Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Um Teorema tipo Bernstein em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$

por

Luis Gonzaga Vieira Filho †

sob a orientação do

Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

† Este trabalho contou com apoio da UFRN.

Um Teorema tipo Bernstein em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$

por

Luis Gonzaga Vieira Filho

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Antonio Fernando Pereira de Sousa

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima

Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Dezembro/2012

Resumo

Neste trabalho, usando uma adequada aplicação do chamado princípio do máximo generalizado de Omori-Yau, obtemos um teorema tipo Bernstein para hipersuperfícies completas com curvatura média constante imersas no espaço produto $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$. Além disso, tratamos o caso em que tais hipersuperfícies são gráficos verticais.

Palavras chave: espaço produto Riemanniano, hipersuperfícies completas, curvatura média, gráfico vertical.

Abstract

In this work, as suitable application of the so-called Omori-Yau generalized maximum principle, we obtain a Bernstein type theorem concerning to complete hypersurfaces with constant mean curvature immersed in the product space $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$. Furthermore, we treat the case that such hypersurfaces are vertical graphs.

Keywords: Riemannian product space, complete hypersurface, mean curvature, vertical graph.

Agradecimentos

Inicialmente, agradeço à minha esposa, Lourivalda, pelo apoio e por ter suportado minhas ausências e aos meus filhos Leonardo, Leandro e Lorena pelo incentivo.

Agradeço ao professor Marco Antonio Lázaro Velásquez pela orientação, amizade, incentivo e paciência.

Agradeço aos professores Henrique Fernandes de Lima e Antonio Fernando Pereira de Sousa por terem aceito o convite para participar da banca examinadora de minha dissertação.

Agradeço aos professores André Gustavo e José de Arimatéia pelo apoio quando cheguei a Campina Grande.

Aos professores da Pós-Graduação em Matemática da UFCG, em especial aos professores Angelo Roncalli e Antônio Brandão.

Agradeço aos colegas e amigos Fábio Reis e Luciano Cipriano por terem me suportado sob o mesmo teto.

Aos colegas Romildo, Patrício, Alex, Nancy, Débora, Elizabete, Arthur, Brito, Claudemir, Jogli, Emanuela(Manu), Antônio Marcos(Pajé), Michel, Marcos e Fabrício pela companhia e cumplicidade no dia a dia.

À secretária da Pós-Graduação em Matemática da UFCG, Andrezza Freitas. A David, Sóstenes, Suênia, Renato, Severina(Dona Du) e aos demais funcionários da UAME.

Aos colegas do Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas, do Centro de Ensino Superior do Seridó da UFRN por terem permitido meu afastamento, em especial aos colegas Adriano Thiago e Luciano Barros pelo incentivo.

À vida!

Sumário

Introdução 9

1 Elementos para Variedades Riemannianas **12**

1.1 Campos de Vetores 12

1.2 Tensores 13

1.2.1 Identificações 14

1.2.2 Contração 16

1.2.3 Tensores Covariantes 18

1.2.4 Derivada Tensorial 18

1.3 Métricas Riemannianas 21

1.4 A Conexão de Levi-Civita 22

1.5 Curvatura 24

1.5.1 Curvatura de Ricci 26

1.5.2 Curvatura Seccional 26

1.6 Imersões Isométricas 28

1.7 A Conexão Induzida 30

1.8 Variedades Produto 33

1.8.1 Conexão de Levi-Civita em uma Variedade Produto 35

1.9 Geodésicas 36

1.9.1 A Aplicação Exponencial 37

1.9.2 Variedades Completas 38

1.10 Gradiente, Divergente e o Laplaciano 39

2 Imersões na Variedade Produto $\mathbb{R} \times M^n$ **41**

2.1 Hipersuperfícies em $\mathbb{R} \times M^n$ 41

2.2 A Equação de Gauss e o Tensor de Ricci de uma Hipersuperfície em $\mathbb{R} \times M^n$ 44
2.3 As funções altura e ângulo 45
2.3.1 A função altura 45
2.3.2 A função ângulo 46
2.4 O Princípio do Máximo Generalizado de Omori-Yau 50

3 Um Teorema tipo Bernstein em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ 52
3.1 O Espaço Hiperbólico 52
3.2 Um Teorema tipo Bernstein em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ 54
3.3 Gráficos Verticais Completos em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ 60

Bibliografia 64

Introdução

Neste trabalho estudamos hipersuperfícies com curvatura média constante imersas no produto Riemanniano $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$, onde $\mathbb{H}^n$ é o espaço hiperbólico n-dimensional, o qual é o modelo para as variedades de curvatura seccional constante negativa.

O estudo de hipersuperfícies com curvatura média constante imersas em uma variedade Riemanniana, foi inicialmente feito para as hipersuperfícies mínimas, que são hipersuperfícies com curvatura média identicamente nula e foram alvo de diversos trabalhos de pesquisa, iniciados em 1915, quando N.S. Bernstein provou que os únicos gráficos inteiros e mínimos do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ são os planos. Posteriormente, J. Simons [13] generalizou o resultado de Bernstein para gráficos inteiros e mínimos imersos em $\mathbb{R}^{n+1}$, quando $n \leq 7$ e, em seguida, E. Bombieri, E. De Giorgi e E. Giusti [4] mostraram que o resultado não é válido para $n > 7$. Mas os trabalhos não pararam por aí, por exemplo, em [12], H. Rosenberg provou uma extensão do teorema de Bernstein. De fato, Rosenberg provou que se M^2 é uma superfície com curvatura Gaussiana não negativa, um gráfico mínimo inteiro em $\mathbb{R} \times M^2$ é totalmente geodésico. Neste caso, ou o gráfico é um slice ou M^2 é isométrica a $\mathbb{R}^2$ e o gráfico é um plano. Em [1], L. J. Alías, M. Dajczer e J. Ripoll generalizaram o resultado de Rosenberg para gráficos inteiros, com curvatura média constante, imersos em ambientes Riemannianos que têm curvatura de Ricci não negativa e um campo de Killing globalmente definido.

Em [2], P. Bérard e R. Sa Earp descreveram as hipersuperfícies de rotação com curvatura média constante imersas em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$, usaram-nas como barreiras para provar a existência e caracterização de alguns gráficos verticais com curvatura média constante, e daí provaram resultados de simetria e unicidade de hipersuperfícies compactas, com curvatura média constante, cujo bordo é formado por uma ou duas subvariedades paralelas contidas em slices.

Mais recentemente, J.M. Espinar e H. Rosenberg, em [6], estudaram superfícies com curvatura média constante num produto $\mathbb{R} \times M^2$, onde M^2 é uma variedade Riemanniana completa. Assumindo que a função ângulo não muda de sinal, eles classificaram tais superfícies de acordo com o ínfimo da curvatura Gaussiana de suas projeções horizontais.

Nesta dissertação mostramos um teorema tipo Bernstein em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ obtido recentemente por H.F. de Lima e U.L. Parente, em [7]. Mais precisamente, com ajuda do princípio do máximo generalizado de Omori-Yau, nosso objetivo é mostrar o seguinte (veja Teorema 3.2):

Teorema. *Sejam $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície completa com segunda forma fundamental A limitada e curvatura média H constante. Suponhamos que a função ângulo $\eta = \langle N, \partial_t \rangle$ de Σ^n verifique $\eta \geq \delta > 0$, para uma escolha apropriada do campo de vetores normais unitários N e para alguma constante δ, e que a função altura h satisfaça*

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{\alpha}{n-1} |A|^2,$$

para alguma constante $0 < \alpha < 1$. Então Σ^n é um slice.

Em particular, do último resultado obtemos a seguinte caracterização de slices (veja Corolário 3.3).

Corolário. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície completa com segunda forma fundamental A limitada e curvatura média H constante. Suponhamos que uma das seguintes condições é satisfeita:*

(*a*) *A função ângulo $\eta = \langle N, \partial_t \rangle$ de Σ^n verifique $\eta \geq \delta > 0$, para uma escolha apropriada do campo de vetores normais unitários N e para alguma constante δ.*

(*b*) $H^2 \leq \dfrac{n-1}{n}$.

Se a função altura h de Σ^n é tal que

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{n\alpha}{n-1} H^2,$$

para alguma constante $0 < \alpha < 1$, então Σ^n é um slice.

Além disso, tratando o caso em que a hipersuperfície é um gráfico vertical, como consequência do Teorema acima, mostramos os seguintes resultados (veja Corolários 3.4 e 3.5, respectivamente).

Corolário. *Seja $\Sigma^n(u)$ um gráfico vertical completo em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$, com segunda forma fundamental A limitada e curvatura média H constante. Suponhamos que a função ângulo η de $\Sigma^n(u)$ verifique $\eta \geq \delta > 0$, para uma escolha apropriada do campo de vetores normais unitários N e para alguma constante δ. Se a função u satisfaz*

$$|Du|^2 \leq \frac{1}{n-1}|A|^2,$$

então $u \equiv t_o$ para algum $t_o \in \mathbb{R}$.

Corolário. *Seja $\Sigma^n(u)$ um gráfico vertical completo em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$, com segunda forma fundamental limitada e curvatura média H constante. Suponhamos que uma das seguintes condições é satisfeita:*

(a) A função ângulo $\eta = \langle N, \partial_t \rangle$ de $\Sigma^n(u)$ verifique $\eta \geq \delta > 0$, para uma escolha apropriada do campo de vetores normais unitários N e para alguma constante δ.

(b) $H^2 \leq \dfrac{n-1}{n}$.

Se $|Du|^2 \leq \dfrac{n}{n-1}H^2$, então $u \equiv t_0$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$.

Este trabalho apresenta-se com a seguinte organização. No Capítulo 1, estabelecemos as notações e fatos preliminares que serão utilizados no decorrer do texto. No Capítulo 2, fazemos um breve estudo de hipersuperfícies em uma variedade produto da forma $\mathbb{R} \times M^n$, onde M^n é uma variedade Riemanniana conexa n-dimensional. O Capítulo 3, é dedicado ao estudo do resultado principal desta dissertação, o Teorema tipo Bernstein em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ descrito acima. Por fim, na Seção 3.3, estudamos o caso em que as hipersuperfícies são gráficos verticais em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$.

Capítulo 1

Elementos para Variedades Riemannianas

Para um estudo das variedades Riemannianas, apresentamos brevemente alguns conceitos úteis e necessários para o entendimento dos resultados principais descritos neste trabalho.

1.1 Campos de Vetores

Definição 1.1. *Um* ***campo de vetores*** *em uma variedade diferenciável M^n é um ope- rador linear $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ satisfazendo, para todas $f, g \in C^\infty(M)$, a regra de Leibniz*

$$X(fg) = fX(g) + gX(f),$$

onde $C^\infty(M)$ denota o anel das funções de classe C^∞ definidas em M^n.

Denotaremos o conjunto dos campos de vetores em M por $\mathfrak{X}(M)$. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$, é imediato que que $fX : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, dado por $(fX)(g) = fX(g)$, é um campo de vetores em M, de modo que $\mathfrak{X}(M)$ é um $C^\infty(M)$-módulo.

Fixemos $p \in M$. O **germe de funções** suaves $C^\infty(p)$ é o conjunto-quociente de $C^\infty(M)$ pela relação de equivalência que identifica $f, g \in C^\infty(M)$, caso $f = g$ em uma vizinhança aberta de p. Obviamente, $C^\infty(p)$ é um espaço vetorial. Um **vetor** v em p é um operador linear $v : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$, tal que $v(fg) = fv(g) + gv(f)$, para todas

$f, g \in C^\infty(p)$. O conjunto dos vetores v em p é um espaço vetorial, o **espaço tangente** a M em p, denotado por T_pM.

Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$ são tais que $f = g$ em uma vizinhança aberta $U \subset M$ de p, pode-se mostrar que $X(f) = X(g)$. Assim, fica bem definido o vetor $X_p \in T_p(M)$ pela regra $X_p(f) = X(f)(p)$. Reciprocamente, dados $p \in M$ e $v \in T_p(M)$, é possível mostrar que existe um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X_p = v$.

Dados uma curva diferenciável $c : I \to M$ e um e $t_0 \in I$, definimos o **vetor tangente** $c'(t_0) \in T_{c(t_0)}M$ por

$$c'(t_0)(f) = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)\Big|_{t=t_0}.$$

Tal vetor $c'(t_0)$ é o **vetor velocidade** de c em t_0. Um **campo ao longo de** c é a escolha, para cada $t \in I$, de um vetor $Y_t \in T_{c(t)}(M)$, tal que se $f \in C^\infty(M)$, então $t \mapsto Y_t(f)$ é diferenciável em I. É imediato que $t \mapsto c'(t)$ é um campo ao longo de c, o **campo velocidade** de c.

Se $\varphi : U \to \Omega$ é uma carta coordenada em M, definimos os **campos coordenados** $\partial_1, \ldots, \partial_n \in \mathfrak{X}(U)$ por

$$\partial_i(f) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi^{-1}),$$

onde o segundo membro denota a derivação parcial ordinária em $\mathbb{R}^n$. Sempre que não houver perigo de confusão, escreveremos a igualdade acima simplesmente pondo $\partial_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ (i.e., a composição de f com a inversa da carta coordenada, no segundo membro, ficará subentendida). Para $p \in U$, pode ser mostrado que $\{(\partial_1)_p, \ldots, (\partial_n)_p\}$ é uma base de $T_p(M)$, de modo que $\dim T_p(M) = n$.

Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, definimos o **colchete** de X e Y como a aplicação $[X, Y] : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, dada para $f \in C^\infty(M)$ por

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

É imediato verificar que $[X, Y]$ é um campo de vetores em M. É também claro que $[\partial_i, \partial_j] = 0$ sempre que ∂_i, ∂_j forem campos coordenados em $U \subset M$.

1.2 Tensores

Definição 1.2. *Dados inteiros $r, s \geq 0$, não ambos nulos e um espaço vetorial V sobre um corpo K, chamamos de tensor do tipo (r,s) sobre V a uma função K-multilinear*

$A : (V^*)^r \times V^s \to K$.

De modo análogo, definimos o **campo de tensores** em uma variedade diferenciável M^n como sendo uma aplicação $A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to C^\infty(M)$ multilinear no anel das funções $C^\infty(M)$, onde $\mathfrak{X}^*(M)$ denota o dual de $\mathfrak{X}(M)$. Denotamos também por $\mathfrak{T}^r_s(M)$ o conjunto de todos os tensores do tipo (r, s) sobre M. Por convenção $\mathfrak{T}^0_0(M) = C^\infty(M)$.

Exemplo 1. *Sejam X um campo e θ uma 1-forma sobre M, então $A : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ definida por $A(\theta, X) = \theta(X)$ é um tensor do tipo (1,1).*

Podemos somar de maneira natural dois tensores desde que ambos sejam do mesmo tipo, enquanto definimos a multiplicação para quaisquer dois tensores da seguinte forma: dado dois tensores $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ e $B \in \mathfrak{T}^{r'}_{s'}(M)$, definimos

$$A \otimes B : \mathfrak{X}^*(M)^{r+r'} \times \mathfrak{X}(M)^{s+s'} \to C^\infty(M)$$

pondo

$$A \otimes B(\theta^1, ..., \theta^{r+r'}, X_1, ..., X_{s+s'}) = A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s).B(\theta^{r+1}, ..., \theta^{r+r'}, X_{s+1}, ..., X_{s+s'}).$$

1.2.1 Identificações

Temos $\mathfrak{T}^0_1(M) = \mathfrak{X}^*(M)$ e identificamos $\mathfrak{T}^1_0(M) \equiv \mathfrak{X}(M)$, pois a cada $V \in \mathfrak{X}(M)$ associamos $\overline{V} = A : \mathfrak{X}^*(M) \to C^\infty(M)$ da forma $\overline{V}(\theta) = \theta(V)$. Esta identificação é injetiva e, portanto, bijetiva, uma vez que M tem dimensão finita.

Os tensores do tipo $(0, s)$ são chamados de **covariantes** enquanto os do tipo $(r, 0)$ são chamados **contravariantes**. Notemos que, se A for covariante e B for contravariante, então $A \otimes B = B \otimes A$. No entanto, a comutatividade nem sempre ocorre. De fato, se ∂_1 e ∂_2 representam dois campos coordenados de uma variedade M^n e dx^1, dx^2 são seus duais, então

$$\begin{aligned} dx^1 \otimes dx^2(\partial_1, \partial_2) &= dx^1(\partial_1)dx^2(\partial_2) = 1, \\ dx^2 \otimes dx^1(\partial_1, \partial_2) &= dx^2(\partial_1)dx^1(\partial_2) = 0, \end{aligned}$$

logo $dx^1 \otimes dx^2 \neq dx^2 \otimes dx^1$.

Similarmente aos campos de vetores, os campos de tensores podem ser vistos pontualmente conforme nos sugere a seguinte

Proposição 1.3. *Sejam* $p \in M^n$*,* $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$*,* $\bar{\theta}^1, ..., \bar{\theta}^r$ *e* $\theta^1, ..., \theta^r$ *1-formas tais que* $\bar{\theta}^i_p = \theta^i_p$ $(1 \leq i \leq r)$ *e* $\bar{X}_1, ..., \bar{X}_s$ *e* $X_1, ..., X_s$ *campos tais que* $\bar{X}^i_p = X^i_p$ $(1 \leq i \leq s)$ *então*

$$A(\bar{\theta}^1, ..., \bar{\theta}^r, \bar{X}_1, ..., \bar{X}_s)(p) = A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s)(p).$$

A prova desse resultado é equivalente à do seguinte

Lema 1.1. *Se alguma das* 1*-formas* $\theta^1, ..., \theta^r$ *ou algum dos campos de vetores* $X_1, ..., X_s$ *se anular em* $p \in M$*, então*

$$A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s)(p) = 0.$$

Demonstração. Suponhamos $X_s|_p = 0$ e seja $\xi = (x^1, ..., x^n)$ um sistema de coordenadas numa vizinhança U de p. Então

$$X_s = \sum_{i=1}^{n} X^i \partial_i \quad em\ U,$$

onde $X^i = X_s(x^i) \in C^\infty(U)$. Agora, consideremos f uma função salto com suporte em U. Então $fX^i \in C^\infty(M)$ e $f\partial_i \in \mathfrak{X}(M)$. Com isto, temos

$$\begin{aligned} f^2 A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s) &= A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., f^2 X_s) \\ &= A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., \textstyle\sum_{i=1}^n fX^i f\partial_i) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n fX^i A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., f\partial_i). \end{aligned}$$

Como $X_s|_p = 0$, temos $X^i(p) = 0$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, logo $f^2(p)A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s)(p) = 0$ e, como $f(p) = 1$, obtemos $A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s)(p) = 0$ □

Para provarmos a Proposição 1.3 basta observarmos a soma telescópica e denotando $\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s$ simplesmente por $X_1, ..., X_k$ onde $k = r + s$ temos

$$\begin{aligned} A(X_1, ..., X_k) - A(\bar{X}_1, ..., \bar{X}_k) &= A(X_1 - \bar{X}_1, X_2, ..., X_k) \\ &\quad + A(\bar{X}_1, X_2 - \bar{X}_2, X_3, ..., X_k) \\ &\quad + ... + A(\bar{X}_1, ..., \bar{X}_{k-1}, X_k - \bar{X}_k), \end{aligned}$$

o que prova o resultado. Desta forma, está bem definido o operador multilinear

$$A_p : (T_pM^*)^r \times T_pM^s \to \mathbb{R}.$$

Definição 1.4. *Seja* $\xi = (x^1, ..., x^n)$ *um sistema de coordenadas em* $U \subset M$. *Sendo* $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, *as componentes de* A *com relação a* ξ *são as funções*

$$A^{i_1,...,i_r}_{j_1,...,j_s} = A(dx^{i_1}, ..., dx^{i_r}, \partial_{j_1}, ..., \partial_{j_s}) \quad em \quad U,$$

onde $1 \leq i_1, ..., i_r, j_1, ..., j_s \leq n$.

Notemos que, para o caso de (0,1) tensores, a identificação nos fornece

$$\theta = \sum \theta_i dx^i.$$

E quando se tratar de um campo de vetores X temos $X(dx^i) = dx^i(X) = X(x^i) = X^i$.

Consideremos agora o seguinte exemplo: seja $A \in \mathfrak{T}^1_2(U)$, então

$$A = \sum A^k_{ij} \partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j. \tag{1.1}$$

Para mostrarmos a igualdade basta aplicarmos ambos os lados da equação em elementos da base associada ao sistema de coordenadas ξ comprovando a igualdade anterior, e com o mesmo método podemos mostrar o seguinte

Lema 1.2. *Sejam* $\xi = (x^1, ..., x^n)$*um sistema de coordenadas e* $A \in \mathfrak{T}^r_s(U)$ *então*

$$A = \sum A^{i_1,...,i_r}_{j_1,...,j_s} \partial_{i_1} \otimes ... \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_s}$$

onde $1 \leq i_a, j_b \leq n$.

1.2.2 Contração

Uma contração é uma aplicação que transforma um (r, s) tensor num $(r-1, s-1)$ tensor satisfazendo algumas propriedades apresentadas a seguir:

Lema 1.3. *Existe uma única aplicação* $C^\infty(M)$*-linear* $C : \mathfrak{T}^1_1(M) \to C^\infty(M)$ *tal que* $C(\theta \otimes X) = \theta(X)$ *para todos* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$.

Demonstração. Numa vizinhança coordenada U o tensor pode ser escrito

$$A = \sum A^i_j \partial_i \otimes dx^j.$$

Como $C(\partial_i \otimes dx^j) = dx^j(\partial_i) = \delta_{ij}$ temos que $C(A) = \sum A^i_i$, o que prova a unicidade. Para a existência, definamos C pela expressão $C(\partial_i \otimes dx^j) = dx^j(\partial_i) = \delta_{ij}$, restando-nos apenas mostrar a independência do sistema de coordenadas. De fato,

$$\begin{aligned}
\sum_m A\left(dy^m, \frac{\partial}{\partial y^m}\right) &= \sum_m A\left(\sum_i \frac{\partial y^m}{\partial x^i} dx^i, \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial y^m}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\\
&= \sum_{i,j,m} \frac{\partial y^m}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial y^m} A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{i,j} \delta_{ij} A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\\
&= \sum_i A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^i}\right).
\end{aligned}$$

□

Podemos, assim, ver que esta contração está intimamente ligada à ideia de traço. No caso geral das contrações, fixamos $r-1$ $1-$formas e $s-1$ campos de vetores, e consideremos o tensor

$$(\theta, X) \to A(\theta^1, ..., \theta^{i-1}, \theta, \theta^{i+1}, ..., \theta^{r-1}, X_1, ..., X_{j-1}, X, X_{j+1}, ..., X_{s-1}).$$

Definição 1.5. *A contração*

$$C^i_j(A)(\theta^1, ..., \theta^{r-1}, X_1, ..., X_{s-1}) = C({}^i_j A(\theta^1, ..., \theta^{r-1}, X_1, ..., X_{s-1}))$$

onde ${}^i_j A(\theta^1, ..., \theta^{r-1}, X_1, ..., X_{s-1})$ *é o (1,1) tensor*

$$\begin{aligned}
(\theta, X) \to\ & {}^i_j A(\theta^1, ..., \theta^{r-1}, X_1, ..., X_{s-1})(\theta, X)\\
&= A(\theta^1, ..., \theta^{i-1}, \theta, \theta^i, ..., \theta^{r-1}, X_1, ..., X_{j-1}, X, X_j, ..., X_{s-1}).
\end{aligned}$$

é chamada ***contração de*** A ***sobre*** i, j.

De modo análogo ao caso feito anteriormente temos a seguinte expressão para a contração em coordenadas locais

Lema 1.4. *Sejam* $(\underline{i}, \underline{j}) \in I_r \times I_s$ *para* $I_m = \{1, ..., m\}$ *e* $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ *com as seguintes componentes*

$$A^{i_1,...,i_r}_{j_1,...,j_s}$$

então $C^{\underline{i}}_{\underline{j}}(A)$ *tem as seguintes componentes*

$$\sum_{m=1}^{n} A^{i_1,...,i_{\underline{i}-1},m,i_{\underline{i}+1},...,i_r}_{j_1,...,j_{\underline{j}-1},m,j_{\underline{j}+1}...,j_s}$$

1.2.3 Tensores Covariantes

Consideremos uma aplicação diferenciável $\psi : M^n \to \overline{M}^m$ entre variedades diferenciáveis M^n e $\overline{M}^m$. O **pull-back** pela ψ, denotado por ψ^* é uma aplicação capaz de transportar tensores covariantes em $\overline{M}^m$ para M^n como vemos na seguinte

Definição 1.6. *Sejam $\psi : M^n \to \overline{M}^m$ uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis M^n e $\overline{M}^m$, e $A \in \mathfrak{T}_s^0(\overline{M})$. Consideremos $\psi^* A \in \mathfrak{T}_s^0(M)$ definida por*

$$\psi^* A(v_1, ..., v_s) = A(d\psi v_1, ..., d\psi v_s).$$

*Então $\psi^* A$ é o **pull-back** de A por ψ. Para s=0 denotamos simplesmente $\psi^* A = A \circ \psi$.*

A seguir, enunciamos algumas propriedades do pull-back, cujas demostrações seguem diretamente da última definição.

Lema 1.5. *Sejam $\psi : M^n \to \overline{M}^m$, $\varphi : \overline{M}^m \to \widetilde{M}^{\tilde{m}}$ aplicações diferenciáveis e A, B tensores covariantes em $\overline{M}^m$ então:*

(i) ψ^* *é $\mathbb{R}$-linear;*

(ii) $\psi^*(A \otimes B) = \psi^*(A) \otimes \psi^*(B)$;

(iii) $(\varphi \circ \psi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

Geralmente não podemos definir um operador que transporte tensores de quaisquer tipo de $\overline{M}^m$ para M^n ou vice-versa. Porém se a variedade for Riemanniana, como veremos mais adiante, todos os tensores podem ser considerados covariantes.

1.2.4 Derivada Tensorial

Analogamente às metodologias empregadas para as funções reais, calculemos também as derivadas dos tensores, generalizando o Cálculo Diferencial para funções e campos vetoriais.

Definição 1.7. *Uma **derivação tensorial** $\mathfrak{D}$ em uma variedade M^n é um conjunto de aplicações $\mathbb{R}$-lineares*

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_s^r : \mathfrak{T}_s^r(M) \to \mathfrak{T}_s^r(M) \ \ (r \geq 0, s \geq 0)$$

tal que para quaisquer tensores A e B:

(*i*) $\mathfrak{D}(A \otimes B) = \mathfrak{D}(A) \otimes B + A \otimes \mathfrak{D}(B)$;

(*ii*) $\mathfrak{D}(CA) = C(\mathfrak{D}(A))$ *para qualquer contração* C.

Para o caso $r = s = 0$, $\mathfrak{D}$ é uma derivação atuando em $C^\infty(M)$ e, neste caso, existe um único campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $Vf = \mathfrak{D}f$, $\forall f \in C^\infty(M)$.

De modo geral, $C^\infty(M)$-linearidade não é uma característica das derivações tensoriais, assim elas não podem ser determinadas pontualmente como os tensores. No entanto, é possível caracterizá-las localmente conforme a seguinte proposição.

Proposição 1.8. *Sejam* $\mathfrak{D}$ *uma derivação tensorial em* M *e* U *uma vizinhança de um ponto* $p \in M$. *Então existe uma única* $\mathfrak{D}_U$ *em* U *tal que*

$$\mathfrak{D}_U(A|_U) = \mathfrak{D}(A)|_U, \quad \textit{para todo tensor } A \quad \textit{em} \quad M.$$

Neste caso $\mathfrak{D}_U$ *é dita a restrição de* $\mathfrak{D}$ *a* U.

Demonstração. Primeiramente notemos que se $f \equiv c$ localmente, então $\mathfrak{D}(f) = 0$. De fato, suponhamos inicialmente que f é a função nula, logo temos $\mathfrak{D}(0) = \mathfrak{D}(0.0) = \mathfrak{D}(0).0 + 0.\mathfrak{D}(0) = 0$. Se $c = 1$ obtemos de modo análogo $\mathfrak{D}(1) = 2\mathfrak{D}(1)$ daí $\mathfrak{D}(1) = 0$. Seja agora c arbitrário, assim temos $\mathfrak{D}(c) = \mathfrak{D}(c.1) = c\mathfrak{D}(1) = 0$ daí $\mathfrak{D}(c) = 0$.

Suponhamos agora que f é localmente constante em p. Notemos que podemos supor que esta constante é nula pois se $f(V_p) = \{c\}$ temos que $\tilde{f} = f - c$ é localmente nula e $\mathfrak{D}(\tilde{f})_q = \mathfrak{D}(f)_q \ \forall \ q \in M^n$. Consideremos g uma função salto em p tal que seu suporte seja um subconjunto de V_p e assim $fg \equiv 0$, logo $0 = \mathfrak{D}(fg)_p = \mathfrak{D}(f)_p g(p) + f(p)\mathfrak{D}(g)_p = \mathfrak{D}(f)_p$.

Sejam $B \in \mathfrak{T}^r_s(U)$ e f uma função salto com suporte em U e $f = 1$ numa vizinhança de p fixado em U, então $fB \in \mathfrak{T}^r_s(M)$. Logo

$$(\mathfrak{D}_U B)_p = \mathfrak{D}(fB)_p.$$

Mostremos que a definição não depende da escolha da função f. Sejam f, g funções salto em p. Então $\mathfrak{D}(gfB)_p = g(p)\mathfrak{D}(fB)_p + \mathfrak{D}(g)_p f(p) B|_p = \mathfrak{D}(fB)_p$ mostrando assim a independência da função salto f devido a comutatividade do produto de funções. Com um simples cálculo podemos comprovar os seguintes fatos

(*i*) $\mathfrak{D}_U B$ é um tensor em U;

(*ii*) $\mathfrak{D}_U$ é uma derivação tensorial em U;

(*iii*) $\mathfrak{D}_U(B|_U) = \mathfrak{D}(B)_U$ para todo tensor B em M;

(*iv*) $\mathfrak{D}_U$ é único.

□

Vejamos uma forma prática de calcular derivações de tensores.

Proposição 1.9 (Regra do Produto)**.** *Sejam $\mathfrak{D}$ uma derivação tensorial em M^n e $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, então*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}[A(\theta^1,...,\theta^r,X_1,...,X_s)] &= (\mathfrak{D}A)(\theta^1,...,\theta^r,X_1,...,X_s) \\
&+ \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1,...,\mathfrak{D}\theta^i,...,\theta^r,X_1,...,X_s) \\
&+ \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1,...,\theta^r,X_1,...,\mathfrak{D}X_j...,X_s).
\end{aligned}$$

Demonstração. Por simplicidade, consideremos $r = s = 1$. Notemos que $A(\theta, X) = \bar{C}(A \otimes \theta \otimes X)$, onde $\bar{C} = C^1_2 C^2_1$ é uma composta de duas contrações. Daí

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}(A(\theta,X)) &= \mathfrak{D}C(A \otimes \theta \otimes X) \\
&= C(\mathfrak{D}(A) \otimes \theta \otimes X) + C(A \otimes \mathfrak{D}\theta \otimes X) + C(A \otimes \theta \otimes \mathfrak{D}X) \\
&= \mathfrak{D}(A)(\theta,X) + A(\mathfrak{D}\theta,X) + A(\theta,\mathfrak{D}X),
\end{aligned}$$

o que prova o resultado neste caso específico sem perda de generalidade. □

Corolário 1.10. *Se $\mathfrak{D}_1$ e $\mathfrak{D}_2$ coincidem em funções e em campos de vetores, então $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$.*

Demonstração. Basta observarmos que $\mathfrak{D}(\theta(X)) = (\mathfrak{D}\theta)(X) + \theta\mathfrak{D}(X)$ □

Teorema 1.11. *Dados $V \in \mathfrak{X}(M)$ e uma função $\mathbb{R}$-linear $\delta : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$*

$$\delta(fX) = V(f)X + f\delta(X), \quad \forall (X,f) \in \mathfrak{X}(M) \times C^\infty(M)$$

Então existe uma única derivação tensorial $\mathfrak{D}$ em M tal que $\mathfrak{D}^0_0 = V$ e $\mathfrak{D}^1_0 = \delta$.

Demonstração. Seja $\theta \in \mathfrak{T}_1^0(M)$ e definindo

$$\mathfrak{D}(\theta)(X) = V(\theta X) - \theta(\delta(X))$$

Através de um cálculo direto vemos que $\mathfrak{D}(\theta)$ é uma $1-$forma e $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0^1$ satisfaz as propriedades requeridas para uma derivação. Para um tensor $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$, definamos

$$\begin{aligned}(\mathfrak{D}A)(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s) &= \mathfrak{D}[A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s)] \\ &- \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1, ..., \mathfrak{D}\theta^i, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s) \\ &- \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., \mathfrak{D}X_j ..., X_s).\end{aligned}$$

Após alguns cálculos, verificamos que $\mathfrak{D}(A) \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ e, daí, $\mathfrak{D}$ é uma derivação. $\square$

1.3 Métricas Riemannianas

As métricas Riemannianas em variedades diferenciáveis, que passamos a definir nesta seção, são peças chaves para obter os resultados principais deste trabalho.

Definição 1.12. *Uma **métrica Riemanniana** g (ou **tensor métrico Riemanniano**) em uma variedade diferenciável M^n é um $(0,2)$ tensor g definido em M^n que é simétrico (isto é, $g(X,Y) = g(Y,X)$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$) e definido positivo (isto é, $g(X,X) > 0$ se $X \neq 0$). Uma variedade diferenciável M^n munida de uma métrica Riemanniana g é chamada uma **variedade Riemanniana**.*

Uma métrica Riemanniana g determina um produto interno em cada espaço tangente T_pM, $p \in M^n$, que é típicamente denotado por $\langle X, Y \rangle := g(X,Y)$, para todos $X, Y \in T_pM$.

Numa vizinhança coordenada $(x^1, ..., x^n)$ de M^n a métrica Riemanniana admite a seguinte expressão:

$$\langle \, , \, \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

onde as funções

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle.$$

são chamadas as **componentes** de g. Assim, se $X = \sum_{i=1}^{n} X^i \partial_i$ e $Y = \sum_{j=1}^{n} Y^j \partial_j$ são campos diferenciáveis em M^n então

$$\begin{aligned}
\langle X, Y \rangle &= \left(\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i \otimes dx^j \right) (X, Y) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i(X) dx^j(Y) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} X^i Y^j.
\end{aligned}$$

Uma vez que $\langle\, , \rangle$ é definida positiva, a existência da inversa da matriz $(g_{ij})_{n\times n}$ é garantida. Suas componentes são funções diferenciáveis que denotaremos por g^{ij}.

Exemplo 2. *Um exemplo óbvio de uma variedade Riemanniana é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ com métrica Riemanniana*

$$\langle\, , \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

onde as funções componentes são dadas por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \ se \ i = j \,, \\ 0 & , \ se \ i \neq j \,. \end{cases}$$

Neste caso, se $X = (X^1, \ldots, X^n)$ e $Y = (Y^1, \ldots, Y^n)$ são campos diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$ então

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} X^i Y^j = \sum_{i=1}^{n} X^i Y^i$$

coincide com o produto interno ussual em $\mathbb{R}^n$ de X e Y.

1.4 A Conexão de Levi-Civita

Sejam V, W campos de vetores numa variedade Riemanniana M^n, em cada ponto $p \in M^n$ queremos calcular a taxa de variação de W na direção de V_p. Isso pode ser feito naturalmente em $\mathbb{R}^n$ com a derivação de um campo com relação ao outro. No contexto de variedades, devemos introduzir o conceito de conexão

Definição 1.13. *Uma **conexão** ∇ em uma variedade M é uma função*

$$\begin{aligned}
\nabla : \ \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \qquad \mathfrak{X}(M) \\
(V, W) \qquad &\mapsto \ \nabla(V, W) = \nabla_V W
\end{aligned}$$

tal que

(D_1) $\nabla_V W$ *é* $C^\infty(M)$*-linear em* V*;*

(D_2) $\nabla_V W$ *é* $\mathbb{R}$*-linear em* W*;*

(D_3) $\nabla_V(fW) = V(f)W + f\nabla_V W$*, para toda* $f \in C^\infty(M)$*.*

$\nabla_V W$ *é chamada a* ***derivada covariante*** *de* W *em relação à* V *para a conexão* ∇*.*

O axioma (D_1) nos diz que $\nabla_V W$ é um tensor em V, então podemos calcular seu valor pontualmente, isto é, se $v \in T_pM$ temos $\nabla_v W \in T_pM$.

A conexão estará diretamente ligada à métrica desde que acrescentemos uma compatibilidade com a métrica e outra propriedade relacionada ao colchete de Lie, conforme nos mostra o teorema da existência e unicidade da conexão de Levi-Civita. Mas primeiro vejamos um resultado algébrico.

Proposição 1.14. *Seja* M^n *uma variedade Riemanniana. Se* $V \in \mathfrak{X}(M)$ *seja* V^* *a* 1*-forma satisfazendo*

$$V^*(X) = \langle V, X\rangle, \quad \textit{para todo } X \in \mathfrak{X}(M).$$

Então a função $V \to V^*$ *é um isomorfismo* $C^\infty(M)$*-linear de* $\mathfrak{X}(M)$ *para* $\mathfrak{X}^*(M)$*.*

Demonstração. Ora, esta aplicação é $C^\infty(M)$-linear, pois é dada por 1-forma que é $C^\infty(M)$-linear.

(a) Para a injetividade, suponhamos que $V^* = W^*$, assim, para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$, temos $\langle V, Z\rangle = \langle W, Z\rangle$ o que implica $\langle V - W, Z\rangle = 0$ para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$, e daí $V = W$.

(b) Agora, vamos provar que dada uma 1-forma $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ existe um único campo vetorial $V \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\theta(X) = \langle V, X\rangle$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. A unicidade segue do item anterior. Para a outra parte é suficiente encontrar um V em uma vizinhança coordenada U arbitrária. Seja $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$. Então $\theta = \sum \theta_i dx^i$ em U. Tomemos $V = \sum_{i,j} g^{ij}\theta_i\partial_j$. Então, desde que as matrizes (g_{ij}) e (g^{ij}) são uma inversa da outra, temos

$$\langle V, \partial_k\rangle = \langle \sum_{i,j} g^{ij}\theta_i\partial_j, \partial_k\rangle = \sum_{i,j} g^{ij}\theta_i\langle\partial_j, \partial_k\rangle = \sum_{i,j}\theta_i g^{ij}g_{jk} = \sum_i \theta_i\delta_{ik} = \theta_k = \theta(\partial_k).$$

Segue pela $C^\infty(M)$-linearidade que $\langle V, X\rangle = \theta(X)$ para todo X em U. $\square$

Com a adição de duas novas propriedades temos a unicidade da conexão, conforme o seguinte teorema.

Teorema 1.15 (Levi-Civita)**.** *Em uma variedade Riemanniana M^n, existe uma única conexão ∇ tal que*

(D_4) $[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V$,

(D_5) $X\langle V, W\rangle = \langle \nabla_X V, W\rangle + \langle V, \nabla_X W\rangle$,

para todos $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$. ∇ é chamada de ***conexão de Levi-Civita*** *e é caracterizada pela* ***equação de Koszul***

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_V W, X\rangle &= V\langle W, X\rangle + W\langle X, V\rangle - X\langle V, W\rangle \\ &\quad - \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle + \langle X, [V, W]\rangle . \end{aligned}$$

Para provarmos este resultado, basta calcularmos o lado direito desta equação. Já a existência é obtida definindo $\nabla_V W$ pela expressão do segundo membro da equação anterior. Um cálculo direto, porém extenso, nos mostra que ∇ satisfaz as propriedades requeridas.

1.5 Curvatura

A seguir passamos a estudar a noção de Curvatura em uma variedade Riemanniana M^n, que intuitivamente mede quanto M^n deixa de ser euclidiana.

Lema 1.6. *Seja M^n uma variedade Riemanniana com a conexão de Levi-Civita ∇. A aplicação $R : \mathfrak{X}^3(M) \to \mathfrak{X}(M)$, denotada e definida por* [1]

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z,$$

é um $(1, 3)$ tensor em M. Este tensor é chamado ***tensor curvatura*** *de M^n.*

A demostração do Lema 1.6 segue diretamente ao identificar R com a aplicação $C^\infty(M)$-multilinear

$$\begin{aligned} \overline{R} :\ \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^3 &\to C^\infty(M) \\ (\theta, X, Y, Z) &\mapsto \overline{R}(\theta, X, Y, Z) = \theta(R(X, Y)Z). \end{aligned}$$

[1] Esta definição está de acordo com [5] e [9].

Devido ao caráter pontual, para $x, y \in T_pM$ podemos considerar o operador linear

$$R(x,y) : T_pM \to T_pM$$

que será chamado de **operador de curvatura**. Vejamos algumas propriedades deste operador.

Proposição 1.16. *Se $x, y, z, v, w \in T_pM$ então*

(*i*) $R(x,y) = -R(y,x)$;

(*ii*) $\langle R(x,y)v, w\rangle = -\langle R(x,y)w, v\rangle$;

(*iii*) $R(x,y)z + R(y,z)x + R(z,x)y = 0$;

(*iv*) $\langle R(x,y)v, w\rangle = \langle R(v,w)x, y\rangle$.

A título de exemplo, faremos a demonstração de (iii). Consideremos X, Y, Z extensões dos vetores x, y, z de forma que os colchetes entre eles sejam nulos. Sejam $F : \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ uma função $\mathbb{R}$-linear e

$$\mathfrak{S}F(X,Y,Z) := F(X,Y,Z) + F(Y,Z,X) + F(Z,X,Y)$$

a soma das permutações cíclicas de X, Y, Z. Uma permutação cíclica de X, Y, Z deixa $\mathfrak{S}F(X,Y,Z)$ sem alteração. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}R(X,Y)Z &= \mathfrak{S}(\nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z)\\
&= \mathfrak{S}\nabla_Y\nabla_X Z - \mathfrak{S}\nabla_X\nabla_Y Z \;=\; \mathfrak{S}\nabla_X\nabla_Z Y - \mathfrak{S}\nabla_X\nabla_Y Z\\
&= \mathfrak{S}\nabla_X(\nabla_Z Y - \nabla_Y Z) \;=\; \mathfrak{S}\nabla_X[Z,Y] = 0.
\end{aligned}$$

Usando estas notações temos a segunda identidade de Bianchi como nos diz a seguinte proposição.

Proposição 1.17. *Se $x, y, z \in T_pM$ então $\mathfrak{S}(\nabla_z R)(x,y) = 0$.*

Para a demonstração, que usa uma vizinhança normal, veja [9].

Agora vejamos uma expressão que nos diz que o tensor curvatura pode ser expresso em termos do tensor métrico g.

Lema 1.7. *Em uma vizinhança coordenada* $(x^1, ..., x^n)$ *temos*

$$R(\partial_k, \partial_i)\partial_j = \sum_i R^i_{jkl}\partial_i,$$

onde as componentes de R *são*

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^i_{kj} - \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{lj} + \sum_m \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj} - \sum_m \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj}$$

A demonstração segue direto do cálculo baseado na expressão de $\nabla_{\partial_l}(\nabla_{\partial_k}\partial_j)$ em termos dos **símbolos de Christoffel** Γ^i_{jk}, definidos por $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_l \Gamma^l_{ij}\partial_l$.

1.5.1 Curvatura de Ricci

Definimos o **tensor curvatura de Ricci** como sendo uma forma bilinear

$$Ric : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

dada pela contração $C^1_2 R$ do tensor curvatura. Desta forma, podemos calcular o tensor de Ricci como sendo o traço

$$Ric(X, Z) = tr\,\{Y \to R_{XY}Z\} = \sum_{i=1}^n \langle R(X, E_i)Z, E_i\rangle,$$

onde $\{E_i\}_{i=1}^n$ é um referencial ortonormal ao redor de um ponto $p \in M^n$.

1.5.2 Curvatura Seccional

Em T_pM consideremos a função $Q(v, w) = \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2$, que representa o quadrado da área do paralelogramo bi-dimensional determinado por $v, w \in T_pM$.

Proposição 1.18. *Seja* Π *um* 2*-plano em* T_pM *e sejam* $v, w \in \Pi$ *dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(v, w) = \frac{\langle R(v, w)v, w\rangle}{Q(v, w)}$$

independe da escolha da base de Π.

A demonstração da Proposição1.18 é obtida observando que $K(v, w)$ é invariante pelas transformações: $\{v, w\} \to \{w, v\}$, $\{v, w\} \to \{\lambda v, w\}$ e $\{v, w\} \to \{v + \lambda w, w\}$.

Definição 1.19. *Dado um ponto $p \in M^n$ e um 2-plano $\Pi \subset T_pM$, o número real $K(v,w) = K(\Pi)$ é chamado **curvatura seccional** de Π em p, onde $\{v,w\}$ é uma base qualquer de Π. Dizemos que uma variedade Riemannniana M^n é **flat** quando $K \equiv 0$*

O próximo resultado é válido para qualquer função satisfazendo a linearidade e as simetrias do tensor R. No entanto, o enunciaremos apenas para este caso particular.

Proposição 1.20. *Se $K = 0$ em $p \in M^n$ então $R = 0$ em p.*

Demonstração. Temos que $\langle R(v,w)v,w\rangle = 0$ para quaisquer $v,w \in T_pM$ que geram 2-planos. Agora, usando polarizações algébricas obtemos que $\langle R(x,y)v,w\rangle = 0$ para todos $x,y,v,w \in T_pM$, o que mostra o resultado. □

A importância da curvatura seccional provém do fato que o conhecimento de $K(\Pi)$, para todo Π, determina completamemte a curvatura R. Para mostrar isso precisamos da seguinte terminologia.

Dizemos que uma aplicação multilinear $F : (T_pM)^4 \to \mathbb{R}$ é uma **função tipo curvatura** se F verifica as simetrias da Proposição 1.16. Assim, da Proposição 1.20 obtemos que se $F(v,w,v,w) = 0$ para todos $v,w \in T_pM$ que geram 2-planos então $F = 0$.

Agora podemos mostrar que K determina R no seguinte sentido.

Corolário 1.21. *Seja F uma função tipo curvatura em T_pM tal que*

$$K(v,w) = \frac{F(v,w,v,w)}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}$$

para todos v,w que geram um 2-plano em T_pM. Então $\langle R(x,y)v,w\rangle = F(x,y,v,w)$ para todos $x,y,v,w \in T_pM$.

Demonstração. Consideremos

$$\begin{array}{rccccc} \widehat{F}: & (T_pM)^4 & \to & \mathbb{R} & & \\ & (v,w,x,y) & \mapsto & \widehat{F}(v,w,x,y) & := & F(v,w,x,y) - \langle R(x,y)v,w\rangle. \end{array}$$

Temos que $\widehat{F}$ é também uma função tipo curvatura. Por hipótese, se v e w geram um 2-plano em T_pM então $\widehat{F}(v,w,v,w) = 0$. Logo, da Proposição 1.20 obtemos que $\widehat{F} = 0$, e o resultado segue. □

Toda esta discussão nos diz qual a expressão para R no caso de variedades de curvatura seccional constante.

Corolário 1.22. *Se M^n tem curvatura seccional constante C então*

$$R(x,y)z = C\{\langle z,x\rangle y - \langle z,y\rangle x\},$$

para todos $x,y,z \in T_pM$.

Demonstração. Basta definirmos $F(x,y,z,w) = C\{\langle x,z\rangle \langle y,w\rangle - \langle z,y\rangle \langle x,w\rangle\}$ e utilizarmos o Corolário 1.21. □

1.6 Imersões Isométricas

Definição 1.23. *Sejam M^n e $\overline{M}^m$ variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\psi : M^n \to \overline{M}^m$ é chamada uma* ***imersão*** *se a diferencial $d\psi_p : T_pM \to T_{\psi(p)}\overline{M}$ é injetiva para todo $p \in M^n$. Se, além disto, ψ é um homeomorfismo sobre $\psi(M^n) \subset \overline{M}^m$, onde $\psi(M)$ tem a topologia induzida por $\overline{M}^m$, dizemos que ψ é um* ***mergulho****. Se $M^n \subset \overline{M}^m$ e a aplicação inclusão $\iota : M^n \to \overline{M}^m$ é um mergulho, então dizemos que M^n é uma* ***subvariedade*** *de $\overline{M}^m$.*

Definição 1.24. *Sejam M^n e $\overline{M}^m$ variedades Riemannianas, com métricas $\langle\,,\,\rangle$ e $\langle\!\langle\,,\,\rangle\!\rangle$, respectivamente. Um difeomorfismo $\psi : M^n \to \overline{M}^m$ é chamado uma* ***isometria*** *se*

$$\langle u,v\rangle_p = \langle\!\langle d\psi_p(u), d\psi_p(v)\rangle\!\rangle_{\psi(p)}$$

para todo $p \in M^n$ e todo $u,v \in T_pM$.

A seguir, ilustraremos uma maneira de construir uma métrica Riemannina numa variedade diferenciável.

Seja $\psi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão. Se $\overline{M}^{n+k}$ possui uma métrica Riemannina $\langle\!\langle\,,\,\rangle\!\rangle$ então ψ induz uma métrica Riemannina $\langle\,,\,\rangle$ em M^n, pondo

$$\langle u,v\rangle_p = \langle\!\langle d\psi_p(u), d\psi_p(v)\rangle\!\rangle_{\psi(p)}$$

para todo $p \in M^n$ e todo $u,v \in T_pM$. Como $d\psi_p$ é injetiva, $\langle\,,\,\rangle_p$ é positivo definido. A métrica de M^n é chamada **métrica induzida** por ψ, e ψ é uma **imersão isométrica**.

Neste caso, é costume denotar, e assim o faremos, as métricas $\langle\, , \rangle$ e $\langle\!\langle\, , \rangle\!\rangle$ por um mesmo símbolo.

Se M^n é uma subvariedade de uma variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+k}$ e a aplicação inclusão $\iota : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ é uma imersão isométrica, então dizemos que M^n é uma **subvariedade Riemanniana** de $\overline{M}^{n+k}$.

Observação 1.1. *Para o que segue, lembremos que o* ***fibrado tangente*** *(para mais detalhes veja [9] ou [5])de uma variedade diferenciável M^n é a variedade $2n$-dimensional*

$$TM = \bigcup \{\, T_pM \ ; \ p \in M^n \,\}\,.$$

Definição 1.25. *Sejam M^n e $\overline{M}^m$ variedades diferenciáveis. Um campo vetorial X ao longo de uma aplicação $\psi : M^n \to \overline{M}^m$ é uma aplicação $X : M^n \to T\overline{M}$ tal que $\pi \circ X = \psi$, onde $\pi : T\overline{M} \to \overline{M}^m$ é a aplicação projeção.*

Se M^n é uma subvariedade de $\overline{M}^{n+k}$, um campo X ao longo da aplicação inclusão $\iota : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ é chamado um $\overline{M}$**-campo vetorial** sobre M^n. Assim, X aplica a cada $p \in M^n$ um vetor tangente $X_p \in T_p\overline{M}$. Neste caso, dizemos que X é **suave** se $f \in C^\infty(\overline{M})$ implica $X(f) \in C^\infty(M)$. O conjunto

$$\overline{\mathfrak{X}}(M) = \{\, X \ ; \ X \ \text{ é } \ \overline{M}\text{-campo vetorial sobre } \ M^n \,\}$$

é um módulo sobre $C^\infty(M)$. Observemos que se $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ então $X|_{M^n} \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$.

Agora, seja M^n uma subvariedade Riemanniana de $\overline{M}^{n+k}$. Logo, cada espaço tangente T_pM é um subespaço de $T_p\overline{M}$ e o produto interno de $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp, \tag{1.2}$$

onde $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Neste caso, vetores de $(T_pM)^\perp$ são ditos **normais** a M^n.

De (1.2) obtemos, para todo $v \in T_p\overline{M}$, que

$$v = v^\top + v^\perp,$$

onde $v^\top \in T_pM$ e $v^\perp \in (T_pM)^\perp$. Segue que as aplicações projeções $\pi^\top : T_p\overline{M} \to T_pM$ e $\pi^\perp : T_p\overline{M} \to (T_pM)^\perp$ são $\mathbb{R}$-lineares.

Um campo vetorial $N \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ é chamado **normal** a M^n quando $N_p \in (T_pM)^{\perp}$, para cada $p \in M^n$. Temos que o conjunto

$$X(M)^{\perp} = \{\, N \in \overline{\mathfrak{X}}(M) \ ; \ N \ \text{é normal a} \ M^n \,\}$$

é um sub-módulo de $\overline{\mathfrak{X}}(M)$.

Para cada $X \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$, aplicando $\pi^{\top}$ e $\pi^{\perp}$ a cada X_p, com $p \in M^n$, obtemos campos vetoriais $X^{\top} \in \mathfrak{X}(M)$ e $X^{\perp} \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$. Segue que as aplicações projeções $\pi^{\top} : \overline{\mathfrak{X}}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ e $\pi^{\perp} : \overline{\mathfrak{X}}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ são $C^{\infty}(M)$-lineares. Além disso, como para todo $X \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ temos a decomposição $X = X^{\top} + X^{\perp}$ (de forma única) então

$$\overline{\mathfrak{X}}(M) = \mathfrak{X}(M) \oplus \mathfrak{X}(M)^{\perp}.$$

1.7 A Conexão Induzida

Seja M^n é uma subvariedade Riemanniana de $\overline{M}^{n+k}$. Denotemos por

$$\begin{array}{rccc} \overline{\nabla} : & \mathfrak{X}(\overline{M}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}) & \to & \mathfrak{X}(\overline{M}) \\ & (Z, W) & \mapsto & \overline{\nabla}_Z W \end{array}$$

a conexão de Levi-Civita de $\overline{M}^{n+k}$.

Sejam $V, X \in \mathfrak{X}(M)$. Para cada $p \in M^n$, sejam $\overline{V}$ e $\overline{X}$ extensões locais suaves de V e X, respectivamente, sobre uma vizinhança U de p em $\overline{M}^{n+k}$. A **conexão induzida** em $M^n \subset \overline{M}^{n+k}$ é definida pondo

$$\begin{array}{rccccc} \overline{\nabla} : & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \to & \mathfrak{X}(\overline{M}) & & \\ & (V, X) & \mapsto & \overline{\nabla}_V X & = & \overline{\nabla}_{\overline{V}} \overline{X}\Big|_{U \cap M}. \end{array}$$

Temos que $\overline{\nabla}_V X$ é um $\overline{M}$-campo vetorial suave bem definido sobre M^n (cf. [9], Lema 4.1). Logo, considerando extensões apropriadas de campos de vetores definidos em M^n obtemos o seguinte resultado.

Corolário 1.26. *Seja $\overline{\nabla}$ a conexão induzida de $M^n \subset \overline{M}^{n+k}$. Se $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ então*

(1) *$\overline{\nabla}_V X$ é $C^{\infty}(M)$-linear em V;*

(2) *$\overline{\nabla}_V X$ é $\mathbb{R}$-linear em X;*

(3) $\overline{\nabla}_V(fX) = V(f)X + f\overline{\nabla}_V X$, *para cada* $f \in C^\infty(M)$;

(4) $[V, W] = \overline{\nabla}_V W - \overline{\nabla}_W V$;

(5) $V\langle X, Y\rangle = \langle\overline{\nabla}_V X, \rangle + \langle X, \overline{\nabla}_V Y\rangle$.

Para campos de vetores V e W em M^n, o proximo resultado nos garante que $(\overline{\nabla}_V W)^\top$ coincide com a conexão de Levi-Civita de M^n.

Proposição 1.27. *Seja* M^n *uma subvariedade Riemanniana de* $\overline{M}^{n+k}$. *Se* $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ *então*

$$\nabla_V W = (\overline{\nabla}_V W)^\top,$$

onde ∇ *é a conexão de Levi-Civita de* M^n.

Demonstração. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. Consideremos extensões locais $\overline{X}, \overline{V}, \overline{W}$ de X, V, W, em $\overline{M}^{n+k}$, respectivamente. Consideremos também

$$\begin{aligned} F(\overline{V}, \overline{W}, \overline{X}) \;\; := \;\; & \overline{V}\langle\overline{W}, \overline{X}\rangle + \overline{W}\langle\overline{X}, \overline{V}\rangle - \overline{X}\langle\overline{V}, \overline{W}\rangle \\ & -\langle\overline{V}, [\overline{W}, \overline{X}]\rangle + \langle\overline{W}, [\overline{X}, \overline{V}]\rangle + \langle\overline{X}, [\overline{V}, \overline{W}]\rangle. \end{aligned}$$

Então da fórmula de Koszul obtemos que

$$F(\overline{V}, \overline{W}, \overline{X}) = 2\langle\nabla_{\overline{V}}\overline{W}, \overline{X}\rangle$$

Por outro lado, do Corolário 1.26 obtemos que

$$F(\overline{V}, \overline{W}, \overline{X})\Big|_{M^n} = F(V, W, X).$$

Assim, $\langle\overline{\nabla}_V W, X\rangle = \langle\nabla_V W, X\rangle$. Portanto, sendo $X \in \mathfrak{X}(M)$ arbitrário obtemos que $\nabla_V W = (\overline{\nabla}_V W)^\top$. $\square$

A seguir, para fazer um estudo mais detalhado de M^n, analisamos $(\overline{\nabla}_V W)^\perp$.

Proposição 1.28. *Seja* M^n *uma subvariedade Riemanniana de* $\overline{M}^{n+k}$. *A função*

$$\begin{array}{rlcl} II: & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \to & \mathfrak{X}(M)^\perp \\ & (V, W) & \mapsto & II(V, W) \;\; = \;\; (\overline{\nabla}_V W)^\perp \end{array}$$

é $C^\infty(M)$*-bilinear e simétrica.* II *é chamada* ***segunda forma fundamental*** *de* $M^n \subset \overline{M}^{n+k}$.

Demonstração. Como $\overline{\nabla}_V W$ é $C^\infty(M)$-linear em V e $\mathbb{R}$-linear em W então o mesmo acontece com II. Agora, para $f \in C^\infty(M)$,

$$\overline{\nabla}_V(fW) = V(f)W + f\overline{\nabla}_V W.$$

Como $W \in \mathfrak{X}(M)$ e a aplicação projeção $\pi^\perp$ é $C^\infty(M)$-linear então

$$II(V, fW) = (\overline{\nabla}_V(fW))^\perp = (V(f)W + f\overline{\nabla}_V W)^\perp = f(\overline{\nabla}_V W)^\perp = fII(V,W).$$

Assim, II é $C^\infty(M)$-bilinear. Além disso,

$$II(V,W) - II(W,V) = (\overline{\nabla}_V W)^\perp - (\overline{\nabla}_W V)^\perp = (\overline{\nabla}_V W - \overline{\nabla}_W V)^\perp = [V,W]^\perp = 0,$$

pois $[V,W] \in \mathfrak{X}(M)$. □

Juntando os resultados das Proposisões 1.27 e 1.28 obtemos

$$\overline{\nabla}_V W = \nabla_V W + II(V,W), \tag{1.3}$$

para quaisquer $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, chamada **fórmula de Gauss**.

Em cada $p \in M^n$, II determina uma função $\mathbb{R}$-bilinear

$$\begin{array}{rccccc} II_p: & T_pM \times T_pM & \to & (T_pM)^\perp & & \\ & (v,w) & \mapsto & II_p(v,w) & = & II(V_p, W_p) \end{array}$$

onde $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ são tais que $V_p = v$, $W_p = w$. Para cada $N \in (T_pM)^\perp$ fica associada uma aplicação $\mathbb{R}$-linear auto-adjunta $A_p^N : T_pM \to T_pM$ dada por

$$\langle A_p^N(x), y\rangle = \langle II_p(x,y), N\rangle\,, \quad x, y \in T_pM. \tag{1.4}$$

O campo de operadores lineares auto-adjuntos $A^N : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, definido pontualmente pela expressão (1.4), é chamado **operador de forma** (ou **endorfismo de Weingarten**) da subvariedade Riemanniana M^n na direção N.

O seguinte resultado nos dá uma expressão de A^N em termos da conexão de Levi-Civita do espaço ambiente $\overline{M}^{n+k}$.

Proposição 1.29. *Sejam $p \in M^n$, $x \in T_pM$ e $N \in (T_pM)^\perp$. Então*

$$A_p^N(x) = -\left(\overline{\nabla}_x N\right)^\top.$$

*Esta expressão é chamada **fórmula de Weingarten** de M^n. Assim, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos*

$$A^N(X) = -\left(\overline{\nabla}_X N\right)^\top$$

Demonstração. Sejam $y \in T_pM$ e $X,\ Y$ extensões locais de $x,\ y$, respectivamente, e tangentes a M^n. Então $\langle N, Y\rangle = 0$ e, portanto,

$$\begin{aligned}\langle A_p^N(x), y\rangle &= \langle II_p(X,Y), N\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N\rangle(p) = \langle \overline{\nabla}_X Y, N\rangle(p)\\ &= -\langle Y, \overline{\nabla}_X N\rangle(p) = \langle -\overline{\nabla}_x N, y\rangle,\end{aligned}$$

para todo $y \in T_pM$. Logo, $A_p^N(x) = -\left(\overline{\nabla}_x N\right)^{\top}$. □

Definição 1.30. *Dizemos que uma subvariedade Riemanniana M^n de $\overline{M}^{n+k}$ é **totalmente geodésica** quando $II \equiv 0$.*

1.8 Variedades Produto

A partir de variedades Riemannianas podemos obter outras variedades Riemannianas. As variedades produtos, que passamos estudar nesta seção, são um exemplo dessa situação.

Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e consideremos

$$M_1^n \times M_2^m = \{\,(p,q)\ ;\ p \in M_1^n \text{ e } q \in M_2^n\,\}.$$

Temos que se $(x^1, \ldots, x^n)$ e $(x^{n+1}, \ldots, x^{n+m})$ são vizinhanças coordenadas arbitrárias para M_1^n e M_2^m, respectivamente, então $(x^1, \ldots, x^{n+m})$ é uma vizinhança coordenada para $M_1^n \times M_2^m$. Com esta estrutura diferenciável, $M_1^n \times M_2^m$ é chamada **variedade produto** de M_1^n por M_2^m.

Em uma variedade produto $M_1^n \times M_2^m$ temos:

(a) as projeções

$$\begin{aligned}\pi_1 :\ M_1^n \times M_2^m &\to M_1^n\\ (p,q) &\mapsto \pi_1(p,q) = p\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2 :\ M_1^n \times M_2^m &\to M_2^m\\ (p,q) &\mapsto \pi_2(p,q) = q\,,\end{aligned}$$

são aplicações diferenciáveis de classe C^∞;

(b) se M é uma variedade diferenciável então uma aplicação $\phi : M \to M_1^n \times M_2^m$ é diferenciávesl se, e somente se, $\pi_1 \circ \phi$ e $\pi_2 \circ \phi$ são diferenciáveis;

(c) para cada $(p,q) \in M_1^n \times M_2^m$, os conjuntos

$$M_1^n \times \{q\} = \{\, (p,q)\ ;\ p \in M_1^n \,\}, \qquad \{p\} \times M_2^n = \{\, (p,q)\ ;\ q \in M_2^m \,\},$$

são subvariedades de $M_1^n \times M_2^m$;

(d) para cada $(p,q) \in M_1^n \times M_2^m$, as aplicações

$$\pi_1\Big|_{M_1^n \times \{q\}} : M_1^n \times \{q\} \to M_1^n\,, \qquad \pi_2\Big|_{\{p\}\times M_2^n} : \{p\} \times M_2^n \to M_2^m\,,$$

são difeomorfismos.

Logo, do item (d) obtemos que os espaços tangentes

$$T_{(p,q)}M_1 := T_{(p,q)}\left(M_1^n \times \{q\}\right)\,, \quad T_{(p,q)}M_2 := T_{(p,q)}\left(\{p\} \times M_2^m\right)$$

são subespaços de $T_{(p,q)}\left(M_1 \times M_2\right)$. Além disso,

$$T_{(p,q)}\left(M_1 \times M_2\right) = T_{(p,q)}M_1 \oplus T_{(p,q)}M_2\,, \tag{1.5}$$

ou seja, cada $w \in T_{(p,q)}\left(M_1 \times M_2\right)$ pode ser escrito de forma única como $w = w_1 + w_2$, onde $w_1 \in T_{(p,q)}M_1$ e $w_2 \in T_{(p,q)}M_2$.

Agora, se M_1^n e M_2^m são variedades Riemannianas então usando (1.5) podemos munir de uma métrica Riemanniana o produto $M_1^n \times M_2^m$.

Lema 1.8. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades Riemannianas com métricas Riemannianas g_1 e g_2, respectivamente. Então $g = g_1 \oplus g_2$, definida por*

$$g(X,Y) = g_1(X_1,Y_1) + g_2(X_2,Y_2) \tag{1.6}$$

*para todos $X = X_1 + X_2,\ Y = Y_1 + Y_2 \in \mathfrak{X}(M_1 \times M_2)$, onde $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ e $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$, é uma métrica Riemanniana em $M_1^n \times M_2^m$, chamada **métrica produto**.*

Demonstração. Basta observarmos que sendo g_1 e g_2 $(0,2)$ tensores simétricos e definidos positivos então o mesmo acontece com g. □

Também usamos

$$\langle X,Y\rangle_{(p,q)} = \langle X_1,Y_1\rangle_p + \langle X_2,Y_2\rangle_q$$

para denotar a expressão dada em (1.6).

1.8.1 Conexão de Levi-Civita em uma Variedade Produto

Para relacionarmos as conexões de Levi-Civita de M_1^n, M_2^m e $M_1^n \times M_2^m$ é necessário estabelecermos as seguintes noções.

Definição 1.31.

(i) *Se $f \in C^\infty(M_1)$ então o **levantamento** de f para $M_1^n \times M_2^m$ é $\widetilde{f} = f \circ \pi_1 \in C^\infty(M_1 \times M_2)$.*

(ii) *Se $v \in T_pM_1$ e $q \in M_2^m$ então o **levantamento** de v para $(p,q) \in M_1^n \times M_2^m$ é o único vetor $\widetilde{v} \in T_{(p,q)}M_1$ tal que $d\left(\pi_1\right)_{(p,q)}(\widetilde{v}) = v$.*

(iii) *Se $X \in \mathfrak{X}(M_1)$ então o **levantamento** de X para $M_1^n \times M_2^m$ é o único campo $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(M_1 \times M_2)$ tal que $d\left(\pi_1\right)_{(p,q)}(\widetilde{X}_{(p,q)}) = X_p$ e $d\left(\pi_2\right)_{(p,q)}(\widetilde{X}_{(p,q)}) = 0$. O conjunto*

$$\mathfrak{L}_{\mathcal{H}}(M_1) = \{\, \widetilde{X} \ ; \ \widetilde{X} \text{ é levantamento de } X \in \mathfrak{X}(M_1)\}$$

*é chamado conjunto de todos os **levantamentos horizontais**.*

Funções, vetores tangentes e campos vetorias em M_2^m são levantados para $M_1^n \times M_2^m$ de forma análoga via π_2. O conjunto

$$\mathfrak{L}_{\mathcal{V}}(M_2) = \{\, \widetilde{V} \ ; \ \widetilde{V} \text{ é levantamento de } V \in \mathfrak{X}(M_2)\}$$

*é chamado conjunto de todos os **levantamentos verticais**.*

Com relação ao levantamento do colchete de campos horizontais e verticais temos o seguinte resultado, que pode ser encontrado no Corolário 1.44 de [9].

Proposição 1.32.

(i) *Se $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{H}}(M_1)$ então $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \widetilde{[X,Y]} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{H}}(M_1)$ (resultado análogo para campos verticais).*

(ii) *Se $\widetilde{X} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{H}}(M_1)$ e $\widetilde{V} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{V}}(M_2)$ então $[\widetilde{X}, \widetilde{V}] = 0$.*

Agora, podemos relacionar a conexão de Levi-Civita do produto $M_1^n \times M_2^m$ com as conexões de Levi-Civita de M_1^n e M_2^m.

Proposição 1.33. *Consideremos a variedade produto* $\overline{M}^{n+m} = M_1^n \times M_2^m$ *munida com a métrica produto. Sejam* ∇^1, ∇^2 *e* $\overline{\nabla}$ *as conexões de Levi-Civita de* M_1^n, M_2^m *e* $\overline{M}^{n+m}$, *respectivamente. Se* $X, Y \in \mathfrak{L}_{\mathcal{H}}(M_1)$ *e* $V, W \in \mathfrak{L}_{\mathcal{V}}(M_2)$ *então*

(i) $\overline{\nabla}_X Y$ *é o levantamento de* $\nabla^1_X Y$;

(ii) $\overline{\nabla}_V W$ *é o levantamento de* $\nabla^2_V W$;

(iii) $\overline{\nabla}_V X = 0 = \overline{\nabla}_X V$.

A demonstração deste resultado pode ser feita diretamente através da fórmula de Koszul (veja, por exemplo [9]).

1.9 Geodésicas

Dada uma curva $\alpha : I \to M^n$ em uma variedade Riemanniana M^n, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, definimos um campo sobre α como sendo uma aplicação $Z : I \to TM$ tal que $Z(t) \in T_{\alpha(t)}M$, onde TM denota o fibrado tangente de M^n. Denotamos $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$.

Proposição 1.34. *Sejam* M^n *uma variedade Riemanniana, com conexão de Levi-Civita* ∇. *Se* $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$, *então existe uma única função* $Z \to Z' \in \mathfrak{X}(\alpha)$ *satisfazendo:*

(i) $(aZ_1 + bZ_2)' = aZ_1' + bZ_2'$, *para todos* $a, b \in \mathbb{R}$;

(ii) $(hZ)' = \dfrac{dh}{dt} Z + hZ'$, *para qualquer* $h \in C^\infty(I)$;

(iii) $(V|_\alpha)'(t) = \nabla_{\alpha'(t)}(V)$, *para todo* $t \in I$ *e todo* $V \in \mathfrak{X}(M)$;

(vi) $\dfrac{d}{dt}\langle Z_1, Z_2\rangle = \langle Z_1', Z_2\rangle + \langle Z_1, Z_2'\rangle$.

Demonstração. Supondo a existência de tal função, consideremos um sistema de coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ ao redor de um ponto de M^n e obtemos, após alguns cálculos, a expressão

$$Z' = \sum_i \frac{dZ^i}{dt}\partial_i + \sum_i Z^i \nabla_{\alpha'}(\partial_i). \tag{1.7}$$

A unicidade segue diretamente de (1.7). Para a existência, basta definirmos Z' de acordo com a expressão (1.7). Através de cálculos diretos, mostramos que as quatro propriedades são satisfeitas localmente e, pela unicidade, obtemos a independência do sistema de coordenadas. □

Definição 1.35. *Uma curva $\alpha : I \to M^n$ é chamada **geodésica** se $(\alpha')' = 0$.*

Através da equação (1.7) obtemos que $\alpha : I \to M^n$ é uma geodésica se, e só se,

$$0 = \frac{d^2(x^k \circ \alpha)}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij}(\alpha) \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt} \frac{d(x^j \circ \alpha)}{dt}, \quad k \in \{1, \ldots, n\}, \tag{1.8}$$

onde $(x^1, ..., x^n)$ é um sistema de coordenadas ao redor de um ponto de M^n e Γ^k_{ij} são os símbolos de Christoffel associados.

Os teoremas de existência e unicidade de sistemas de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem nos fornecem alguns resultados de existência e unicidade para geodésicas, como os seguintes.

Proposição 1.36. *Se $\alpha, \beta : I \to M^n$ são geodésicas tais que $\alpha'(a) = \beta'(a)$ em algum ponto $a \in I$ então $\alpha = \beta$.*

Proposição 1.37. *Dado $v \in T_pM$, existe uma única geodésica $\alpha_v : I \to M^n$ tal que*

(i) $\alpha_v(p) = 0$ e $\alpha'_v(0) = v$;

(i) α_v é maximal, i.e., tem domínio maximal.

1.9.1 A Aplicação Exponencial

Definição 1.38. *Seja $v \in V \subset T_pM$ tal que a geodésica α_v é definida ao menos em $[0, 1]$. A **aplicação exponencial** é a função $\exp_p : V \to M$ tal que $\exp_p(v) = \alpha_v(1)$.*

Proposição 1.39. *Para cada $p \in M^n$, existe uma vizinhança $\widetilde{V}$ da origem em T_pM na qual $\exp_p$ é um difeomorfismo sobre uma vizinhança U de p em M^n.*

A prova deste resultado é uma aplicação direta do Teorema da Função Inversa e pode ser encontrada em [9].

Por conveniência, vamos usar a seguinte terminologia. Se $\exp_p$ é um difeomorfismo em uma vizinhança V da origem em T_pM, $\exp_p V = U$ é chamada uma **vizinhança normal** de p. Se $B_\varepsilon(0)$ é tal que $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset V$, chamamos $\exp_p B_\varepsilon(0) = B_\varepsilon(p)$ a **bola normal** (ou **geodésica**) de centro p e raio ε.

O seguinte resultado garante a existência de referenciais específicos ao redor de um ponto de M^n, que muitas vezes facilita os cálculos.

Lema 1.9 (Referencial Geodésico)**.** *Seja M^n uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇. Então, para cada $p \in M^n$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p e n campos de vetores $E_1, \ldots, E_n \in \mathfrak{X}(U)$, ortonormais em cada ponto de U, satisfazendo $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$. Uma tal família E_i, $i = 1, \ldots, n$, de campos de vetores é chamada um* ***referencial*** *(local)* ***geodésico*** *em p.*

Demonstração. Sejam $U = B_\varepsilon(p)$ a bola normal de centro p com raio $\varepsilon > 0$ e $\gamma_k : I \to M$ uma geodésica radial, ligando p a q em $B_\varepsilon(p)$. Consideremos $E_1(p), \ldots, E_n(p)$ um referencial ortonormal em p e estendendo cada $E_i(q) = P(E_i)$, $i = 1, \ldots, n$ paralelamente ao longo de γ_k e usando o fato de P ser uma isometria, obtemos n campos de vetores $E_1(q), \ldots, E_n(q) \in \mathfrak{X}(U)$ ortonormais em cada ponto de U, uma vez que $q \in U$ é arbitrário. Agora, observando que $\nabla_{E_i} E_j(p)$, depende apenas do valor de E_i e do valor de E_j ao longo da geodésica γ_j que no instante $t = 0$ passa por p, com velocidade $\gamma_j^{'}(0) = E_j$, temos que

$$\nabla_{E_i} E_j(p) = \nabla_{\gamma_i^{'}(t)} E_j(\gamma_j(t))\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(E_j(\gamma_j(t)))\big|_{t=0} = 0,$$

pois $E_j(\gamma_j(t))$ é um campo paralelo ao longo de γ_j, $j = 1, \ldots, n$. $\square$

1.9.2 Variedades Completas

Definição 1.40. *Dizemos que uma variedade Riemanniana M^n é (geodesicamente)* ***completa****, se para todo $p \in M^n$, a aplicação exponencial exp_p está definida para todo $v \in T_pM$, isto é, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.*

Com ajuda da **distância intrínseca** $d(p, q)$, definida como sendo o ínfimo dos comprimentos de todas as curvas diferenciáveis por partes ligando p a q, é possível obter o seguinte resultado clássico, cuja demonstração pode ser encontrada em [5] ou [9].

Teorema 1.41 (Hopf e Rinow)**.** *Seja M^n uma variedade Riemanniana e consideremos $p \in M^n$. São equivalentes:*

(*i*) *exp_p está definida em todo T_pM;*

(*ii*) *os limitados e fechados de M^n são compactos;*

(iii) M^n *é completa como espaço métrico;*

(iv) M^n *é geodesicamente completa.*

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que

(v) para todo $q \in M^n$ *existe uma geodésica* γ *ligando* p *a* q *tal que* $\ell(\gamma) = d(p, q)$, *onde* $\ell(\gamma)$ *denota o comprimento de* γ.

1.10 Gradiente, Divergente e o Laplaciano

Definimos, nesta seção, alguns operadores que serão utilizados neste trabalho, assim como algumas formas de calculá-los através do uso de um referencial ortonormal geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$ em uma variedade Riemanniana M^n.

Definição 1.42. *Dada* $f \in C^\infty(M)$, *definimos o* ***gradiente*** *de* f *como sendo o campo* ∇f *tal que* $X(f) = df(X) = \langle \nabla f, X\rangle$, *para todo* $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Com relação a um referencial ortonormal geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$ em $p \in M$, temos

$$\nabla f = \sum_i E_i(f)E_i.$$

De fato, como $\nabla f = \sum_i \langle \nabla f, E_i\rangle E_i$, então, usando a definição acima, obtemos

$$\nabla f = \sum_i E_i(f)E_i.$$

Definição 1.43. *Dado um campo* $X \in \mathfrak{X}(M)$, *definimos o* ***divergente*** *de* X *como sendo*

$$div(X) = tr\left(Y \to \nabla_Y X\right).$$

Em um referencial ortonormal geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$ em $p \in M$, temos

$$div(X) = \sum_i E_i(x^i),$$

onde

$$X = \sum_i x^i E_i.$$

De fato,

$$div(X) = tr\left(Y \to \nabla_Y X\right) = \sum_i \langle \nabla_{E_i} X, E_i\rangle = \sum_i \langle \nabla_{E_i}(\sum_j x^j E_j), E_i\rangle.$$

Como

$$\nabla_{E_i}(x^j E_j) = x^j \nabla_{E_i} E_j + E_i(x^j) E_j = E_i(x^j) E_j,$$

uma vez que o referencial $\{E_i\}_{i=1}^n$ é geodésico em p, então

$$divX = \sum_{i,j} \langle E_i(x^j) E_j, E_i \rangle = \sum_{i,j} E_i(x^j) \langle E_j, E_i \rangle = \sum_i E_i(x^i).$$

Definição 1.44. *Para $f \in C^\infty(M)$ temos $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ e, a partir daí, definimos o* ***Laplaciano*** *de f, Δf, como sendo*

$$\Delta f = div(\nabla f).$$

Em um referencial ortonormal geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$ em $p \in M$, temos

$$\Delta f = \sum_i E_i(E_i(f)).$$

De fato, como

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_i} \nabla f &= \nabla_{E_i} \left(\sum_j E_j(f) E_j \right) = \sum_j \nabla_{E_i} E_j(f) E_j \\
&= \sum_j \{ E_i(E_j(f)) E_j + E_j(f) \nabla_{E_i} E_j \} \\
&= \sum_j E_i(E_j(f)) E_j,
\end{aligned}$$

uma vez que $\nabla_{E_i} E_j = 0$, pois o referencial $\{E_i\}_{i=1}^n$ é geodésico em p. Logo, como

$$\Delta f = div(\nabla f) = tr\left(Y \to \nabla_Y \nabla f \right),$$

temos que

$$\Delta f = \sum_i \langle \sum_j E_i(E_j(f)) E_j, E_i \rangle = \sum_{i,j} E_i(E_j(f)) \langle E_j, E_i \rangle = \sum_i E_i(E_i(f)).$$

Capítulo 2

Imersões na Variedade Produto $\mathbb{R} \times M^n$

2.1 Hipersuperfícies em $\mathbb{R} \times M^n$

Seja M^n uma variedade Riemanniana conexa n-dimensional, com métrica Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle_M$ e conexão de Levi-Civita ${}^M\nabla$.

No que segue, consideraremos a variedade produto $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times M^n$ munida com a métrica produto, dada no Lema 1.8. Por simplicidade, escrevemos a métrica produto da forma

$$\langle\ ,\ \rangle = dt^2 + \langle\ ,\ \rangle_M,$$

isto é, se ∂_t denota o vetor unitário que gera $\mathbb{R}$, então para vetores $x = \lambda\partial_t + x^*$ e $y = \mu\partial_t + y^*$ em $\overline{M}^{n+1}$, com $x^*, y^* \in T_pM$, temos

$$\langle x, y\rangle = \lambda\mu + \langle x^*, y^*\rangle_M.$$

Ao longo deste trabalho, para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, as subvariedades $M^n_{t_0} = \{t_0\} \times M^n$ serão chamadas de *slices* de $\overline{M}^{n+1}$.

Como um caso particular da Proposição 1.33 temos o seguinte resultado.

Proposição 2.1. *Sejam* ${}^M\nabla$ *e* $\overline{\nabla}$ *as conexões de Levi-Civita de* M^n *e* $\overline{M}^{n+1}$*, respectivamente. Se* $X \in \mathfrak{L}_{\mathcal{H}}(\mathbb{R})$ *e* $V, W \in \mathfrak{L}_{\mathcal{V}}(M)$ *então*

(i) $\overline{\nabla}_V W$ *é o levantamento de* ${}^M\nabla_V W$*;*

(ii) $\overline{\nabla}_V X = 0 = \overline{\nabla}_X V$.

Como uma consequência direta deste resultado obtemos a seguinte caracterização dos slices.

Corolário 2.2. *Os slices de $\overline{M}^{n+1}$ são totalmente geodésicas.*

Demonstração. Do item (i) da Proposição 2.1 obtemos que a segunda forma fundamental de $M^n_{t_0}$ é dada por

$$II(V,W) = (\overline{\nabla}_V W)^\perp = ({}^M\nabla_V W)^\perp = 0,$$

para todos $V, W \in \mathfrak{L}_\mathcal{V}(M)$. Assim, segundo a Definição 1.30, $M^n_{t_0}$ é totalmente geodésica. $\square$

Para uso futuro, mostramos aqui o seguinte resultado.

Lema 2.1. *Com as notações estabelecidas acima, $\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = 0$.*

Demonstração. Como $\langle \partial_t, \partial_t \rangle = 1$ então $0 = \partial_t \langle \partial_t, \partial_t \rangle = 2\langle \overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t, \partial_t \rangle$. Assim $\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t$ não tem componente na direção ∂_t. Logo, existe $V \in \mathfrak{L}_\mathcal{V}(M)$ tal que $\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = V$. Agora, como $\langle \partial_t, V \rangle = 0$ então do item (ii) da Proposição 2.1 obtemos

$$0 = \partial_t \langle \partial_t, V \rangle = \langle \overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t, V \rangle + \langle \partial_t, \underbrace{\overline{\nabla}_{\partial_t} V}_{0} \rangle = \langle \overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t, V \rangle.$$

Assim $\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t$ também não possui componentes nas direções de M^n. $\square$

No que segue, iremos considerar uma imersão isométrica $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times M^n$ de uma variedade Riemanniana n-dimensional orientada, conexa, completa Σ^n na variedade produto $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times M^n$. Abreviaremos tudo isso dizendo simplesmente que $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times M^n$ é uma hipersuperfície completa.

Exemplos de hipersuperfícies no produto $\mathbb{R} \times M^n$ são dados pelo chamados gráficos verticais, que passamos a descrever.

Exemplo 3. *Sejam Ω um domínio conexo de uma variedade Riemanniana conexa M^n e $u \in C^\infty(\Omega)$. O **gráfico vertical** de u em $\mathbb{R} \times M^n$ é a hipersuperfície*

$$\Sigma^n(u) = \{(u(x), x); x \in \Omega\} \subset \mathbb{R} \times M^n.$$

Dizemos que um gráfico vertical é ***inteiro*** *quando $\Omega = M^n$. A métrica induzida em Ω a partir da métrica produto do espaço ambiente via $\Sigma^n(u)$ é dada por*

$$\langle \, , \rangle = du^2 + \langle \, , \rangle_{M^n}.$$

Para uma hipersuperfície completa $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times M^n$, denotemos por ∇ a conexão de Levi-Civita de Σ^n e por N seu campo de vetores normais unitários. Notemos que as fórmulas de Gauss e Weingarten são dadas, respectivamente, por

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle AX, Y \rangle N \tag{2.1}$$

e

$$AX = -\overline{\nabla}_X N, \tag{2.2}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, onde $A : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ indica o operador de forma de Weingarten de Σ^n com relação a sua orientação N.

De fato, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= X\langle N, Y \rangle = \langle \overline{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, \overline{\nabla}_X Y \rangle \\ &= \langle (\overline{\nabla}_X N)^\top + (\overline{\nabla}_X N)^\perp, Y \rangle + \langle N, (\overline{\nabla}_X Y)^\top + (\overline{\nabla}_X Y)^\perp \rangle \\ &= \langle (\overline{\nabla}_X N)^\top, Y \rangle + \langle N, (\overline{\nabla}_X Y)^\perp \rangle. \end{aligned}$$

Agora, como AX é a componente tangencial de $-\overline{\nabla}_X N$ (veja Proposição 1.29), ou seja, $AX = -(\overline{\nabla}_X N)^\top$ e $II(X, Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^\perp$, temos que

$$-\langle AX, Y \rangle + \langle II(X, Y), N \rangle = 0 \Rightarrow \langle AX, Y \rangle = \langle II(X, Y), N \rangle.$$

Daí, $II(X, Y) = \langle AX, Y \rangle N$. Portanto, a fórmula de Gauss, $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y)$, torna-se $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle AX, Y \rangle N$.

Para a fórmula de Weingarten, temos que $0 = X\langle N, N \rangle = 2\langle \overline{\nabla}_X N, N \rangle$, ou seja, $\langle \overline{\nabla}_X N, N \rangle = 0$. Como $\overline{\nabla}_X N = \nabla_X N + (\nabla_X N)^\perp$, então $\langle (\nabla_X N)^\perp, N \rangle = 0$, para todo $N \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$, o que implica $(\nabla_X N)^\perp = 0, \forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Portanto, a fórmula de Weingarten (veja Proposição 1.29),

$$AX = -\left(\overline{\nabla}_X N\right)^\perp = -\left(\left(\overline{\nabla}_X N\right)^\perp + 0\right) = -\left(\left(\overline{\nabla}_X N\right)^\perp + \left(\overline{\nabla}_X N\right)^\top\right) = -\overline{\nabla}_X N.$$

Definição 2.3. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times M^n$ uma hipersuperfície completa. A* ***curvatura média*** *H de Σ^n é definida por*

$$H(p) = \frac{1}{n} tr(A), \quad p \in \Sigma^n,$$

onde A é o operador de forma de Σ^n com relação ao campo de vetores normais unitários N.

2.2 A Equação de Gauss e o Tensor de Ricci de uma Hipersuperfície em $\mathbb{R} \times M^n$

Um fato bem conhecido é que o tensor curvatura R da hipersuperfície Σ^n pode ser descrito em termos do operador de forma A e do tensor curvatura $\overline{R}$ de $\mathbb{R} \times M^n$ pela equação de Gauss, dada por

$$R(X,Y)Z = (\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} + \langle AX, Z\rangle AY - \langle AY, Z\rangle AX, \tag{2.3}$$

quaisquer que sejam os campos vetoriais tangentes $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

De fato, a equação (2.3) é válida pois

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z \\
&= (\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z)^{\top} - (\overline{\nabla}_X(\overline{\nabla}_Y Z)^{\top})^{\top} + (\overline{\nabla}_Y(\overline{\nabla}_X Z)^{\top})^{\top} \\
&= (\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z)^{\top} - (\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z)^{\top} + (\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z)^{\top} + (\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z)^{\top} \\
&\quad -(\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z)^{\top} - (\overline{\nabla}_X(\overline{\nabla}_Y Z)^{\top})^{\top} + (\overline{\nabla}_Y(\overline{\nabla}_X Z)^{\top})^{\top} \\
&= (\overline{R}(X,Y)Z)^{\top} + (\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z)^{\top} - (\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z)^{\top} \\
&\quad -(\overline{\nabla}_X(\overline{\nabla}_Y Z)^{\top})^{\top} + (\overline{\nabla}_Y(\overline{\nabla}_X Z)^{\top})^{\top}.
\end{aligned}$$

Usando a equação (2.1), obtemos

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= (\overline{R}(X,Y)Z)^{\top} + (\overline{\nabla}_X(\nabla_Y Z + \langle AY, Z\rangle N))^{\top} \\
&\quad -(\overline{\nabla}_Y(\nabla_X Z + \langle AX, Z\rangle N))^{\top} - (\overline{\nabla}_X(\overline{\nabla}_Y Z)^{\top})^{\top} + (\overline{\nabla}_Y(\overline{\nabla}_X Z)^{\top})^{\top} \\
&= (\overline{R}(X,Y)Z)^{\top} + (\overline{\nabla}_X\nabla_Y Z)^{\top} + \langle AY, Z\rangle N(\overline{\nabla}_X N)^{\top} \\
&\quad -(\overline{\nabla}_Y\nabla_X Z)^{\top} - \langle AX, Z\rangle(\overline{\nabla}_Y N)^{\top} - (\overline{\nabla}_X\nabla_Y Z)^{\top} + (\overline{\nabla}_Y\nabla_X Z)^{\top} \\
&= (\overline{R}(X,Y)Z)^{\top} + \langle AY, Z\rangle(-AX) - \langle AX, Z\rangle(-AY) \\
&= (\overline{R}(X,Y)Z)^{\top} + \langle AX, Z\rangle AY - \langle AY, Z\rangle AX,
\end{aligned}$$

como queríamos.

Lema 2.2. *Sejam* $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ *e* $Ric_\Sigma : \mathfrak{X}(\Sigma)^2 \to C^\infty(\Sigma)$ *a curvatura de Ricci de* Σ^n*, então*

$$Ric_\Sigma(X,X) = \sum_i \langle \overline{R}(X,E_i)X, E_i\rangle + nH\langle AX, X\rangle - \langle AX, AX\rangle,$$

onde $\{E_i\}_{i=1}^n$ *é um referencial ortonormal local de* $\mathfrak{X}(\Sigma)$*.*

Demonstração. Usando a equação de Gauss, obtemos

$$R(X,E_i)X = (\overline{R}(X,E_i)X)^\top + \langle AX, X\rangle AE_i - \langle AE_i, X\rangle AX.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
Ric_\Sigma(X,X) &= \sum_{i=1}^n \langle R(X,E_i)X, E_i\rangle \\
&= \sum_i \langle \overline{R}(X,E_i)X, E_i\rangle + \langle AX, X\rangle \sum_i \langle AE_i, E_i\rangle - \sum_i \langle \langle AE_i, X\rangle AX, E_i\rangle \\
&= \sum_i \langle \overline{R}(X,E_i)X, E_i\rangle + nH\langle AX, X\rangle - \sum_i \langle AX, E_i\rangle\langle AX, E_i\rangle \\
&= \sum_i \langle \overline{R}(X,E_i)X, E_i\rangle + nH\langle AX, X\rangle - \langle AX, AX\rangle.
\end{aligned}$$

□

2.3 As funções altura e ângulo

Vamos analisar duas funções que estão naturalmente ligadas à hipersuperfície Σ^n imersa no espaço produto $\mathbb{R} \times M^n$, a saber, a função altura $h = (\pi_{\mathbb{R}})\big|_\Sigma$ e a função ângulo $\eta = \langle N, \partial_t\rangle$.

2.3.1 A função altura

Temos que a **função altura** h em Σ^n, $h : \Sigma^n \to \mathbb{R}$, é dada por $h(t,q) = t$. Calculemos o gradiente de h, ∇h, sobre Σ^n.

Seja $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, então podemos escrever $X = f\partial_t + X^*$, onde X^* é tangente a M^n e, assim,

$$\langle \nabla h, X\rangle = X(h) = f\partial_t(t) + X^*(t) = f.$$

Como

$$\langle X, \partial_t \rangle = \langle f\partial_t + X^*, \partial_t \rangle = f,$$

segue que $\langle \nabla h, X \rangle = \langle \partial_t, X \rangle$ e daí

$$\nabla h = \partial_t^\top = \partial_t - \langle N, \partial_t \rangle N = \partial_t - \eta N, \tag{2.4}$$

onde $(\ )^\top$ denota a componente tangencial de um campo vetorial em $\mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1})$ ao longo de Σ^n.

Portanto, temos

$$|\nabla h|^2 = 1 - \eta^2, \tag{2.5}$$

onde $|\ |$ denota a norma de um campo vetorial sobre Σ^n.

2.3.2 A função ângulo

Analisemos a **função ângulo** $\eta = \langle N, \partial t \rangle$. Calculemos primeiro seu gradiente. Temos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla \eta, X \rangle &= X\langle N, \partial_t \rangle = \langle \overline{\nabla}_X N, \partial_t \rangle + \langle N, \overline{\nabla}_X \partial_t \rangle \\ &= \langle -AX, \partial_t \rangle = \langle -AX, \partial_t^\top \rangle = \langle -AX, \nabla h \rangle \\ &= \langle -A(\nabla h), X \rangle. \end{aligned}$$

Como o campo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ é arbitrário, segue que $\nabla \eta = -A(\nabla h)$.

O cálculo do Laplaciano de η é um pouco mais complexo e será dado no lema seguinte.

Lema 2.3. *Sejam $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times M^n$ uma hipersuperfície com orientação N e $\eta = \langle N, \partial_t \rangle$ sua função ângulo. Se Σ^n tem curvatura média H constante, então*

$$\triangle \eta = -\ (Ric_M(N^*, N^*) + |A|^2)\eta,$$

onde Ric_M denota a curvatura de Ricci da fibra M^n, N^* é a projeção do campo vetorial normal unitário N sobre a fibra M^n e $|A|$ é a norma de Hilbert-Schmidt do operador de forma A.

Demonstração. Seja $\{E_k\}_{k=1}^n$ um referencial ortonormal geodésico local de autovetores de A em $p \in \Sigma^n$ fixado, então, em p, temos

$$\begin{aligned} \triangle\eta &= \sum_{k=1}^{n} E_k E_k(\eta) = \sum_{k=1}^{n} E_k E_k \langle N, \partial_t \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} E_k(\langle \overline{\nabla}_{E_k} N, \partial_t \rangle + \langle N, \overline{\nabla}_{E_k} \partial_t \rangle) \\ &= \sum_{k=1}^{n} E_k \langle \overline{\nabla}_{E_k} N, \partial_t \rangle = -\sum_{k=1}^{n} E_k \langle AE_k, \partial_t \rangle. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Denotemos por

$$\partial_t = \sum_l \alpha_l E_l + \langle N, \partial_t \rangle N \tag{2.7}$$

e

$$AE_k = \sum_l h_{kl} E_l. \tag{2.8}$$

Então

$$\begin{aligned} E_k \langle AE_k, \partial_t \rangle &= \langle \overline{\nabla}_{E_k} AE_k, \partial_t \rangle + \langle AE_k, \overline{\nabla}_{E_k} \partial_t \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_{E_k} (\sum_l h_{kl} E_l), \partial_t \rangle \\ &= \sum_l E_k(h_{kl}) \langle E_l, \partial_t \rangle + \sum_l h_{kl} \langle \overline{\nabla}_{E_k} E_l, \partial_t \rangle \\ &= \sum_l E_k(h_{kl}) \langle E_l, \sum_j \alpha_j E_j + \langle N, \partial_t \rangle N \rangle \\ &\quad + \sum_l h_{kl} \langle \overline{\nabla}_{E_k} E_l, \partial_t^\top + \langle N, \partial_t \rangle N \rangle \\ &= \sum_l E_k(h_{kl}) \alpha_l + \sum_l h_{kl} \langle \overline{\nabla}_{E_k} E_l, \langle N, \partial_t \rangle N \rangle \\ &= \sum_l E_k(h_{kl}) \alpha_l + \langle N, \partial_t \rangle \sum_l h_{kl} \langle \overline{\nabla}_{E_k} E_l, N \rangle. \end{aligned}$$

Acima usamos que a parte tangente de $\overline{\nabla}_{E_k} E_l$ é nula em p, uma vez que o referencial foi tomado geodésico em p.

Como N é ortogonal ao espaço tangente onde E_l está inserido, vale $\langle E_l, N \rangle = 0$, daí

$$E_k \langle E_l, N \rangle = 0 \Rightarrow \langle \overline{\nabla}_{E_k} E_l, N \rangle = \langle E_l, -\overline{\nabla}_{E_k} N \rangle = \langle E_l, AE_k \rangle.$$

Sendo A autoadjunta, temos $\langle \overline{\nabla}_{E_k} E_l, N \rangle = \langle \overline{\nabla}_{E_l} E_k, N \rangle$ e daí

$$h_{kl} = \langle AE_k, E_l \rangle = \langle \overline{\nabla}_{E_k} E_l, N \rangle.$$

Portanto,

$$E_k\langle AE_k, \partial_t\rangle = \sum_l E_k(h_{kl})\alpha_l + \langle N, \partial_t\rangle \sum_l h_{kl}^2.$$

Assim, pela equação (2.6), temos no ponto p,

$$\begin{aligned}
\triangle\eta &= -\sum_k(\sum_l E_k(h_{kl})\alpha_l + \langle N, \partial_t\rangle \sum_l h_{kl}^2) \\
&= -(\sum_{k,l} E_k(h_{kl})\alpha_l + \langle N, \partial_t\rangle \sum_{k,l} h_{kl}^2) \\
&= -(\sum_{k,l} E_k(h_{kl})\alpha_l + \langle N, \partial_t\rangle |A|^2). \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Analisemos, agora, o valor de $\sum_{k,l} E_k(h_{kl})\alpha_l$. Como $h_{kl} = \langle \overline{\nabla}_{E_l} E_k, N\rangle$, temos que

$$\begin{aligned}
E_k(h_{kl}) &= E_k\langle \overline{\nabla}_{E_l} E_k, N\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{E_k}\overline{\nabla}_{E_l} E_k, N\rangle + \langle \overline{\nabla}_{E_l} E_k, \overline{\nabla}_{E_k} N\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{E_k}\overline{\nabla}_{E_l} E_k, N\rangle - \langle \overline{\nabla}_{E_l} E_k, AE_k\rangle.
\end{aligned}$$

Sendo o referencial ortonormal $\{E_k\}_{k=1}^n$ geodésico em p, temos $(\overline{\nabla}_{E_l} E_k)^\top = 0$ em p e daí $\langle \overline{\nabla}_{E_l} E_k, AE_k\rangle = 0$ e, assim, obtemos

$$E_k(h_{kl}) = \langle \overline{\nabla}_{E_k}\overline{\nabla}_{E_l} E_k, N\rangle.$$

Agora, observemos que $\overline{\nabla}_{[E_l, E_k]} E_k = 0$, pois sendo $\{E_k\}_{k=1}^n$ um referencial ortonormal geodésico em p, temos que

$$\begin{aligned}
[E_l, E_k] &= \overline{\nabla}_{E_l} E_k - \overline{\nabla}_{E_k} E_l \\
&= \nabla_{E_l} E_k + \langle AE_k, N\rangle N - \nabla_{E_k} E_l - \langle AE_k, E_l\rangle N \\
&= \langle AE_l, E_k\rangle N - \langle AE_k, E_l\rangle N = 0.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
E_k(h_{kl}) &= \langle \overline{\nabla}_{E_k}\overline{\nabla}_{E_l} E_k, N\rangle - \langle \overline{\nabla}_{E_l}\overline{\nabla}_{E_k} E_k, N\rangle + \langle \overline{\nabla}_{E_l}\overline{\nabla}_{E_k} E_k, N\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{E_k}\overline{\nabla}_{E_l} E_k - \overline{\nabla}_{E_l}\overline{\nabla}_{E_k} E_k, N\rangle + \langle \overline{\nabla}_{E_l}\overline{\nabla}_{E_k} E_k, N\rangle \\
&= \langle \overline{R}(E_l, E_k)E_k, N\rangle + \langle \overline{\nabla}_{E_l}\overline{\nabla}_{E_k} E_k, N\rangle \\
&= -\langle \overline{R}(E_l, E_k)N, E_k\rangle + E_l\langle \overline{\nabla}_{E_k} E_k, N\rangle - \langle \overline{\nabla}_{E_k} E_k, \overline{\nabla}_{E_l} N\rangle \\
&= -\langle \overline{R}(E_l, E_k)N, E_k\rangle + E_l\langle AE_k, E_k\rangle + \langle \nabla_{E_k} E_k + \langle AE_k, E_k\rangle N, AE_l\rangle \\
&= -\langle \overline{R}(E_l, E_k)N, E_k\rangle + E_l\langle AE_k, E_k\rangle.
\end{aligned}$$

Somando, agora em k, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_k E_k(h_{kl}) &= -\sum_k \langle \overline{R}(E_l, E_k)N, E_k\rangle + E_l(\sum_k \langle AE_k, E_k\rangle)\\ &= -\overline{Ric}(E_l, N) + E_l(nH)\\ &= -\overline{Ric}(E_l, N),\end{aligned}$$

uma vez que H é constante.

Logo,

$$\begin{aligned}\sum_{k,l} E_k(h_{kl})\alpha_l &= -\sum_l \alpha_l \overline{Ric}(E_l, N) = -\overline{Ric}(\sum_l \alpha_l E_l, N)\\ &= -\overline{Ric}(\partial_t - \langle N, \partial_t\rangle N, N)\\ &= -\overline{Ric}(\partial_t, N) + \langle N, \partial_t\rangle \overline{Ric}(N, N).\end{aligned}$$

Notemos que

$$\overline{Ric}(\partial_t, N) = \overline{Ric}(N, \partial_t) = \sum_k \langle \overline{R}(N, E_k)\partial_t, E_k\rangle = 0.$$

De fato, temos que $[N, E_k] \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times M^n)$, daí $[N, E_k] = \alpha\partial_t + X$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\overline{\nabla}_{[N,E_k]}\partial_t = \alpha\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t + \overline{\nabla}_X\partial_t = 0$. Pela mesma razão, $\overline{\nabla}_N\partial_t = 0$. Logo,

$$\overline{R}(N, E_k)\partial_t = \overline{\nabla}_{[N,E_k]}\partial_t - \overline{\nabla}_N\overline{\nabla}_{E_k}\partial_t + \overline{\nabla}_{E_k}\overline{\nabla}_N\partial_t = 0$$

e, consequentemente,

$$\overline{Ric}(\partial_t, N) = 0.$$

Assim,

$$\sum_{k,l} E_k(h_{kl})\alpha_l = \langle N, \partial_t\rangle \overline{Ric}(N, N). \tag{2.10}$$

Substituindo a equação (2.10) na equação (2.9), obtemos

$$\begin{aligned}\triangle\eta &= -(\langle N, \partial_t\rangle \overline{Ric}(N, N) + \langle N, \partial_t\rangle |A|^2)\\ &= -(\overline{Ric}(N, N) + |A|^2)\eta.\end{aligned}$$

Para concluirmos a demonstração, provaremos que

$$\overline{Ric}(N, N) = \overline{Ric}(N^*, N^*) = Ric_M(N^*, N^*).$$

Como N^* é a projeção do campo vetorial normal unitário N sobre a fibra M^n, então $N = \eta\partial_t + N^*$, então

$$\begin{aligned}\overline{Ric}(N,N) &= \overline{Ric}(\eta\partial_t + N^*, \eta\partial_t + N^*)\\ &= \eta^2\overline{Ric}(\partial_t,\partial_t) + 2\eta\overline{Ric}(\partial_t, N^*) + \overline{Ric}(N^*,N^*).\end{aligned}$$

Sendo E_i^* a projeção do campo vetorial E_i sobre M^n, temos que $E_i = f_i\partial_t + E_i^*$, onde $f_i = \langle E_i, \partial_t\rangle$, daí

$$\begin{aligned}[\partial_t, E_i] &= \overline{\nabla}_{\partial_t}E_i - \overline{\nabla}_{E_i}\partial_t = \overline{\nabla}_{\partial_t}(f_i\partial_t + E_i^*) - \overline{\nabla}_{(f_i\partial_t + E_i^*)}\partial_t\\ &= \partial_t(f_i)\partial_t + f_i\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t + \overline{\nabla}_{\partial_t}E_i^* - f_i\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t - \overline{\nabla}_{E_i^*}\partial_t\\ &= \partial_t(f_i)\partial_t,\end{aligned}$$

e, assim, $\overline{\nabla}_{[\partial_t,E_i]}\partial_t = \partial_t(f_i)\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = 0.$ Temos também que $\overline{\nabla}_{E_i}\partial_t = 0.$ Então

$$\overline{R}(\partial_t, E_i)\partial_t = 0,$$

e, consequentemente,

$$\overline{Ric}(\partial_t,\partial_t) = \sum_{i=1}^{n}\langle\overline{R}(\partial_t,E_i)\partial_t, E_i\rangle = 0.$$

Como $0 = \overline{Ric}(\partial_t, N) = \eta\overline{Ric}(\partial_t,\partial_t) + \overline{Ric}(\partial_t, N^*)$, segue que $\overline{Ric}(\partial_t, N^*) = 0$. Logo,

$$\overline{Ric}(N,N) = \overline{Ric}(N^*,N^*) = Ric_M(N^*,N^*).$$

□

2.4 O Princípio do Máximo Generalizado de Omori-Yau

O próximo resultado é uma ferramenta analítica devido a H. Omori e S. T. Yau [8, 14], conhecido como o Princípio do Máximo Generalizado de Omori-Yau e será utilizado na demonstração do principal resultado desta dissertação.

Lema 2.4. *Sejam Σ^n uma variedade Riemanianna n-dimensional completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente e $f : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ uma função suave limitada inferiormente. Então existe uma sequência (p_k) em Σ^n tal que*

$$\lim_{k\to\infty} f(p_k) = \inf_{\Sigma} f, \ \lim_{k\to\infty}|\nabla f(p_k)| = 0 \ e \ \lim_{k\to\infty}\triangle f(p_k) \geq 0.$$

A demonstração deste resultado foge aos propósitos deste trabalho, mas pode ser encontrada em [3] e [11].

Capítulo 3

Um Teorema tipo Bernstein em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$

3.1 O Espaço Hiperbólico

Consideremos o semiespaço

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \, ; \;\; x_n > 0\},$$

e introduzamos em $\mathbb{H}^n$ a métrica Riemanniana $g = \langle \, , \rangle_{\mathbb{H}^n}$ cujas componentes são dadas por

$$g_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}, \tag{3.1}$$

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \quad , \quad \text{se } \; i = j \, , \\ 0 \quad , \quad \text{se } \; i \neq j \, . \end{cases}$$

denotam as componentes da métrica usual de $\mathbb{R}^n$. $\mathbb{H}^n$ é chamado o **espaço hiperbólico** de dimensão n.

Afirmamos que o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ tem curvatura seccional constante igual a -1.

De fato, faremos uma boa parte do cálculo numa situação mais geral.

Definição 3.1. *Duas métricas $\langle \; , \; \rangle$ e $\langle\langle \; , \; \rangle\rangle$ em uma variedade diferenciável M são ditas conformes se existe uma função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$, positiva, tal que para todo $p \in M$ e todo $u, v \in T_pM$ tem-se*

$$\langle u, v \rangle_p = f(p) \langle\langle u, v \rangle\rangle_p.$$

Notemos que a métrica (3.1) de $\mathbb{H}^n$ é conforme à métrica usual do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Consideremos em $\mathbb{H}^n$ a métrica

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{F^2},$$

onde F é uma função positiva diferenciável em $\mathbb{H}^n$ e observemos que esta métrica é conforme à métrica usual de $\mathbb{R}^n$. Denotemos por $g^{ij} = F^2\delta_{ij}$ a matriz inversa de g_{ij} e façamos $\log F = f$. Assim, indicando por $\frac{\partial}{\partial x_j} f = f_j$, temos

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = -\delta_{ik}\frac{2}{F^3}F_j = -2\frac{\delta_{ik}}{F^2}f_j.$$

Para o cálculo dos símbolos de Christoffel, temos que

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}\sum_m \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{mi} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij} \right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} F^2 \\
&= -\delta_{jk} f_i - \delta_{ki} f_j + \delta_{ij} f_k,
\end{aligned}$$

e daí concluímos que se os três índices são distintos, $\Gamma_{ij}^k = 0$, e, que para dois índices iguais, temos

$$\Gamma_{ij}^i = -f_j,\ \Gamma_{ii}^j = f_j,\ \Gamma_{ij}^j = -f_i,\ \Gamma_{ii}^i = -f_i.$$

Observemos que, para o cálculo dos coeficientes da curvatura, temos

$$\begin{aligned}
R_{ijij} &= \sum_l R_{iji}^l g_{lj} = R_{iji}^j g_{jj} = R_{iji}^j \frac{1}{F^2} \\
&= \frac{1}{F^2}\left\{ \sum_l \Gamma_{ij}^l \Gamma_{jl}^j - \sum_l \Gamma_{ji}^l \Gamma_{il}^j + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_{ii}^j - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma_{ji}^j \right\}.
\end{aligned}$$

Como $\frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_{ii}^j = f_{jj}$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma_{ji}^j = -f_{ii}$, teremos

$$\begin{aligned}
F^2 R_{ijij} &= -\sum_{l, l\neq i, l\neq j} f_l f_l + f_i^2 - f_j^2 - f_i^2 + f_j^2 + f_{jj} + f_{ii} \\
&= -\sum_l f_l^2 + f_i^2 + f_j^2 + f_{ii} + f_{jj}.
\end{aligned}$$

Além disto, se os quatro índices são distintos, $R_{ijkl} = 0$, e, que para três índices distintos, temos

$$R_{ijk}^i = -f_k f_j - f_{kj},\ R_{ijk}^j = f_i f_k + f_{ki},\ R_{ijk}^k = 0. \tag{3.2}$$

Finalmente, como $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ são ortogonais, a curvatura seccional do plano gerado por $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ é

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \frac{R_{ijij}}{g_{ii}g_{jj}} = R_{ijij}F^4 \\ &= \left(-\sum_l f_l^2 + f_i^2 + f_j^2 + f_{ii} + f_{jj}\right)F^2. \end{aligned}$$

Particularizando para o caso $F^2 = x_n^2$, obtemos $f = \log x_n$. Neste caso, se $i \neq j$ e $j \neq n$, teremos

$$K_{ij} = (-\frac{1}{x_n^2})x_n^2 = -1;$$

se $i = n$, $j \neq n$, teremos

$$K_{nj} = (-f_n^2 + f_n^2 + f_{nn})F^2 = -\frac{1}{x_n^2}x_n^2 = -1;$$

finalmente, se $i \neq j$, $j = n$, teremos ainda $K_{in} = -1$. Usando as expressões em (3.2) e a Proposição 1.18, concluimos que a curvatura seccional de $\mathbb{H}^n$ é constante e igual a -1. Provando assim nossa afirmação.

É possivel mostrar que as geodésicas (retas perpendiculares ao hiperplano $x_n = 0$ e círculos de $\mathbb{H}^n$ contidos em planos perpendiculares ao hiperplano x_n=0 e cujos centros estão neste hiperplano) de $\mathbb{H}^n$ estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, o Teorema de Hopf e Rinow (Teorema 1.41) nos garante que $\mathbb{H}^n$ é completa.

3.2 Um Teorema tipo Bernstein em $\mathbb{R}\times\mathbb{H}^n$

Vamos, agora, enunciar e provar o principal resultado deste trabalho.

Teorema 3.2. *Sejam $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R}\times\mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície completa com segunda forma fundamental A limitada e curvatura média H constante. Suponhamos que a função ângulo η de Σ^n verifique $\eta \geq \delta > 0$, para uma escolha apropriada do campo de vetores normais unitários N e para alguma constante δ, e que a função altura h satisfaça*

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{\alpha}{n-1}|A|^2, \tag{3.3}$$

para alguma constante $0 < \alpha < 1$. Então Σ^n é um slice.

Demonstração. Pela condição dada da função ângulo, podemos escolher sobre Σ^n um campo vetorial normal unitário N tal que $\langle N, \partial_t \rangle \geq \delta > 0$. Daí segue que

$$\inf_{p \in \Sigma} \eta(p)$$

existe e é um número positivo.

Por outro lado, pelo Lema 2.3, obtemos que

$$\Delta\eta = -(Ric_{\mathbb{H}^n}(N^*, N^*) + |A|^2)\eta,$$

onde N^* é a projeção do campo vetorial normal unitário N sobre $\mathbb{H}^n$, isto é, $N^* = N - \eta\partial_t$.

Como a curvatura seccional de $\mathbb{H}^n$ é igual a -1, temos que

$$R_{\mathbb{H}^n}(X, Y)Z = -(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X)$$

quaisquer que sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$. Daí, tomando um referencial ortonormal local $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de $\mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$, temos que

$$\begin{aligned}
Ric_{\mathbb{H}^n}(N^*, N^*) &= \sum_i \langle R_{\mathbb{H}^n}(N^*, X_i)N^*, X_i \rangle_{\mathbb{H}^n} \\
&= \sum_i \langle -(\langle N^*, N^* \rangle_{\mathbb{H}^n} X_i - \langle X_i, N^* \rangle_{\mathbb{H}^n} N^*), X_i \rangle_{\mathbb{H}^n} \\
&= \sum_i \langle -(\langle N^*, N^* \rangle_{\mathbb{H}^n} \langle X_i, X_i \rangle_{\mathbb{H}^n} + \langle X_i, N^* \rangle^2_{\mathbb{H}^n}) \\
&= -\sum_i (\langle N^*, N^* \rangle_{\mathbb{H}^n} - \langle X_i, N^* \rangle^2_{\mathbb{H}^n}) \\
&= -n\langle N^*, N^* \rangle_{\mathbb{H}^n} + \sum_i \langle X_i, N^* \rangle_{\mathbb{H}^n} \langle X_i, N^* \rangle_{\mathbb{H}^n} \\
&= -n\langle N^*, N^* \rangle_{\mathbb{H}^n} + \langle N^*, N^* \rangle_{\mathbb{H}^n} \\
&= -(n-1)\langle N^*, N^* \rangle_{\mathbb{H}^n}.
\end{aligned}$$

Como $N^* = N - \eta\partial_t$, temos que $\langle N^*, N^* \rangle_{\mathbb{H}^n} = 1 - \eta^2$ e, usando a equação (2.5), obtemos

$$Ric_{\mathbb{H}^n}(N^*, N^*) = -(n-1)|\nabla h|^2.$$

Portanto,

$$\triangle\eta = -(-(n-1)|\nabla h|^2 + |A|^2)\eta = ((n-1)|\nabla h|^2 - |A|^2)\eta.$$

Da hipótese (3.3), obtemos que $(n-1)|\nabla h|^2 \leq \alpha |A|^2$ e daí temos que

$$\triangle \eta \leq (\alpha |A|^2 - |A|^2)\eta = -(1-\alpha)|A|^2\eta \leq 0, \tag{3.4}$$

para alguma constante $0 < \alpha < 1$.

Vamos, agora, mostrar que a curvatura de Ricci de Σ^n, Ric_Σ, é limitada inferiormente.

Observemos que se $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal local de Σ^n, então, pelo Lema 2.2, temos

$$Ric_\Sigma(X, X) = \sum_i \langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i\rangle + nH\langle AX, X\rangle - \langle AX, AX\rangle.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} -nH\langle AX, X\rangle + \langle AX, AX\rangle &\leq |-nH\langle AX, X\rangle + \langle AX, AX\rangle| \\ &\leq n|H||\langle AX, X\rangle| + |\langle AX, AX\rangle| \\ &\leq (n|H||A| + |A|^2)|X|^2 \end{aligned}$$

e daí

$$nH\langle AX, X\rangle - \langle AX, AX\rangle \geq -(n|H||A| + |A|^2)|X|^2.$$

Assim,

$$Ric_\Sigma(X, X) \geq \sum_i \langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i\rangle - (n|H||A| + |A|^2)|X|^2.$$

Temos que

$$\langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i\rangle = \langle \overline{R}(X^*, E_i^*)X^*, E_i^*\rangle,$$

onde $X^* = X - \langle X, \partial_t\rangle\partial_t$ e $E_i^* = E_i - \langle E_i, \partial_t\rangle\partial_t$ são as projeções dos campos vetoriais tangentes X e E_i em $\mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$, respectivamente. Daí,

$$\begin{aligned} \langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i\rangle &= \langle \overline{R}(X^*, E_i^*)X^*, E_i^*\rangle_{\mathbb{H}^n} \\ &= -(\langle X^*, X^*\rangle_{\mathbb{H}^n}\langle E_i^*, E_i^*\rangle_{\mathbb{H}^n} - \langle E_i^*, X^*\rangle_{\mathbb{H}^n}\langle X^*, E_i^*\rangle_{\mathbb{H}^n}) \\ &= -(\langle X^*, X^*\rangle_{\mathbb{H}^n}\langle E_i^*, E_i^*\rangle_{\mathbb{H}^n} - \langle X^*, E_i^*\rangle_{\mathbb{H}^n}^2). \end{aligned}$$

Substituindo os valores dos campos, temos

$$
\begin{aligned}
\langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i\rangle &= -(\langle X - \langle X, \partial_t\rangle\partial_t, X - \langle X, \partial_t\rangle\partial_t\rangle\langle E_i - \langle E_i, \partial_t\rangle\partial_t, E_i - \langle E_i, \partial_t\rangle\partial_t\rangle \\
&\quad -\langle X - \langle X, \partial_t\rangle\partial_t, E_i - \langle E_i, \partial_t\rangle\partial_t\rangle^2) \\
&= -(((\langle X, X\rangle - \langle X, \partial_t\rangle^2 - \langle X, \partial_t\rangle^2 \\
&\quad +\langle X, \partial_t\rangle^2\langle \partial_t, \partial_t\rangle)(|E_i|^2 - \langle E_i, \partial_t\rangle^2) \\
&\quad -(\langle X, E_i\rangle - \langle E_i, \partial_t\rangle\langle X, \partial_t\rangle - \langle X, \partial_t\rangle\langle E_i, \partial_t\rangle + \langle X, \partial_t\rangle\langle E_i, \partial_t\rangle)^2) \\
&= -((|X|^2 - \langle X, \partial_t\rangle^2)(1 - \langle E_i, \partial_t\rangle^2) - (\langle X, E_i\rangle - \langle E_i, \partial_t\rangle\langle X, \partial_t\rangle)^2 \\
&= -(|X|^2 - |X|^2\langle E_i, \partial_t\rangle^2 - \langle X, \partial_t\rangle^2 + \langle X, \partial_t\rangle^2\langle E_i, \partial_t\rangle^2 \\
&\quad -(\langle X, E_i\rangle^2 - 2\langle X, E_i\rangle\langle E_i, \partial_t\rangle\langle X, \partial_t\rangle + \langle E_i, \partial_t\rangle^2\langle X, \partial_t\rangle^2)).
\end{aligned}
$$

Tomando a somatória em i, obtemos

$$
\begin{aligned}
\sum_i \langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i\rangle &= -(n|X|^2 - |X|^2\sum_i\langle E_i, \partial_t\rangle^2 - n\langle X, \partial_t\rangle^2 \\
&\quad + \langle X, \partial_t\rangle^2\sum_i\langle E_i, \partial_t\rangle^2 - \sum_i\langle X, E_i\rangle^2 \\
&\quad + 2\langle X, \partial_t\rangle\sum_i\langle X, E_i\rangle\langle E_i, \partial_t\rangle - \langle X, \partial_t\rangle^2\sum_i\langle E_i, \partial_t\rangle^2) \\
&= -(n|X|^2 - |X|^2\sum_i\langle E_i, \partial_t^\top\rangle^2 - n\langle X, \partial_t^\top\rangle^2 \\
&\quad + \langle X, \partial_t^\top\rangle^2\sum_i\langle E_i, \partial_t^\top\rangle^2 - \langle X, \sum_i\langle X, E_i\rangle E_i\rangle \\
&\quad + 2\langle X, \partial_t^\top\rangle\langle\sum_i\langle X, E_i\rangle E_i, \partial_t^\top\rangle - \langle X, \partial_t^\top\rangle^2\sum_i\langle E_i, \partial_t^\top\rangle) \\
&= -(n|X|^2 - |X|^2\sum_i\langle E_i, \nabla h\rangle^2 - n\langle X, \nabla h\rangle^2 \\
&\quad + \langle X, \nabla h\rangle\sum_i\langle E_i, \nabla h\rangle^2 - \langle X, X\rangle \\
&\quad + 2\langle X, \nabla h\rangle\langle X, \nabla h\rangle - \langle X, \nabla h\rangle\sum_i\langle E_i, \nabla h\rangle^2) \\
&= -(n|X|^2 - |X|^2\langle\sum_i\langle \nabla h, E_i\rangle E_i, \nabla h\rangle \\
&\quad - n\langle X, \nabla h\rangle^2 + \langle X, \nabla h\rangle\langle\sum_i \nabla h, E_i\rangle E_i, \nabla h\rangle - |X|^2 \\
&\quad + 2\langle X, \nabla h\rangle^2 - \langle X, \nabla h\rangle\langle\sum_i\langle \nabla h, E_i\rangle E_i, \nabla h\rangle)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= -((n-1)|X|^2 - |X|^2|\nabla h|^2 - n\langle X, \nabla h\rangle^2 \\
&\quad + \langle X, \nabla h\rangle|\nabla h|^2 + 2\langle X, \nabla h\rangle^2 - \langle X, \nabla h\rangle|\nabla h|^2) \\
&= -((n-1)|X|^2 - |X|^2|\nabla h|^2 - (n-2)\langle X, \nabla h\rangle^2) \\
&= -(n-1)|X|^2 + |\nabla h|^2|X|^2 + (n-2)\langle X, \nabla h\rangle^2.
\end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\sum_i \langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i\rangle \geq -(n-1)|X|^2.$$

Portanto,

$$Ric_\Sigma(X, X) \geq -(n-1)|X|^2 - (n|H||A| + |A|^2)|X|^2,$$

ou seja,

$$Ric_\Sigma(X, X) \geq -((n-1) + n|H||A| + |A|^2)|X|^2, \tag{3.5}$$

para qualquer $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Consequentemente, como estamos supondo que H é constante e A é limitada, temos que Ric_Σ é limitada inferiormente.

Agora, estamos em condições de aplicar o Lema 2.4 para a função ângulo η e, assim, garantir a existência de uma sequência de pontos (p_k) em Σ^n tal que

$$\lim_{k\to\infty} \triangle\eta(p_k) \geq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} \eta(p_k) = \inf_\Sigma \eta.$$

Consequentemente,

$$\lim_{k\to\infty} \eta^2(p_k) = \inf_\Sigma \eta^2.$$

Portanto, de (3.4), obtemos

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \triangle\eta(p_k) \leq -(1-\alpha) \lim_{k\to\infty} |A|^2(p_k) \inf_\Sigma \eta \leq 0.$$

Desde que $\inf_\Sigma \eta$ é um número positivo, segue que

$$\lim_{k\to\infty} |A|^2(p_k) = 0.$$

Agora, usando mais uma vez a hipótese (3.3), obtemos

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} |\nabla h|^2(p_k) \leq \frac{\alpha}{n-1} \lim_{k\to\infty} |A|^2(p_k) = 0$$

e daí

$$\lim_{k\to\infty} |\nabla h|^2(p_k) = 0,$$

o que implica pela relação (2.5) que

$$\inf_{\Sigma} \eta^2 = \lim_{k \to \infty} \eta^2(p_k) = 1.$$

Mas $\eta^2 \leq 1$, portanto, $\eta^2 \equiv 1$ ou $|\nabla h|^2 \equiv 0$. Logo existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $h \equiv t_0$ e, consequentemente, Σ^n é um slice.

□

Observemos que

$$nH^2 \leq |A|^2. \tag{3.6}$$

De fato, consideremos os vetores

$$u = (\overbrace{k_1, ..., k_1}^{n-vezes}, \overbrace{k_2, ..., k_2}^{n-vezes}, ..., \overbrace{k_n, ..., k_n}^{n-vezes}),$$

$$v = (k_1, ..., k_n, \quad k_1, ..., k_n, \quad ..., \quad k_1, ..., k_n) \in \mathbb{R}^{n^2},$$

onde os k_i são os autovalores de A.

Assim,

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= k_1 \textstyle\sum_i k_i + k_2 \sum_i k_i + ... + k_n \sum_i k_i \\ &= \textstyle\sum_j k_j \sum_i k_i = n^2 H^2. \end{aligned}$$

Notemos que

$$|u|^2 = nk_1^2 + nk_2^2 + ... + nk_n^2 = n|A|^2$$

e

$$|v|^2 = \underbrace{\sum_i k_i^2 + \sum_i k_i^2 + ... + \sum_i k_i^2}_{n-vezes} = n|A|^2.$$

Logo, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u||v| = |u|^2$$

e daí

$$n^2 H^2 \leq n|A|^2 \quad \text{ou} \quad nH^2 \leq |A|^2,$$

como queríamos.

Do Teorema 3.2, obtemos o

Corolário 3.3. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície completa com segunda forma fundamental A limitada e curvatura média H constante. Suponhamos que uma das seguintes condições é satisfeita:*

(*a*) *A função ângulo η de Σ^n verifique $\eta \geq \delta > 0$, para uma escolha apropriada do campo de vetores normais unitários N e para alguma constante δ.*

(*b*) $H^2 \leq \frac{n-1}{n}$.

Se a função altura h de Σ^n é tal que

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{n\alpha}{n-1} H^2, \tag{3.7}$$

para alguma constante $0 < \alpha < 1$, então Σ^n é um slice.

Demonstração. Suponhamos que a condição (a) é satisfeita. Da desigualdade (3.6) e da hipótese (3.7), concluímos que

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{n\alpha}{n-1} H^2 \leq \frac{\alpha}{n-1} |A|^2,$$

ou seja, a hipótese (3.3) é verificada e, portanto, o resultado segue do Teorema 3.2.

No caso da condição (b) ser satisfeita, a hipótese (3.7) nos dá

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{n\alpha}{n-1} H^2 \leq \alpha < 1.$$

Assim, pela equação (2.5), temos que

$$\eta^2 = 1 - |\nabla h|^2 \geq 1 - \alpha > 0.$$

Portanto, a função ângulo η satisfaz a condição (a) e, assim, o resultado segue como no caso anterior.

□

3.3 Gráficos Verticais Completos em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$

Nesta última seção, vamos estudar o caso em que a hipersuperfície imersa é um gráfico vertical.

Seja $\Sigma^n(u)=\{(u(x),x);x\in\Omega\}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{H}^n$ um gráfico vertical completo. Temos que a função $g:\mathbb{R}\times\mathbb{H}^n\to\mathbb{R}$, dada por $g(t,x)=t-u(x)$, é tal que $\Sigma^n(u)=g^{-1}(0)$. De fato,

$$\begin{aligned}
g^{-1}(0) &= \{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{H}^n; g(t,x)=0\}\\
&= \{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{H}^n; t=u(x)\}\\
&= \{(u(x),x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{H}^n\}\\
&= \{(u(x),x); x\in\mathbb{H}^n\}\\
&= \Sigma^n(u).
\end{aligned}$$

Além disso, para todo campo vetorial X tangente a $\mathbb{R}\times\mathbb{H}^n$, sendo $X^*=X-\langle X,\partial_t\rangle\partial_t$ a projeção de X em $\mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$, $\overline{\nabla}g$ o gradiente de g e Du o gradiente de u em $\mathbb{H}^n$, então

$$\begin{aligned}
\langle\overline{\nabla}g,X\rangle &= X(g)=\langle X,\partial_t\rangle\partial_t(g)+X^*(g)\\
&= \langle X,\partial_t\rangle - X^*(u)=\langle X,\partial_t\rangle-\langle Du,X^*\rangle\\
&= \langle\partial_t,X\rangle-\langle Du,X\rangle\\
&= \langle\partial_t-Du,X\rangle,
\end{aligned}$$

pois Du é tangente a $\mathbb{H}^n$. Portanto,

$$\overline{\nabla}g(u(x),x)=\partial_t|_{(u(x),x)}-Du(x),$$

para todo x em $\mathbb{H}^n$. Assim, o campo vetorial unitário

$$N(x)=\frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}(\partial_t|_{(u(x),x)}-Du(x)),\ x\in\mathbb{H}^n,$$

onde $|Du|$ é a norma com respeito à métrica hiperbólica $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{H}^n}$, define a orientação de $\Sigma^n(u)$ tal que $\eta=\frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}>0$. Consequentemente, de acordo com a equação (2.5), temos

$$\begin{aligned}
|\nabla h|^2 &= 1-\langle N,\partial_t\rangle^2\\
&= 1-\langle\frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}(\partial_t|_{(u(x),x)}-Du(x)),\partial_t\rangle^2\\
&= 1-\frac{1}{1+|Du|^2}(\langle\partial_t|_{(u(x),x)},\partial_t\rangle-\langle Du(x),\partial_t\rangle)^2\\
&= 1-\frac{1}{1+|Du|^2},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|\nabla h|^2 = \frac{|Du|^2}{1 + |Du|^2}. \tag{3.8}$$

Do Teorema 3.2 e da equação (3.8), temos

Corolário 3.4. *Seja $\Sigma^n(u)$ um gráfico vertical completo em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$, com segunda forma fundamental A limitada e curvatura média H constante. Suponhamos que a função ângulo η de $\Sigma^n(u)$ verifique $\eta \geq \delta > 0$, para uma escolha apropriada do campo de vetores normais unitários N e para alguma constante δ. Se a função u satisfaz*

$$|Du|^2 \leq \frac{1}{n-1}|A|^2, \tag{3.9}$$

então $u \equiv t_o$ para algum $t_o \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Da hipótese (3.9) e da equação (3.8), temos que

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{1+|Du|^2}\right)|A|^2.$$

Considerando α tal que $0 < \alpha < \dfrac{1}{1+|Du|^2}$ obtemos que

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{\alpha}{n-1}|A|^2,$$

com $0 < \alpha < 1$, que é a hipótese (3.3) do Teorema 3.2. Portanto, aplicando o Teorema 3.2, $\Sigma^n(u)$ é um slice, logo a função altura h é constante e, consequentemente, $|\nabla h|^2 \equiv 0$. Sendo $|\nabla h|^2 = \dfrac{|Du|^2}{1+|Du|^2}$, temos que $Du \equiv 0$, logo existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $u \equiv t_0$. □

Finalmente, o Corolário 3.3 juntamente com a equação (3.8) nos fornecem o

Corolário 3.5. *Seja $\Sigma^n(u)$ um gráfico vertical completo em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$, com segunda forma fundamental limitada e curvatura média H constante. Suponhamos que uma das seguintes condições é satisfeita:*

(a) A função ângulo η de $\Sigma^n(u)$ verifique $\eta \geq \delta > 0$, para uma escolha apropriada do campo de vetores normais unitários N e para alguma constante δ.

(b) $H^2 \leq \dfrac{n-1}{n}$.

Se $|Du|^2 \leq \dfrac{n}{n-1}H^2$*, então* $u \equiv t_0$ *para algum* $t_0 \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Suponhamos que a condição (a) seja satisfeita. Da equação (3.8) e da hipótese $|Du|^2 \leq \dfrac{n}{n-1}H^2$, obtemos

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{1+|Du|^2}H^2.$$

Considerando α tal que $0 < \alpha < \dfrac{1}{1+|Du|^2}$ obtemos que

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{n\alpha}{n-1}H^2,$$

com $0 < \alpha < 1$, que é a hipótese (3.7) do Corolário 3.3. Portanto, aplicando o Corolário 3.3, $\Sigma^n(u)$ é um slice. Logo, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $u \equiv t_0$.

Suponhamos, agora, que a condição (b) é satisfeita, então a equação (3.8), juntamente com a hipótese $|Du|^2 \leq \dfrac{n}{n-1}H^2$, nos dão $|\nabla h|^2 \leq \dfrac{n}{n-1} \cdot \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{1}{1+|Du|^2}$, ou seja, $|\nabla h|^2 \leq \dfrac{1}{1+|Du|^2}$. Tomando α tal que $0 < \alpha < \dfrac{1}{1+|Du|^2}$, obtemos que $|\nabla h|^2 \leq \alpha < 1$. Assim, pela equação (2.5), temos que

$$\eta^2 = 1 - |\nabla h|^2 \geq 1 - \alpha > 0.$$

Logo, a função ângulo η satisfaz a condição (a). Portanto, o resultado segue como no caso anterior.

□

Referências Bibliográficas

[1] ALIAS, L.J.; DAJCZER, M; RIPOLL, J. *A Bernstein-type Theorem for Riemannian manifolds with a Killing field*, Ann. Glob. Anal. Geom. **31**, 363-373, 2007.

[2] BÉRARD, P.; EARP, R. S. *Examples of H-hypersurfaces in* $\mathbb{R}\times\mathbb{H}^n$ *and geometric applications*, Mat. Contemp. **34**, 19-51, 2008.

[3] BEZERRA, K.S. *Um teorema de rigidez para hipersuperfícies CMC completas em variedades de Lorentz*, Universidade Federal do Ceará (UFC), (Dissertação de Mestrado), 2009.

[4] BOMBIERI, E.; GIORGI, E. de; GIUSTI, E. *Minimal cones and Bernstein problem*, Invent. Math. **7**, 243-268, 1969.

[5] DoCARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*, Instituto de Matemática pura e aplicada-IMPA, Rio de Janeiro, 4ª Edição, 2008.

[6] ESPINAR, J.M.; ROSENBERG, H. *Complete constant mean curvature surfaces and Bernstein type theorems in* $M^2\times\mathbb{R}$, J. Diff. Geom. **82**, 611-628, 2009.

[7] LIMA, H.F.; PARENTE, U.L. *A Bernstein type theorem in* $\mathbb{R}\times\mathbb{H}^n$, Bull. Braz Math Soc, New Series **43(1)**, 17-26, 2012.

[8] OMORI, H. *Isometric immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan.**19**, 205-214, 1967.

[9] O'NEILL, B. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, Los Angeles, 1983.

[10] PARENTE, U.L. *Alguns Resultados Tipo-Bernstein em Variedades Semi-Riemannianas*, Universidade Federal do Ceará (UFC), (Tese de Doutorado), 2011.

[11] PIGOLA, S.; RIGOLI, M.; SETTI, A.G. *Maximum principles on Riemannian Manifolds and applications*, Memoirs of the American Math. Soc., vol. 174, number 822, 2005.

[12] ROSENBERG, H. *Minimal surfaces in* $M^2 \times \mathbb{R}$, Illinois J. Math., **46**, 1177-1195, 2012.

[13] SIMONS, J. *Minimals varieties in Riemannian manifolds*,Ann. of Math., **88**, 62-105, 1968.

[14] YAU, S.T. *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*, Comm. Pure Appl. Math., **28** 201-228, 1975.