo

Introdução	6
1 O Modelo Matemático	9
1.1 O sistema de leis de conservação	9
1.2 Propriedades da função de fluxo fracionário da fase aquosa	12
2 Estrutura de ondas do sistema de leis de conservação	15
2.1 Velocidades características	15
2.2 A perda de hiperbolicidade estrita	16
2.3 Curvas integrais associadas aos campos característicos	18
2.3.1 O campo das saturações	18
2.3.2 O campo linearmente degenerado	20
2.4 Condições de Entropia para descontinuidades	22
3 Solução do Problema de Riemann	23
3.1 O problema de Riemann para a equação de Buckley–Leverett	23
3.2 Compatibilidade de ondas	34
3.3 Construção da solução do Problema de Riemann para a injeção de polímero	55
3.4 Alguns exemplos	75
4 Considerações Finais	82
A O problema geral de Riemann 2×2	83
A.1 Soluções centradas	83
A.2 Características	84
A.3 Ondas simples centradas – Rarefações	84

A.4 Ondas de choque	86
A.5 Descontinuidades de Contato	88
A.6 Ondas compostas	90
A.7 Condições de entropia	91
A.7.1 Condição de Entropia de Lax	92
A.7.2 Condição de Entropia de Oleinik–Liu	93
A.8 Sequência de ondas	93
Bibliografia	95

Introdução

Os conceitos fundamentais utilizados nesta introdução estão baseados nos livros [1], [10] e [14].

O processo de geração de *petróleo* como um todo é resultado da captação da energia solar, através da fotossíntese, e transformação da matéria orgânica com contribuição do fluxo de calor oriundo do interior da Terra. Para termos uma acumulação de petróleo é necessário que, após o processo de geração, ocorra a migração, que consiste no deslocamento do petróleo da rocha dita fonte (ou geradora) à uma outra rocha onde se acumula. A explicação clássica para este processo atribui papel relevante à fase de expulsão da água das rochas geradoras, que levam consigo o petróleo durante os processos de compactação.

O petróleo após ser gerado e ter migrado é eventualmente acumulado em uma rocha que chamamos de *reservatório*. Esta rocha pode ter qualquer origem ou natureza, mas para se constituir em reservatório deve apresentar espaços vazios em seu interior, que chamamos de *porosidade*, e estes espaços vazios devem estar interconectados, conferindo-lhe a característica de *permeabilidade*, que é a capacidade da rocha permitir o fluxo de fluidos. Além disso, dentre outras substâncias, o reservatório contém água. Sendo assim, o conhecimento do volume poroso não é suficiente para estabelecermos a quantidade de óleo contida nas formações. Para que essas quantidades sejam estimadas é necessário estabelecermos que percentual do volume poroso é ocupado por cada substância. Tais percentuais são chamados de *saturações*.

Nos estudos de um reservatório de petróleo é fundamental o conhecimento das propriedades básicas da rocha e dos fluidos nela contidos. Algumas dessas propriedades foram citadas acima e elas determinam as quantidades dos fluidos existentes no meio

poroso, a sua distribuição, a capacidade desses fluidos se moverem e, principalmente, a quantidade de fluidos que pode ser extraída.

É importante observar que, um reservatório petrolífero, a partir de suas condições naturais, dentre elas, a diferença de pressão, produz não mais do que 20% do óleo existente. Ao longo do tempo de produção, devido à queda da pressão, o poço perde capacidade de produção. A partir daí, conforme mencionado em [14], é usual aplicar métodos de recuperação de petróleo. Esses métodos, de maneira geral, tentam interferir nas características do reservatório que favorecem a retenção do petróleo, e foram desenvolvidos para obter uma produção maior do que aquela que se obteria, caso fosse utilizada apenas a energia natural do reservatório. A vida produtiva de um reservatório petrolífero, em especial quando se aplicam métodos de recuperação, se compõe de etapas que cronologicamente são chamadas de recuperação primária, recuperação secundária e recuperação terciária.

Ao se injetar um fluido em um reservatório com apenas a finalidade de deslocar o óleo para fora dos poros da rocha, ou seja, quando buscamos um comportamento puramente mecânico, temos um processo classificado como método de recuperação convencional. Este comportamento mecânico, sem qualquer interação de natureza química ou termodinâmica entre os fluidos ou entre os fluidos e a rocha é o que se espera obter com a injeção de água.

Através do poço injetor, a água é injetada fazendo com que a pressão do reservatório aumente e, conseqüentemente, o óleo contido lá seja deslocado para o poço produtor. Contudo, como o óleo em geral é bem mais viscoso do que a água, o percentual de óleo recuperado por esta técnica ainda é muito pequeno. Para a otimização da produção é necessário o uso de métodos de recuperação mais elaborados chamados de métodos avançados (ou terciários). Um destes métodos avançados consiste na injeção de água com polímero, [2], para que a diferença entre as viscosidades diminua.

O objetivo deste trabalho é tratarmos deste método de injeção de água com polímero. Mais especificamente, vamos considerar o problema de Riemann associado à um sistema de leis de conservação de um problema não—estritamente hiperbólico provenientes da modelagem matemática de um escoamento unidimensional num meio poroso, consistindo de três componentes que são água, óleo e polímero, e de duas fases incompressíveis, que são a fase oleosa, consistindo apenas de óleo e a fase aquosa,

consistindo de água e polímero. Para tanto, iremos nos basear nas leis de conservação de massa e na lei de Darcy para obter as equações das três componentes. Além disso, assumiremos que o polímero seja completamente miscível na água e resida apenas nela, isto é, consideraremos que o polímero se movimenta passivamente com a água. Assumiremos também que a gravidade, a difusão e os efeitos capilares são desprezíveis, que o fluido não seja absorvido pela rocha e que o reservatório seja homogêneo.

Com as hipóteses acima, somos levados a um sistema de leis de conservação escrito na seguinte forma

$$\begin{cases} s_t + (f(s, c))_x = 0 \\ (cs)_t + (cf(s, c))_x = 0, \end{cases} \quad (1)$$

em que s é a saturação da água, c é a concentração de polímero na fase aquosa e f é a função de fluxo fracionário da fase aquosa que será caracterizada no Capítulo 1.

Outros trabalhos nesta mesma linha referem-se ao caso de se incluir a adsorção do polímero pela rocha como em [3] e de se considerar um escoamento trifásico incluindo a fase gás no modelo tratado aqui, como em [12].

Organizamos a dissertação da seguinte maneira:

No Capítulo 1, apresentaremos a dedução do sistema de equações (1) e algumas propriedades da função de fluxo fracionário da fase aquosa f .

No Capítulo 2, mostraremos que o Sistema (1) é não-estritamente hiperbólico, descreveremos os campos característicos associados a este sistema e mostraremos que existe uma curva em que as velocidades características coincidem. Além disso, apresentaremos as Condições de Entropia para as soluções descontínuas do problema de Riemann para o Sistema (1).

No Capítulo 3, inicialmente faremos uma recapitulação sobre a equação de Buckley–Leverett. Em seguida, discutiremos as compatibilidades de ondas e construiremos a solução do Problema de Riemann para o sistema de leis de conservação (1).

No Capítulo 4, faremos conclusões a respeito do presente trabalho e iremos propor novos trabalhos como continuação.

No Apêndice A, apresentaremos um resumo dos principais conceitos utilizados ao longo do trabalho para um sistema de duas leis de conservação 2×2 .

Capítulo 1

O Modelo Matemático

Neste capítulo, apresentaremos a dedução do sistema (1), definiremos a função de fluxo fracionário e apresentaremos algumas propriedades da mesma.

1.1 O sistema de leis de conservação

Nesta seção, apresentaremos a dedução do Sistema (1), baseados nas leis de conservação de massa e na lei de Darcy, seguindo [2] e [10].

Sejam $s_w = s_w(x, t)$, $s_p = s_p(x, t)$ e $s_o = s_o(x, t)$ as saturações das componentes água, polímero e óleo, respectivamente. Sabemos que as equações expressando a conservação de massa das três componentes são dadas por

$$\begin{aligned}\frac{\partial s_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(s_w v_w) &= Q_w, \\ \frac{\partial s_p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(s_p v_p) &= Q_p, \\ \frac{\partial s_o}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(s_o v_o) &= Q_o,\end{aligned}\tag{1.1}$$

em que, Q_w, Q_p, Q_o são os termos de fonte de água, polímero e óleo, respectivamente. Tais termos de fonte surgem de quaisquer locais de injeção ou de produção. Ademais, temos que v_w, v_p e v_o são as respectivas velocidades das partículas de água, polímero e óleo.

Como estamos supondo que todo o espaço poroso esteja sendo ocupado pelas componentes água, polímero e óleo, temos que

$$s_w + s_p + s_o = 1. \quad (1.2)$$

Como assumimos que o polímero se movimentava passivamente com a água, então segue que

$$v_w = v_p.$$

Definindo $s = s_w + s_p$ como sendo a *saturação da fase aquosa*, $Q_a = Q_w + Q_p$ como sendo o termo de fonte e adicionando as primeiras equações de (1.1), obtemos

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(sv_w) = Q_a.$$

Consideremos a quantidade sv_w como sendo a vazão da fase aquosa, também chamada de velocidade de infiltração e denotemos por v_a . Além disso, denotemos $s_o v_{o,p}$ por v_o como a vazão da fase oleosa. Logo, as equações para a conservação das duas fases tornam-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}v_a &= Q_a, \\ \frac{\partial s_o}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}v_o &= Q_o. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Definindo $c(x, t) = \frac{s_p(x, t)}{s(x, t)}$ como sendo a *concentração de polímero na fase aquosa*, a equação para a conservação de polímero torna-se

$$\frac{\partial(cs)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(cv_a) = Q_p. \quad (1.4)$$

Por [8], [10] e [14], temos que para um escoamento de um fluido simples, a lei de Darcy para um fluxo monofásico pode ser escrita como

$$v = -\frac{\phi \bar{k}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x},$$

onde v é a taxa de fluxo, p é a pressão, μ é a viscosidade do fluido, ϕ é a porosidade e \bar{k} é a permeabilidade absoluta do meio poroso. Em um reservatório homogêneo \bar{k} e ϕ são constantes. Assim, podemos considerar a constante $k = \phi \bar{k}$.

Para um fluxo bifásico a lei de Darcy para as fases aquosa e oleosa podem ser escritas como

$$\begin{aligned} v_a &= -\frac{Kk_a}{\mu_a} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ v_o &= -\frac{Kk_o}{\mu_o} \frac{\partial p}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

com K sendo a permeabilidade absoluta do meio poroso, k_a e k_o denotando as permeabilidades relativas das fases aquosa e oleosa. Observe que, como a fase aquosa contém polímero, a viscosidade μ_a é uma função de c . Assumiremos que μ_a deve ser uma função crescente de c , ou seja, a injeção de polímero faz com que a viscosidade da fase aquosa aumente se tornando um pouco mais próxima (ou menos diferente) da viscosidade do óleo. Com isto, o deslocamento do óleo pela água deve ser melhorado.

O modelo de Corey que utilizaremos neste trabalho afirma que as permeabilidades relativas de cada fase dependem apenas da saturação da própria fase. Sendo assim, consideraremos $k_a = k_a(s)$ e como $s_a + s_o = 1$, escrevemos apenas $k_o = k_o(s)$.

A vazão total de fluido é dada por

$$v = v_a + v_o = -K \left(\frac{k_a(s)}{\mu_a(c)} + \frac{k_o(s)}{\mu_o} \right) \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Tomando, $\kappa(s, c) = \left(\frac{k_a(s)}{\mu_a(c)} + \frac{k_o(s)}{\mu_o} \right)$, temos que,

$$v = -K\kappa(s, c) \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Assim,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{v}{K\kappa(s, c)}. \quad (1.6)$$

Substituindo (1.6) em (1.5) temos que

$$v_a = -\frac{Kk_a(s)}{\mu_a(c)} \left(-\frac{v}{K\kappa(s, c)} \right) = \frac{k_a(s)v}{\kappa(s, c)\mu_a(c)} = \frac{k_a(s)/\mu_a(c)}{\kappa(s, c)} v. \quad (1.7)$$

Definindo a *função de fluxo fracionário da fase aquosa* por

$$f(s, c) = \frac{k_a(s)/\mu_a(c)}{\kappa(s, c)}, \quad (1.8)$$

temos que

$$v_a = f(s, c)v. \quad (1.9)$$

Adicionando as equações em (1.3), obtemos

$$\frac{\partial(s + s_o)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_a + v_o) = Q,$$

onde $Q = Q_a + Q_o$, e como $s + s_o = 1$, então $\frac{\partial}{\partial t}(s + s_o) = 0$ e assim, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x}v = Q. \quad (1.10)$$

Logo, combinando as equações (1.3), (1.4) e (1.9) obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(s, c)v) = Q_a, \\ \frac{\partial(cs)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(cf(s, c)v) = Q_p, \end{cases} \quad (1.11)$$

juntamente com a equação (1.10).

Como estamos trabalhando com um fluxo unidimensional, considerando que não há termos de fonte no interior do reservatório, mas apenas a injeção numa extremidade para produção na extremidade oposta, temos que os termos de fonte Q_a, Q_p e Q são nulos em (1.10) e (1.11). Logo, da equação (1.10), segue que a taxa de fluxo é constante, daí, por simplicidade, tomamos $v = 1$, e assim, as equações tornam-se precisamente o Sistema (1) apresentado na Introdução.

1.2 Propriedades da função de fluxo fracionário da fase aquosa

Nesta seção apresentaremos algumas propriedades da função de fluxo fracionário da fase aquosa f do Sistema (1) definida em (1.8).

Como feito em [13], utilizando o modelo de Corey em que a permeabilidade relativa de cada fase é uma função da saturação da própria fase, consideramos as funções de permeabilidade como sendo quadráticas, ou seja, $k_a = s^2, k_o = (1 - s)^2$ e

além disso, consideramos $r(c) = \frac{\mu_a(c)}{\mu_o}$, e assim a função f definida em (1.8) pode ser escrita como

$$f(s, c) = \frac{s^2}{s^2 + r(c)(1-s)^2}. \quad (1.12)$$

Passemos agora as propriedades da função f dada em (1.12) e indicada na Figura (1.1).

(P1) f é uma função suave de (s, c) .

(P2) $f(0, c) = 0, f(1, c) = 1, \forall c \in (0, 1)$.

(P3) $f_s(s, c) = \frac{2sr(c)(1-s)}{(s^2 + r(c)(1-s)^2)^2} > 0, \forall s \in (0, 1)$ e $\forall c \in (0, 1)$. Logo, f é estritamente crescente para cada valor de c fixo.

(P4) $f_s(0, c) = f_s(1, c) = 0, \forall c \in (0, 1)$.

(P5) para cada valor de c fixo, existe um único ponto de inflexão no gráfico de $f(., c)$ de abscissa denotada por $s^I = s^I(c) \in (0, 1)$ tal que

(i) $f_{ss}(s, c) > 0, \forall s \in [0, s^I)$ (concavidade voltada para cima),

(ii) $f_{ss}(s, c) < 0, \forall s \in (s^I, 1]$ (concavidade voltada para baixo);

De fato, temos que

$$f_{ss}(s, c) = \frac{2r(c) [(r(c) + 1)(2s^3 - 3s^2) + r(c)]}{(s^2 + r(c)(1-s)^2)^3}.$$

Para determinarmos os pontos de inflexão do gráfico de f para cada c fixo basta analisarmos a equação $f_{ss} = 0$. Para tanto, temos que

$$\frac{2r(c) [(r(c) + 1)(2s^3 - 3s^2) + r(c)]}{(s^2 + r(c)(1-s)^2)^3} = 0,$$

e daí, devemos ter que

$$(r(c) + 1)(2s^3 - 3s^2) + r(c) = 0. \quad (1.13)$$

Dividindo (1.13) por $-(r(c) + 1)$ obtemos

$$3s^2 - 2s^3 - \left(\frac{r(c)}{r(c) + 1} \right) = 0.$$

Definindo a função polinomial $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$p(s) = 3s^2 - 2s^3 - \left(\frac{r(c)}{r(c) + 1} \right),$$

temos que p é uma função polinomial do terceiro grau em s e, pelo Teorema Fundamental da Álgebra segue que p possui três raízes, com pelo menos uma delas real.

Derivando p em relação a s , obtemos

$$\frac{dp}{ds}(s) = 6s - 6s^2.$$

Fazendo $\frac{dp}{ds}(s) = 0$ encontramos os pontos críticos de p . Tais pontos são $s = 0$ e $s = 1$. Como p é uma função polinomial do terceiro grau então estes valores são pontos de mínimo ou máximo local de p . Analisemos:

Se $s = 0$ então $p(0) = -\left(\frac{r(c)}{r(c)+1}\right) < 0$ e assim, $(0, p(0))$ é um ponto de mínimo local.

Se $s = 1$ então $p(1) = 1 - \left(\frac{r(c)}{r(c)+1}\right) > 0$ e daí, $(1, p(1))$ é um ponto de máximo local.

Logo, as três raízes de p são reais e distintas, uma no intervalo $(-\infty, 0)$, outra no intervalo $(0, 1)$ e outra no intervalo $(1, +\infty)$. Daí, segue que para cada c fixo, $c \in [0, 1]$, o gráfico da função $f(\cdot, c)$ tem um único ponto de inflexão $(s^I, f(s^I, c))$ tal que $s^I \in (0, 1)$.

(P6) para cada valor de s fixo, temos que $f_c(s, c) = -\frac{r'(c)s^2(1-s)^2}{(s^2 + r(c)(1-s)^2)^2} < 0, \forall c \in (0, 1)$ e daí, a função $f(s, c)$ é decrescente como função de c .

O gráfico da função de fluxo fracionário dada em (1.12) para diferentes valores de c está representado na Figura 1.1. Note que, quando c aumenta, o valor de f diminui, como dito na propriedade (P6).

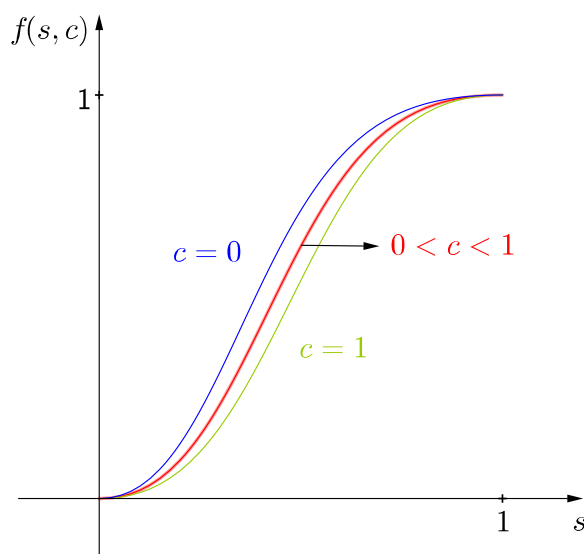


Figura 1.1: Função de fluxo para diferentes valores de c .

Capítulo 2

Estrutura de ondas do sistema de leis de conservação

Neste capítulo, discutiremos sobre as velocidades características (autovalores) associadas ao Sistema (1) e mostraremos que tal sistema é não—estritamente hiperbólico ao longo de uma curva onde as velocidades características coincidem. Além disso, encontraremos as curvas integrais associadas aos campos característicos (autovetores) e finalizaremos com a apresentação das condições de entropia para descontinuidades.

2.1 Velocidades características

Nesta seção, encontraremos os autovalores associados ao Sistema (1). Denominaremos tais autovalores por *velocidades características*. Além disso, encontraremos os autovetores, denominados por *campos característicos*, correspondentes às mesmas. Para tanto, lembremos que o Problema de Riemann para o Sistema (1), é o problema de encontrar uma solução fraca de (1) satisfazendo as condições iniciais

$$(s, c)(x, 0) = \begin{cases} (s^L, c^L) & \text{para } x < 0 \\ (s^R, c^R) & \text{para } x > 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde (s^L, c^L) e (s^R, c^R) são dois estados constantes fixados.

Mostraremos que a solução para cada par de estados iniciais fixados é composta por no máximo dois grupos de ondas elementares de rarefação ou de choque, separados

por um estado intermediário constante. Para maiores detalhes a respeito das ondas elementares, ver o Apêndice A.

O Sistema (1) pode ser escrito como

$$G(u)_t + F(u)_x = 0, \quad (2.2)$$

em que, $u = \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix}$, $G(u) = \begin{pmatrix} s \\ sc \end{pmatrix}$ e $F(u) = \begin{pmatrix} f(s, c) \\ cf(s, c) \end{pmatrix}$. Assim, temos que,

$$dF = \begin{pmatrix} f_s & f_c \\ cf_s & f + cf_c \end{pmatrix}, \quad dG = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & s \end{pmatrix} \text{ e } (dG)^{-1} = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} s & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix}.$$

Para soluções suaves, o Sistema (2.2) pode ser escrito como

$$u_t + A(u)u_x = 0, \quad \text{com } A(u) = (dG)^{-1}dF = \begin{pmatrix} f_s & f_c \\ 0 & \frac{f}{s} \end{pmatrix}.$$

Desta forma, temos que os dois valores característicos são $\lambda^s = f_s$ e $\lambda^c = \frac{f}{s}$.

Note que, λ^c tem limite 0 quando s tende à 0 e portanto, coincide com λ^s na fronteira $s = 0$.

Os campos característicos associados (autovetores) à λ^s e λ^c são dados respectivamente por

$$e^s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } e^c = \begin{pmatrix} -f_c \\ f_s - \frac{f}{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_c \\ \lambda^s - \lambda^c \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

2.2 A perda de hiperbolicidade estrita

Nesta seção, mostraremos que existe uma curva onde as velocidades características coincidem e por isto o Sistema (1) (ou (2.2)) deixa de ser estritamente hiperbólico.

Das expressões $\lambda^s = f_s$ e $\lambda^c = \frac{f}{s}$, a comparação entre velocidades características (autovalores) recai na comparação entre as inclinações f_s das retas tangentes ao gráfico de f e $\frac{f}{s}$ das retas secantes ao gráfico passando pela origem. Assim, das Propriedades (P1), (P2) (P3) e (P4) da função $f(s, c)$ segue que para cada c fixado, existe um único valor positivo $s^* = s^*(c)$ tal que

$$\lambda^c(s, c) = \frac{f(s, c)}{s} \begin{cases} < f_s(s, c) = \lambda^s(s, c) & \text{se } s < s^* \\ = f_s(s, c) = \lambda^s(s, c) & \text{se } s = s^* \\ > f_s(s, c) = \lambda^s(s, c) & \text{se } s > s^*. \end{cases}$$

Portanto, o conjunto dos pontos $\{(s^*(c), c), \quad 0 \leq c \leq 1\}$, compõem a *curva de coincidência*, denotada por \mathcal{C} no espaço de estados $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. E esta curva divide o espaço de estados nas duas regiões a seguir:

$$\Omega_1 = \{(s, c) : s < s^*(c), 0 \leq c \leq 1\} \equiv \{(s, c) \text{ tal que } \lambda^c(s, c) < \lambda^s(s, c)\}$$

e

$$\Omega_2 = \{(s, c) : s > s^*(c), 0 \leq c \leq 1\} \equiv \{(s, c) \text{ tal que } \lambda^c(s, c) > \lambda^s(s, c)\}$$

onde $\lambda^c = \frac{f(s, c)}{s}$ e $\lambda^s = f_s(s, c)$, como ilustrado na Figura (2.1).

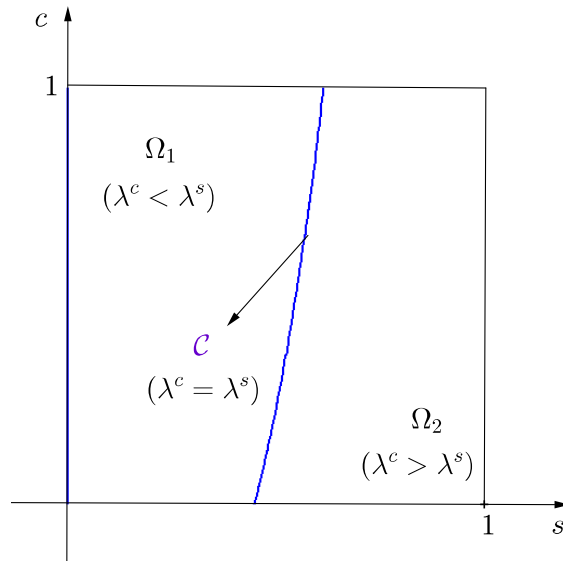


Figura 2.1: Curva de coincidência ($\lambda^c = \lambda^s$).

Nas Figuras 2.2 e 2.3, ilustramos os casos em que $\lambda^c < \lambda^s$ e $\lambda^c > \lambda^s$, respectivamente.

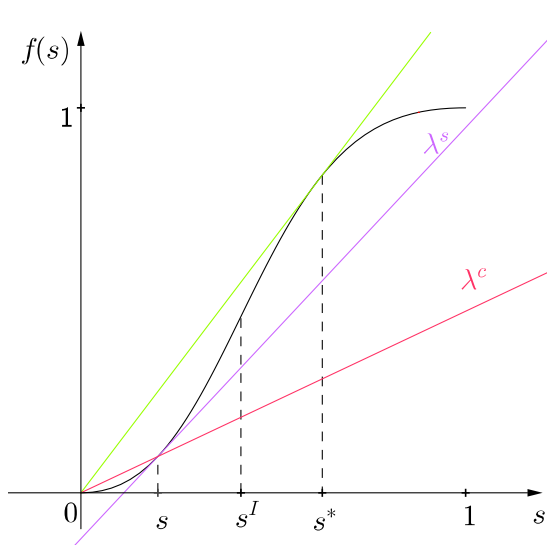


Figura 2.2: Se $s < s^*$ então $\lambda^c < \lambda^s$.

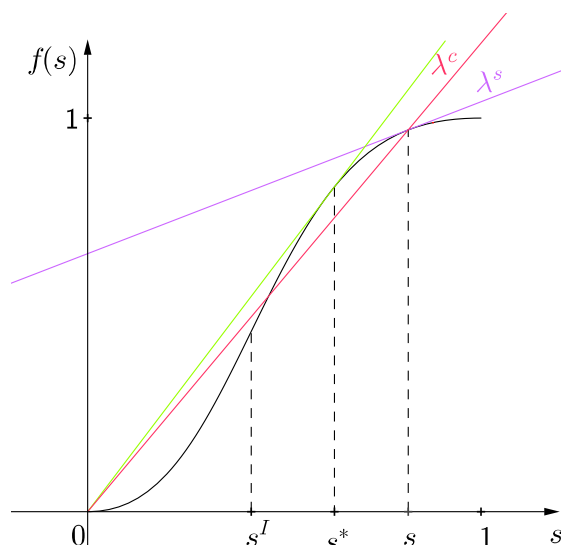


Figura 2.3: Se $s > s^*$ então $\lambda^c > \lambda^s$.

Como mostra a Figura 2.1, a curva de coincidência onde $\lambda^c = \lambda^s$ é cortada por cada reta horizontal $c = cte$ em exatamente um ponto. Quando $\lambda^c = \lambda^s$ temos que $e^c = \begin{pmatrix} -f_c \\ 0 \end{pmatrix}$ e, por isto e^s e e^c são paralelos ao longo da curva de coincidência. Portanto, estes pontos são apenas de coincidência e não são pontos umbílicos, indicando que a matriz A não é diagonalizável ao longo da curva de coincidência.

2.3 Curvas integrais associadas aos campos característicos

Nesta seção, iremos encontrar as curvas integrais associadas aos campos característicos e^s e e^c .

Quando nos referirmos à velocidade característica λ^s chamaremos simplesmente *família característica s* ou *família-s*. Análogo à família-c.

Observação 2.1 *As definições e os conceitos utilizados a seguir encontram-se no Apêndice A.*

2.3.1 O campo das saturações

Para o par (λ^s, e^s) , da expressão de e^s dada em (2.3), temos que as suas curvas integrais são (segmentos de) retas horizontais no espaço de estados. Observemos que, para

$c = cte$, o Sistema (1) se reduz à equação de Buckley–Leverett.

Provemos agora que o campo característico e^s não é genuinamente não-linear, isto é, que existem pontos de inflexão em que $\nabla \lambda^s \cdot e^s = 0$. Para tanto note que, $\nabla \lambda^s \cdot e^s = f_{ss}$. Mas, como mostrado na Seção 1.2, para cada valor de c fixo existe um único ponto de inflexão ($f_{ss} = 0$) pertencente ao intervalo $(0, 1)$ associado à família característica s . Variando c , obtemos então uma curva de pontos de inflexão da família característica s . E assim, o campo e^s não é genuinamente não-linear.

Na Figura 2.4, ilustramos o espaço de estados juntamente com as curvas integrais e a curva de inflexão \mathcal{I} da família- s , além da curva de coincidência \mathcal{C} , ambas obtidas via Maple.

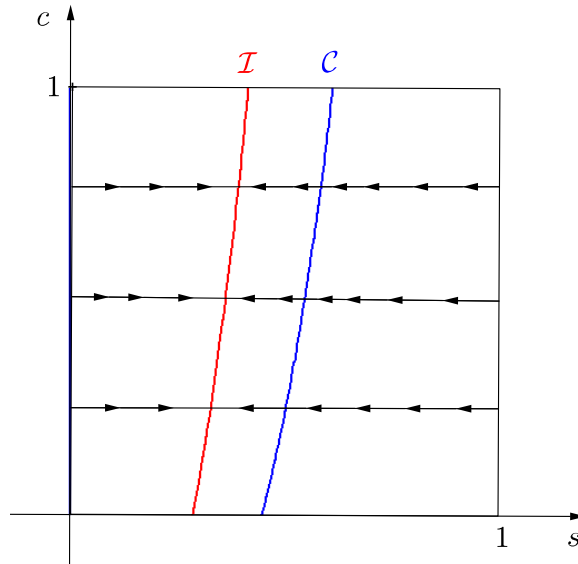


Figura 2.4: Curvas integrais, curva de inflexão \mathcal{I} da família- s e curva de coincidência \mathcal{C} . As setas indicam o crescimento de λ^s ao longo das curvas integrais destacando a curva de inflexão e como são as curvas de rarefação da família- s .

Suponhamos que um estado da esquerda $u^L = (s^L, c^L)$ seja conectado a um estado da direita $u^R = (s^R, c^R)$ por uma onda do campo e^s . Como u^R encontra-se sobre a reta $c = c^L$, já que as curvas integrais associadas a este campo são segmentos de retas horizontais, segue que esta onda é uma solução (rarefação ou choque ou composta rarefação-choque) do problema de Riemann para a equação de Buckley-Leverett, com função de fluxo $f(s, c^L)$, conforme Seção 3.1.

2.3.2 O campo linearmente degenerado

Para o par (λ^c, e^c) , as curvas integrais satisfazem

$$\begin{cases} \frac{ds}{d\xi} = f_c \\ \frac{dc}{d\xi} = \frac{f}{s} - f_s. \end{cases} \quad (2.4)$$

Observe que, como $\lambda^c = \frac{f(s, c)}{s}$, então o gradiente da função λ^c é

$$\nabla \lambda^c(s, c) = \left(\frac{sf_s - f}{s^2}, \frac{f_c}{s} \right) = \left(\frac{s \left(f_s - \frac{f}{s} \right)}{s^2}, \frac{f_c}{s} \right) = \left(\frac{\lambda^s - \lambda^c}{s}, \frac{f_c}{s} \right).$$

Da expressão de e^c , segue que

$$\nabla \lambda^c \cdot e^c = \left(\frac{\lambda^s - \lambda^c}{s}, \frac{f_c}{s} \right) \cdot \left(f_c, \frac{f}{s} - f_s \right) = 0, \quad \forall (s, c) \in \Omega.$$

Portanto, λ^c é constante ao longo das curvas integrais de e^c e deste modo o campo e^c é lineamente degenerado, ou seja, λ^c é uma integral primeira do campo e^c . Assim, por [11], segue que as ondas elementares associadas a este campo característico são todas descontinuidades de contato, não havendo rarefações associadas à ele.

Determinemos agora o perfil das curvas integrais associadas à e^c .

Seja k uma constante e consideremos a equação $\lambda^c(s, c) = k$, isto é,

$$\frac{s^2}{s^2 + r(c)(1-s)^2} = k.$$

Após algumas manipulações algébricas obtemos a equação de grau 2 em s

$$k(1 + r(c))s^2 - (2kr(c) + 1)s + kr(c) = 0. \quad (2.5)$$

Definindo, $\mathcal{F}(s, c) = k(1 + r(c))s^2 - (2kr(c) + 1)s + kr(c)$, a equação (2.5) pode ser escrita como $\mathcal{F}(s, c) = 0$

Derivando (2.5) em c , obtemos

$$\mathcal{F}_c = kr'(c)s^2 - 2kr'(c)s + kr'(c) = k(s-1)^2 r'(c).$$

Como $r'(c) > 0$ então $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial c} \neq 0$, para $0 < s < 1$. Logo, pelo Teorema da Função Implícita, segue que a equação (2.5) define uma curva dada por $c = c(s)$, e com

$$\frac{dc}{ds} = -\frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial c}} = -\frac{2k(1 + r(c))s - (2kr(c) + 1)}{k(s-1)^2 r'(c)}.$$

Ademais, derivando a equação $\lambda^c(s, c) = k$ em s segue que

$$\frac{dc}{ds} = \frac{\frac{f}{s} - f_s}{f_c} = \frac{\lambda^c - \lambda^s}{f_c}. \quad (2.6)$$

Daí, segue que $\frac{dc}{ds} = 0$ ao longo da curva de coincidência \mathcal{C} . Além disso, como $f_c < 0$, então $\frac{dc}{ds} > 0$ se $(s, c) \in \Omega_1$, e $\frac{dc}{ds} < 0$ se $(s, c) \in \Omega_2$ para $0 < s < 1$.

Portanto, a curva integral para o campo característico e^c por um ponto (s^L, c^L) pertencente à Ω coincide com a curva de nível

$$\frac{f(s, c)}{s} = \frac{f(s^L, c^L)}{s^L}.$$

Na Figura 2.5, ilustramos o espaço de estados juntamente com as curvas integrais da família $-c$ e a curva de coincidência, ambas obtidas via Maple.

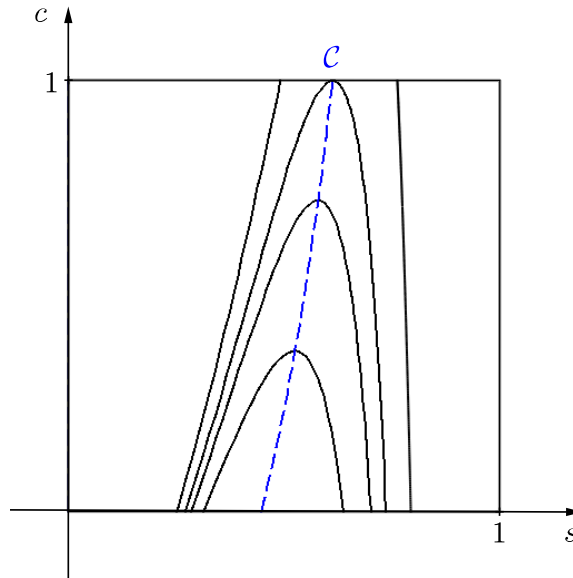


Figura 2.5: Curvas integrais da família $-c$ e curva de coincidência.

Agora, suponha que o estado da esquerda u^L seja conectado ao estado da direita u^R por uma onda associada ao campo c , ou seja, por uma descontinuidade de contato. Logo, por [11] a velocidade de propagação desta onda de contato é

$$\sigma = \frac{f^R - f^L}{s^R - s^L} = \frac{f^R}{s^R} = \frac{f^L}{s^L} = \lambda^c(u^R) = \lambda^c(u^L). \quad (2.7)$$

Observação 2.2 Para simplificar a notação vamos chamar as curvas integrais associadas ao campo e^c apenas de curvas de contato.

Portanto, em resumo, existem dois tipos de ondas para o Sistema (1):

1) s -ondas, que são soluções da equação de Buckley – Leverett conectando estados com $c^L = c^R$, e

2) c -ondas, que são descontinuidades de contato conectando estados sobre a mesma curva integral do campo linearmente degenerado, com $\frac{f(u^L)}{s^L} = \frac{f(u^R)}{s^R}$.

Observação 2.3 *Outros sistemas com a presença de um campo linearmente degenerado aparecem no modelo da dinâmica dos gases [11], num modelo em teoria da elasticidade [4] e num modelo de injeção de água quente em lugar do polímero [9].*

2.4 Condições de Entropia para descontinuidades

Para as descontinuidades associadas ao campo e^s usamos a condição generalizada de Lax, onde uma igualdade é permitida, ou seja, condição de entropia de Oleinik para a equação de Buckley–Leverett com função de fluxo $f(s, c)$, para c constante.

Em termos de equações temos:

- *Condição de Entropia de Lax:* $\frac{\partial f}{\partial s}(s^R, c) < \sigma < \frac{\partial f}{\partial s}(s^L, c);$

- *Condição de Entropia de Oleinik:* $\frac{f(s, c) - f(s^R, c)}{s - s^R} \leq \sigma \leq \frac{f(s, c) - f(s^L, c)}{s - s^L},$
 $\forall s$ entre s^L e s^R .

Para as descontinuidades de contato, a condição de entropia de Lax não se aplica, porque nela não há possibilidade de duas desigualdades em valores de σ e $\lambda^c(u^L) = \lambda^c(u^R)$. Utilizaremos então, de acordo com [2], a condição de que c deva variar monotonicamente ao longo da curva integral do campo e^c que liga (s^L, c^L) à (s^R, c^R) , isto é, (s^L, c^L) e (s^R, c^R) devem estar do mesmo lado da curva de coincidência, ou seja, ambos devem estar na região Ω_1 ou ambos na região Ω_2 .

Para mais detalhes a respeito das condições de entropia, ver o Apêndice A.

Capítulo 3

Solução do Problema de Riemann

Neste capítulo, vamos construir a solução do problema de Riemann associado ao Sistema (1) apresentado na introdução. Para tanto, na Seção 3.1 recaptularemos a solução do problema de Riemann para a equação de Buckley–Leverett, [10]. Na Seção 3.2 iremos tratar de compatibilidade entre as velocidades de choque e velocidades características na sequência de onda que podem aparecer na solução. Utilizaremos a seguinte notação $u^1 \xrightarrow{c} u^2$ para indicar que o estado u^1 pode ser conectado ao estado u^2 por uma c -onda e $u^1 \xrightarrow{s} u^2$ se for uma s -onda. Denotaremos $u^1 \xrightarrow{a} u^2 \xrightarrow{b} u^3$ para dizer que as velocidades da onda “ a ” é compatível com a velocidade da onda “ b ”, com “ a ” e “ b ” podendo ser “ c ” ou “ s ”. E na Seção 3.3 iremos construir de fato a solução do problema de Riemann.

3.1 O problema de Riemann para a equação de Buckley–Leverett

Nesta seção, descreveremos a solução do problema de Riemann para a equação de Buckley–Leverett, associado a um escoamento bifásico (água–óleo) unidimensional idealizado. Isto significa que, $s(x, t)$ deve ser uma solução fraca da equação

$$s_t + f(s)_x = 0, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

com condições iniciais

$$s = \begin{cases} s^L & \text{se } x < 0, \\ s^R & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

e

$$f(s) = \frac{s^2}{s^2 + r(1-s)^2}, \quad (3.3)$$

onde $r = \frac{\mu_a}{\mu_o}$ e μ_a, μ_o são as viscosidades da água e do óleo, respectivamente, $s = s_a$ é a saturação da água e $1 - s = s_o$ é a saturação do óleo, com $0 \leq s \leq 1$.

A função de fluxo fracionário dada em (3.3) é a mesma da Seção 1.1, para um valor c de concentração fixo. Assim, um resumo de suas propriedades são aquelas (P1), (P2), (P3), (P4), (P5) e (P6). O gráfico típico de f está mostrado na Figura 3.1.

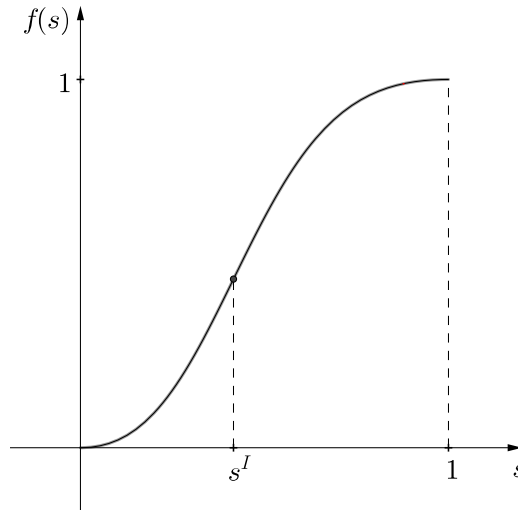


Figura 3.1: Gráfico da função de fluxo para a equação de Buckley–Leverett.

Ademais, sabemos que as soluções da equação de Buckley–Leverett conectando dois estados s^L e s^R são rarefações, choques ou compostas (rarefação–choque), cujos detalhes encontram-se no Apêndice A. Em resumo, temos:

(i) *Solução por rarefação*: é uma solução contínua, de classe C^1 em setores do plano xt . Para que exista solução por rarefação, é necessário que $f'(s)$ seja crescente de $f'(s^L)$ à $f'(s^R)$, ou seja, é preciso que $f''(s) > 0$ para s entre s^L e s^R se $s^L < s^R$ e que $f''(s) < 0$ se $s^L > s^R$.

(ii) *Solução por choque*: é uma solução descontínua ao longo da reta $x/t = \sigma$,

satisfazendo a condição de salto de Rankine–Hugoniot

$$\sigma(s^L - s^R) = f(s^L) - f(s^R).$$

No caso, $\sigma = \frac{f(s^R) - f(s^L)}{s^R - s^L}$ é dita *velocidade de propagação de descontinuidade*.

(iii) *Onda composta – rarefação seguida por choque*: quando uma onda de choque pode ser posta à direita de uma onda de rarefação sem um estado intermediário constante entre elas. Isto significa que temos que ter um estado s^* entre s^L e s^R tal que o Problema de Riemann com dados s^L para $x < 0$ e s^* para $x > 0$ tenha solução por uma rarefação, e o Problema de Riemann com dados s^* para $x < 0$ e s^R para $x > 0$ tenha uma solução por choque com velocidade σ^* , onde $\sigma^* = f'(s^*)$. O ponto $(s^*, f(s^*))$ é conhecido como ponto de Welge, ver [1]. Observe que, no ponto de Welge, a reta tangente ao gráfico de f coincide com a reta secante que passa pelos pontos $(s^*, f(s^*))$ e $(s^R, f(s^R))$.

Para descrever a solução do Problema de Riemann da equação de Buckley–Leverett, vamos considerar a função de extensão ε , a ser definida a seguir.

Seja $\Phi^1 : [0, s^I] \times (s^I, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi^1(s_1, s_2) = (s_1 - s_2) f'(s_2) + f(s_2) - f(s_1).$$

Considerando o ponto $(0, s_0^*)$, onde $s_0^* = 1/\sqrt{1+r^{-1}}$ é ponto de Welge relacionado a $s = 0$, obtemos $\Phi^1(0, s_0^*) = 0$. Observe que, Φ^1 é uma função de classe C^1 , visto que a função f é de classe C^2 . Além disso, como $s_1 < s_2$ e $f''(s_2) < 0$, temos que

$$\frac{\partial \Phi^1}{\partial s_2}(s_1, s_2) = (s_1 - s_2) f''(s_2) > 0$$

e

$$\frac{\partial \Phi^1}{\partial s_1}(s_1, s_2) = f'(s_2) - f'(s_1).$$

Utilizando o Teorema da Função Implícita, temos que existe uma vizinhança $V_{(0, s_0^*)} \subset I \times I$ de $(0, s_0^*)$, um $\delta > 0$ e uma única função $\varepsilon_1 : V_{(0, \delta)} \rightarrow (s^I, 1]$ tal que

$$V_{(0, \delta)} = \{s_1 \in \Pi_1 : 0 \leq s_1 < \delta\},$$

onde $(s_1, \varepsilon_1(s_1)) \in V_{(0, s_0^*)}$ e $\Phi^1(s_1, \varepsilon_1(s_1)) = 0$ para todo $s_1 \in V_{(0, \delta)}$. Além disso, temos que ε_1 é de classe C^1 e

$$\frac{d\varepsilon_1}{ds_1} = -\frac{\Phi_{s_1}^1}{\Phi_{s_2}^1}. \quad (3.4)$$

Para o par $(s_1, \varepsilon_1(s_1))$ temos $f'(s_1) < f'(\varepsilon_1(s_1))$, como na Figura 3.2.

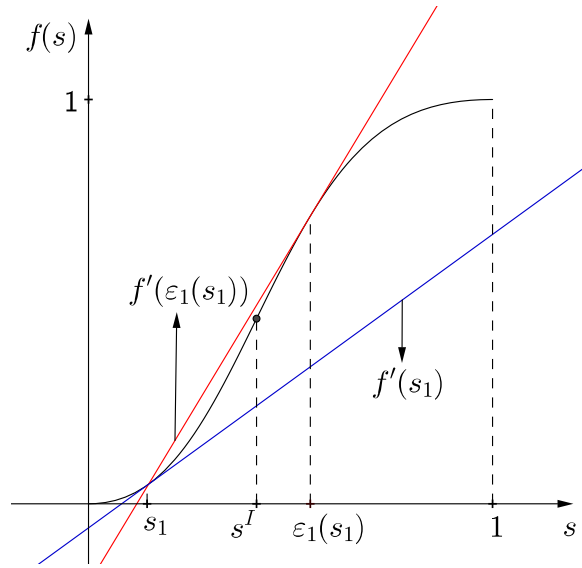


Figura 3.2: $f'(s_1) < f'(\varepsilon_1(s_1))$.

Daí,

$$\frac{\partial \Phi^1}{\partial s_1}(s_1, \varepsilon(s_1)) = f'(\varepsilon(s_1)) - f'(s_1) > 0.$$

Logo, de (3.4) temos que

$$\frac{d\varepsilon_1}{ds_1}(s_1) < 0.$$

Isto significa que a função ε_1 é decrescente.

Considerando agora a função $\Phi^2 : (s^I, 1] \times [0, s^I] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi^2(s_1, s_2) = (s_1 - s_2) f'(s_2) + f(s_2) - f(s_1).$$

De forma análoga à ε_1 , existe uma única função decrescente $\varepsilon_2 : (s^I, 1] \rightarrow [0, s^I]$ de classe C^1 tal que $\Phi^2(s_1, \varepsilon_2(s_1)) = 0$ para todo $s_1 \in (s^I, 1]$.

Definiremos agora a função *extensão* $\varepsilon : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$\varepsilon(s) = \begin{cases} \varepsilon_1(s), & \text{se } s < s^I \\ s^I, & \text{se } s = s^I \\ \varepsilon_2(s), & \text{se } s > s^I. \end{cases}$$

Utilizando as propriedades das funções ε_1 e ε_2 podemos concluir que ε é contínua. Ademais, ε é ainda injetiva, estritamente decrescente e tem imagem $[\varepsilon(1), \varepsilon(0)]$.

Observemos que, pela maneira como a função extensão foi definida, os valores do conjunto imagem, com exceção de $\varepsilon(s^I) = s^I$, determinam pontos de Welge onde a reta tangente ao gráfico de f que passa pelo ponto $(\varepsilon(s), f(\varepsilon(s)))$ coincide com a reta secante que passa pelos pontos $(\varepsilon(s), f(\varepsilon(s)))$ e $(s, f(s))$.

Para simplificar a notação, denotaremos $\varepsilon(1)$ por s^1 e $\varepsilon(0)$ por s^0 .

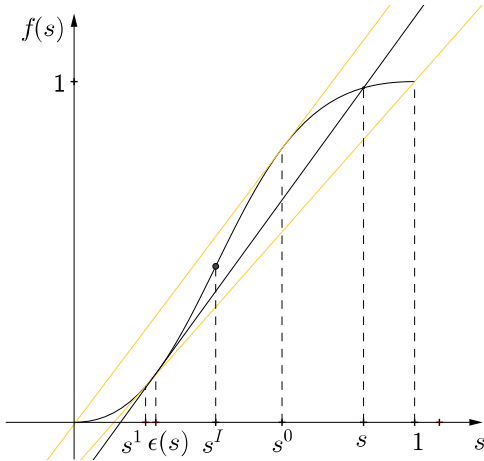


Figura 3.3: $s \in (s^I, 1]$.

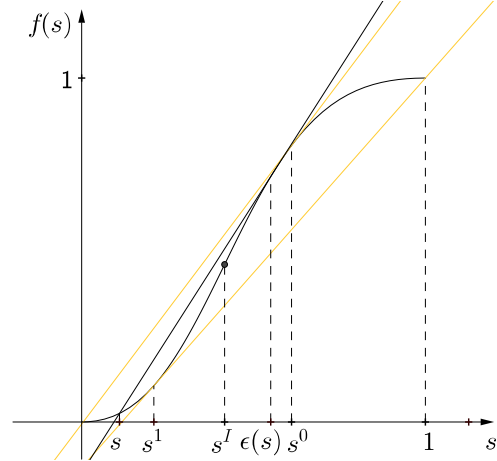


Figura 3.4: $s \in [0, s^I)$.

Consideremos a divisão de $I = [0, 1]$ nos seguintes subintervalos $[0, s^1]$, $(s^1, s^I]$, $(s^I, s^0]$ e $(s^0, 1]$.

Para s^L fixado arbitrariamente em cada um destes subintervalos dividiremos novamente o intervalo I em subintervalos para s^R . Analisadas todas as possibilidades para s^L e s^R , teremos então a descrição da solução do problema de Riemann (3.1)–(3.2) para a equação de Buckley–Leverett. Faremos isto na sequência dos quatro lemas a seguir, cujas demonstrações são feitas analisando o gráfico de f , levando em conta a condição de entropia de Oleinik para choques e as condições de crescimento de f' para as ondas de rarefação.

Lema 3.1 Fixemos s^L tal que $0 \leq s^L \leq s^1$ e dividamos I em subintervalos disjuntos para s^R como a seguir.

- (i) (Figura 3.5) Se $s^L > 0$ e $0 \leq s^R < s^L$, então a solução é dada por uma onda de choque.

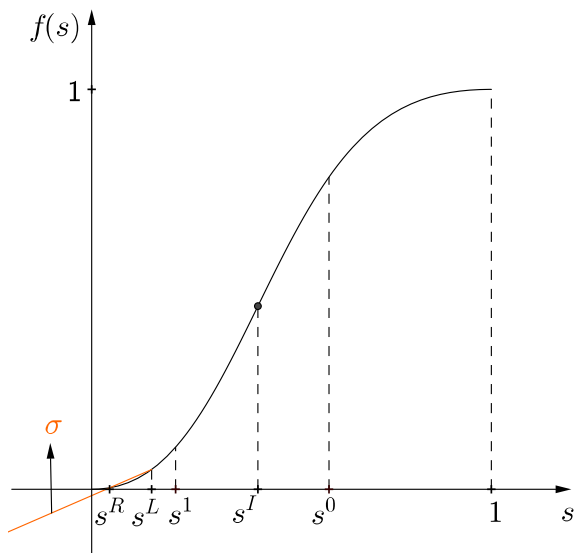


Figura 3.5: $s^L > 0$ e $0 \leq s^R < s^L$.

- (ii) (Figura 3.6) Se $s^L < s^R \leq s^1$, então a solução é uma onda de rarefação.

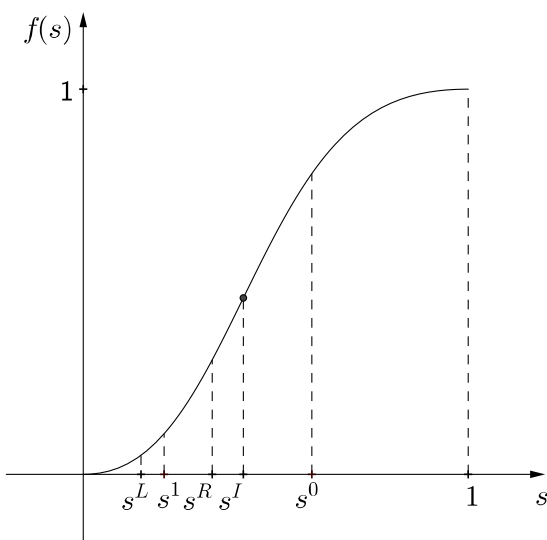


Figura 3.6: $s^L < s^R \leq s^1$.

- (iii) (Figura 3.7) Se $s^I < s^R \leq 1$ então a solução é uma onda composta, formada por uma rarefação de s^L para $\varepsilon(s^R)$ e por um choque de $\varepsilon(s^R)$ para s^R com velocidade $\sigma_\varepsilon = f'(\varepsilon(s^R))$.

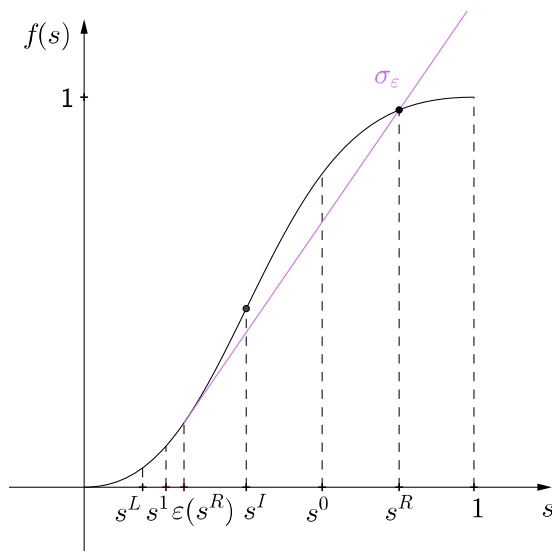


Figura 3.7: $s^I < s^R \leq 1$.

Lema 3.2 Fixemos s^L tal que $s^1 < s^L \leq s^I$ e dividamos I em subintervalos disjuntos para s^R como a seguir.

- (i) (Figura 3.8) Se $0 \leq s^R < s^L$ então a solução é uma onda de choque.

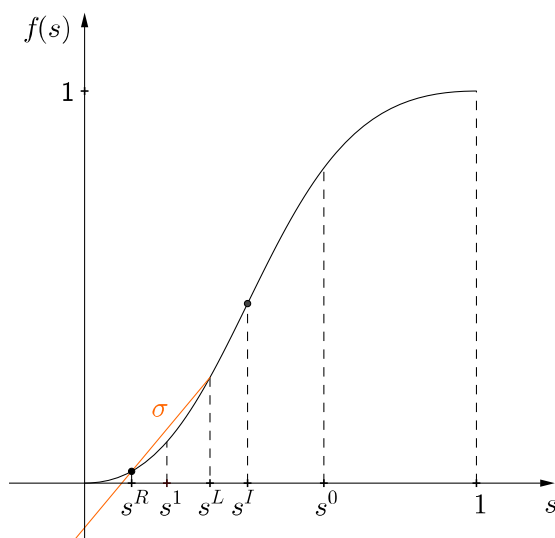


Figura 3.8: $0 \leq s^R < s^L$.

(ii) (Figura 3.9) Se $s^L < s^R \leq s^I$ então a solução é uma onda de rarefação.

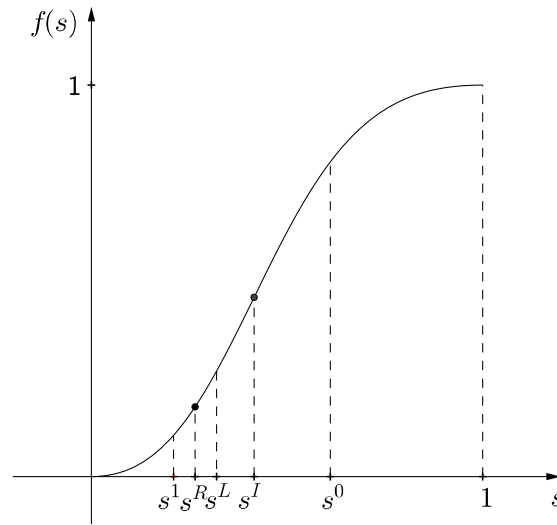


Figura 3.9: $s^L < s^R \leq s^I$.

(iii) (Figura 3.10) Se $s^I < s^R \leq \varepsilon^{-1}(s^L)$ então a solução é uma onda composta, formada por uma rarefação de s^L para $\varepsilon(s^R)$ e por um choque de $\varepsilon(s^R)$ para s^R com velocidade $\sigma_\varepsilon = f'(\varepsilon(s^R))$.

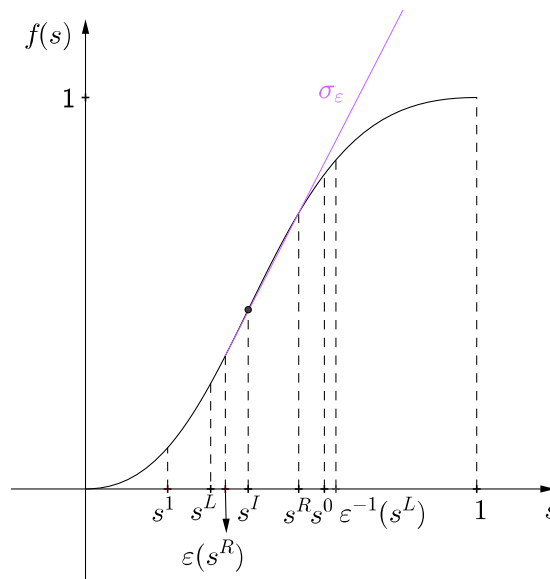


Figura 3.10: $s^I < s^R \leq \varepsilon^{-1}(s^L)$.

(iv) (Figura 3.11) Se $\varepsilon^{-1}(s^L) < s^R \leq 1$ então a solução é uma onda de choque.

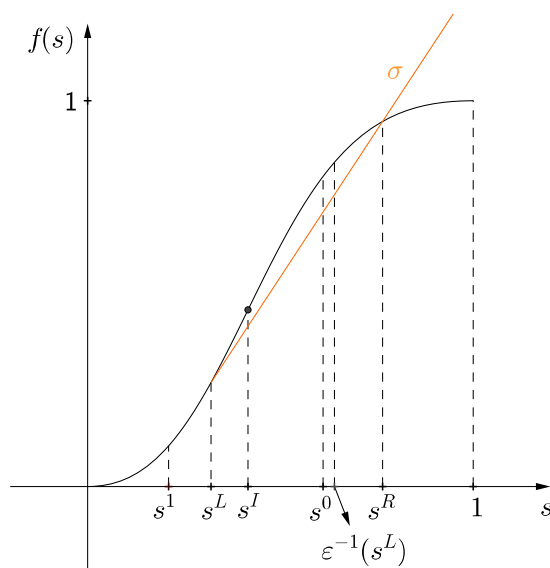


Figura 3.11: $\varepsilon^{-1}(s^L) < s^R \leq 1$.

Lema 3.3 Fixemos s^L tal que $s^I < s^L \leq s^0$ e dividamos I em subintervalos disjuntos para s^R como a seguir.

(i) (Figura 3.12) Se $0 \leq s^R \leq \varepsilon^{-1}(s^L)$ então a solução é uma onda de choque.

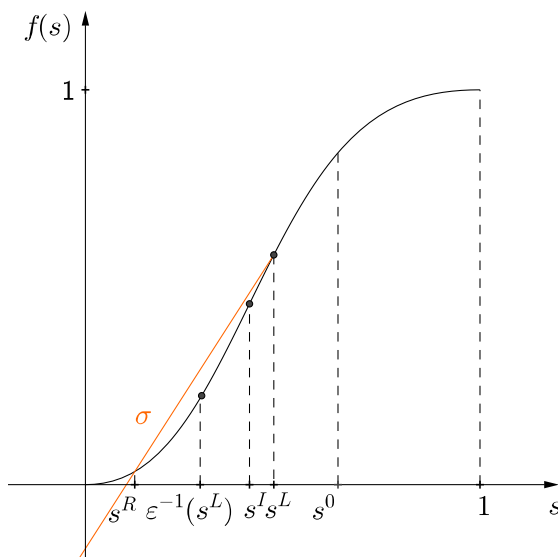


Figura 3.12: $\varepsilon^{-1}(s^L) < s^R \leq 1$.

- (ii) (Figura 3.13) Se $\varepsilon^{-1}(s^L) < s^R < s^I$ então a solução é uma onda composta, formada por uma rarefação de s^L para $\varepsilon(s^R)$ e por um choque de $\varepsilon(s^R)$ para s^R com velocidade $\sigma_\varepsilon = f'(\varepsilon(s^R))$.

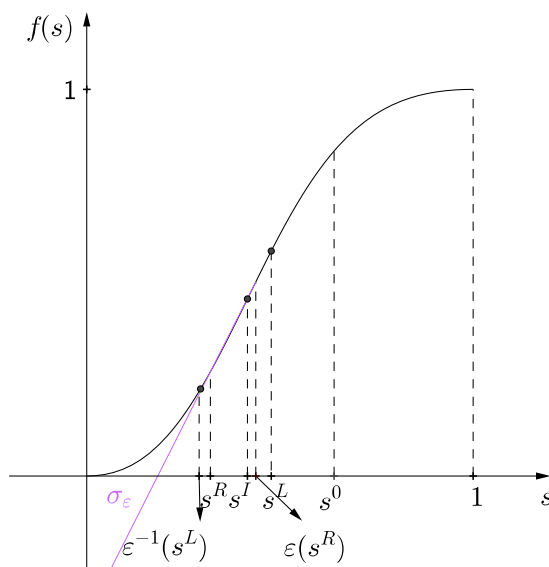


Figura 3.13: $\varepsilon^{-1}(s^L) < s^R < s^I$.

- (iii) (Figura 3.14) Se $s^I \leq s^R < s^L$ então a solução é uma onda de rarefação.

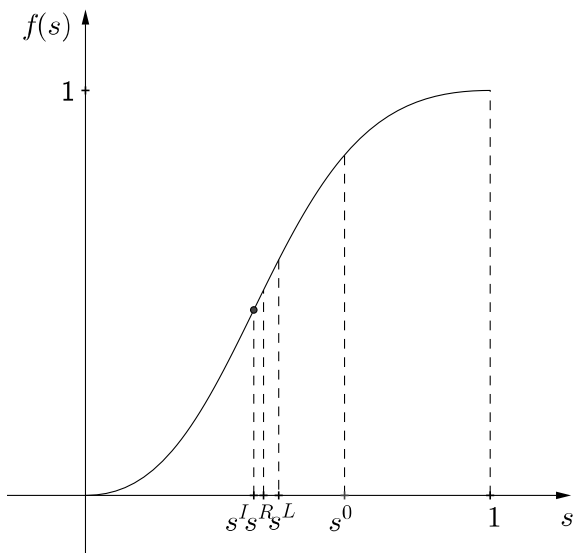


Figura 3.14: $s^I \leq s^R < s^L$.

(iv) (Figura 3.15) Se $s^L < s^R \leq 1$ então a solução é uma onda de choque.

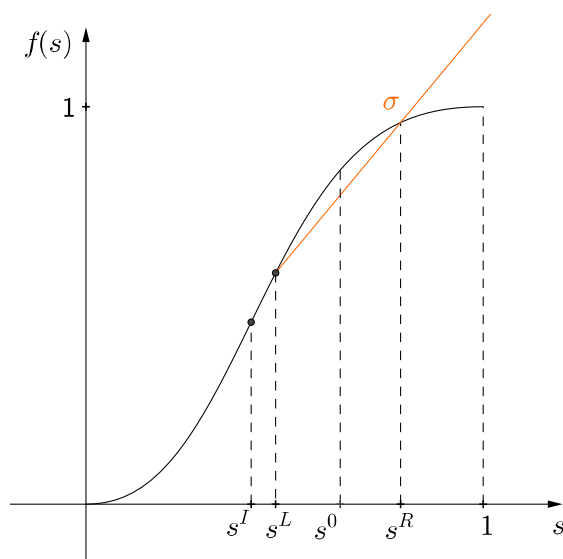


Figura 3.15: $s^L < s^R \leq 1$.

Lema 3.4 Fixemos s^L tal que $s^0 < s^L \leq 1$ e dividamos I em subintervalos disjuntos para s^R como a seguir.

(i) (Figura 3.16) Se $0 \leq s^R < s^I$ então a solução é uma onda composta, formada por uma rarefação de s^L para $\varepsilon(s^R)$ e por um choque de $\varepsilon(s^R)$ para s^R com velocidade $\sigma_\varepsilon = f'(\varepsilon(s^R))$.

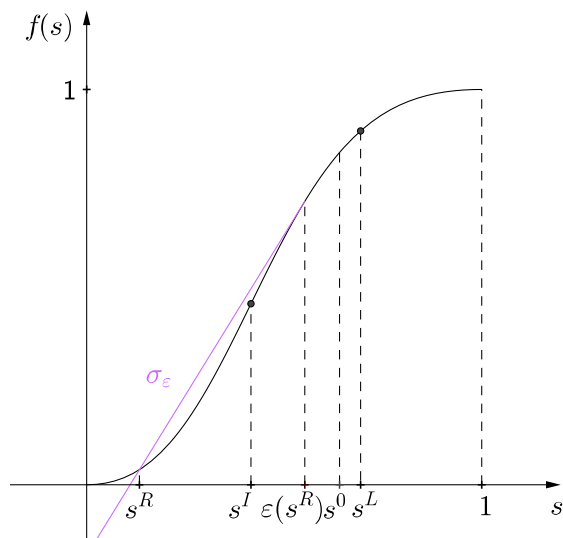


Figura 3.16: $0 \leq s^R < s^I$.

(ii) (Figura 3.17) Para $s^I \leq s^R < s^L$ então a solução é uma onda de rarefação.

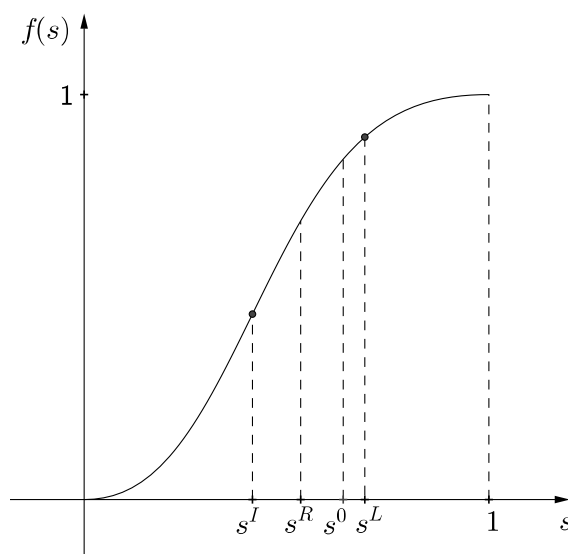


Figura 3.17: $s^I \leq s^R < s^L$.

(iii) (Figura 3.18) Se $s^L < s^R \leq 1$ então a solução é uma onda de choque.

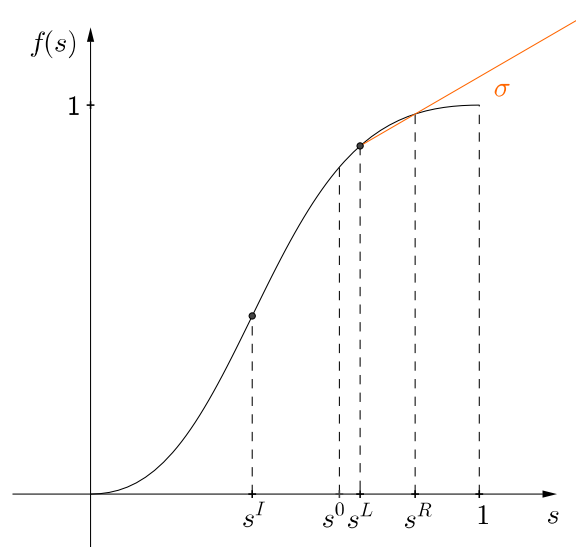


Figura 3.18: $s^L < s^R \leq 1$.

3.2 Compatibilidade de ondas

Nesta seção iremos determinar todos os pares de ondas compatíveis $u^L \xrightarrow{c} u^M \xrightarrow{s} u^R$ e $u^L \xrightarrow{s} u^M \xrightarrow{c} u^R$, onde u^L , u^M e u^R são estados distintos. O conceito de ondas compatíveis está discutido na Seção (A.8). Usaremos o fato de que a s -onda

conectando $u^L = (s^L, c)$ a $u^R = (s^R, c)$ é uma solução da equação de Buckley–Leverett, com dados iniciais

$$s(x, t) = \begin{cases} s^L & \text{se } x < 0 \\ s^R & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Se $u^M \xrightarrow{s} u^R$ for uma s -rarefação então a compatibilidade dada por $u^L \xrightarrow{c} u^M \xrightarrow{s} u^R$ significa que

$$\lambda^c(u^M) \leq \lambda^s(u^M).$$

Se $u^M \xrightarrow{s} u^R$ for um s -choque, a compatibilidade significa que

$$\lambda^c(u^M) \leq \frac{f(u^M) - f(u^R)}{u^M - u^R} = \sigma.$$

Neste último caso, como o choque deve satisfazer a condição de entropia de Oleinik, devemos ter que $\sigma \leq \lambda^s(u^M)$, e daí automaticamente teremos que $\lambda^c(u^M) \leq \lambda^s(u^M)$.

Da mesma forma, se $u^L \xrightarrow{s} u^M$ for uma s -rarefação e se tivermos $u^L \xrightarrow{s} u^M \xrightarrow{c} u^R$ então devemos ter

$$\lambda^c(u^M) \geq \lambda^s(u^M),$$

enquanto se $u^L \xrightarrow{s} u^M$ for um s -choque então devemos ter

$$\lambda^c(u^M) > \frac{f(u^L) - f(u^M)}{u^L - u^M} = \sigma \geq \lambda^s(u^M).$$

As compatibilidades dos dois tipos de sequências de ondas serão estabelecidas nos seguintes lemas (Lema 3.5 e Lema 3.6), cujas demonstrações serão feitas baseadas na solução da equação de Buckley–Leverett e comparando inclinações de retas tangentes e retas secantes ao gráfico de $f(\cdot, c)$ para $c = c^L$, ou $c = c^R$.

Lema 3.5 *Considere uma sequência de ondas do tipo $u^L \xrightarrow{c} u^M \xrightarrow{s} u^R$.*

- (a) *Se $u^M \in \Omega_2$, então as ondas são incompatíveis. Veja Figura 3.19.*
- (b) *Se $u^M \in \mathcal{C}$, então as ondas são compatíveis se, e somente se, $u^R \in \Omega_1$, isto é, $s^R < s^M$. Veja Figura 3.20.*
- (c) *Se $u^M \in \Omega_1$ e $s^R < s^M$ então as ondas são compatíveis. Veja Figura 3.21.*
- (d) *Se $u^M \in \Omega_1$ e $s^R > s^M$ então as ondas são compatíveis quando $\lambda^c(u^R) \geq \lambda^c(u^M)$. Caso contrário, as ondas são incompatíveis. Veja Figura 3.22.*

Nas figuras a seguir ilustramos as compatibilidades dos itens do Lema 3.5 no espaço de estados Ω .

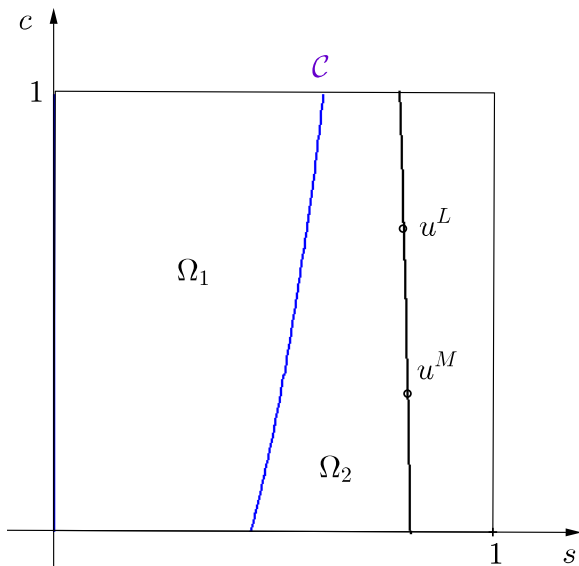


Figura 3.19: Item (a) $u^M \in \Omega_2$ implica incompatibilidade.

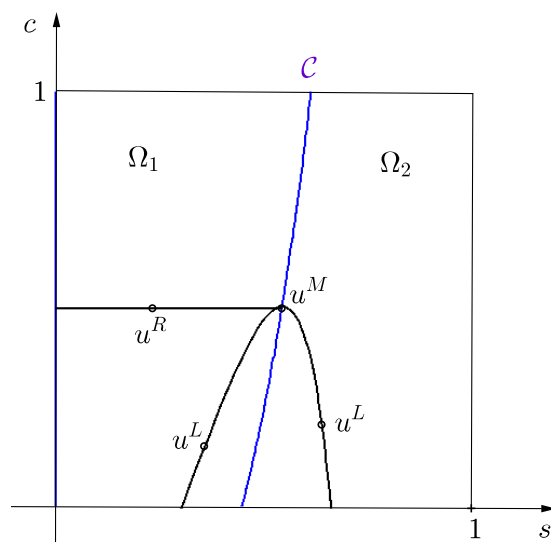


Figura 3.20: Item (b) $u^M \in \mathcal{C}$ implica compatibilidade para $u^R \in \Omega_1$.

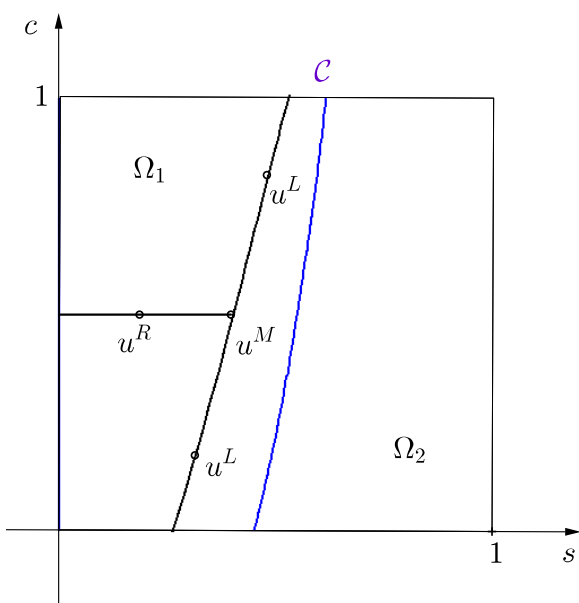


Figura 3.21: Item (c) $u^M \in \Omega_1$ e $s^R < s^M$ implica compatibilidade de ondas.

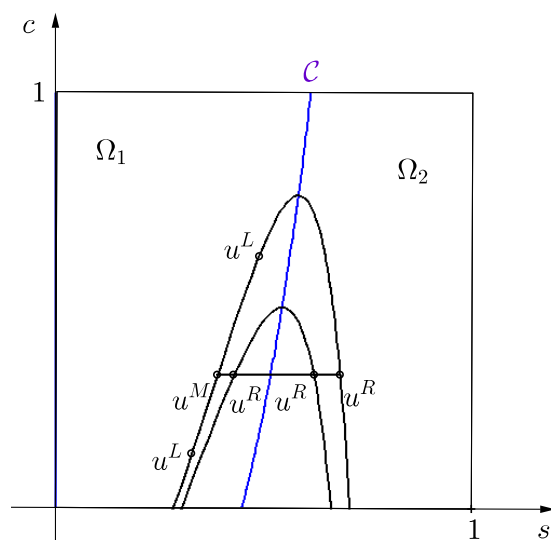


Figura 3.22: Item (d) $u^M \in \Omega_1$ e $s^R > s^M$ implica compatibilidade se $\lambda^c(u^R) \geq \lambda^c(u^M)$.

Demonstração:

Em todos estes casos, a c -onda tem velocidade $\lambda^c(u^L) = \lambda^c(u^M)$ e a s -onda

conecta u^M à u^R na reta $c = c^M = c^R$. As ondas são compatíveis se, e somente se, a velocidade atrás da s -onda é maior ou igual a $\lambda^c(u^M)$.

Lembremos, da Seção 3.1, que o ponto $u^0 = (s^0(c), c) \equiv (s^0, c)$ é tal que $\frac{\partial f}{\partial s}(s^0, c) = \frac{f(s^0, c)}{s^0}$ ou $\lambda^s(s^0, c) = \lambda^c(s^0, c)$ ou (s^0, c) pertence à curva de coincidência \mathcal{C} , isto é, $s^0 \equiv s^0(c)$ é tal que $\lambda^c(u^0) = \lambda^s(u^0)$. Da mesma forma, o ponto $u^1 = (s^1(c), c) \equiv (s^1, c)$ é tal que $\frac{\partial f}{\partial s}(s^1, c) = \frac{f(s^1, c)}{s^1}$. Além disso, $s^I(c)$ é a abscissa do ponto de inflexão do gráfico de f para c constante. Por fim, lembremos que dado um ponto (s^M, c^M) , existe um estado $(\varepsilon(s^M), c^M)$ tal que $\sigma_\varepsilon = \frac{f(\varepsilon(s^M), c^M) - f(s^M, c^M)}{\varepsilon(s^M) - s^M} = \lambda^s(\varepsilon(s^M), c^M)$. Ademais, a s -onda é a solução do Problema de Riemann para a equação de Buckley–Leverett, com

$$\begin{cases} s(x, 0) = s^M, & \text{se } x < 0 \\ s(x, 0) = s^R, & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

cujos detalhes estão na Seção 3.1.

Agora analisemos os casos do enunciado do Lema 3.5.

(3.5 a) Suponha que $u^M = (s^M, c^M) \in \Omega_2$. Isto significa que $\lambda^c(u^M) > \lambda^s(u^M)$ e que $s^0 < s^M \leq 1$. Com isto, teremos que considerar os subcasos (I), (II) e (III) para a abscissa s^R do ponto u^R como a seguir.

(I) (Figura 3.23) Se $s^0 < s^M \leq 1$ e $0 \leq s^R < s^I$ então a s -onda é uma composta rarefação–choque que inicia com velocidade característica $\lambda^s(u^M)$. Como $\lambda^c(u^M) > \lambda^s(u^M)$ então as ondas são incompatíveis.

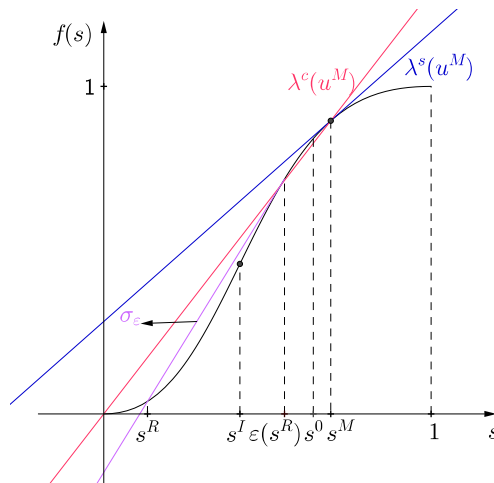


Figura 3.23: $s^0 < s^M < 1$ e $0 < s^R < s^I$.

(II) (Figura 3.24) Se $s^0 < s^M \leq 1$ e $s^I \leq s^R < s^M$, então a s -onda é uma rarefação que inicia com velocidade característica $\lambda^s(u^M)$. Como $\lambda^c(u^M) > \lambda^s(u^M)$, as ondas são incompatíveis.

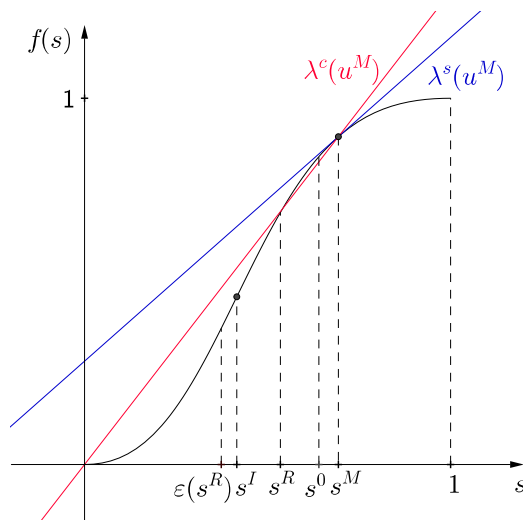


Figura 3.24: $s^0 < s^M < 1$ e $s^I < s^R < s^M$.

(III) (Figura 3.25) Se $s^0 < s^M \leq 1$ e $s^M < s^R \leq 1$, então a s -onda é um choque com velocidade σ . Como este choque é tal que $\sigma < \lambda^s(u^M)$ e $\lambda^s(u^M) < \lambda^c(u^M)$, as ondas são incompatíveis.

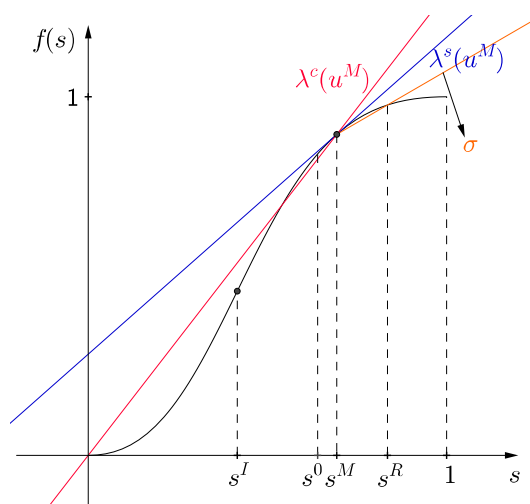


Figura 3.25: $s^0 < s^M < 1$ e $s^M < s^R < 1$.

E assim, o item (3.5 a) do Lema 3.5 está provado.

Passemos à prova do item (3.5 b).

(3.5 b) Suponha que $u^M = (s^M, c^M) \in \mathcal{C}$. Assim, $s^M = s^0(c^M)$ e $\lambda^c(u^M) = \lambda^s(u^M)$. Neste caso também temos que considerar os subcasos (I), (II) e (III) para a abscissa s^R do ponto u^R como a seguir.

(I) (Figura 3.26) Se $s^M = s^0$ e $0 \leq s^R < s^I$, então a s -onda é uma composta rarefação–choque que se inicia com velocidade característica $\lambda^s(u^M)$. Como $\lambda^s(u^M) = \lambda^c(u^M)$, então as ondas são compatíveis.

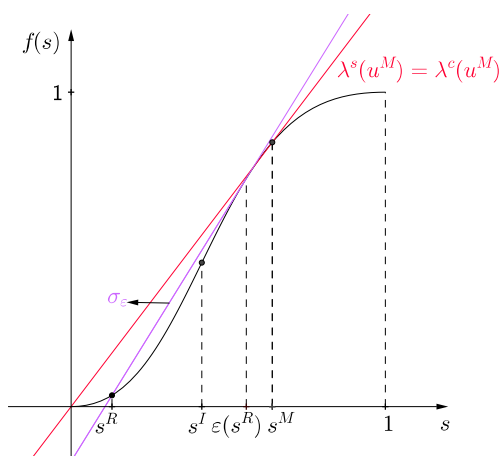


Figura 3.26: $s^M = s^0$ e $0 < s^R < s^I$.

(II) (Figura 3.27) Se $s^M = s^0$ e $s^I \leq s^R < s^M$, então a s -onda é uma rarefação que se inicia com velocidade característica $\lambda^s(u^M) = \lambda^c(u^M)$, o que implica que as ondas são compatíveis.

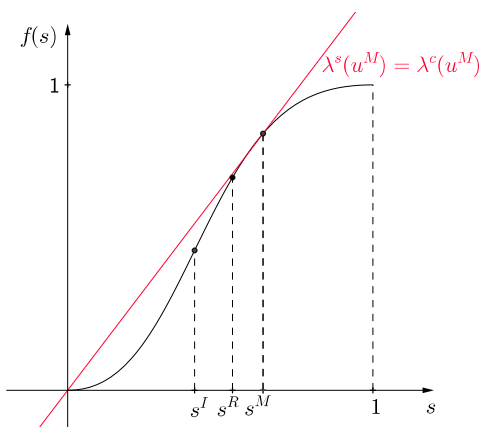


Figura 3.27: $s^M = s^0$ e $s^I < s^R < s^M$.

(III) (Figura 3.28) Se $s^M = s^0$ e $s^M < s^R \leq 1$, então a s -onda é um choque com velocidade σ , com $\sigma < \lambda^s(u^M)$. Como $\lambda^s(u^M) = \lambda^c(u^M)$, então $\sigma < \lambda^c(u^M)$. Daí, segue que as ondas são incompatíveis.

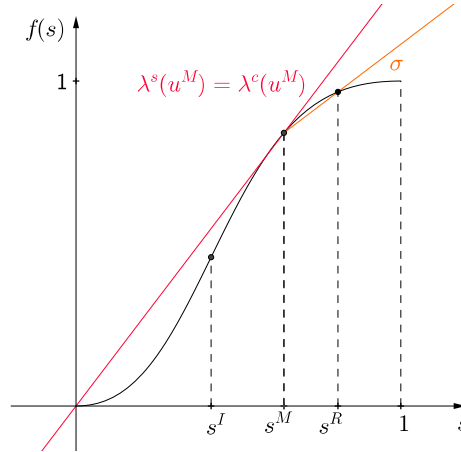


Figura 3.28: $s^M = s^0$ e $s^M < s^R < 1$.

Portanto, o item (3.5 b) do Lema 3.5 está provado.

Passemos à prova do item (3.5 c).

(3.5 c) Suponha que $u^M = (s^M, c^M) \in \Omega_1$, ou seja, $\lambda^c(u^M) < \lambda^s(u^M)$, e que $s^R < s^M$. Neste caso temos que considerar os subcasos (I) e (II) para a abscissa s^R do ponto u^R como a seguir.

(I) (Figura 3.29) Se $0 < s^M < s^I$ e $0 \leq s^R < s^M$, então a s -onda é um choque com velocidade σ . Como $\sigma > \lambda^c(u^M)$ então as ondas são compatíveis.

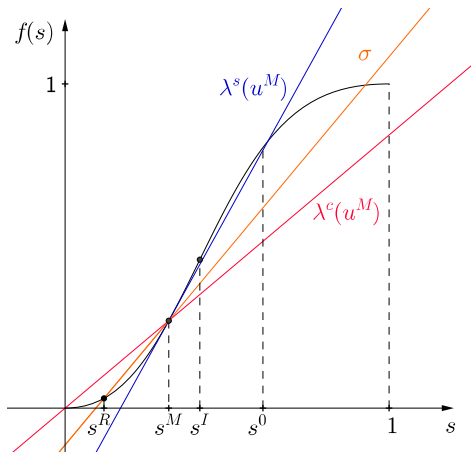


Figura 3.29: $0 < s^M < s^I$ e $0 \leq s^R < s^M$.

(II) Se $s^I \leq s^M \leq s^0$ então há três subcasos para s^R a serem considerados que denotaremos por (i), (ii) e (iii).

(i) (Figura 3.30) Se $s^I \leq s^M \leq s^0$ e $0 \leq s^R \leq \varepsilon^{-1}(s^M) < s^M$, então a s -onda é um choque com velocidade σ . Como $\sigma > \lambda^c(u^M)$ então as ondas são compatíveis.

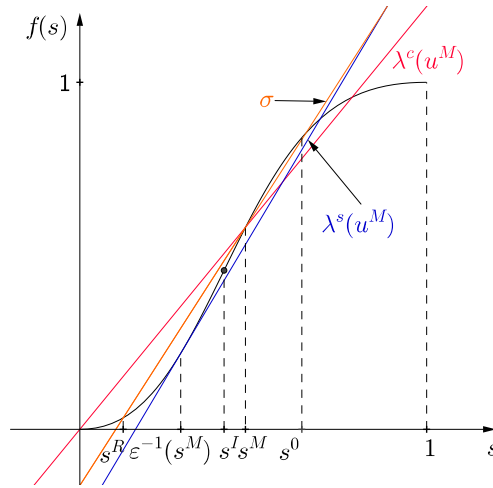


Figura 3.30: $s^I < s^M < s^0$ $0 < s^R < \varepsilon^{-1}(s^M) < s^M$.

(ii)(Figura 3.31) Se $s^I \leq s^M \leq s^0$ e $\varepsilon^{-1}(s^M) < s^R < s^I \leq s^M$, então a s -onda é uma composta rarefação–choque que se inicia pela rarefação com velocidade característica $\lambda^s(u^M)$. Como $\lambda^s(u^M) > \lambda^c(u^M)$, então as ondas são compatíveis.

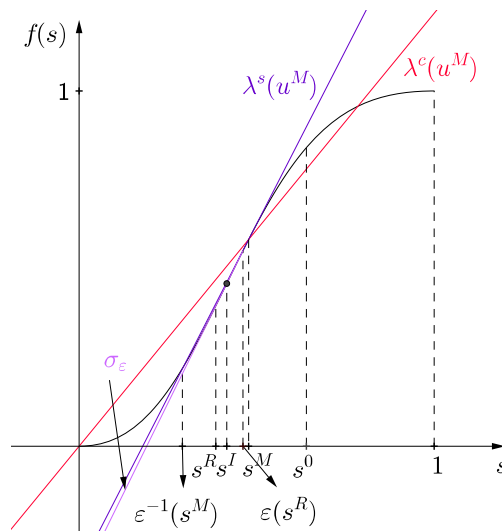


Figura 3.31: $s^I < s^M < s^0$ e $\varepsilon^{-1}(s^M) < s^R < s^I < s^M$.

(iii) (Figura 3.32) Se $s^I \leq s^M \leq s^0$ e $s^I \leq s^R < s^M$, então a s -onda é uma rarefação que se inicia com velocidade característica $\lambda^s(u^M)$. Como $\lambda^s(u^M) > \lambda^c(u^M)$, então as ondas são compatíveis.

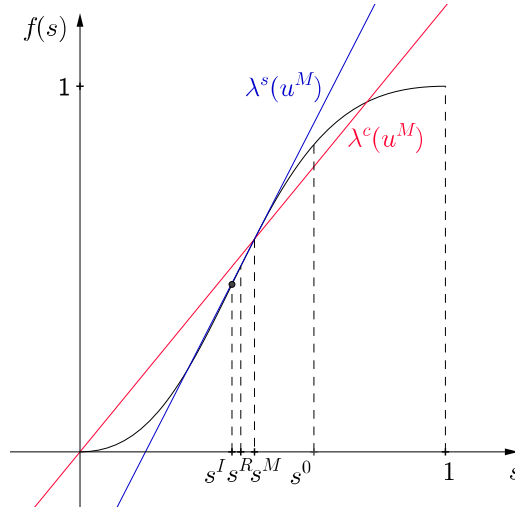


Figura 3.32: $s^I < s^M < s^0$ e $s^I < s^R < s^M$.

Portanto, o item (3.5 c) do Lema 3.5 está provado.

Passemos à prova do item (3.5 d).

(3.5 d) Suponha que $u^M = (s^M, c^M) \in \Omega_1$, ou seja, $\lambda^c(u^M) < \lambda^s(u^M)$, e que $s^R > s^M$.

Supondo que $\lambda^c(u^R) \geq \lambda^c(u^M)$, temos que considerar os subcasos (I), (II) e (II) para a abscissa s^M do ponto u^M como a seguir.

(I) Se $0 \leq s^M < s^1$ então há dois subcasos para s^R a serem considerados que denotaremos por (i) e (ii).

(i) (Figura 3.33) Se $0 \leq s^M < s^1$ e $s^M < s^R \leq s^I$, então a s -onda é uma rarefação iniciando com velocidade característica $\lambda^s(u^M)$. Como $\lambda^s(u^M) > \lambda^c(u^M)$, então as ondas são compatíveis.

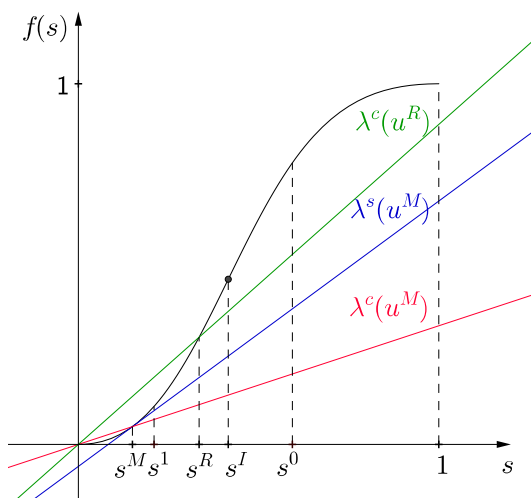


Figura 3.33: $0 < s^M < s^1$ e $s^M < s^R < s^I$.

(ii) (Figura 3.34) Se $0 \leq s^M < s^1$ e $s^I < s^R \leq 1$, então a s -onda é uma composta rarefação–choque, iniciando com velocidade característica $\lambda^s(u^M)$. Como $\lambda^s(u^M) > \lambda^c(u^M)$, então as ondas são compatíveis.

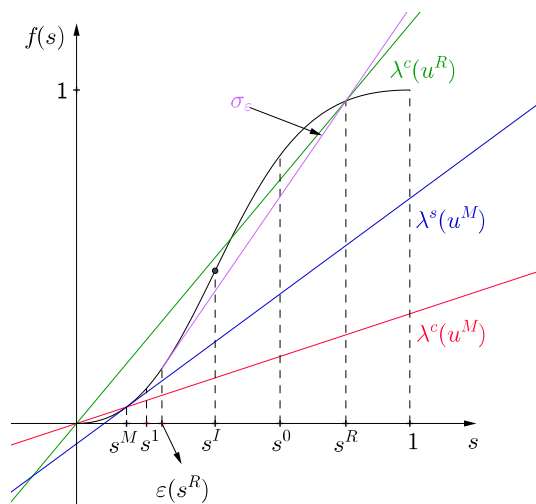


Figura 3.34: $0 < s^M < s^1$ e $s^I < s^R < 1$.

(II) Se $s^1 \leq s^M < s^I$ então há três subcasos para s^R (com $s^R > s^M$) a serem considerados que denotaremos por (i), (ii) e (iii).

(i) (Figura 3.35) Se $s^1 \leq s^M < s^I$ e $s^M < s^R \leq s^I$, então a s -onda é uma rarefação iniciando com velocidade característica $\lambda^s(u^M)$. Como $\lambda^s(u^M) \geq \lambda^c(u^M)$, então as ondas são compatíveis.

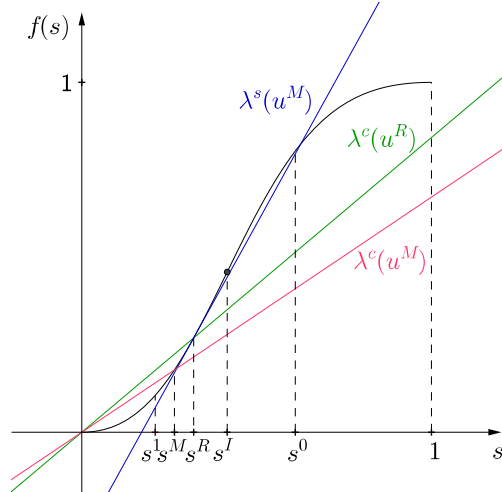


Figura 3.35: $s^1 < s^M < s^I$ e $s^M < s^R < s^I$.

(ii) (Figura 3.36) Se $s^1 \leq s^M < s^I$ e $s^I < s^R \leq \varepsilon^{-1}(s^M)$, então a s -onda é uma composta rarefação-choque, iniciando com velocidade característica $\lambda^s(u^M)$. Como $\sigma^* \geq \lambda^s(u^M) > \lambda^c(u^M)$ e $\lambda^s(u^M) > \lambda^c(u^M)$ então as ondas são compatíveis.

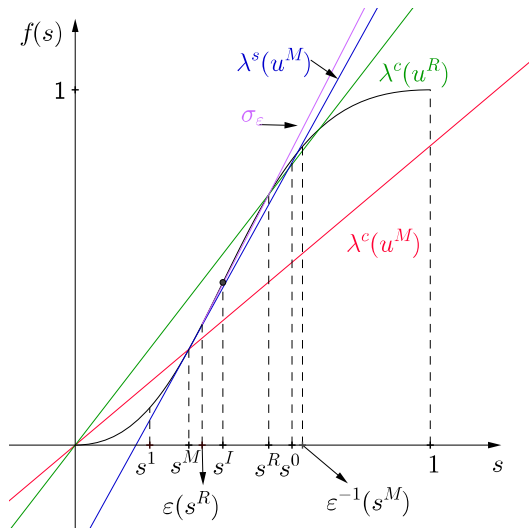


Figura 3.36: $s^1 < s^M < s^I$ e $s^I < s^R < \varepsilon^{-1}(s^M)$.

(iii) (Figura 3.37) Se $s^1 \leq s^M < s^I$ e $\varepsilon^{-1}(s^M) < s^R \leq 1$, então a s -onda é um choque

com velocidade σ . Como $\sigma \geq \lambda^c(u^M)$ então as ondas são compatíveis. O que conclui o subcaso (II).

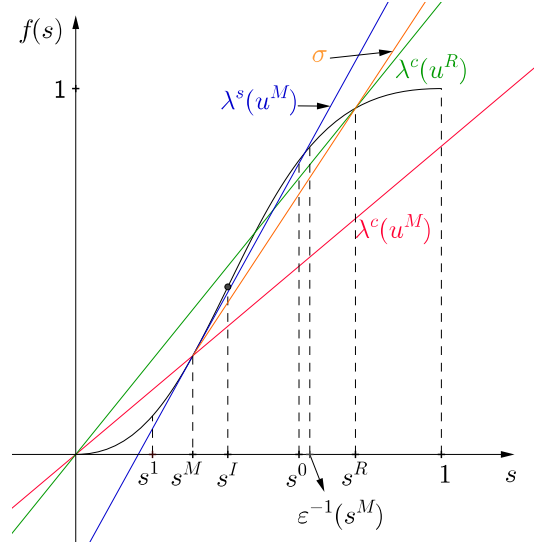


Figura 3.37: $s^1 < s^M < s^I$ e $\varepsilon^{-1}(s^M) < s^R < 1$.

(III) Se $s^I < s^M < s^0$, então há dois subcasos para s^R (com $s^R > s^M$) a serem considerados que denotaremos por (i) e (ii). Neste caso, existe $\tilde{s} \in (s^0, 1)$ tal que $\lambda^c(u^M) = \lambda^c(\tilde{s}, c^M)$.

(i)(Figura 3.38) Se $s^I < s^M < s^0$ e $s^M < s^R \leq \tilde{s}$, então $\lambda^c(u^R) \geq \lambda^c(u^M)$ e a s -onda é um choque com velocidade σ . Como $\sigma \geq \lambda^c(u^M)$, então as ondas são compatíveis.

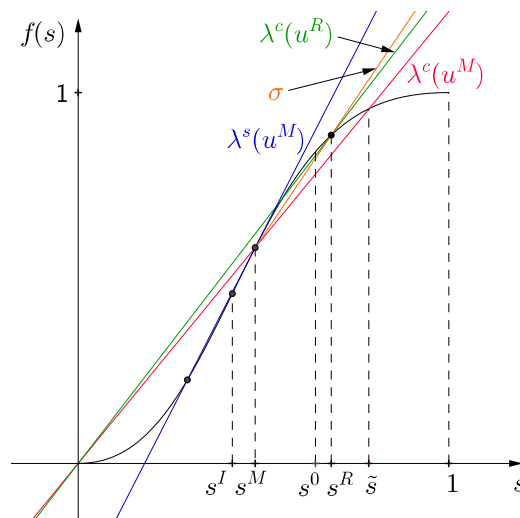


Figura 3.38: $s^M < s^R < \tilde{s}$.

(ii) (Figura 3.39) Se $s^I \leq s^M < s^0$ e $\tilde{s} < s^R \leq 1$, então $\lambda^c(u^R) < \lambda^c(u^M)$ e a s -onda também é um choque com velocidade σ , porém temos que $\sigma < \lambda^c(u^M)$, e assim, as ondas são incompatíveis.

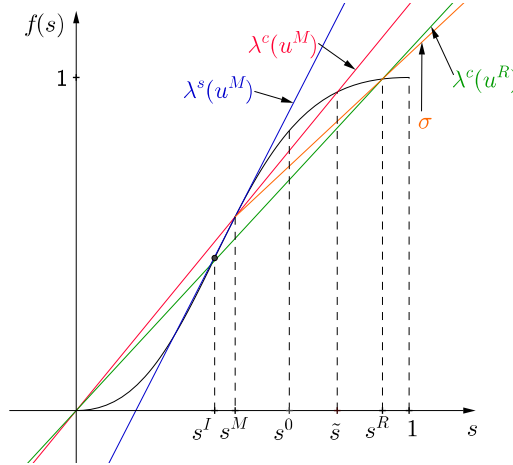


Figura 3.39: $s^I < s^M < s^0$ e $\tilde{s} < s^R < 1$.

Portanto, logo após a análise de todos os subcasos, o item (3.5 d) está provado. E assim, concluímos a prova do Lema 3.5. ■

Passemos agora ao Lema 3.6.

Lema 3.6 Considere uma sequência de ondas do tipo $u^L \xrightarrow{s} u^M \xrightarrow{c} u^R$.

- (a) Se $u^M \in \Omega_1$, então as ondas são incompatíveis. Veja Figura 3.40.
- (b) Se $u^M \in \mathcal{C}$, então as ondas são compatíveis se, e somente se, $u^L \in \Omega_2$, isto é, $s^L > s^M$. Veja Figura 3.41.
- (c) Se $u^M \in \Omega_2$ e $s^L > s^M$ então as ondas são compatíveis. Veja Figura 3.42.
- (d) Se $u^M \in \Omega_2$ e $s^L < s^M$ então as ondas são compatíveis quando $\lambda^c(u^L) \geq \lambda^c(u^M)$. Caso contrário, as ondas são incompatíveis. Veja Figura 3.43.

Nas figuras a seguir ilustramos as compatibilidades dos itens do Lema 3.6 no espaço de estados Ω .

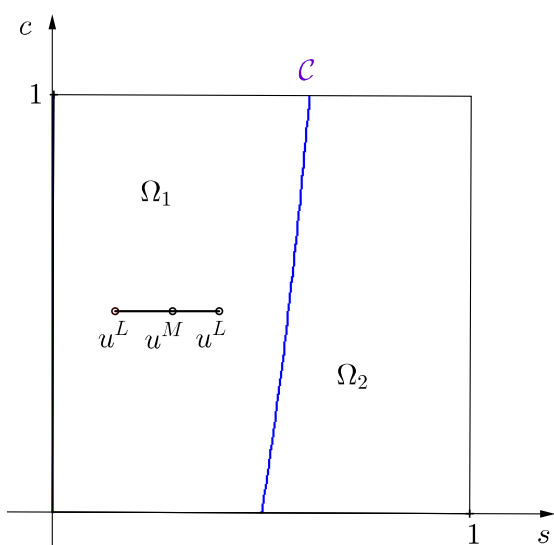


Figura 3.40: Item (2a) $u^M \in \Omega_1$ implica incompatibilidade.

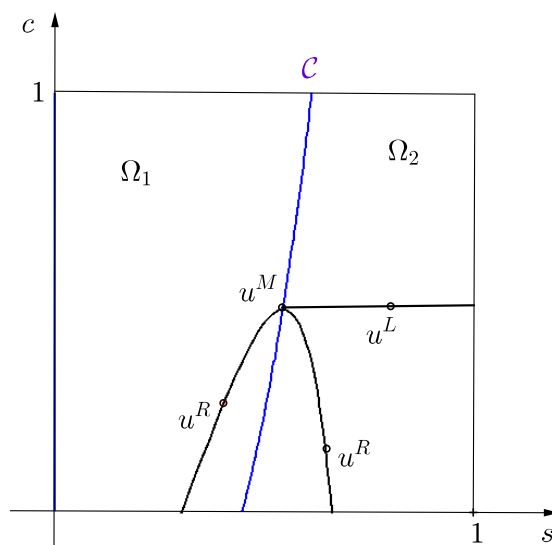


Figura 3.41: Item (2b) $u^M \in C$ implica compatibilidade para $u^L \in \Omega_2$.

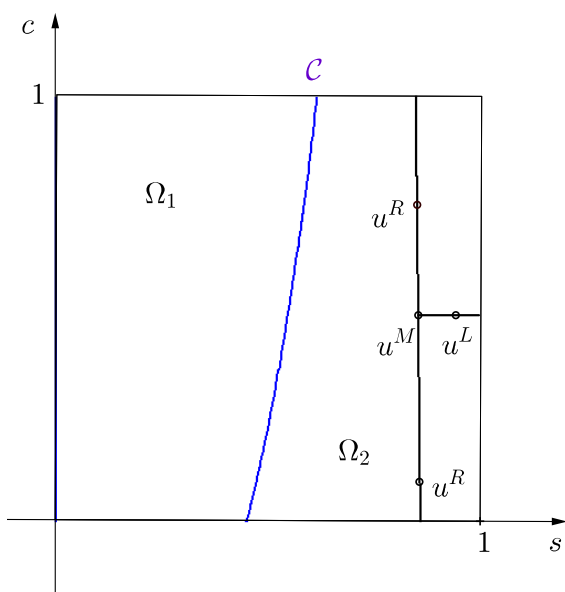


Figura 3.42: Item (2c) $u^M \in \Omega_2$ e $s^L > s^M$ implica compatibilidade de ondas.

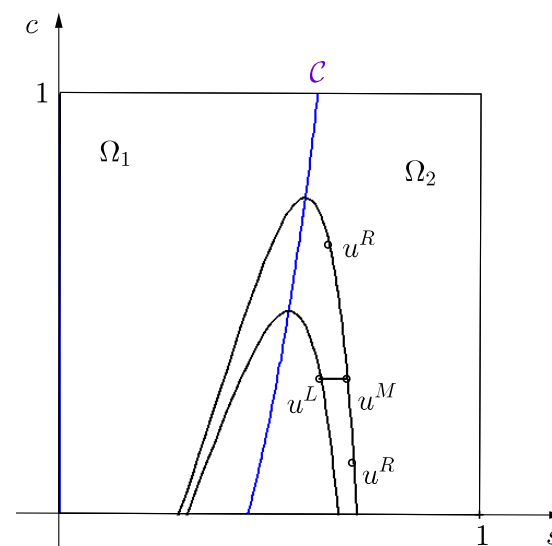


Figura 3.43: Item (2d) $u^M \in \Omega_2$ e $s^L < s^M$ implica compatibilidade se $\lambda^c(u^L) \geq \lambda^c(u^M)$.

Demonstração:

Em todos estes casos, a c -onda tem velocidade $\lambda^c(u^R) = \lambda^c(u^M)$ e a s -onda conecta u^L à u^M na reta $c = c^M = c^L$. Assim as ondas são compatíveis se, e somente se, a velocidade na frente da s -onda é menor ou igual a $\frac{f(u^M)}{s^M} = \lambda^c(u^M)$.

(3.6 a) Suponhamos que $u^M = (s^M, c^M) \in \Omega_1$, isto significa que, $0 \leq s^M < s^0$ e $\lambda^c(u^M) < \lambda^s(u^M)$. Há dois casos a considerar, (i) e (ii), conforme a seguir.

(i) Consideremos $0 \leq s^M \leq s^I$. Temos os subcasos (I), (II) e (III) para a coordenada s^L de u^L a seguir.

(I) (Figura 3.44) Se $0 < s^M \leq s^I$ e $0 \leq s^L < s^M$, então a s -onda é uma rarefação que termina com velocidade característica $\lambda^s(u^M)$. Como $\lambda^s(u^M) > \lambda^c(u^M)$, então as ondas são incompatíveis.

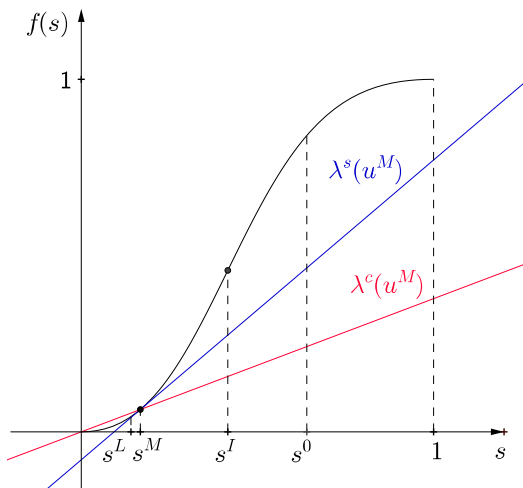


Figura 3.44: $0 < s^M < s^I$ e $0 < s^L < s^M$.

(II) (Figura 3.45) Se $0 \leq s^M \leq s^I$ e $s^M < s^L < \varepsilon(s^M)$, então a s -onda é um choque com velocidade $\sigma > \lambda^s(u^M)$. Como $\lambda^s(u^M) > \lambda^c(u^M)$, então as ondas são incompatíveis.

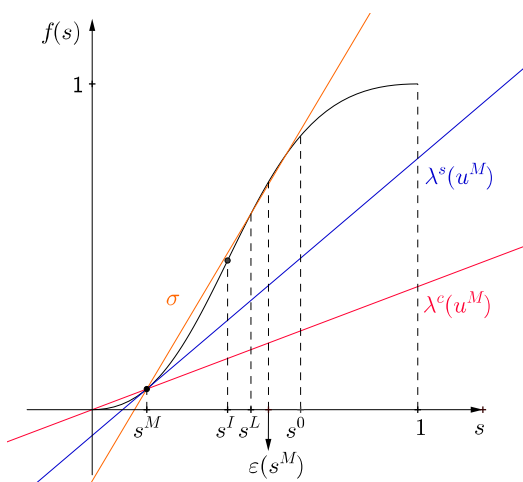


Figura 3.45: $0 < s^M < s^I$ e $s^M < s^L < \varepsilon(s^M)$.

(III) (Figura 3.46) Se $0 \leq s^M \leq s^I$ e $\varepsilon(s^M) \leq s^L \leq 1$, então a s -onda é uma composta rarefação–choque que termina em u^M com velocidade por um choque de velocidade $\sigma_\varepsilon = \frac{f(u^M) - f(\varepsilon(u^M))}{s^M - \varepsilon(u^M)}$ tal que $\sigma_\varepsilon > \lambda^s(u^M)$. Como $\lambda^s(u^M) > \lambda^c(u^M)$ segue que ondas são incompatíveis.

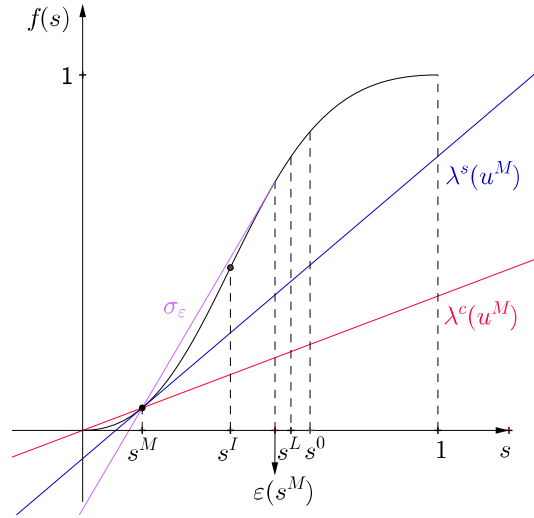


Figura 3.46: $0 < s^M < s^I$ e $\varepsilon(s^M) < s^L < 1$.

Assim, concluímos o subcaso (i) de (3.6 a). Passemos agora ao subcaso (ii) de (3.6 a).

(ii) Consideremos agora s^M tal que $s^I < s^M < s^0$. Assim, temos os subcasos (I), (II) e (III) para a coordenada s^L do estado u^L .

(I) (Figura 3.47) Se $s^I < s^M < s^0$ e $0 \leq s^L \leq \varepsilon(s^M)$, então a s -onda é uma composta que termina pelo choque de velocidade σ_ε com $\sigma_\varepsilon > \lambda^s(u^M)$. Como $\lambda^s(u^M) > \lambda^c(u^M)$, segue que as ondas são incompatíveis.

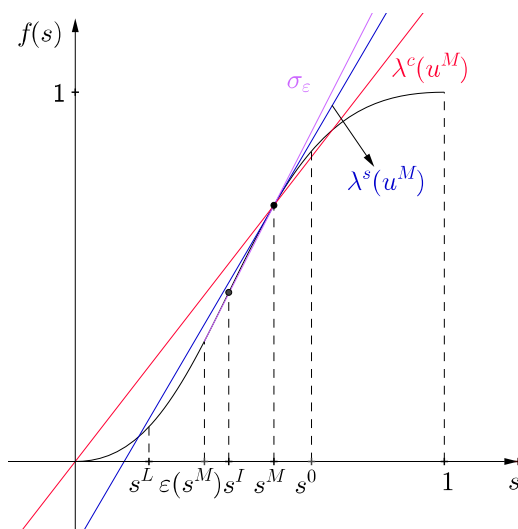


Figura 3.47: $s^I < s^M < s^0$ e $0 \leq s^L < \varepsilon(s^M)$.

(II) (Figura 3.48) Se $s^I < s^M < s^0$ e $\varepsilon(s^M) < s^L < s^M$, então a s -onda é um choque com velocidade $\sigma > \lambda^s(u^M)$. Como $\lambda^s(u^M) > \lambda^c(u^M)$ então as ondas são incompatíveis.

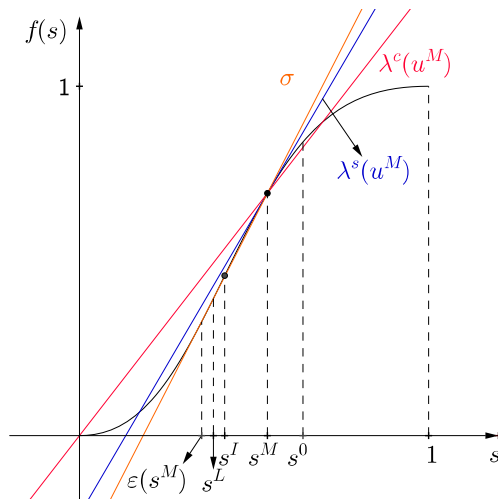


Figura 3.48: $s^I < s^M < s^0$ e $\varepsilon(s^M) < s^L < s^M$.

(III) (Figura 3.49) Se $s^I < s^M < s^0$ e $s^M < s^L \leq 1$, então a s -onda é uma rarefação que termina em u^M com velocidade característica $\lambda^s(u^M)$. Como $\lambda^s(u^M) > \lambda^c(u^M)$, então as ondas são incompatíveis.

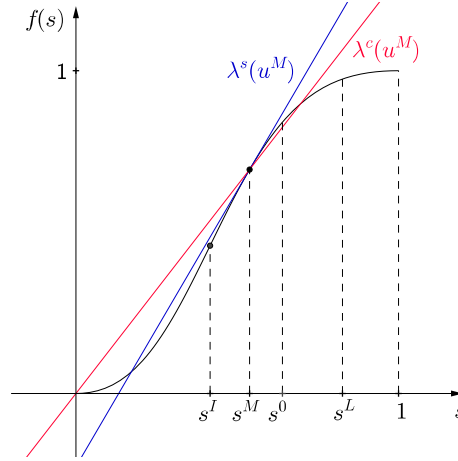


Figura 3.49: $s^I < s^M < s^0$ e $s^M < s^L < 1$.

Logo, o item (3.6 a) do Lema 3.6 está provado. Passemos agora ao item (3.6 b).

(3.6 b) Suponha agora que, $u^M = (s^M, c^M) \in \mathcal{C}$. Assim $s^M = s^0 \equiv s^0(c^L)$ e $\lambda^c(u^M) = \lambda^s(u^M)$. Temos os subcasos (I), (II) e (III) a seguir para as coordenadas s^L do estado u^L .

(I) (Figura 3.50) Se $s^M = s^0$ e $0 \leq s^L \leq \varepsilon(s^M)$, então a s -onda é uma composta que termina pelo choque de velocidade σ_ε com $\sigma_\varepsilon > \lambda^s(u^M) = \lambda^c(u^M)$, então as ondas são incompatíveis.

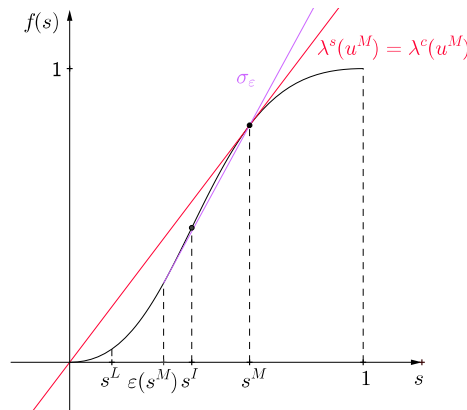


Figura 3.50: $s^M = s^0$ e $0 < s^L < \varepsilon(s^M)$.

(II) (Figura 3.51) Se $s^M = s^0$ e $\varepsilon(s^M) < s^L < s^M$, então a s -onda é um choque com velocidade $\sigma = \frac{f(u^L) - f(u^M)}{s^L - s^M}$. Como $\sigma > \lambda^c(u^M)$, então segue que, as ondas são incompatíveis.

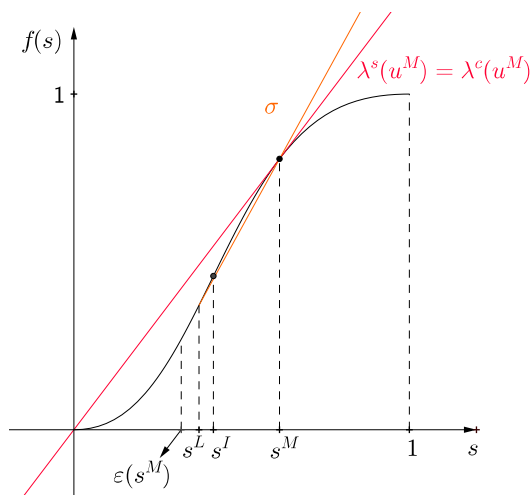


Figura 3.51: $s^M = s^0$ e $\varepsilon(s^M) < s^L < s^M$.

(III) (Figura 3.52) Se $s^M = s^0$ e $s^M < s^L \leq 1$, então a s -onda é uma rarefação que termina em u^M com velocidade característica $\lambda^s(u^M)$. Como $\lambda^s(u^M) = \lambda^c(u^M)$, então as ondas são compatíveis.

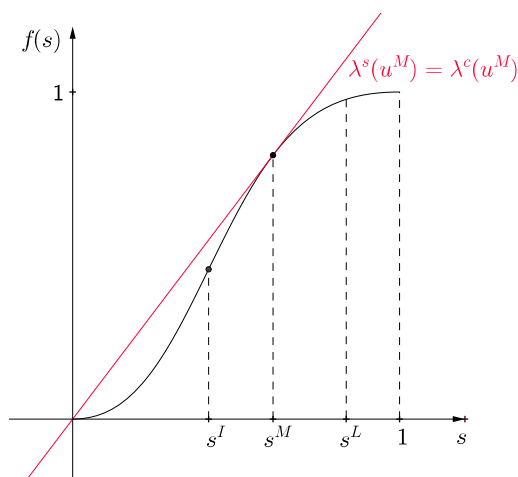


Figura 3.52: $s^M = s^0$ e $s^M < s^L < 1$.

E assim, fica provado o item (3.6 b) do Lema 3.6.

Passemos agora ao item (3.6 c).

(3.6 c) (Figura 3.53) Suponhamos que $u^M = (s^M, c^M) \in \Omega_2$ e que $s^L > s^M$. Daí, $\lambda^c(u^M) > \lambda^s(u^M)$ e $s^0 < s^M \leq 1$. Logo, a s -onda é uma rarefação que termina em u^M com velocidade característica $\lambda^s(u^M)$. Como $\lambda^s(u^M) < \lambda^c(u^M)$, então as ondas são compatíveis.

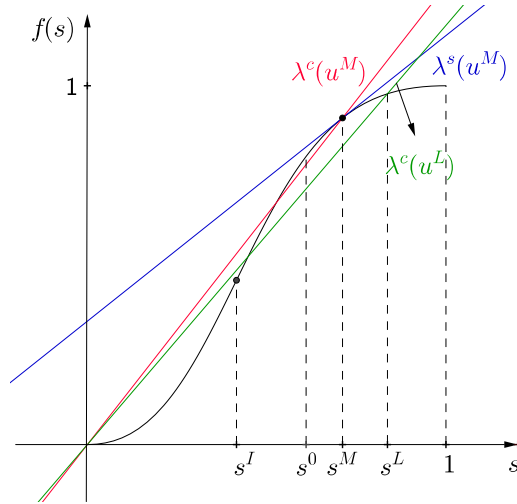


Figura 3.53: $s^L > s^M$ e $s^M < s^L < 1$.

Portanto, o item (3.6 c) do Lema 3.6 está provado.

Passemos agora ao item (3.6 d).

(3.6 d) Suponhamos que $u^M = (s^M, c^M) \in \Omega_2$, ou seja, $\lambda^c(u^M) > \lambda^s(u^M)$, e que $s^L < s^M$. Neste caso, há três subcasos para s^R a serem considerados por (i), (ii) e (iii). Observe que existe $\tilde{s} \in (s^0, 1)$ tal que $\lambda^c(u^M) = \lambda^c(\tilde{s}, c^M)$.

(i)(Figura 3.54) Se $s^0 < s^M < 1$ e $\tilde{s} \leq s^L < s^M$, isto é, se $\lambda^c(u^L) \geq \lambda^c(u^M)$ então a s -onda é um choque cuja velocidade é σ . Como este choque é tal que $\sigma \leq \lambda^c(u^M)$, então as ondas são compatíveis.

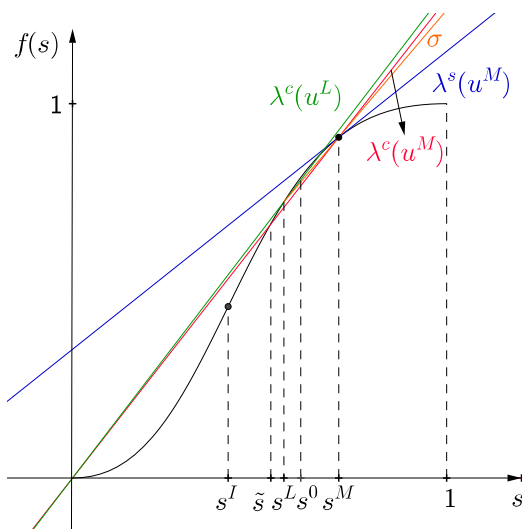


Figura 3.54: $s^0 < s^M < 1$ e $\tilde{s} < s^L < s^M$.

(ii) (Figura 3.55) Se $s^0 < s^M < 1$ e $\varepsilon(s^M) < s^L < \tilde{s}$, então a s -onda é um choque com velocidade σ . Como $s^L < \tilde{s}$ então $\sigma > \lambda^c(u^M)$. Logo, as ondas são incompatíveis.

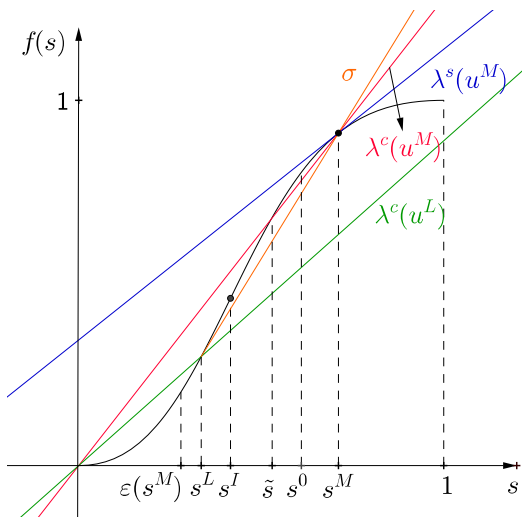


Figura 3.55: $s^0 < s^M < 1$ e $\varepsilon(s^M) < s^L < \tilde{s}$.

(iii) (Figura 3.56) Se $s^0 < s^M < 1$ e $0 \leq s^L \leq \varepsilon(s^M) < s^M$, então a s -onda é uma composta rarefação-choque que termina pelo choque de velocidade σ_ε . Como $s^L < \tilde{s}$, então novamente temos que $\sigma_\varepsilon > \lambda^c(u^M)$ e assim, as ondas são incompatíveis.

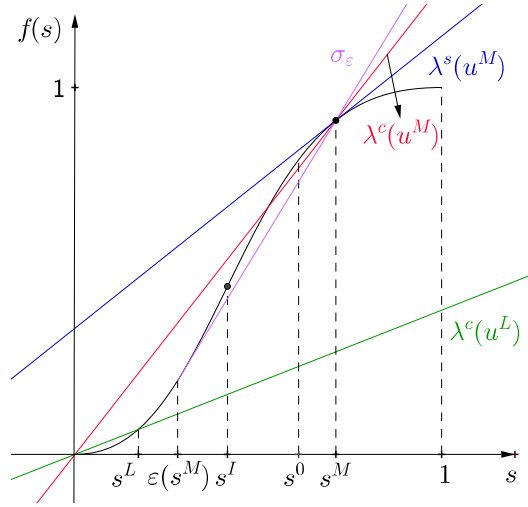


Figura 3.56: $s^0 < s^M < 1$ e $0 < s^L < \varepsilon(s^M) < s^M$.

Portanto, o item (3.6 d) está provado e conseqüentemente está provado também o Lema 3.6. ■

3.3 Construção da solução do Problema de Riemann para a injeção de polímero

Nesta seção, baseados no Lema 3.5 e no Lema 3.6 da Seção 3.2 sobre a compatibilidade de ondas e na solução para a equação de Buckley–Leverett dada na Seção 3.1, iremos construir a solução do problema de Riemann para dados iniciais arbitrários no espaço de estados Ω .

Antes de iniciar a construção da solução consideraremos mais o lema a seguir que ajudará a definir subregiões para os estados à esquerda u^L . Para isto, introduziremos a curva de extensão \mathcal{E} , representada na Figura 3.58 e definida por

$$\mathcal{E} = \left\{ (s, c) \in \Omega \text{ tal que } \frac{f(s, c) - f(1, c)}{s - 1} = f_s(s, c), 0 \leq c \leq 1 \right\}.$$

De acordo com a definição da função extensão ε feita na Seção 3.1 podemos dizer que a curva \mathcal{E} é a extensão da fronteira de $\Omega \{s = 1, 0 \leq c \leq 1\}$ definida pelos pontos de Welge nos quais a reta secante pelos pontos $(s, f(s, c))$ e $(1, f(1, c))$ coincide com a reta tangente ao gráfico de f em $(s, f(s, c))$, para cada $0 \leq c \leq 1$.

Observação 3.1 *As abscissas dos pontos da curva \mathcal{E} são os mesmos valores s^1 definidos na página 27 da Seção 3.1. Veja a Figura 3.57 para $c = 1$.*

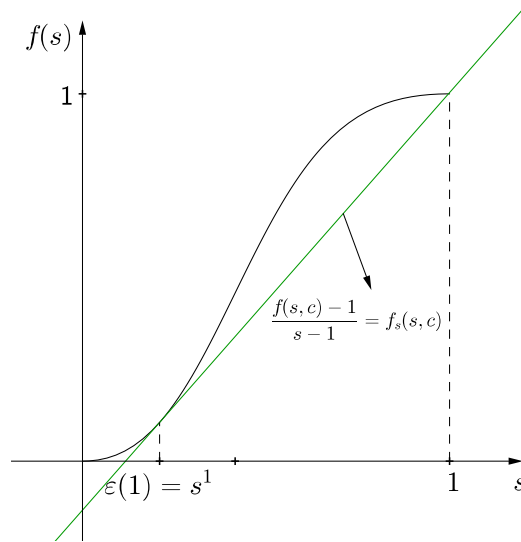


Figura 3.57: Representação geométrica, para $c = 1$, de $\frac{f(s, c) - 1}{s - 1} = f_s(s, c)$.

Lema 3.7 *A curva de extensão \mathcal{E} está contida na curva de contato que passa pelo ponto $(s_1, c_1) = (\varepsilon(1), 1)$.*

Demonstração:

Sabemos que $f(s, c) = \frac{s^2}{s^2 + r(c)(1 - s)^2}$, $f_s(s, c) = \frac{2sr(c)(1 - s)}{(s^2 + r(c)(1 - s)^2)^2}$ e que os pontos sobre a curva \mathcal{E} satisfazem $\frac{f(s, c) - f(1, c)}{s - 1} = f_s(s, c)$. Daí,

$$\frac{f(s, c) - 1}{s - 1} - f_s(s, c) = 0. \quad (3.6)$$

Multiplicando a equação (3.6) por $(s - 1)$ temos

$$f(s, c) - 1 - (s - 1)f_s(s, c) = 0.$$

Fazendo algumas manipulações algébricas, utilizando o software Maple e o fato de que $s \in (0, 1)$, obtemos explicitamente a equação da curva de extensão \mathcal{E} por

$$s(c) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + r(c)}}. \quad (3.7)$$

Considerando agora a curva de contato que passa por $(s_1, c_1) = (\varepsilon(1), 1) \in \mathcal{E}$ temos que

$$\frac{f(s, c)}{s} = \frac{f(\varepsilon(1), 1)}{\varepsilon(1)}. \quad (3.8)$$

Substituindo $s(c)$ dado em (3.7) no lado esquerdo da equação em (3.8) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{f(s(c), c)}{s(c)} &= \frac{s(c)}{(s(c))^2 + r(c)(1 - s(c))^2} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1+r(c)}}}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+r(c)}}\right)^2 + r(c)\left(\frac{1}{\sqrt{1+r(c)}}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{1+r(c)}-1}{\sqrt{1+r(c)}}}{\left(\frac{\sqrt{1+r(c)}-1}{\sqrt{1+r(c)}}\right)^2 + r(c)\left(\frac{1}{\sqrt{1+r(c)}}\right)^2} = \frac{\sqrt{1+r(c)}-1}{\left(\frac{(\sqrt{1+r(c)}-1)^2}{1+r(c)} + r(c)\right)(\sqrt{1+r(c)})} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{1+r(c)}-1}{\sqrt{1+r(c)}}}{\frac{(\sqrt{1+r(c)}-1)^2}{1+r(c)} + r(c)} = \frac{(\sqrt{1+r(c)}-1)(\sqrt{1+r(c)})}{(\sqrt{1+r(c)}-1)^2 + r(c)} \\ &= \frac{1+r(c) - \sqrt{1+r(c)}}{2(1+r(c) - \sqrt{1+r(c)})} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Da mesma forma, $\frac{f(\varepsilon(1), 1)}{\varepsilon(1)} = \frac{1}{2}$, donde segue que a curva de extensão \mathcal{E} está contida na curva de contato que passa pelo ponto $(\varepsilon(1), 1)$, o que conclui a demonstração do Lema 3. ■

Agora, lembremos que dividimos o espaço $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ em Ω_1 como sendo a região à esquerda da curva de coincidência (\mathcal{C}) com $\lambda^c < \lambda^s$, e Ω_2 como sendo a região à direita da mesma com $\lambda^s < \lambda^c$, como na Figura 2.1.

Para o detalhamento da construção da solução do problema de Riemann, tendo em vista a presença das s -ondas, ou seja, da solução da equação de Buckley–Leverett para c constante, é necessário dividir novamente Ω_1 e Ω_2 em subregiões para estados à esquerda, que denotaremos por \mathcal{L}^k -regiões, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Denotaremos os pontos de interseção da fronteira superior $c = 1$ com as curvas \mathcal{I} e \mathcal{C} por $\mathcal{I}(1)$ e $\mathcal{C}(1)$, e o ponto de interseção da fronteira inferior $c = 0$ com a curva de inflexão \mathcal{I} por $\mathcal{I}(0)$.

Lembremos que não há curva de inflexão da família- c , já que é um campo linearmente degenerado ou de contato. Além disso, segue do Lema 3.7 que a curva de contato que passa por $\mathcal{E}(1)$ coincide com a própria curva de extensão \mathcal{E} na região Ω_1 .

As \mathcal{L}^k -regiões, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, estão definidas a seguir e representadas na Figura 3.58.

– \mathcal{L}^1 é a região à esquerda da curva de extensão \mathcal{E} .

– \mathcal{L}^2 é a região entre a curva de extensão \mathcal{E} e a parte da curva do contato que passa por $\mathcal{I}(1)$, na região Ω_1 .

– \mathcal{L}^3 é a região entre as partes das curvas de contato que passam por $\mathcal{I}(1)$ e por $\mathcal{C}(1)$ que pertencem à Ω_1 .

– \mathcal{L}^4 é a região à esquerda da curva de coincidência \mathcal{C} e entre as partes das curvas de contato que pertencem a Ω_1 que passam por $\mathcal{I}(0)$ e $\mathcal{C}(1)$.

– \mathcal{L}^5 é a região abaixo da parte da curva de contato que passa por $\mathcal{I}(0)$ e à esquerda da curva de coincidência \mathcal{C} , na região Ω_1 .

– \mathcal{L}^6 é a região entre a curva de coincidência \mathcal{C} e a parte da curva de contato que passa por $\mathcal{C}(1)$, na região Ω_2 .

– \mathcal{L}^7 é a região à direita da parte da curva de contato que passa por $\mathcal{C}(1)$, na região Ω_2 .

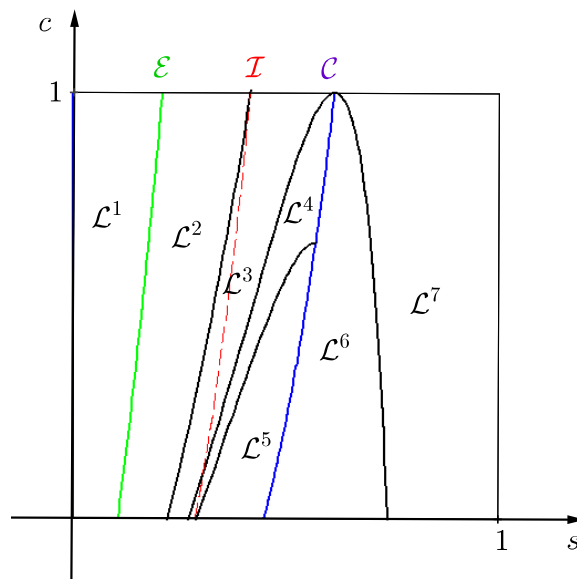


Figura 3.58: Divisão das \mathcal{L}^k -regiões do espaço de estados Ω .

Observação 3.2 A curva tracejada na Figura 3.58 não representa fronteira para as \mathcal{L}^k -regiões. Ela apenas indica a curva \mathcal{I} dos pontos de inflexão da família- s que define as curvas de contato por $\mathcal{I}(1)$ e $\mathcal{I}(0)$.

Para cada u^L fixado em cada subregião de \mathcal{L}^k , $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, dividiremos novamente o espaço de estados Ω em subregiões, agora para os estados à direita u^R , ou \mathcal{R} -regiões, para esse u^L fixado. Desta forma, serão cobertas todas as possibilidades de construção de solução para o problema de Riemann para quaisquer dados u^L e u^R fixados no espaço de estados Ω .

Neste trabalho, representaremos geometricamente uma c -onda que conecta um estado a esquerda “ a ” à um estado a direita “ b ” por um segmento de reta contínuo $a \text{ — } b$. Por outro lado, para a s -onda, representaremos uma onda de choque por uma linha tracejada $a \text{ - - - } b$, uma onda de rarefação por uma linha contínua com uma seta $a \text{ — } \rightarrow b$ e uma onda composta por uma linha “cortada” $a \text{ + + + } b$. Já algebricamente, na sequência de ondas que descreve a solução do problema de Riemann, denotaremos por $a \xrightarrow{S_s} b$, $a \xrightarrow{R_s} b$ e $a \xrightarrow{(R_s S_s)} b$ as ondas de choque, de rarefação e compostas (rarefação-choque) da família- s , respectivamente, e por $a \xrightarrow{S_c} b$ uma onda de contato. Veja o resumo na Tabela 3.59.

ONDAS	NOTAÇÕES	
	GEOMÉTRICA	ALGÉBRICA
Contato	$a \text{ — } b$	$a \xrightarrow{S_c} b$
Choque	$a \text{ - - - } b$	$a \xrightarrow{S_s} b$
Rarefação	$a \text{ — } \rightarrow b$	$a \xrightarrow{R_s} b$
Composta	$a \text{ + + + } b$	$a \xrightarrow{(R_s S_s)} b$

Figura 3.59: Representações geométrica e algébrica da onda de contato e das s -ondas.

Passaremos a descrever a solução do problema de Riemann para u^L genérico fixado em cada uma das \mathcal{L}^k -subregiões da Figura 3.58.

Lembremos que fixado u^L numa \mathcal{L}^k -região pertencente à Ω_1 , então $\lambda^c(u^L) < \lambda^s(u^L)$, e assim, segue que para estados u^R próximos de u^L , a primeira onda na solução do problema de Riemann a partir de u^L é um contato. Por outro lado, fixado u^L na

\mathcal{L}^k -região pertencente à Ω_2 , temos que $\lambda^s(u^L) < \lambda^c(u^L)$, donde para u^R próximo de u^L , a primeira onda passa a ser uma s -onda.

Observação 3.3 *Quando a segunda onda na solução do problema de Riemann, de u^L para u^R , for uma solução da equação de Buckley–Leverett conectando um estado intermediário $u^M = (s^M, c^R)$ ao estado $u^R = (s^R, c^R)$, a abscissa s^M equivale ao estado s^L considerado na Seção 3.1. Já, quando for a primeira, s^M passa a ser equivalente ao estado s^R da mesma Seção.*

Fixemos u^L na região \mathcal{L}^1 da Figura 3.58. Consideremos a parte da curva de contato por u^L que está na região Ω_1 , denotada por $\Phi_1^c(u^L)$. Como $u^L \in \mathcal{L}^1$, esta curva de contato deve se prolongar do nível $c = 0$ até o nível $c = 1$, sem interseções com a fronteira entre \mathcal{L}^1 e \mathcal{L}^2 , dada pela curva de extensão \mathcal{E} da Figura 3.58, que de acordo com o Lema 3.7 também é uma curva de contato.

Consideraremos então, para este $u^L \in \mathcal{L}^1$ as \mathcal{R} -regiões para os estados u^R , denotadas por \mathcal{R}_1^1 , \mathcal{R}_2^1 e \mathcal{R}_3^1 e representadas na Figura 3.60.

– \mathcal{R}_1^1 é a região à esquerda da parte da curva de contato $\Phi_1^c(u^L)$ que passa por u^L .

– \mathcal{R}_2^1 é a região entre a parte da curva do contato $\Phi_1^c(u^L)$ e a curva de inflexão \mathcal{I} .

– \mathcal{R}_3^1 é a região à direita da curva de inflexão \mathcal{I} .

Inicialmente, consideraremos $c^R \neq c^L$. Sendo assim, teremos essas três subregiões para u^R da Figura 3.60, cujas soluções do problema de Riemann para $u^L \in \mathcal{L}^1$ fixo estão apresentadas a seguir, de acordo com a localização de u^M ao longo da curva de contato $\Phi^c(u^L)$. Acompanhe na Figura 3.61.

Seja $u^M = (s^M, c^R)$ o estado definido pelo ponto de interseção da curva de contato $\Phi_1^c(u^L)$ com a reta $c = c^R$.

– **Seja $u^R = (s^R, c^R)$ na região \mathcal{R}_1^1 .** Então, pelo item (i) do Lema 3.1, a s -onda de u^M para u^R é um choque. Do item (c) do Lema 3.5 segue que este choque é compatível com a onda de contato que conecta u^L à u^M . Assim, a solução do problema de Riemann para u^L na região \mathcal{L}^1 e u^R na região \mathcal{R}_1^1 é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_c} u^M \xrightarrow{S_s} u^R.$$

– Seja $\mathbf{u}^R = (s^R, c^R)$ na região \mathcal{R}_2^1 . Então, pelo item (ii) do Lema 3.1, a s -onda de u^M para u^R é uma rarefação. Do item (d) do Lema 3.5 segue que há a compatibilidade da s -onda com a onda de contato que conecta u^L à u^M . Assim, a solução do problema de Riemann para u^L na região \mathcal{L}^1 e u^R na região \mathcal{R}_2^1 é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_c} u^M \xrightarrow{R_s} u^R.$$

– Seja $\mathbf{u}^R = (s^R, c^R)$ na região \mathcal{R}_3^1 . Então, pelo item (iii) do Lema 3.1, a s -onda de u^M para u^R é uma composta rarefação–choque. Do item (d) do Lema 3.5 segue que há a compatibilidade da s -onda com a onda de contato que conecta u^L à u^M . Assim, a solução do problema de Riemann para u^L na região \mathcal{L}^1 e u^R na região \mathcal{R}_3^1 é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_c} u^M \xrightarrow{(R_s S_s)} u^R.$$

Obviamente, se $c^L = c^R$ então a onda de contato S_c não está presente nas soluções que acabamos de descrever.

Resumindo, temos a representação geométrica para a solução, na Figura 3.61, de acordo com u^R em cada uma das \mathcal{R} -regiões da Figura 3.60 determinadas por um u^L fixado na região \mathcal{L}^1 da Figura 3.58.

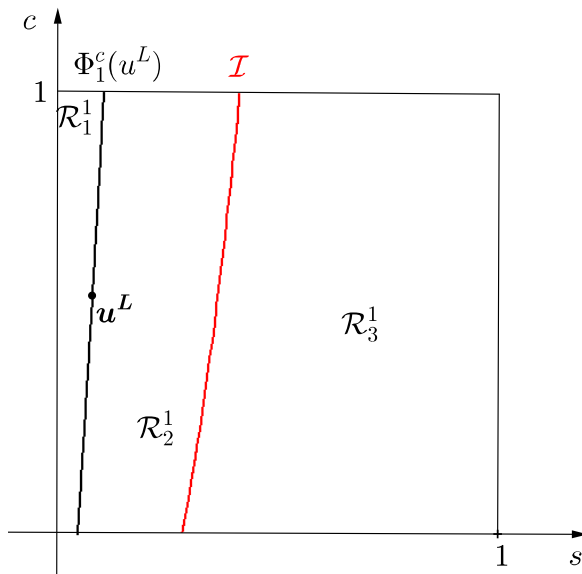


Figura 3.60: Representação das \mathcal{R} -regiões para $u^L \in \mathcal{L}^1$.

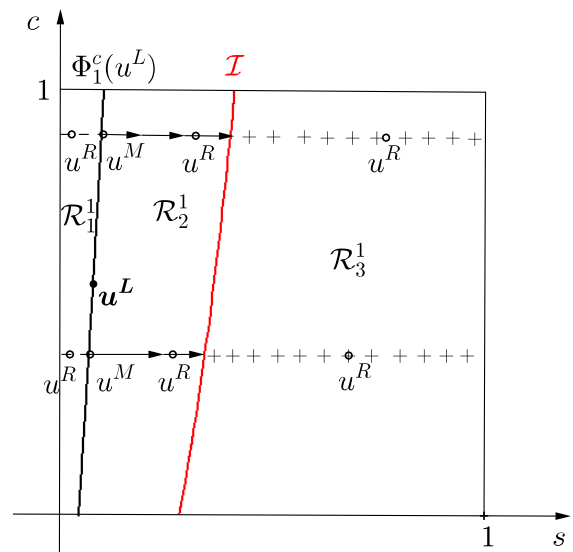


Figura 3.61: Representação da solução do problema de Riemann para $u^L \in \mathcal{L}^1$.

Fixemos u^L na região \mathcal{L}^2 da Figura 3.58. Como no caso anterior, consideremos a parte da curva de contato por u^L que está em Ω_1 , denotada por $\Phi_1^c(u^L)$. Como $u^L \in \mathcal{L}^2$ então temos que $\Phi_1^c(u^L)$ deve se prolongar do nível $c = 0$ ao nível $c = 1$ sem interseção com a fronteira de \mathcal{L}^1 (dada pela curva de contato \mathcal{E}) e com a fronteira de \mathcal{L}^3 dada pela curva do contato que passa por $\mathcal{I}(1)$, da Figura 3.58.

Consideremos a imagem inversa pela função extensão ε da curva de contato $\Phi_1^c(u^L)$. Isto significa que $u = (s, c) \in \varepsilon^{-1}(\Phi_1^c(u^L))$ se $\frac{f(s, c) - f(s^M, c)}{s - s^M} = f_s(s^M, c)$, com $u^M = (s^M, c) \in \Phi_1^c(u^L)$ e $0 \leq c \leq 1$.

Observação 3.4 *Dada a equação que define $\varepsilon^{-1}(\Phi_1^c(u^L))$, esta curva define as extremidades finais de segmentos representando soluções compostas rarefação–choque construídas a partir de segmentos de curva de s –rarefação iniciando em estados u^M sobre $\Phi_1^c(u^L)$, como será ilustrado pela fronteira entre as regiões \mathcal{R}_3^2 e \mathcal{R}_4^2 logo a seguir.*

A diferença deste caso para o anterior é que como estamos considerando u^L entre a curva \mathcal{E} e a curva dos pontos de inflexão \mathcal{I} então teremos uma nova fronteira para as \mathcal{R} –regiões, dada pela curva $\varepsilon^{-1}(\Phi_1^c(u^L))$. Temos que as subregiões para u^R , denotadas por $\mathcal{R}_1^2, \mathcal{R}_2^2, \mathcal{R}_3^2$ são as respectivas \mathcal{R} –regiões do caso anterior. Além disso, temos outra região denotada por \mathcal{R}_4^2 . Estas regiões estão representadas geometricamente na Figura 3.62 e definidas a seguir.

– \mathcal{R}_1^2 é a região à esquerda da parte da curva de contato $\Phi_1^c(u^L)$ que passa por u^L .

– \mathcal{R}_2^2 é a região entre a parte da curva de contato $\Phi_1^c(u^L)$ e a curva de inflexão \mathcal{I} .

– \mathcal{R}_3^2 é a região entre a curva de inflexão \mathcal{I} e a curva $\varepsilon^{-1}(\Phi_1^c(u^L))$.

– \mathcal{R}_4^2 é a região à direita da curva $\varepsilon^{-1}(\Phi_1^c(u^L))$.

Como no caso anterior e nos posteriores, se $c^R = c^L$ não há onda de contato na solução. Portanto, descreveremos as soluções supondo $c^L \neq c^R$.

Como para u^R nas regiões $\mathcal{R}_1^2, \mathcal{R}_2^2$ e \mathcal{R}_3^2 as soluções são análogas ao caso em que $u^L \in \mathcal{L}^1$ e u^R nas regiões $\mathcal{R}_1^1, \mathcal{R}_2^1$ e \mathcal{R}_3^1 , descrevemos apenas para $u^R \in \mathcal{R}_4^2$.

– **Seja $u^R = (s^R, c^R) \in \mathcal{R}_4^2$.** Consideremos $u^M = (s^M, c^R)$ o estado definido pelo ponto de interseção da reta $c = c^R$ com $\Phi_1^c(u^L)$. Então, de acordo com a

Observação 3.4 e pelo item (iv) do Lema 3.2, a s -onda de u^M para u^R é uma onda de choque. Do item (d) do Lema 3.5 segue que este choque é compatível com a onda de contato que conecta u^L à u^M . Assim, a solução do problema de Riemann para u^L na região \mathcal{L}^2 e u^R na região \mathcal{R}_4^2 é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_c} u^M \xrightarrow{S_s} u^R.$$

Em resumo, temos a representação geométrica para a solução, na Figura 3.63, de acordo com u^R em cada uma das \mathcal{R} -regiões da Figura 3.62 determinadas por um u^L fixado na região \mathcal{L}^2 da Figura 3.58.

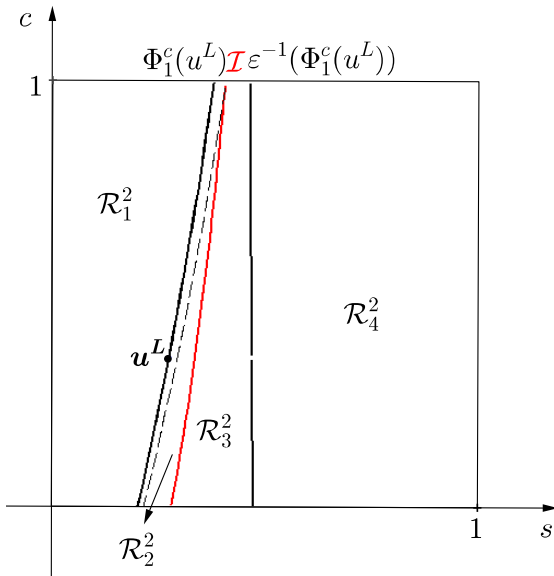


Figura 3.62: Representação das \mathcal{R} -regiões para $u^L \in \mathcal{L}^2$.

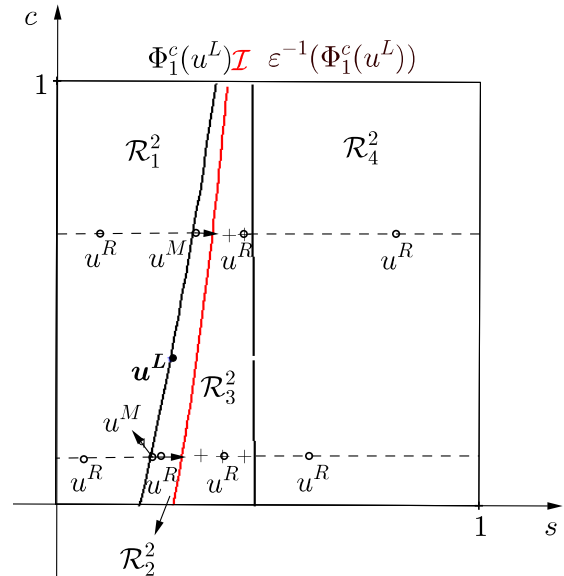


Figura 3.63: Representação da solução do problema de Riemann para $u^L \in \mathcal{L}^2$.

Observação 3.5 A curva tracejada na Figura 3.62 apenas indica a curva de contato fronteira entre as regiões \mathcal{L}^2 e \mathcal{L}^3 e não representa fronteira para as \mathcal{R} -regiões.

Fixemos u^L na região \mathcal{L}^3 da Figura 3.58. Novamente, consideremos a parte da curva de contato que passa por u^L na região Ω_1 , denotada por $\Phi_1^c(u^L)$. De acordo com a definição das fronteiras entre \mathcal{L}^2 e \mathcal{L}^3 e entre \mathcal{L}^3 e \mathcal{L}^4 (ver Figura 3.58), esta curva deve se prolongar do nível $c = 0$ ao nível $c = 1$ intersectando a curva dos pontos inflexão \mathcal{I} da família- s . Denotemos por $u^I = (s^I, c^I)$ este ponto de interseção. Se $u = (s, c)$ for tal que $c < c^I$ (ou seja, abaixo do ponto u^I) então temos a parte da curva $\Phi_1^c(u^L)$ à esquerda da curva \mathcal{I} . Já, se u for tal que $c > c^I$ (isto é, acima do ponto u^I) então temos

a parte da curva $\Phi_1^c(u^L)$ à direita da curva \mathcal{I} . Assim, teremos sete subregiões para u^R denotadas por \mathcal{R}_1^3 , \mathcal{R}_2^3 , \mathcal{R}_3^3 , \mathcal{R}_4^3 , \mathcal{R}_5^3 , \mathcal{R}_6^3 e \mathcal{R}_7^3 . Essas subregiões estão representadas geometricamente na Figura 3.64 e definidas a seguir.

– \mathcal{R}_1^3 é a região à direita da parte da curva de contato $\Phi_1^c(u^L)$ com $c \geq c^I$, à direita da curva $\varepsilon^{-1}(\Phi_1^c(u^L))$ com $c \leq c^I$, e à esquerda da parte da curva de contato $\Phi_2^c(u^L)$.

– \mathcal{R}_2^3 é a região entre a parte da curva de contato $\Phi_1^c(u^L)$ com $c > c^I$ e a curva dos pontos de inflexão \mathcal{I} .

– \mathcal{R}_3^3 é a região entre a curva dos pontos de inflexão \mathcal{I} e a curva $\varepsilon^{-1}(\Phi_1^c(u^L))$ com $c > c^I$.

– \mathcal{R}_4^3 é a região à esquerda da curva $\varepsilon^{-1}(\Phi_1^c(u^L))$ com $c \geq c^I$, e à esquerda da parte da curva de contato $\Phi_1^c(u^L)$ com $c \leq c^I$.

– \mathcal{R}_5^3 é a região entre a parte da curva de contato $\Phi_1^c(u^L)$ e a curva dos pontos de inflexão \mathcal{I} com $c < c^I$.

– \mathcal{R}_6^3 é a região entre a curva dos pontos de inflexão \mathcal{I} e a curva $\varepsilon^{-1}(\Phi_1^c(u^L))$ com $c < c^I$.

– \mathcal{R}_7^3 é a região à direita da parte da curva de contato $\Phi_2^c(u^L)$.

As sete subregiões para u^R que acabamos de definir estão ilustradas na Figura 3.64 e as respectivas soluções do problema de Riemann para $u^L \in \mathcal{L}^3$ fixo estão apresentadas a seguir. Acompanhe na Figura 3.65.

– **Seja** $\mathbf{u}^R = (\mathbf{s}^R, \mathbf{c}^R) \in \mathcal{R}_1^3$. Consideremos $u^M = (s^M, c^R)$ o estado definido pelo ponto de interseção da reta $c = c^R$ com $\Phi_1^c(u^L)$. Então, pelo item (iv) do Lema 3.3, a s -onda de u^M para u^R é um choque. Do item (d) do Lema 3.5 segue que este choque é compatível com a onda de contato que conecta u^L à u^M . Assim, a solução do problema de Riemann para u^L na região \mathcal{L}^3 e u^R na região \mathcal{R}_1^3 é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_c} u^M \xrightarrow{S_s} u^R.$$

– **Seja** $\mathbf{u}^{\mathbf{R}} = (\mathbf{s}^{\mathbf{R}}, \mathbf{c}^{\mathbf{R}}) \in \mathcal{R}_2^3$. Consideremos $u^M = (s^M, c^R)$ o estado definido pelo ponto de interseção da reta $c = c^R$ com $\Phi_1^c(u^L)$. Então, pelo item (iii) do Lema 3.3, a s -onda de u^M para u^R é uma rarefação. Do item (c) do Lema 3.5 segue que há compatibilidade da s -onda com a onda de contato que conecta u^L à u^M . Assim, a solução do problema de Riemann para u^L na região \mathcal{L}^3 e u^R na região \mathcal{R}_2^3 é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_c} u^M \xrightarrow{R_s} u^R.$$

– **Seja** $\mathbf{u}^{\mathbf{R}} = (\mathbf{s}^{\mathbf{R}}, \mathbf{c}^{\mathbf{R}}) \in \mathcal{R}_3^3$. Consideremos $u^M = (s^M, c^R)$ o estado definido pelo ponto de interseção da reta $c = c^R$ com $\Phi_1^c(u^L)$. Então, pelo item (ii) do Lema 3.3, a s -onda de u^M para u^R é uma composta rarefação–choque. Do item (c) do Lema 3.5 segue que há compatibilidade da s -onda com a onda de contato que conecta u^L à u^M . Assim, a solução do problema de Riemann para u^L na região \mathcal{L}^3 e u^R na região \mathcal{R}_3^3 é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_c} u^M \xrightarrow{(R_s S_s)} u^R.$$

– **Seja** $\mathbf{u}^{\mathbf{R}} = (\mathbf{s}^{\mathbf{R}}, \mathbf{c}^{\mathbf{R}}) \in \mathcal{R}_4^3$. Consideremos $u^M = (s^M, c^R)$ o estado definido pelo ponto de interseção da reta $c = c^R$ com $\Phi_1^c(u^L)$. Então, pelo item (i) do Lema 3.3, a s -onda de u^M para u^R é um choque. Do item (c) do Lema 3.5 segue que este choque é compatível com a onda de contato que conecta u^L à u^M . Assim, a solução do problema de Riemann para u^L na região \mathcal{L}^3 e u^R na região \mathcal{R}_4^3 é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_c} u^M \xrightarrow{S_s} u^R.$$

– **Seja** $\mathbf{u}^{\mathbf{R}} = (\mathbf{s}^{\mathbf{R}}, \mathbf{c}^{\mathbf{R}}) \in \mathcal{R}_5^3$. Consideremos $u^M = (s^M, c^R)$ o estado definido pelo ponto de interseção da reta $c = c^R$ com $\Phi_1^c(u^L)$. Então, pelo item (iii) do Lema 3.3, a s -onda de u^M para u^R é uma rarefação. Do item (d) do Lema 3.5 segue que há compatibilidade da s -onda com a onda de contato que conecta u^L à u^M . Assim, a solução do problema de Riemann para u^L na região \mathcal{L}^3 e u^R na região \mathcal{R}_5^3 é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_c} u^M \xrightarrow{R_s} u^R.$$

– **Seja** $\mathbf{u}^{\mathbf{R}} = (\mathbf{s}^{\mathbf{R}}, \mathbf{c}^{\mathbf{R}}) \in \mathcal{R}_6^3$. Consideremos $u^M = (s^M, c^R)$ o estado definido pelo ponto de interseção da reta $c = c^R$ com $\Phi_1^c(u^L)$. Então, pelo item (ii) do Lema

3.3, a s -onda de u^M para u^R é uma composta rarefação-choque. Do item (d) do Lema 3.5 segue que há compatibilidade da s -onda com a onda de contato que conecta u^L à u^M . Assim, a solução do problema de Riemann para u^L na região \mathcal{L}^3 e u^R na região \mathcal{R}_6^3 é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_c} u^M \xrightarrow{(R_s S_s)} u^R.$$

Observação 3.6 Lembremos que a fronteira entre as regiões \mathcal{R}_1^3 e \mathcal{R}_7^3 é a parte da curva de contato por u^L que está na região Ω_2 , denotada por $\Phi_2^c(u^L)$. Daí, fixados $u^M = (s^M, c^M) \in \Phi_1^c(u^L)$ e $\tilde{u}^M = (\tilde{s}, c^M) \in \Phi_2^c(u^L)$, como ilustrado na Figura 3.65, temos que o s -choque de u^M para \tilde{u}^M tem a mesma velocidade da descontinuidade de contato também de u^M para \tilde{u}^M . Assim ao passar da região \mathcal{R}_1^3 para a região \mathcal{R}_7^3 a sequência $u^L \xrightarrow{S_c} u^M \xrightarrow{S_s} u^R$ com u^M na região \mathcal{R}_7^3 deixa de ser compatível e teremos uma mudança na ordem das ondas, garantida pelo Lema 3.6, como a seguir.

– **Seja $u^R = (s^R, c^R) \in \mathcal{R}_7^3$.** Considere a parte da curva de contato por u^R que está na região Ω_2 , denotada por $\Phi_2^c(u^R)$. Seja $u^M = (s^M, c^L)$ o estado definido pela interseção da reta $c = c^L$ com a curva $\Phi_2^c(u^R)$. Como u^M está na região Ω_2 , pelo item (d) do Lema 3.6, temos que o choque de u^L para u^M tem velocidade compatível com a onda de contato que se inicia em u^M . Além disso, pelo item (iv) do Lema 3.3, a s -onda de u^L para u^M é um choque. Logo, a solução do problema de Riemann é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{S_c} u^R.$$

Resumindo, temos a representação geométrica para a solução, na Figura 3.65, de acordo com u^R em cada uma das \mathcal{R} -regiões da Figura 3.64 determinadas por um u^L fixado na região \mathcal{L}^3 da Figura 3.58.

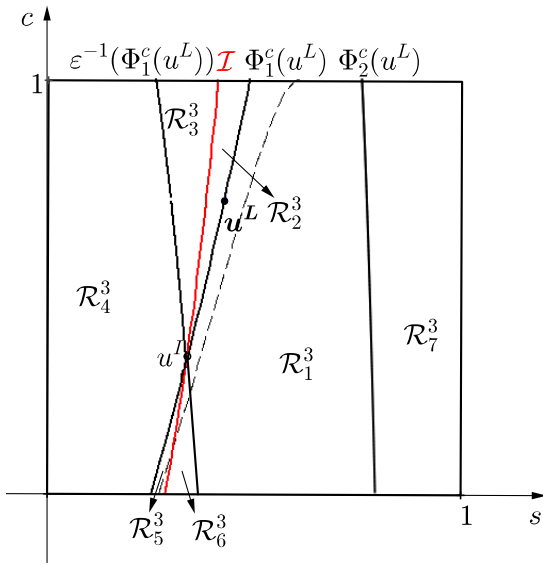


Figura 3.64: Representação das \mathcal{R} -regiões para $u^L \in \mathcal{L}^3$.

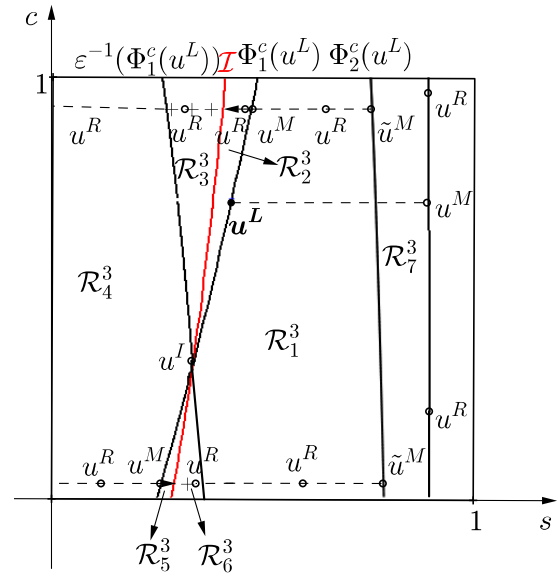


Figura 3.65: Representação da solução do problema de Riemann para $u^L \in \mathcal{L}^3$.

Observação 3.7 A curva tracejada na Figura 3.64 apenas indica a parte $\Phi_1^c(u^L)$ da curva de contato fronteira entre as \mathcal{L} -regiões \mathcal{L}^3 e \mathcal{L}^4 , e não representa fronteira para as \mathcal{R} -regiões.

Fixemos u^L na região \mathcal{L}^4 da Figura 3.58. Consideremos mais uma vez a parte da curva de contato que passa por u^L na região Ω_1 , denotada por $\Phi_1^c(u^L)$. Esta curva intersecta a curva dos pontos inflexão \mathcal{I} e a fronteira entre as regiões \mathcal{L}^4 e \mathcal{L}^6 dada por parte da curva de coincidência \mathcal{C} . Denotemos por $u^I = (s^I, c^I)$ e $u^C = (s^C, c^C)$ estes pontos de interseção, respectivamente. Para $c^R < c^C$ a solução é análoga ao caso anterior e teremos as subregiões para u^R denotadas por $\mathcal{R}_1^4, \mathcal{R}_2^4, \mathcal{R}_3^4, \mathcal{R}_4^4, \mathcal{R}_5^4, \mathcal{R}_6^4$ e \mathcal{R}_7^4 , e representadas nas Figuras 3.66 e 3.67. Observamos aqui que a curva de extensão inversa $\varepsilon^{-1}(\Phi_1^c(u^L))$ termina exatamente no ponto $u_0^C = (0, c^C)$ da fronteira $s = 0$, devido a própria definição desta curva que garante que $u^C \in \mathcal{H}(u_0^C)$ e $\sigma(u_0^C, u^C) = \lambda^s(u^C)$. Para $c^R > c^C$ teremos mais duas subregiões para u^R , denotadas por \mathcal{R}_8^4 e \mathcal{R}_9^4 , representadas na Figura 3.66 e definidas a seguir.

– \mathcal{R}_8^4 é a região à esquerda da curva de coincidência \mathcal{C} com $c > c^C$ e à direita da curva dos pontos de inflexão \mathcal{I} com $c > c^C$.

– \mathcal{R}_9^4 é a região à esquerda a curva dos pontos de inflexão \mathcal{I} com $c > c^C$.

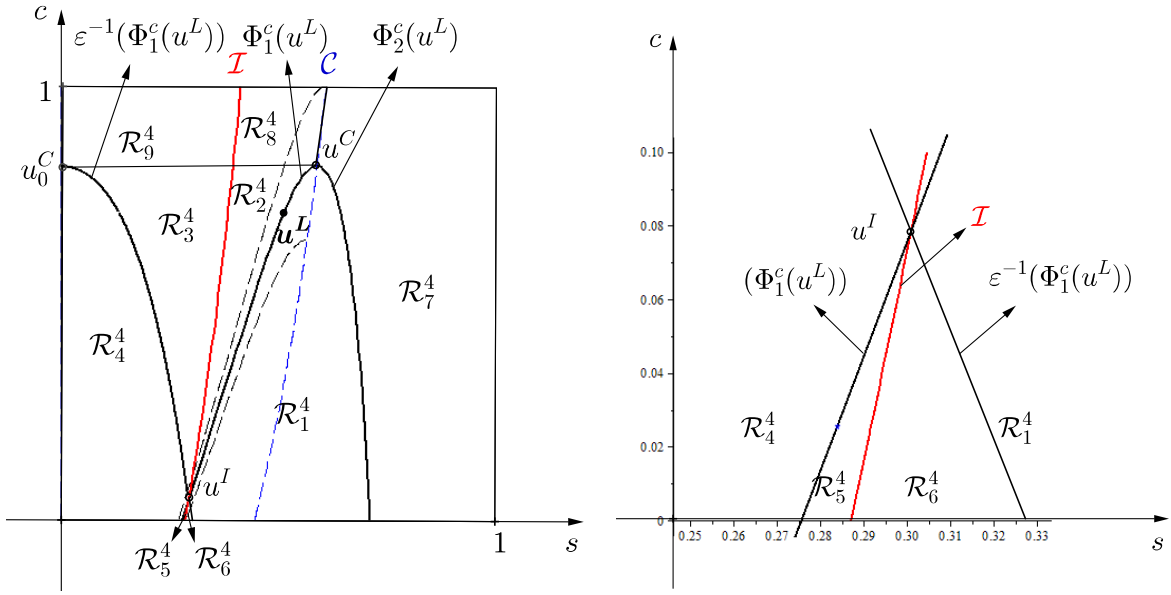


Figura 3.66: Representação das \mathcal{R} -regiões para $u^L \in \mathcal{L}^4$.

Figura 3.67: Representação geométrica das regiões \mathcal{R}_4^4 e \mathcal{R}_5^4 .

Observação 3.8 As curvas tracejadas na Figura 3.66 apenas indicam as curvas de contato fronteiras entre as \mathcal{L} -regiões \mathcal{L}^3 , \mathcal{L}^4 , \mathcal{L}^5 e a parte da curva de coincidência \mathcal{C} , e não representam fronteiras para as \mathcal{R} -regiões.

As nove subregiões para u^R que acabamos de definir estão ilustradas nas Figuras 3.66 e 3.67. Dada a semelhança das soluções para u^R nas regiões \mathcal{R}_1^4 , \mathcal{R}_2^4 , \mathcal{R}_3^4 , \mathcal{R}_4^4 , \mathcal{R}_5^4 , \mathcal{R}_6^4 e \mathcal{R}_7^4 com o caso anterior, descreveremos apenas as soluções do problema de Riemann para $u^R \in \mathcal{R}_8^4$ e $u^R \in \mathcal{R}_9^4$ com $u^L \in \mathcal{L}^4$ fixo. Acompanhe nas Figuras 3.68 e 3.69.

– Seja $\mathbf{u}^R = (s^R, c^R) \in \mathcal{R}_8^4$. Considere $u^* = (s^*, c^R)$ interseção da reta $c = c^R$ com a curva de coincidência \mathcal{C} . Seja u^M o estado definido pela interseção da parte $\Phi_2^c(u^*)$ da curva de contato por u^* com a reta $c = c^L$. O estado u^M está na região \mathcal{R}_7^4 e por isto $\sigma(u^L, u^M) < \lambda^c(u^M)$. Do item (iv) do Lema 3.3, temos que a s -onda de u^L para u^M é um choque. Daí, pelo item (d) do Lema 3.6, há a compatibilidade do s -choque de u^L para u^M com a onda de contato de u^M para u^* . Além disso, pelo item (ii) do Lema 3.4, o estado u^* é conectado ao estado u^M por uma rarefação. Como $\lambda^c(u^*) = \lambda^s(u^*)$, o estado u^* não é um estado intermediário constante que aparece na solução no espaço xt . Assim, o estado u^M é conectado à u^R por uma composta do tipo contato–rarefação e a solução

do problema de Riemann é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{(S_c R_s)} u^R.$$

–Seja $\mathbf{u}^R = (s^R, c^R) \in \mathcal{R}_9^4$. Como u^R está à esquerda da curva de inflexão \mathcal{I} , pelo item (i) do Lema 3.4, o estado u^* é conectado à u^R por uma composta rarefação–choque. Assim, a solução do problema de Riemann é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{(S_c R_s S_s)} u^R.$$

Resumindo, temos a representação geométrica para a solução, nas Figuras 3.68 e 3.69, de acordo com u^R em cada uma das \mathcal{R} –regiões das Figuras 3.66 e 3.67 determinadas por um u^L fixado na região \mathcal{L}^4 da Figura 3.58.

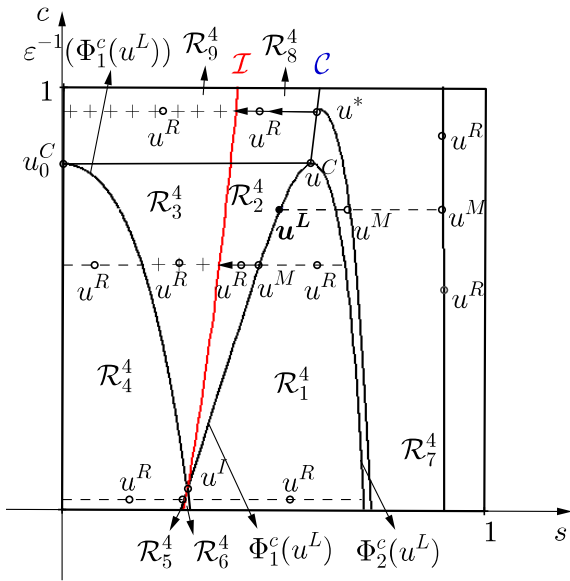


Figura 3.68: Representação da solução do problema de Riemann para $u^L \in \mathcal{L}^4$ e suas \mathcal{R} –regiões.

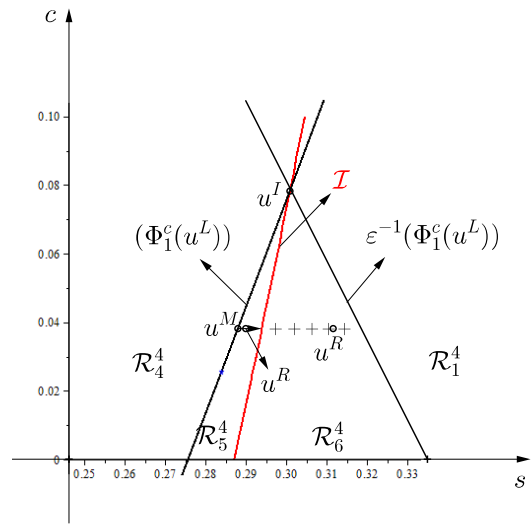


Figura 3.69: Representação da solução do problema de Riemann para $u^L \in \mathcal{L}^4$, com $u^R \in \mathcal{R}_2^4$ e $u^R \in \mathcal{R}_3^4$.

Fixemos u^L na região \mathcal{L}^5 da Figura 3.58. Consideremos a parte da curva de contato que passa por u^L na região Ω_1 , denotada por $\Phi_1^c(u^L)$. A diferença deste caso para o anterior é que agora $\Phi_1^c(u^L)$ não cruza mais a curva de inflexão \mathcal{I} e, conseqüentemente as \mathcal{R} –regiões correspondentes à \mathcal{R}_5^4 e \mathcal{R}_6^4 do caso anterior com $u^L \in \mathcal{L}^4$ deixam de existir. A parte da curva de contato $\Phi_1^c(u^L)$ intersecta apenas a parte da curva de coincidência \mathcal{C} fronteira entre as regiões \mathcal{L}^5 e \mathcal{L}^6 . Denotemos por $u^C = (s^C, c^C)$ este

ponto de interseção. Para $c^R < c^C$ teremos as subregiões para u^R denotadas por \mathcal{R}_1^5 , \mathcal{R}_2^5 , \mathcal{R}_3^5 e \mathcal{R}_4^5 (as regiões \mathcal{R}_5^5 e \mathcal{R}_6^5 portanto não existem). Além disso, temos a região \mathcal{R}_7^5 que se estende de $c = 0$ até $c = 1$. Já para $c^R > c^C$ teremos novamente as duas subregiões para u^R como no caso anterior, mas agora denotadas por \mathcal{R}_8^5 e \mathcal{R}_9^5 . Como a solução para u^R em cada uma destas sete regiões são análogas ao caso anterior, para $u^L \in \mathcal{L}^4$, não a apresentaremos, mas tais subregiões estão representadas geometricamente na Figura 3.70, e as soluções para u^R em cada uma destas regiões estão representadas na Figura 3.71.

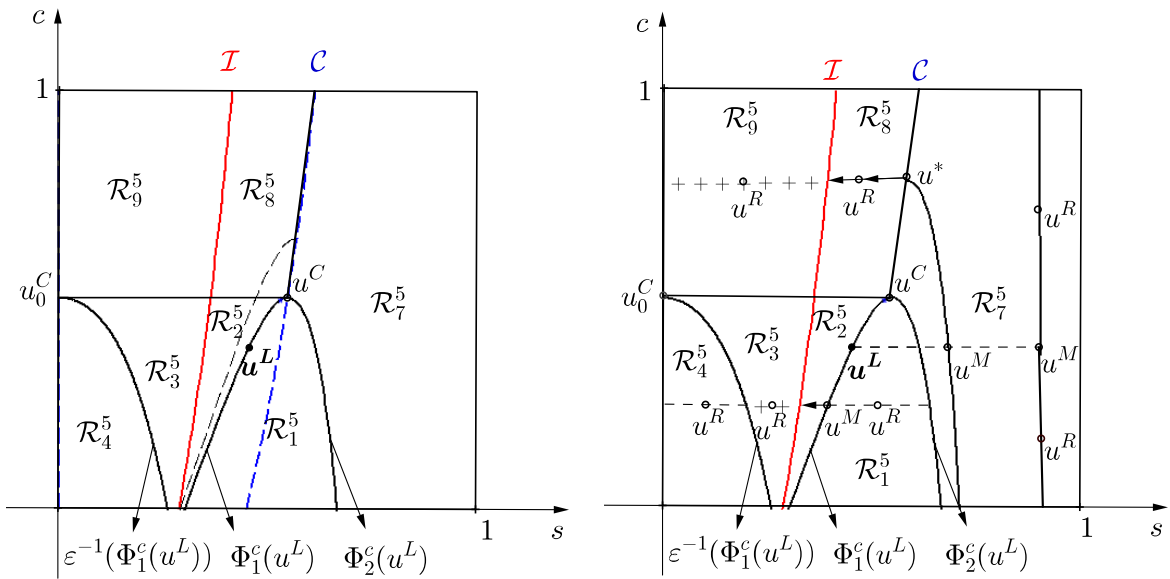


Figura 3.70: Representação das \mathcal{R} -regiões para $u^L \in \mathcal{L}^5$.

Figura 3.71: Representação da solução do problema de Riemann para $u^L \in \mathcal{L}^5$.

Observação 3.9 As curvas tracejadas na Figura 3.70 apenas indicam a parte da curva de contato fronteira entre as regiões \mathcal{L}^4 e \mathcal{L}^5 , e parte da curva de coincidência \mathcal{C} fronteira entre as regiões \mathcal{L}^5 e \mathcal{L}^6 , e não representam fronteiras para as \mathcal{R} -regiões.

Fixemos u^L na região \mathcal{L}^6 da Figura 3.58. Note que agora o estado u^L está na subregião Ω_2 onde $\lambda^c > \lambda^s$. Daí para u^R próximo de u^L a primeira onda na solução do Problema de Riemann será uma s -onda, como dito na página 59.

Passemos então a construção da solução. Consideremos a parte da curva de contato que passa por u^L na região Ω_2 , denotada por $\Phi_2^c(u^L)$. Denotemos por $u^C = (s^C, c^C)$ o estado definido pela interseção de $\Phi_2^c(u^L)$ com a curva de coincidência \mathcal{C} . Seja $u^* = (s^*, c^L)$ o estado dado pela interseção da reta $c = c^L$ com a curva de coincidência

\mathcal{C} . Consideremos $\Phi_1^c(u^*)$ e $\Phi_2^c(u^*)$ as partes da curva de contato que passa por u^* nas regiões Ω_1 e Ω_2 , respectivamente. Estas curvas definem as fronteiras das \mathcal{R} -regiões, as quais estão representadas geometricamente na Figura 3.72 e definidas a seguir.

– \mathcal{R}_1^6 é a região à direita da parte da curva de contato $\Phi_2^c(u^L)$ com $c \leq c^C$, e à direita da curva de coincidência \mathcal{C} com $c \geq c^C$.

– \mathcal{R}_2^6 é a região à direita da curva $\Phi_2^c(u^*)$, à direita a parte da curva de coincidência \mathcal{C} com $c^L < c < c^C$ e à esquerda da parte da curva $\Phi_2^c(u^L)$ com $c < c^C$.

– \mathcal{R}_3^6 é a região abaixo de $\Phi^c(u^*)$ com parte em Ω_1 e parte em Ω_2 .

– \mathcal{R}_4^6 é a região entre a parte da curva dos pontos de inflexão \mathcal{I} com $c \leq c^L$ e parte da curva de contato $\Phi_1^c(u^*)$ com $c \leq c^L$.

– \mathcal{R}_5^6 é a região à esquerda da curva dos pontos de inflexão \mathcal{I} com $c < c^L$.

– \mathcal{R}_6^6 é a região entre as partes das curvas de pontos de inflexão \mathcal{I} e a da curva de coincidência \mathcal{C} com $c^L < c < c^C$.

– \mathcal{R}_7^6 é a região à esquerda da parte da curva dos pontos de inflexão \mathcal{I} com $c^L < c < c^C$.

– \mathcal{R}_8^6 é a região entre as partes das curvas de pontos de inflexão \mathcal{I} e da curva de coincidência \mathcal{C} com $c > c^C$.

– \mathcal{R}_9^6 é a região à esquerda da parte da curva dos pontos de inflexão \mathcal{I} com $c > c^C$.

As nove subregiões para os estados u^R que acabamos de definir estão ilustradas na Figura 3.72 e as respectivas soluções do problema de Riemann para $u^L \in \mathcal{L}^6$ fixo estão apresentadas a seguir. Acompanhe na Figura 3.73.

– **Seja** $\mathbf{u}^R = (\mathbf{s}^R, \mathbf{c}^R) \in \mathcal{R}_1^6$. Denotemos por $\Phi_2^c(u^R)$ a parte da curva de contato por u^R que está na região Ω_2 . Consideremos $u^M = (s^M, c^L)$ o estado definido pela interseção da reta $c = c^L$ com $\Phi_2^c(u^R)$. Sabemos, pelo item (iii) do Lema 3.4 que a s -onda de u^L para u^M é um choque. Como u^M está na região Ω_2 , pelo item (d) do Lema 3.6, temos que o choque de u^L para u^M tem velocidade compatível

com a onda de contato que se inicia em u^M . Logo, a solução do problema de Riemann é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{S_c} u^R.$$

– **Seja $\mathbf{u}^R = (\mathbf{s}^R, \mathbf{c}^R) \in \mathcal{R}_2^6$.** Considere $u^M = (s^M, c^L)$ o estado definido pela interseção da reta $c = c^L$ com $\Phi_2^c(u^R)$. Sabemos, pelo item (ii) do Lema 3.4, que a s -onda de u^L para u^M é uma rarefação. Logo, a solução do problema de Riemann é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{R_s} u^M \xrightarrow{S_c} u^R.$$

– **Seja $\mathbf{u}^R = (\mathbf{s}^R, \mathbf{c}^R) \in \mathcal{R}_3^6$.** Considere o ponto $u^* = (s^*, c^L)$ definido pela interseção da reta $c = c^L$ com a curva de coincidência \mathcal{C} . Sabemos, pelo item (ii) do Lema 3.4, que a s -onda de u^L para u^* é uma rarefação. Seja u^M o estado interseção de $\Phi_1^c(u^*)$ com a reta $c = c^R$. Pelo item (iv) do Lema 3.3, segue que a s -onda de u^M para u^R é um choque. Como $\lambda^c(u^*) = \lambda^s(u^*)$, u^L pode ser conectado à u^M por uma composta do tipo rarefação–contato. Assim, a solução do problema de Riemann é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{(R_s S_c)} u^M \xrightarrow{S_s} u^R.$$

– **Seja $\mathbf{u}^R = (\mathbf{s}^R, \mathbf{c}^R) \in \mathcal{R}_4^6$.** Considere $u^* = (s^*, c^L)$ e $u^M = (s^M, c^R)$ como no caso anterior. Como agora u^R está entre a curva de inflexão \mathcal{I} e u^M , pelo item (iii) do Lema 3.3, segue que a s -onda de u^M para u^R é uma rarefação. Como $\lambda^c(u^*) = \lambda^s(u^*)$, u^L pode ser conectado à u^M por uma composta do tipo rarefação–contato. Assim, a solução do problema de Riemann é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{(R_s S_c)} u^M \xrightarrow{R_s} u^R.$$

– **Seja $\mathbf{u}^R = (\mathbf{s}^R, \mathbf{c}^R) \in \mathcal{R}_5^6$.** Considere $u^* = (s^*, c^L)$ e $u^M = (s^M, c^R)$ como nos dois casos anteriores. Como u^M está à esquerda da curva de inflexão \mathcal{I} , pelo item (ii) do Lema 3.3, segue que a s -onda de u^M para u^R é uma composta rarefação–choque. Assim, a solução do problema de Riemann é constituída de dois grupos de onda como na sequência a seguir:

$$u^L \xrightarrow{(R_s S_c)} u^M \xrightarrow{(R_s S_s)} u^R.$$

– **Seja $\mathbf{u}^{\mathbf{R}} = (\mathbf{s}^{\mathbf{R}}, \mathbf{c}^{\mathbf{R}}) \in \mathcal{R}_6^6$.** Considere $u^* = (s^*, c^R)$ interseção da reta $c = c^R$ com a curva de coincidência \mathcal{C} . Seja $u^M = (s^M, c^L)$ o estado interseção da parte $\Phi_2^c(u^*)$ da curva de contato por u^* com a reta $c = c^L$. Como u^M está entre u^L e a curva de inflexão \mathcal{I} , pelo item (ii) do Lema 3.4, segue que a s -onda de u^L para u^M é uma rarefação. Além disso, pelo item (iii) do Lema 3.3, temos que a s -onda de u^* para u^R também é uma rarefação. Como $\lambda^c(u^*) = \lambda^s(u^*)$, o estado u^R pode ser conectado ao estado u^M por uma composta contato–rarefação. Assim, a solução do problema de Riemann é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{R_s} u^M \xrightarrow{(S_c R_s)} u^R.$$

– **Seja $\mathbf{u}^{\mathbf{R}} = (\mathbf{s}^{\mathbf{R}}, \mathbf{c}^{\mathbf{R}}) \in \mathcal{R}_7^6$.** Considere $u^* = (s^*, c^R)$ e $u^M = (s^M, c^L)$ como no caso anterior. Daí, pelo item (ii) do Lema 3.3, temos que a s -onda de u^* para u^R é uma composta rarefação–choque e como consequência temos um grupo de três ondas conectando u^M à u^R . Assim, a solução do problema de Riemann é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{R_s} u^M \xrightarrow{(S_c R_s S_s)} u^R.$$

– **Seja $\mathbf{u}^{\mathbf{R}} = (\mathbf{s}^{\mathbf{R}}, \mathbf{c}^{\mathbf{R}}) \in \mathcal{R}_8^6$.** Considere $u^* = (s^*, c^R)$ e $u^M = (s^M, c^L)$ como nos dois casos anteriores. Como agora $s^M > s^L$, segue do item (iv) do Lema 3.3 que a s -onda de u^L para u^M é um choque. O estado u^M está na região \mathcal{R}_1^6 e por isto $\sigma(u^L, u^M) < \lambda^c(u^M)$. Daí, pelo item (d) do Lema 3.6, há a compatibilidade do s -choque de u^L para u^M com a onda de contato de u^M para u^* . Assim, a solução do problema de Riemann é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{(S_c R_s)} u^R.$$

– **Seja $\mathbf{u}^{\mathbf{R}} = (\mathbf{s}^{\mathbf{R}}, \mathbf{c}^{\mathbf{R}}) \in \mathcal{R}_9^6$.** Como u^R está à esquerda da curva de inflexão \mathcal{I} , pelo item (ii) do Lema 3.3, o estado u^* é conectado ao estado u^R por uma composta rarefação–choque. Assim, a solução do problema de Riemann é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{(S_c R_s S_s)} u^R.$$

Resumindo, temos a representação geométrica para a solução, na Figura 3.73, de acordo com u^R em cada uma das \mathcal{R} -regiões da Figura 3.72 determinadas por um u^L fixado na região \mathcal{L}^6 da Figura 3.58.

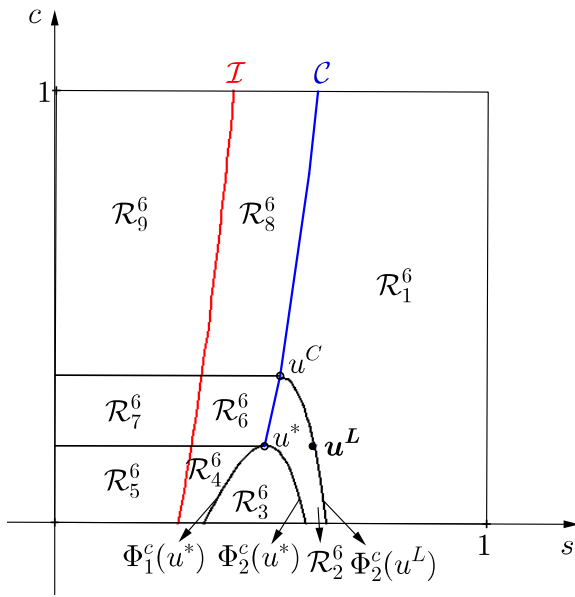


Figura 3.72: Representação das \mathcal{R} -regiões para $u^L \in \mathcal{L}^6$.

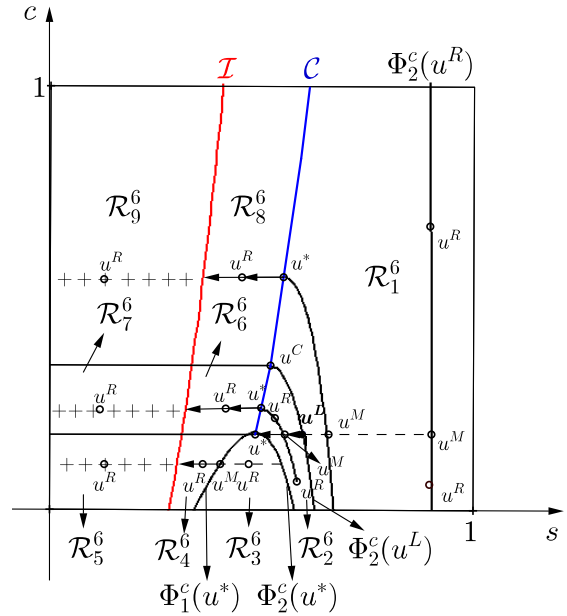


Figura 3.73: Representação da solução do problema de Riemann para $u^L \in \mathcal{L}^6$.

Fixemos u^L na região \mathcal{L}^7 da Figura 3.58. Consideremos a parte $\Phi_2^c(u^L)$ da curva de contato que passa por u^L . Como $u^L \in \mathcal{L}^7$, esta curva de contato deve se prolongar do nível $c = 0$ até o nível $c = 1$ sem interseções com a fronteira entre \mathcal{L}^6 e \mathcal{L}^7 , dada pela parte da curva de contato $\Phi_2^c(\mathcal{C}(1))$. A diferença deste caso para o anterior é que a curva $\Phi_2^c(u^L)$ não cruza mais a curva de coincidência \mathcal{C} e, conseqüentemente as \mathcal{R} -regiões correspondentes a \mathcal{R}_8^6 e \mathcal{R}_9^6 do caso anterior deixam de existir.

Assim, para este $u^L \in \mathcal{L}^7$ as \mathcal{R} -regiões para os estados u^R , denotadas por \mathcal{R}_1^7 , \mathcal{R}_2^7 , \mathcal{R}_3^7 , \mathcal{R}_4^7 , \mathcal{R}_5^7 , \mathcal{R}_6^7 e \mathcal{R}_7^7 estão na Figura 3.74 e as respectivas soluções para u^R em cada uma destas regiões estão representadas na Figura 3.75.

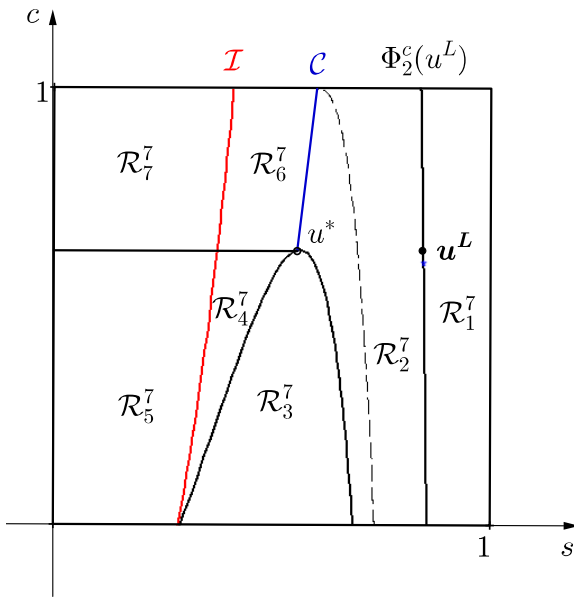


Figura 3.74: Representação das \mathcal{R} -regiões para $u^L \in \mathcal{L}^7$.

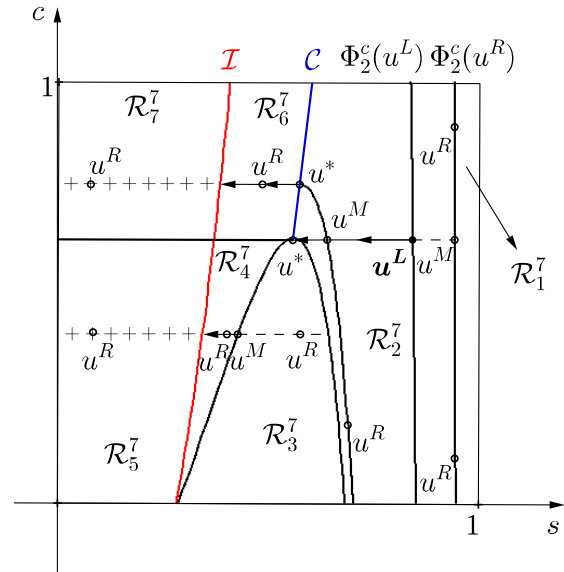


Figura 3.75: Representação da solução do problema de Riemann para $u^L \in \mathcal{L}^7$.

Observação 3.10 A curva tracejada na Figura 3.74 apenas indica a curva de contato fronteira entre as \mathcal{L} -regiões \mathcal{L}^6 e \mathcal{L}^7 , e não representa fronteira para as \mathcal{R} -regiões.

Portanto, como proposto no início desta seção, na página 59, acabamos de construir a solução do problema de Riemann para o Sistema (1) apresentado na Introdução, para quaisquer dados iniciais u^L e u^R no espaço de estados.

3.4 Alguns exemplos

Nesta seção ilustraremos alguns exemplos das soluções do Problema de Riemann no plano xt e, para um t fixo, ilustraremos a mesma solução nos planos xs e xc . Para tanto, consideraremos a função de viscosidade da água como sendo $r(c) = 0,18 + 0,65c \frac{s^2}{s^2 + (0,18 + 0,65c)(1-s)^2}$.

Os dois primeiros exemplos ilustram o caso em que u^L está fixo na região Ω_1 , ou seja, à esquerda da curva dos pontos de coincidência \mathcal{C} , e os outros dois exemplos ilustram a situação em que u^L está fixo na região Ω_2 que é a região à direita da curva de coincidência \mathcal{C} .

Exemplo 1 Consideremos $u^L \in \mathcal{L}^1$ e $u^R \in \mathcal{R}_1^1$. Neste caso, temos que a solução do Problema de Riemann é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_c} u^M \xrightarrow{S_s} u^R.$$

Lembremos que o ponto u^M é obtido como sendo a interseção da reta $c = c^R$ com a curva de contato $\Phi_1^c(u^L)$ que passa por u^L na região Ω_1 .

Na Figura 3.76 temos a representação da solução do Problema de Riemann no plano xt com $u^L = (0.084, 0.511) \in \mathcal{L}^1$, $u^R = (0.04, 0.148) \in \mathcal{R}_1^1$ e $u^M = (0.06, 0.148)$. Nas Figuras 3.77 e 3.78 temos respectivamente os perfis da saturação da água e da concentração do polímero para tal solução, para $t = 0.3$.

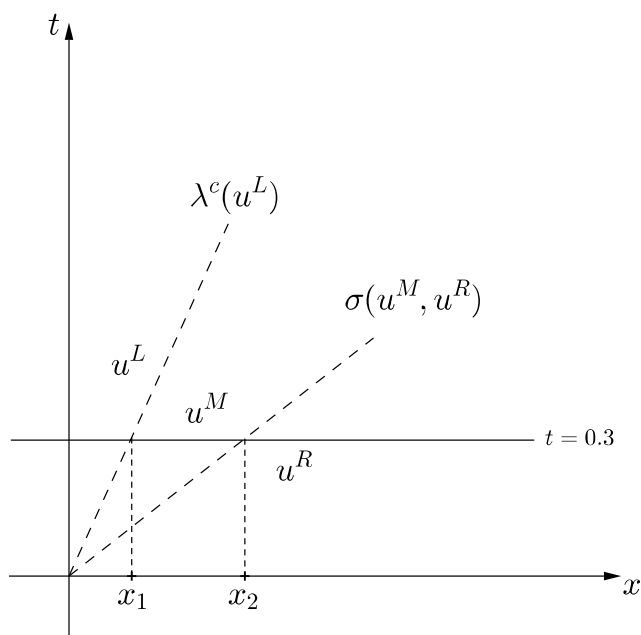


Figura 3.76: Representação da solução do Problema de Riemann do Exemplo 1 no plano xt .

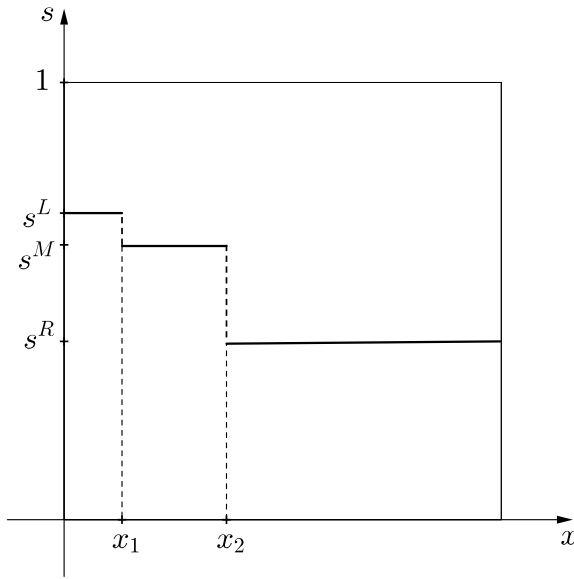


Figura 3.77: Perfil da saturação da água para o caso do Exemplo 1.

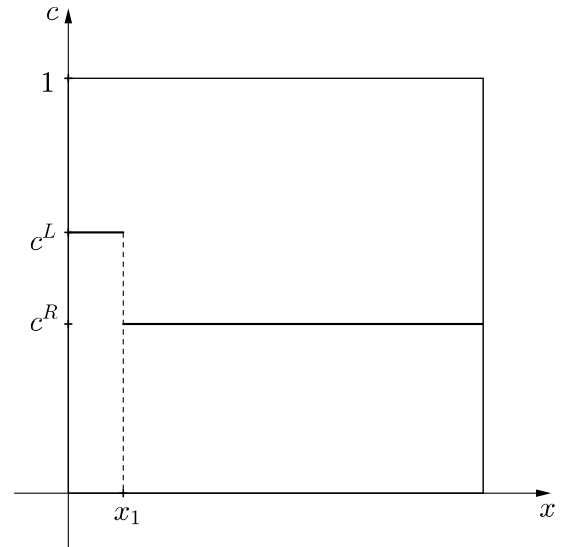


Figura 3.78: Perfil da concentração do polímero para o caso do Exemplo 1.

Exemplo 2 Consideremos $u^L \in \mathcal{L}^1$ e $u^R \in \mathcal{R}_2^1$. Neste caso, temos que a solução do Problema de Riemann é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_c} u^M \xrightarrow{R_s} u^R.$$

Neste caso, temos que o ponto u^M é obtido como sendo a interseção da reta $c = c^R$ com a curva de contato $\Phi_1^c(u^L)$ que passa por u^L na região Ω_1 .

Na Figura 3.79 temos a representação da solução do Problema de Riemann no plano xt com $u^L = (0.084, 0.511) \in \mathcal{L}^1$, $u^R = (0.249, 0.148) \in \mathcal{R}_2^1$ e $u^M = (0.06, 0.148)$. Nas Figuras 3.80 e 3.81 temos respectivamente os perfis da saturação da água e da concentração do polímero para tal solução, para $t = 0.3$.

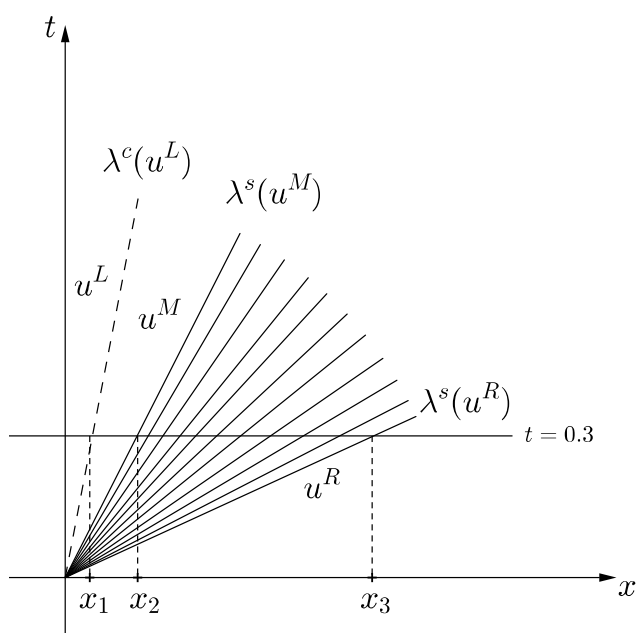


Figura 3.79: Representação da solução do Problema de Riemann do Exemplo 2 no plano xt .

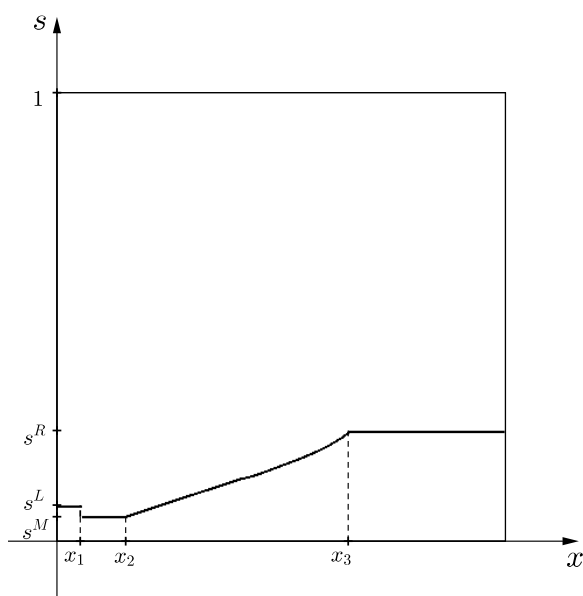


Figura 3.80: Perfil da saturação da água para o caso do Exemplo 2.

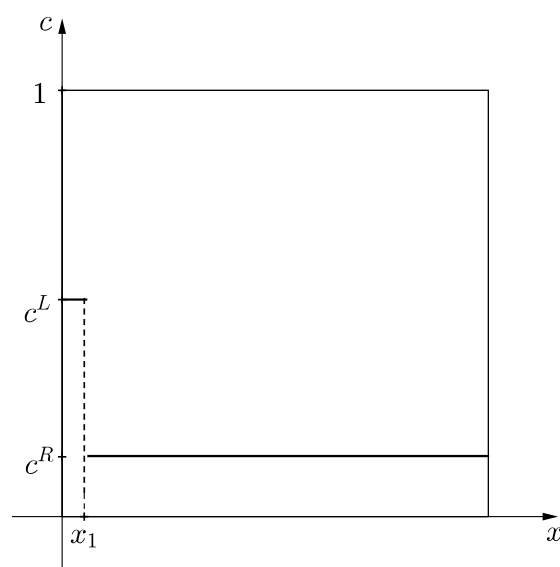


Figura 3.81: Perfil da concentração do polímero para o caso do Exemplo 2.

Exemplo 3 Consideremos $u^L \in \mathcal{L}^6$ e $u^R \in \mathcal{R}_4^6$. Neste caso, temos que a solução do Problema de Riemann é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{R_s S_c} u^M \xrightarrow{R_s} u^R.$$

Para este caso, temos que o ponto $u^* = (s^*, c^R)$ é obtido como sendo a interseção da reta $c = c^L$ com a curva dos pontos de coincidência \mathcal{C} e o ponto u^M é obtido como sendo a interseção da reta $c = c^R$ com a curva de contato $\Phi_1^c(u^*)$ que passa por u^* na região Ω_1 .

Na Figura 3.82 temos a representação da solução do Problema de Riemann no plano xt com $u^L = (0.6, 0.18) \in \mathcal{L}^6$, $u^R = (0.33, 0.08) \in \mathcal{R}_4^6$ e $u^M = (0.39, 0.08)$. Nas Figuras 3.83 e 3.84 temos respectivamente os perfis da saturação da água e da concentração do polímero para tal solução, para $t = 0.3$.

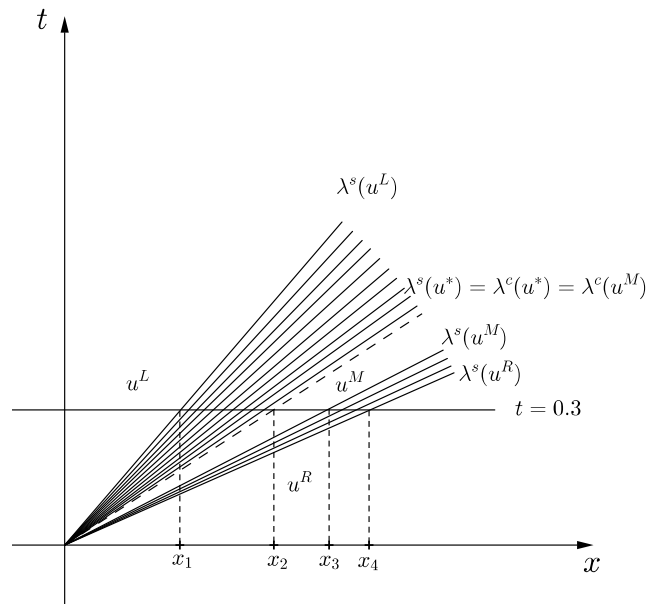


Figura 3.82: Representação da solução do Problema de Riemann do Exemplo 3 no plano xt .

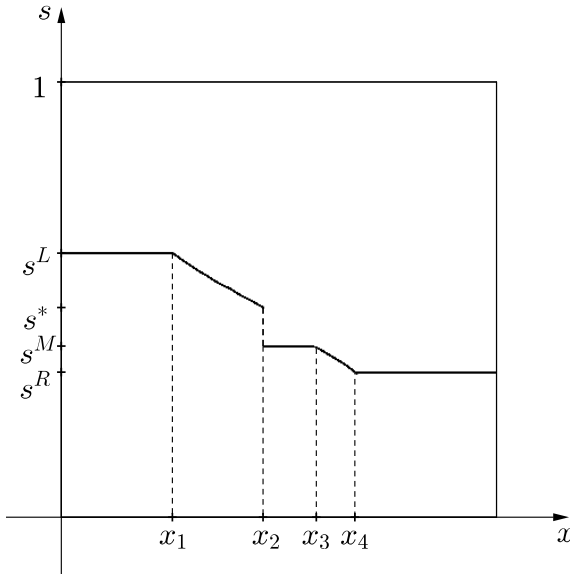


Figura 3.83: Perfil da saturação da água para o caso do Exemplo 3.

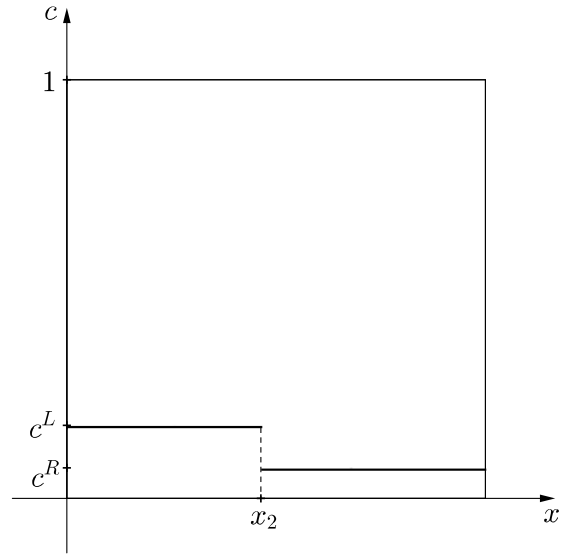


Figura 3.84: Perfil da concentração do polímero para o caso do Exemplo 3.

Exemplo 4 Consideremos $u^L \in \mathcal{L}^6$ e $u^R \in \mathcal{R}_8^6$. Neste caso, temos que a solução do Problema de Riemann é dada pela sequência

$$u^L \xrightarrow{S_s} u^M \xrightarrow{S_{cR_s}} u^R.$$

Neste caso, temos que o ponto $u^* = (s^*, c^R)$ é obtido como sendo a interseção da reta $c = c^R$ com a curva dos pontos de coincidência \mathcal{C} e o ponto u^M é obtido como sendo a interseção da reta $c = c^L$ com a curva de contato $\Phi_2^c(u^*)$ que passa por u^* na região Ω_2 .

Na Figura 3.85 temos a representação da solução do Problema de Riemann no plano xt com $u^L = (0.7, 0.3) \in \mathcal{L}^6$, $u^R = (0.5, 0.8) \in \mathcal{R}_8^6$ e $u^M = (0.774, 0.3)$. Nas Figuras 3.86 e 3.87 temos respectivamente os perfis da saturação da água e da concentração do polímero para tal solução, para $t = 0.3$.

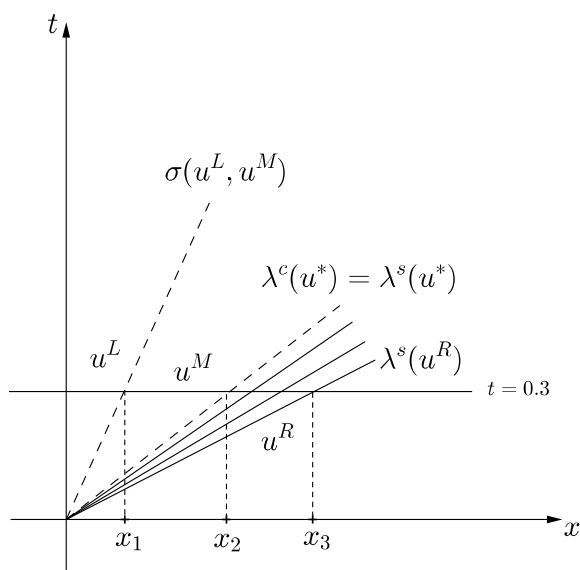


Figura 3.85: Representação da solução do Problema de Riemann do Exemplo 4 no plano xt .

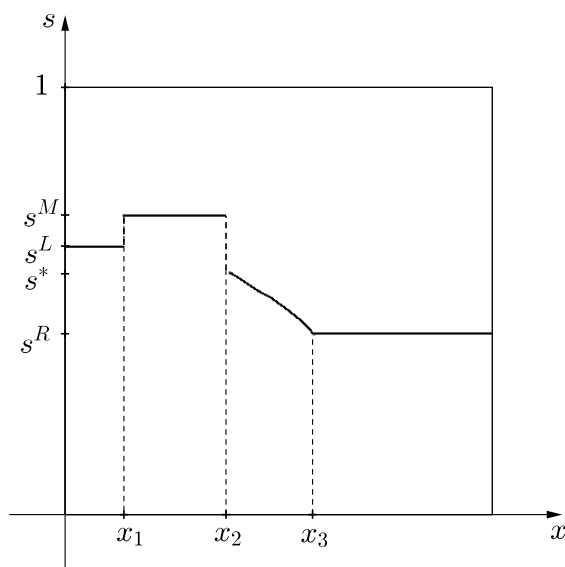


Figura 3.86: Perfil da saturação da água para o caso do Exemplo 4.

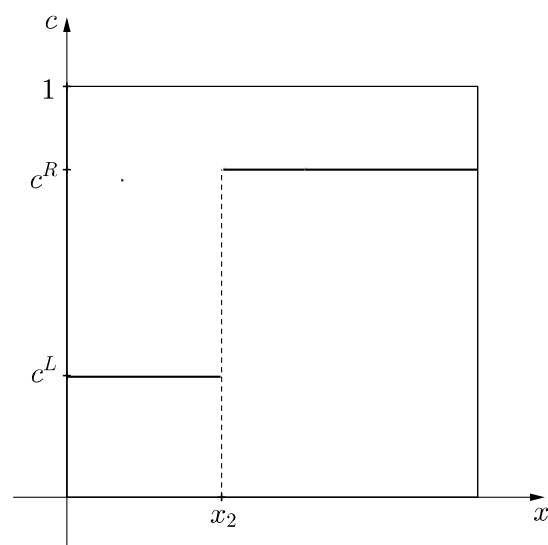


Figura 3.87: Perfil da concentração do polímero para o caso do Exemplo 4.

Capítulo 4

Considerações Finais

Apresentamos neste trabalho a solução do problema de Riemann para um sistema de leis de conservação modelando um escoamento unidimensional bifásico num meio poroso. Tal modelo considera a injeção de polímero na água para fazer com que a diferença das viscosidades da água e do óleo diminuam e assim otimizar a produção de petróleo.

No Capítulo 1, fizemos a dedução do modelo matemático, encontrando um sistema de EDP's de duas leis de conservação, definimos a função de fluxo fracionário e apresentamos suas principais propriedades.

No Capítulo 2, fizemos uma análise qualitativa do problema proposto, onde mostramos que tal sistema é não-estritamente hiperbólico.

No Capítulo 3, construímos a solução do problema de Riemann para o problema proposto para quaisquer condições de injeção e de produção representados por $u^L = (s^L, c^L)$ e $u^R = (s^R, c^R)$, respectivamente.

A continuidade natural deste trabalho é fazer comparações para várias situações de injeção e de produção, bem como fazer simulações computacionais, para poder verificar as vantagens ou desvantagens de injeção de polímero, as quais não foram feitas devido a limitação do tempo. Outros pontos a serem considerados em trabalhos futuros referem-se a incluir hipóteses que foram desprezadas na modelagem, tais como a inclusão de efeitos de gravidade e de pressão capilar, inclusive para o caso de escoamentos trifásicos e modelos mais complexos multicomposicionais.

Apêndice A

O problema geral de Riemann 2×2

Nesta seção, baseados no livro do Smoller [11], descreveremos brevemente algumas propriedades do problema de Riemann para um sistema de duas equações da forma

$$G(u)_t + F(u)_x = 0 \quad t \geq 0, -\infty < x < +\infty, \quad (\text{A.1})$$

com as condições iniciais

$$u(x, 0) = \begin{cases} u^L & \text{se } x < 0 \\ u^R & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

em que $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ com Ω denotando um espaço de estados, u um estado e $F, G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ funções suaves. Além disso, consideraremos u^L e u^R como sendo dois estados fixados.

Em geral, as soluções do sistema (A.1) são descontínuas. Portanto, precisamos que u seja uma *solução fraca*, ou seja, que satisfaça a relação

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[u(x, t) \phi_t(x, t) + (G^{-1} \circ F) \phi_x(x, t) \right] dx dt + \int_{-\infty}^\infty u(x, 0) \phi(x, 0) dx = 0,$$

para todas as funções suaves ϕ com suporte compacto no semiplano $\mathbb{R} \times [0, \infty)$.

A.1 Soluções centradas

Uma solução é *centrada* em zero se u for constante nas retas $\frac{x}{t} = \text{constante}$. A existência de uma solução centrada é natural tendo em vista que, $u(ax, at)$ é também

uma solução para qualquer $a > 0$ sempre que $u(x, t)$ é uma solução de (A.1). Logo, se a solução é única, então $u(x, t) = u(ax, at)$ para qualquer $a > 0$.

A.2 Características

Observe que o sistema (A.1) pode ser reescrito como

$$u_t + A(u)u_x = 0, \quad (\text{A.3})$$

onde $A(u) = \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial u}$ é a chamada matriz Jacobiana do sistema. As velocidades características são os autovalores $\lambda^i = \lambda^i(u)$, $i = 1, 2$ de $A(u)$. Os correspondentes autovetores (à direita) são denotados por $e^i = e^i(u)$.

Definição A.1 *O Sistema (A.3) é dito estritamente hiperbólico se os seus autovalores forem reais e distintos.*

Ademais, se $u = u(x, t)$ é uma solução de (A.3), então as características são curvas no plano (x, t) definidas por

$$\frac{dx}{dt} = \lambda^i(u(x, t)), \quad i = 1, 2.$$

A.3 Ondas simples centradas – Rarefações

Assumiremos que u é uma solução suave de (A.2) e (A.3) centrada em $x = 0$, $t = 0$. Escrevendo $u(x, t) = v(\tau)$, com $\tau = \frac{x}{t}$, substituindo em (A.3) e simplificando obtemos

$$(A(v) - \tau I)v'(\tau) = 0.$$

Em outras palavras, se $v' \neq 0$, então τ é um autovalor de $A(v)$ e v' é um autovetor correspondente (à direita). Logo, conforme $\frac{x}{t}$ aumenta, a solução v percorre uma curva no espaço de estados Ω cuja tangente em $v(\tau)$ é um autovetor de $A(v(\tau))$. Sendo assim, a função $v(\tau)$ satisfaz o sistema autônomo de EDO's

$$\frac{dv}{d\tau} = e^i(v(\tau)) \quad i = 1, 2, \quad (\text{A.4})$$

onde $e^i(u)$ é um autovetor à direita correspondendo a $\lambda^i(u)$.

Definição A.2 Uma onda simples centrada do i -ésimo campo, ou simplesmente uma onda de rarefação, é uma solução u de (A.2)–(A.3) tal que $u(x, t)$ percorre uma curva integral do i -ésimo campo característico de u^L à u^R , e $\lambda^i(u(x, t))$ cresce de $\lambda^i(u^L)$ até $\lambda^i(u^R)$ quando $u(x, t)$ percorre a curva integral de u^L até u^R .

Temos a representação geométrica de uma onda de rarefação na Figura A.1.

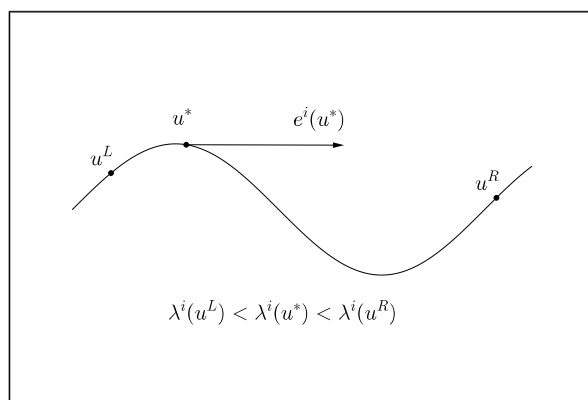


Figura A.1:

Observe que, a velocidade na frente da onda é $\lambda^i(u^R)$ e a velocidade após a onda é $\lambda^i(u^L)$, conforme mostrado na figura A.2.

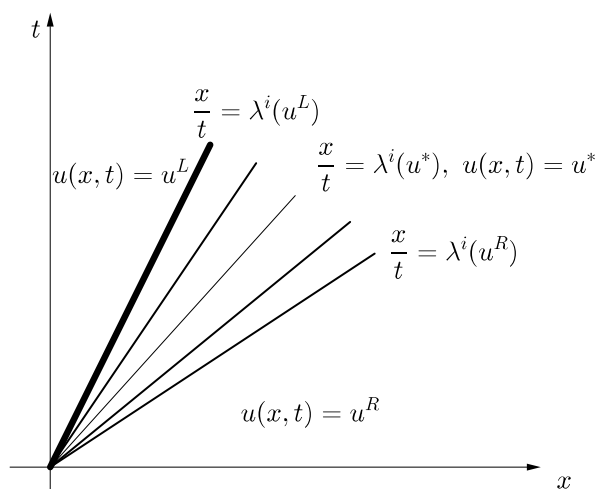


Figura A.2: Rarefação.

Definição A.3 Uma curva de rarefação por um estado inicial u^L é o conjunto de estados $u^R \in \Omega$ que podem ser conectados ao estado u^L por uma onda de rarefação.

Além disso, temos as seguintes definições para os campos característicos.

Definição A.4 O campo característico é dito genuinamente não-linear numa região $\mathcal{R} \subset \Omega$ se

$$\nabla \lambda^i(u) \cdot e^i(u) \neq 0, i = 1, 2,$$

em \mathcal{R} . Em outras palavras, o i -ésimo valor característico ($i = 1, 2$) é uma função estritamente monótona sobre a curva integral relacionada ao campo de vetores e^i associado, no subconjunto \mathcal{R} .

Definição A.5 O campo característico é dito linearmente degenerado se

$$\nabla \lambda^i(u) \cdot e^i(u) = 0, \forall u \in \Omega, i = 1, 2.$$

Ademais, existem campos que não são genuinamente não-lineares nem linearmente degenerados. Para esses campos temos as seguintes definições.

Definição A.6 Um estado $u \in \Omega$ é chamado de ponto de inflexão se $\nabla \lambda^i(u) \cdot e^i(u) = 0$.

Definição A.7 O conjunto de inflexão associado à i -ésima família característica ($i = 1, 2$) é formado pelos estados $u \in \Omega$ tais que

$$\nabla \lambda^i(u) \cdot e^i(u) = 0, i = 1, 2.$$

Ou seja, o conjunto de inflexão é formado pelos pontos críticos dos valores característicos, restritos as curvas integrais dos respectivos campos característicos.

A.4 Ondas de choque

Uma onda de choque com velocidade de propagação σ é definida da seguinte forma

$$u(x, t) = \begin{cases} u^L & \text{se } \frac{x}{t} < \sigma \\ u^R & \text{se } \frac{x}{t} > \sigma. \end{cases}$$

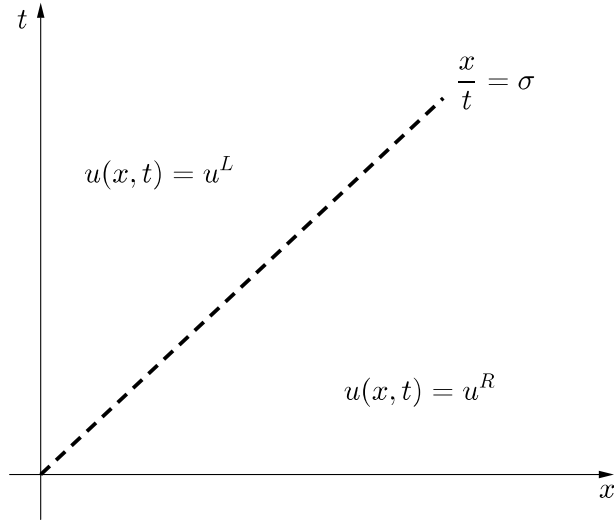


Figura A.3: Choque.

No espaço xt esta solução tem a representação como na Figura A.3

Note que, as equações são satisfeitas se $\frac{x}{t} < \sigma$ ou $\frac{x}{t} > \sigma$. No entanto, para que esta seja uma solução fraca, u deve satisfazer a *condição de salto de Rankine-Hugoniot*:

$$F(u^R) - F(u^L) = \sigma(u^R - u^L). \quad (\text{A.5})$$

Definição A.8 A *curva de Hugoniot* $\mathcal{H}(u^L)$ do estado u^L é o conjunto de estados u^R para os quais existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que a *condição de Rankine-Hugoniot* é válida, isto significa que, σ depende de u^L e u^R .

Em geral, a solução de (A.2), (A.3) não será única a menos que uma restrição adicional seja colocada sobre os estados para os quais u^L pode ser conectado por um choque. Tal condição é dita *Condição de Entropia* a qual será discutida na Seção A.7.

A velocidade de choque σ pode ser eliminada das duas equações em (A.5) e com isto restando uma única equação para as duas componentes de u^R . Sendo assim, de forma geral, o conjunto de choque $\mathcal{H}(u^L)$ será composto de uma curva no espaço de estados e possivelmente com algumas componentes desconectas. Essas curvas são as *curvas de Hugoniot* do estado u^L .

Podemos verificar que uma curva de choque suave passando por u^L é tangente a uma das curvas de rarefação através de u^L . De fato, suponha que $u = u(\tau)$ é uma

curva de choque suave através de u^L com $u(0) = u^L$. Diferenciando a condição de Rankine-Hugoniot $F(u(\tau)) - F(u^L) = \sigma(\tau)(u(\tau) - u^L)$ em relação a τ , obtemos

$$F'(u(\tau))u'(\tau) - 0 = \sigma'(\tau)(u(\tau) - u^L) + \sigma(\tau)(u'(\tau) - 0). \quad (\text{A.6})$$

Tomando $\tau = 0$, temos que

$$F'(u(0))u'(0) = \sigma'(0)(u(0) - u^L) + \sigma(0)(u'(0)). \quad (\text{A.7})$$

Daí, em $u(0) = u^L$, obtemos

$$F'(u^L)u'(0) = \sigma'(0)(u^L - u^L) + \sigma(0)(u'(0)), \quad (\text{A.8})$$

e assim,

$$A(u^L)u'(0) = \sigma(0)u'(0). \quad (\text{A.9})$$

Portanto, $\sigma(0)$ é um autovalor de $A(u^L)$ e $u'(0)$ é um autovetor correspondente.

A.5 Descontinuidades de Contato

Dados dois estados u^L e u^R sobre uma mesma curva integral de um campo característico linearmente degenerado associado ao autovalor λ^i , considere a função, que também é uma solução fraca do Sistema (A.2)–(A.3),

$$u(x, t) = \begin{cases} u^L & \text{se } \frac{x}{t} < \sigma \\ u^R & \text{se } \frac{x}{t} > \sigma, \end{cases}$$

com $\sigma = \lambda^i(u^L) = \lambda^i(u^R)$ ($i = 1, 2$). Neste tipo de solução as retas características da i -ésima família são paralelas a descontinuidade. E assim, dizemos que u^L e u^R são conectáveis por uma *descontinuidade de contato*, [12].

No espaço xt esta solução tem a representação como na Figura A.4

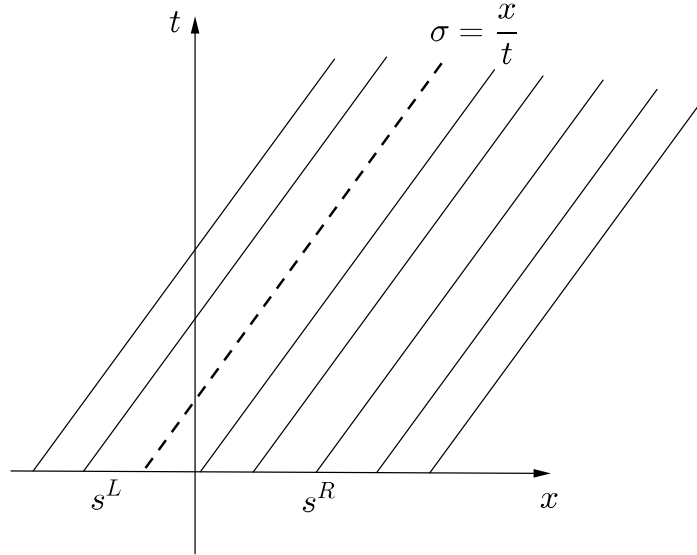


Figura A.4: Descontinuidade de contato

Além disso, conforme já mencionado, se o i -ésimo campo é linearmente degenerado, então as curvas integrais deste campo são também curvas de choque em alguma região \mathcal{R} do espaço de estados. E, quaisquer dois estados u^L , u^R na mesma curva em \mathcal{R} podem ser conectados por uma descontinuidade de contato com velocidade $\sigma = \lambda^i(u^L) = \lambda^i(u^R)$. Para provar ambas afirmações, é suficiente verificar a condição de Rankine-Hugoniot (A.5) com este valor de σ .

Para tanto, seja $u(\tau)$ a curva integral do i -ésimo campo linearmente degenerado com $u(0) = u^L$, e assumamos que $u^R = u(\tau_0)$ para algum τ_0 . Defina

$$f(\tau) \equiv F(u(\tau)) - F(u^L) - \lambda^i(u(\tau) - u^L), \quad (\text{A.10})$$

em que λ^i é constante. Então

$$f(0) = F(u(0)) - F(u^L) - \lambda^i(u(0) - u^L) = 0,$$

Derivando (A.10) em τ , obtemos

$$f'(\tau) = F'(u(\tau))u'(\tau) - 0 - \lambda^i(u'(\tau) - 0) = (A(u) - \lambda^i I)u'(\tau) = (A(u) - \lambda^i I)e^i(u) = 0,$$

e como λ^i é autovalor de $A(u)$ associado à $e^i(u)$ segue que, $f(\tau) \equiv 0$, e, portanto, um ramo da curva de choque coincide com a i -ésima curva integral.

Definição A.9 *Uma curva de Contato por um estado u^L fixado, é o conjunto de estados $u \in \Omega$ numa curva integral por u^L definida por um campo linearmente degenerado.*

Portanto, uma descontinuidade de contato é uma particular solução descontínua em que a velocidade de propagação coincide com uma velocidade característica em ambos os lados da descontinuidade.

Por [12], uma característica das descontinuidades de contato é dada pelo seguinte Teorema.

Teorema A.10 *As curvas integrais de um campo característico coincidem com as curvas de Hugoniot para um sistema hiperbólico se, e somente se, elas são retas ou o campo é linearmente degenerado.*

Definição A.11 *Dados dois estados u^L e u^R no espaço de estados Ω , os choques e as rarefações que conectam u^L e u^R , são ditas ondas elementares.*

A.6 Ondas compostas

Quando o campo característico deixa de ser genuinamente não-linear um outro tipo de onda, que também chamaremos elementar, surge da composição das duas anteriores (ondas de rarefação e ondas de choque), embora no espaço (x, t) tenhamos apenas as rarefações e os choques. Chamamos esta composição de *onda composta*.

Definição A.12 *Uma curva Composta por um estado inicial u^L , associada ao i -ésimo campo característico, $i = 1, 2$, é o conjunto de estados u de Ω tais que exista um estado $u^* \in \Omega$ de maneira que u^* seja conectável a u^L por uma i -onda de rarefação, e que u seja conectável a u^* por uma i -onda de choque de velocidade $\sigma = \lambda^i(u^*)$.*

A solução do problema de Riemann por uma composta rarefação–choque é dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} u^L & \text{se } \frac{x}{t} < \lambda^i(u^L) \\ v & \text{se } \lambda^i(u^L) \leq \frac{x}{t} < \lambda^i(u^*) \\ u^R & \text{se } \frac{x}{t} > \lambda^i(u^*), \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

onde v é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = e^i(v) \\ v(0) = u^L, \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

tal que o valor característico (ou autovalor) $\lambda^i(v)$ cresce de $\lambda^i(u^L)$ à $\lambda^i(u^*)$ quando v variar de u^L à u^* e $\lambda^i(u^*)$ é a velocidade de propagação do choque que conecta u^* à u^R .

No espaço xt esta solução tem a representação como na Figura A.5.

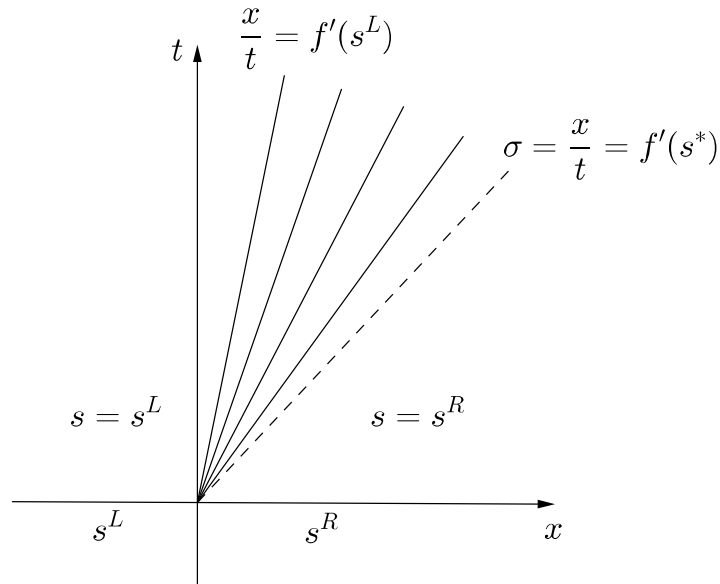


Figura A.5: Onda composta (rarefação–choque) no plano xt .

As ondas do tipo choque e composta não possuem unicidade. Por isso, devemos impor condições de unicidade, que são as condições de entropia que serão discutidas na Seção A.7.

A.7 Condições de entropia

Como mencionado na Seção A.4 e na Seção A.6, soluções do problema de Riemann em geral não são únicas sem uma restrição adicional sobre os choques. Dentre as várias condições de Entropia, baseados em [5], [6] e [7], vamos discutir as condições de entropia de Lax e de Oleinik–Liu, que serão usados neste trabalho.

A.7.1 Condição de Entropia de Lax

Suponha que o estado da esquerda u^L seja conectado ao estado da direita de u^R por um choque de velocidade σ . Dizemos que a reta característica de inclinação $\frac{dx}{dt} = \lambda^i(u^L)$ através de (x, t) com $\frac{x}{t} < \sigma$ deixa o choque se $\lambda^i(u^L) < \sigma$ e entra no choque se $\lambda^i(u^L) > \sigma$. Analogamente, a reta característica $\frac{dx}{dt} = \lambda^i(u^R)$ passando por (x, t) com $\frac{x}{t} > \sigma$ deixa o choque se $\lambda^i(u^R) > \sigma$ e entra no choque se $\lambda^i(u^R) < \sigma$.

Nesta notação, a *Condição de Entropia de Lax* afirma que dados dois estados u^L e u^R satisfazendo a condição de Rankine-Hugoniot, para algum valor de σ , eles são admissíveis como uma onda de choque se exatamente uma das quatro características deixar o choque.

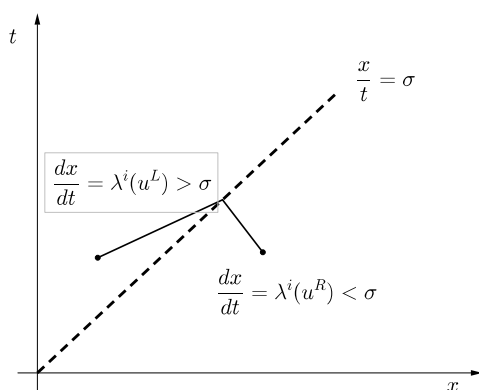


Figura A.6: Característica entrando no choque.

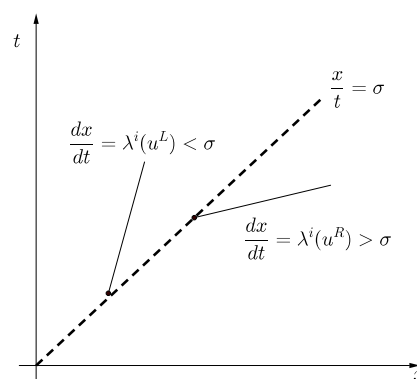


Figura A.7: Característica saindo no choque.

Em termos de velocidades características isto significa duas possibilidades para um sistema 2×2

$$\lambda^1(u^L) < \sigma, \lambda^2(u^L) > \sigma$$

$$\lambda^1(u^R) < \sigma, \lambda^2(u^R) < \sigma,$$

ou

$$\begin{aligned}\lambda^1(u^L) &> \sigma, \quad \lambda^2(u^L) > \sigma \\ \lambda^1(u^R) &< \sigma, \quad \lambda^2(u^R) > \sigma,\end{aligned}$$

assumindo $\lambda^1 \leq \lambda^2$. No primeiro caso, temos um 1–choque de Lax e no segundo, um 2–choque de Lax.

Definimos então o conjunto dos estados na curva de Hugoniot que podem ser conectados a u^L por um choque que satisfaz a condição de Entropia de Lax. Este conjunto será chamado de curva de choque e denotado por $S^i(u^L)$, $i = 1, 2$.

A.7.2 Condição de Entropia de Oleinik–Liu

A *Condição de Entropia de Oleinik–Liu* visa em obter admissibilidade de soluções descontínuas para sistemas de leis de conservação não–estritamente hiperbólicos com campos característicos lineamente degenerados.

Esta condição é dada pelas desigualdades

$$\frac{f(s) - f(s^R)}{s - s^R} \leq \sigma \leq \frac{f(s) - f(s^L)}{s - s^L}, \quad \forall s \text{ entre } s^L \text{ e } s^R. \quad (\text{A.13})$$

Ela constitui em comparar a inclinação σ da secante ao gráfico de f pelos pontos $(s^L, f(s^L))$ e $(s, f(s))$ com as inclinações das retas secantes que contém os pontos $(s^R, f(s^R))$ e $(s, f(s))$. A inclinação $(s^R, f(s^R))$ e $(s, f(s))$ deve ser menor ou igual a inclinação σ e a inclinação das retas secantes que contém os pontos $(s^L, f(s^L))$ e $(s, f(s))$ deve ser maior ou igual a inclinação σ .

A.8 Sequência de ondas

Agora, mostraremos como as ondas elementares descritas acima podem ser combinadas para formar soluções de problemas de Riemann.

Sejam u^1, u^2 e u^3 três estados arbitrários no espaço de estados. Suponha que os estados u^1 e u^2 podem ser conectados por uma onda elementar, com u^1 à esquerda e

u^2 à direita, suponha que os estados u^2 , u^3 também podem ser conectados, com u^2 à esquerda e u^3 à direita. Denotaremos essas ondas por $u^1 \rightarrow u^2$, $u^2 \rightarrow u^3$. Então o problema de Riemann com estado à esquerda u^1 e estado à direita u^3 pode ser resolvido pela sequência das duas ondas acima, desde que a velocidade da trazeira da onda $u^1 \rightarrow u^2$ seja menor do que ou igual à velocidade da frente da onda $u^2 \rightarrow u^3$, como mostrado na Figura A.8.

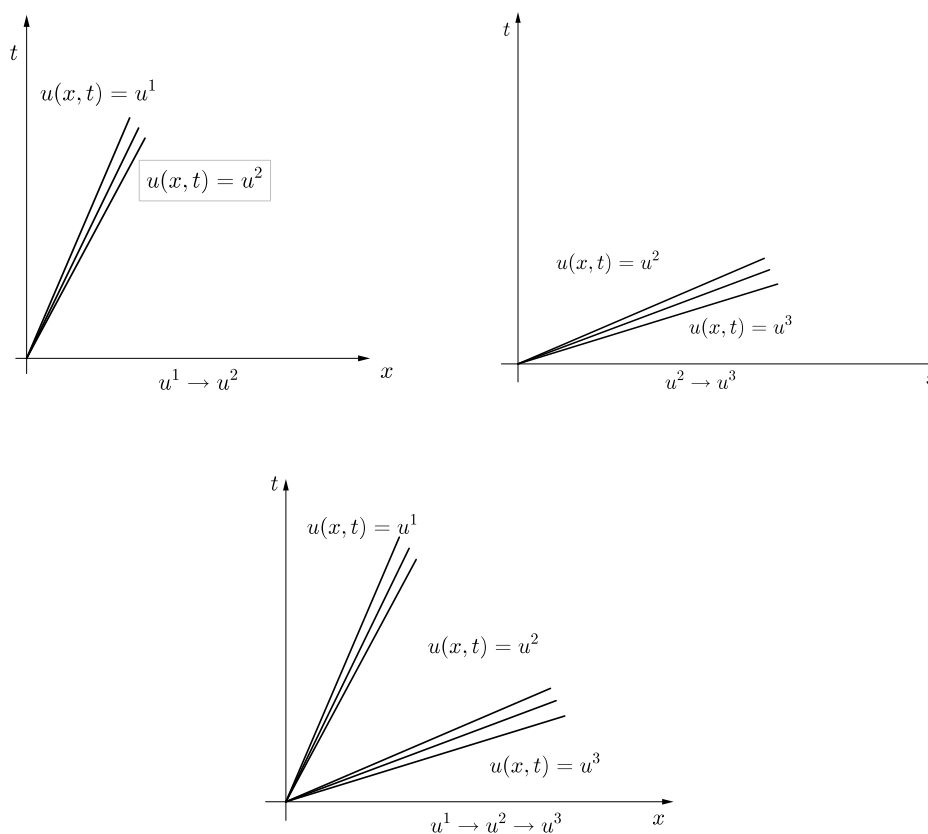


Figura A.8: Sequência de ondas

Neste caso, dizemos então que as ondas $u^1 \rightarrow u^2$ e $u^2 \rightarrow u^3$ são compatíveis, ou que satisfazem a condição de compatibilidade.

Bibliografia

- [1] DAKE, L. P.; *Engenharia de reservatórios: fundamentos*, Elsevier, 1^aEd. 2014.
- [2] ISAACSON, E.; *Global Solution of a Riemann Problem for a Non Strictly Hyperbolic System of Conservation Laws Arising in Enhanced Oil Recovery*, Rockefeller University, preprint, 1987.
- [3] JOHANSEN, T.; WINTHER, R.; *The Solution of the Riemann Problem for a Hyperbolic System of Conservation Laws Modeling Polymer Flooding*, SIAM J. Math. Anal. 19, 541-566, 1988.
- [4] B. L. Keyfitz and H. C. Kranzer; *A System of Non-Strictly Hyperbolic Conservation Laws Arising in Elasticity Theory*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 72, 219-241, 1980.
- [5] LAX, P. D.; *Hyperbolic Systems of Conservation Laws II*, Comm. Pure. Appl. Math. 10, pp 537–556, 1957.
- [6] LIU, T. P.; *The Riemann problem for general 2×2 of conservation laws*, Trans. Amer. Math. Soc., 199 (1974), pp 89–112.
- [7] LIU, T. P.; *The Riemann problem for general systems of conservation laws*, J. Differential Equations, 18 (1975), pp. 218–234.
- [8] MENEZELLO, M. D. C; *Comentários à Lei de Petróleo*, Atlas, 2^a Ed. 2009.
- [9] MOTA, J. C.; *The Riemann Problem for a Simple Thermal Model for Two Phase Flow in Porous Media*, Computational & Applied Mathematics, v. 11, n.2, p. 117-145, 1992.

- [10] PEACEMAN, D. W. ; *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*, Elsevier, 1977.
- [11] SMOLLER, J. ; *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, 1994.
- [12] SOUZA, A. J. ; *Sistemas singulares de três leis de conservação em escoamento multifásico*, Tese de Doutorado, 1989.
- [13] SOUZA, A. J. ; *Stability of Singular Fundamental Solutions for Flow in Porous Media*. Comput. Appl. Math., v.11, n°2, pp. 73-115,1992.
- [14] THOMAS, J. E; *Fundamentos de Engenharia de Petróleo*, Interciência, 2001.