Resumo

Neste trabalho estudaremos o sistema elíptico semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u) - v & \text{em} & \Omega \\ -\Delta v &= \delta u - \gamma v & \text{em} & \Omega \\ u &= v = 0 & \text{em} & \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 1)$ é um domínio limitado e regular, $n \geq 1$, δ e γ são constantes reais positivas e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma dada função.

Abstract

In this work we study the semilinear elliptic system

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f(x,u) - v & \text{em} \quad \Omega \\ -\Delta v & = & \delta u - \gamma v & \text{em} \quad \Omega \\ u & = & v = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{array}\right.$$

where Ω is a bounded domain and smooth in $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$, $\delta > 0$ e $\gamma > 0$ are given real numbers, and $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is a function.

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sobre a Existência de Soluções Estacionárias para um Sistema de Reação-Difusão

por

Francisca Leidmar Josué Vieira †

sob orientação do

Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

Sobre a Existência de Soluções Estacionárias para um Sistema de Reação-Difusão

por

Francisca Leidmar Josué Vieira

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Angelo Roncalli Furtado de Holanda

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva

Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa
Orientador

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto
Co-orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Março/2009

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por ter estado comigo em todos os momentos da minha vida e desse trabalho, me dando força, perseverança, paciência e amor.

Aos meus pais, Antonio e Raimunda, por todo o apoio, amor, incentivo, amizade, orações, etc.

Aos meus irmãos Francisco, Aurimar, Aparecida e Damiana, pelo incentivo, amor, compreensão e amizade.

A Damiana por ter acreditado, mesmo quando eu desacreditei e ter permanecido comigo em todos os momentos.

Aos meus sobrinhos Lívia, Edmundo, Daiana e Júnior pelas vezes em que evitaram de brincar só pra não fazer barulho, pra que eu pudesse estudar.

Aos meus cunhados Francisco, Raimunda e Evilanio pela amizade e incentivo.

Ao meu noivo, Tiago, pela paciência, compreensão, amor e companheirismo no decorrer dessa jornada.

Ao meu amigo e primeiro orientador Prof. Dr. Carlos Humberto Soares Júnior pelo incentivo, apoio e amizade.

Ao amigo Geraldo(em memória) pelo incentivo e carinho.

Aos amigos Marilze, Rogério e Chagas pelo incentivo e amizade.

Ao amigo Pedro, pela amizade, incentivo e confiança.

A Sheila e Geizane por todas as brincadeiras. Também pelas boas conversas, incentivo e companhia.

A todos os professores do DM-UFC e DME-UFCG, em especial aos professores Bianca Morelli, Ângelo Roncalli e Francisco Júlio, bem como os professores Abdênago Barros, Luquésio Petrola, Lev Birbrair, Antônio Caminha, Robério Rogerio e Alexandre Fernandes que muito contribuíram para minha formação.

Ao meu orientador Professor Francisco Júlio pela atenção e pelos conhecimentos transmitidos.

Ao meu Co-orientador prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto pela prestatividade, atenção e ajuda sempre que solicitada.

Ao professor Sérgio Mota, pela boa recepção e atenção.

Aos professores Severino Horácio e Angelo Roncalli pelas sugestões dadas e pela disponibilidade em participar da banca examinadora.

A todos os professores da Universidade Regional do Cariri - URCA, especialmente aos professores Carlos Humberto, Carlos Alberto, Paulo César, Zelálber, Ricardo, Mário, Wilson e Liane pelo incentivo e contribuição para a minha formação.

Aos companheiros da pós-graduação: Sheyla, Geizane, Eder, Sabrina, Désio, Marcelo, Rawlilson, Jéssyca, Rodrigo, Clara, Josiluiz, Maciel, Joseane, Luciano, Jackson, Suene, Natan, Sandro, Paulo, Tiago Cruz, Loester, Jocel, Damião Júnio, Flávio, Edinardo, João Francisco, Thadeu, Adam, Ernani, Hallyson, Manoel, Paulo Alexandre, Fabrício, Fagner, Edno, Daniel, Denize, Wilker, Carpegiane, Raimundo, Michel, David Carneiro e Elivaldo.

A todos os funcionários do DM-UFC e DME-UFCG pela simpatia e ajuda quando necessária.

A todos os amigos de Juazeiro, Fortaleza e Campina Grande.

A CAPES pela ajuda financeira.

Por fim, agradeço a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Dedicatória

Aos meus pais, aos meus irmãos e ao meu noivo.

"Na vida o que vale não é ser aplaudido, mas de onde os aplausos vêm"

Damiana Vieira

Sumário

Introdução

Nos últimos anos os chamados sistemas de reação-difusão têm recebido grande atenção dos pesquisadores em Equações Diferenciais Parciais, motivados pela amplitude de suas aplicações em modelos físicos, químicos, biológicos, etc., como também pela importância de suas estruturas matemáticas que, via de regra, requerem aparatos não-triviais da chamada Análise Funcional Não-Linear.

O exemplo mais simples de tais sistemas aparece na forma

$$\frac{\partial U}{\partial t} = D\Delta U + f(U) \quad \text{em} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N \ e \ t > 0, \tag{1}$$

onde $U = U(x_1, \ldots, x_n, t) \in \mathbb{R}^k$, para cada $(x_1, \ldots, x_n, t) \in \Omega \times (0, \infty)$, D é uma matriz $k \times k$ e $f(U)$ é uma dada não-linearidade. Para mais informações o(a) leitor(a) poderá consultar Smoller [18].

Em particular, nesta dissertação, focalizaremos nossa atenção no estudo de soluções estacionárias do sistema parabólico

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & \Delta u + f(u) - v & \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} & = & \Delta v + \delta u - \gamma v & \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty) \end{array} \right. \tag{2}$$

que é uma extensão das equações de FitzHugh-Nagumo

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & u_{xx} + f(u) - v \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} & = & \varepsilon(u - \gamma v) \end{array} \right. \tag{3}$$

que surgiram nos estudos de condução nervosa e outros sistemas originados em Química e Biologia. Veja Hastings [12].

Por exemplo, no que se refere ao sistema (2), as funções u e v podem ser interpretadas como sendo as concentrações relativas de duas substâncias (morfogenes) e chamadas, respectivamente, de ativadoras e inibidoras.

O problema (3) é uma simplificação das equações de Hodgkin-Huxley, um sistema de quatro equações, e foram originalmente estudadas por FitzHugh ao modelar a condução nervosa na qual foi considerada a não-linearidade $f(t) = t(1-t)(t-a)$ em que a é uma constante com $0 < a < 1$ e, nesse caso, u representa um potencial elétrico através de uma membrana e a variável v é introduzida por razões técnicas. Para mais informações veja Smoller [18] e Hastings [12].

No presente trabalho, estamos interessados na determinação de soluções positivas do problema estacionário

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) - v \quad \text{em} \quad \Omega, \\ -\Delta v &= \delta u - \gamma v \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= v = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

pois são aquelas as mais relevantes do ponto de vista das aplicações. Com tal objetivo, utilizaremos várias técnicas não-lineares.

No capítulo 1, estudamos a técnica de desacoplagem linear, bem como os Princípios de Máximo. Veremos alguns conceitos básicos sobre Espectro de Operadores Lineares e também sobre Teoria de Semigrupo de Operadores Lineares. Será mostrado também que o Princípio de Máximo não é válido para todo $-\infty < \lambda < \widehat{\lambda}_1$, em que λ é um parâmetro que aparece no sistema tratado no princípio do máximo e $\widehat{\lambda}_1$ é o primeiro autovalor associado a primeira autofunção do operador $-\Delta + B$.

No capítulo 2, trabalharemos essencialmente o método de subsolução e supersolução, o qual garantirá existência e unicidade de solução positiva para o problema (4) no caso em que $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f'(t) \geq -\gamma + 2\sqrt{\delta}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, $f'(0) > \widehat{\lambda}_1$ e $t \longmapsto \frac{f(t)}{t}$, $t > 0$, seja decrescente.

No capítulo 3, estudaremos um Teorema de Ponto Fixo que garantirá existência de solução positiva para o problema (4).

No capítulo 4, trabalharemos um teorema do Tipo Krein-Rutman com Peso Positivo, e mais uma vez garantiremos a existência de solução positiva para (4).

Capítulo 1

Desacoplagem Linear e um Princípio de Máximo

1.1 Princípio de Máximo

Consideremos o sistema elíptico semilinear

$$
(1.1.1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u) - v & \text{em} \quad \Omega, \\ -\Delta v = \delta u - \gamma v & \text{em} \quad \Omega, \\ u = v = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}
$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e regular, $N \geq 1$, δ e γ são constantes reais e positivas e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma dada função.

O sistema (1.1.1) pode ser reduzido a uma única equação íntegro-diferencial, usando uma técnica de desacoplagem linear. Mais precisamente, para cada $u \in L^2(\Omega)$, a equação linear

$$
(1.1.2) \qquad \begin{cases} -\Delta v + \gamma v = \delta u & \text{em} \quad \Omega, \\ v = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}
$$

possui uma única solução fraca $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Chamemos tal solução de $v = Bu$, onde $B = \delta(-\Delta + \gamma)^{-1}$ é considerado sob condições de fronteiras de Dirichlet. Dessa forma, temos o seguinte sistema equivalente

$$(1.1.3) \qquad \begin{cases} -\Delta u + Bu &= f(x,u) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

E definimos um operador

$$B : L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

que é linear e limitado (ver teorema 1.4.1). Na verdade,

$$B : L^p(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$$

e

$$B : C^\alpha(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$$

são lineares e limitados.

Considerando as imersões compactas de Sobolev (teorema 1.4.3) e de Schauder (teorema 1.4.9), temos as aplicações compactas

$$B : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

$$B : L^p(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$$

$$B : C^\alpha(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^\alpha(\overline{\Omega}).$$

No caso $B : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$, além da compacidade, tem-se que B é auto-adjunto, ou seja,

$$(Bu_1, u_2)_2 = (u_1, Bu_2)_2, \text{ para todos } \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2 \in \mathrm{L}^2(\Omega).$$

onde $(\ ,\ )_2$ designa o produto interno usual em $L^2(\overline{\Omega})$.

Seja (λ_n) os autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ associado às autofunções (φ_n) (ver teorema 1.4.5), então temos

$$(1.1.4) \qquad \begin{cases} -\Delta\varphi_n &= \lambda_n\varphi_n \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \varphi_n &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Sabe-se que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots$, $\lambda_n \longrightarrow +\infty$, λ_1 é simples, $\varphi_1 > 0$ em Ω, sendo esta a única autofunção de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ que possui sinal definido. Assim,

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_n + \gamma\varphi_n &= (\lambda_n+\gamma)\varphi_n \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \varphi_n &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

ou seja,

$$(-\Delta+\gamma)^{-1}\varphi_n = \frac{1}{\lambda_n+\gamma}\varphi_n$$

e daí

$$B\varphi_n = \frac{\delta}{\lambda_n+\gamma}\varphi_n, \; n = 1, 2, 3\ldots$$

Desse modo, os autovalores de B são

$$0 < \frac{\delta}{\lambda_n+\gamma}, \; n = 1, 2, 3\ldots$$

e

$$\frac{\delta}{\lambda_1+\gamma} > \frac{\delta}{\lambda_2+\gamma} \geq \frac{\delta}{\lambda_3+\gamma} \geq \ldots > 0.$$

Como $B : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ é compacto e auto-adjunto e o seu espectro está contido em $[0, +\infty)$, tem-se, pelo teorema 1.4.7, que $(Bu, u)_2 \geq 0$, para todo $u \in L^2(\Omega)$.

Definimos o operador

$$T \equiv -\Delta + B : D(T) \longrightarrow L^2(\Omega),$$

$$D(T) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega).$$

(Usaremos o símbolo $\hookrightarrow\hookrightarrow$ para indicar imersão compacta e $\hookrightarrow$ para a imersão contínua).

Claramente T é simetrico, isto é,

$$(Tu_1, u_2)_2 = (u_1, Tu_2)_2.$$

Usando o teorema 1.4.6 e a teoria da regularidade elíptica (teorema 1.4.1) em $L^2(\Omega)$, temos que

$$T \equiv -\Delta + B : D(T) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

é fechado.

De fato, $(u_n) \subset D(T)$ com

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^2(\Omega) \; e \; Tu_n \longrightarrow \omega \text{ em } L^2(\Omega).$$

Mostraremos que $u \in D(T)$ e $Tu = \omega$

Fazendo $\omega_n = Tu_n$, tem-se

$$\omega_n = Tu_n = (-\Delta + B)u_n = -\Delta u_n + Bu_n,$$

$$u_n \in D(T) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \Rightarrow u_n = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Daí temos

$$(P_n) \qquad \begin{cases} -\Delta u_n + Bu_n &= \omega_n \text{ em } \Omega, \\ u_n &= 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases}$$

no sentido fraco.

Como $u_n \longrightarrow u$ em $L^2(\Omega)$, então $Bu_n \longrightarrow Bu$ em $L^2(\Omega)$, pois B é continuo.

Desde que

$$\begin{cases} -\Delta u_n &= \omega_n - Bu_n \text{ em } \Omega, \\ -\Delta u_m &= \omega_m - Bu_m \text{ em } \Omega, \\ u_m &= u_n = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

segue-se

$$\begin{cases} -\Delta(u_m - u_n) &= \omega_m - \omega_n + B(u_n - u_m) \text{ em } \Omega, \\ u_m - u_n &= 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Usando a teoria de regularidade elíptica em $L^2(\Omega)$ (teorema 1.4.1), tem-se

$$\|u_m - u_n\|_{H^2} \leq c\|\omega_m - \omega_n + Bu_m - Bu_n\|_2.$$

Logo,

$$\|u_m - u_n\|_{H^2} \leq c\left[\|\omega_m - \omega_n\|_2 + \|Bu_m - Bu_n\|_2\right].$$

Isso implica que (u_n) é uma sequência de Cauchy em $H^2(\Omega)$, pois (ω_n) e (Bu_n) são sequências convergentes em $L^2(\Omega)$. Desse modo, $u_n \longrightarrow u$ em $H^2(\Omega)$ e, consequentemente, $u_n \longrightarrow u$ em $H_0^1(\Omega)$. Portanto, $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) = D(T)$.

Além disso,

$$\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega Bu_n \cdot \varphi = \int_\Omega \omega_n \cdot \varphi, \text{ para todo } \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

pois u_n é solução de (P_n). Logo,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega Bu \cdot \varphi = \int_\Omega \omega \cdot \varphi, \text{ para todo } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Desse modo,

$$-\Delta u + Bu = \omega \Rightarrow Tu = \omega.$$

Portanto, T é fechado.

Vejamos como determinar os autovalores de T.

Desde que

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_n &= \lambda_n\varphi_n \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \varphi_n &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$B\varphi_n = \frac{\delta}{\lambda_n+\gamma}\varphi_n,$$

tem-se

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_n + B\varphi_n &= \left(\lambda_n + \dfrac{\delta}{\lambda_n+\gamma}\right)\varphi_n \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \varphi_n &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Desse modo,

$$(*) \qquad \widehat{\lambda}_n = \lambda_n + \tfrac{\delta}{\lambda_n+\gamma}, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

são autovalores de T. Reciprocamente, se $(\widehat{\lambda}_n)$ for autovalores de T então devemos ter $(*)$

Façamos algumas observações sobre os operadores

$$T \equiv -\Delta + B : D(T) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

$$R_\lambda(T) = (T-\lambda I)^{-1} : L^2(\Omega) \longrightarrow D(T) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$$

(T_1) Para cada $\lambda \in \rho(T)$, o operador resolvente $R_\lambda(T)$ é compacto.

(T_2) O espectro $\sigma(T)$ de T consiste precisamente dos autovalores $\widehat{\lambda}_n = \lambda_n + \frac{\delta}{\lambda_n+\gamma}$.

Do exposto até agora, temos que T é simétrico e fechado. Temos também que T é monótono, isto é,

$$(-\Delta u + Bu, u)_2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega Bu \cdot u \geq 0, \text{ para todo u} \in \text{D(T)}.$$

O próximo lema é consequência direta da teoria espectral de operadores compactos auto-adjuntos (Ver apêndice 1.4).

Lema 1.1.1. Seja $\rho \in C^0(\overline{\Omega})$. Existe uma sequência crescente $(\lambda_n(\rho))$, $n = 1, 2, \ldots$, de números reais, em que $\lambda_n(\rho)$ são contados de acordo com as suas multiplicidades, tais que $\lambda_n(\rho) \longrightarrow +\infty$ se $n \longrightarrow +\infty$ e o problema

(1.1.5)
$$\begin{cases} -\Delta\omega + B\omega + \rho(x)\omega &= \lambda\omega \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \omega &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

possui uma solução não-trivial se, e somente se, $\lambda = \lambda_n(\rho)$ para algum n. Além disso, se $\rho(x) \leq \overline{\rho}(x)$, $\rho \not\equiv \overline{\rho}$, com $\overline{\rho} \in C^0(\overline{\Omega})$, então $\lambda_n(\rho) < \lambda_n(\overline{\rho})$.

Designaremos por $\widehat{\lambda}_n(\rho)$ os autovalores de (1.1.4) para $\rho \in C^0(\overline{\Omega})$. Para $\rho \equiv 0$ teremos que os autovalores de (1.1.4) são exatamente os valores $\widehat{\lambda}_n$ previamente introduzidos.

Observação 1.1.1. Deve-se observar que, muito embora (λ_n) seja crescente, não temos necessariamente $(\widehat{\lambda}_n)$ crescente. Uma condição suficiente para que $(\widehat{\lambda}_n)$ seja crescente é que $\gamma + \lambda_1 > \sqrt{\delta}$.

De fato, consideremos a função

$$f(s) = s + \frac{\delta}{s + \gamma}, \quad s \geq \lambda_1.$$

Então, temos

$$f'(s) > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{\delta}{(s+\gamma)^2} > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{\delta}{(s+\gamma)^2} \Leftrightarrow (s+\gamma)^2 > \delta \Leftrightarrow s + \gamma > \sqrt{\delta}.$$

Assim, se $s \geq \lambda_1$ então $s + \gamma \geq \lambda_1 + \gamma > \sqrt{\delta}$. Desse modo, f é crescente se $\lambda_1 + \gamma > \sqrt{\delta}$.

Suponhamos, agora, que

$$\widehat{\lambda}_{n+1} \geq \widehat{\lambda}_n$$

para todo $n = 1, 2, ...$

Assim

$$\begin{aligned}
\lambda_{n+1} + \frac{\delta}{\lambda_{n+1}+\gamma} \geq \lambda_n + \frac{\delta}{\lambda_n+\gamma} &\Longleftrightarrow \\
\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \delta\left[\frac{1}{\lambda_n+\gamma} - \frac{1}{\lambda_{n+1}+\gamma}\right] &\Longleftrightarrow \\
\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \delta\left[\frac{\lambda_{n+1}+\gamma-\lambda_n-\gamma}{(\lambda_n+\gamma)(\lambda_{n+1}+\gamma)}\right] &\Longleftrightarrow \\
\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \delta\left[\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{(\lambda_n+\gamma)(\lambda_{n+1}+\gamma)}\right] &\Longleftrightarrow \\
(\lambda_n+\gamma)(\lambda_{n+1}+\gamma) \geq \delta \text{ para todo } n = 1, 2, \ldots .&
\end{aligned}$$

O que é equivalente a

$$(\lambda_1+\gamma)(\lambda_2+\gamma) \geq \delta.$$

Conclusão. $(\lambda_1+\gamma)(\lambda_2+\gamma) \geq \delta$ é condição necessária e suficiente para que a sequência de autovalores $(\widehat{\lambda}_n)$ de $-\Delta + B$ seja crescente.

A seguir enunciaremos um resultado devido a de Figueiredo-Mitidieri [9].

Lema 1.1.2. (Princípio do Máximo) Suponhamos que $\lambda_1 + \gamma > \sqrt{\delta}$ e $-\gamma + 2\sqrt{\delta} \leq \lambda < \widehat{\lambda}_1$. Se $f \in L^2(\Omega)$ e se $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ for solução fraca de

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u + Bu - \lambda u &=& f(x) & \text{em } \Omega, \\ u &=& 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{1.1.6}$$

então $u \geq 0$ q.s. em Ω se $f \geq 0$ q.s. em Ω. Além disso, se $f \in C(\overline{\Omega})$, $f \geq 0$ e $f \not\equiv 0$, então $u > 0$ em Ω e $\frac{\partial u}{\partial \eta} < 0$ em $\partial\Omega$.

A primeira parte do lema acima é um princípio de máximo fraco e a segunda parte é um princípio de máximo forte.

Vejamos, a seguir, que o Princípio do Máximo não é válido para todo $-\infty < \lambda < \widehat{\lambda}_1$. Para isso, usaremos resultados sobre Teoria de Semigrupos.

1.2 Não-Existência de um Princípio de Máximo

Definição 1.2.1. Seja X um espaço de Banach. Uma família a um parâmetro $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, de operadores lineares e limitados $T(t) : X \longrightarrow X$ é um semigrupo de operadores lineares e limitados em X se

(i) $T(0) = I$ (I é o operador identidade em X);

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todos $t, s \geq 0$.

O operador linear definido por

$$Au = \lim_{t \searrow 0} \frac{T(t)u - u}{t},$$

onde

$$D(A) = \left\{ u \in X;\ \lim_{t \searrow 0} \frac{T(t)u - u}{t} \text{ existe} \right\}$$

é o gerador infinitesimal do semigrupo $T(t)$, D(A) é o domínio de A.

Definição 1.2.2. Um semigrupo $T(t), 0 \leq t < \infty$, de operadores lineares limitados em X é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados se

$$\lim_{t \searrow 0} T(t)u = u,$$

para todo $u \in X$.

Um semigrupo de operadores lineares limitados, fortemente contínuo em X, é chamado um semigrupo de classe C_0 ou, simplesmente, um C_0-semigrupo.

Exemplo 1.2.1. Se A é um operador linear limitado em X, então $T(t) = e^{tA}$ define um C_0-semigrupo.

Com efeito,

(i) $T(0) = e^{0A} = I$;

(ii) $T(t+s) = e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} = T(t)T(s)$, para todos $t, s \geq 0$;

(iii) Para cada $u \in X,\ T(t)u = e^{tA}u$, logo

$\|T(t)u - u\| = \|e^{tA}u - u\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k A^k u}{k!} \right\| = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{j+1} A^{j+1} u}{(j+1)!} \right\| \leq |t| \|A\| \|u\| e^{\|tA\|}$

o que implica

$\|T(t)u - u\| \longrightarrow 0$ quando $t \searrow 0$,

isto é,

$$T(t)u \longrightarrow u \text{ quando } t \searrow 0.$$

Sejam X um espaço de Banach e X^* o seu dual topológico. Designaremos por $\langle u^*, u \rangle$ o valor de $u^* \in X^*$ calculado em $u \in X$. Para cada $u \in X$, definimos o conjunto dualidade $F(u) \subset X^*$ por

$$F(u) = \{u^* \in X^*;\ \langle u^*, u \rangle = \|u\|^2 = \|u^*\|^2\}.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach (corolário 1.4.2) segue-se que $F(u) \neq \phi$, para todo $u \in X$.

Definição 1.2.3. Seja X um espaço de Hilbert, com produto interno dado por $(.,.)_X$. Um operador $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é dito monótono se

$$(Au, u)_X \geq 0,$$

para todo $u \in D(A)$.

Definição 1.2.4. Dizemos que F é um operador dissipativo quando $-F$ é monótono, isto é, $(-Fu, u)_X \geq 0$, para todo $u \in D(F)$.

Definição 1.2.5. Um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é dito uniformemente limitado se $\|T(t)\| \leq M$. Se $\|T(t)\| \leq 1$, dizemos que é um semigrupo de contrações.

Teorema 1.2.1. (Lumer-Phillips) Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear tal que $\overline{D(A)} = X$.

(i) Se A for dissipativo e existir $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem, $R(\lambda_0 I - A)$, de $\lambda_0 I - A$ for igual a X, então A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em X.

(ii) Se A for o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em X, então $R(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo. Além disso, para todo $u \in D(A)$ e todo $u^* \in F(u)$, $Re\,\langle u^*, Au\rangle \leq 0$.

Consideremos o problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u + Bu + \lambda u & = & f(x) & \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{1.2.1}$$

o qual é equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{rcll} [\lambda I - (\Delta - B)]u & = & f(x) & \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{1.2.2}$$

Temos a seguinte proposição:

Proposição 1.2.1. O operador $\Delta - B : H^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$, $H^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $T(t)$.

Essa proposição segue-se do Teorema de Lummer-Phillips, pois $\Delta - B$ é dissipativo em $L^2(\Omega)$ e $R(\lambda_0 I - (\Delta - B)) = L^2(\Omega)$, para todo $\lambda_0 > 0$.

Definição 1.2.6. Um cone C em um espaço de Banach X é um subconjunto fechado de X tal que:

(i) Se $u, v \in C$ e $\alpha, \beta \geq 0$, então $\alpha u + \beta v \in C$;

(ii) Se $u \in C$ e $u \not\equiv 0$, então $-u \notin C$.

Um cone C induz uma ordem parcial em X definida por:

$$u \leq v \Leftrightarrow v - u \in C.$$

Neste capítulo usaremos a seguinte notação: Para $r > 0$,

$$B_r = \{u \in C; \|u\| < r\}.$$

Exemplo 1.2.2. Um exemplo de cone é

$$C = \left\{u \in \left(C\left(\overline{\Omega}\right), \|.\|\right);\ u \geq 0\right\},\ \text{onde } \|\mathrm{u}\| = \max_{\mathrm{x} \in \overline{\Omega}} |\mathrm{u}(\mathrm{x})|$$

(a) Observe que C é fechado em $\left(C\left(\overline{\Omega}\right), \|.\|\right)$

Seja $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em C, tal que $u_n \longrightarrow u$. Então, $u_n \geq 0$ e daí, $u \geq 0$. E como $\left(C\left(\overline{\Omega}\right), \|.\|\right)$ é um espaço de Banach, tem-se que $u \in \left(C\left(\overline{\Omega}\right), \|.\|\right)$. Dessa forma, $u \in C$.

(b) Note que dadas $u,\ v \in C$ e $\alpha,\ \beta \geq 0$.

Logo, $\alpha u + \beta v \geq 0$ e $\alpha u + \beta v \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, e desse modo, $\alpha u + \beta v \in C$.

E dada $u \in C,\ u \not\equiv 0$, tem-se que existe uma vizinhança V de u, tal que $u > 0$ em V, pois u é contínua, o que implica que $-u < 0$ em V, e daí, $-u \notin C$.

Logo, C é um cone.

Definição 1.2.7. Um cone C é dito normal se existir uma constante $K > 0$ tal que $0 \leq u \leq v$ implica $\|u\| \leq K\|v\|$.

Exemplo 1.2.3. Observe que $C = \{u \in C(\overline{\Omega}; \|.\|);\ u \geq 0\}$, onde $\|u\| = \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|$ é um cone normal.

De fato, já vimos no exemplo anterior que C é um cone.

Observe que dadas $u, v \in C$, tais que $0 \leq u \leq v$, segue que $\|u\| \leq \|v\|$.

Portanto, C é um cone normal.

Proposição 1.2.2. Seja X um espaço de Banach ordenado por um cone C. Suponhamos que $A : D(A) \longrightarrow X,\ D(A) \subset X$, seja o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $T(t)$. Então $T(t)C \subset C$, para todo $t \geq 0$ se, e somente se, $(\lambda I - A)^{-1}$ é positivo para λ suficientemente grande.

Essa proposição é, essencialmente a combinação da representação de $(\lambda I - A)^{-1}$, via transformada de Laplace de $T(t)$ e o Teorema 7.4 de Pazy [16]. A seguir demonstraremos um resultado devido Corrêa [8].

Teorema 1.2.2. Se λ for suficientemente grande, o operador $(\lambda I - \Delta + B)^{-1} : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ não é positivo.

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que para $\lambda > 0$ suficientemente grande, o operador $(\lambda I - \Delta + B)^{-1} : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ seja positivo e seja $T(t)$ o C_0-semigrupo gerado por $\Delta - B$ (proposição 1.2.1). Para $x_0 \in \Omega$, x_0 fixado, consideremos uma função $u \in C_0^2(\overline{\Omega})$ tal que $u \geq 0, u \not\equiv 0$ e $u \equiv 0$ em $\overline{B_\epsilon(x_0)} \subset \Omega$ para algum $\epsilon > 0$.

Consideremos o problema de valor inicial

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial v}{\partial t} & = & \Delta v - Bv & \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty) \\ v(x,0) & = & u(x) & \end{array}\right. \tag{1.2.3}$$

Esse problema possui uma única solução $v(x,t) = T(t)u(x)$ (pelo teorema de existência e unicidade de solução - ver Sotomayor [19]) que é positiva pela proposição 1.2.2 e continuamente diferenciável em $[0, \infty)$. Assim

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_0, 0) = \Delta u(x_0) - Bu(x_0) < 0$$

pois $u \equiv 0$ em $\overline{B_\epsilon(x_0)}$ e B é positivo. Desde que $v(x_0, 0) = u(x_0) = 0$, tem-se $v(x_0, t) < 0$ se t for suficientemente pequeno, o que é uma contradição. Portanto, $(\lambda I - \Delta + B)^{-1} : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ não é positivo se λ for suficientemente grande. Isso é equivalente a dizer que não existe Princípio de Máximo para o problema

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u + Bu + \lambda u & = & f(x) & \text{em} \quad \Omega \\ u & = & 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{array}\right. \tag{1.2.4}$$

se λ for suficientemente grande. ■

1.3 Simetria de Soluções

Dedicaremos esta seção ao estudo de simetria de soluções positivas, no caso em que $\Omega = B_R(0)$. Ao longo dessa seção suporemos sempre que $\Omega = B_R(0)$.

O resultado central nesse contexto de simetria é devido a Gidas - Ni - Niremberg [11].

Teorema 1.3.1. Seja $u > 0$ em Ω uma solução de

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{1.3.1}$$

em que $u \in C^2(\Omega)$ e $f \in C^1(\mathbb{R})$. Então u é radialmente simétrica, ou seja, $u(x) = u(y)$ se $\|x\| = \|y\| = r < R$. Além disso, $\frac{\partial u}{\partial r} < 0$ para $0 < r < R$.

Os autores Gidas - Ni - Niremberg [11] usam, essencialmente, duas técnicas.

(i) A primeira delas é o princípio do máximo para o problema elíptico escalar

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u &= f(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

para $-\infty < \lambda < \lambda_1$.

(ii) A segunda técnica consiste na movimentação de planos paralelos até uma posição limite, e então mostrar que eventuais soluções positivas de (1.3.1) serão simétricas em relação a este plano limite.

No caso de sistemas, Troy [20] demonstra um resultado de simetria para uma classe de sistemas da forma

$$\text{(1.3.2)} \qquad \begin{cases} -\Delta u_i &= f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u_i &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Troy [20] estabelece o seguinte resultado

Teorema 1.3.2. Seja $u_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$ uma solução de classe C^2 do problema (1.3.2). Se $f_i, i = 1, 2, \ldots, n$, for de classe C^1 e $\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \geq 0$, para $i \neq k$, e $1 \leq i, k \leq n$, então, para cada $1 \leq i \leq n$, u_i é radialmente simétrica e $\frac{\partial u_i}{\partial r} < 0$ para $0 < r < R$.

Observemos que o sistema estudado que estamos a considerar nesta dissertação não se enquadra nas hipóteses do teorema 1.3.2.

De fato, se considerarmos o sistema

$$\text{(1.3.3)} \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f(u) - v \quad \text{em} \quad \Omega, \\ -\Delta v &= \delta u - \gamma v \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= v = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

fazendo $f_1(u, v) = f(u) - v$ e $f_2(u, v) = \delta u - \gamma v$ teremos $\frac{\partial f_1}{\partial v}(u, v) = -1$ e $\frac{\partial f_2}{\partial u}(u, v) = \delta$. Assim, o fato do sistema em consideração ser não-cooperativo, não nos permite usar, de modo direto, o resultado de Troy [20] para obter a simetria de soluções positivas. No entanto, sob certas restrições pode-se, usando técnicas introduzidas por Mancini-Mitidieri [15], mostrar a simetria de soluções positivas.

Antes de demonstrar o resultado de simetria, estabeleceremos o seguinte lema

Lema 1.3.1. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função de classe C^1. Suponhamos que $\gamma > 2\sqrt{\delta}$ e (u, v) seja uma solução (positiva) de (1.3.3). Então $u - \frac{1}{\sqrt{\delta}}v > 0$ em Ω e $\frac{\partial u}{\partial \eta} < \frac{1}{\sqrt{\delta}}\frac{\partial u}{\partial \eta}$ em $\partial\Omega$.

Demonstração. Como

$$(**) \qquad -\Delta u = f(u) - v$$

e

$$(***) \qquad -\Delta v = \delta u - \gamma v,$$

dividindo ambos os membros de (***) por $\sqrt{\delta}$, obtemos

$$(****) \qquad -\Delta \left(\frac{v}{\sqrt{\delta}}\right) = \sqrt{\delta}u - \frac{\gamma}{\sqrt{\delta}}v \ .$$

Assim, subtraindo membro a membro (**) e (****), tem-se

$$-\Delta \left(u - \frac{v}{\sqrt{\delta}}\right) = f(u) - v - \sqrt{\delta}u + \frac{\gamma}{\sqrt{\delta}}v.$$

Somando, ordenadamente, $K\left(u - \frac{v}{\sqrt{\delta}}\right)$, com $K > \sqrt{\delta}$, em ambos os membros da última igualdade, obtemos

$$-\Delta \left(u - \frac{v}{\sqrt{\delta}}\right) + K\left(u - \frac{v}{\sqrt{\delta}}\right) = f(u) - v - \sqrt{\delta}u + \frac{\gamma}{\sqrt{\delta}}v + K\left(u - \frac{v}{\sqrt{\delta}}\right).$$

Isto é,

$$-\Delta \left(u - \frac{v}{\sqrt{\delta}}\right) + K\left(u - \frac{v}{\sqrt{\delta}}\right) = f(u) - v - \sqrt{\delta}u + \frac{\gamma}{\sqrt{\delta}}v + Ku - \frac{K}{\sqrt{\delta}}v.$$

Dessa forma,

$$-\Delta \left(u - \frac{v}{\sqrt{\delta}}\right) + K\left(u - \frac{v}{\sqrt{\delta}}\right) = f(u) + \left(K - \sqrt{\delta}\right)u + \left(\frac{\gamma}{\sqrt{\delta}} - \frac{K}{\sqrt{\delta}} - 1\right)v.$$

Escolhamos $K > \sqrt{\delta}$ satisfazendo $\sqrt{\delta} < K < \gamma - \sqrt{\delta}$. Observemos que isso é possível, pois, sendo $\gamma > 2\sqrt{\delta}$, tem-se $\gamma - \sqrt{\delta} > \sqrt{\delta}$. Desse modo, $\gamma - K - \sqrt{\delta} > 0$. Consequentemente, $u - \frac{v}{\sqrt{\delta}} > 0$ em Ω.

Também, $\frac{\partial}{\partial\eta}\left(u - \frac{v}{\sqrt{\delta}}\right) < 0$ em $\partial\Omega$ e assim $\frac{\partial u}{\partial\eta} < \frac{1}{\sqrt{\delta}}\frac{\partial v}{\partial\eta}$ em $\partial\Omega$ ■

Vejamos, a seguir, o resultado de simetria devido a Mancini-Mitidieri [15].

Teorema 1.3.3. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Suponhamos $-\gamma+2\sqrt{\delta} < 0$ e $f'(t) \geq -\gamma + 2\sqrt{\delta}$ para todo $t \geq 0$. Então, as eventuais soluções positivas (u, v) do problema (1.3.3) serão radialmente simétricas e $\frac{\partial u}{\partial r} < \frac{1}{\sqrt{\delta}}\frac{\partial v}{\partial r}$ em $\partial\Omega$.

Demonstração. Fazendo $\omega = u - \frac{1}{\sqrt{\delta}}v$, teremos $v = \sqrt{\delta}u - \sqrt{\delta}\omega$ e daí

$$-\Delta u = f(u) - \sqrt{\delta}u + \sqrt{\delta}\omega$$

em Ω.

Além disso,

$$-\Delta\omega = -\Delta u - \frac{1}{\sqrt{\delta}}(-\Delta v) \Rightarrow$$

$$-\Delta\omega = f(u) - \sqrt{\delta}u + \sqrt{\delta}\omega - \frac{1}{\sqrt{\delta}}(\delta u - \gamma v) \Rightarrow$$

$$-\Delta\omega = f(u) - \sqrt{\delta}u + \sqrt{\delta}\omega - \sqrt{\delta}u + \frac{\gamma}{\sqrt{\delta}}v \Rightarrow$$

$$-\Delta\omega = f(u) - 2\sqrt{\delta}u + \sqrt{\delta}\omega + \frac{\gamma}{\sqrt{\delta}}(\sqrt{\delta}u - \sqrt{\delta}\omega) \Rightarrow$$

$$-\Delta\omega = f(u) + (\gamma - 2\sqrt{\delta})u + (\sqrt{\delta} - \gamma)\omega,$$

e assim, temos o seguinte sistema de três equações

$$(1.3.4) \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f(u) - \sqrt{\delta}u + \sqrt{\delta}\omega & \text{em} \quad \Omega, \\ -\Delta v & = & \delta u - \gamma v & \text{em} \quad \Omega, \\ -\Delta\omega & = & f(u) + (\gamma - 2\sqrt{\delta})u + (\sqrt{\delta} - \gamma)\omega & \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & v = \omega = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Chamando $f_1(u, v, \omega) = f(u) - \sqrt{\delta}u + \sqrt{\delta}\omega$, $f_2(u, v, \omega) = \delta u - \gamma v$ e $f_3(u, v, \omega) = f(u) + \left(\gamma - 2\sqrt{\delta}\right) u + \left(\sqrt{\delta} - \gamma\right) \omega$,

temos

$$\frac{\partial f_1}{\partial v} = 0 \; e \; \frac{\partial f_1}{\partial\omega} = \sqrt{\delta} > 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u} = \delta > 0 \; e \; \frac{\partial f_2}{\partial\omega} = 0$$

e

$$\frac{\partial f_3}{\partial u} = f'(u) + \gamma - 2\sqrt{\delta} \geq 0 \ e \ \frac{\partial f_3}{\partial v} = 0.$$

Usando o teorema 1.3.2, concluímos que (u, v, ω) é radialmente simétrica. A desigualdade $\frac{\partial u}{\partial \eta} < \frac{1}{\sqrt{\delta}}\frac{\partial v}{\partial \eta}$ em $\partial\Omega$ decorre do lema anterior ■

1.4 Apêndice

Considere o problema de Dirichlet

$$\text{(1.4.1)} \qquad \begin{cases} Lu & = & f & \text{em} & \Omega, \\ u & = & 0 & \text{em} & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e limitado, $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a incógnita, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada e L é o operador diferencial parcial de segunda ordem da forma

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

(forma divergente)
ou

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

(forma não-divergente)
com funções a_{ij}, b_i e c dados.

Teorema 1.4.1. (Regularidade de Solução) Se $m \in \mathbb{N}$ é tal que

(a) Ω é de classe C^{m+2};

(b) $a_{ij}, b_i, c \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$ para $i, j = 1, 2, \dots, n$;

(c) $f \in H^m(\overline{\Omega})$.

Se $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (1.4.1), então $u \in H^{m+2}(\Omega)$ e satisfaz

$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c \left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_2 \right),$

com c dependendo apenas de Ω, a_{ij}, b_i e c para $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Além disso, se $u \in H_0^1(\Omega)$ é a única solução fraca do problema, então

$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c\|f\|_{H^m(\Omega)}.$

Teorema 1.4.2. (Imersões de Sobolev) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^1 com fronteira limitada, $m \geq 0$ um inteiro e $1 \leq p < \infty$. Então, para qualquer $j \geq 0$, temos as seguintes imersões contínuas:

(i) Se $m < \dfrac{n}{p}$, então

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega),\ \forall q \in [p, q^*],\ onde\ \frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n};$$

(ii) Se $m = \dfrac{n}{p}$, então

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega),\ \forall q \in [p, \infty);$$

(iii) Se $m > \dfrac{n}{p}$, então

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j_B(\Omega);$$

(iv) Se $m - 1 < \dfrac{n}{p} < m$ e Ω tem a propriedade de Lipschitz local, então

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j+\lambda}(\overline{\Omega}), \text{onde} 0 < \lambda \leq m - \frac{n}{p}.$$

Ver demonstração em de Figueiredo [10].

Teorema 1.4.3. (Rellich-Kondrachov) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado de classe C^1, $m \geq 1$ um inteiro e $1 \leq p < \infty$. Então, para qualquer $j \geq 0$, temos as seguintes imersões compactas:

(i) Se $m < \dfrac{n}{p}$, então

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega),\ \forall q \in [1, q^*],\ onde\ \frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n};$$

(ii) Se $m = \dfrac{n}{p}$, então

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega),\ \forall q \in [1, \infty);$$

(iii) Se $m > \dfrac{n}{p}$, então

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^j(\overline{\Omega});$$

(iv) Se $m-1<\dfrac{n}{p}<m$ e se Ω tem a propriedade de Lipschitz local, então

$$W^{j+m,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow C^{j+\lambda}(\overline{\Omega}),$$

onde $0<\lambda<m-\dfrac{n}{p}$.

Ver demonstração em de Figueiredo [10].

Definição 1.4.1. Dizemos que o operador diferencial parcial L é uniformemente elíptico se existe uma constante $c>0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geq c\|\xi\|^2$$

para quase todo $x\in\Omega$ e para todo $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.4.4. (Estimativas de Schauder) Sejam Ω um domínio limitado de classe $C^{2,\alpha}$, L um operador elíptico com coeficientes reais $a_{ij}\in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ e c a constante de elipticidade dada na definição 1.4.1. Então existe uma constante C, que depende apenas de c, tal que

$$\|u\|_{2,\alpha}\leq C\left(\|Lu\|_{\alpha}+\|u\|_0+\|u\|_{2,\alpha,\Gamma}\right), \text{para todo u} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Corolário 1.4.1. Seja L um operador elíptico com coeficientes reais $a_{ij}\in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, onde Ω é um domínio limitado de classe $C^{2,\alpha}$. Seja c a constante de elipticidade de L. Suponha que o problema de Dirichlet (1.4.1) tem solução única $u\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$; para todos $f\in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ e $\phi\in C^{2,\alpha}(\Gamma)$. Então existe uma constante C, dependendo apenas de c tal que

$$\|u\|_{2,\alpha}\leq C\left(\|Lu\|_{\alpha}+\|u\|_{2,\alpha,\Gamma}\right), \text{para todo } u\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Definição 1.4.2. Um operador linear $A: D(A)\subset X\longrightarrow Y$ é dito limitado se existe $c>0$, tal que

$$\|Au\|_Y\leq c\|u\|_X, \text{ para todo } u\ \in D(A).$$

Definição 1.4.3. Um operador linear limitado $A: X\longrightarrow Y$ é denominado compacto se para cada sequência limitada $(u_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$, a sequência $(Ku_n)_{n=1}^{\infty}$ é pré-compacta em Y; isto é, existe uma subsequência $(u_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ tal que $(Ku_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ converge em Y.

Considere o problema de autovalor:

$$(1.4.2)\qquad \begin{cases} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{em} \quad \Omega,\\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega,\end{cases}$$

onde $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, limitado com fronteira regular.

Teorema 1.4.5. Associado ao problema (P_λ) existe uma base ortonormal (u_n) de $L^2(\Omega)$ e ortogonal de $H_0^1(\Omega)$ e uma sequência de números reais positivos (λ_n), com $\lambda_n \longrightarrow \infty$, quando $n \longrightarrow \infty$ tal que

(i) $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots$;

(ii) $u_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega})$;

(iii) $-\Delta u_n = \lambda_n u_n$ em Ω.

Definição 1.4.4. Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $T : D(T) \longrightarrow Y$ com domínio $D(T) \subset X$. Então, T é chamado um operador linear fechado se seu gráfico

$$G(T) = \{(x, y); x \in D(T), y = Tx\}$$

for fechado no espaço vetorial normado $X \times Y$, em que a norma em $X \times Y$ é dada por

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

Teorema 1.4.6. (Teorema do Gráfico Fechado) Seja $T : D(T) \longrightarrow Y$ um operador linear, em que $D(T) \subset X$ e X e Y são espaços normados. Então, T é fechado se, e somente se, possui a seguinte propriedade:

Se $x_n \longrightarrow x, (x_n) \subset D(T)$ e $Tx_n \longrightarrow y$, então $x \in D(T)$ e $y = Tx$.

A seguir exporemos alguns conceitos básicos sobre espectro de operadores lineares (Para mais informações ver Kreyszig [20]).

Sejam $X \neq \{0\}$ um espaço vetorial normado e $T : D(T) \longrightarrow X$ um operador linear com domínio $D(T) \subset X$. Associemos a T o operador

$$T_\lambda = T - \lambda I$$

em que λ é um número complexo e I é o operador identidade em $D(T)$. Se T_λ possui um inverso, designaremos por $R_\lambda(T)$, isto é,

$$R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}$$

o qual será chamado de operador resolvente de T ou, simplesmente, resolvente de T.

Definição 1.4.5. Sejam $X \neq \{0\}$ um subespaço vetorial normado e $T : D(T) \longrightarrow X$ um operador linear com domínio $D(T) \subset X$. Um valor regular λ de T é um número complexo tal que

(R_1) $R_\lambda(T)$ existe;

(R_2) $R_\lambda(T)$ é limitado;

(R_3) $R_\lambda(T)$ é definido em um conjunto que é denso em X.

O conjunto resolvente $\rho(T)$ de T é o conjunto de todos os valores regulares λ de T. Seu complemento $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ é chamado espectro de T e $\lambda \in \sigma(T)$ é chamado um valor espectral de T.

O espectro de T é subdividido em três conjuntos disjuntos, a saber:

O espectro pontual ou espectro discreto $\sigma_p(T)$ é o conjunto dos valores de λ tais que $R_\lambda(T)$ não existe. Um $\lambda \in \sigma_p(T)$ é chamado um autovalor de T.

O espectro continuo $\sigma_c(T)$ é o conjunto dos valores de λ tais que $R_\lambda(T)$ existe e satisfaz (R_3), mas não (R_2), isto é, $R_\lambda(T)$ é não limitado.

O espectro residual $\sigma_r(T)$ é o conjunto dos valores de λ tais que $R_\lambda(T)$ existe (pode ser limitado ou não) mas não satisfaz (R_3), isto é, o domínio de $R_\lambda(T)$ não é denso em X.

Desse modo

$$\mathbb{C} = \rho(T) \cup \sigma(T) = \rho(T) \cup \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

Além disso,

$$R_\lambda(T) : R(T_\lambda) \longrightarrow D(T_\lambda)$$

existe se, e somente se, $T_\lambda x = 0$ implica $x = 0$, isto é, o núcleo de T_λ é $\{0\}$.

Portanto, se $T_\lambda x = (T - \lambda I)x = 0$, para algum $x \neq 0$, então $\lambda \in \sigma_p(T)$, isto é, λ é um autovalor de T e x é chamado um autovetor ou autofunção de T.

O subespaço de $D(T)$ consistindo de 0 e dos autovetores de T correspondentes a λ é chamado autoespaço de T correspondente ao autovalor λ.

Teorema 1.4.7. Seja $S : H \longrightarrow H$ um operador linear, limitado e simétrico. Defina:

$$m \stackrel{def}{=} \inf_{u \in H, \|u\|=1} (Su, u), \quad M \stackrel{def}{=} \sup_{u \in H, \|u\|=1} (Su, u)$$

Temos

(i) $\sigma(S) \subset [m, M]$, e

(ii) $m, M \in \sigma(S)$.

Teorema 1.4.8. (Teorema de Hahn-Banach) Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e seja $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação tal que:

(i) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, para todo $x \in E$ e para todo $\lambda > 0$;

(ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, para todo $x, y \in E$.

Se G é um subespaço vetorial de E e $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função linear tal que:

$$g(x) \leq p(x), \text{ para todo } x \in G,$$

então existe uma forma linear f, definida em E que prolonga g, isto é,

$$f(x) = g(x), \text{ para todo } x \in G \text{ e tal que } f(x) = p(x), \text{ para todo } x \in E.$$

Ver demonstração em Brézis [5].

Corolário 1.4.2. (Corolário do Teorema de Hahn-Banach) Para todo $x_0 \in X$, existe $x_0^* \in X^*$ tal que $\|x_0^*\|_{X^*} = \|x_0\|$ e $\langle x_0^*, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$.

Teorema 1.4.9. Suponha que Ω satisfaça a propriedade da poligonal (i.e., existe $\gamma > 0$ tal que quaisquer dois pontos x e x' de $\overline{\Omega}$ podem ser ligados por uma poligonal em Ω de comprimento $l \leq \gamma |x - x'|$). Então, para $0 \leq s < r$, a imersão $C^r(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^s(\overline{\Omega})$ é compacta.

Capítulo 2

O Método de Subsolução e Supersolução

2.1 Existência e Unicidade de Solução via Método de Subsolução e Supersolução

Consideremos o sistema elíptico

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u &=& f(u)-v & \text{em} \quad \Omega \\ -\Delta v &=& \delta u-\gamma v & \text{em} \quad \Omega \\ u &=& v=0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{array}\right. \tag{2.1.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e regular, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1, δ e γ são constantes positivas.

No decorrer desse capítulo admitiremos $\gamma \geq 2\sqrt{\delta}$. Observe que isso implicará em $\gamma + \lambda_1 > \sqrt{\delta}$, e daí poderemos usar o Princípio do Máximo.

Uma solução de (2.1.1) é um par (u, v) com $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ que satisfaz (2.1.1) pontualmente em Ω.

Como observado anteriormente (Capítulo 1), designando $B = \delta\left(-\Delta + \gamma\right)^{-1}$, sob condições de fronteira de Dirichlet, o problema (2.1.1) é equivalente a

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u + Bu &=& f(u) & \text{em} \quad \Omega \\ u &=& 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{array}\right. \tag{2.1.2}$$

Definição 2.1.1. Uma função $\underline{U} \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ é dita uma subsolução do problema (2.1.2) se

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta \underline{U} + B\underline{U} &\leq& f(\underline{U}) & \text{em} \quad \Omega \\ \underline{U} &=& 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{array}\right. \tag{2.1.3}$$

Definição 2.1.2. Uma função $\overline{U} \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ é dita uma supersolução do problema (2.1.2) se

$$(2.1.4) \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta \overline{U} + B\overline{U} & \geq & f(\overline{U}) & \text{em} \quad \Omega \\ \overline{U} & = & 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{array} \right.$$

Teorema 2.1.1. Seja $\underline{U}$ (respectivamente $\overline{U}$) uma subsolução (respectivamente uma supersolução) do problema (2.1.2) tal que $\underline{U} \leq \overline{U}$ em Ω. Suponhamos, além disso, que $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f'(t) \geq -\gamma + 2\sqrt{\delta}$, para todo $t \in \left[\min\limits_{\overline{\Omega}} \underline{U}, \max\limits_{\overline{\Omega}} \overline{U}\right]$. Então

(i) Existe uma solução u do problema (2.1.2) (consequentemente uma solução (u, v) do problema (2.1.1)) que satisfaz $\underline{U} \leq u \leq \overline{U}$ em Ω.

(ii) Existe uma solução mínima $\underline{u}$ e uma solução máxima $\overline{u}$ do problema (2.1.2) no intervalo $\left[\underline{U}, \overline{U}\right]$.

Demonstração.

(i) Como

$$f'(t) \geq -\gamma + 2\sqrt{\delta}, \text{ para todo t} \in \left[\min_{\overline{\Omega}} \underline{\mathrm{U}}, \max_{\overline{\Omega}} \overline{\mathrm{U}}\right],$$

a função

$$t \longmapsto f(t) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) t$$

é crescente em $\left[\min\limits_{\overline{\Omega}} \underline{U}, \max\limits_{\overline{\Omega}} \overline{U}\right]$.

Construiremos uma sequência de funções $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ da seguinte maneira: $u_0 = \overline{U}$ e, para todo $n \geq 1$, u_n é a solução única do problema linear

$$(2.1.5) \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u_n + Bu_n - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) u_n & = & f(u_{n-1}) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) u_{n-1} & \text{em} \quad \Omega \\ u_n & = & 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{array} \right.$$

Note que essa solução realmente existe, pois $-\gamma + 2\sqrt{\delta} < \widehat{\lambda}_1$.

Afirmação. Temos que $\underline{U} \leq \ldots \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \ldots \leq u_0 = \overline{U}$.

Provaremos a afirmação por indução. Nossos argumentos usarão, essencialmente, o Princípio do Máximo Fraco. Observamos, também, que a sequência (u_n) é constituída de funções em $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

Como

$$\begin{cases} -\Delta\overline{U} + B\overline{U} - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right)\overline{U} & \geq & f\left(\overline{U}\right) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right)\overline{U} & \text{em} & \Omega \\ \overline{U} & = & 0 & \text{em} & \partial\Omega \end{cases}$$

pois $\overline{U}$ é supersolução de (2.1.2) e

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + Bu_1 - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right)u_1 & = & f\left(\overline{U}\right) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right)\overline{U} & \text{em} & \Omega \\ u_1 & = & 0 & \text{em} & \partial\Omega \end{cases}$$

pois u_1 é solução única de (2.1.5) para $n = 1$.

Logo,

$$\begin{cases} -\Delta\left(\overline{U} - u_1\right) + B\left(\overline{U} - u_1\right) & - & \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right)\left(\overline{U} - u_1\right) & \geq & 0 & \text{em} & \Omega \\ \overline{U} & - & u_1 & = & 0 & \text{em} & \partial\Omega \end{cases}$$

Pelo Princípio do Máximo Fraco, obtém-se $u_1 \leq \overline{U}$ em Ω. Analogamente, tem-se

$$\begin{cases} -\Delta\underline{U} + B\underline{U} - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right)\underline{U} & \leq & f\left(\underline{U}\right) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right)\underline{U} & \text{em} & \Omega \\ \underline{U} & = & 0 & \text{em} & \partial\Omega \end{cases}$$

pois $\underline{U}$ é subsolução de (2.1.2). Então, temos

$$\begin{cases} -\Delta\left(u_1 - \underline{U}\right) + B\left(u_1 - \underline{U}\right) & - & \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right)\left(u_1 - \underline{U}\right) & \geq & 0 & \text{em} & \Omega \\ u_1 & - & \underline{U} & = & 0 & \text{em} & \partial\Omega \end{cases}$$

de modo que, usando novamente o Princípio do Máximo Fraco, obtém-se $\underline{U} \leq u_1$.

Suponhamos que $\underline{U} \leq \ldots \leq u_n \leq u_{n-1} \leq \ldots \leq u_0 = \overline{U}$. Mostraremos que $\underline{U} \leq u_{n+1} \leq u_n$. Para isso, observemos que

$$\begin{cases} -\Delta u_n + Bu_n - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) u_n &= f\left(u_{n-1}\right) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) u_{n-1} \quad \text{em} \quad \Omega \\ u_n &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} + Bu_{n+1} - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) u_{n+1} &= f(u_n) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) u_n \quad \text{em} \quad \Omega \\ u_{n+1} &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Como a função $t \longmapsto f(t) - \left[-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right] t$ é crescente e $u_n \leq u_{n-1}$, segue que: $f(u_{n-1}) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) u_{n-1} - \left[f(u_n) - (-\gamma + 2\sqrt{\delta})u_n\right] \geq 0.$

Dessa forma, temos:

$$\begin{cases} -\Delta(u_n - u_{n+1}) + B(u_n - u_{n+1}) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right)(u_n - u_{n+1}) \\ = f(u_{n-1}) - \left(\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) u_{n-1} - \left[f(u_n) - (-\gamma + 2\sqrt{\delta})u_n\right] \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ u_n - u_{n+1} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

de modo que $u_{n+1} \leq u_n$ em Ω (Princípio do Máximo).

Por outro lado, desde que

$$\begin{cases} -\Delta \underline{U} + B\underline{U} - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) \underline{U} &\leq f\left(\underline{U}\right) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) \underline{U} \quad \text{em} \quad \Omega \\ \underline{U} &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} + Bu_{n+1} - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) u_{n+1} &= f(u_n) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) u_n \quad \text{em} \quad \Omega \\ u_{n+1} &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

teremos

$$\begin{cases} -\Delta\left(u_{n+1} - \underline{U}\right) + B\left(u_{n+1} - \underline{U}\right) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right)\left(u_{n+1} - \underline{U}\right) = \\ f(u_n) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) u_n - \left[f\left(\underline{U}\right) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) \underline{U}\right] \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ u_{n+1} - \underline{U} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

e então $\underline{U} \leq u_{n+1}$ em Ω. Isso completa a demonstração da afirmação.

Como $\underline{U}(x) \leq u_{n+1}(x) \leq u_n(x) \leq \overline{U}(x)$ para todo $x \in \Omega$, existe uma função $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in \Omega$,

$$u_n(x) \searrow u(x)$$

quando $n \longrightarrow +\infty$.

A idéia é tomar limites em ambos os membros da equação (2.1.5). Para isso, usaremos um argumento do tipo bootstrap.

Seja $f_n(x) = f(u_n(x)) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) u_n(x)$. Observemos que a sequência (f_n) é limitada em $L^\infty(\Omega)$. Logo, (f_n) é limitada em $L^p(\Omega)$ com $1 < p < \infty$. Segue-se de (2.1.5) e usando a Teoria da Regularidade Elíptica que (u_n) é limitada em $W^{2,p}(\Omega)$. Mas o espaço $W^{2,p}(\Omega)$ está imerso continuamente em $C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, para $\alpha = 1 - \frac{2N}{p}$, desde que $p > \frac{N}{2}$. Isso implica que (u_n) é limitada em $C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. Usando estimativas de Schauder (teorema 1.4.4), concluímos que (u_n) é limitada em $C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. Usando o fato de que $C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ está imerso compactamente em $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ (teorema 1.4.8) passando eventualmente para uma subsequência,

$$u_n \longrightarrow u$$

em $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$.

Desde que a sequência é monótona, a própria sequência é convergente em $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. Passando ao limite em ambos os membros da equação (2.1.5), conclui-se que $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ é solução de (2.1.2).

(ii) Designemos por $\overline{u}$ a solução obtida pela técnica introduzida em (i) e façamos $u_0 = \overline{U}$. Justifiquemos porque $\overline{u}$ é a solução maximal no intervalo $\left[\underline{U}, \overline{U}\right]$. De fato, seja $u \in \left[\underline{U}, \overline{U}\right]$ uma solução arbitrária de (2.1.2). Com um argumento semelhante àquele usado em (i), utilizando u como subsolução e $u_0 = \overline{U}$ como supersolução, teremos $u \leq u_n$, para todo $n \geq 0$, o que implica $u \leq \overline{u}$ ■

Observação 2.1.1. Usando um procedimento semelhante ao desenvolvido em (i), do teorema precedente, podemos construir uma sequência (v_n) da seguinte maneira:

Façamos $v_0 = \underline{U}$ e

$$\begin{cases} -\Delta v_{n+1} + Bv_{n+1} - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) v_{n+1} & = & f(v_n) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) v_{n+1} & \text{em} & \Omega \\ v_{n+1} & = & 0 & \text{em} & \partial\Omega \end{cases}$$

$n \geq 0$. Prova-se que

$$v_0 = \underline{U} \leq v_1 \leq v_2 \leq \ldots \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \ldots \leq \overline{U}.$$

e $v_n \longrightarrow v$ em $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ de modo que v é solução clássica de (2.1.2). Além disso, v é solução mínima de (2.1.2) no intervalo $\left[\underline{U}, \overline{U}\right]$. Assim, o problema (2.1.2) possui duas soluções (possivelmente iguais) u e v em $\left[\underline{U}, \overline{U}\right]$, $v \leq u$, v solução mínima e u solução máxima em $\left[\underline{U}, \overline{U}\right]$.

Consideremos o problema

$$(2.1.6) \qquad \begin{cases} -\Delta u + Bu &= f(u) \text{ em } \Omega \\ u &> 0 \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases}$$

em que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que

$$(2.1.7) \qquad f(0) = 0$$

$$(2.1.8) \qquad f(t) \leq \mathrm{at} + \mathrm{C},$$

para todo $\mathrm{t} \geq 0$, com $-\gamma + 2\sqrt{\delta} \leq \mathrm{a} < \widehat{\lambda}_1$ e algum $\mathrm{C} > 0$.

Observemos que (2.1.8) implica que

$$\frac{f(t)}{t} \leq \mathrm{a} + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{t}}, \text{ para todo t} > 0,$$

e daí

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{f(t)}{t} \leq a < \widehat{\lambda}_1$$

o que caracteriza o problema (2.1.2) como sublinear no infinito.

Designemos por $\overline{U}$ a solução única do problema, a qual pelo princípio do máximo é positiva,

$$(2.1.9) \qquad \begin{cases} -\Delta\overline{U} + B\overline{U} - a\overline{U} &= C \text{ em } \Omega \\ \overline{U} &= 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases}$$

Teorema 2.1.2. Suponhamos que $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f'(t) \geq -\gamma + 2\sqrt{\delta}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e satisfaz (2.1.7) e (2.1.8). Além disso, se

$$(2.1.10) \qquad f'(0) > \widehat{\lambda}_1,$$

o problema (2.1.6) possui uma solução.

Demonstração. Seja $\underline{U} = \varepsilon\varphi_1$, onde $\varphi_1 > 0$ é uma autofunção de $-\Delta + B$ associada ao primeiro autovalor $\widehat{\lambda}_1$.

Verifiquemos que $\varepsilon\varphi_1$ é uma subsolução se $\varepsilon > 0$ for suficientemente pequeno. Como $f(0) = 0$ e $f'(0) > \widehat{\lambda}_1$, segue-se que existe $r > 0$ tal que $f(t) > \widehat{\lambda}_1 t$ se $0 < t < r$. Desse modo, escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $0 < \varepsilon\varphi_1(x) < r$, para todo $x \in \Omega$, obtém-se

$$f(\varepsilon\varphi_1(x)) > \widehat{\lambda}_1(\varepsilon\varphi_1(x)), \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Logo

$$\begin{cases} -\Delta(\varepsilon\varphi_1(x)) + B(\varepsilon\varphi_1(x)) = \widehat{\lambda}_1(\varepsilon\varphi_1(x)) < f(\varepsilon\varphi_1(x)) & \text{em } \Omega \\ \varepsilon\varphi_1(x) = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

O que mostra ser $\underline{U} = \varepsilon\varphi_1$ uma subsolução de (2.1.6) se $\varepsilon > 0$ for suficientemente pequeno.

Suponhamos, como dito acima, que $\overline{U}$ seja solução de (2.1.9). Como $C > 0$, pelo Princípio do Máximo Forte temos que $\overline{U} > 0$ em Ω e $\frac{\partial \overline{U}}{\partial \nu} < 0$ em $\partial\Omega$.

Mostremos que $\varepsilon\varphi_1 \leq \overline{U}$ em Ω se $\varepsilon > 0$ for suficientemente pequeno.

Suponhamos por contradição, que existam sequências $\varepsilon_n \searrow 0$ e $(x_n) \subset \Omega$ tais que

$$(\overline{U} - \varepsilon_n\varphi_1)(x_n) < 0. \tag{2.1.11}$$

Além disso, podemos escolher pontos x_n tais que

$$\nabla(\overline{U} - \varepsilon_n\varphi_1)(x_n) = 0. \tag{2.1.12}$$

Passando, eventualmente, para uma subsequência podemos admitir que $x_n \longrightarrow x_0 \in \overline{\Omega}$. Segue-se de (2.1.11) que $\overline{U}(x_0) \leq 0$ o que implica em $\overline{U}(x_0) = 0$ (pois $\overline{U}$ é positiva) e assim $x_0 \in \partial\Omega$. Ademais, por (2.1.12), $\nabla\overline{U}(x_0) = 0$ e daí, sendo $\frac{\partial(\overline{U}(x_0))}{\partial\nu} = \nabla(\overline{U}(x_0))\nu$, segue que $\frac{\partial\overline{U}(x_0)}{\partial\nu} = 0$ Contradição. Pois, $\frac{\partial\overline{U}}{\partial\nu}(x_0) < 0$. Portanto, existe $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno tal que $\underline{U} = \varepsilon\varphi_1 \leq \overline{U}$ ■

Agora estabeleceremos condições sobre a f e teremos unicidade de solução do problema (2.1.1).

Teorema 2.1.3. Suponhamos que $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ satisfaça as hipóteses do teorema 2.1.2 e, além disso,

$$t \longmapsto \frac{f(t)}{t}, \ t > 0, \ \text{seja decrescente.} \tag{2.1.13}$$

então o problema (2.1.6) possui uma única solução.

Demonstração. Mostraremos que, quaisquer que sejam soluções u_1 e u_2 de (2.1.6) teremos $u_1 \leq u_2$.

Usaremos uma técnica devida a Krasnoselski. Para isso, defina

$$A = \{t \in [0,1];\ tu_1 \leq u_2\}.$$

Observemos que $0 \in A$, pois $u_2 \geq 0$, já que u_2 é solução de (2.1.6).

Seja t_0 =supA

Afirmação. Temos que $t_0 > 0$, isto é, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ temos $\varepsilon \in A$.

Lembremos que

$$\begin{cases} u_2 & > & 0 & \text{em} & \Omega \\ \frac{\partial u_2}{\partial\nu} & < & 0 & \text{em} & \partial\Omega. \end{cases}$$

Suponhamos, por contradição, que existam sequências $\varepsilon_n \searrow 0$ e $x_n \in \Omega$ tais que

$$(\varepsilon_n u_1 - u_2)(x_n) > 0. \tag{2.1.14}$$

Além disso, podemos escolher x_n tal que

$$\nabla(\varepsilon_n u_1 - u_2)(x_n) = 0. \tag{2.1.15}$$

Passando, eventualmente, para uma subsequência, podemos admitir que $x_n \longrightarrow x_0 \in \overline{\Omega}$. Segue-se de (2.1.14), que $-u_2(x_0) \geq 0$, e daí $u_2(x_0) \leq 0$, e como $u_2 \geq 0$, pois u_2 é solução de (2.1.6), segue que $u_2(x_0) = 0$. Dessa forma $x_0 \in \partial\Omega$. Por (2.1.15), $\nabla u_2(x_0) = 0$ o que é impossível pois $\frac{\partial u_2}{\partial\nu}(x_0) < 0$. Isso mostra a validade da afirmação.

Queremos mostrar que $t_0 = 1$.

Suponhamos, por contradição que $0 < t_0 < 1$. Portanto, $t_0 u_1 \leq u_2$ em Ω. Mostremos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $(t_0 + \varepsilon)u_1 \leq u_2$ o que contraria a maximalidade de t_0.

De

$$\begin{cases} -\Delta u_2 + Bu_2 & = & f(u_2) & \text{em} & \Omega \\ u_2 & = & 0 & \text{em} & \partial\Omega. \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + Bu_1 & = & f(u_1) & \text{em} & \Omega \\ u_1 & = & 0 & \text{em} & \partial\Omega. \end{cases}$$

Obtém-se

$$\begin{cases} -\Delta(u_2 - t_0 u_1) + B(u_2 - t_0 u_1) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right)(u_2 - t_0 u_1) \\ = f(u_2) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) u_2 - t_0 \left[f(u_1) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) u_1\right] \quad \text{em} \quad \Omega \\ \qquad\qquad u_2 - t_0 u_1 = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Desde que a função $s \longmapsto f(s) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) s$, $s > 0$, é crescente, e sabendo que $t_0 u_1 \leq u_2$, temos

$$\begin{aligned} f(u_2) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) u_2 - t_0 \left[f(u_1) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) u_1\right] \geq \\ \geq f(t_0 u_1) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) t_0 u_1 - t_0 \left[f(u_1) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) u_1\right] \\ = f(t_0 u_1) - t_0 f(u_1) \\ = t_0 \left[\frac{f(t_0 u_1)}{t_0} - f(u_1)\right], \end{aligned}$$

pois $t_0 > 0$. Como $u_1 > 0$ em Ω

$$f(u_2) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right) u_2 - t_0 \left[f(u_1) - \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta} u_1\right)\right] \geq t_0 u_1 \left[\frac{f(t_0 u_1)}{t_0 u_1} - \frac{f(u_1)}{u_1}\right] \geq 0,$$

pois $\frac{f(s)}{s}$ é decrescente e $t_0 u_1 < u_1$. Isso implica que

$$\begin{cases} -\Delta(u_2 - t_0 u_1) + B(u_2 - t_0 u_1) & - & \left(-\gamma + 2\sqrt{\delta}\right)(u_2 - t_0 u_1) & \geq & 0 & \text{em} & \Omega \\ u_2 & - & t_0 u_1 & = & 0 & \text{em} & \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Princípio do Máximo

(i) $u_2 - t_0 u_1 \equiv 0$

ou

(ii) $u_2 - t_0 u_1 > 0$ em Ω e $\frac{\partial}{\partial\nu}(u_2 - t_0 u_1) < 0$ em $\partial\Omega$.

Suponha que $u_2 - t_0 u_1 \equiv 0$. Sabendo que u_1 é solução de (2.1.6)

$$-\Delta u_1 + B u_1 = f(u_1),$$

Como $t_0 > 0$

$$t_0(-\Delta u_1 + B u_1) = t_0 f(u_1).$$

Usando a linearidade de $-\Delta$ e B

$$-\Delta(t_0 u_1) + B(t_0 u_1) = t_0 f(u_1).$$

Como $t_0 u_1 \equiv u_2$

$$-\Delta u_2 + B u_2 = t_0 f(u_1).$$

Logo

$$f(u_2) = t_0 f(u_1).$$

Sendo $t_0 u_1 \equiv u_2 \Longrightarrow f(u_2) = f(t_0 u_1)$, e daí

$$f(t_0 u_1) = t_0 f(u_1).$$

Desde que $u_1 > 0$ em Ω e $0 < t_0 < 1$, tem-se

$$\frac{f(t_0 u_1)}{t_0 u_1} = \frac{f(u_1)}{u_1}.$$

Por outro lado, como $t_0 u_1 < u_1$ e $\dfrac{f(t)}{t}$ é decrescente, tem-se

$$\frac{f(t_0 u_1)}{t_0 u_1} > \frac{f(u_1)}{u_1},$$

o que contradiz a igualdade acima.

Consequentemente, $t_0 u_1 < u_2$ em Ω e $\frac{\partial}{\partial \nu}(u_2 - t_0 u_1) < 0$ em $\partial\Omega$. Raciocinando como antes, encontramos $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ temos $(t_0 + \varepsilon) u_1 < u_2$ em Ω. O que contraria a maximalidade de t_0. Então, $t_0 = 1$, isto é, $u_1 \leq u_2$ em Ω. Logo $u_2 \leq u_1$, e daí $u_1 \equiv u_2$ em Ω ■

Exemplo 2.1.1. Os argumentos desenvolvidos até aqui são válidos para o problema

$$(2.1.16) \qquad \begin{cases} -\Delta u + Bu & = & u^{\alpha} & \text{em} & \Omega, \\ u & > & 0 & \text{em} & \Omega, \\ u & = & 0 & \text{em} & \partial\Omega \end{cases}$$

com $0 < \alpha < 1$. Desse modo, (2.1.16) possui uma única solução clássica.

Defina $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ onde $f(t) = t^\alpha,\ 0 < \alpha < 1.$

Note que:

(2.1.17) $$f(0) = 0$$

(2.1.18) $$f(t) = t^\alpha \leq \mathrm{at} + \mathrm{C},$$

para todo $\mathrm{t} \geq 0,\ \mathrm{com} - \gamma + 2\sqrt{\delta} \leq \mathrm{a} < \widehat{\lambda_1}$ e algum $\mathrm{C} > 0$

(2.1.19) $$f \in C^1(\mathbb{R} - \{0\})$$

De fato,

(a) Se $t \neq 0$ temos que $f'(t) = \alpha t^{\alpha-1}$.

(b) Se $t = 0$, $f'(0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t) - f(0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} t^{\alpha-1} = \infty$

Daí

(2.1.20) $$f'(0) > \widehat{\lambda_1}$$

E

(2.1.21) $$f'(t) > 0 \geq -\gamma + 2\sqrt{\delta},\ \text{para todo } \mathrm{t} \geq 0$$

Observemos também que

$$\frac{f(t)}{t} = t^{\alpha-1}$$

que é uma função decrescente, pois $\alpha < 1$.

Dessa forma, (2.1.16) satisfaz as condições dos teoremas anteriores, o que garantirá existência e unicidade de solução.

Observação 2.1.2. Observe que, como $\underline{U}, \overline{U} > 0$ e precisamos garantir as hipóteses dos teoremas apenas em $\left[\underline{U}, \overline{U}\right]$ (ver teorema 2.1.1), é suficiente mostrar as hipóteses exigidas sobre a f para $t \geq 0$, que foi o que fizemos acima.

Capítulo 3

Um Problema Superlinear e um Teorema de Ponto Fixo

3.1 Existência de Solução do Sistema através de um Teorema de Ponto Fixo

Teorema 3.1.1. Sejam C um cone em um espaço de Banach X e $\Phi : C \to C$ uma aplicação compacta. Suponhamos que existam $0 < r < R$ tais que

(i) $u \neq t\Phi(u)$ para $0 \leq t \leq 1$ e $\|u\| = r,\ u \in C$;

(ii) Existe uma aplicação compacta $F : \overline{B}_R \times [0, \infty) \longrightarrow C$ tal que $F(u, 0) = \Phi(u)$ para $\|u\| = R,\ F(u,t) \neq u$ para $\|u\| = R$ e $t \geq 0$, e $F(u,t) = u$ não possui solução $u \in \overline{B}_R$ para $t \geq t_0$. Então Φ possui um ponto fixo no conjunto

$$U = \{u \in C;\ r < \|u\| < R\}.$$

Condições similares podem ser feitas se $0 < R < r$.

Uma condição suficiente para (i) :

(i') Existe um operador linear limitado $A : X \to X$ tal que $A(C) \subset C$, onde C é um cone normal, A possui raio espectral $r_\sigma(A)$ estritamente menor do que 1 e $\Phi(u) \leq Au$ para $u \in C$ e $\|u\| = r$.

Usaremos o Teorema 3.1.1 para mostrar a existência de solução positiva para o problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u + Bu & = & f(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{3.1.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e regular, $\gamma \geq 2\sqrt{\delta}$, a fim de usarmos o princípio do máximo, e $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua satisfazendo

(f_1) $\liminf_{s\to\infty} \dfrac{f(s)}{s} > \widehat{\lambda}_1,$

(f_2) $\lim_{s\to\infty} \dfrac{f(s)}{s^\beta} = 0$, onde $\beta = \dfrac{N+1}{N-1}$, $N \geq 2$,

(f_3) $\limsup_{s\searrow 0} \dfrac{f(s)}{s} < \widehat{\lambda}_1.$

As condições (f_1) e (f_3) caracterizam o problema (3.1.1) como superlinear no infinito e superlinear em 0, respectivamente.

Observemos que as condições (f_1) e (f_3) implicam que o gráfico de f intersecta o gráfico da reta $\widehat{\lambda}_1 s$. Com efeito, (f_3) implica que existe $s_0 > 0$ tal que $f(s) < \widehat{\lambda}_1 s$ se $0 < s < s_0$. Além disso, (f_1) implica que existe $s_\infty > 0$ tal que $f(s) > \widehat{\lambda}_1 s$ se $s \geq s_\infty$.

Deve-se ressaltar que se $f(s) > \widehat{\lambda}_1 s$, para todo $s > 0$, então o problema (3.1.1) não possui solução positiva. De fato, se tal condição for satisfeita e $u > 0$ for uma solução de (3.1.1), então

$$\begin{cases} -\Delta u + Bu &= f(u) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

e se $\varphi_1 > 0$ for uma autofunção de $-\Delta + B$ associada ao autovalor $\widehat{\lambda}_1$, teremos

$$\int_\Omega (-\Delta u + Bu)\varphi_1 = \int_\Omega f(u)\varphi_1$$

Usando integração por partes e como estamos supondo $f(s) > \widehat{\lambda}_1 s$, para todo $s > 0$, tem-se

$$\int_\Omega u(-\Delta\varphi_1 + B\varphi_1) = \int_\Omega f(u)\varphi_1 > \int_\Omega \widehat{\lambda}_1 u\varphi_1$$

Daí,

$$\widehat{\lambda}_1 \int_\Omega u\varphi_1 > \widehat{\lambda}_1 \int_\Omega u\varphi_1,$$

o que é impossivel

Assim, se (3.1.1) possuir solução positiva, o gráfico de f deve intersectar o gráfico de $\widehat{\lambda}_1 s$.

Designaremos por $\varphi_1 > 0$ uma autofunção de $-\Delta + B$ associada ao primeiro autovalor $\widehat{\lambda}_1$.

Mostraremos a existência de estimativas a priori para soluções positivas de (3.1.1). A seguinte desigualdade de Hardy-Sobolev será utilizada:

"Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $\frac{u}{\varphi^\tau} \in L^q(\Omega)$, onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{(1-\tau)}{N}$, $0 \leq \tau \leq 1$, e existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left\| \frac{u}{\varphi^\tau} \right\|_q \leq C\|u\|, \ \forall u \in H_0^1(\Omega), \tag{3.1.2}$$

onde $\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}$ é a norma usual em $H_0^1(\Omega)$".

Proposição 3.1.1. Sob as hipóteses (f_1) e (f_2), existe uma constante $C > 0$ tal que se $u > 0$ for uma solução de (3.1.1) então

$$\int_\Omega u\varphi_1 \leq C$$

e

$$\int_\Omega f(u)\varphi_1 \leq C,$$

em que C independe da solução positiva u.

Demonstração. Segue-se de (f_1) que existem $\lambda > \widehat{\lambda}_1$ e $s_\infty > 0$ tais que $f(s) \geq \lambda s$ para $s \geq s_\infty$. Consequentemente, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$f(s) \geq \lambda s - C_1, \text{ para todo s} \geq 0 \tag{3.1.3}$$

Multiplicando ambos os membros da equação em (3.1.1) por φ_1 e integrando sobre Ω, obtém-se

$$\int_\Omega [-\Delta u\varphi_1 + Bu\varphi_1] = \int_\Omega f(u)\varphi_1$$

Usando integração por partes, tem-se

$$\int_\Omega u\left[-\Delta\varphi_1 + B\varphi_1\right] = \int_\Omega f(u)\varphi_1$$

Então

$$\widehat{\lambda}_1 \int_\Omega u\varphi_1 = \int_\Omega f(u)\varphi_1$$

Usando (3.1.3), pois $u > 0$, obtemos

$$\widehat{\lambda}_1 \int_\Omega u\varphi_1 \geq \int_\Omega \left(\lambda u - C_1\right)\varphi_1$$

$$\Rightarrow \widehat{\lambda}_1 \int_\Omega u\varphi_1 \geq \lambda \int_\Omega u\varphi_1 - C_1 \int_\Omega \varphi_1$$

$$\Rightarrow C_1 \int_\Omega \varphi_1 \geq \left(\lambda - \widehat{\lambda}_1\right) \int_\Omega u\varphi_1.$$

Como C_1, $\int_\Omega \varphi_1$, $\left(\lambda - \widehat{\lambda}_1\right)$ não dependem de u, existe $C > 0$ tal que $\int_\Omega u\varphi_1 \leq C$, qualquer que seja a solução positiva u de (3.1.1).

Sendo

$$\widehat{\lambda}_1 \int_\Omega u\varphi_1 = \int_\Omega f(u)\varphi_1$$

Segue-se que existe $C > 0$ tal que $\int_\Omega f(u)\varphi_1 \leq C$, para toda solução positiva u do problema (3.1.1). ■

Teorema 3.1.2. Sob as hipóteses (f_1) e (f$_2$), existe uma constante positiva C tal que $\|u\|_\infty \leq C$, qualquer que seja a solução positiva u de (3.1.1).

Demonstração. Seja $u > 0$ uma solução positiva (clássica) de (3.1.1). Multiplicando ambos os membros de (3.1.1) por u e integrando por partes, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega Bu \cdot u = \int_\Omega f(u)u.$$

Como $(Bu, u)_2 \geq 0$, segue que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \int_\Omega f(u)u$$

Agora, para usarmos a proposição 3.1.1, façamos

$$\int_\Omega f(u)u = \int_\Omega [f(u)]^\alpha \varphi_1^\alpha [f(u)]^{1-\alpha} \varphi_1^{-\alpha} u,$$

onde o parâmetro $\alpha \in (0, 1)$ será determinado oportunamente. Usemos a desigualdade de Hölder da seguinte maneira:

$$1 - \alpha + \alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{\frac{1}{1-\alpha}} = 1$$

Daí

$$\int_\Omega f(u)u \leq \left\{ \int_\Omega [(f(u))^\alpha \varphi_1^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}} \right\}^\alpha \left\{ \int_\Omega \left[\frac{(f(u))^{1-\alpha} u}{\varphi_1^\alpha} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \right\}^{1-\alpha} \tag{3.1.4}$$

Logo,

$$\int_\Omega f(u)u \leq \left(\int_\Omega f(u)\varphi_1 \right)^\alpha \left[\int_\Omega \frac{f(u)u^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\varphi_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \right]^{1-\alpha} \tag{3.1.5}$$

O primeiro termo do lado direito da desigualdade (3.1.5) é limitado (Proposição 3.1.1).

Para estimar o segundo termo do segundo membro da desigualdade em (3.1.5), usaremos a condição (f_2). Dessa forma para cada $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que $f(s) < \varepsilon s^\beta + C_\varepsilon$ para todo $s \geq 0$. Então

$$\int_\Omega f(u)u \le C\varepsilon^{1-\alpha}\left[\int_\Omega \frac{u^{\beta+\frac{1}{1-\alpha}}}{\varphi_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\right]^{1-\alpha} + C'_\varepsilon\left[\int_\Omega \frac{u^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\varphi_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\right]^{1-\alpha}$$

Tomando $\alpha = \frac{2}{N+1}$ e usando a desigualdade de Hardy-Sobolev, Obtemos

$$\int_\Omega f(u)u \le C\varepsilon^{\frac{N-1}{N+1}}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right) + C\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}.$$

Usando esta última estimativa na desigualdade

$$\|u\|^2_{H^1_0} \le \int_\Omega f(u)u + C\|u\|_{H^1_0},$$

previamente demonstrada, e considerando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos $\|u\|_{H^1_0} \le C$. Usando imersões de Sobolev (teorema 1.4.2), $\|u\|_{2*} \le C$ e, pela regularidade elíptica, $\|u\|_\infty \le C$. ■

Usaremos este resultado de estimativa a priori para demonstrar o seguinte teorema de existência.

Daqui em diante estaremos sempre supondo $\gamma \ge 2\sqrt{\delta}$ a fim de usarmos o Princípio do Máximo.

Teorema 3.1.3. Seja $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função localmente lipschitziana satisfazendo (f_1), (f_2), (f_3) e $f(0) = 0$. Então o problema (3.1.1) possui pelo menos uma solução positiva.

Demonstração. Seja

$$X = \{u \in C^0(\overline{\Omega});\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$$

munido do cone

$$C = \{u \in X; u \ge 0\}.$$

Designaremos por $\Phi : X \to X$ a aplicação definida como se segue

Para cada $v \in X$ seja $u = \Phi(v)$ a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + Bu &= f(v) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Pela teoria de regularidade elíptica $u \in X$, Φ é compacta e, pelo Princípio do Máximo Forte, $\Phi(C) \subset C$, isto é, $v \ge 0$ implica que $u \ge 0$.

Usaremos o Teorema 3.1.1. Por (f_3), existem $0 < \alpha < \widehat{\lambda}_1$ e $s_0 > 0$ tais que $f(s) \le \alpha s$ para $0 \le s \le s_0$. Definamos, o operador linear $A : X \longrightarrow X$ da seguinte maneira:

Para cada $v \in X$ seja $u = Av$ a solução única de

$$\begin{cases} -\Delta u + Bu &= \alpha v \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Esse problema possui solução única pois $-\Delta + B$ é invertível. Como $\frac{\alpha}{\lambda_1} < 1$, temos que o raio espectral $r_\sigma(A)$ do operador A é menor do que 1. Observemos que A é linear e limitado. Também, pelo princípio do máximo $A(C) \subset C$.

Observemos que se $\|u\|_X \leq s_0,\ u \in C$, temos $\Phi(u) \leq Au$. De fato, chamando $\Phi(u) = u_1$ e $Au = u_2$, teremos

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + Bu_1 &= f(u) \quad \text{em} \quad \Omega \\ -\Delta u_2 + Bu_2 &= \alpha u \quad \text{em} \quad \Omega \\ u_1 &= u_2 = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} -\Delta(u_2 - u_1) + B(u_2 - u_1) &= \alpha u - f(u) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u_2 - u_1 &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $0 \leq u(x) \leq s_0$, segue-se que $0 \leq f(u(x)) \leq \alpha u(x)$ e daí

$$u_1 \leq u_2,$$

ou seja, $\Phi(u) \leq Au$.

Assim, a condição (i') é satisfeita, e daí, (i) é satisfeita.

Mostremos, agora, a condição (ii). Para isso, seja $L = (-\Delta + B)^{-1} : C\left(\overline{\Omega}\right) \longrightarrow C\left(\overline{\Omega}\right)$ o qual é um operador linear e compacto.

Definamos

$$F(u,t)(x) \stackrel{def}{=} L(f(u(x) + t)) = \Phi(u(x) + t).$$

Argumentos semelhantes aos usados na demonstração da Proposição 3.1.1, mostram que $F(u,t) = u$ não posssui solução para $t \geq t_0$. Além disso, estimativas a priori para soluções positivas são uniformes em t, e assim existe $R > r$ tal que a equação $F(u,t) = u$ não possui solução $u \in C$ com $\|u\|_\infty \geq R$. O teorema 3.1.1 nos permite concluir que Φ possui um ponto fixo, ou seja, que o problema (3.1.1) possui solução. ■

Capítulo 4

Um Teorema do Tipo Krein-Rutman e Aplicações

4.1 Um Teorema do Tipo Krein-Rutman

Neste capítulo, estudaremos o problema de autovalor

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta u + Bu &=& \lambda m(x) u \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &=& 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \end{array}\right. \tag{4.1.1}$$

em que λ é um parâmetro real e $m \in C(\overline{\Omega})$.

Ao longo de todo o capítulo, suporemos $m(x) > 0$, para todo $x \in \overline{\Omega}$.

Designemos por $M : C(\overline{\Omega}) \longrightarrow C(\overline{\Omega})$ o operador $(Mu)(x) = m(x)u(x),\ u \in C(\overline{\Omega})$, em que $C(\overline{\Omega})$ está munido com a norma da convergência uniforme $\|u\|_\infty = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|$. Claramente M é linear e contínuo e, consequentemente,

$$(-\Delta + B)^{-1}M : C(\overline{\Omega}) \longrightarrow C(\overline{\Omega})$$

é linear e compacto.

Devemos observar, também, que $(-\Delta + B)^{-1}M : C_0^1(\overline{\Omega}) \longrightarrow C_0^1(\overline{\Omega})$ é linear, compacto e, conforme mostraremos posteriormente, se designarmos por P o cone de funções positivas em $C_0^1(\overline{\Omega})$, teremos $(-\Delta + B)^{-1}M(P - \{0\}) \subset int(P)$, se $\gamma \geq 2\sqrt{\delta}$, em virtude do Princípio do Máximo Forte.

Como vimos anteriormente, a expressão

$$(u, v) = (u, v)_{H_0^1} + (Bu, v)_2,\ u, v \in H_0^1, \tag{4.1.2}$$

onde $(u, v)_{H_0^1} = \int\limits_\Omega \nabla u \nabla v$, define um produto interno em $H_0^1(\Omega)$ cuja norma associada é

$$\|u\|^2 = \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 + \int\limits_\Omega Bu \cdot u,\ u \in L^2(\Omega) \tag{4.1.3}$$

que é equivalente a norma usual

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

Teorema 4.1.1. (Teorema de Representação de Riesz) Dado um funcional linear limitado $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$, onde H é um espaço de Hilbert, existe um único z tal que

$$f(x) = \langle x, z \rangle$$

e $\|z\| = \|f\|$.

Lema 4.1.1. O espectro de $(-\Delta + B)^{-1}M : C(\overline{\Omega}) \longrightarrow C(\overline{\Omega})$ é constituído por uma sequência $\frac{1}{\lambda_0} > \frac{1}{\lambda_1} > \ldots > 0$ de autovalores reais com $\lambda_k \longrightarrow \infty$.

Demonstração. Demonstraremos esse lema mostrando que os autovalores de $(-\Delta + B)^{-1}M : C(\overline{\Omega}) \longrightarrow C(\overline{\Omega})$ coincidem com os autovalores de um operador linear, simétrico e compacto $S : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$. Para isso, consideremos, para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, fixado, o funcional $\phi_u : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $\phi_u(v) = \int_\Omega muv$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Claramente, ϕ_u é linear e contínuo. Logo, pelo Teorema de Representação de Riesz, existe um único $Su \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\phi_u(v) = (Su, v),$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, onde $(\ ,\ )$ é o produto interno introduzido em (4.1.2). Temos, então, definido uma aplicação linear

$$\begin{aligned} S : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ u &\longmapsto Su \end{aligned}$$

dada por

$$(Su, v) = \int_\Omega muv,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$

Claramente S é linear, limitado e simétrico. Mostremos a compacidade de S. Para isso, consideremos uma sequência limitada $(u_j) \subset H_0^1(\Omega)$. Passando, eventualmente, para subsequências temos $u_j \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ ($\rightharpoonup$ designa convergência fraca) e, em virtude da imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$ tem-se $u_j \longrightarrow u$ em $L^2(\Omega)$.

Usando a definição de S,

$$\|Su_j - Su\| = \int_\Omega m(u_j - u)(Su_j - Su)$$

então

$$\|Su_j - Su\| \leq C\|u_j - u\|_2\|Su_j - Su\|_2,$$

onde usamos as desigualdades de Holder e Poincaré. Daí

$$\|Su_j - Su\| \leq C\|u_j - u\|_2$$

de onde segue-se a convergência $Su_j \longrightarrow Su$ em $H_0^1(\Omega)$ e daí $S : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ é compacto. Como $(Su, u) = \int\limits_\Omega mu^2 > 0$, para todo $0 \neq u \in H_0^1(\Omega)$, usando-se a Teoria Espectral para operadores compactos auto-adjuntos, encontramos uma sequência $\frac{1}{\lambda_0} > \frac{1}{\lambda_1} > \ldots > 0$ de autovalores de S com $\lambda_j \longrightarrow \infty$ se $j \longrightarrow \infty$. Veja de Figueiredo [9] para mais informações sobre a referida Teoria Espectral.

Desse modo, existem funções $\varphi_j \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$S\varphi_j = \frac{1}{\lambda_j}\varphi_j, \ j = 1, 2, \ldots$$

Donde

$$(S\varphi_j, v) = \frac{1}{\lambda_j}(\varphi_j, v), \ j = 1, 2, \ldots$$

$$\int\limits_\Omega \nabla\varphi_j \cdot \nabla v + \int\limits_\Omega B\varphi_j \cdot v = \lambda_j(S\varphi_j, v) = \lambda_j \int\limits_\Omega m\varphi_j \cdot v,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Usando a Teoria da Regularidade Elíptica tem-se

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} -\Delta\varphi_j & + & B\varphi_j & = & \lambda_j m\varphi_j \quad \text{em} \quad \Omega \\ & & \varphi_j & = & 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \end{array} \right. \tag{4.1.4}$$

no sentido fraco, e $\varphi_j \in C(\overline{\Omega})$, para todo $j = 1, 2, \ldots$ Consequentemente,

$$\frac{1}{\lambda_j}\varphi_j = (-\Delta + B)^{-1}M\varphi_j, \ j = 1, 2, \ldots$$

Reciprocamente, pode-se mostrar que os autovalores e autofunções de $(-\Delta + B)^{-1}M : C(\overline{\Omega}) \longrightarrow C(\overline{\Omega})$ são também autovalores e autofunções de $S : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$. Isso conclui a demonstração do lema. ■

Antes de demonstrarmos o teorema central deste capítulo, façamos algumas observações que podem ser encontradas em Amann [1].

Sejam V e W espaços de Banach ordenados, respectivamente, por cones P e Q. Um operador linear $T : V \longrightarrow W$ é chamado positivo se $T(P) \subset Q$. T é dito estritamente positivo se $T(P - \{0\}) \subset Q - \{0\}$ e fortemente positivo se $T(P - \{0\}) \subset int\ Q$, se Q tiver interior não-vazio.

Um cone P em um espaço de Banach V é dito total se $V = \overline{P - P}$.

Recordemos que se V for um espaço de Banach real e $T \in \mathcal{L}(V, V)$, o limite

$$r(T) = \lim_{j \to \infty} \|T^j\|^{1/j}$$

existe e é chamado raio espectral de T.

Um autovalor λ de $T \in \mathcal{L}(V,V)$ é dito simples se

$$dim\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} Ker(\lambda I - T)^j\right) = 1.$$

Teorema 4.1.2. (Krein-Rutman) Seja (E, P) um espaço de Banach ordenado por um cone positivo total P. Suponhamos que $T \in \mathcal{L}(E, E)$ seja compacto e tenha raio espectral positivo $r(T)$. Então, $r(T)$ é um autovalor de T com autovetores em P.

Teorema 4.1.3. Seja (E, P) um espaço de Banach ordenado, tal que P seja um cone positivo com interior não-vazio. Seja $T \in \mathcal{L}(E, E)$ um operador compacto fortemente positivo. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

(i) O raio espectral $r(T)$ de T é positivo;

(ii) $r(T)$ é um autovalor simples de T tendo um autovetor positivo e não existe nenhum outro autovalor com autovetor positivo;

(iii) Para todo $y \in P - \{0\}$, a equação

$$\lambda x - Tx = y$$

possui exatamente uma solução positiva se $\lambda > r(T)$ e não possui solução positiva se $\lambda \leq r(T)$. A equação

$$r(T)x - Tx = -y$$

não possui solução positiva.

De agora em diante, denominaremos $L = -\Delta + B$.

Teorema 4.1.4. Se $\gamma \geq 2\sqrt{\delta}$ o inverso do autovalor μ_0 de $L^{-1}M : C(\overline{\Omega}) \longrightarrow C(\overline{\Omega})$ é simples e está associado a uma autofunção $\phi_0 > 0$ em Ω, sendo μ_0 o único inverso do autovalor com essa propriedade.

Demonstração. Observemos, inicialmente, que os autovalores de $L^{-1}M : C(\overline{\Omega}) \longrightarrow C(\overline{\Omega})$ e de $L^{-1}M : C_0^1(\overline{\Omega}) \longrightarrow C_0^1(\overline{\Omega})$ coincidem e estão associados às mesmas autofunções.

A validade dessa afirmação segue-se, de maneira imediata, da Teoria da Regularidade Elíptica.

Observemos que se designarmos por P o cone de funções positivas em $C_0^1(\overline{\Omega})$ temos $L^{-1}M(P - \{0\}) \subset intP$.

De fato, dado $u \in L^{-1}M(P - \{0\})$ tem-se que existe $f \in P - \{0\}$ tal que $u = L^{-1}M(f)$.

Desse modo,

$$
(4.1.5) \qquad \begin{cases} -\Delta u + Bu = m(x)f(x) & \text{em} \quad \Omega \\ \qquad\quad u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}
$$

Como $m(x) > 0$ em Ω e $f > 0$ em um conjunto de medida positiva em Ω, segue-se que $mf > 0$ em um conjunto de medida positiva em Ω. Além disso, $mf \in C(\overline{\Omega})$. Pelo Princípio do Máximo Forte, temos que $u > 0$ em Ω e $\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0$ em $\partial\Omega$. Tem-se, também, $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$. Como é bem conhecido, funções u satisfazendo as duas propriedades acima pertencem a $int(P)$. Isso mostra que $L^{-1}M : C_0^1(\overline{\Omega}) \longrightarrow C_0^1(\overline{\Omega})$ é fortemente positivo.

Usando os teoremas 4.1.2 e 4.1.3 concluímos que $L^{-1}M : C_0^1(\overline{\Omega}) \longrightarrow C_0^1(\overline{\Omega})$ admite uma única autofunção $\phi_0 \in int(P)$, correspondente ao inverso do autovalor $\mu_0 > 0$, simples, $\|\phi_0\|_{C^1(\Omega)} = 1$, e μ_0 é estritamente menor que todos os outros inversos de autovalores de $L^{-1}M : C_0^1(\overline{\Omega}) \longrightarrow C_0^1(\overline{\Omega})$. Mostremos que μ_0 é simples, visto como inverso de autovalor de $L^{-1}M : C(\overline{\Omega}) \longrightarrow C(\overline{\Omega})$.

(a) A multiplicidade geométrica de μ_0 é 1

De fato, se $u \in N_{C(\overline{\Omega})}(\mu_0 L^{-1}M - I)$, teremos $\mu_0 L^{-1}Mu = u$ o que implica $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$. Então, $u \in N_{C_0^1(\overline{\Omega})}(\mu_0 L^{-1}M - I)$, e então, $u = t\phi_0$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Isso mostra que a multiplicidade geométrica de μ_0 é 1.

(b) A multiplicidade algébrica de μ_0 é 1.

Como μ_0 é simples como inverso de autovalor de $L^{-1}M : C_0^1(\overline{\Omega}) \longrightarrow C_0^1(\overline{\Omega})$, temos

$$
N_{C_0^1(\overline{\Omega})}(\mu_0 L^{-1}M - I)^2 = N_{C_0^1(\overline{\Omega})}(\mu_0 L^{-1}M - I).
$$

Seja $u \in N_{C(\overline{\Omega})}(\mu_0 L^{-1}M - I)^2$. Então $(\mu_0 L^{-1}M - I)(\mu_0 L^{-1}M - I)u = 0$. Chamando $v = (\mu_0 L^{-1}M - I)u$, obtemos $(\mu_0 L^{-1}M - I)v = 0$. Portanto, $v \in C_0^1(\overline{\Omega})$ e, consequentemente, $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$. Logo, $u \in N_{C_0^1(\overline{\Omega})}(\mu_0 L^{-1}M - I)^2$ o que implica $(\mu_0 L^{-1}M - I)u = 0$, ou seja, $u \in N_{C(\overline{\Omega})}(\mu_0 L^{-1}M - I)$. Assim,

$$
N_{C(\overline{\Omega})}(\mu_0 L^{-1}M - I) = N_{C(\overline{\Omega})}(\mu_0 L^{-1}M - I)^2
$$

o que implica ser μ_0 um inverso de autovalor simples de $L^{-1}M : C(\overline{\Omega}) \longrightarrow C(\overline{\Omega})$ ■

4.2 Aplicações do Teorema de Krein-Rutman

Nesta seção, estudaremos o problema

$$
(4.2.1) \qquad \begin{cases} -\Delta u + Bu = \lambda f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}
$$

em que $\lambda \geq 0$ é um parâmetro real, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função localmente lipschitziana dada por

$$
(4.2.2) \qquad f(x,t) = m(x)t + h(t),
$$

onde $m \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $m(x) > 0$ em $\overline{\Omega}$, $\mathrm{h} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função limitada, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que, $|h(t)| \leq C$, para todo $t \geq 0$. O problema (4.2.1), com f satisfazendo à condição (4.2.2) é chamado assintoticamente linear.

Mostraremos a existência de soluções para o problema (4.2.1) usando resultados sobre componentes conexas de soluções.

Usaremos os seguintes resultados. A demonstração do primeiro pode ser encontrada em Rabinowitz [17] e do segundo em Turner [21].

Seja E um Espaço de Banach real e consideremos a equação

$$
(4.2.3) \qquad u = T(\lambda, u) \text{ em } \mathbb{R}^+ \times \mathrm{E},
$$

onde $T : \mathbb{R}^+ \times E \longrightarrow E$ é compacto e contínuo.

Teorema 4.2.1. (Rabinowitz) Se T for como acima e $T(0,u) \equiv 0$, então

$$
S = \overline{\{(\lambda, u) \in \mathbb{R}^+ \times E;\ u = T(\lambda, u)\}}
$$

contém uma componente S^+ contida em $\mathbb{R}^+ \times E$, não-limitada e contendo $(0,0)$.

Para enunciar o próximo teorema, suponhamos que E seja ordenado por um cone C tal que se $u \in E$, então $u = u_1 - u_2$, onde $u_1,\ u_2 \in C$. Consideremos uma aplicação contínua $F : \mathbb{R}^+ \times C \longrightarrow C$ satisfazendo $F(\lambda, 0) = 0$, para todo $\lambda \geq 0$.

Dizemos que F possui derivada em $u = 0$, designada por $dF(0)$, se $dF(0) : E \longrightarrow E$ for uma aplicação linear contínua satisfazendo

$$
F(\lambda, u) - F(\lambda, 0) - dF(0)u = o(\|u\|)
$$

em $u \longrightarrow 0,\ u \in C$, uniformemente em $\lambda \geq 0$, isto é,

$$
\lim_{u \to 0} \frac{F(\lambda, u) - F(\lambda, 0) - dF(0)u}{\|u\|} = 0,
$$

uniformemente em $\lambda \geq 0$.

Consideremos a equação $u = \lambda F(\lambda, u)$ e designemos por Σ o conjunto

$$
\Sigma = \overline{\{(\lambda, u) \in \mathbb{R}^+ \times (C - \{0\});\ u = \lambda F(\lambda, u)\}}
$$

O conjunto Σ pode conter soluções triviais $(\lambda, 0)$, mas somente aquelas que forem pontos de bifurcação, ou seja, existe uma sequência (λ_n, u_n) de soluções de $u = \lambda F(\lambda, u)$ tal que $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ e $u_n \longrightarrow 0$.

O teorema a seguir, devido a Turner [21], é uma versão não-linear do Teorema de Krein-Rutman.

Teorema 4.2.2. **(Turner)** Seja $F : \mathbb{R}^+ \times C \longrightarrow C$ uma aplicação compacta e contínua satisfazendo $F(\lambda, 0) = 0,\ \lambda \geq 0$. Suponhamos que F tenha derivada $dF(0)$ em $u = 0$ e que $dF(0)$ tenha raio espectral $\frac{1}{\overline{\lambda}_0} > 0$. Então, Σ contém uma componente não-limitada Σ_0 de soluções de $u = \lambda F(\lambda, u)$ com $\left(\overline{\lambda}_0, 0\right) \in \Sigma_0$.

Consideremos o caso particular em que $F(\lambda, u) = Lu + H(u)$, $L+H : C \longrightarrow C,\ L : E \longrightarrow E$ é linear e compacto, $H : C \longrightarrow E$ é compacto e contínuo e $H(u) = o(\|u\|)$ em $\|u\| \longrightarrow \infty,\ u \in C$, isto é, $\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{H(u)}{\|u\|} = 0$.

Efetuando a inversão $v = \frac{u}{\|u\|^2},\ u \neq 0$, e se considerarmos a equação

$$v = \lambda \widetilde{F}(\lambda, v) \text{ em C},$$

onde $\widetilde{F}(\lambda, v) = \left[Lv + \widetilde{H}(v)\right]$ e $\widetilde{H}$ é dada por

$$\widetilde{H}(v) = \begin{cases} \|v\|^2 H\left(\dfrac{v}{\|v\|^2}\right) & \text{se } \quad v \neq 0, \\ 0 & \text{se } \quad v = 0, \end{cases}$$

teremos que $\widetilde{H}$ é compacta (ver Berestycki [3]) e $\widetilde{H}(v) = o(\|v\|)$ em $v \longrightarrow 0,\ v \in C$. Claramente $\widetilde{F} : C \longrightarrow C,\ \widetilde{F}(\lambda, 0) = 0$ e $d\widetilde{F}(0)v = Lv$. Se L tiver raio espectral $\frac{1}{\overline{\lambda}_0} > 0$, então existe uma componente não-limitada Σ_0 de soluções de $v = \lambda \widetilde{F}(\lambda, v)$ com $(\overline{\lambda}_0, 0) \in \Sigma_0$.

Retornando à variável $u = \frac{v}{\|v\|^2}$ concluímos que existe uma componente não-limitada Σ_∞ de $u = \lambda F(\lambda, u)$ encontrando $\left(\overline{\lambda}_0, \infty\right)$.

Temos o seguinte resultado

Teorema 4.2.3. Suponhamos que $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ satisfaça (4.2.2) e $f(x, 0) > 0$. Se $\gamma \geq 2\sqrt{\delta}$, então

(i) Existe uma componente não-limitada $\Sigma_0 \subset \mathbb{R}^+ \times C_0\left(\overline{\Omega}\right)$ de soluções positivas de (4.2.1) com $(0, 0) \in \Sigma_0$;

(ii) Existe uma componente não-limitada $\Sigma_\infty \subset \mathbb{R}^+ \times C_0(\overline{\Omega})$ de soluções positivas de (4.2.1), encontrando (μ_0, ∞), sendo esse o único ponto de bifurcação no infinito para soluções positivas de (4.2.1);

(iii) Se existir $\alpha > 0$ tal que $f(x, t) \geq \alpha m(x)t$, para todo $(x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+$, então existe $\lambda^* > 0$ tal que se (λ, u) for solução positiva de (4.2.1) teremos $\lambda \leq \lambda^*$. Nesse caso, $\Sigma_0 = \Sigma_\infty$.

Demonstração. (i) Consideremos a aplicação $T : \mathbb{R}^+ \times C\left(\overline{\Omega}\right) \longrightarrow C\left(\overline{\Omega}\right)$ dada por $T(\lambda, u) = \lambda L^{-1}F(u)$ onde F é o operador de Nemytski associado à extensão $\widetilde{f}$, de f, definida por

$$\widetilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t) & \text{se} \quad t \geq 0, \\ f(x,0) & \text{se} \quad t < 0. \end{cases}$$

T é compacta, contínua e $T(0,u) \equiv 0$. Pelo Teorema 4.2.1, existe uma componente não-limitada Σ_0 de soluções de $u = T(\lambda, u)$ encontrando $(0,0)$ e $\Sigma_0 \subset \mathbb{R}^+ \times C_0\left(\overline{\Omega}\right)$. Observemos que se $(\lambda, 0)$ for solução de $u = \lambda L^{-1}F(u)$ (Observar que $L = -\Delta + B$), então $\lambda = 0$, pois $f(x,0) > 0$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Se $(0,u)$ for solução da mesma equação então $u = 0$. Assim, $\Sigma_0 - \{(0,0)\}$ é constituída de soluções não-triviais e, pelo Princípio do Máximo, tais soluções são positivas.

(ii) Consideremos a equação

(4.2.4) $$u = \lambda\left[L^{-1}Mu + L^{-1}H(u)\right] \text{ em C}$$

onde $Mu(x) = m(x)u(x)$, H é o operador de Nemytski associado à função h e devemos observar que em virtude do Princípio do Máximo,

$$L^{-1}M + L^{-1}H : C \longrightarrow C$$

em que C é cone de funções não-negativas em $C_0\left(\overline{\Omega}\right)$.

O operador $T : C \longrightarrow C,\ T = L^{-1}M + L^{-1}H$ é compacto e contínuo. Como $|h(t)| \leq C$, para todo $t \geq 0$, tem-se $\|H(u)\|_\infty \leq C$, para todo $u \in C$, o que implica

$$L^{-1}H(u) = o(\|u\|_\infty) \text{ se } \|\text{u}\| \longrightarrow \infty,\ \text{u} \in \text{C}.$$

Além disso, pelo Teorema de Krein-Rutman o raio espectral $r(L^{-1}M)$ de $L^{-1}M$ é um número positivo $\frac{1}{\mu_0} > 0$. Pelo teorema 4.2.2 e observações subsequentes existe uma componente não-limitada $\Sigma_0 \subset \mathbb{R}^+ \times C_0\left(\overline{\Omega}\right)$, constituída de soluções positivas de (4.2.4), e encontrando (μ_0, ∞). Além disso, (μ_0, ∞) é o único ponto de bifurcação no infinito para soluções positivas de (4.2.4). Com efeito, seja (λ_j, u_j) satisfazendo

$$u_j = \lambda_j L^{-1}Mu_j + \lambda_j L^{-1}H(u_j)$$

tal que $0 < \lambda_j \longrightarrow \lambda$ e $\|u_j\|_\infty \longrightarrow \infty$. Fazendo $v_j = \frac{u_j}{\|u_j\|_\infty}$, teremos $v_j > 0,\ \|v_j\|_\infty = 1$ e

$$v_j = \lambda_j L^{-1}Mv_j + \lambda_j L^{-1}\frac{H(u_j)}{\|u_j\|_\infty}.$$

Em virtude da compacidade de L^{-1} obtém-se $v_j \longrightarrow v$ em C$\left(\overline{\Omega}\right)$, eventualmente para uma subsequência. Também

$$Lv_j = \lambda_j Mv_j + \lambda_j \frac{H(u_j)}{\|u_j\|_\infty} \longrightarrow \lambda Mv \text{ em C}\left(\overline{\Omega}\right)$$

e, como L é fechado, obtemos $v \in D(L)$ e $Lv = \lambda Mv$ e daí $v = \lambda L^{-1}Mv$. Desde que $v \geq 0$ e $\|v\|_\infty = 1$, usando o Princípio do Máximo, obtemos $v > 0$ em Ω. Pelo Teorema de Krein-Rutman $\lambda = \mu_0$ o primeiro autovalor de

$$\begin{cases} -\Delta u + Bu = \lambda m(x)u & \text{em} \quad \Omega \\ \qquad\quad u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

(iii) Supondo $f(x,t) \geq \alpha m(x)t,\ (x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+$, e se (λ, u) for solução de (4.2.1), então

$$-\Delta u + Bu = \lambda f(x,u) \Rightarrow$$

$$\int_\Omega (-\Delta u + Bu)\varphi_0 = \lambda \int_\Omega f(x,u)\varphi_0 \geq \lambda\alpha \int_\Omega m(x)u\varphi_0$$

Usando integração por partes, tem-se

$$\int_\Omega u(-\Delta\varphi_0 + B\varphi_0) \geq \lambda\alpha \int_\Omega m(x)u\varphi_0 \Rightarrow$$

$$\int_\Omega u\mu_0 m(x)\varphi_0 \geq \lambda\alpha \int_\Omega m(x)u\varphi_0 \Rightarrow$$

$$\lambda \leq \frac{\mu_0}{\alpha}.$$

■

Observação 4.2.1. Em Corrêa [7] é estudado o problema (4.1.1) em que λ é um parâmetro real, $m \in C(\overline{\Omega})$ e $m(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in \overline{\Omega}$. Nesse caso é necessário que a $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ do problema (4.2.1) seja continuamente diferenciável e $h'(0) = 0$.

Observação 4.2.2. Se $m \leq 0$ sobre $\overline{\Omega}$ podemos mostrar, como no Lemma 9 de Hess e Kato [13], que não existe ponto de bifurcação $(\lambda, 0) \in \mathbb{R}^+ \times C_0^1(\overline{\Omega})$ para soluções positivas de (4.2.1).

Referências Bibliográficas

[1] AMANN, H., *Fixed Point Equations and Nonlinear Eigenvalue Problems in Ordered Banach Spaces*, SIAM Review, 1976.

[2] BARTLE, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, New York: John Wiley, 1955.

[3] BERESTYCKI, H., *Methodes Topologiques et Problemes Aux Limites Non Lineares.*, These presenté pour I'obtention du Diplome de Docteur de 3e Cycle à L'UNIVERSITE DE PARIS VI, 1975.

[4] BIEZUNER, R. J., *Notas de Aula: Equações Diferenciais Parciais I/II*, UFMG, 2007.

[5] BRÉZIS, H., *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications*, Paris: Masson, 1983.

[6] CARVALHO, A., *Análise II - Notas de Aula Primeiro Semestre de 2007*, São Carlos: USP, 2007.

[7] CORRÊA, F. J. S. A., *A Theorem of The Krein-Rutman Type for an Integro-Differential Operador*, pp. 295-303, 1988.

[8] CORRÊA, F. J. S. A., *On the Existence of Steady-State Solutions of a Reaction-Diffusion System, Nonlinear Times and Digest*, 1995.

[9] FIGUEIREDO, D. G. & MITIDIERI, E., *A Maximum Principle for an Elliptic System and Applications to Semilinear Problems*, pp. 836-849, 1986.

[10] FIGUEIREDO, D. G., *Equações Elípticas Não Lineares*, Rio de Janeiro - RJ.

[11] GIDAS B. & NI W. M. & NIREMBERG L., *Symmetry and Related Properties Via Maximum Principle*, 1979.

[12] HASTINGS, S. P., *Some Mathematical Problems from Neurobiology*, Amer. Morth. Monthly, pp. 881-895, 1975.

[13] HESS, P. & KATO, T., *On Some Linear and Nonlinear Eigenvalue Problems with an Indefinite Weight Function*, Comm. P.D.E., 1980.

[14] KREYSZIG, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, New York: Wiley, 1978.

[15] MANCINI, G. & MITIDIERI, E., *Positive Solutions of Some Coercive-Anticoercive Elliptic Systems*, pp. 257-292, 1986-1987.

[16] PAZY, A., *Semigrupos of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, New York: Berlin Heidelberg Tokyo, 1989.

[17] RABINOWITZ, P. H., *Some Global Results for Nonlineaar Eingenvalues Problems*, Journal of Functional Analysis, 1971.

[18] SMOLLER, J., *Shock Waves and Reaction-Diffunsion Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[19] SOTOMAYOR, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Rio de Janeiro, 1979.

[20] TROY, W. G., *Symmetry Properties is Systems of Semillinear Elliptic Equations*, J. Diff. Eqs., 1981.

[21] TURNER, R. E. L., *Transversality and Cone Maps, Arch. Rational Mechanics and Analysis*, 1975.