Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de soluções positivas para a seguinte classe de problemas

$$-\Delta u + \lambda u = Q(x)|u|^{p-2}u \quad \text{em} \quad \Omega,$$

onde Ω é um domínio não limitado do $\mathbb{R}^N$. Usando métodos variacionais e argumentos desenvolvidos por P. L. Lions [14], Strauss [16], Willem [18] e Benci & Cerami [4], mostramos a existência de soluções positivas quando $\Omega = \mathbb{R}^N$ ou Ω um domínio exterior.

Abstract

In this work, we are studying the existence of positive solutions for the following class of problem:

$$-\Delta u + \lambda u = Q(x)|u|^{p-2}u \quad \text{em} \quad \Omega,$$

where Ω is a unbounded domain in $\mathbb{R}^N$. Using variational methods and arguments developed by P. L. Lions [14], Strauss [16], Willem [18] and Benci & Cerami [4], let us show the existence of positive solutions when $\Omega = \mathbb{R}^N$ and Ω is an exterior domain.

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência de Soluções Positivas para uma Classe de Problemas Elípticos não Lineares em Domínios não Limitados

por

Luís Paulo de Lacerda Cavalcante

sob orientação do

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB
22 de Outubro de 2004

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Existência de Soluções Positivas para uma Classe de Problemas Elípticos não Lineares em Domínios não Limitados

por

Luís Paulo de Lacerda Cavalcante

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Paulo César Carrião - UFMG

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto - UFCG

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG

Orientador

22 de Outubro de 2004

Agradecimentos

- A Deus pelo Dom da Vida e pelo grande auxílio que me deu em todas as etapas deste trabalho.
- Ao professor Claudianor pela orientação sempre disponível e eficiente, que me permitiu adquirir os conhecimentos necessários para a minha formação. Pelo seu exemplo de profissional dedicado, paciente e ao mesmo tempo rigoroso.
- Aos professores Marco Aurélio e Paulo C. Carrião por se apresentarem disponível nesta tarefa de me avaliar, fazendo parte da banca examinadora.
- Ao meu pai, Severino, que sempre me apoiou nos estudos, tendo um papel fundamental na formação da minha pessoa como homem e profissional. A minha primeira mãe, Maria José, que me gerou e faleceu quando eu tinha apenas três anos. E a minha segunda mãe, Maria da Conceição, que me auxiliou nas primeiras lições escolares.
- A minha esposa Rosicleide, e às minhas filhas Lavínia e Lívia, por fazerem parte de minha vida.
- Aos meus irmãos Antônio Carlos, Marcelo, Ana Márcia e Mércia por todas as palavras de incentivo na minha vida e pelos favores feitos que me possibilitaram o término desta etapa.
- A todos que também fazem parte de minha família; como avós, tios, primos, cunhados, sobrinhos e sogros que acompanharam todo este processo de formação e sempre acreditaram em mim.
- Aos professores da Pós-Graduação: Daniel Cordeiro, Marco Aurélio e Bráulio pelas disciplinas que lecionaram e que contribuiram para a formação do meu conhecimento.
- A todos que fazem o departamento de Matemática e Estatística da UFCG.
- Aos meus amigos da Pós-Graduação: José Fernando, Cícero Alfredo, Dorival, Rúbia, Orlando e Thiciany pelos momentos que compartilhamos.
- A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Dedicatória

Aos meus amores Rosicleide, Lavínia e Lívia.

Conteúdo

Introdução 6

1 Teorema do Passo da Montanha **10**

1.1 Lema de deformação 10

1.2 Teorema do passo da montanha 16

2 Existência de Solução em $\mathbb{R}^N$ **20**

2.1 Simetria e compacidade 20

2.2 O caso simétrico 27

2.3 Um resultado de compacidade 35

2.4 O caso não simétrico 40

3 Soluções positivas em domínios exteriores **50**

3.1 Resultados preliminares 50

3.2 Um resultado de não existência de solução 52

3.3 Um lema de compacidade 56

3.4 Prova dos teoremas principais 80

A Funcionais diferenciáveis **104**

B Simetrização de Schwarz **113**

C Lema de Brézis e Lieb **121**

D Grau topológico de Brouwer **129**

E Resultados utilizados na dissertação **130**

Bibliografia **133**

Introdução

Na busca de soluções para as equações diferenciais parciais elípticas, algumas vezes, aparecem dificuldades naturais dependendo do domínio onde estamos trabalhando. Um dos problemas, que está diretamente relacionado ao domínio, é o fato deste não ser limitado, como exemplo disto temos o $\mathbb{R}^N$. Observemos que a invariância do $\mathbb{R}^N$ por translações nos mostra que não valem as imersões compactas de Sobolev neste domínio, e em geral, estas imersões não valem para um domínio não limitado qualquer.

Neste trabalho estamos interessados não apenas com a E.D.P. em si, mas com a parte geométrica do problema que é o domínio. Para isto vamos usar alguns resultados já bem conhecidos na área de equações diferenciais parciais elípticas, que estão relacionados com a falta de compacidade para seqüências minimizantes.

Vamos ao longo deste trabalho considerar problemas não lineares do tipo

$$(P_1) \qquad -\Delta u + \lambda u = Q(x)|u|^{p-2}u, \quad \Omega \ \text{ com } \ u \in H_o^1(\Omega)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio não limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ e $2 < p < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$. Sabe-se que encontrar soluções para o problema (P_1) equivale a encontrar pontos críticos do funcional energia $f : H_o^1(\Omega) \to \mathbb{R}^N$ definido por

$$f(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \lambda |u|^2\right) dx - \frac{1}{p}\int_\Omega Q(x)|u|^p dx.$$

No **Capítulo 1** estudamos o Teorema do Passo da Montanha, que será uma ferramenta de grande importância no decorrer da dissertação, sobretudo no estudo que desenvolvemos no Capítulo 2. Pois, quando um funcional satisfaz as hipóteses deste Teorema, damos um passo importante na busca por um ponto crítico não trivial para este funcional, e portanto, a solução do problema elíptico ao qual ele está associado.

No **Capítulo 2** mostramos a existência da solução para o problema (P_1) considerando $\Omega = \mathbb{R}^N$. Para tal, trabalhamos com o grupo das funções que são invariantes por rotações no $\mathbb{R}^N$, ou seja, as funções que pertencem a $H^1(\mathbb{R}^N)$ e são radialmente simétricas em $\mathbb{R}^N$ que é definido como sendo o seguinte conjunto

$$H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \ gu = u, \ \forall g \in O(N)\},$$

onde $O(N)$ é o grupo das rotações no $\mathbb{R}^N$. Neste capítulo, mostramos que vale a imersão compacta

$$H^1_{O(N)} \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \ \text{ para } 2 < p < 2^*$$

que é um ponto importante no nosso estudo.

Depois destes fatos, voltamos ao problema (P_1) e utilizando alguns resultados como o Teorema do Passo da Montanha, Princípios de Máximo e da Criticalidade Simétrica é possível mostrar que existe a solução positiva para o problema (P_1) no $\mathbb{R}^N$. Vale mencionar, também, que neste momento estaremos considerando a função $Q \equiv 1$. Além do mais, esta solução é radialmente simétrica e de classe $C^2(\mathbb{R}^N)$.

Logo em seguida, definimos a seguinte constante

$$M_\lambda = \inf \left\{ ||u||^2_{\mathbb{R}^N} : \ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \ com \ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1 \right\},$$

a qual mostramos que é atingida. Utilizando este fato, estudamos a existência de solução positiva do problema

$$(P_1) \qquad -\Delta u + \lambda u = Q(x)|u|^{p-2}u, \ \ \mathbb{R}^N \text{ com } u \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

onde $N \geq 3$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ e $2 < p < 2^*$ e $Q \in C(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo

$$1 = \lim_{|x| \to \infty} Q(x) = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} Q(x).$$

A partir daí, considerando $(u^+)(x) = max\,\{u(x), 0\}$ e o funcional $I : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + \lambda |u|^2 \right) dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u^+)^p dx$$

mostramos que qualquer seqüência $\{u_n\} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\sup_n I(u_n) < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\lambda^{\frac{p}{p-2}} \text{ e } I'(u_n) \to 0, \text{ quando } n \to \infty,$$

contém uma subseqüência convergente; esta propriedade juntamente com o Teorema do Passo da Montanha implica a existência de uma solução positiva para o problema (P_1).

Os resultados dos dois primeiros capítulos estão contidos nos trabalhos de P. L. Lions [14], Strauss [16] e Ding & Ni [7].

No **Capítulo 3** voltamos a trabalhar na procura de uma solução positiva para o problema (P_1) onde consideraremos $Q \equiv 1$, no entanto, Ω agora é um domínio exterior. Nestas condições mostramos que o problema (P_1) não tem *ground state solution* em $H_o^1(\Omega)$, ou seja, não existe $u \in H_o^1(\Omega)$ tal que

$$||u||^2 = M_\lambda \ \text{ e } \ |u|_p = 1,$$

onde $||.||$ e $|.|_p$ são normas definidas em $H_o^1(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$, respectivamente. Então, na busca por uma solução positiva para (P_1), recorremos a um Lema de Compacidade que é fundamental uma vez que para este tipo de domínio não valem as imersões compactas de Rellich. A partir deste Lema mostramos que, sob certas condições, o funcional I associado ao problema (P_1) satisfaz a condição Palais-Smale. Isto significa que dada uma seqüência $\{u_n\}$ em $H_o^1(\Omega)$, podemos extrair uma subseqüência convergente.

Resultados como deste lema somam-se a outros como o da Simetrização de Schwarz, o estudo feito por Guidas, Ni & Nirenberg sobre soluções positivas simétricas para Equações Elípticas no $\mathbb{R}^N$, as propriedades básicas do grau topológico de Brouwer e uma versão do Lema de Deformação para mostrar que vale o seguinte teorema

Teorema A: Considere $N \geq 3$, $2 < p < 2^*$ e considere $x_o \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Então para todo λ existe um $\rho = \rho(\lambda)$ tal que se

$$\mathbb{R}^N \setminus \Omega \ \subset \ B_\rho(x_o) = \{x \in \mathbb{R}^N : \ |x - x_o| \leq \rho\},$$

o problema (P_1) tem pelo menos uma solução positiva.

Além disso, fazendo mudança de variáveis mostramos que do Teorema A segue-se o Teorema B.

Teorema B: Assuma que valem as hipóteses do Teorema A para N e p. Então existe

$\lambda_o = \lambda_o(\Omega)$ tal que para cada $\lambda \in (0, \lambda_o)$ o problema (P_1), tem pelo menos uma solução positiva.

Este capítulo tem como principal referência o artigo de Benci & Cerami [4], além de outras referências que são de grande utilidade para esta parte do trabalho como Alves [1], Gidas, Ni & Nirenberg [9] e Kavian [11].

No **Apêndice A** colocamos a definição de funcional diferenciável, mostrando que os funcionais utilizados na dissertação são diferenciáveis. Numa segunda parte deste apêndice mostramos alguns resultados sobre os Espaços de Sobolev, sobretudo no que diz respeito as imersões contínuas e compactas nos Espaços L^p.

No **Apêndice B** mencionamos como podemos encontrar soluções radialmente simétricas para problemas elípticos, a partir de um método denominado Simetrização de Schwarz. Em seguida, aplicamos este para mostrar que o problema (P_1) tem solução simétrica em $\mathbb{R}^N$.

No **Apêndice C** verificamos alguns resultados de convergência devido Brézis e Lieb. Resultados estes que são bastante utilizados ao longo de todo estudo. O último lema mostrado neste apêndice é uma versão devido Alves, e que foi colocado a demonstração apenas para um caso particular.

No **Apêndice D**, temos os principais resultados da Teoria do Grau de Brouwer que são utilizados na dissertação.

Finalmente, no **Apêndice E** enuciamos os principais resultados utilizados durante o nosso estudo. Estes são resultados utilizados em várias áreas como: Análise Funcional, Teoria da Medida e Integração e E.D.P..

Capítulo 1

Teorema do Passo da Montanha

Nosso objetivo neste capítulo é demonstrar um dos teoremas mais importantes para encontrar solução de certas equações elípticas, que é o Teorema do Passo da Montanha.

1.1 Lema de deformação

Nesta seção vamos provar um lema que é fundamental na demonstração do Teorema do Passo da Montanha. No que segue utilizaremos a seguinte notação

$$I^d = \{u \in H : \ I(u) \leq d\}.$$

Lema 1.1 *Sejam H um espaço de Hilbert, $I \in C^2(H, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$. Assuma que*

$$||I^{'}(u)|| \geq 2\epsilon, \ \forall u \in I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]).$$

Então existe $\eta \in C(H, H)$ tal que
(i) $\eta(u) = u$, $\forall u \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$;
(ii) $\eta(I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$.

Demonstração: Considere os conjuntos:

$$A = I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]),$$
$$B = I^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$$

e a função Ψ definida por

$$\Psi(u) = \frac{dist(u, H \setminus A)}{dist(u, H \setminus A) + dist(u, B)}.$$

Observemos que $B \subset A$, pois se $u \in B$ por definição

$$c - \epsilon \leq I(u) \leq c + \epsilon$$

logo

$$c - 2\epsilon < c - \epsilon \leq I(u) \leq c + \epsilon < c + 2\epsilon$$

implicando que $u \in A$, e portanto $B \subset A$.

Note que, se $u \in B$, então $dist(u, B) = 0$ e assim

$$\Psi(u) = \frac{dist(u, H \setminus A)}{dist(u, H \setminus A)} = 1,$$

pois $dist(u, H \setminus A) > 0$.

Agora, se $u \in H \setminus A$, então $dist(u, H \setminus A) = 0$ e sendo $dist(u, B) > 0$ temos que

$$\Psi(u) = \frac{0}{0 + dist(u, B)} = 0.$$

Afirmação 1: A função Ψ é localmente Lipschitz contínua.

Por definição observa-se que Ψ é contínua, e portanto demonstraremos apenas que tal função é localmente Lipschitziana. Para simplificar os cálculos considere as notações:

$$f_1(u) = dist(u, H \setminus A) \text{ e } f_2(u) = dist(u, B),$$

e assim temos que

$$\Psi(u) - \Psi(v) = \frac{f_1(u)}{f_1(u) + f_2(u)} - \frac{f_1(v)}{f_1(v) + f_2(v)},$$

de onde segue

$$\Psi(u) - \Psi(v) = \frac{f_1(u)f_2(v) - f_1(v)f_2(u)}{[f_1(u) + f_2(u)][f_1(v) + f_2(v)]}.$$

Agora, podemos completar a expressão anterior, obtendo

$$\begin{aligned} \Psi(u) - \Psi(v) &= \frac{f_1(u)f_2(v) - f_1(v)f_2(v) + f_1(v)f_2(v) - f_1(v)f_2(u)}{[f_1(u) + f_2(u)][f_1(v) + f_2(v)]} \\ &= \frac{f_2(v)[f_1(u) - f_1(v)] + f_1(v)[f_2(v) - f_2(u)]}{[f_1(u) + f_2(u)][f_1(v) + f_2(v)]}. \end{aligned}$$

Desde que f_1 e f_2 são funções Lipschitzianas, então

$$|\Psi(u) - \Psi(v)| \leq \frac{f_2(v)||u - v|| + f_1(v)||u - v||}{[f_1(u) + f_2(u)][f_1(v) + f_2(v)]} = \frac{||u - v||}{f_1(u) + f_2(u)}.$$

Dado $\overline{w} \in H$, temos que $f_1(\overline{w}) + f_2(\overline{w}) > 0$, temos que existem uma vizinhança W de $\overline{w}$ e um $a > 0$ tais que

$$f_1(\overline{w}) + f_2(\overline{w}) \geq a > 0, \ \ \forall \overline{w} \in W.$$

Daí,

$$|\Psi(u) - \Psi(v)| \leq \frac{1}{a}||u - v||, \ \ \forall u, v \in W.$$

Provando com isto a afirmação 1.

Consideremos agora o seguinte campo vetorial em H definido por

$$\varphi(u) = \begin{cases} -\Psi(u)\frac{\nabla I(u)}{||\nabla I(u)||^2}, & se \ u \in A; \\ 0, & se \ u \in H \setminus A. \end{cases}$$

Afirmação 2: O campo vetorial φ é localmente Lipschitz contínua.

Desde que $I \in C^2(H, \mathbb{R})$, então $I^{'}(u)$ é um funcional linear contínuo em H (ver Apêndice A) que é um espaço de Hilbert, daí pelo Teorema da Representação de Riesz

$$I^{'}(u).h = \langle \nabla I(u), h \rangle, \ \ \forall h \in H \quad \text{e} \quad ||\nabla I(u)|| = ||I^{'}(u)||_{H'}.$$

Note que se $u \in H \setminus A$, então $\varphi(u) = 0$ implicando que

$$||\varphi(u)|| = 0 < \frac{1}{2\epsilon}.$$

Por outro lado, se $u \in A$, então

$$||\varphi(u)|| = \frac{|\Psi(u)|}{||\nabla I(u)||} \leq \frac{1}{2\epsilon},$$

pois $|\Psi(u)| \leq 1$ e $||\nabla I(u)|| \geq 2\epsilon$, para todo $u \in A$.

E assim,

$$||\varphi(u)|| \leq \frac{1}{2\epsilon}, \text{ para todo } u \in H.$$

Note que, na demonstração da Afimação 1, encontramos uma vizinhança W na qual a função Ψ é localmente Lipschitz contínua. No que segue u e v pertencem a W.

Supondo $u, \ v \in H \setminus A$, temos

$$||\varphi(u) - \varphi(v)|| = 0 \leq ||u - v||.$$

Por outro lado, sendo $u \in A$ e $v \in H \setminus A$ então

$$||\varphi(u)-\varphi(v)|| = \left\|-\Psi(u)\tfrac{\nabla I(u)}{||\nabla I(u)||^2}\right\|,$$

e desde que $\Psi(v)=0$, decorre que

$$||\varphi(u)-\varphi(v)|| = \left\|-\Psi(u)\tfrac{\nabla I(u)}{||\nabla I(u)||^2}+\Psi(v)\tfrac{\nabla I(u)}{||\nabla I(u)||^2}\right\| \leq \frac{1}{2\epsilon}|-\Psi(u)+\Psi(v)|.$$

Usando o fato de que Ψ é localmente Lipschitziana, segue-se

$$||\varphi(u)-\varphi(v)|| \leq \frac{1}{2a\epsilon}||u-v||.$$

Considerando $u,\ v \in A$, por definição temos

$$||\varphi(u)-\varphi(v)|| = \left\|-\Psi(u)\tfrac{\nabla I(u)}{||\nabla I(u)||^2}+\Psi(v)\tfrac{\nabla I(v)}{||\nabla I(v)||^2}\right\|.$$

Observe que podemos fazer o seguinte acréscimo

$$||\varphi(u)-\varphi(v)|| = \left\|-\Psi(u)\tfrac{\nabla I(u)}{||\nabla I(u)||^2}+\Psi(u)\tfrac{\nabla I(v)}{||\nabla I(v)||^2}-\Psi(u)\tfrac{\nabla I(v)}{||\nabla I(v)||^2}+\Psi(v)\tfrac{\nabla I(v)}{||\nabla I(v)||^2}\right\|,$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}||\varphi(u)-\varphi(v)|| = \ &\leq \Psi(u)\left\|\tfrac{\nabla I(u)}{||\nabla I(u)||^2}-\tfrac{\nabla I(v)}{||\nabla I(v)||^2}\right\|+\left\|\tfrac{\nabla I(v)}{||\nabla I(v)||^2}\right\|.|\Psi(u)-\Psi(v)| \\ &\leq \left\|\tfrac{\nabla I(u)}{||\nabla I(u)||^2}-\tfrac{\nabla I(v)}{||\nabla I(v)||^2}\right\|+\tfrac{1}{2\epsilon}|\Psi(u)-\Psi(v)|.\end{aligned}$$

Usando desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned}\left\|\tfrac{\nabla I(u)}{||\nabla I(u)||^2}-\tfrac{\nabla I(v)}{||\nabla I(v)||^2}\right\| &= \left\|\tfrac{\nabla I(u)}{||\nabla I(u)||^2}-\tfrac{\nabla I(u)}{||\nabla I(v)||^2}+\tfrac{\nabla I(u)}{||\nabla I(v)||^2}-\tfrac{\nabla I(v)}{||\nabla I(v)||^2}\right\| \\ &\leq \left\|\tfrac{\nabla I(u)}{||\nabla I(u)||^2}-\tfrac{\nabla I(u)}{||\nabla I(v)||^2}\right\|+\left\|\tfrac{\nabla I(u)}{||\nabla I(v)||^2}-\tfrac{\nabla I(v)}{||\nabla I(v)||^2}\right\|\end{aligned}$$

implicando em

$$\begin{aligned}\left\|\tfrac{\nabla I(u)}{||\nabla I(u)||^2}-\tfrac{\nabla I(v)}{||\nabla I(v)||^2}\right\| &\leq \|\nabla I(u)\|\left|\tfrac{||\nabla I(v)||^2-||\nabla I(u)||^2}{||\nabla I(u)||^2||\nabla I(v)||^2}\right|+\frac{1}{||\nabla I(v)||^2}\|\nabla I(u)-\nabla I(v)\| \\ &\leq \frac{1}{8\epsilon^3}\left|\tfrac{||\nabla I(v)||^2-||\nabla I(u)||^2}{||\nabla I(u)||^2||\nabla I(v)||^2}\right|+\frac{1}{4\epsilon^2}\|\nabla I(u)-\nabla I(v)\|\end{aligned}$$

Além disso, notemos que, sendo $I \in C^2(H,\mathbb{R})$, pelo Teorema do Valor Médio

$$\left\|\tfrac{\nabla I(u)}{||\nabla I(u)||^2}-\tfrac{\nabla I(v)}{||\nabla I(v)||^2}\right\| \leq c_1.||u-v||.$$

Desde que Ψ é localmente Lipschitziana, então

$$||\varphi(u)-\varphi(v)|| \leq c_1||u-v||+\frac{1}{2a\epsilon}||u-v|| = c_2||u-v||.$$

Deste modo

$$||\varphi(u) - \varphi(v)|| \leq c_2||u - v|| \ \ \forall u, \ v \in W,$$

mostrando a Afirmação 2.

Sendo φ localmente Lipschitz contínua em H e $||\varphi(u)|| \leq \dfrac{1}{2\epsilon}$ em H, então para cada $u \in H$ o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\sigma(t,u) & = \varphi(\sigma(t,u)) \\ \sigma(0,u) & = u \end{cases}$$

tem uma solução única $\sigma(.,u)$ em $\mathbb{R}$. Mais ainda, σ é contínua em $\mathbb{R} \times H$. Então a aplicação η definida em H por $\eta(u) = \sigma(2\epsilon, u)$ é contínua em H.

Prova de (i):

Para cada $u \in H \setminus A$, considere

$$\sigma(t,u) = u, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$\frac{d}{dt}\sigma(t,u) = 0$$

e

$$\varphi(\sigma(t,u)) = \varphi(u) = 0.$$

Mostrando que σ satisfaz o problema de Cauchy em $H \setminus A$. Em particular,

$$\eta(u) = \sigma(2\epsilon, u) = u \text{ para todo } u \in H \setminus A,$$

provando (i).

Prova de (ii):

Pela Regra da Cadeia e pelo Teorema da Representação de Riesz, obtemos

$$\frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) = I^{'}(\sigma(t,u)).\frac{d}{dt}\sigma(t,u) = \left\langle \nabla I(\sigma(t,u)), \frac{d}{dt}\sigma(t,u) \right\rangle,$$

pelo problema de Cauchy, então

$$\frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) = \langle \nabla I(\sigma(t,u)), \varphi(\sigma(t,u)) \rangle.$$

Desta forma, se $\sigma(t,u) \in H \setminus A$, temos

$$\frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) = \langle \nabla I(\sigma(t,u)), 0\rangle = 0.$$

Por outro lado, se $\sigma(t,u) \in A$, decorre que

$$\frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) = \left\langle \nabla I(\sigma(t,u)), -\Psi(\sigma(t,u))\frac{\nabla I(\sigma(t,u))}{||\nabla I(\sigma(t,u))||^2}\right\rangle = -\Psi(\sigma(t,u)).$$

Desde que $\Psi(\sigma(t,u)) \geq 0$, então $\dfrac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) \leq 0$. Implicando que $I(\sigma(.,u))$ é não crescente.

Para $u \in I^{c+\epsilon}$, devemos mostrar que

$$I(\eta(u)) \leq c-\epsilon,$$

ou seja,

$$I(\sigma(2\epsilon,u)) \leq c-\epsilon.$$

Observemos que se existir $t_o \in [0,2\epsilon]$ tal que $I(\sigma(t_o,u)) \leq c-\epsilon$, e sendo $I(\sigma(.,u))$ não crescente temos que

$$I(\sigma(2\epsilon,u)) \leq I(\sigma(t_o,u)) \leq c-\epsilon$$

satisfazendo (ii).

Se, por outro lado

$$\sigma(t,u) \in I^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]), \ \ \forall t \in [0,2\epsilon],$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que

$$\int_0^{2\epsilon} \frac{d}{dt}I(\sigma(t,u))dt = I(\sigma(2\epsilon,u)) - I(\sigma(0,u)) = I(\sigma(2\epsilon,u)) - I(u),$$

obtendo

$$I(\sigma(2\epsilon,u)) = I(u) + \int_0^{2\epsilon} \frac{d}{dt}I(\sigma(t,u))dt = I(u) - \int_0^{2\epsilon} \Psi(\sigma(t,u))dt.$$

Note que sendo $u \in I^{c+\epsilon}$, então $I(u) \leq c+\epsilon$. Além disso, $\sigma(t,u) \in I^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon])$, para todo $t \in [0,2\epsilon]$, logo por definição $\Psi(\sigma(t,u)) = 1$. Com estes fatos concluímos que

$$I(\sigma(2\epsilon,u)) \leq c+\epsilon - \int_0^{2\epsilon} dt = c+\epsilon-2\epsilon = c-\epsilon.$$

Portanto (ii) é satisfeito. Mostrando que $\eta\left(I^{c+\epsilon}\right) \subset I^{c-\epsilon}$.

Concluindo a demonstração deste Lema.

$\square$

1.2 Teorema do passo da montanha

Nesta seção vamos demonstrar o Teorema do Passo da Montanha sem a condição Palais-Smale devido a Willem [18].

Teorema 1.1 *Sejam H um espaço de Hilbert, $I \in C^2(H, \mathbb{R})$, $r > 0$ e $v \in H$ satisfazendo*

$$||v|| > r \quad e \quad b = \inf_{||u||=r} I(u) > I(0) \geq I(v).$$

Então, para cada $\epsilon \in (0, \frac{c}{2})$, existe $u \in H$ tal que

(i) $c - 2\epsilon \leq I(u) \leq c + 2\epsilon$;
(ii) $||I^{'}(u)|| < 2\epsilon$;

onde

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H) : \gamma(0) = 0 \ e \ \gamma(1) = v\}.$$

Demonstração: Pela definição de b temos que

$$b \leq I(u), \ \ \forall u \ \in H, \text{ tal que } ||u|| = r.$$

Por outro lado

$$\max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geq I(\gamma(t)), \, \forall t \in [0,1],$$

agora considere a seguinte função

$$\begin{aligned} f: \ \ [0,1] \ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \ \ \ \ &\longmapsto f(t) = ||I(\gamma(t)||. \end{aligned}$$

Note que $f(0) = ||I(\gamma(0)|| = ||0|| = 0$ e $f(1) = ||I(\gamma(1)|| = ||v|| > r$, daí pelo Teorema do Valor Intermediário temos que existe $t_o \in [0,1]$ tal que

$$f(t_o) = ||I(\gamma(t_o)|| = r.$$

Logo, existe $u_o = \gamma(t_o) \in H$, tal que $||u_o|| = r$. Assim, $b \leq I(u_o)$ e

$$I(u_o) = I(\gamma(t_o)) \leq \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

implicando que

$$b \leq \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)).$$

Sendo $\gamma \in \Gamma$ arbitrário, temos que

$$b \leq c \leq \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)).$$

Suponha que o teorema não seja satisfeito para algum $\epsilon \in (0, \frac{c}{2})$. Podemos assumir que

$$c - 2\epsilon > I(0) \geq I(v). \tag{1.1}$$

Desde que $c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$, então existe $\overline{\gamma} \in \Gamma$ tal que

$$c - 2\epsilon \leq c \leq \max_{t\in[0,1]} I(\overline{\gamma}(t)) \leq c + \epsilon \leq c + 2\epsilon. \tag{1.2}$$

Assim, temos que assumindo as hipóteses do teorema, para cada $\epsilon \in (0, \frac{c}{2})$ existe $u \in H$ tal que

$$c - 2\epsilon \leq I(u) \leq c + 2\epsilon.$$

Isto nos levar a concluir que se o teorema não vale para algum $\epsilon \in (0, \frac{c}{2})$, então é porque

$$||I'(u)|| \geq 2\epsilon, \ \ \forall u \in I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]).$$

Logo, pelo Lema de Deformação existe $\eta \in C(H, H)$ tal que

$$\eta(u) = u, \ \ \forall u \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$$

e

$$\eta(I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}.$$

Consideremos $\beta = \eta \circ \overline{\gamma}$, daí

$$\beta(0) = \eta(\overline{\gamma}(0)) = \eta(0),$$

pois $\overline{\gamma} \in \Gamma$. Observamos que (1.1) implica em obtermos

$$0 \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$$

de onde segue que $\eta(0) = 0$, ou seja, $\beta(0) = 0$.
De modo análogo

$$\beta(1) = \eta(\overline{\gamma}(1)) = \eta(v)$$

e por (1.1), segue-se que

$$v \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]),$$

logo $\eta(v) = v$. Implicando que $\beta(1) = v$.
Além disso $\beta \in C([1, 0], H)$, pois $\overline{\gamma} \in C([1, 0], H)$ e $\eta \in C(H, H)$, mostrando assim que $\beta \in \Gamma$. Segue-se então que

$$c \leq \max_{t \in [0,1]} I(\beta(t)).$$

De (1.2), segue-se que

$$\overline{\gamma}(t) \in I^{c+\epsilon}, \;\; \forall t \in [0, 1]$$

logo,

$$\beta(t) = \eta(\overline{\gamma}(t)) \in I^{c-\epsilon}, \;\; \forall t \in [0, 1].$$

Portanto

$$I(\beta(t)) \leq c - \epsilon, \forall t \in [0, 1],$$

ou seja,

$$\max_{t \in [0,1]} I(\beta(t)) \leq c - \epsilon < c$$

o que é um absurdo, pois contradiz a definição de c.
Concluindo com isto que dado $\epsilon \in (0, \frac{c}{2})$, existe $u \in I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$ verificando $||I^{'}(u)|| < 2\epsilon$. Provando o Teorema.

$\square$

Para que o valor c encontrado pelo Teorema do Passo da Montanha seja um valor crítico de I é necessário uma condição de compacidade, que é a seguinte:

Definição 1.1 *Sejam H um espaço de Banach, $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. O funcional I satisfaz a condição $(PS)_c$ (Palais-Smale no nível c) se qualquer seqüência $\{u_n\} \subset H$ tal que*

$$I(u_n) \to c \text{ e } I^{'}(u_n) \to 0$$

tem uma subseqüência convergente.

Teorema 1.2 *Sob as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, se I satisfaz a condição $(PS)_c$, então c é um valor crítico de I.*

Demonstração: O Teorema do Passo da Montanha implica na existência de uma seqüência $\{u_n\} \subset H$ que satisfaz

$$I(u_n) \to c \quad \text{e} \quad I^{'}(u_n) \to 0.$$

Por outro lado, como I satisfaz a condição $(PS)_c$, então $\{u_n\}$ tem uma subseqüência convergente, ou seja, existe $u \in H$ tal que

$$I(u) = c \quad \text{e} \quad I^{'}(u) = 0.$$

Mostrando que c é um valor crítico de I.

$\square$

Capítulo 2

Existência de Solução em $\mathbb{R}^N$

Neste capítulo vamos estudar a existência de solução para problemas do tipo

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u &= Q(x)|u|^{p-2}u, \ \mathbb{R}^N \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases},$$

onde $N \geq 3$ e $2 < p < 2^*$.

No que segue denotaremos por

$$||u||_{\mathbb{R}^N} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + \lambda u^2 \right) dx \right)^{1/2}$$

e

$$|u|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \right)^{1/p}$$

as normas em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $L^p(\mathbb{R}^N)$, respectivamente.

O nosso maior problema, neste capítulo, é o fato de não termos imersões compactas do espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$ no espaço $L^p(\mathbb{R}^N)$. Sendo assim, vamos considerar um subespaço de $H^1(\mathbb{R}^N)$ de modo que, para este, vamos conseguir uma imersão compacta em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Portanto, podemos usar este fato para mostrarmos que existe uma solução para o referido problema para o caso $Q \equiv 1$. Vamos estudar, a partir de agora, alguns resultados necessários para verificarmos tal imersão compacta.

2.1 Simetria e compacidade

Nesta seção vamos estudar um resultado de imersão compacta para funções que possuem uma propriedade de simetria, e este resultado será fundamental para mostrarmos a existência de uma solução para o problema (P_1). Começaremos a trilhar este caminho demonstrando o seguinte lema devido a P. L. Lions [14]

Lema 2.1 *Seja $r > 0$ e $2 \leq q < 2^*$. Se $\{u_n\}$ é uma seqüência limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e se*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |u_n|^q dx \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to +\infty,$$

então $u_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < 2^*$.

Demonstração: Consideremos o caso $N \geq 3$. Sejam $q < s < 2^*$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Pelas imersões de Sobolev (ver Apêndice A)

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \ \ 2 \leq p \leq 2^*, \ \text{ para } \ N \geq 3$$

então temos que $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ com $2 \leq q < 2^*$ e $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$.
Considere $\theta = \dfrac{s-q}{2^*-q} . \dfrac{2^*}{s}$, e desde que $q < s < 2^*$ então $\theta > 0$.
Além disso, $2^*q > sq$, implicando que $2^*s - 2^*q < 2^*s - sq$. Mostrando com isto que $\theta < 1$. Logo,

$$0 < \theta < 1.$$

Temos ainda que

$$1 - \theta = 1 - \frac{s-q}{2^*-q}\frac{2^*}{s} = \frac{(2^*-s)q}{(2^*-q)s}.$$

Com isto, temos o seguinte

$$\frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{2^*} = \frac{2^*-s}{(2^*-q)s} + \frac{s-q}{(2^*-q)s} = \frac{1}{s}.$$

Assim, pela Desigualdade de Interpolação (ver Apêndice D), obtemos que
$u \in L^s(B_r(y))$ e

$$|u|_{L^s(B_r(y))} \leq |u|^{1-\theta}_{L^q(B_r(y))} . |u|^{\theta}_{L^{2^*}(B_r(y))}.$$

Novamente usando as Imersões de Sobolev, temos que existe $c_1 > 0$ tal que

$$|u|_{L^{2^*}(B_r(y))} \leq c_1 ||u||_{H^1(B_r(y))}.$$

Assim,

$$|u|_{L^s(B_r(y))} \leq c_1^{\theta} |u|^{1-\theta}_{L^q(B_r(y))} . ||u||^{\theta}_{H^1(B_r(y))}. \tag{2.1}$$

ou seja,

$$\int_{B_r(y)} |u|^s dx \leq c_1^{\theta s} |u|^{(1-\theta)s}_{L^q(B_r(y))} . ||u||^{\theta s}_{H^1(B_r(y))}.$$

Agora, cobrindo o $\mathbb{R}^N$ por bolas de raio r, de tal modo que cada ponto do $\mathbb{R}^N$ esteja contido no máximo em $N+1$ bolas, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^s dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_r(y_n)} |u|^s dx = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_{B_r(y_n)} |u|^s dx.$$

Por (2.1) segue-se a estimativa

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^s dx \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} c_1^{\theta s} |u|^{(1-\theta)s}_{L^q(B_r(y_n))} . ||u||^{\theta s}_{H^1(B_r(y_n))}$$

e escolhendo $\theta s = 2$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^s dx \leq c_1^2 \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \left(\int_{B_r(y)} |u|^q dx \right)^{\frac{(1-\theta)s}{q}} . \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_{B_r(y_n)} (|\nabla u|^2 + \lambda u^2) dx.$$

Além disso, utilizando a cobertura do $\mathbb{R}^N$ mencionada anteriormente obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{k} \int_{B_r(y_n)} (|\nabla u|^2 + \lambda u^2) dx &= \sum_{n=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{B_r(y_n)} (|\nabla u|^2 + \lambda u^2) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{n=1}^{k} \chi_{B_r(y_n)} \right) (|\nabla u|^2 + \lambda u^2) dx \\ &\leq (N+1) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \lambda u^2) dx, \end{aligned}$$

logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^s dx \leq (N+1) c_1^2 \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \left(\int_{B_r(y)} |u|^q dx \right)^{\frac{(1-\theta)s}{q}} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \lambda u^2) dx.$$

Desde que $\{u_n\}$ é uma seqüência limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e por hipótese

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |u_n|^q dx \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to +\infty,$$

concluimos que

$$u_n \to 0 \quad em \quad L^s(\mathbb{R}^N). \tag{2.2}$$

Considerando $2 < p < 2^*$, vamos considerar s de tal modo que $p < s < 2^*$ e que (2.2) ocorre.

Usando o fato de que $H^1(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e em $L^s(\mathbb{R}^N)$, então $u \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^s(\mathbb{R}^N)$.

Considerando $\mu = \dfrac{p-2}{s-2} . \dfrac{s}{p}$, mostra-se que

$$0 < \mu < 1 \ \text{ e } \ \frac{1}{p} = \frac{1-\mu}{2} + \frac{\mu}{s}.$$

Assim, aplicando novamente Desigualdade de Interpolação e a imersão contínua de $H^1(\mathbb{R}^N)$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ temos que

$$|u|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq |u|^{1-\mu}_{L^2(\mathbb{R}^N)}.|u|^{\mu}_{L^s(\mathbb{R}^N)} \leq c_2||u||^{1-\mu}_{H^1(\mathbb{R}^N)}.|u|^{\mu}_{L^s(\mathbb{R}^N)}.$$

Sendo $\{u_n\}$ limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $u_n \to 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$u_n \to 0 \text{ em } L^p(\mathbb{R}^N), \text{ para } 2 < p < 2^*.$$

Concluindo a demonstração do Lema.

$\square$

No que segue denotaremos por $O(N)$ o grupo das rotações no $\mathbb{R}^N$. O nosso objetivo agora é usar a idéia de simetria para obter uma condição de compacidade.

Definição 2.1 *Seja G um subgrupo de $O(N)$, $y \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$. Definimos*

$$m(y,r,G) = \sup\{n \in \mathbb{N} : \ \exists g_1, g_2, ..., g_n \in G : \ j \neq k \Rightarrow B_r(g_j y) \cap B_r(g_k y) = \phi\}.$$

Um subconjunto Ω de $\mathbb{R}^N$ é invariante se $g\Omega = \Omega$ para cada $g \in G$.
Um subconjunto invariante Ω de $\mathbb{R}^N$ é compatível com G se, para algum $r > 0$,

$$\lim_{\substack{|y|\to\infty \\ dist(y,\Omega)\leq r}} m(y,r,G) = \infty.$$

Definição 2.2 *Seja G um subgrupo de $O(N)$ e seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$. A ação de G sobre $H^1_o(\Omega)$ é definido por*

$$gu(x) = u(g^{-1}x). \tag{2.3}$$

O subespaço das funções invariantes é definido por

$$H^1_{o,G}(\Omega) = \{u \in H^1_o(\Omega) : \ gu = u, \ \forall g \in G\}.$$

A partir das definições vistas podemos verificar o seguinte resultado de imersão compacta:

Teorema 2.1 *Se Ω é compatível com G, as seguintes imersões são compactas:*

$$H^1_{o,G}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \ \textit{para } 2 < p < 2^*.$$

Demonstração: Assumindo que $u_n \rightharpoonup 0$ em $H^1_{o,G}(\Omega)$. Denotando por m o número $m(y,r,G)$, observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^{m}\int_{B_r(g_jy)}|u_n|^2dx=\int_{\bigcup_{j=1}^{m}B_r(g_jy)}|u_n|^2dx\leq\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^2dx\leq\sup_n|u_n|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Logo se $x\in B_r(g_jy)$, fazendo mudança de variáveis obtemos que existe $z\in B_r(y)$ tal que z é da forma $z=g_j^{-1}x$, ou seja, $x=g_jz$.

Sendo assim, pela mudança de variáveis

$$\int_{(B_r(g_jy))}|u_n(x)|^2dx=\int_{g_j(B_r(y))}|u_n(x)|^2dx=\int_{B_r(y)}|u_n(g_jz)|^2|\det g_j|dz.$$

Por (2.3), segue-se

$$\int_{B_r(y)}|u_n(g_jz)|^2|\det g_j|dz=\int_{B_r(y)}|g_j^{-1}u_n(z)|^2dz$$

e sendo $\{u_n\}\subset H^1_{o,G}(\Omega)$, obtemos

$$\int_{B_r(y)}|g_j^{-1}u_n(z)|^2dz=\int_{B_r(y)}|u_n(z)|^2dz.$$

Assim,

$$\int_{(B_r(g_jy))}|u_n(x)|^2dx=\int_{B_r(y)}|u_n(z)|^2dz.$$

Logo, concluímos que

$$\sum_{j=1}^{m}\int_{B_r(g_jy)}|u_n|^2dx=\sum_{j=1}^{m}\int_{B_r(y)}|u_n|^2dx=m\int_{B_r(y)}|u_n|^2dx,$$

donde segue

$$m\int_{B_r(y)}|u_n|^2dx\leq\sup_n|u_n|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

ou seja, para cada $n\in\mathbb{N}$

$$\int_{B_r(y)}|u_n|^2dx\leq\frac{\sup_n|u_n|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{m}.$$

Sendo Ω compatível com G, temos que para algum $r>0$

$$\lim_{\substack{|y|\to\infty\\ dist(y,\Omega)\leq r}}m(y,r,G)=\infty.$$

Então dado $\epsilon>0$, existe $R>0$ tal que para $|y|\geq R>0$ temos que

$$m\geq\frac{2}{\epsilon}\sup_n|u_n|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Daí, para cada $n\in\mathbb{N}$ ocorre que sendo $|y|\geq R$

$$\int_{B_r(y)} |u_n|^2 dx \leq \frac{\sup\limits_n |u_n|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{\frac{2}{\epsilon}\sup\limits_n |u_n|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}} = \frac{\epsilon}{2}$$

e portanto

$$\sup_{|y|\geq R} \int_{B_r(y)} |u_n|^2 dx \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.4}$$

Temos pelo Teorema de Rellich (ver Apêndice A) que a seguinte imersão é compacta

$$H^1_o(B_{R+r}(0)) \hookrightarrow L^2(B_{R+r}(0)),$$

desde que $u_n \rightharpoonup 0$ em $H^1_{o,G}(\Omega)$

$$\int_{B_{R+r}(0)} |u_n|^2 dx \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Note que se $x \in B_r(y)$, então

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \leq r + R,$$

e assim $x \in B_{R+r}(0)$. Implicando que $B_r(y) \subset B_{R+r}(0)$, para $|y| \leq R$.

$$\sup_{|y|\leq R} \int_{B_r(y)} |u_n|^2 dx \leq \int_{B_{R+r}(0)} |u_n|^2 dx \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty,$$

ou seja, para n suficientemente grande temos que

$$\sup_{|y|\leq R} \int_{B_r(y)} |u_n|^2 dx \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.5}$$

De (2.4) e (2.5), concluímos que para n suficientemente grande

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |u_n|^2 dx \leq \sup_{|y|\leq R} \int_{B_r(y)} |u_n|^2 dx + \sup_{|y|\geq R} \int_{B_r(y)} |u_n|^2 dx \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, fazendo ϵ tender a zero, chegamos a conclusão que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |u_n|^2 dx \longrightarrow 0, \quad \textit{quando} \;\; n \to \infty. \tag{2.6}$$

Aplicando o Lema 2.1, segue de (2.6) que

$$u_n \to 0 \text{ em } L^p(\Omega), \text{ para } 2 < p < 2^*.$$

Mostrando que ocorre a imersão compacta

$$H^1_{o,G}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \text{ para } 2 < p < 2^*.$$

$\square$

Corolário 2.1 *Sejam* $N_j \geq 2, \quad j = 1, 2, ..., k, \quad \sum_{j=1}^{k} N_j = N \quad e$

$$G = O(N_1) \times O(N_2) \times ... \times O(N_k).$$

Então as seguintes imersões são compactas

$$H^1_G(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \text{ para } 2 < p < 2^*.$$

Demonstração: Qualquer que seja $g \in G$ temos que $g\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N$, portanto o $\mathbb{R}^N$ é invariante, e mais ainda

$$dist(y, \mathbb{R}^N) = 0, \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

Logo existe $r > 0$ tal que

$$\lim_{\substack{|y| \to \infty \\ dist(y, \mathbb{R}^N) \leq r}} m(y, r, G) = \infty$$

mostrando que o $\mathbb{R}^N$ é compatível com G. Segue do Teorema 2.1 que as seguintes imersões são compactas:

$$H^1_G(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \text{ para } 2 < p < 2^*.$$

$\square$

Corolário 2.2 *Seja* $N \geq 2$. *Então as seguintes imersões são compactas:*

$$H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \text{ para } 2 < p < 2^*.$$

Demonstração: Considere $G = O(N)$ no corolário 2.1 e assim obtermos que, de fato, as seguintes imersões são compactas:

$$H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \text{ para } 2 < p < 2^*.$$

$\square$

2.2 O caso simétrico

Nesta seção estudamos a existência de solução para o problema

$$(P_0) \qquad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u &= |u|^{p-2}u, \ \mathbb{R}^N \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $N \geq 3$ e $2 < p < 2^*$.

Começamos o nosso estudo, entendendo o que significa a ação de um grupo topológico sobre um espaço normado, que será de grande utilidade na busca de solução de tal problema.

Definição 2.3 *A ação de um grupo toplógico G sobre um espaço normado H é uma aplicação contínua*

$$\begin{array}{rcl} G \times H & \longrightarrow & H \\ (g, u) & \longmapsto & gu \end{array}$$

tal que

$$\begin{array}{rcl} 1.u &=& u \\ (gh)u &=& g(hu) \\ u &\mapsto& gu \ \text{é linear.} \end{array}$$

A ação é isométrica se

$$||gu|| = ||u||.$$

O espaço de pontos invariantes é definido por

$$Fix(G) = \{u \in H : \ gu = u, \ \forall g \in G\}$$

que é um subespaço fechado em H.
Um conjunto $A \subset H$ é invariante se $gA = A$ para cada $g \in G$.
Uma função $I : H \longrightarrow \mathbb{R}$ é invariante se $I \circ g = I$ para cada $g \in G$.
Uma aplicação $f : H \longmapsto H$ é equivariante se $g \circ f = f \circ g$ para cada $g \in G$.

Teorema 2.2 (Princípio da criticalidade simétrica) *Assuma que a ação do grupo topológico G sobre um espaço de Hilbert H é isométrico. Se $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ é invariante e se u é um ponto crítico de I restrito a $Fix(G)$, então u é um ponto crítico de I.*

Demonstração: Desde que I é invariante

$$I'(gu).v = \lim_{t \to 0} \frac{I(gu + tv) - I(gu)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{I \circ g^{-1}(gu + tv) - I \circ g^{-1}(gu)}{t}.$$

Sendo a aplicação $u \mapsto gu$ é linear, segue-se

$$\lim_{t\to 0}\frac{I\circ g^{-1}(gu+tv)-I\circ g^{-1}(gu)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{I(u+tg^{-1}v)-I(u)}{t}=I^{'}(u).g^{-1}v,$$

ou seja,

$$I^{'}(gu).v=I^{'}(u).g^{-1}v. \tag{2.7}$$

Afirmação 1: A aplicação ∇I é equivariante.

Sendo a ação topológica isométrica, tem-se a igualdade

$$\langle\nabla I(gu),v\rangle=\left\langle\nabla I(u),g^{-1}v\right\rangle=\langle g\nabla I(u),v\rangle\,. \tag{2.8}$$

De fato, fazendo uso do Teorema da Representação de Riesz e de (2.7) obtemos

$$\langle\nabla I(gu),v\rangle=I^{'}(gu).v=I^{'}(u).g^{-1}v=\langle\nabla I(u),g^{-1}v\rangle.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}||\nabla I(u)+g^{-1}v||^2 &=\langle\nabla I(u)+g^{-1}v,\nabla I(u)+g^{-1}v\rangle\\ &=||\nabla I(u)||^2+2\,\langle\nabla I(u),g^{-1}v\rangle+||g^{-1}v||^2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}||g\nabla I(u)+v||^2 &=\langle g\nabla I(u)+v,g\nabla I(u)+v\rangle\\ &=||g\nabla I(u)||^2+2\,\langle g\nabla I(u),v\rangle+||v||^2.\end{aligned}$$

Mas sendo a ação topológica isométrica

$$\begin{gathered}||\nabla I(u)+g^{-1}v||=||g(\nabla I(u)+g^{-1}v)||=||g\nabla I(u)+v||,\\ ||\nabla I(u)||=||g\nabla I(u)||\end{gathered}$$

e

$$||g^{-1}v||=||v||.$$

Donde concluímos que

$$\langle\nabla I(u),g^{-1}v\rangle=\langle g\nabla I(u),v\rangle,$$

mostrando que vale (2.8), e portanto ∇I é equivariante, ou seja,

$$g\nabla I(u)=\nabla I(gu),\text{ para cada } g\in G.$$

Afirmação 2: u é um ponto crítico de I.

Assumindo que u é um ponto crítico de I restrito a $Fix(G)$ temos que $u \in Fix(G)$, implicando que $gu = u$ para cada $g \in G$. Sendo assim,

$$g\nabla I(u) = \nabla I(u), \text{ para cada } g \in G,$$

mostrando que $\nabla I(u) \in Fix(G)$.

Uma vez que u é um ponto crítico de I restrito a $Fix(G)$, então

$$I^{'}(u).v = 0, \, \forall v \in Fix(G)$$

ou seja,

$$\langle \nabla I(u), v \rangle = 0, \, \forall v \in Fix(G)$$

implicando que $\nabla I(u) \in Fix(G)^{\perp}$. Portanto,

$$\nabla I(u) \in Fix(G) \cap Fix(G)^{\perp} = \{0\}$$

provando que u é ponto crítico de I.

□

Teorema 2.3 *Se $N \geq 3$ e $2 < p < 2^*$, existe uma solução clássica, radialmente simétrica e positiva de*

$$(P_0) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u + \lambda u & = & |u|^{p-2}u, \ \mathbb{R}^N \\ u & \in & H^1(\mathbb{R}^N) \end{array} \right. .$$

Demonstração: Aplicaremos aqui o Teorema do Passo da Montanha ao seguinte funcional

$$\begin{array}{rcl} I: \ H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & I(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + \lambda u^2)dx - \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}(u^+)^p dx \end{array}$$

onde $(u^+)(x) = max\,\{u(x), 0\}$ e nesta demonstração denotaremos por H o espaço $H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N)$ para simplificar as notações.

Note que H é um espaço de Hilbert e que $I \in C^2(H, \mathbb{R})$ (ver Apêndice A).

Desde que $u^+ \leq |u|$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}(u^+)^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^N}|u|^p dx = |u|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

logo,

$$I(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{p}|u|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Uma vez que a imersão de H em $L^p(\mathbb{R}^N)$ é contínua, para $2 \leq p \leq 2^*$ e $N \geq 3$, existe $c_1 > 0$ tal que

$$|u|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq c_1||u||_{(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall u \in H$$

donde segue

$$I(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{c_1^p}{p}||u||^p_{\mathbb{R}^N}.$$

Sendo $p > 2$, existe $r > 0$ de modo que

$$I(u) \geq \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^2 = \frac{1}{4}r^2 > 0, \quad \forall u \in H \text{ com } ||u||_{\mathbb{R}^N} = r.$$

Temos que $I(0) = 0$. E mais ainda, fixando $w \in H$ com $w > 0$, então $w^+ = w$, e assim para $t \geq 0$ tem-se

$$I(tw) = \frac{t^2}{2}||w||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{t^p}{p}|w|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Desde que $p > 2$ e w está fixado, então existe $t_o \in \mathbb{R}$ (basta considerá-lo suficientemente grande) tal que considerando $v = t_o w$ temos que:

$$||v||_{\mathbb{R}^N} = ||t_o w||_{\mathbb{R}^N} = t_o||w||_{\mathbb{R}^N} > r$$

e

$$I(v) = \frac{t_o^2}{2}||w||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{t_o^p}{p}|w|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} < 0.$$

E portanto, existe $v \in H$ tal que

$$\inf_{||u||_{\mathbb{R}^N}=r} I(u) > 0 = I(0) > I(v).$$

Aplicando o Teorema do Passo da Montanha, temos que existe uma seqüência $\{u_n\} \subset H$ que satisfaz

$$I(u_n) \longrightarrow c \;\text{ e }\; I'(u_n) \longrightarrow 0 \text{ em } H'$$

onde

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H) : \ \gamma(0) = 0 \ e \ \gamma(1) = v\}.$$

Afirmação 1: A seqüência $\{u_n\}$ é limitada em H.

Uma vez que

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + \lambda u_n^2)dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^p dx$$

e

$$I^{'}(u_n).v = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla v + \lambda u_n v)dx - \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{p-1} v dx,$$

obtemos

$$I(u_n) - \frac{1}{p}I^{'}(u_n).u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) ||u_n||^2_{\mathbb{R}^N}.$$

Por outro lado,

$$\left| I(u_n) - \frac{1}{p}I^{'}(u_n).u_n \right| \leq |I(u_n)| + \frac{1}{p}||I^{'}(u_n)||_{H^{'}} ||u_n||_{\mathbb{R}^N}.$$

Desde que

$$I(u_n) \longrightarrow c,$$

temos que existe $c_2 > 0$ tal que

$$|I(u_n)| \leq c_2.$$

Do mesmo modo, uma vez que

$$I^{'}(u_n) \longrightarrow 0 \text{ em } H^{'},$$

então existe $c_3 > 0$ de modo que

$$||I^{'}(u_n)||_{H^{'}} \leq c_3.$$

Assim, obtemos o seguinte

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) ||u_n||^2_{\mathbb{R}^N} \leq c_2 + \frac{c_3}{p}||u_n||_{\mathbb{R}^N},$$

mostrando que $\{u_n\}$ é limitada em H.

De fato, considere que $\{u_n\}$ não seja limitada em H, então existe uma subseqüência $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ em que

$$||u_{n_k}||_{\mathbb{R}^N} \to +\infty \text{ quando } n_k \to \infty.$$

E daí,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \leq \frac{c_2}{||u_{n_k}||^2_{\mathbb{R}^N}} + \frac{c_3}{p||u_{n_k}||_{\mathbb{R}^N}}$$

o que é um absurdo, pois o lado direito desta expressão vai para zero, enquanto que o lado esquerdo é uma constante positiva, uma vez que $p > 2$.

Portanto, $\{u_n\}$ é limitada em H.

Afirmação 2: A seqüência $\{u_n\}$ possui uma subseqüência convergente em H.

Sendo $\{u_n\}$ é limitada em H e H um espaço de Banach reflexivo, existem $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$ e $u \in H$ tais que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \ \ em \ \ H. \tag{2.9}$$

Pelo Corolário 2.2, temos

$$u_{n_j} \to u \ \ em \ \ L^p(\mathbb{R}^N). \tag{2.10}$$

Por simplicidade denotaremos por $\{u_n\}$ a seqüência $\{u_{n_j}\}$. De (2.9), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla v + \lambda u_n v) dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + \lambda uv) dx.$$

Por (2.10), temos que usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{p-1} v dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{p-1} v dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^p dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^p dx. \tag{2.11}$$

Note que $I'(u_n).u_n = ||u_n||^2_{\mathbb{R}^N} - \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^p dx$ e desde que $I'(u_n).u_n = o_n(1)$, pois $I'(u_n) \to 0$ e $\{u_n\}$ é limitada em H, verificamos que

$$||u_n||^2_{\mathbb{R}^N} \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^p dx$$

de (2.11), obtemos

$$||u_n||^2_{\mathbb{R}^N} \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^p dx.$$

Observe que

$$I'(u_n).u = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla u + \lambda u_n u)dx - \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{p-1} u dx.$$

Daí, passando ao limite em n, temos que

$$I'(u).u = 0,$$

ou seja,

$$||u||^2_{\mathbb{R}^N} = \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^p dx.$$

Logo,

$$||u_n||^2_{\mathbb{R}^N} \to ||u||^2_{\mathbb{R}^N}$$

e desde que $u_n \rightharpoonup u$ em H e H é Hilbert, concluímos que

$$u_n \to u \text{ em } H.$$

Afirmação 3: u é solução do problema P_o.

Pelo Teorema do Passo da Montanha e pela condição $(PS)_c$ verificada, temos que u é um ponto crítico não trivial de I restrito à H.

Pelo Princípio da Criticalidade Simétrica u é um ponto crítico de I, daí

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u &= (u^+)^{p-1}, \quad \mathbb{R}^N \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases},$$

donde segue

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla w + \lambda u w)dx - \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{p-2} u w dx, \quad \forall w \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Escolhendo $w = u^-$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla u^- + \lambda u u^-)dx - \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{p-2} u u^- dx = 0,$$

daí, obtemos que $||u^-|| = 0$, ou seja, $u^- = 0$. Logo u é uma solução não negativa do problema (P_0). Pelo Princípio do Máximo u é positiva.

Resta-nos mostrar que u é uma solução clássica do problema (P_0), ou seja, $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Observe que

$$-\Delta u = au, \text{ onde } a = |u|^{p-2} - 1 \in L^{\frac{N}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

Sendo $2 < p < 2^*$, então $0 < p-2 < 2^*-2 < \dfrac{4}{N-2}$. Logo, ficamos com a seguinte estimativa

$$0 < (p-2)\frac{N}{2} < 2^*.$$

Além disso, $|a| = ||u|^{p-2}-1| \leq |u|^{p-2}+1$, e desde que $1 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ então devemos mostrar que $|u|^{p-2} \in L^{\frac{N}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Consideremos as seguintes hipóteses:

(i) se $|u| > 1$, então temos que $|u|^{(p-2)\frac{N}{2}} < |u|^{2^*}$;

(ii) se $|u| \leq 1$, então temos que $|u|^{(p-2)\frac{N}{2}} \leq 1$.

Assim de (i) e (ii), concluímos que $|u|^{(p-2)\frac{N}{2}} \leq |u|^{2^*}+1$.

Sendo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e pela imersão contínua de $H^1(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, se $N \geq 3$, então $|u|^{2^*} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Usando o fato que $1 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, obtemos que

$$|u|^{(p-2)\frac{N}{2}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

implicando com isto que

$$a = |u|^{p-2}-1 \in L^{\frac{N}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

Do Teorema de Brézis-Kato temos que $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para $1 \leq p < \infty$. Donde segue que $u \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para $1 \leq p < \infty$. Usando os Teoremas de imersão de Sobolev, temos:

$$\text{se } m-1 < \frac{N}{p} < m,\ W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\overline{\Omega}),\ 0 \leq \alpha \leq m-\frac{N}{p}$$

considerando $m=1$ e $j=0$, existe p_o tal que

$$0 < \frac{N}{p_o} < 1,\ W^{1,p_o}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}),\ 0 \leq \alpha \leq 1-\frac{N}{p_o}$$

implicando em

$$-\Delta u = au \in C^{0,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N),$$

donde segue-se da Teoria de Schauder,

$$u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

E portanto

$$u \in C^2(\mathbb{R}^N),$$

mostrando que existe uma solução clássica, radialmente simétrica, positiva de (P_0).

$\square$

2.3 Um resultado de compacidade

Sejam $N \geq 3$ e $2 < p < 2^*$. Considere a seguinte constante

$$M_\lambda = \inf \left\{ ||u||^2_{\mathbb{R}^N} : \ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \ e \ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1 \right\}.$$

O Teorema de Sobolev implica que $M_\lambda > 0$. De fato, das Imersões de Sobolev, existe $c > 0$ tal que

$$|u|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq c||u||_{\mathbb{R}^N}, \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

ou seja, para $|u|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 1$, obtemos

$$||u||_{\mathbb{R}^N} \geq \frac{1}{c} > 0$$

concluindo que $M_\lambda > 0$.

Nosso objetivo nesta seção é mostrarmos que M_λ é atingido, ou seja, devemos encontrar $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $||u||^2_{\mathbb{R}^N} = M_\lambda$ e $|u|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 1$.

Consideremos uma seqüência minimizante $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, assim

$$|u_n|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 1 \text{ e } ||u_n||^2_{\mathbb{R}^N} \to M_\lambda, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Logo, esta seqüência é limitada e desde que $H^1(\mathbb{R}^N)$ é reflexivo existem $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N)$$

e

$$||u||^2_{\mathbb{R}^N} \leq \varliminf_{n_j} ||u_{n_j}||^2_{\mathbb{R}^N} = M_\lambda.$$

Vamos mostrar que $|u|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 1$. Tal fato, juntamente com a desigualdade anterior, implica que $||u||^2_{\mathbb{R}^N} = M_\lambda$.

Considere a seguinte função

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & H^1(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \varphi(u) = |u|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \end{array}$$

que é convexa e contínua, e sendo o espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ reflexivo, então

$$|u|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \varliminf_{n_j} |u_{n_j}|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 1,$$

isto é,

$$|u|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq 1.$$

Para qualquer $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $y \in \mathbb{R}^N$ a função translação

$$v^y(x) = v(x+y)$$

satisfaz

$$||v^y||_{\mathbb{R}^N} = ||v||_{\mathbb{R}^N} \ \text{ e } \ |v^y|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = |v|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

De fato, fazendo mudança de variáveis temos

$$\begin{aligned} ||v^y||^2_{\mathbb{R}^N} &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v^y|^2 + \lambda |v^y|^2)dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v(x+y)|^2 + \lambda |v(x+y)|^2)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v(z)|^2 + \lambda |v(z)|^2)dz = ||v||^2_{\mathbb{R}^N}. \end{aligned}$$

De modo análogo, chegamos a $|v^y|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = |v|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$.

A demonstração de que M_λ é atingido em $H^1(\mathbb{R}^N)$ resulta do seguinte teorema:

Teorema 2.4 *Seja $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma seqüência minimizante satisfazendo*

$$|u_n|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 1 \ \text{ e } \ ||u_n||^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \to M_\lambda, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Então existe uma seqüência $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\{u_n^{y_n}\}$ contém uma subseqüência convergente. Em particular, existe um minimizador para M_λ.

Demonstração: Observe que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{B_1(y)} \lambda |u_n|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \lambda |u_n|^2 dx \leq ||u_n||^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}, \, \forall y \in \mathbb{R}^N$$

logo, faz sentido $\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_1(y)}|u_n|^2dx$. E desde que $|u_n|_{L^p(\mathbb{R}^N)}=1$, pelo Lema 2.1 temos que

$$\delta=\varliminf_{n}\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_1(y)}|u_n|^2dx>0.$$

De fato, supondo que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_1(y)}|u_n|^2dx\longrightarrow 0,\text{ quando } n\to\infty$$

e sendo $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então pelo Lema 2.1 temos que

$$u_n\to 0 \text{ em } L^s(\mathbb{R}^N),\text{ para } 2<s<2^*$$

implicando que

$$|u_n|_{L^s(\mathbb{R}^N)}\to 0,\text{ para } 2<s<2^*$$

contradizendo o fato que $|u_n|_{L^p(\mathbb{R}^N)}=1$, para todo $n\in\mathbb{N}$.
Portanto concluimos que $\delta>0$.
Considerando se necessário uma subseqüência, pela definição de supremo e de limite inferior podemos assumir que existe uma seqüência $\{y_n\}\subset\mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{B_1(y_n)}|u_n|^2dx>\frac{\delta}{2}$$

Vamos definir $v_n=u_n^{y_n}$. Logo

$$|v_n|_{L^p(\mathbb{R}^N)}=1 \text{ e } ||v_n||^2_{\mathbb{R}^N}\to M_\lambda,\text{ quando } n\to+\infty.$$

Além disso, fazendo mudanças de variáveis obtemos

$$\int_{B_1(0)}|v_n|^2dx=\int_{B_1(0)}|u_n^{y_n}|^2dx=\int_{B_1(0)}|u_n(x+y_n)|^2dx=\int_{B_1(y_n)}|u_n(z)|^2dz>\frac{\delta}{2}.$$

Uma vez que $\{v_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, que é um espaço reflexivo, então existem uma subseqüência $\{v_{n_j}\}\subset\{v_n\}$ e $v\in H^1(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$v_{n_j}\rightharpoonup v \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Usando a imersão compacta em domínios limitados obtemos os seguintes limites

$$v_{n_j}\to v \text{ em } L^2_{loc}(\mathbb{R}^N),$$

e

$$v_{n_j} \to v \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Por simplicidade a partir deste momento vamos denotar v_{n_j} por v_n.

Da Imersão contínua de $H^1(\mathbb{R}^N)$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, tem-se que $\{v_n\} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$. Além do mais, $\{v_n\}$ é limitada em $L^p(\mathbb{R}^N)$ pois $|v_n|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Aplicando o Lema de Brézis-Lieb (ver Apêndice B), então

$$\lim_{n\to\infty} \left(|v_n|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} - |v_n - v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}\right) = |v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

implicando que

$$1 - \lim_{n\to\infty} |v_n - v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = |v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.12}$$

Por outro lado

$$M_\lambda = \lim_{n\to\infty} ||v_n||^2_{\mathbb{R}^N} = \lim_{n\to\infty} (||v_n - v||^2_{\mathbb{R}^N} + 2\langle v_n - v, v\rangle + ||v||^2_{\mathbb{R}^N})$$

e do limite fraco de v_n em $H^1(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$M_\lambda = \lim_{n\to\infty} ||v_n - v||^2_{\mathbb{R}^N} + ||v||^2_{\mathbb{R}^N}.$$

Pela definição de M_λ, conseguimos mostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$||v_n - v||^2_{\mathbb{R}^N} \geq M_\lambda |v_n - v|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

e de modo semelhante

$$||v||^2_{\mathbb{R}^N} \geq M_\lambda |v|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Logo

$$M_\lambda = ||v||^2_{\mathbb{R}^N} + \lim_{n\to\infty} ||v_n - v||^2_{\mathbb{R}^N} \geq M_\lambda |v|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \lim_{n\to\infty} M_\lambda |v_n - v|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

De (2.12)

$$M_\lambda \geq M_\lambda \left[(|v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)})^{\frac{2}{p}} + (1 - |v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)})^{\frac{2}{p}}\right].$$

Assim, concluímos que

$$(|v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)})^{\frac{2}{p}} + (1 - |v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)})^{\frac{2}{p}} \leq 1 \tag{2.13}$$

Por outro lado, vimos anteriormente que $|v|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq 1$, donde segue

$$|v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq 1 \text{ e } 1 - |v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq 1$$

e sendo $p > 2$, então

$$(|v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)})^{\frac{2}{p}} + (1 - |v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)})^{\frac{2}{p}} \geq (|v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}) + (1 - |v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}) = 1. \tag{2.14}$$

De (2.13) e (2.14), temos que

$$(|v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)})^{\frac{2}{p}} + (1 - |v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)})^{\frac{2}{p}} = 1. \tag{2.15}$$

Desta última expressão, concluímos que $|v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0$ ou $|v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 1$.
De fato, considere que $0 < |v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} < 1$. Sendo assim,

$$(|v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)})^{\frac{2}{p}} + (1 - |v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)})^{\frac{2}{p}} > |v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} + 1 - |v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 1$$

contradizendo (2.15) e portanto $|v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0$ ou $|v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 1$.
Porém, $\displaystyle\int_{B_1(0)} |v_n|^2 dx > \frac{\delta}{2}$ e desde que $v_n \to v$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$, passando ao limite em n obtemos

$$|v|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \geq \int_{B_1(0)} |v|^2 dx \geq \frac{\delta}{2}$$

mostrando que $v \neq 0$, logo $|v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \neq 0$.
E portanto concluimos que

$$|v|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 1,$$

e pela definição de M_λ, tem-se $M_\lambda \leq ||v||^2_{\mathbb{R}^N}$. Por outro lado, recordamos que $||v||^2_{\mathbb{R}^N} \leq M_\lambda$, donde segue que

$$||v||^2_{\mathbb{R}^N} = M_\lambda.$$

Sendo $H^1(\mathbb{R}^N)$ uniformemente convexo, $v_n \rightharpoonup v$ e $||v_n||^2_{\mathbb{R}^N} \to ||v||^2_{\mathbb{R}^N}$, tem-se

$$v_n \to v \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Portanto $\{v_n\}$ possui uma subseqüência convergente, provando também que existe um minimizador para M_λ.

$\square$

2.4 O caso não simétrico

Nesta seção nos dedicaremos ao estudo da existência de solução para o problema

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = Q(x)|u|^{p-2}u, & \mathbb{R}^N \\ u \geq 0, & u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

onde $N \geq 3$ e $2 < p < 2^*$ e Q satisfazendo as seguintes propriedades

$(Q1)$ $\quad Q \in C(\mathbb{R}^N)$

$(Q2)$ $\quad 1 = \lim\limits_{|x|\to\infty} Q(x) = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N} Q(x).$

Observemos que este é um caso mais geral, pois considerando $Q \equiv 1$ recaimos no problema (P_0), o qual já mostramos a exitência de solução. Outro fato interessante, é que durante os nossos estudos sobre a solução deste problema, vamos observar que os resultados valem fazendo a troca de 1 (o limite de Q definido acima) por qualquer número positivo.

Consideremos o seguinte funcional

$$\begin{aligned} I:\ H^1(\mathbb{R}^N) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + \lambda u^2)dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u^+)^p dx \end{aligned}$$

que é de classe $C^2\left(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R}\right)$.

O lema a seguir nos mostra uma condição de compacidade para o funcional definido acima, este fato juntamente com Teorema do Passo da Montanha vai nos garantir a existência de uma solução para o problema (P_1).

Lema 2.2 *Seja Q satisfazendo $(Q1)$ e $(Q2)$. Então qualquer seqüência $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$d = \sup_n I(u_n) < c^* = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\lambda^{\frac{p}{p-2}}$$

e

$$I'(u_n) \to 0, \text{ quando } n \to \infty,$$

contém uma subseqüência convergente.

Demonstração: Observemos que

$$I(u_n) = \frac{1}{2}||u_n||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u_n^+)^p dx$$

e

$$I'(u_n).u_n = ||u_n||^2_{\mathbb{R}^N} - \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u_n^+)^p dx.$$

Assim,

$$I(u_n) - \frac{1}{p}I'(u_n).u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)||u_n||^2_{\mathbb{R}^N}. \tag{2.16}$$

Por outro lado

$$\left|I(u_n) - \frac{1}{p}I'(u_n).u_n)\right| \leq c^* + \frac{1}{p}||I'(u_n)||||u_n||_{\mathbb{R}^N}. \tag{2.17}$$

Por (2.16) e (2.17), e visto que $I'(u_n) \to 0$, concluimos que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)||u_n||^2_{\mathbb{R}^N} \leq c^* + \frac{c_1}{p}||u_n||_{\mathbb{R}^N}$$

mostrando que $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Desde que $H^1(\mathbb{R}^N)$ é reflexivo e pela imersão compacta em domínios limitados, existem $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$\begin{gathered} u_{n_j} \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N) \\ u_{n_j} \to u \text{ em } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N) \\ u_{n_j} \to u \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \end{gathered}$$

Por simplicidade iremos denotar u_{n_j} por u_n. Notemos o seguinte

$$((u_n^+)^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} = (u_n^+)^p \leq |u_n|^p \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N),$$

ou seja,

$$(u_n^+)^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

Uma vez que $u_n \to u$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$(u_n^+)^{p-1} \to (u^+)^{p-1} \text{ em } L^{\frac{p}{p-1}}_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

Sendo

$$I'(u_n).v = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla v + \lambda u_n v)dx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u_n^+)^{p-1} v dx \quad \forall v \in C_o^\infty(\mathbb{R}^N),$$

então

$$I^{'}(u_n).v \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + \lambda uv)dx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u^+)^{p-1} v dx, \ \ \forall v \in C_o^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Mas por hipótese temos que

$$I^{'}(u_n).v \to 0, \ \ \forall v \in C_o^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Assim, pela unicidade de limite decorre que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + \lambda uv)dx = \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u^+)^{p-1} v dx, \quad \forall v \in C_o^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Seja qualquer $\Psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, por densidade temos que existe $\{v_n\} \subset C_o^\infty(\mathbb{R}^N)$ de modo que

$$v_n \to \Psi.$$

Desta forma, temos o seguinte

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v_n + \lambda u v_n)dx = \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u^+)^{p-1} v_n dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Passando ao limite e sendo Ψ arbitrária, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \Psi + \lambda u \Psi)dx = \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u^+)^{p-1} \Psi dx, \quad \forall \Psi \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{2.18}$$

Desta forma

$$-\Delta u + \lambda u = Q(x)(u^+)^{p-1}$$

Usando (2.18) com $\Psi = u$, obtemos

$$I(u) = \frac{1}{2}||u||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u^+)^p dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)||u||^2_{\mathbb{R}^N} \geq 0. \tag{2.19}$$

A partir deste momento vamos considerar que $u_n \geq 0$ para cada n, basta trocarmos u_n por u_n^+, para cada n e observarmos que a seqüência $\{u_n^+\}$ satisfaz as hipóteses do lema.

Afirmação 1: Se $\{u_n\}$ satisfaz as hipóteses do lema, então $\{u_n^+\}$ também satisfaz.

Considerando $u_n^-(x) = \ min\{u_n(x), \ 0\}$, temos que

$$u_n = u_n^+ + u_n^-,$$

donde segue

$$||u_n||^2_{\mathbb{R}^N} = ||u_n^+||^2_{\mathbb{R}^N} + ||u_n^-||^2_{\mathbb{R}^N}.$$

Logo

$$I(u_n) = \frac{1}{2}||u_n^+||^2_{\mathbb{R}^N} + \frac{1}{2}||u_n^-||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u_n^+)^p dx \leq d < c^*,$$

onde d e c^* são definidos no enunciado deste lema.

Desde que $||u_n^-||^2_{\mathbb{R}^N} \geq 0$ para cada n, obtemos

$$I(u_n^+) = \frac{1}{2}||u_n^+||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u_n^+)^p dx \leq d < c^*, \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Deste modo

$$\sup_n I(u_n^+) \leq d < c^*.$$

Resta-nos mostrar que $I^{'}(u_n^+) = o_n(1)$ em H^{-1}.

Primeiramente, observemos que sendo $\{u_n\}$ limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, o mesmo ocorre para $\{u_n^-\}$. Além disso, desde que $I^{'}(u_n) = o_n(1)$ em H^{-1}, temos

$$I^{'}(u_n).u_n^- = o_n(1).$$

Por outro lado

$$I^{'}(u_n).u_n^- = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u_n \nabla u_n^- + \lambda u_n u_n^-\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u_n^+)^{p-1} u_n^- dx = ||u_n^-||^2_{\mathbb{R}^N},$$

de onde segue

$$||u_n^-||^2_{\mathbb{R}^N} = o_n(1).$$

Considerando agora $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $||v|| \leq 1$, temos que

$$I^{'}(u_n).v = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla v + \lambda u_n v)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u_n^+)^{p-1} v dx,$$

desde que $u_n = u_n^+ + u_n^-$, segue-se

$$I^{'}(u_n).v = I^{'}(u_n^+).v + \langle u_n^-, v\rangle.$$

Sendo assim,

$$|I^{'}(u_n^+).v| \leq |I^{'}(u_n).v| + |\, \langle u_n^-, v\rangle \,|.$$

Pela Desigualdade de Schwarz, obtemos

$$|I'(u_n^+).v| \leq ||I'(u_n)||_{H^{-1}}||v||_{\mathbb{R}^N} + ||u_n^-||_{\mathbb{R}^N}||v||_{\mathbb{R}^N} \leq ||I'(u_n)||_{H^{-1}} + ||u_n^-||_{\mathbb{R}^N}.$$

Por hipótese $I'(u_n) = o_n(1)$ em H^{-1}, e desde que $||u_n^-||_{\mathbb{R}^N}^2 = o_n(1)$, concluímos que

$$||I'(u_n^+)||_{H^{-1}} = o_n(1).$$

Portanto, terminamos de demonstrar a afirmação 1.

Considere a seguinte seqüência $\{Q^{\frac{1}{p}}u_n\} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$, pois Q é uma função limitada em $\mathbb{R}^N$ e $\{u_n\} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$. Além disso, pela definição de M_λ temos que

$$|Q^{\frac{1}{p}}u_n|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq c_1|u_n|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq c_1 M_\lambda^{-\frac{1}{2}}||u_n||_{H^1(\mathbb{R}^N)},$$

de onde segue que $\{Q^{\frac{1}{p}}u_n\}$ é limitada em $L^p(\mathbb{R}^N)$, pois $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Desde que $u_n \to u$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, então $Q^{\frac{1}{p}}u_n \to Q^{\frac{1}{p}}u$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

Sendo assim, aplicando o Lema de Brézis-Lieb temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |Q^{\frac{1}{p}}(x)u_n|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |Q^{\frac{1}{p}}(x)u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |Q^{\frac{1}{p}}(x)v_n|^p dx + o_n(1),$$

onde $v_n = u_n - u$.

Afirmação 2: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|u_n|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dx + o_n(1)$**.**

Note que por definição $Q(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, implicando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|u_n|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|v_n|^p dx + o_n(1). \tag{2.20}$$

Desde que $Q \in C(\mathbb{R}^N)$ e $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} Q(x) = \inf_{x\in\mathbb{R}^N} Q(x) = 1$, então podemos concluir que dado $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$Q(x) - 1 < \frac{\epsilon}{2k} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0),$$

onde $k = \displaystyle\sup_n \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dx$.

Além disso, por definição vemos que Q é limitada em $B_R(0)$,ou seja, existe $c_2 > 0$ tal que

$$Q(x) - 1 \leq c_2 \text{ para todo } x \in B_R(0).$$

Assim, decorre que

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|v_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dx\right| &= \int_{\mathbb{R}^N} (Q(x)-1)|v_n|^p dx \\
&= \int_{B_R(0)} (Q(x)-1)|v_n|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} (Q(x)-1)|v_n|^p dx \\
&\leq \int_{B_R(0)} (Q(x)-1)|v_n|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \frac{\epsilon}{2k}|v_n|^p dx
\end{aligned}
$$

$$
\left|\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|v_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dx\right| \leq c_2 \int_{B_R(0)} |v_n|^p dx + \frac{\epsilon}{2}.
$$

Desde que $u_n \to u$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, então $v_n \to 0$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Logo

$$
\int_{B_R(0)} |v_n|^p dx \longrightarrow 0,
$$

ou seja, dado $\epsilon > 0$ para n suficientemente grande temos que

$$
\int_{B_R(0)} |v_n|^p dx \leq \frac{\epsilon}{2c_2}.
$$

Sendo assim,

$$
\overline{\lim_n} \left|\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|v_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dx\right| \leq \epsilon.
$$

Fazendo agora $\epsilon \to 0$, concluímos que para n suficientemente grande

$$
\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|v_n|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dx + o_n(1) \tag{2.21}
$$

Substituindo (2.21) em (2.20), obtemos

$$
\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|u_n|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dx + o_n(1)
$$

mostrando a Afirmação 2.

Assumindo que $I(u_n) \to c \leq d$, então

$$
\frac{1}{2}||u_n||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|u_n|^p dx = c + o_n(1).
$$

Logo,

$$
\frac{1}{2}||u_n||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|u|^p dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dx = c + o_n(1),
$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}||u_n||^2_{\mathbb{R}^N} + I(u) - \frac{1}{2}||u||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dx = c + o_n(1). \tag{2.22}$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ temos que

$$\langle u_n, u\rangle = \langle u, u\rangle + o_n(1) = ||u||^2_{\mathbb{R}^N} + o_n(1)$$

e sendo $v_n = u_n - u$, então

$$||v_n||^2_{\mathbb{R}^N} = ||u_n||^2_{\mathbb{R}^N} - 2\langle u_n, u\rangle + ||u||^2_{\mathbb{R}^N} = ||u_n||^2_{\mathbb{R}^N} - ||u||^2_{\mathbb{R}^N} + o_n(1). \tag{2.23}$$

Logo, por (2.22) e (2.23) obtemos o seguinte

$$I(u) + \frac{1}{2}||v_n||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dx = c + o_n(1). \tag{2.24}$$

Uma vez que $I'(u_n).u_n = o_n(1)$, então

$$||u_n||^2_{\mathbb{R}^N} - \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|u_n|^p dx = o_n(1)$$

$$||u_n||^2_{\mathbb{R}^N} - \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|u|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dx = o_n(1)$$

$$||v_n||^2_{\mathbb{R}^N} + ||u||^2_{\mathbb{R}^N} - \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|u|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dx = o_n(1).$$

Desde que

$$I'(u).u = ||u||^2_{\mathbb{R}^N} - \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|u|^p dx = 0,$$

então

$$||v_n||^2_{\mathbb{R}^N} - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dx = o_n(1).$$

Além disso, podemos assumir que

$$||v_n||^2_{\mathbb{R}^N} \to b \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dx \to b. \tag{2.25}$$

Se $b = 0$, então

$$||u_n - u||^2_{\mathbb{R}^N} = ||v_n||^2_{\mathbb{R}^N} \to 0$$

mostrando com isto que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, e portanto terminaria a demonstração. Caso $b > 0$, pela definição de M_λ, temos que

$$||v_n||^2_{\mathbb{R}^N} \geq M_\lambda |v_n|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)} = M_\lambda (|v_n|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)})^{\frac{2}{p}}$$

assim, passando ao limite de $n \to \infty$ obtemos

$$b \geq M_\lambda b^{\frac{2}{p}},$$

de onde segue

$$b \geq M_\lambda^{\frac{p}{p-2}}.$$

Note que de (2.24) temos

$$\frac{1}{2}||v_n||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dx = c - I(u) + o_n(1)$$

Por outro lado, de (2.25) temos também que

$$\frac{1}{2}||v_n||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) b + o_n(1).$$

Pela unicidade de limite, concluímos que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) b = c - I(u)$$

e por (2.19)

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) b \leq c.$$

Portanto

$$c^* = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\lambda^{\frac{p}{p-2}} \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) b \leq c \leq d < c^*.$$

o que é uma contradição, logo $b = 0$.

Mostrando, com isto, o lema.

□

Teorema 2.5 *Seja Q verificando $(Q1)$ e $(Q2)$. Se $N \geq 3$ e $2 < p < 2^*$, então o problema*

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = Q(x)|u|^{p-2}u, & \mathbb{R}^N \\ u \geq 0, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

tem uma solução não trivial.

Demontração: Observe que é suficiente aplicarmos o Teorema do Passo da Montanha e mostrar que o nível minimax verifica a desigualdade $c < c^*$. Considere $v > 0$ uma função minimizante para M_λ. Note também que se $Q \equiv 1$, o resultado segue do Teorema 2.3.

Assim, podemos assumir que $Q \not\equiv 1$ para todo o $\mathbb{R}^N$. Logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)v^p dx > \int_{\mathbb{R}^N} v^p dx. \tag{2.26}$$

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \frac{t^2}{2}||v||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)v^p dx.$$

Assim,

$$f^{'}(t) = t||v||^2_{\mathbb{R}^N} - t^{p-1}\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)v^p dx.$$

Fazendo $f^{'}(t) = 0$, uma vez que queremos encontrar o máximo de f para $t \geq 0$, obtemos

$$t\left(||v||^2_{\mathbb{R}^N} - t^{p-2}\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)v^p dx\right) = 0.$$

De onde segue que

$$t = 0 \quad \text{ou} \quad t = \left(\frac{||v||^2_{\mathbb{R}^N}}{\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)v^p dx}\right)^{\frac{1}{p-2}}.$$

Desde que $p > 2$, então pelo comportamento do gráfico de f observamos que

$$\begin{aligned}
\max_{t\geq 0} I(tv) &= \left(\frac{||v||^2_{\mathbb{R}^N}}{\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)v^p dx}\right)^{\frac{2}{p-2}} .\frac{1}{2}||v||^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} - \left(\frac{||v||^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}}{\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)v^p dx}\right)^{\frac{p}{p-2}} .\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)v^p dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left[\frac{||v||^2_{\mathbb{R}^N}}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)v^p dx\right)^{\frac{2}{p}}}\right]^{\frac{p}{p-2}}.
\end{aligned}$$

Segue de (2.26)

$$\max_{t\geq 0} I(tv) < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left[\frac{||v||^2_{\mathbb{R}^N}}{|v|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)}}\right]^{\frac{p}{p-2}} < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\lambda^{\frac{p}{p-2}} = c^*. \tag{2.27}$$

Sendo

$$I(u) = \frac{1}{2}||u||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u^+)^p dx \geq \frac{1}{2}||u||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{c_1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(u^+)^p dx,$$

onde $c_1 = \max_{x\in\mathbb{R}^N} Q(x)$.
Desde que $(u^+)^p \leq |u|^p dx$, então

$$I(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} - \frac{c_1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p dx = \frac{1}{2}||u||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{c_1}{p}|u|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Além disso,

$$||u||^2_{\mathbb{R}^N} \geq M_\lambda |u|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

de onde segue que

$$||u||^p_{\mathbb{R}^N} \geq M_\lambda^{\frac{p}{2}}|u|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Logo

$$I(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{c_1}{p}.\frac{1}{M_\lambda^{\frac{p}{2}}}||u||^p_{H^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Desde que $p > 2$, temos que existe $r > 0$ tal que

$$I(u) \geq \frac{1}{2}r^2 - \frac{c_1}{p}.\frac{1}{M_\lambda^{\frac{p}{2}}}r^p \geq \frac{1}{4}r^2 > 0, \ \ \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N) \ \text{ com } \ ||u||_{\mathbb{R}^N} = r.$$

Assim,

$$\inf_{||u||_{\mathbb{R}^N}=r} I(u) > 0 = I(0).$$

Desde que $p > 2$, então existe $t_o > 0$ tal que

$$||t_o v||_{\mathbb{R}^N} > r \ \text{ e } \ I(t_o v) < 0.$$

Segue-se de (2.27)

$$\max_{t\in[0,1]} I(tt_o v) \leq \max_{s\geq 0} I(sv) < c^*.$$

Pelo Lema 2.2 e pelo Teorema do Passo da Montanha, I tem um valor crítico c tal que $\inf_{||u||_{\mathbb{R}^N}=r} I(u) \leq c < c^*$. Uma vez que podemos considerar que a seqüência $\{u_n\}$ é tal que $u_n \geq 0$ para todo n, então o problema (P_1) tem uma solução positiva não trivial.

$\square$

Capítulo 3

Soluções positivas em domínios exteriores

Neste capítulo vamos mostrar a existência de solução positiva para o seguinte problema elíptico não linear

$$(P_2) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u &= |u|^{p-2}u, \quad \Omega \\ u &\in H_o^1(\Omega) \end{cases},$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio exterior, tal que $\partial\Omega \neq \phi$ é limitada, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $N \geq 3$ e $2 < p < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$.

3.1 Resultados preliminares

Além das normas consideradas anteriormente, neste capítulo denotaremos por

$$||u|| = \left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \lambda u^2 \right) dx \right)^{1/2}$$

e

$$|u|_p = \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{1/p}$$

as normas em $H_o^1(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$, respectivamente.

Denotaremos por M_λ e μ_λ as seguintes constantes

$$M_\lambda = \inf \left\{ ||u||^2_{\mathbb{R}^N};\ u \in H^1(\mathbb{R}^N),\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1 \right\}, \tag{3.1}$$

e

$$\mu_\lambda = \inf\left\{||u||^2;\ u \in H_o^1(\Omega),\ \int_\Omega |u|^p dx = 1\right\}. \tag{3.2}$$

Definição 3.1 *Dizemos que v é uma* **ground state solution** *de um problema elíptico, quando esta solução é de menor energia entre todas as soluções não triviais do problema.*

Observação: Se v é uma ground state solution de (P_0) (vimos no capítulo anterior que tal problema tem solução), isto é, $v = M_\lambda^{\frac{1}{p-2}} u$ onde u é um minimizador de (3.1) (ver Apêndice B), então v é a solução com a energia mínima entre todas as soluções não triviais do problema.

Consideremos o seguinte funcional:

$$\begin{array}{rccl} I: & H^1(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & w & \longmapsto & I(w) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w|^2 + \lambda w^2\right) dx - \dfrac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |w|^p dx. \end{array}$$

Logo

$$\begin{aligned} I(v) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^2 + \lambda v^2\right) dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx \\ &= \frac{1}{2} M_\lambda^{\frac{2}{p-2}} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\right) dx - \frac{1}{p} M_\lambda^{\frac{p}{p-2}} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \\ I(v) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\lambda^{\frac{p}{p-2}}. \end{aligned}$$

Supondo agora que exista uma outra solução para o problema (P_0), e denotando esta outra solução por $\overline{v}$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla \overline{v} \nabla h + \lambda \overline{v} h)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\overline{v}|^{p-2} \overline{v} h dx,\ \ \forall h \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Considerando $h = \overline{v}$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla \overline{v}|^2 + \lambda \overline{v}^2\right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\overline{v}|^p dx. \tag{3.3}$$

Por outro lado, pela definição de M_λ

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla \overline{v}|^2 + \lambda \overline{v}^2\right) dx \geq M_\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\overline{v}|^p dx\right)^{2/p}. \tag{3.4}$$

Sendo assim, de (3.3) e (3.4), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla \overline{v}|^2 + \lambda \overline{v}^2\right) dx \geq M_\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla \overline{v}|^2 + \lambda \overline{v}^2\right) dx \right)^{2/p}.$$

A partir de cálculos simples, chegamos ao seguinte resultado

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla \overline{v}|^2 + \lambda \overline{v}^2\right) dx \geq M_\lambda^{\frac{p}{p-2}}. \tag{3.5}$$

Portanto, usando (3.3) e (3.5)

$$\begin{aligned} I(\overline{v}) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla \overline{v}|^2 + \lambda \overline{v}^2\right) dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\overline{v}|^p dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla \overline{v}|^2 + \lambda \overline{v}^2\right) dx = \\ I(\overline{v}) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\lambda^{\frac{p}{p-2}} = I(v). \end{aligned}$$

Mostrando que v é a solução com a menor energia de todas a soluções não triviais de (P_0).

3.2 Um resultado de não existência de solução

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que apesar do (P_0) ter uma ground state solution, o problema (P_2) não tem. Isto é, μ_λ não é atingida.

Teorema 3.1 *Seja $N \geq 3$. O problema (P_2) não tem ground state solution.*

Demonstração: Observemos que qualquer $u \in H_o^1(\Omega)$ pode ser extendida por zero fora de Ω, logo podemos considerar $H_o^1(\Omega)$ como um subespaço de $H^1(\mathbb{R}^N)$ e com isto

$$M_\lambda \leq \mu_\lambda. \tag{3.6}$$

Consideremos agora a seqüência $\phi_n \in H_o^1(\Omega)$ definida por

$$\phi_n(x) = c_n \zeta(x) \overline{u}(x - y_n)$$

onde

.$\{y_n\} \subset \Omega$ é uma seqüência de pontos tal que $|y_n| \to +\infty$, quando $n \to +\infty$;

.$\overline{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é um minimizador de (3.1) radialmante simétrico em torno da origem;

.$\zeta : \mathbb{R}^N \to [0,1]$ é uma função de classe C^∞ definida por $\zeta(x) = \xi\left(\frac{|x|}{\rho}\right)$, sendo ρ o menor número positivo tal que

$$\mathbb{R}^N \setminus \Omega \subset B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^N : \ |x| < \rho\}$$

e $\xi : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to [0,1]$ sendo uma função não decrescente tal que

$$\xi(t) = 0 \ \ \forall t \leq 1 \text{ e } \xi(t) = 1 \ \ \forall t \geq 2;$$

.c_n é uma constante de normalização dada por $c_n = (|\zeta(x)\overline{u}(x-y_n)|_p)^{-1}$.

Vamos mostrar que $||\phi_n||^2 \to M_\lambda$ quando $n \to +\infty$.

Fazendo a mudança de variáveis $z = x - y_n$, obtemos

$$\begin{aligned} |\zeta(x)\overline{u}(x-y_n) - \overline{u}(x-y_n)|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\zeta(x)\overline{u}(x-y_n) - \overline{u}(x-y_n)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\zeta(z+y_n)\overline{u}(z) - \overline{u}(z)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Considere $f_n(z) = |(\zeta(z+y_n)-1)\overline{u}(z)|^p$. Desde que $|y_n| \to +\infty$ quando $n \to +\infty$ e mais ainda, note que $|z+y_n| \geq |y_n| - |z|$. Com isto para cada $z \in \mathbb{R}^N$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $|z+y_n| \geq 2\rho$ para todo $n \geq n_o$. Portanto $\zeta(z+y_n) = 1$ para todo $n \geq n_o$, logo

$$f_n(z) \to 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |f_n(z)| &= |(\zeta(z+y_n)-1)\overline{u}(z)|^p = |\zeta(z+y_n)-1|^p|\overline{u}(z)|^p \\ &\leq (|\zeta(z+y_n)|+1)^p|\overline{u}(z)|^p \leq 2^p|\overline{u}(z)|^p. \end{aligned}$$

Assim, desde que $\overline{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ das imersões de Sobolev temos que $\overline{u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$, conseqüentemente

$$|f_n| \leq 2^p|\overline{u}|^p \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(z)dz \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} 0dz \ ,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\zeta(z+y_n)\overline{u}(z) - \overline{u}(z)|^p dz \longrightarrow 0.$$

Mostrando que

$$\zeta(.+y_n)\overline{u} \to \overline{u} \text{ em } L^p(\mathbb{R}^N).$$

Observe que por definição $\zeta(x) = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ e usando os fatos mostrados anteriormente, segue-se que

$$\begin{aligned}
|\zeta(x)\overline{u}(x-y_n)|_p &= \left(\int_\Omega |\zeta(x)\overline{u}(x-y_n)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\zeta(x)\overline{u}(x-y_n)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\zeta(z+y_n)\overline{u}(z)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\overline{u}(z)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} + o_n(1).
\end{aligned}$$

Desde que $\overline{u}$ é um minimizador de (3.1) segue

$$|\zeta(x)\overline{u}(x-y_n)|_p = 1 + o_n(1)$$

logo

$$c_n \to 1, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Por outro lado,

$$||(\zeta(x)-1)\overline{u}(x-y_n)||^2_{\mathbb{R}^N} = \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla\left(\zeta(x)-1\right)\overline{u}(x-y_n)|^2 + \lambda\left(\zeta(x)-1\right)\overline{u}(x-y_n)^2\right] dx.$$

De modo análogo aos cálculos feitos anteriormente é fácil verificar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lambda\left(\zeta(x)\overline{u}(x-y_n) - \overline{u}(x-y_n)\right)^2 dx = o_n(1). \tag{3.7}$$

Logo, resta-nos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\left(\zeta(x)\overline{u}(x-y_n) - \overline{u}(x-y_n)\right)|^2 dx = o_n(1).$$

Fazendo, novamente, a mudança de variável $z = x - y_n$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\left(\zeta(x)\overline{u}(x-y_n) - \overline{u}(x-y_n)\right)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\left(\zeta(z+y_n)\overline{u}(z) - \overline{u}(z)\right)|^2 dz.$$

Considere a seguinte seqüência $g_n(z) = |\nabla\left(\zeta(z+y_n)\overline{u}(z) - \overline{u}(z)\right)|^2$. Utilizando argumentos semelhantes aos vistos anteriormente, obtemos

$$g_n(z) \to 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Além disso,

$$\nabla\left(\zeta(z+y_n)\overline{u}(z) - \overline{u}(z)\right) = \nabla\zeta(z+y_n)\overline{u}(z) + \zeta(z+y_n)\nabla\overline{u}(z) - \nabla\overline{u}(z).$$

Sendo assim,

$$
\begin{aligned}
|g_n| &= |\nabla\zeta(.+y_n)\overline{u}+\zeta(.+y_n)\nabla\overline{u}-\nabla\overline{u}|^2\\
&\leq (|\nabla\zeta(.+y_n)\overline{u}|+|\zeta(.+y_n)\nabla\overline{u}|+|\nabla\overline{u}|)^2\\
&\leq (3\max\{|\nabla\zeta(.+y_n)\overline{u}|,\ |\zeta(.+y_n)\nabla\overline{u}|,\ |\nabla\overline{u}|\})^2\\
&\leq 9\max\{|\nabla\zeta(.+y_n)\overline{u}|^2,\ |\zeta(.+y_n)\nabla\overline{u}|^2,\ |\nabla\overline{u}|^2\}\\
&\leq 9|\nabla\zeta(.+y_n)\overline{u}|^2+9|\zeta(.+y_n)\nabla\overline{u}|^2+9|\nabla\overline{u}|^2\\
|g_n| &\leq 9|\nabla\zeta(.+y_n)\overline{u}|^2+18|\nabla\overline{u}|^2.
\end{aligned}
$$

Agora, desde que $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\zeta \equiv 1$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_{2\rho}$, segue-se que $\nabla\zeta$ é limitada em $\mathbb{R}^N$, e assim

$$
|g_n| \leq c_1|\overline{u}|^2 + 18|\nabla\overline{u}|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N),
$$

pois $\overline{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$, implicando pela definição deste espaço que $|\overline{u}|$ e $|\nabla\overline{u}|$ pertencem a $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Utilizando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\left(\zeta(z+y_n)\overline{u}(z)-\overline{u}(z)\right)|^2 dz = o_n(1) \tag{3.8}
$$

De (3.7), (3.8) e da mudança de variáveis realizada, obtemos que

$$
||\zeta(x)\overline{u}(x-y_n)-\overline{u}(x-y_n)||^2_{\mathbb{R}^N} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to +\infty.
$$

Desde que $\overline{u}$ é um minimizador de (3.1)

$$
||\zeta(x)\overline{u}(x-y_n)||^2_{\mathbb{R}^N} = ||\overline{u}(x-y_n)||^2_{\mathbb{R}^N} + o_n(1) = ||\overline{u}||^2_{\mathbb{R}^N} + o_n(1) = M_\lambda + o_n(1).
$$

Sendo $\zeta(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$, então

$$
||\phi_n||^2_{\mathbb{R}^N} = ||c_n\zeta(x)\overline{u}(x-y_n)||^2_{\mathbb{R}^N} = ||c_n\zeta(x)\overline{u}(x-y_n)||^2 = ||\phi_n||^2.
$$

Além do mais, desde que $c_n = 1 + o_n(1)$ segue-se que

$$
||\phi_n||^2 = c_n^2||\zeta(x)\overline{u}(x-y_n)||^2 = M_\lambda + o_n(1).
$$

Uma vez que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$
|\phi_n|_p = |c_n\zeta(x)\overline{u}(x-y_n)|_p = c_n|\zeta(x)\overline{u}(x-y_n)|_p = 1,
$$

então pela definição de μ_λ temos que

$$
\mu_\lambda \leq ||\phi_n||^2, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.
$$

Portanto, passando ao limite concluímos que

$$\mu_\lambda \leq M_\lambda. \tag{3.9}$$

De (3.6) e (3.9), obtemos

$$\mu_\lambda = M_\lambda.$$

Supondo que existe $v_o \in H_0^1(\Omega)$ com $v_o \geq 0$ tal que

$$||v_o||^2 = M_\lambda \;\text{ e }\; |v_o|_p = 1.$$

Considerando que $v_o = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, vemos que $v_o \in H^1(\mathbb{R}^N)$, então v_o seria um minimizador para (3.1) e uma solução para o problema

$$(P_3) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u &= M_\lambda u^{p-1}, \quad \mathbb{R}^N \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}.$$

Pelo princípio do máximo forte temos $v_o > 0$ em $\mathbb{R}^N$, o que contradiz o fato de $v_o = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.

Portanto, o problema (P_2) não tem ground state solution.

□

3.3 Um lema de compacidade

Nesta seção vamos estudar um resultado de compacidade, que será muito útil para mostrarmos a solução do problema (P_2). Começaremos definindo os seguintes funcionais:

$$\begin{aligned} I: \quad H_o^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + a(x)u^2\right) dx - \frac{1}{p}\int_\Omega b(x)|u|^p dx, \\ \overline{I}: \quad H^1(\mathbb{R}^N) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \overline{I}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\right) dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \beta|u|^p dx \end{aligned}$$

onde a e b são funções contínuas limitadas satisfazendo

$$\lim_{|x|\to+\infty} a(x) = \lambda \text{ com } a(x) \geq \delta_1 > 0 \;\; \forall x \in \Omega$$

e

$$\lim_{|x|\to+\infty} b(x) = \beta \text{ com } b(x) \geq \delta_2 > 0 \ \ \forall x \in \Omega.$$

Definiremos, também as seguintes constantes

$$M = \inf\left\{\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^2 + a(x)u^2\right)dx,\ u \in H_o^1(\Omega),\ \int_{\Omega} b(x)|u|^p dx = 1\right\}, \tag{3.10}$$

$$M_\infty = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\right)dx,\ u \in H^1(\mathbb{R}^N),\ \int_{\mathbb{R}^N} \beta|u|^p dx = 1\right\}. \tag{3.11}$$

A partir de argumentos e cálculos análogos aos usados na demonstração do Teorema 3.1, quando chegamos a conclusão que $\mu_\lambda \leq M_\lambda$, consegue-se mostrar

$$M \leq M_\infty.$$

Lema 3.1 *Seja $\{u_n\} \subset H_o^1(\Omega)$ uma seqüência tal que*

$$I(u_n) \to c \ e \ I'(u_n) \to 0 \ em \ H^{-1}(\Omega)$$

quando $n \to +\infty$. Assuma que $u_n \not\to u^0$ em $H_o^1(\Omega)$. Então, existe um número $k \in \mathbb{N}$, k seqüências de pontos $\{y_n^j\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $k+1$ seqüências de funções $\{u_n^j\}_{n\in\mathbb{N}} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ para $0 \leq j \leq k$ tais que quando $n \to +\infty$, temos que

$$\begin{array}{l} |y_n^j| \to +\infty \ \ para \ \ 1 \leq j \leq k, \\ u_n^0 = u_n \rightharpoonup u^0 \ \ em \ \ H_o^1(\Omega), \\ u_n^j \rightharpoonup u^j \ \ em \ \ H^1(\mathbb{R}^N) \ \ para \ \ 1 \leq j \leq k, \end{array}$$

onde u^0 é uma solução de

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u + a(x)u &=& b(x)|u|^{p-2}u, \ \ \Omega \\ u &\in& H_o^1(\Omega) \end{array} \right. ,$$

e u^j para $1 \leq j \leq k$, são soluções de

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u + \lambda u &=& \beta|u|^{p-2}u, \ \ \mathbb{R}^N \\ u &\in& H^1(\mathbb{R}^N) \end{array} \right. .$$

Além disso, quando $n \to +\infty$

$$||u_n||^2 \longrightarrow ||u_0||^2 + \sum_{j=1}^{k} ||u^j||^2_{\mathbb{R}^N},$$

$$I(u_n) \longrightarrow I(u^0) + \sum_{j=1}^{k} \overline{I}(u^j).$$

Demonstração:

Afirmação 1: A seqüência $\{u_n\}$ é limitada em $H_o^1(\Omega)$.

Consideremos as seguintes funções $a_1(x) = a(x) - \lambda$ e $b_1(x) = b(x) - \beta$. Assim

$$I(u_n) = \frac{1}{2}||u_n||^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega a_1(x)u_n^2 dx - \frac{\beta}{p}|u_n|_p^p - \frac{1}{p}\int_\Omega b_1(x)|u_n|^p dx$$

e

$$I'(u_n).u_n = ||u_n||^2 + \int_\Omega a_1(x)u_n^2 dx - \beta|u_n|_p^p - \int_\Omega b_1(x)|u_n|^p dx.$$

Sendo assim,

$$I(u_n) - \frac{1}{p}I'(u_n).u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)||u_n||^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\int_\Omega a_1(x)u_n^2 dx.$$

Uma vez que $a(x) \geq \delta_1$, então passando ao limite quando $|x| \to +\infty$, concluímos que

$$\lambda \geq \delta_1,$$

ou seja,

$$\frac{\delta_1}{\lambda} - 1 \leq 0.$$

Com isto, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a_1(x)u_n^2 dx &= \int_\Omega (a(x) - \lambda)u_n^2 dx \geq \int_\Omega (\delta_1 - \lambda)u_n^2 dx \\
\int_\Omega a_1(x)u_n^2 dx &\geq \left(\frac{\delta_1}{\lambda} - 1\right)\int_\Omega \lambda u_n^2 dx \geq \left(\frac{\delta_1}{\lambda} - 1\right)||u_n||^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
I(u_n) - \frac{1}{p}I'(u_n).u_n &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)||u_n||^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left(\frac{\delta_1}{\lambda} - 1\right)||u_n||^2 \\
I(u_n) - \frac{1}{p}I'(u_n).u_n &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\frac{\delta_1}{\lambda}||u_n||^2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, desde que

$$I(u_n) \to c \ \text{ e } \ I'(u_n) \to 0$$

existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$I(u_n) - \frac{1}{p}I'(u_n).u_n \leq \left|I(u_n) - \frac{1}{p}I'(u_n).u_n\right| \leq |I(u_n)| + \frac{1}{p}||I'(u_n)||.||u_n|| \leq c_1 + \frac{1}{p}c_2||u_n||,$$

sendo assim

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\frac{\delta_1}{\lambda}||u_n||^2 \leq c_1 + \frac{1}{p}c_2||u_n||$$

mostrando que $\{u_n\}$ é uma seqüência limitada em $H_o^1(\Omega)$, isto é, demonstramos a afirmação 1.

Sendo este espaço reflexivo, existem uma subseqüência de $\{u_n\}$ (a qual por simplicidade de notação continuaremos denotando por $\{u_n\}$) e $u^0 \in H_o^1(\Omega)$ tais que

$$u_n \rightharpoonup u^0 \text{ em } H_o^1(\Omega)$$

e

$$u_n \to u^0 \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Mais ainda, pela imersão contínua

$$H_o^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \;\; \text{para} \;\; 2 < p < 2^*,$$

temos que existe $c_3 > 0$ tal que

$$|u_n|_p \leq c_3||u_n||, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

implicando que $\{u_n\}$ é limitada em $L^p(\Omega)$. Assim, pelo Lema de Brézis e Lieb (ver Lema C.1 no Apêndice C)temos que

$$u_n \rightharpoonup u^0 \text{ em } L^p(\Omega).$$

Afirmação 2: u^0 é solução de (1).

Desde que

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + a(x)u^2\right) dx - \frac{1}{p}\int_\Omega b(x)|u|^p dx,$$

então

$$I^{'}(u_n).v = \int_\Omega \left(\nabla u_n \nabla v + a(x)u_n v\right) dx - \int_\Omega b(x)|u_n|^{p-2}u_n v dx.$$

Para cada $w \in H_o^1(\Omega)$, considere o funcional F_w em $H_o^1(\Omega)$, definido por

$$F_w(u) = \int_\Omega \left(\nabla u \nabla w + a(x)uw\right) dx.$$

Note que F_w é um funcional linear e contínuo para cada $w \in H_o^1(\Omega)$, então

$$F_w(u_n) \to F_w(u^0), \;\; \forall w \in H_o^1(\Omega),$$

ou seja,

$$\int_\Omega (\nabla u_n \nabla w + a(x)u_n w)\, dx \longrightarrow \int_\Omega \left(\nabla u^0 \nabla w + a(x)u^0 w\right) dx, \forall w \in H_o^1(\Omega). \quad (3.12)$$

Resta-nos mostrar que

$$\int_\Omega b(x)|u_n|^{p-2}u_n w dx \longrightarrow \int_\Omega b(x)|u^0|^{p-2}u^0 w dx, \;\; \forall w \in H_o^1(\Omega).$$

Uma vez que $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$ e sendo b uma função limitada, então

$$\begin{aligned}\int_\Omega b(x)||u_n|^{p-2}u_n|^{\frac{p}{p-1}} dx &= \int_\Omega b(x)\left(|u_n|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} dx = \int_\Omega b(x)|u_n|^p dx \\ &\leq N \int_\Omega |u_n|^p dx < +\infty\end{aligned}$$

implicando que

$$\{b(x)|u_n|^{p-2}u_n\} \subset L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega).$$

Desde que

$$u_n(x) \to u^0(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

então

$$b(x)|u_n(x)|^{p-2}u_n(x) \to b(x)|u^0(x)|^{p-2}u^0(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso,

$$|b(x)|u_n|^{p-2}u_n|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |b(x)|u_n|^{p-2}u_n|^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq N|u_n|_p^{p-1},$$

sendo $|u_n|_p$ limitada, temos que $|b(x)|u_n|^{p-2}u_n|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)}$ é limitada.
Pelo Lema de Brézis e Lieb (ver Apêndice C) temos que

$$b(x)|u_n(x)|^{p-2}u_n(x) \rightharpoonup b(x)|u^0(x)|^{p-2}u^0(x) \text{ em } L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega),$$

ou seja,

$$\int_\Omega b(x)|u_n|^{p-2}u_n v dx \longrightarrow \int_\Omega b(x)|u^0|^{p-2}u^0 v dx, \;\; \forall v \in L^p(\Omega),$$

em particular

$$\int_\Omega b(x)|u_n|^{p-2}u_n w dx \longrightarrow \int_\Omega b(x)|u^0|^{p-2}u^0 w dx, \forall w \in H_o^1(\Omega). \quad (3.13)$$

De (3.12) e (3.13), obtemos que

$$I'(u_n).w \longrightarrow \int_\Omega \left(\nabla u^0 \nabla w + a(x)u^0 w\right) dx - \int_\Omega b(x)|u^0|^{p-2}u^0 w dx, \quad \forall w \in H_o^1(\Omega).$$

Pela unicidade de limite temos que

$$\int_\Omega \left(\nabla u^0 \nabla w + a(x)u^0 w\right) dx - \int_\Omega b(x)|u^0|^{p-2}u^0 w dx = 0, \quad \forall w \in H_o^1(\Omega)$$

provando a afirmação 2, ou seja, u^0 é solução de (1).

Considerando a seguinte função

$$\psi_n^1(x) = \begin{cases} (u_n - u^0)(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Desde que

$$u_n \rightharpoonup u^0 \text{ em } H_o^1(\Omega) \text{ e } L^p(\Omega),$$

segue-se o limite

$$\psi_n^1 \rightharpoonup 0 \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N) \text{ e } L^p(\mathbb{R}^N).$$

Afirmação 3: $\overline{I}(\psi_n^1) = I(\psi_n^1) + o_n(1) = I(u_n) - I(u^0) + o_n(1)$**.**

Observe que

$$||\psi_n^1||_{\mathbb{R}^N}^2 = ||\psi_n^1||^2 = ||u_n - u^0||^2 = ||u_n||^2 - 2\left\langle u_n, u^0\right\rangle + ||u^0||^2,$$

ou seja,

$$||\psi_n^1||_{\mathbb{R}^N}^2 = ||\psi_n^1||^2 = ||u_n||^2 - ||u^0||^2 + o_n(1). \tag{3.14}$$

Desde que $\{u_n\}$ é limitada em $L^p(\Omega)$ e $u_n \to u^0$ q.t.p. em Ω, pelo Lema de Brézis e Lieb (ver Apêndice C)

$$|u_n|_p^p - |u_n - u^0|_p^p = |u^0|_p^p + o_n(1),$$

portanto

$$|u_n|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p = |u_n|_p^p = |u^0|_p^p + |\psi_n^1|_p^p + o_n(1) = |u^0|_p^p + |\psi_n^1|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p + o_n(1). \tag{3.15}$$

Vamos mostrar agora que

$$\int_\Omega a_1(x)\left(\psi_n^1\right)^2 dx \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Desde que $\lim\limits_{|x|\to+\infty} a(x)=\lambda$, então $\lim\limits_{|x|\to+\infty} a_1(x)=0$, ou seja, dado $\epsilon>0$, existe $R>0$ tal que

$$|a_1(x)|<\frac{\epsilon}{2c_4},\text{ quando } |x|>R,$$

onde $c_4>0$ é tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\psi_n^1\right)^2dx\leq c_4. \tag{3.16}$$

De fato, por (3.15) para $p=2$ e sendo $\{u_n\}$ limitada em $L^p(\Omega)$, concluímos que existe c_4 tal que (3.16) ocorre.

Note que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega a_1(x)\left(\psi_n^1\right)^2dx\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} a_1(x)\left(\psi_n^1\right)^2dx\right|\\ &= \left|\int_{|x|>R} a_1(x)\left(\psi_n^1\right)^2dx+\int_{|x|\leq R} a_1(x)\left(\psi_n^1\right)^2dx\right|\\ &\leq \left|\int_{|x|>R} a_1(x)\left(\psi_n^1\right)^2dx\right|+\left|\int_{|x|\leq R} a_1(x)\left(\psi_n^1\right)^2dx\right|\end{aligned}$$

$$\left|\int_\Omega a_1(x)\left(\psi_n^1\right)^2dx\right| \leq \int_{|x|>R}|a_1(x)|\left(\psi_n^1\right)^2dx+\int_{|x|\leq R}|a_1(x)|\left(\psi_n^1\right)^2dx.$$

Desta forma, desde que a é limitada então existe c_5 tal que $|a_1|\leq c_5$ e de (3.16) decorre que

$$\left|\int_\Omega a_1(x)\left(\psi_n^1\right)^2dx\right|\leq\int_{|x|>R}\frac{\epsilon}{2c_4}\left(\psi_n^1\right)^2dx+\int_{|x|\leq R}c_5\left(\psi_n^1\right)^2dx\leq\frac{\epsilon}{2}+c_5\int_{|x|\leq R}\left(\psi_n^1\right)^2dx.$$

Agora, das imersões de Rellich temos que a imersão

$$H^1(\overline{B_R(0)})\hookrightarrow L^2(\overline{B_R(0)})$$

é compacta, assim passando se necessário a uma subseqüência, temos que

$$\int_{|x|\leq R}\left(\psi_n^1\right)^2dx\longrightarrow 0,\text{ quando } n\to+\infty,$$

ou seja, existe n_o tal que para $n\geq n_o$

$$\int_{|x|\leq R}\left(\psi_n^1\right)^2dx\leq\frac{\epsilon}{2c_5}.$$

Logo para n suficientemente grande, temos que

$$\left|\int_{\Omega} a_1(x)\left(\psi_n^1\right)^2 dx\right| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon,$$

implicando que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_{\Omega} a_1(x)\left(\psi_n^1\right)^2 dx\right| \leq \epsilon,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} a_1(x)\left(\psi_n^1\right)^2 dx \longrightarrow 0, \quad quando \;\; n \to +\infty. \tag{3.17}$$

Por argumentos semelhantes, é fácil mostrar que

$$\int_{\Omega} b_1(x)|\psi_n^1|^p dx \longrightarrow 0, \quad quando \;\; n \to +\infty. \tag{3.18}$$

Por (3.14), obtemos

$$\overline{I}(\psi_n^1) = \frac{1}{2}||\psi_n^1||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\beta|\psi_n^1|^p dx = \frac{1}{2}||u_n||^2 - \frac{1}{2}||u^0||^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\beta|\psi_n^1|^p dx + o_n(1).$$

Usando (3.14), (3.17) e (3.18) segue

$$\begin{aligned} I(\psi_n^1) &= \frac{1}{2}||\psi_n^1||^2 + \frac{1}{2}\int_{\Omega} a_1(x)\left(\psi_n^1\right)^2 dx - \frac{1}{p}\int_{\Omega} b_1|\psi_n^1|^p dx - \frac{1}{p}\int_{\Omega}\beta|\psi_n^1|^p dx \\ &= \frac{1}{2}||u_n||^2 - \frac{1}{2}||u^0||^2 + \frac{1}{2}\int_{\Omega} a_1(x)\left(\psi_n^1\right)^2 dx - \frac{1}{p}\int_{\Omega} b_1|\psi_n^1|^p dx - \frac{1}{p}\int_{\Omega}\beta|\psi_n^1|^p dx + o_n(1) \\ I(\psi_n^1) &= \frac{1}{2}||u_n||^2 - \frac{1}{2}||u^0||^2 - \frac{1}{p}\int_{\Omega}\beta|\psi_n^1|^p dx + o_n(1). \end{aligned}$$

Assim, uma vez que $\psi_n = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\overline{I}(\psi_n^1) = I(\psi_n^1) + o_n(1).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} I(u_n) - I(u^0) &= \frac{1}{2}||u_n||^2 + \frac{1}{2}\int_{\Omega} a_1(x)(u_n)^2 dx - \frac{1}{p}\int_{\Omega} b(x)|u_n|^p dx \\ &\quad -\frac{1}{2}||u^0||^2 - \frac{1}{2}\int_{\Omega} a_1(x)(u^0)^2 dx + \frac{1}{p}\int_{\Omega} b(x)|u^0|^p dx. \end{aligned}$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega a_1(x)(\psi_n^1)^2 dx &= \int_\Omega a_1(x)(u_n-u^0)^2 dx \\
\Rightarrow \quad \int_\Omega a_1(x)(\psi_n^1)^2 dx &= \int_\Omega a_1(x)(u_n)^2 dx - 2\int_\Omega a_1(x)u_n u^0 dx + \int_\Omega a_1(x)(u^0)^2 dx,
\end{aligned}
$$

e desde que $u_n \rightharpoonup u^0$ em $L^2(\Omega)$, temos que

$$
\int_\Omega a_1(x)(\psi_n^1)^2 dx = \int_\Omega a_1(x)(u_n)^2 dx - \int_\Omega a_1(x)(u^0)^2 dx + o_n(1),
$$

Mas de (3.17) concluímos que

$$
\int_\Omega a_1(x)(u_n)^2 dx - \int_\Omega a_1(x)(u^0)^2 dx = o_n(1).
$$

Agora, observemos que a seqüência $\{b^{1/p}u_n\} \subset L^p(\Omega)$ satisfaz as hipóteses do Lema de Brézis e Lieb. Logo, aplicando tal Lema, obtemos

$$
\int_\Omega b(x)|u_n|^p dx - \int_\Omega b(x)|u^0|^p dx = \int_\Omega b(x)|u_n - u^0|^p dx + o_n(1) = \int_\Omega b(x)|\psi_n^1|^p dx + o_n(1)
$$

Assim, conseguimos mostrar que

$$
I(u_n) - I(u^0) = \frac{1}{2}||u_n||^2 - \frac{1}{2}||u^0||^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega b(x)|\psi_n^1|^p dx + o_n(1),
$$

isto é,

$$
I(u_n) - I(u^0) = \frac{1}{2}||u_n||^2 - \frac{1}{2}||u^0||^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega b_1(x)|\psi_n^1|^p dx - \frac{1}{p}\int_\Omega \beta|\psi_n^1|^p dx + o_n(1).
$$

Assim, de 3.18 segue-se

$$
I(u_n) - I(u^0) = \frac{1}{2}||u_n||^2 - \frac{1}{2}||u^0||^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega \beta|\psi_n^1|^p dx + o_n(1),
$$

donde, finalmente concluímos que

$$
\overline{I}(\psi_n^1) = I(\psi_n^1) + o_n(1) = I(u_n) - I(u^0) + o_n(1).
$$

Provando a afirmação 3.

Afirmação 4: $\overline{I}'(\psi_n^1) = I'(\psi_n^1) + o_n(1) = I'(u_n) - I'(u^0) + o_n(1) = o_n(1)$**.**

Para cada $v \in H_o^1(\Omega)$ com $||v|| = 1$, temos que

$$
I'(\psi_n^1).v = \int_\Omega \left(\nabla\psi_n^1 \nabla v + a(x)\psi_n^1 v\right) dx - \int_\Omega b(x)|\psi_n^1|^{p-2}\psi_n^1 v dx
$$

e

$$
\begin{aligned}
\overline{I}'(\psi_n^1).v &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla\psi_n^1\nabla v + \lambda\psi_n^1 v\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \beta|\psi_n^1|^{p-2}\psi_n^1 v dx \\
\Rightarrow \quad \overline{I}'(\psi_n^1).v &= \int_{\Omega} \left(\nabla\psi_n^1\nabla v + \lambda\psi_n^1 v\right) dx - \int_{\Omega} \beta|\psi_n^1|^{p-2}\psi_n^1 v dx.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\left(I'(\psi_n^1) - \overline{I}'(\psi_n^1)\right).v = \int_{\Omega} a_1(x)\psi_n^1 v dx - \int_{\Omega} b_1(x)|\psi_n^1|^{p-2}\psi_n^1 v dx.
$$

Decorrendo que

$$
\begin{aligned}
\left|\left(I'(\psi_n^1) - \overline{I}'(\psi_n^1)\right).v\right| &\leq \left|\int_{\Omega} a_1(x)\psi_n^1 v dx\right| + \left|\int_{\Omega} b_1(x)|\psi_n^1|^{p-2}\psi_n^1 v dx\right| \\
\Rightarrow \quad \left|\left(I'(\psi_n^1) - \overline{I}'(\psi_n^1)\right).v\right| &\leq \int_{\Omega} \left|a_1(x)\psi_n^1 v\right| dx + \int_{\Omega} \left|b_1(x)|\psi_n^1|^{p-2}\psi_n^1 v\right| dx.
\end{aligned}
$$

Sendo a_1 limitada e $\psi_n^1 \in L^2(\Omega)$ para cada n, então

$$
a_1\psi_n^1 \in L^2(\Omega).
$$

Além do mais, das imersões de Sobolev temos que $v \in L^2(\Omega)$ e existe $c_6 > 0$ tal que

$$
|v|_2 \leq c_6||v||.
$$

Com isto, aplicando Hölder e as imersões de Sobolev, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left|a_1(x)\psi_n^1 v\right| dx &\leq \left(\int_{\Omega} |a_1(x)|^2(\psi_n^1)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} |v|_2 \\
\Rightarrow \quad \int_{\Omega} \left|a_1(x)\psi_n^1 v\right| dx &\leq c_6 \left(\int_{\Omega} |a_1(x)|^2(\psi_n^1)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} ||v||.
\end{aligned}
$$

Desde que $||v|| \leq 1$

$$
\left(\int_{\Omega} \left|a_1(x)\psi_n^1 v\right| dx\right)^2 \leq c_6^2 \int_{\Omega} |a_1(x)|^2(\psi_n^1)^2 dx.
$$

Uma vez que $\lim\limits_{|x|\to+\infty} a_1(x) = 0$, então dado $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$
|a_1(x)| < \frac{\epsilon}{2c_6\sqrt{2c_4}} \text{ para } |x| > R,
$$

onde c_4 é mesma constante em (3.16).

Por outro lado, vimos anteriormente que $|a_1| \leq c_5$ e desde que $\psi_n^1 \to 0$ em $L^2_{loc}(\Omega)$, então existe n_o tal que

$$\int_{|x|\leq R} (\psi_n^1)^2 dx \leq \frac{\epsilon^2}{8c_5^2 c_6^2}, \text{ para } n \leq n_o.$$

Assim,

$$\left(\int_\Omega \left| a_1(x)\psi_n^1 v \right| dx \right)^2 \leq c_6^2 \int_{|x|>R} |a_1(x)|^2 (\psi_n^1)^2 dx + \int_{|x|\leq R} |a_1(x)|^2 (\psi_n^1)^2 dx$$

$$\Rightarrow \left(\int_\Omega \left| a_1(x)\psi_n^1 v \right| dx \right)^2 \leq c_6^2 \frac{\epsilon^2}{8c_6^2 c_4} c_4 + c_6^2 c_5^2 \frac{\epsilon^2}{8c_5^2 c_6^2} = \frac{\epsilon^2}{4},$$

logo, para n suficientemente grande, obtemos

$$\int_\Omega \left| a_1(x)\psi_n^1 v \right| dx \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Utilizando argumentos semelhantes teremos

$$\int_\Omega \left| b_1(x)|\psi_n^1|^{p-2}\psi_n^1 v \right| dx \leq \left(\int_\Omega |b_1(x)|^{p/p-1} |\psi_n^1|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} |v|_p$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \left| b_1(x)|\psi_n^1|^{p-2}\psi_n^1 v \right| dx \leq c_6 \left(\int_\Omega |b_1(x)|^{p/p-1} |\psi_n^1|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Concluindo que para n suficientemente grande

$$\left| \int_\Omega b_1(x)|\psi_n^1|^{p-2}\psi_n^1 v dx \right| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Assim, para n suficientemente grande e para todo $v \in H_o^1(\Omega)$ com $||v|| \leq 1$, temos que

$$\left| \left(I'(\psi_n^1) - \overline{I}'(\psi_n^1) \right).v \right| \leq \epsilon.$$

ou seja,

$$\left|\left| I'(\psi_n^1) - \overline{I}'(\psi_n^1) \right|\right|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{||v||\leq 1} \left| \left(I'(\psi_n^1) - \overline{I}'(\psi_n^1) \right).v \right| \leq \epsilon,$$

fazendo ϵ tender a zero, mostramos que

$$\overline{I}'(\psi_n^1) = I'(\psi_n^1) + o_n(1).$$

Resta-nos mostrar que

$$I'(\psi_n^1) = I'(u_n) - I'(u^0) + o_n(1).$$

Observe o seguinte

$$\left(I'(\psi_n^1) - I'(u_n) + I'(u^0)\right).v \;= \int_\Omega \left(\nabla\psi_n^1\nabla v + a(x)\psi_n^1 v\right) dx - \int_\Omega b(x)|\psi_n^1|^{p-2}\psi_n^1 v dx$$

$$- \int_\Omega \left(\nabla u_n \nabla v + a(x)u_n v\right) dx + \int_\Omega b(x)|u_n|^{p-2}u_n v dx$$

$$+ \int_\Omega \left(\nabla u^0\nabla v + a(x)u^0 v\right) dx - \int_\Omega b(x)|u^0|^{p-2}u^0 v dx$$

e sendo $\psi_n^1 = u_n - u^0$ em Ω, obtemos

$$\left(I'(\psi_n^1) - I'(u_n) + I'(u^0)\right).v =$$

$$= \int_\Omega \left(b(x)|u_n|^{p-2}u_n - b(x)|u^0|^{p-2}u^0 - b(x)|\psi_n^1|^{p-2}\psi_n^1\right) v dx.$$

Por Hölder temos que

$$\left|\left(I'(\psi_n^1) - I'(u_n) + I'(u^0)\right).v\right| \leq$$

$$\leq \left(\int_\Omega \left|b(x)|u_n|^{p-2}u_n - b(x)|u^0|^{p-2}u^0 - b(x)|\psi_n^1|^{p-2}\psi_n^1\right|^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} |v|_{L^p(\Omega)}$$

sendo assim, desde que $v \in H_o^1(\Omega)$ com $||v|| \leq 1$ e pelas imersões de Sobolev

$$\left|\left(I'(\psi_n^1) - I'(u_n) + I'(u^0)\right).v\right| \leq$$

$$\leq c_7 \left(\int_\Omega \left|b(x)|u_n|^{p-2}u_n - b(x)|u^0|^{p-2}u^0 - b(x)|\psi_n^1|^{p-2}\psi_n^1\right|^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Segue do Lema C.3 (ver Apêndice C)

$$\left(\int_\Omega \left|b(x)|u_n|^{p-2}u_n - b(x)|u^0|^{p-2}u^0 - b(x)|\psi_n^1|^{p-2}\psi_n^1\right|^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} = o_n(1),$$

mostrando que de fato

$$I'(\psi_n^1) = I'(u_n) - I'(u^0) + o_n(1).$$

Além do mais, observemos que por hipótese $I'(u_n) \to 0$ e desde que u^0 é solução de (1), temos que $I'(u^0) = 0$. Implicando, finalmente, em

$$\overline{I}'(\psi_n^1) = I'(\psi_n^1) + o_n(1) = I'(u_n) - I'(u^0) + o_n(1) = o_n(1).$$

Concluindo a demonstração da afirmação 4.

Suponhamos agora

$$\psi_n^1 \not\to 0 \text{ em } H_o^1(\Omega),$$

pois do contrário, o teorema estava demonstrado.

Desde que

$$\overline{I}(\psi_n^1) = \frac{1}{2}||\psi_n^1||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \beta|\psi_n^1|^p dx,$$

sendo ψ_n^1 limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\overline{I}^{'}(\psi_n^1) = o_n(1)$, temos

$$\overline{I}^{'}(\psi_n^1).\psi_n^1 = ||\psi_n^1||^2_{\mathbb{R}^N} - \int_{\mathbb{R}^N} \beta|\psi_n^1|^p dx = o_n(1). \tag{3.19}$$

Logo

$$\overline{I}(\psi_n^1) = \frac{1}{2}||\psi_n^1||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{p}||\psi_n^1||^2_{\mathbb{R}^N} + o_n(1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)||\psi_n^1||^2_{\mathbb{R}^N} + o_n(1). \tag{3.20}$$

Uma vez que $\psi_n^1 \not\to 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então existe $c_8 > 0$ tal que para n suficientemente grande

$$||\psi_n^1||^2_{\mathbb{R}^N} \geq c_8.$$

Sendo assim,

$$\overline{I}(\psi_n^1) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) c_8 + o_n(1).$$

mostrando que para n suficientemente grande, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\overline{I}(\psi_n^1) \geq \alpha > 0.$$

Agora vamos decompor o $\mathbb{R}^N$ em hipercubos unitários N-dimensionais Q_i com vértices tendo coordenadas inteiras e considere

$$d_n = \max_i |\psi_n^1|_{L^p(Q_i)} \tag{3.21}$$

Por (3.19) é fácil verificar que

$$\overline{I}(\psi_n^1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} \beta|\psi_n^1|^p dx + o_n(1),$$

logo, considerando $c_9 = \dfrac{2p}{(p-2)\beta} > 0$, obtemos o seguinte

$$c_9\overline{I}(\psi_n^1) = \int_{\mathbb{R}^N} |\psi_n^1|^p dx + o_n(1).$$

Usando a decomposição do $\mathbb{R}^N$ indicada anteriormente temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\psi_n^1|^p dx == \sum_i |\psi_n^1|^p_{L^p(Q_i)} = \sum_i |\psi_n^1|^{p-2}_{L^p(Q_i)} |\psi_n^1|^2_{L^p(Q_i)}$$

e por (3.21), segue-se

$$\sum_i |\psi_n^1|^{p-2}_{L^p(Q_i)} |\psi_n^1|^2_{L^p(Q_i)} \leq \sum_i \max_j |\psi_n^1|^{p-2}_{L^p(Q_j)} |\psi_n^1|^2_{L^p(Q_i)} = d_n^{p-2} \sum_i |\psi_n^1|^2_{L^p(Q_i)}.$$

Das imersões de Sobolev temos que existe $c_{10} > 0$ tal que

$$|\psi_n^1|^2_{L^p(Q_i)} \leq c_{10} ||\psi_n^1||^2_{H^1(Q_i)}, \ \ \forall i,$$

conseqüentemente

$$d_n^{p-2} \sum_i |\psi_n^1|^2_{L^p(Q_i)} \leq d_n^{p-2} \sum_i c_{10} ||\psi_n^1||^2_{H^1(Q_i)} = d_n^{p-2} c_{10} ||\psi_n^1||^2_{\mathbb{R}^N}.$$

De (3.20), segue-se

$$||\psi_n^1||^2_{\mathbb{R}^N} = c_9 \beta \overline{I}(\psi_n^1) + o_n(1),$$

logo, conseguimos a seguinte estimativa

$$c_9 \overline{I}(\psi_n^1) \leq d_n^{p-2} c_{10} c_9 \beta \overline{I}(\psi_n^1) + o_n(1).$$

Assim, desde que $\overline{I}(\psi_n^1) \geq \alpha > 0$, obtemos

$$d_n^{p-2} \geq \frac{1}{c_{10}\beta} + o_n(1),$$

isto é, existe $\gamma > 0$ tal que

$$d_n \geq \gamma > 0.$$

Agora denotemos por y_n^1 o centro do hipercubo Q_i no qual $|\psi_n^1|_{L^p(Q_i)} = d_n$. Vamos supor que a seqüência $\{y_n^1\}$ é limitada e assim existe $R > 0$ tal que

$$\int_{B_R(0)} |\psi_n^1|^p dx \geq \int_{Q_i(y_n^1)} |\psi_n^1|^p dx = d_n^p > \gamma^p > 0. \tag{3.22}$$

Por outro lado,

$$\psi_n^1 \rightharpoonup 0 \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N),$$

implicando que

$$\psi_n^1 \to 0 \text{ em } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N),$$

ou seja,

$$\int_{B_R(0)} |\psi_n^1|^p dx \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

O que é um absurdo por (3.22), e portanto $\{y_n^1\}$ não é limitada.

Consideremos a seqüência $\{\psi_n^1(. + y_n^1)\}$, note que para cada n fazendo mudança de variáveis é fácil mostrar que

$$||\psi_n^1(. + y_n^1)||_{\mathbb{R}^N} = ||\psi_n^1||_{\mathbb{R}^N}.$$

Sendo assim, a seqüência $\{\psi_n^1(. + y_n^1)\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Logo, existe $u^1 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\psi_n^1(. + y_n^1) \rightharpoonup u^1 \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N)$$
$$\psi_n^1(. + y_n^1) \to u^1 \text{ em } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$$

Afirmação 5: u^1 é uma solução de (2) não é identicamente nula.

Comecemos mostrando que $u^1 \not\equiv 0$. Considere $\overline{Q}$ um hipercubo unitário centrado na origem e novamente fazendo mudança de variáveis, temos que

$$\int_{\overline{Q}} |\psi_n^1(y + y_n^1)|^p dy = \int_{Q_i(y_n^1)} |\psi_n^1(x)|^p dx.$$

Por outro lado,

$$\int_{Q_i(y_n^1)} |\psi_n^1(x)|^p dx \geq d_n^p \geq \gamma^p, > 0.$$

Supondo que u^1 fosse identicamente nula, então

$$\int_{\overline{Q}} |\psi_n^1(y + y_n^1)|^p dy \longrightarrow 0$$

implicando em $\gamma = 0$, o que é absurdo. Portanto u^1 não é identicamente nula.

Resta-nos mostrar que u^1 é solução de (2).

Aqui vale mencionar que, sendo $\psi_n^1 \in H_o^1(\Omega)$ então $\psi_n^1(. + y_n^1) \in H_o^1(\Omega_n)$, onde

$$\Omega_n = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \quad x + y_n^1 \in \Omega\right\}.$$

Consideremos $v \in C_o^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $||v||_{\mathbb{R}^N} \leq 1$, e portanto, desde que $|y_n^1| \to +\infty$, temos que existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que o suporte de v está contido em Ω_n para todo $n \geq n_o$.

Agora, notemos que

$$\overline{I}(\psi_n^1(.+y_n^1)) = \frac{1}{2}||\psi_n^1(.+y_n^1)||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \beta|\psi_n^1(.+y_n^1)|^p dx,$$

donde obtemos

$$\begin{aligned}\overline{I}'(\psi_n^1(.+y_n^1)).v &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla\psi_n^1(x+y_n^1)\nabla v + \lambda\psi_n^1(x+y_n^1)v\right) dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} \beta|\psi_n^1(x+y_n^1)|^{p-2}\psi_n^1(x+y_n^1)v dx.\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $z = x + y_n^1$, temos então

$$\begin{aligned}\overline{I}'(\psi_n^1(.+y_n^1)).v &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla\psi_n^1(z)\nabla v(z-y_n^1) + \lambda\psi_n^1(z)v(z-y_n^1)\right) dz \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} \beta|\psi_n^1(z)|^{p-2}\psi_n^1(z)v(z-y_n^1)dz,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\overline{I}'(\psi_n^1(.+y_n^1)).v = \overline{I}'(\psi_n^1).\overline{v}_n, \text{ onde } \overline{v}_n = v(.-y_n^1).$$

Observemos que, para n suficientemente grande, o suporte de $\overline{v}_n$ está contido em Ω, ou seja, existe n_o tal que

$$\overline{v}_n \in H_o^1(\Omega), \ \forall n \geq n_o.$$

Logo, para cada $v \in C_o^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $||v||_{\mathbb{R}^N} \leq 1$

$$||\overline{v}_n|| = ||v(.-y_n^1)||_{\mathbb{R}^N} = ||v||_{\mathbb{R}^N} \leq 1.$$

Assim, desde que $\overline{I}'(\psi_n^1) = o_n(1)$, concluímos que

$$\overline{I}'(\psi_n^1(.+y_n^1)).v \longrightarrow 0, \ \forall v \in C_o^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Por outro lado, pela convergência fraca e pelo Lema de Brézis e Lieb (ver Lema C.1 no Apêndice C) temos que para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla\psi_n^1(x+y_n^1)\nabla v + \lambda\psi_n^1(x+y_n^1)v\right) dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u^1\nabla v + \lambda u^1 v\right) dx$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} \beta|\psi_n^1(x+y_n^1)|^{p-2}\psi_n^1(x+y_n^1)v dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \beta|u^1|^{p-2}u^1 v dx.$$

Pela unicidade de limite, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u^1\nabla v + \lambda u^1 v\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \beta|u^1|^{p-2}u^1 v dx = 0, \ \forall v \in C_o^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Considere agora $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$, por densidade existe uma seqüência $\{v_n\} \in C_o^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$v_n \to w,$$

donde segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u^1 \nabla v_n + \lambda u^1 v_n\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \beta |u^1|^{p-2} u^1 v_n dx = 0, \ \ \forall v_n \in C_o^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Passando ao limite

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u^1 \nabla w + \lambda u^1 w\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \beta |u^1|^{p-2} u^1 w dx = 0, \ \ \forall w \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Portanto, u^1 é solução de (2). Provando a afirmação 5.

Vemos agora que podemos repetir este procedimento, obtendo seqüências da forma

$$\psi_n^j(x) = \psi_n^{j-1}(x + y_n^{j-1}) - u^{j-1}(x), \ \ j \geq 2$$

e seqüências de pontos $\{y_n^j\}$ tal que

$$|y_n^j| \to +\infty, \text{ quando } n \to +\infty$$

e

$$\psi_n^{j-1}(x + y_n^{j-1}) \rightharpoonup u^{j-1}(x) \ \ em \ \ H^1(\mathbb{R}^N) \tag{3.23}$$

onde cada u^j é solução de (2).

Além disso, usaremos indução matemática para mostrarmos que

$$||\psi_n^j||^2_{\mathbb{R}^N} = ||\psi_n^{j-1}||^2_{\mathbb{R}^N} - ||u_n^{j-1}||^2_{\mathbb{R}^N} + o_n(1) = ||u_n||^2 - ||u^0||^2 - \sum_{i=1}^{j-1} ||u^i||^2_{\mathbb{R}^N} + o_n(1), \tag{3.24}$$

e

$$\overline{I}(\psi_n^j) = \overline{I}(\psi_n^{j-1}) - \overline{I}(u^{j-1}) + o_n(1) = I(u_n) - I(u^0) - \sum_{i=1}^{j-1} \overline{I}(u^i) + o_n(1). \tag{3.25}$$

Primeiramente, observemos que para cada $j \geq 2$

$$\begin{aligned} ||\psi_n^j||^2_{\mathbb{R}^N} &= ||\psi_n^{j-1}(. + y_n^{j-1}) - u^{j-1}||^2_{\mathbb{R}^N} \\ &= ||\psi_n^{j-1}(. + y_n^{j-1})||^2_{\mathbb{R}^N} - 2\left\langle \psi_n^{j-1}(. + y_n^{j-1}), u^{j-1}\right\rangle + ||u^{j-1}||^2_{\mathbb{R}^N}. \end{aligned}$$

De (3.23)

$$||\psi_n^j(.+y_n^1)||_{\mathbb{R}^N} = ||\psi_n^j||_{\mathbb{R}^N},$$

o que implica em

$$||\psi_n^j||^2_{\mathbb{R}^N} = ||\psi_n^{j-1}||^2_{\mathbb{R}^N} - ||u^{j-1}||^2_{\mathbb{R}^N} + o_n(1).$$

Decorre disto que

$$\begin{aligned}
\overline{I}(\psi_n^j) &= \frac{1}{2}||\psi_n^j||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \beta|\psi_n^j|^p dx \\
&= \frac{1}{2}||\psi_n^{j-1}||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{2}||u^{j-1}||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \beta|\psi_n^{j-1}(x+y_n^{j-1}) - u^{j-1}|^p dx + o_n(1)
\end{aligned}$$

aplicando Brézis e Lieb, temos

$$\begin{aligned}
\overline{I}(\psi_n^j) &= \frac{1}{2}||\psi_n^{j-1}||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{2}||u^{j-1}||^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \beta|\psi_n^{j-1}(x+y_n^{j-1})|^p dx \\
&+\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \beta|u^{j-1}|^p dx + o_n(1),
\end{aligned}$$

donde segue-se

$$\overline{I}(\psi_n^j) = \overline{I}(\psi_n^{j-1}) - \overline{I}(u^{j-1}) + o_n(1).$$

Para $j=1$, vimos anteriormente que

$$\begin{aligned}
||\psi_n^1||^2_{\mathbb{R}^N} &= ||u_n||^2 - ||u^0||^2 + o_n(1), \\
\overline{I}(\psi_n^1) &= I(u_n) - I(u^0) + o_n(1).
\end{aligned}$$

Supondo que vale para $j-1$, então

$$\begin{aligned}
||\psi_n^j||^2_{\mathbb{R}^N} &= ||\psi_n^{j-1}||^2_{\mathbb{R}^N} - ||u_n^{j-1}||^2_{\mathbb{R}^N} + o_n(1) \\
&= ||u_n||^2 - ||u^0||^2 - \sum_{i=1}^{j-2}||u^i||^2_{\mathbb{R}^N} - ||u_n^{j-1}||^2_{\mathbb{R}^N} + o_n(1)
\end{aligned}$$

mostrando que

$$||\psi_n^j||^2_{\mathbb{R}^N} = ||u_n||^2 - ||u^0||^2 - \sum_{i=1}^{j-1}||u^i||^2_{\mathbb{R}^N} + o_n(1).$$

De modo análogo

$$\begin{aligned}\overline{I}(\psi_n^j) &= \overline{I}(\psi_n^{j-1}) - \overline{I}(u^{j-1}) + o_n(1)\\ &= I(u_n) - I(u^0) - \sum_{i=1}^{j-2}\overline{I}(u^i) - \overline{I}(u^{j-1}) + o_n(1)\end{aligned}$$

e assim,

$$\overline{I}(\psi_n^j) = I(u_n) - I(u^0) - \sum_{i=1}^{j-1}\overline{I}(u^i) + o_n(1).$$

Portanto, demonstramos por indução que valem (3.24) e (3.25).

Afirmação 6: Existe um número finito de procedimentos.

Notemos que para cada j, temos que u^j é solução de (2). Logo

$$||u^j||^2_{\mathbb{R}^N} = \int_{\mathbb{R}^N}\beta|u^j|^p dx = c_j,$$

e portanto

$$\int_{\mathbb{R}^N}\beta\left|\frac{u^j}{c_j^{1/p}}\right|^p dx = 1.$$

Por (3.11), temos que

$$\left|\left|\frac{u^j}{c_j^{1/p}}\right|\right|^2_{\mathbb{R}^N} \geq M_\infty,$$

donde segue-se

$$||u^j||^2_{\mathbb{R}^N} \geq M_\infty^{\frac{p}{p-2}}. \tag{3.26}$$

Uma vez que $\{u_n\}$ é limitada em $H_o^1(\Omega)$, então existe $c_{11} > 0$ tal que $||u_n|| \leq c_{11}$, e de (3.26) temos que

$$||\psi_n^j||^2_{\mathbb{R}^N} \leq c_{11} - ||u^0||^2 - \sum_{i=1}^{j-1} M_\infty^{\frac{p}{p-2}} + o_n(1) = c_{11} - ||u^0||^2 - (j-1)M_\infty^{\frac{p}{p-2}} + o_n(1),$$

desde que $||\psi_n^j||^2_{\mathbb{R}^N} \geq 0$ para todo j, então existe $k \geq 0$ tal que

$$||u_n||^2 - ||u^0||^2 - \sum_{i=1}^{k}||u^i||^2_{\mathbb{R}^N} + o_n(1) = ||\psi_n^{k+1}||^2_{\mathbb{R}^N} = o_n(1),$$

mostrando que

$$||u_n||^2 \longrightarrow ||u^0||^2 + \sum_{i=1}^{k}||u^i||^2_{\mathbb{R}^N}, \text{ quando } n \to +\infty$$

Desde que $||\psi_n^{k+1}||^2_{\mathbb{R}^N} = o_n(1)$, então $\overline{I}(\psi_n^{k+1}) = o_n(1)$, e assim

$$I(u_n) \longrightarrow I(u^0) + \sum_{i=1}^{k} \overline{I}(u^i), \text{ quando } n \to +\infty.$$

Provando a afirmação 6 e terminando, finalmente, a demonstração do Lema.

$\square$

Corolário 3.1 *Assuma que $\{u_n\}$ é uma seqüência que satisfaz as mesmas condições do Lema anterior e*

$$c < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\infty^{\frac{p}{p-2}}.$$

Então $\{u_n\}$ possui uma subsqüência convergente.

Demonstração: Pelo Lema anterior temos que

$$I(u_n) \to c \text{ e } I^{'}(u_n) \to 0,$$

onde estamos considerando que $c < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\infty^{\frac{p}{p-2}}$.
Pelo procedimento do Lema 3.1 concluimos que $\{u_n\}$ é limitada em $H_o^1(\Omega)$ e portanto, a menos de subseqüência existe $u^0 \in H_o^1(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u^0 \text{ em } H_o^1(\Omega).$$

Supondo que $u_n \not\to u^0$ em $H_o^1(\Omega)$, segue do Lema 3.1 que existe k tal que

$$||u_n||^2 = ||u^0||^2 + \sum_{i=1}^{k} ||u^i||^2_{\mathbb{R}^N} + o_n(1)$$

e

$$I(u_n) = I(u^0) + \sum_{i=1}^{k} \overline{I}(u^i) + o_n(1).$$

Desde que para cada j, u^j solução de (2) e por (3.26), então concluímos que

$$\overline{I}(u^j) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) ||u^j||^2_{\mathbb{R}^N} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\infty^{\frac{p}{p-2}}.$$

Deste fato, e sendo u^0 solução de (1), temos $I(u^0) \geq 0$ e portanto

$$\overline{I}(u_n) \to c \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\infty^{\frac{p}{p-2}},$$

contradizendo a hipótese de que

$$c < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\infty^{\frac{p}{p-2}}.$$

Mostrando que

$$u_n \rightharpoonup u^0 \text{ e } ||u_n||^2 \to ||u^0||^2.$$

Sendo $H_o^1(\Omega)$ um espaço uniformemente convexo, obtemos o limite

$$u_n \to u^0 \text{ em } H_o^1(\Omega),$$

concluindo a demonstração do Corolário.

$\square$

Corolário 3.2 *Seja P o conjunto das funções não negativas em $H_o^1(\Omega)$ e assuma que existe uma única solução positiva de* (2) *e $\{u_n\} \subset P$ satisfaz as hipóteses do Lema anterior. Então se*

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\infty^{\frac{p}{p-2}} < c < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \left[M_\infty^{\frac{p}{p-2}} + M^{\frac{p}{p-2}}\right],$$

$\{u_n\}$ possui uma subseqüência convergente.

Demonstração: Repetindo os argumentos usados na demonstração do corolário anterior, existe $u^0 \in H_o^1(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u^0 \text{ em } H_o^1(\Omega).$$

Supondo que $u_n \not\to u^0$ em $H_o^1(\Omega)$, segue do Lema 3.1 que existe $k \geq 1$ tal que

$$||u_n||^2 = ||u^0||^2 + \sum_{i=1}^{k} ||u^i||^2_{\mathbb{R}^N} + o_n(1)$$

e

$$I(u_n) = I(u^0) + \sum_{i=1}^{k} \overline{I}(u^i) + o_n(1).$$

Usando os mesmos argumentos feitos no Corolário 3.1, mostra-se que

$$I(u_n) = I(u^0) + \sum_{i=1}^{k} \overline{I}(u^i) + o_n(1) \geq k \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\infty^{\frac{p}{p-2}} + o_n(1).$$

Desde que $M_\infty \geq M$, então para $k \geq 2$

$$I(u_n) \to c \geq 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\infty^{\frac{p}{p-2}} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \left[M_\infty^{\frac{p}{p-2}} + M^{\frac{p}{p-2}}\right]$$

contradizendo a hipótese do nível c, portanto k não pode ser maior do que 1.

Usando a hipótese que existe uma única solução de (2), então esta deve ser a solução de energia mínima, ou seja,

$$I(u^1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\infty^{\frac{p}{p-2}}.$$

Logo,

$$I(u_n) = I(u^0) + I(u^1) + o_n(1) = I(u^0) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\infty^{\frac{p}{p-2}} + o_n(1).$$

Se $u^0 = 0$, então

$$I(u_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\infty^{\frac{p}{p-2}} + o_n(1),$$

contradizendo a hipótese do nível c.

Portanto $u^0 \neq 0$ e devemos ter

$$I(u^0) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M^{\frac{p}{p-2}}.$$

Desta forma

$$I(u_n) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \left[M_\infty^{\frac{p}{p-2}} + M^{\frac{p}{p-2}}\right] + o_n(1),$$

contradizendo novamente a hipótese do nível c, portanto não podemos ter $k = 1$, o que implica

$$||u_n|| \to ||u^0||.$$

E assim, desde que $H_o^1(\Omega)$ é uniformemente convexo

$$u_n \to u^0 \text{ em } H_o^1(\Omega).$$

Terminando a demonstração. Além disso, veja que do nível c escolhido, concluímos que $u^0 \neq 0$.

$\square$

Considere o subconjunto

$$V = \left\{u \in H_o^1(\Omega) : \int_\Omega |u|^p dx = 1\right\}$$

e o funcional $J : H_o^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) = ||u||^2.$$

Além disso, consideraremos a norma no espaço $H^{-1}(\Omega)$ definida por

$$||J^{'}(u)||_* = \sup_{\substack{w \in T_u V \\ ||w|| \leq 1}} |J^{'}(u).w|,$$

onde

$$T_u V = \left\{ v \in H_o^1(\Omega) : G^{'}(u).v = 0 \right\}$$

e G é o funcional em $H_o^1(\Omega)$ definido por

$$G(u) = \int_\Omega |u|^p dx.$$

Corolário 3.3 *O funcional J satisfaz a condição Palais-Smale em*

$$Z = P \cap V \cap \left\{ u \in H_o^1(\Omega) : \; M_\lambda < J(u) < 2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda \right\}.$$

Demonstração: Considere uma seqüência $\{u_n\}$ em Z tal que

$$J(u_n) \to c \in \left(M_\lambda, \; 2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda \right) \text{ e } ||J^{'}(u_n)||_* \to 0.$$

Devemos mostrar que esta seqüência possui uma subseqüência convergente.

Observe que considerando $\beta \equiv 1$, $a \equiv \lambda$ e $b \equiv 1$ nos funcionais usados no Lema 3.1, temos

$$M_\infty = M_\lambda \text{ e } M = \mu_\lambda.$$

Além disso, considerando o funcional I em $H_o^1(\Omega)$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \lambda u^2 \right) dx - \frac{1}{p} \int_\Omega |u|^p dx.$$

Considerando $v_n = c^{\frac{1}{p-2}} u_n$, obtemos

$$I(v_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) c^{\frac{p}{p-2}} + o_n(1).$$

Definindo $d = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) c^{\frac{p}{p-2}}$,

$$I(v_n) \to d \in \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) M_\lambda^{\frac{p}{p-2}}, \; 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) M_\lambda^{\frac{p}{p-2}} \right),$$

e desde que $M_\lambda \leq \mu_\lambda$, segue-se

$$I(v_n) \to d \in \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\lambda^{\frac{p}{p-2}},\ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \left(M_\lambda^{\frac{p}{p-2}} + \mu_\lambda^{\frac{p}{p-2}}\right)\right).$$

Com isto, resta-nos mostrar que

$$I^{'}(v_n) \to 0$$

para satisfazermos as hipóteses do Corolário 3.2.

Usando um resultado encontrado no livro do Willem [18],

$$||J^{'}(u_n)||_* = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} ||J^{'}(u_n) - \lambda G^{'}(u_n)|| = ||J^{'}(u_n) - \lambda_n G^{'}(u_n)||.$$

Por hipótese $||J^{'}(u_n)||_* \to 0$, então

$$J^{'}(u_n) - \lambda_n G^{'}(u_n) = o_n(1) \quad em \quad H^{-1}(\Omega). \tag{3.27}$$

Considere $w \in H_o^1(\Omega)$ tal que $||w|| \leq 1$. E desde que $v_n = c^{\frac{1}{p-2}} u_n$, temos

$$I^{'}(v_n).w = \frac{1}{2} J^{'}(v_n) - \frac{1}{p} G^{'}(v_n).w = \frac{c^{\frac{1}{p-2}}}{2} J^{'}(u_n) - \frac{c^{\frac{p-1}{p-2}}}{p} G^{'}(u_n).w.$$

De (3.27) segue

$$I^{'}(v_n).w = \frac{c^{\frac{1}{p-2}}}{2} \lambda_n G^{'}(u_n).w - \frac{c^{\frac{p-1}{p-2}}}{p} G^{'}(u_n).w + o_n(1).$$

Logo

$$|I^{'}(v_n).w| \leq \left\| \frac{c^{\frac{1}{p-2}}}{2} \lambda_n G^{'}(u_n) - \frac{c^{\frac{p-1}{p-2}}}{p} G^{'}(u_n) \right\| ||w|| + o_n(1),$$

ou seja,

$$|I^{'}(v_n).w| \leq \left| \frac{c^{\frac{1}{p-2}}}{2} \lambda_n - \frac{c^{\frac{p-1}{p-2}}}{p} \right| \left\|G^{'}(u_n)\right\| + o_n(1),$$

Por outro lado, de (3.27)

$$J^{'}(u_n).u_n - \lambda_n G^{'}(u_n).u_n = o_n(1)$$

o que equivale a dizer que

$$2||u_n||^2 - p\lambda_n = o_n(1),$$

ou seja,

$$\lambda_n \to \frac{2}{p} c.$$

Sendo assim,

$$\frac{c^{\frac{1}{p-2}}}{2}\lambda_n - \frac{c^{\frac{p-1}{p-2}}}{p} = o_n(1).$$

Além disso, $||G^{'}(u_n)||$ é limitada. Portanto

$$|I^{'}(v_n).w| \leq o_n(1).$$

implicando que

$$I^{'}(v_n) = o_n(1) \text{ em } H^{-1}(\Omega).$$

Com isto terminamos de verificar as hipóteses do Corolário 3.2. Assim, aplicando tal Corolário, temos que $\{v_n\}$ possui uma subseqüência convergente, e assim a $\{u_n\}$ possui uma subseqüência convergente. Portanto o funcional J satisfaz a condição Palais-Smale em Z.
Demonstrando assim o Corolário.

$\square$

3.4 Prova dos teoremas principais

Seja ϕ_ρ o operador

$$\phi_\rho : \mathbb{R}^N \to H^1(\mathbb{R}^N)$$

definido por

$$\phi_\rho(y) \equiv \frac{v_y^\rho(x)}{|v_y^\rho|_{L^p(\mathbb{R}^N)}},$$

onde

$$v_y^\rho(x) = \zeta(x)\overline{u}(x-y) = \xi\left(\frac{|x|}{\rho}\right)\overline{u}(x-y),$$

ζ, ξ e $\overline{u}$ escolhidas como na prova do teorema 3.1.

Observemos que $\phi_\rho(y)$ e v_y^ρ são elementos de $H_o^1(\Omega)$ e de $L^p(\Omega)$, uma vez que estas funções se anulam fora de Ω. Assim, também temos que

$$||\phi_\rho|| = ||\phi_\rho||_{\mathbb{R}^N}, \quad |\phi_\rho|_p = |\phi_\rho|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad ||v_y^\rho|| = ||v_y^\rho||_{\mathbb{R}^N} \quad e \quad |v_y^\rho|_p = |v_y^\rho|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Lema 3.2

(i) $\phi_\rho(y) \to \overline{u}(.-y)$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ uniformemente em y, quando $\rho \to 0$;

(ii) $||\phi_\rho||^2_{\mathbb{R}^N} \to M_\lambda$ para cada ρ, quando $|y| \to +\infty$.

Demonstração: Para provarmos (i) devemos mostrar que

$$|v_y^\rho|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 1 \ uniformemente \ em \ y \ quando \ \rho \to 0, \tag{3.28}$$

$$||v_y^\rho||^2_{\mathbb{R}^N} \to ||\overline{u}||^2_{\mathbb{R}^N} = M_\lambda \ uniformemente \ em \ y \ quando \ \rho \to 0. \tag{3.29}$$

Prova de (3.28):

Note que

$$|v_y^\rho - \overline{u}(.-y)|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|\xi\left(\frac{|x|}{\rho}\right)\overline{u}(x-y) - \overline{u}(x-y)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pela definição de ξ, temos que

$$\xi\left(\tfrac{|x|}{\rho}\right) = 1 \text{ para } |x| \geq 2\rho.$$

Logo

$$|v_y^\rho - \overline{u}(.-y)|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{B_{2\rho}(0)} \left|\left(\xi\left(\frac{|x|}{\rho}\right) - 1\right)\overline{u}(x-y)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Além do mais, usando o fato de que a ξ é limitada, observamos que

$$|v_y^\rho - \overline{u}(.-y)|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq K_1 \left(\int_{B_{2\rho}(0)} |\overline{u}(x-y)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

e desde que $\overline{u}$ é radialmente simétrica em relação a origem e decresce com o aumento do raio, então

$$|v_y^\rho - \overline{u}(.-y)|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq K_1 \left(\int_{B_{2\rho}(0)} |\overline{u}(0)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = K_1\overline{u}(0)\ med(B_{2\rho}(0))^{\frac{1}{p}}.$$

Portanto, vemos deste último fato que quando $\rho \to 0$, então

$$|v_y^\rho - \overline{u}(.-y)|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0, \text{ uniformemente em } y,$$

ou seja, quando $\rho \to 0$

$$|v_y^\rho|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow |\overline{u}(.-y)|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = |\overline{u}|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 1, \text{ uniformemente em } y.$$

Mostrando com isto que vale (3.28).

Prova de (3.29)**:**

Obsermos o seguinte

$$||v_y^\rho - \overline{u}(. - y)||^2_{\mathbb{R}^N} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left| \nabla \left(\left(\xi \left(\tfrac{|x|}{\rho} \right) - 1 \right) \overline{u}(x-y) \right) \right|^2 + \lambda \left| \left(\xi \left(\tfrac{|x|}{\rho} \right) - 1 \right) \overline{u}(x-y) \right|^2 \right] dx.$$

Pelos cálculos feitos anteriormente temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lambda \left| \xi \left(\frac{|x|}{\rho} \right) \overline{u}(x-y) - \overline{u}(x-y) \right|^2 dx \leq \lambda K_1^2 \overline{u}^2(0)\ med(B_{2\rho}(0)) = K_2 \rho^N. \quad (3.30)$$

Por outro lado,

$$\nabla \left(\xi \left(\tfrac{|x|}{\rho} \right) \overline{u}(x-y) - \overline{u}(x-y) \right) = \overline{u}(x-y) \nabla \xi \left(\tfrac{|x|}{\rho} \right) + \xi \left(\tfrac{|x|}{\rho} \right) \nabla \overline{u}(x-y) - \nabla \overline{u}(x-y).$$

Notemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla \left(\xi \left(\tfrac{|x|}{\rho} \right) \overline{u}(x-y) - \overline{u}(x-y) \right) \right|^2 dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \overline{u}(x-y) \nabla \xi \left(\tfrac{|x|}{\rho} \right) + \xi \left(\tfrac{|x|}{\rho} \right) \nabla \overline{u}(x-y) - \nabla \overline{u}(x-y) \right|^2 dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| \overline{u}(x-y) \nabla \xi \left(\tfrac{|x|}{\rho} \right) \right| + \left| \xi \left(\tfrac{|x|}{\rho} \right) \nabla \overline{u}(x-y) - \nabla \overline{u}(x-y) \right| \right)^2 dx.$$

Além disso, lembremos que

$$\xi \left(\tfrac{|x|}{\rho} \right) \equiv 0, \text{ para } |x| \leq \rho \ \text{ e } \ \xi \left(\tfrac{|x|}{\rho} \right) \equiv 1, \text{ para } |x| \geq 2\rho,$$

assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla \left(\xi \left(\tfrac{|x|}{\rho} \right) \overline{u}(x-y) - \overline{u}(x-y) \right) \right|^2 dx \leq \int_{|x| \leq \rho} |\nabla \overline{u}(x-y)|^2 dx +$$

$$+ \int_{\rho \leq |x| \leq 2\rho} \left(\left| \overline{u}(x-y) \nabla \xi \left(\tfrac{|x|}{\rho} \right) \right| + \left| \xi \left(\tfrac{|x|}{\rho} \right) \nabla \overline{u}(x-y) - \nabla \overline{u}(x-y) \right| \right)^2 dx.$$

Desde que ρ tende a zero, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla \left(\xi \left(\tfrac{|x|}{\rho} \right) \overline{u}(x-y) - \overline{u}(x-y) \right) \right|^2 dx \leq \int_{|x| \leq \rho} \sup_{\mathbb{R}^N} |\nabla \overline{u}(x-y)|^2 dx +$$

$$+ \int_{\rho \leq |x| \leq 2\rho} \left(2 \sup_{\mathbb{R}^N} \left\{ \left| \overline{u}(x-y) \nabla \xi \left(\tfrac{|x|}{\rho} \right) \right|, \left| \xi \left(\tfrac{|x|}{\rho} \right) \nabla \overline{u}(x-y) - \nabla \overline{u}(x-y) \right| \right\} \right)^2 dx,$$

logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\left(\xi\left(\tfrac{|x|}{\rho}\right)\overline{u}(x-y)-\overline{u}(x-y)\right)\right|^2 dx \leq K_3\ med(B_\rho(0))+$$

$$+4\int_{\rho\leq|x|\leq 2\rho}\sup_{\mathbb{R}^N}\left\{\left|\overline{u}(x-y)\nabla\xi\left(\tfrac{|x|}{\rho}\right)\right|^2, \left|\xi\left(\tfrac{|x|}{\rho}\right)\nabla\overline{u}(x-y)-\nabla\overline{u}(x-y)\right|^2\right\} dx$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\left(\xi\left(\tfrac{|x|}{\rho}\right)\overline{u}(x-y)-\overline{u}(x-y)\right)\right|^2 dx \leq$$

$$\leq K_4\rho^N + 4\int_{\rho\leq|x|\leq 2\rho}\sup_{\mathbb{R}^N}\left|\overline{u}(x-y)\nabla\xi\left(\tfrac{|x|}{\rho}\right)\right|^2 dx+$$

$$+4\int_{\rho\leq|x|\leq 2\rho}\sup_{\mathbb{R}^N}\left|\xi\left(\tfrac{|x|}{\rho}\right)\nabla\overline{u}(x-y)-\nabla\overline{u}(x-y)\right|^2 dx,$$

implicando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\left(\xi\left(\tfrac{|x|}{\rho}\right)\overline{u}(x-y)-\overline{u}(x-y)\right)\right|^2 dx \leq$$

$$K_5\rho^N + 4\int_{\rho\leq|x|\leq 2\rho}\sup_{\mathbb{R}^N}\left|\overline{u}(x-y)\nabla\xi\left(\tfrac{|x|}{\rho}\right)\right|^2 dx.$$

Note ainda que

$$\begin{aligned}\left|\nabla\xi\left(\tfrac{|x|}{\rho}\right)\right|^2 &= \left[\xi'\left(\tfrac{|x|}{\rho}\right)\right]^2 . \frac{x_1^2}{|x|^2}.\frac{1}{\rho^2} + \left[\xi'\left(\tfrac{|x|}{\rho}\right)\right]^2 . \frac{x_2^2}{|x|^2}.\frac{1}{\rho^2} + ...+ \\ &+ \left[\xi'\left(\tfrac{|x|}{\rho}\right)\right]^2 . \frac{x_n^2}{|x|^2}.\frac{1}{\rho^2}.\end{aligned}$$

Efetuando os cálculos, conseguimos o seguinte

$$\left|\nabla\xi\left(\tfrac{|x|}{\rho}\right)\right|^2 = \frac{1}{\rho^2}\left[\xi'\left(\tfrac{|x|}{\rho}\right)\right]^2.$$

Donde segue

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\left(\xi\left(\tfrac{|x|}{\rho}\right)\overline{u}(x-y)-\overline{u}(x-y)\right)\right|^2 dx \leq$$

$$\begin{aligned}&\leq K_5\rho^N + 4\frac{1}{\rho^2}\int_{\rho\leq|x|\leq 2\rho}\sup_{\mathbb{R}^N}\left|\overline{u}(x-y)\xi'\left(\tfrac{|x|}{\rho}\right)\right|^2 dx \\ &\leq K_5\rho^N + K_6\rho^{N-2},\end{aligned}$$

logo, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla \left(\xi \left(\frac{|x|}{\rho} \right) \overline{u}(x-y) - \overline{u}(x-y) \right) \right|^2 dx \leq k_5 \rho^N + k_6 \rho^{N-2}. \tag{3.31}$$

Uma vez que $N \geq 3$, então quando ρ tende a zero tem-se por (3.30) e (3.31) que independentemente de y

$$||v_y^\rho - \overline{u}(. - y)||^2_{\mathbb{R}^N} \longrightarrow 0,$$

ou seja, quando $\rho \to 0$

$$||v_y^\rho||^2_{\mathbb{R}^N} \to ||\overline{u}(. - y)||^2_{\mathbb{R}^N} = ||\overline{u}||^2_{\mathbb{R}^N} = M_\lambda$$

uniformemente em y.

Mostrando, assim (3.29).

Agora, de (3.28) e (3.29) concluímos que

$$\phi_\rho(y) = \frac{v_y^\rho}{|v_y^\rho|_{L^p(\mathbb{R}^N)}} \to \overline{u}(. - y) \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N)$$

uniformemente em y, quando $\rho \to 0$. E portanto terminamos de mostrar (i).

Para mostrar (ii) observemos que para cada ρ fixado, considerando uma seqüência arbitrária $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que $|y_n| \to +\infty$, e procedendo de modo análogo ao que foi feito na demonstração do Teorema 3.1, então conseguiremos mostrar que

$$|v_{y_n}^\rho - \overline{u}(. - y_n)|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0 \text{ e } ||v_{y_n}^\rho - \overline{u}(. - y_n)||^2_{\mathbb{R}^N} \to 0$$

quando $|y_n| \to +\infty$.

Destes fatos e desde que $\{y_n\}$ é uma seqüência arbitrária, então temos que para cada ρ

$$||\phi_\rho(y)||^2_{\mathbb{R}^N} = \left\| \frac{v_y^\rho}{|v_y^\rho|_{L^p(\mathbb{R}^N)}} \right\|^2_{\mathbb{R}^N} \longrightarrow \frac{||\overline{u}(. - y)||^2_{\mathbb{R}^N}}{|\overline{u}(. - y)|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)}} = \frac{||\overline{u}||^2_{\mathbb{R}^N}}{|\overline{u}|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)}} = M_\lambda$$

quando $|y| \to +\infty$.

Sendo assim, mostramos (ii). Terminando, então, a demonstração do Lema 3.2.

□

Corolário 3.4 *Existe um $\overline{\rho} = \overline{\rho}(\lambda)$ tal que para todo $\rho \leq \overline{\rho}$*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} ||\phi_\rho(y)||^2_{\mathbb{R}^N} < 2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda.$$

Demonstração: Primeiramente, observemos que sendo $p > 2$, concluimos que

$$2^{\frac{p-2}{p}} > 1$$

e daí

$$M_\lambda < 2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda.$$

Agora, pelo item (ii) do Lema 3.2 temos que

$$||\phi_\rho(y)||^2_{\mathbb{R}^N} \to M_\lambda \text{ uniformemente em } y, \text{ quando } \rho \to 0.$$

Pela definição de limite, dado $0 < \epsilon < 2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda - M_\lambda$ existe $\overline{\rho} = \overline{\rho}(\lambda)$ tal que

$$M_\lambda \leq ||\phi_\rho(y)||^2_{\mathbb{R}^N} \leq M_\lambda + \epsilon, \;\; \forall \rho \leq \overline{\rho} \text{ e } y \in \mathbb{R}^N.$$

Portanto

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} ||\phi_\rho(y)||^2_{\mathbb{R}^N} \leq M_\lambda + \epsilon < M_\lambda + 2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda - M_\lambda < 2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda,$$

demonstrando o corolário.

□

Agora vamos fixar Ω de tal modo que $\rho < \overline{\rho}$, onde ρ é o menor número positivo tal que

$$\mathbb{R}^N \setminus \Omega \subset B_\rho(0).$$

Definiremos a seguinte função

$$\begin{array}{rcll} \tau : & H^1(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ & u & \longmapsto & \tau(u) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} u(x).\chi(||x||).xdx \end{array}$$

onde $\chi \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ é uma função não crescente tal que

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & se \quad 0 < t \leq R \\ R/t & se \quad \quad t > R \end{cases}$$

e $R \in \mathbb{R}^+$ de modo que $\mathbb{R}^N \setminus \Omega \subset B_R(0)$.

Além disso, definiremos o seguinte subconjunto de $H^1_o(\Omega)$

$$T_o = \{u \in V \cap P : \; \tau(u) = 0\},$$

onde P e V são os conjuntos definidos anteriormente.

Lema 3.3 *Seja* $c_o = \inf_{u \in T_o} ||u||^2$, *então*

$$c_o > M_\lambda$$

e existe um R_o $(R_o > \rho)$ *tal que*

a) *se* $|y| \geq R_o$ $||\phi_\rho(y)||^2 \in (M_\lambda, (c_o + M_\lambda)/2)$,
b) *se* $|y| = R_o$ $\langle \tau.\phi_\rho(y), y\rangle_{\mathbb{R}^N} > 0$.

Demontração: Sendo $c_o = \inf\limits_{u \in T_o} ||u||^2$, $\mu_\lambda = \inf\limits_{u \in V} ||u||^2$ (conforme foi definida em 3.2) e por definição $T_o \subset V$, então

$$\mu_\lambda \leq c_o.$$

Mas na demonstração do Teorema 3.1 vimos que

$$M_\lambda \leq \mu_\lambda,$$

mostrando que

$$M_\lambda \leq c_o.$$

Deste fato, resta-nos mostrar que $c_o \neq M_\lambda$.
Suponhamos que $c_o = M_\lambda$, assim existe uma seqüência $\{u_n\} \subset H_o^1(\Omega)$ tal que

$$|v_n|_p = 1 \;\; \text{e} \;\; \tau(v_n) = 0, \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

e mais,

$$||v_n||^2 \to M_\lambda \;\; \text{quando} \;\; n \to +\infty.$$

Além disso, desde que V é um espaço métrico completo e $\{v_n\}$ é uma seqüência minimizante, usando o Princípio Variacional de Ekeland existe uma seqüência $\{\hat{v}_n\}$ tal que

. $M_\lambda \leq J(\hat{v}_n) \leq J(v_n) + \dfrac{1}{n}$;
. $||\hat{v}_n - v_n|| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$;
. $J(\hat{v}_n) \leq J(u) + \dfrac{1}{\sqrt{n}}||\hat{v}_n - u||, \forall u \in V$,

onde J é um funcional em $H_o^1(\Omega)$ definido como sendo $J(u) = ||u||^2$.
Considere para cada n um caminho diferenciável γ_n em V tal que

$$\gamma_n(0) = \hat{v}_n \quad \text{e} \quad \gamma_n'(0) = w,$$

e sendo assim

$$J(\hat{v}_n) \leq J(\gamma_n(t)) + \frac{1}{\sqrt{n}}||\hat{v}_n - \gamma_n(t)||$$

ou seja, podemos rescrever a expressão acima da seguinte forma

$$-\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{||\gamma_n(t) - \gamma_n(0)||}{t} \leq \frac{J(\gamma_n(t)) - J(\gamma_n(0))}{t}$$

obtendo

$$-\frac{1}{\sqrt{n}}||w|| \leq J^{'}(\hat{v}_n).w.$$

Nesta última expressão podemos substituir w por $-w$ e deste modo conseguimos o seguinte resultado

$$\frac{1}{\sqrt{n}}||w|| \geq J^{'}(\hat{v}_n).w,$$

e portanto

$$|J^{'}(\hat{v}_n).w| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}||w||.$$

Considerando a norma $||.||_*$ no espaço $H^{-1}(\Omega)$ definida anteriormente, temos que

$$||J^{'}(\hat{v}_n)||_* \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Uma vez que τ é linear e $\hat{v}_n = v_n + o_n(1)$, então

$$\tau(\hat{v}_n) = \tau(v_n) + \tau(o_n(1)) = 0 + o_n(1) = o_n(1).$$

Além disso, pelos resultados anteriores concluímos que

$$J(\hat{v}_n) \to M_\lambda \quad \text{e} \quad ||J^{'}(\hat{v}_n)||_* \to 0.$$

Considere o funcional f em $H_o^1(\Omega)$ definido por

$$f(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\right) dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx.$$

E usando argumentos semelhantes aos da demonstração do Corolário 3.3 e considerando a seqüência $\hat{u}_n = M_\lambda^{\frac{1}{p-2}}\hat{v}_n$, temos que

$$f^{'}(\hat{u}_n) = o_n(1) \text{ em } H^{-1}(\Omega).$$

Além disso,

$$f(\hat{u}_n) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla \hat{u}_n|^2 + \lambda|\hat{u}_n|^2\right) dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |\hat{u}_n|^p dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\lambda^{\frac{p}{p-2}} + o_n(1).$$

Vale aqui, observarmos que usaremos o Lema 3.1 considerando as funções definidas naquela ocasião como sendo $a \equiv \lambda$ e $b \equiv 1$. Por simplicidade, a partir de agora, denotaremos de $\{u_n\}$ a seqüência $\{\hat{u}_n\}$. Pelo Lema 3.1 temos que

$$||u_n||^2 \to ||u^0||^2 + \sum_{j=1}^{k} ||u^j||^2_{\mathbb{R}^N}.$$

e

$$f(u_n) \to f(u^0) + \sum_{j=1}^{k} \overline{f}(u^j),$$

onde $\overline{f}$ é o funcional em $H^1(\mathbb{R}^N)$ definido por

$$\overline{f}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\right) dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx.$$

Logo

$$f(u_n) \to f(u^0) + \sum_{j=1}^{k} \overline{f}(u^j) \geq f(u^0) + k\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\lambda^{\frac{p}{p-2}}.$$

Desde que $f(u^0) \geq 0$, então vemos que k não pode ser maior que 1, pois

$$f(u_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\lambda^{\frac{p}{p-2}} + o_n(1).$$

Deste modo,

$$f(u_n) \to f(u^0) + \overline{f}(u^1) \geq f(u^0) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\lambda^{\frac{p}{p-2}}.$$

Logo, devemos ter $k = 0$ ou $k = 1$. Se $k = 0$, então $||u_n||^2 \to ||u^0||^2$.
Por outro lado

$$u_n \rightharpoonup u^0 \text{ em } H_o^1(\Omega),$$

implicando que

$$u_n \to u^0 \text{ em } H_o^1(\Omega).$$

Porém, isto contradiz o fato de que M_λ não é atingido na variedade V, pois teriamos

$$||u^0||^2 = M_\lambda^{\frac{p}{p-2}}.$$

Logo $k \neq 0$.

Para $k = 1$, devemos considerar $u^0 = 0$, pois do contrário não teríamos

$$f(u_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\lambda^{\frac{p}{p-2}} + o_n(1).$$

Portanto, ficamos com a seguinte situação

$$||u_n||^2 \to ||u^1||_{\mathbb{R}^N} \ \text{ e } \ f(u^1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\lambda^{\frac{p}{p-2}}$$

implicando que u^1 é uma ground state solution de (P_0).

Uma vez que

$$u_n \rightharpoonup u^0 \equiv 0$$

obtemos o seguinte

$$\psi_n^1(x + y_n^1) = u_n(x + y_n^1) \rightharpoonup u^1(x),$$

onde $\{y_n^1\}$ é tal que $|y_n^1| \to +\infty$.

Além disso,

$$||\psi_n^1(. + y_n^1)||_{\mathbb{R}^N}^2 = ||u_n(. + y_n^1)||_{\mathbb{R}^N}^2 = ||u_n||_{\mathbb{R}^N}^2 = ||u_n||^2 \to ||u^1||_{\mathbb{R}^N}^2.$$

Destes últimos resultados concluímos que

$$u_n(. + y_n^1) \to u^1 \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Considerando as seguintes notações:

$$u^1 = u, \quad y_n^1 = y_n \quad \text{e} \quad w_n(x + y_n^1) = u_n(x + y_n^1) - u^1(x),$$

de onde segue

$$w_n(x) = u_n(x) - u(x - y_n), \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Mais ainda, observemos que

$$||w_n||_{\mathbb{R}^N}^2 = ||w_n(. + y_n)||_{\mathbb{R}^N}^2 = ||u_n(. + y_n) - u||_{\mathbb{R}^N}^2$$

e portanto da convergência forte de $u_n(. + y_n)$, conseguimos mostrar que

$$w_n \to 0 \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Consideremos os seguintes conjuntos

$$(\mathbb{R}^N)_n^+ = \{x \in \mathbb{R}^N : \ \langle x, y_n \rangle_{\mathbb{R}^N} > 0\} \text{ e } (\mathbb{R}^N)_n^- = \mathbb{R}^N \ \setminus (\mathbb{R}^N)_n^+.$$

Para n é suficientemente grande, e desde que $|y_n| \to +\infty$ quando $n \to +\infty$, podemos afirmar que existe uma bola

$$B_{\hat{r}}(y_n) = \{x \in \mathbb{R}^N : \ |x - y_n| < \hat{r}\} \subset (\mathbb{R}^N)_n^+$$

tal que

$$u(x - y_n) \geq \frac{1}{2}u(0) > 0, \ \ \forall x \in B_{\hat{r}}(y_n)$$

e além do mais,

$$u(x - y_n) \leq \frac{K}{e^{|x-y_n|}|x - y_n|^{\frac{N-1}{2}}}, \ \ \forall x \in (\mathbb{R}^N)_n^-,$$

onde K é uma constante.
Primeiramente, observemos que $u(0)$ é o máximo valor de u no $\mathbb{R}^N$ e que $\dfrac{1}{2}u(0) > 0$. Além disso, uma vez que u é radialmente simétrica e $u(z)$ decresce com o crescimento de $|z|$ de tal modo que

$$u(z) \to 0, \text{ quando } |z| \to +\infty$$

então, pelo Teorema do Valor Intermediário, podemos afirmar que existe $\hat{r} > 0$ tal que

$$u(z) = \frac{1}{2}u(0) > 0, \forall z \in \mathbb{R}^N \text{ com } |z| = \hat{r}.$$

Considerando $z = x - y_n$, obtemos

$$u(x - y_n) = \frac{1}{2}u(0) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N \text{ com } |x - y_n| = \hat{r},$$

logo

$$u(x - y_n) \geq \frac{1}{2}u(0) > 0, \forall x \in B_{\hat{r}}(y_n).$$

Desde que

$$|x - y_n|^2 = |x|^2 - 2\langle x, y_n \rangle + |y_n|^2$$

então fixando tal $\hat{r}$ temos que para todo $x \in B_{\hat{r}}(y_n)$

$$\langle x, y_n \rangle = \frac{|x|^2 + |y_n|^2 - |x - y_n|^2}{2} > \frac{|x|^2 + |y_n|^2 - \hat{r}^2}{2} \geq \frac{|y_n|^2 - \hat{r}^2}{2},$$

e desde que $\{y_n\}$ é tal que $|y_n| \to +\infty$, existe n_o de modo que

$$|y_n|^2 > \hat{r}, \ \ \forall n \geq n_o$$

implicando em

$$\langle x, y_n \rangle \ > \ 0, \ \ \forall n \geq n_o.$$

Assim, para n suficientemente grande

$$B_{\hat{r}}(y_n) \subset (\mathbb{R}^N)_n^+.$$

Finalmente, devido ao resultado de Gidas, Ni e Nirenberg [9] segue-se

$$\lim_{r \to +\infty} r^{\frac{N-1}{2}} e^r u(r) = \gamma > 0.$$

Note que, por definição

$$\langle x, y_n \rangle \ \leq \ 0, \ \ \forall x \in (\mathbb{R}^N)_n^-,$$

e assim,

$$|x - y_n|^2 = |x|^2 - 2 \langle x, y_n \rangle + |y_n|^2 \geq |y_n|^2$$

implicando que

$$|x - y_n|^2 \to +\infty, \ \ \text{quando } |y_n|^2 \to +\infty.$$

Pela definição de limite, dado $\epsilon > 0$ temos que para n suficientemente grande

$$\left| |x - y_n|^{\frac{N-1}{2}} e^{|x-y_n|} u(x - y_n) - \gamma \right| < \epsilon,$$

logo, obtemos

$$|x - y_n|^{\frac{N-1}{2}} e^{|x-y_n|} u(x - y_n) < \epsilon + \gamma \leq K,$$

onde K é uma constante positiva. Sendo assim, chegamos a seguinte estimativa

$$u(x - y_n) \leq \frac{K}{e^{|x-y_n|} |x - y_n|^{\frac{N-1}{2}}}, \ \ \forall x \in (\mathbb{R}^N)_n^-. \tag{3.32}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}\langle\tau(u(x-y_n)),y_n\rangle_{\mathbb{R}^N} &= \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y_n).\chi(||x||).\langle x,y_n\rangle\,dx\\ &= \int_{(\mathbb{R}^N)_n^+} u(x-y_n).\chi(||x||).\langle x,y_n\rangle\,dx + \int_{(\mathbb{R}^N)_n^-} u(x-y_n).\chi(||x||).\langle x,y_n\rangle\,dx.\end{aligned}$$

Desde que

$$u(x-y_n),\ \chi(||x||),\ \langle x,y_n\rangle >\ 0,\ \ \forall x\in(\mathbb{R}^N)_n^+\ \text{ e }\ B_{\hat{r}}(y_n)\subset(\mathbb{R}^N)_n^+,$$

então

$$\int_{(\mathbb{R}^N)_n^+} u(x-y_n).\chi(||x||).\langle x,y_n\rangle\,dx \geq \int_{B_{\hat{r}}(y_n)} u(x-y_n).\chi(||x||).\langle x,y_n\rangle\,dx.$$

Além disso,

$$u(x-y_n)\geq\frac{u(0)}{2},\ \ \forall x\in B_{\hat{r}}(y_n)$$

e sendo

$$\langle x,y_n\rangle = |x||y_n|\cos\theta,$$

onde θ é o angulo entre x e y_n. Donde segue-se que

$$\int_{B_{\hat{r}}(y_n)} u(x-y_n).\chi(||x||).\langle x,y_n\rangle\,dx \geq \int_{B_{\hat{r}}(y_n)} \frac{u(0)}{2}.\chi(||x||).|x||y_n|\cos\theta dx.$$

Note que para todo $x\in B_{\hat{r}}(y_n)$, obtemos

$$|y_n| = |y_n-x+x|\leq|y_n-x|+|x|\leq\hat{r}+|x|$$

implicando que

$$|x|>R,\text{ quando } |y_n|\to+\infty.$$

Logo, pela definição de χ, para n suficientemente grande

$$\chi(||x||).|x| = \frac{R}{|x|}.|x| = R$$

obtendo

$$\int_{B_{\hat{r}}(y_n)} \frac{u(0)}{2}.\chi(||x||).|x||y_n|\cos\theta dx \geq \int_{B_{\hat{r}}(y_n)} \frac{u(0)}{2}.R|y_n|\cos\theta dx.$$

Para cada n, observemos que

$$\theta_{\max} = arctg\tfrac{\hat{r}}{|y_n|}$$

implicando que

$$\theta_{\max} \to 0 \text{ quando } n \to +\infty,$$

ou seja, para n suficientemente grande temos que $\cos\theta \geq \frac{1}{2}$, e portanto

$$\int_{B_{\hat{r}}(y_n)} \frac{u(0)}{2}.R|y_n|\cos\theta dx \geq R\frac{u(0)}{4}\int_{B_{\hat{r}}(y_n)} |y_n|dx = R\frac{u(0)}{4}\ med(B_{\hat{r}}(y_n))|y_n|.$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwartz temos que

$$\int_{(\mathbb{R}^N)_n^-} u(x-y_n).\chi(||x||).\left\langle x, y_n\right\rangle dx \geq \int_{(\mathbb{R}^N)_n^-} -u(x-y_n).\chi(||x||).|x||y_n|dx$$

e de (3.32), obtemos

$$\int_{(\mathbb{R}^N)_n^-} -u(x-y_n).\chi(||x||).|x||y_n|dx \geq \int_{(\mathbb{R}^N)_n^-} -\frac{K}{e^{|x-y_n|}|x-y_n|^{\frac{N-1}{2}}}.\chi(||x||).|x||y_n|dx.$$

Pela definição da função χ ocorre o seguinte:

$$\chi(||x||).|x| \leq 1.R = R, \qquad se|x| \leq R;$$

$$\chi(||x||).|x| = \frac{R}{|x|}.|x| = R, \qquad se|x| > R;$$

donde segue que

$$\chi(||x||).|x| \leq R.$$

Logo

$$\int_{(\mathbb{R}^N)_n^-} -\frac{K}{e^{|x-y_n|}|x-y_n|^{\frac{N-1}{2}}}.\chi(||x||).|x||y_n|dx \geq \int_{(\mathbb{R}^N)_n^-} -\frac{K}{e^{|x-y_n|}|x-y_n|^{\frac{N-1}{2}}}.R|y_n|dx.$$

Desta forma, temos o seguinte

$$\left\langle \tau(u(x-y_n)), \frac{y_n}{|y_n|}\right\rangle_{\mathbb{R}^N} \geq R\frac{u(0)}{4}\ med(B_{\hat{r}}(y_n)) - K.R\int_{(\mathbb{R}^N)_n^-} \frac{1}{e^{|x-y_n|}|x-y_n|^{\frac{N-1}{2}}}dx.$$

Considere a seqüência de funções integráveis

$$\psi_n^1(x) = \frac{1}{e^{|x-y_n|}|x-y_n|^{\frac{N-1}{2}}}.$$

Visto que $|x-y_n| \geq |y_n|$ para cada $\forall x \in (\mathbb{R}^N)_n^-$, . E desde que $|y_n| \to +\infty$ obtemos que

$$\psi_n^1(x) \to 0 \text{ q.t.p. em } (\mathbb{R}^N)_n^-.$$

Por outro lado

$$|x - y_n| \geq |x| \text{ e } |x - y_n| \geq M > 0 \quad \forall n$$

implicando em

$$|\psi_n^1(x)| \geq \frac{1}{e^{|x|}M},$$

onde $\dfrac{1}{e^{|x|}}$ é uma função integrável em $\mathbb{R}^N$.

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{(\mathbb{R}^N)_n^-} \psi_n^1(x)dx = \int_{(\mathbb{R}^N)_n^-} \frac{1}{e^{|x-y_n|}|x - y_n|^{\frac{N-1}{2}}} dx = o_n(1).$$

Portanto

$$\left\langle \tau(u(x - y_n)), \frac{y_n}{|y_n|} \right\rangle_{\mathbb{R}^N} \geq R\frac{u(0)}{4}\ med(B_{\hat{r}}(y_n)) - o_n(1) > 0.$$

Uma vez que

$$w_n \to 0 \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N),$$

obtemos

$$\tau(u_n) = \tau(u(x - y_n) + w_n) = \tau(u(x - y_n)) + \tau(w_n) = \tau(u(x - y_n)) + o_n(1)$$

e desde que

$$\tau(\hat{v}_n) = o_n(1),$$

logo

$$\tau(u_n) = o_n(1).$$

Por esta seqüência de fatos segue-se que

$$\tau(u(x - y_n)) = o_n(1),$$

contradizendo os cálculos feitos anteriormente. Portanto a suposição de que $c_o = M_\lambda$ não é verdadeira, ou seja, deste modo mostramos que

$$c_o > M_\lambda.$$

Prova de a :

Desde que

$$\phi_\rho(y) \in H_o^1(\Omega), \ \ |\phi_\rho(y)|_p = 1$$

e pelo Teorema 3.1, temos que não existe ground state solution, isto é,

$$||\phi_\rho(y)||^2 \neq M_\lambda.$$

Assim

$$||\phi_\rho(y)||^2 > M_\lambda, \ \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

Pelo item (ii) do Lema 3.2 para cada ρ fixado,

$$||\phi_\rho(y)||^2 \to M_\lambda, \text{ quando } |y| \to +\infty.$$

E de fato ρ está fixo, pois anteriormente fixamos Ω e pela definição de limite temos que dado

$$0 < \epsilon < \frac{c_o - M_\lambda}{2},$$

existe R_o tal que

$$|||\phi_\rho(y)||^2 - M_\lambda| < \epsilon, \text{ se } |y| \geq R_o$$

donde segue-se

$$||\phi_\rho(y)||^2 < \epsilon + M_\lambda < \frac{c_o - M_\lambda}{2} + M_\lambda = \frac{c_o + M_\lambda}{2},$$

ou seja,

$$||\phi_\rho(y)||^2 \in \left(M_\lambda, \frac{c_o + M_\lambda}{2}\right), \ \forall y \in \mathbb{R}^N \text{ tal que } |y| \geq R_o$$

mostrando portanto o item **a** do Lema 3.3.

Prova de b :

Agora, observe o seguinte

$$\langle \tau(\phi_\rho(y)), y \rangle_{\mathbb{R}^N} = \int_{\mathbb{R}^N} \phi_\rho(y).\chi(||x||).\langle x, y \rangle \, dx,$$

pela definição da aplicação $\phi_\rho(y)$, temos que

$$\langle \tau(\phi_\rho(y)), y \rangle_{\mathbb{R}^N} = \frac{1}{|v_y^\rho|_{L^p(\mathbb{R}^N)}} \int_{\mathbb{R}^N} \xi\left(\frac{|x|}{\rho}\right) u(x-y)\chi(|x|) \langle x, y \rangle \, dx.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}\langle \tau(\phi_\rho(y)), y\rangle_{\mathbb{R}^N} &= \frac{1}{|v_y^\rho|_{L^p(\mathbb{R}^N)}}\int_{(\mathbb{R}^N)^+} \xi\left(\frac{|x|}{\rho}\right) u(x-y)\chi(|x|)\langle x,y\rangle\, dx \\ &+ \frac{1}{|v_y^\rho|_{L^p(\mathbb{R}^N)}}\int_{(\mathbb{R}^N)^-} \xi\left(\frac{|x|}{\rho}\right) u(x-y)\chi(|x|)\langle x,y\rangle\, dx.\end{aligned}$$

Repetindo os argumentos e os cálculos feitos anteriormente, concluímos que para $|y|$ suficientemente grande temos

$$\begin{aligned}\langle \tau(\phi_\rho(y)), y\rangle_{\mathbb{R}^N} &\geq \frac{1}{|v_y^\rho|_{L^p(\mathbb{R}^N)}}\int_{B_{\hat{r}}(y)} \xi\left(\frac{|x|}{\rho}\right) \frac{u(0)}{2}\chi(|x|)|x||y|\cos\theta dx \\ &+ \frac{1}{|v_y^\rho|_{L^p(\mathbb{R}^N)}}\int_{(\mathbb{R}^N)^-} -\xi\left(\frac{|x|}{\rho}\right) \frac{K}{e^{|x-y|}|x-y|^{\frac{N-1}{2}}}.\chi(||x||).|x||y|dx.\end{aligned}$$

Além disso, observemos que para $x \in B_{\hat{r}}(y)$, obtemos

$$|y| \leq \hat{r} + |x|$$

e assim, é possível escolher $|y| = R_o$ de modo que

$$|x| > 2\rho \text{ e } \cos\theta \geq \frac{1}{2}.$$

Logo

$$\begin{aligned}\int_{B_{\hat{r}}(y)} \xi\left(\frac{|x|}{\rho}\right) \frac{u(0)}{2}\chi(|x|)|x||y|\cos\theta dx &\geq \int_{B_{\hat{r}}(y)} \frac{u(0)}{2} RR_o\frac{1}{2}dx \\ &\geq RR_o\frac{u(0)}{4}\ med(B_{\hat{r}}(y)) > 0.\end{aligned}$$

Temos também que

$$\int_{(\mathbb{R}^N)^-} -\xi\left(\frac{|x|}{\rho}\right) \frac{K}{e^{|x-y|}|x-y|^{\frac{N-1}{2}}}.\chi(||x||).|x||y|dx \geq \int_{(\mathbb{R}^N)^-} -\frac{K}{e^{|x-y|}|x-y|^{\frac{N-1}{2}}}.RR_o dx.$$

Desta forma pela escolha feita de R_o é possível termos

$$K\int_{(\mathbb{R}^N)^-} \frac{1}{e^{|x-y|}|x-y|^{\frac{N-1}{2}}}dx < \frac{u(0)}{8}\ med(B_{\hat{r}}(y)).$$

Assim, conseguimos mostrar que existe R_o tal que se $|y| = R_o$, então

$$\langle \tau(\phi_\rho(y)), y\rangle_{\mathbb{R}^N} \geq \frac{RR_o}{|v_y^\rho|_{L^p(\mathbb{R}^N)}}\frac{u(0)}{8}\ med(B_{\hat{r}}(y)) > 0$$

provando o item **b** do Lema 3.3.

Concluindo portanto a demonstração deste Lema.

$\square$

Agora consideremos o subconjunto Σ de $H_o^1(\Omega)$ definido como

$$\Sigma = \{\phi_\rho(y) : \ |y| \leq R_o\}$$

e observemos que $\Sigma \subset P$ (o conjunto das funções não-negativas de $H_o^1(\Omega)$).

Defina o seguinte conjunto

$$\mathcal{H} = \left\{ h \in C(P \cap V, P \cap V) : \ h(u) = u, \ \forall u \ tal \ que \ ||u||^2 < \frac{c_o + M_\lambda}{2} \right\}$$

e

$$\Gamma = \{A \subset P \cap V : \ A = h(\Sigma), \ h \in \mathcal{H}\}.$$

Lema 3.4 *Se $A \in \Gamma$, então $A \cap T_o \neq \phi$.*

Demonstração: Provarmos que para todo $A \in \Gamma$ existe um $u \in A$ tal que $\tau(u) = 0$, equivale a mostrarmos que para todo $h \in \mathcal{H}$, existe $\hat{y}$ com $|\hat{y}| \leq R_o$ tal que $(\tau \circ h \circ \phi_\rho)(\hat{y}) = 0$.

Considere um elemento h arbitrário e seja

$$\mathcal{J} \equiv (\tau \circ h \circ \phi_\rho) : \ \mathbb{R}^N \ \rightarrow \ \mathbb{R}^N$$

onde $\mathcal{J}$ é homotópico com a identidade I pela homotopia

$$\mathcal{F}(t, .) = t\mathcal{J}(.) + (1 - t)I, \ 0 \leq t \leq 1.$$

Devemos mostrar $0 \notin \mathcal{F}(t, \partial B_{R_o})$.

Considere $|y| = R_o$, e assim pelo item **a** do Lema 3.3 temos que

$$||\phi_\rho(y)||^2 < \frac{c_o + M_\lambda}{2}$$

e desde que $h \in \mathcal{H}$, então

$$h(\phi_\rho(y)) = \phi_\rho(y)$$

implicando que

$$\mathcal{F}(t,y) = t(\tau \circ h \circ \phi_\rho)(y) + (1-t)y = t(\tau \circ \phi_\rho)(y) + (1-t)y.$$

Assim, resulta que

$$\langle \mathcal{F}(t,y), y \rangle = t \, \langle \tau(\phi_\rho(y)), y \rangle + (1-t) \, \langle y, y \rangle.$$

Desta forma consideremos os seguintes casos:

. se $t = 0$, então $\langle \mathcal{F}(0,y), y \rangle = |y|^2 = R_o^2$;

. se $t = 1$, então pelo item **b** do Lema 3.3 temos que $\langle \mathcal{F}(1,y), y \rangle = \langle \tau(\phi_\rho(y)), y \rangle > 0$;

. se $0 < t < 1$, tem-se que $\langle \mathcal{F}(t,y), y \rangle > 0$, pois $t,\ 1-t,\ \langle \tau.\phi_\rho(y), y \rangle$ e $|y|^2$ são valores positivos.

Isto nos permite afirmar que $0 \notin \mathcal{F}(t, \partial B_{R_o})$.

Pela propriedade da invariância do grau por uma homotopia temos que

$$d\,(\mathcal{F}(t,.), B_{R_o}, 0) = \ constante, \ \ \forall t \in [0,1].$$

Note que, para $t = 0$

$$d\,(\mathcal{F}(0,.), B_{R_o}, 0) = d\,(I, B_{R_o}, 0) = 1.$$

Por outro lado, para $t = 1$

$$d\,(\mathcal{F}(1,.), B_{R_o}, 0) = d\,(\mathcal{J}, B_{R_o}, 0).$$

Logo

$$d\,(\mathcal{J}, B_{R_o}, 0) = 1.$$

Portanto, a equação $\mathcal{J}(y) = 0$ tem uma solução $\hat{y}$ em B_{R_o} e daí,

$$\mathcal{J}(\hat{y}) = (\tau \circ h \circ \phi_\rho)(\hat{y}) = 0$$

provando o Lema.

□

Consideremos o seguinte:

$$c = \inf_{A \in \Gamma} \sup_{u \in A} ||u||^2 \tag{3.33}$$

e

$$\mathcal{K}_c = \big\{u \in P \cap V : \; J(u) = ||u||^2 = c \text{ e } \nabla J_{|_V}(u) = 0\big\}.$$

Além disso para $\gamma \in \mathbb{R}$, definiremos o seguinte conjunto

$$L_\gamma = \{u \in V : J(u) \leq \gamma\}.$$

Com estas definições partiremos para provar o seguinte teorema

Teorema 3.2 *Considere $N \geq 3$, $2 < p < 2^*$ e $x_o \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Então para todo λ existe um $\rho \equiv \rho(\lambda)$ tal que se*

$$\mathbb{R}^N \setminus \Omega \subset B_\rho(x_o) = \{x \in \mathbb{R}^N : \; |x - x_o| \leq \rho\},$$

o problema

$$(P_2) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u + \lambda u &=& |u|^{p-2}u, \quad \Omega \\ u &\in& H_o^1(\Omega) \end{array} \right. ,$$

tem pelo menos uma solução positiva.

Demonstração: Primeiramente escolhemos $\rho(\lambda) = \overline{\rho}$ como o encontrado no Corolário 3.4. E a partir daí, provaremos que o nível c definido em (3.33) é um valor crítico, isto é, $\mathcal{K}_c \neq \phi$.

Note que

$$M_\lambda < c < 2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda.$$

De fato, pelo Lema 3.4 para todo $A \in \Gamma$ temos que $A \cap T_o \neq \phi$. Assim, para cada $A \in \Gamma$ existe $\overline{u} \in A \cap T_o$, daí

$$\inf_{u \in T_o} ||u||^2 \leq ||\overline{u}||^2 \leq \sup_{u \in A} ||u||^2.$$

De um lado temos que pelo Lema 3.3

$$M_\lambda < c_o = \inf_{u \in T_o} ||u||^2$$

então para todo $A \in \Gamma$

$$M_\lambda < c_o \leq \sup_{u \in A} ||u||^2$$

implicando que

$$c_o \leq \inf_{A \in \Gamma} \sup_{u \in A} ||u||^2 = c$$

logo, concluímos que

$$M_\lambda < c.$$

Além disso, note que para todo $A \in \Gamma$

$$c \leq \sup_{u \in A} ||u||^2$$

o que é equivalente a dizer que

$$c \leq \sup_{\phi_\rho(y) \in \Sigma} ||h(\phi_\rho(y))||^2, \quad \forall h \in \mathcal{H}.$$

Fazendo $h \equiv I$, onde I é a função identidade,

$$c \leq \sup_{\phi_\rho(y) \in \Sigma} ||\phi_\rho(y)||^2.$$

Sendo assim

$$c \leq \sup_{|y|<R_o} ||\phi_\rho(y)||^2 \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^N} ||\phi_\rho(y)||^2,$$

então pela escolha de $\rho(\lambda)$ aplicamos o Corolário 3.4, obtendo o seguinte

$$c \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^N} ||\phi_\rho(y)||^2 < 2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda.$$

Portanto

$$M_\lambda < c < 2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda.$$

Deste modo, pelo Corolário 3.3, segue-se que o funcional J satisfaz a condição Palais-Smale no nível c para o seguinte subconjunto

$$Z = P \cap V \cap \Big\{ u \in H_o^1(\Omega) : \ M_\lambda < J(u) < 2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda \Big\}.$$

Suponhamos agora que $\mathcal{K}_c = \phi$, logo pelo Lema de deformação podemos encontrar uma aplicação contínua

$$\eta : [0,1] \ \times \ V \cap P \longrightarrow V \cap P$$

e um número positivo ϵ_o tal que

$$L_{c+\epsilon_o} \ \setminus \ L_{c-\epsilon_o} \quad \subset\subset \quad L_{2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda} \ \setminus \ L_{\frac{c_o + M_\lambda}{2}},$$

$$\eta(t,u) = u, \quad \forall u \in L_{c-\epsilon_o} \cup \{ V \cap P \ \setminus \ L_{c+\epsilon_o} \} \quad e \quad \forall t \in [0,1],$$

$$\eta \left(1, L_{c+\frac{\epsilon_o}{2}} \right) \subset L_{c-\frac{\epsilon_o}{2}}.$$

Considere $\overline{A} \in \Gamma$ tal que

$$c \leq \sup_{u \in \overline{A}} J(u) < c + \frac{\epsilon_o}{2}.$$

Assim,

$$J(u) < c + \tfrac{\epsilon_o}{2}, \ \ \forall u \in \overline{A}$$

implicando que

$$\overline{A} \subset L_{c+\frac{\epsilon_o}{2}}.$$

Logo, pelo Lema de Deformação, decorre que

$$\eta(1, \overline{A}) \subset L_{c-\frac{\epsilon_o}{2}},$$

ou seja,

$$J(u) < c - \frac{\epsilon_o}{2}, \ \ \forall u \in \eta(1, \overline{A})$$

implicando que

$$\sup_{u \in \eta(1,\overline{A})} J(u) < c - \frac{\epsilon_o}{2}. \tag{3.34}$$

Por outro lado,

$$\eta(1, .) \in C(V \cap P, V \cap P).$$

Além disso, desde que $\overline{A} \in \Gamma$, então existe $h \in \mathcal{H}$ tal que $\overline{A} = h(\Sigma)$. Logo

$$\overline{h} = \eta(1, .) \circ h \in C(V \cap P, V \cap P).$$

Desde que $h \in \mathcal{H}$, então

$$h(u) = u, \quad \forall u \text{ tal que } ||u||^2 < \frac{c_o + M_\lambda}{2} < c - \epsilon_o$$

implicando que

$$\overline{h}(u) = \eta(1, u), \quad \forall u \text{ tal que } ||u||^2 < \frac{c_o + M_\lambda}{2},$$

adicionando a isto o fato de que

$$\frac{c_o + M_\lambda}{2} < c - \epsilon_o$$

e aplicando o Lema de Deformação, obtemos

$$\overline{h}(u) = \eta(1,u) = u, \quad \forall u \text{ tal que } ||u||^2 < \frac{c_o + M_\lambda}{2} < c - \epsilon_o.$$

Donde segue-se que

$$\overline{h} \in \mathcal{H}.$$

Note então que $\eta(1,\overline{A}) = \overline{h}(\Sigma)$, e assim

$$\eta(1,\overline{A}) \in \Gamma.$$

Deste modo, pela definção de c

$$c \leq \sup_{u\in\eta(1,\overline{A})} J(u)$$

o que é absurdo de acordo com a estimativa 3.34.
Logo, temos que $\mathcal{K}_c \neq \phi$ e assim mostramos que c é valor crítico do funcional J restrito ao conjunto $V \cap P$. Isto equivale dizer que existe pelo menos uma solução não negativa para o problema (P_2), pelo Princípio de Máximo concluímos que a solução é positiva. Portanto, provamos este Teorema.

$\square$

Teorema 3.3 *Assuma as hipóteses do Teorema 3.2. Então existe* $\lambda_o = \lambda_o(\Omega)$ *tal que para cada* $\lambda \in (0, \lambda_o)$ *o problema* (P_2) *tem ao menos uma solução positiva.*

Demonstração:

No Problema (P_2), façamos a seguinte mudança de variáveis $w(x) = u(\theta x)$, com isto obtemos o seguinte

$$-\Delta w(x) = -\theta^2 \Delta u(\theta x) = \theta^2(-\lambda u(\theta x) + |u(\theta x)|^{p-2} u(\theta x)),$$

daí

$$-\Delta w(x) = -\lambda\theta^2 w + \theta^2 |w|^{p-2} w.$$

Desde que $\theta x \in \Omega$, então

$$x \in \frac{1}{\theta}\Omega.$$

Denotando por Ω_θ o domínio $\dfrac{1}{\theta}\Omega$, vemos que

$$\begin{cases} -\Delta w + \lambda\theta^2 w &= \theta^2 |w|^{p-2}w, \quad \Omega_\theta \\ w &= 0, \qquad\qquad \partial\Omega_\theta \end{cases}$$

fazendo $\lambda\theta^2 = 1$, temos que

$$\Omega_\theta = \sqrt{\lambda}\Omega = \Omega_\lambda.$$

Deste modo

$$\begin{cases} -\Delta w + w &= \dfrac{1}{\lambda}|w|^{p-2}w, \quad \Omega_\lambda \\ w &= 0, \qquad\qquad \partial\Omega_\lambda \end{cases}.$$

Este último problema é equivalente a

$$\begin{cases} -\Delta(\alpha w) + \alpha w &= \dfrac{1}{\lambda\alpha^{p-2}}|\alpha w|^{p-2}\alpha w, \quad \Omega_\lambda \\ \alpha w &= 0, \qquad\qquad \partial\Omega_\lambda \end{cases},$$

ou seja, fazendo a mudança $v = \alpha w$, obtemos

$$\begin{cases} -\Delta v + v &= \dfrac{1}{\lambda\alpha^{p-2}}|v|^{p-2}v, \quad \Omega_\lambda \\ v &= 0, \qquad\qquad \partial\Omega_\lambda \end{cases}.$$

Considerando $\dfrac{1}{\lambda\alpha^{p-2}} = 1$, isto é, $v = \dfrac{1}{\lambda^{\frac{1}{p-2}}}w$ chegamos ao seguinte problema

$$(1)\begin{cases} -\Delta v + v &= |v|^{p-2}v, \quad \Omega_\lambda \\ v &= 0, \qquad\quad \partial\Omega_\lambda \end{cases}.$$

Pelo Teorema 3.2, considere $x_o \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\lambda$ e assim, existe $\rho = \rho(1)$ tal que se

$$\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\lambda \subset B_\rho(x_o) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_o| \le \rho\}$$

o problema (1) tem pelo menos uma solução positiva.

Considere

$$\lambda_o = \sup\{\lambda > 0 : \ \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\lambda \ \subset \ B_\rho(x_o) \ \ com \ \ x_o \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\lambda\}.$$

Então, temos que existe λ_o dependendo de Ω tal que para cada $\lambda \in (0, \lambda_o)$ o problema (1) tem pelo menos uma solução positiva.

Portanto, de acordo com as mudanças de variáveis feitas concluímos que existe $\lambda_o = \lambda_o(\Omega)$ tal que para cada $\lambda \in (0, \lambda_o)$ o problema (P_2) tem ao menos uma solução positiva.

$\square$

Apêndice A

Funcionais diferenciáveis

Definição A.1 *Considere um funcional $I : U \to \mathbb{R}$, onde U é um subconjunto aberto de um espaço de Banach H. O funcional I tem uma derivada de Gateaux $f \in H^{'}$ em $u \in U$ se, para cada $h \in H$,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[I(u + th) - I(u) - f.th] = 0.$$

A derivada de Gateaux de I em u é denotada por $I^{'}(u)$. O funcional I tem uma derivada de Fréchet $f \in H^{'}$ em $u \in U$ se

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{||h||}[I(u + h) - I(u) - f.h] = 0.$$

Dizemos que o funcional $I \in C^1(U, \mathbb{R})$ se a derivada de Fréchet de I existe e é contínua sobre U.

Observações:

i) Se H é um espaço de Hilbert e I tem derivada de Gateaux em $u \in U$, o gradiente de I em u é denotado por $\nabla I(u)$ e é tal que

$$\langle \nabla I(u), h \rangle = I^{'}(u).h, \ \forall h \in H$$

onde $\langle .,. \rangle$ denota o produto interno do espaço de Hilbert.
De fato, uma vez que $I^{'}(u) \in H^{'}$, pelo Teorema da Representação de Riez-Fréchet existe um único $g \in H$, tal que

$$I^{'}(u).h = \langle g, h \rangle, \forall h \in H.$$

Além disso,

$$||g||_H = ||I^{'}(u)||_{H'}.$$

Denotamos este elemento g por $\nabla I(u)$, o qual chamamos de gradiente de I em u.

ii) A derivada de Gateaux é dado por

$$I^{'}(u).h = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[I(u+th) - I(u)].$$

iii) Todo funcional Fréchet diferenciável é também Gateaux diferenciável.

Proposição A.1 *Se I tem derivada de Gateaux contínua sobre U, então $I \in C^1(U, \mathbb{R})$.*

Demonstração: Sejam $u+h$ e $u \in U$ e como I possui derivada de Gateaux sobre U, então pelo Teorema do Valor Médio existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$I(u+h) - I(u) = I^{'}(u+\theta h).h.$$

Note que

$$I(u+h) - I(u) - I^{'}(u).h = I^{'}(u+\theta h).h - I^{'}(u).h.$$

de onde segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{||h||}[I(u+h) - I(u) - I^{'}(u).h] &= \frac{1}{||h||}[I^{'}(u+\theta h).h - I^{'}(u).h] \\ &= [I^{'}(u+\theta h) - I^{'}(u)].\frac{h}{||h||}. \end{aligned}$$

Deste modo

$$\left|\left|\frac{1}{||h||}[I(u+h) - I(u) - I^{'}(u).h]\right|\right| = \left|\left|I^{'}(u+\theta h) - I^{'}(u)\right|\right|.$$

Uma vez que a derivada de Gateaux é contínua, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $||h|| < \delta$, segue-se

$$\left|\left|I^{'}(u+\theta h) - I^{'}(u)\right|\right| < \epsilon.$$

Logo

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{||h||}[I(u+h) - I(u) - I^{'}(u).h] = 0.$$

Deste modo, concluímos que a derivada de Fréchet existe e é igual a derivada de Gateaux. Portanto a derivada de Fréchet de I é contínua sobre U, ou seja, $I \in C^1(U, \mathbb{R})$.

□

Definição A.2 *Seja* $I \in C^1(U,\mathbb{R})$. *O funcional* I *tem uma derivada segunda de Gateaux* $L \in \mathcal{L}(H,H')$ *em* $u \in U$ *se, para cada* $h, v \in H$,

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[I'(u+th)-I'(u)-Lth].v=0.$$

A derivada segunda de Gateaux de I *em* u *é denotada por* $I''(u)$. *O funcional* I *tem a derivada segunda de Fréchet* $L \in \mathcal{L}(H,H')$ *em* $u \in U$ *se*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{||h||}[I'(u+h)-I'(u)-Lh]=0.$$

O funcional $I \in C^2(U,\mathbb{R})$ *se a derivada segunda de Fréchet de* I *existe e é contínua em* U.

Observação: Toda derivada segunda de Fréchet é uma derivada segunda de Gateaux.

Proposição A.2 *Se* I *tem a derivada segunda de Gateaux contínua sobre* U, *então* $I \in C^2(U,\mathbb{R})$.

A demonstração desta proposição segue-se de modo semelhante a demonstração da Proposição A.1.

A partir de agora destacamos os resultados mais utilizados em toda a dissertação, com relação as imersões nos espaços de Sobolev.

Definição A.3 *Considere o seguinte espaço*

$$H^1(\mathbb{R}^N)=\left\{u\in L^2(\mathbb{R}^N):\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L^2(\mathbb{R}^N)\ para\ i=1,2,...,N\right\}$$

com o produto interno

$$\langle u,v\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u.\nabla v+\lambda uv)dx,$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ *com* $\lambda > 0$.

Este espaço com o produto interno indicado é de Hilbert. Além disso, trabalharemos com a seguinte norma

$$||u||_{\mathbb{R}^N}=\left(\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2+\lambda u^2)dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

que provém do produto interno definido anteriormente.

Vamos considerar Ω *um subconjunto do* $\mathbb{R}^N$. *O espaço* $H^1_o(\Omega)$ *é o fecho de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *em* $H^1(\mathbb{R}^N)$, *onde* $\mathcal{D}(\Omega)$ *é o espaço das funções testes (funções de classe* $C^\infty(\Omega)$ *com suporte compacto em* Ω*).*

Teorema A.1 (Imersões de Sobolev) *As seguintes imersões são contínuas:*

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 \leq p < \infty, \quad se\ N = 1\ ou\ N = 2;$$
$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 \leq p < 2^*, \quad se\ N \geq 3,\ onde\ 2^* = \frac{2N}{N-2}.$$

Teorema A.2 (Imersões de Rellich) *Se Ω for limitado, as seguintes imersões são compactas:*

$$H_o^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),\ 1 \leq p < 2^*.$$

Nosso objetivo a seguir é mostrar que o funcional I em $H_o^1(\Omega)$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + \lambda u^2)dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx = \frac{1}{2}J(u) - \frac{1}{p}G(u).$$

é de classe $C^2(H_o^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Consideremos os funcionais J e G no espaço de Hilbert $H_o^1(\Omega)$ definidos por

$$J(u) = ||u||^2 \quad \text{e} \quad G(u) = \int_\Omega |u|^p dx$$

onde $||.||$ é a norma proviente do produto interno definido em $H_o^1(\Omega)$.

Proposição A.3 *Os funcionais J e G são de classe $C^2(H_o^1(\Omega), \mathbb{R})$.*

Demonstração:

Existência da derivada de Gateaux de J

Dado $u \in H_o^1(\Omega)$, então para cada $h \in H_o^1(\Omega)$

$$J'(u).h = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[||u + th||^2 - ||u||^2\right]$$

fazendo os cálculos, obtemos

$$J'(u).h = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[2t\langle u, h\rangle + t^2||h||^2\right] = 2\langle u, h\rangle.$$

Mostrando a existência da derivada de Gateaux de J.

Continuidade da derivada de Gateaux de J.

Assumindo que $u_n \to u$ em $H_o^1(\Omega)$. Dados $\epsilon > o$ e $h \in H_o^1(\Omega)$ tal que $||h|| \leq 1$, temos que para n suficientemente grande

$$|(J'(u_n) - J'(u)).h| = |2\langle u_n - u, h\rangle| \leq ||u_n - u||.||h|| < \epsilon$$

implicando em

$$||J^{'}(u_n) - J^{'}(u)||_{H^{-1}} = \sup_{\substack{h \in H_o^1(\Omega) \\ ||h|| \leq 1}} |(J^{'}(u_n) - J^{'}(u)).h| \leq \epsilon.$$

Portanto

$$||J^{'}(u_n) - J^{'}(u)||_{H^{-1}} \longrightarrow 0 \text{ quando } n \to +\infty,$$

mostrando que a derivada de Gateaux de J é contínua em $H_o^1(\Omega)$.

Existência da segunda derivada de Gateaux de J.

Dado $u \in H_o^1(\Omega)$, então para cada $h,\ v \in H_o^1(\Omega)$

$$J^{''}(u)h.v = \frac{1}{t}\left[J^{'}(u+th).v - J^{'}(u).v\right] = \frac{1}{t}\left[2\left\langle u+th, v\right\rangle - 2\left\langle u, v\right\rangle\right].$$

E portanto, a segunda derivada de Gateaux existe e vale

$$J^{''}(u)h.v = 2\left\langle h, v\right\rangle.$$

Continuidade da segunda derivada de Gateaux de J.

Assumindo que $u_n \to u$ em $H_o^1(\Omega)$

$$|(J^{''}(u_n) - J^{''}(u))h.v| = |2\left\langle h, v\right\rangle - 2\left\langle h, v\right\rangle| = 0$$

mostrando que

$$||J^{''}(u_n) - J^{''}(u)|| = 0$$

e portanto a segunda derivada de Gateaux de J é continua em $H_o^1(\Omega)$. Pela Proposição A.2 temos que $J \in C^2(H_o^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Agora, vamos mostrar que $G \in C^2(H_o^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Existência da derivada de Gateaux de G.

Sejam $u,\ h \in H_o^1(\Omega)$. Dados $x \in \Omega$ e $0 < |t| < 1$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\frac{||u(x)+th(x)|^p - |u(x)|^p|}{|t|} = p|u(x)+\theta th(x)|^{p-1}|h(x)| \leq p(|u(x)|+|h(x)|)^{p-1}|h(x)|.$$

Desde que $u,\ h \in H_o^1(\Omega)$, temos que $u,\ h \in L^p(\Omega)$. Decorre disto que

$$|u| + |h| \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega),$$

e assim, pela desigualdade de Hölder

$$(|u| + |h|)^{p-1}|h| \in L^1(\Omega).$$

Considere a seguinte seqüência em $L^1(\Omega)$

$$f_n = p|u + \theta_n t_n h|^{p-2}(u + \theta_n t_n h)h$$

com $t_n \to 0$ quando $n \to +\infty$. Logo

$$f_n \to f = p|u|^p uh.$$

Desde que

$$|f_n(x)| \leq p(|u(x)| + |h(x)|)^{p-1}|h(x)| \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_n \int_\Omega f_n dx = p \int_\Omega |u|^{p-2} uhdx.$$

Por outro lado

$$\frac{|u + t_n h|^p - |u|^p}{t_n} = p|u + \theta_n t_n h|^{p-2}(u + \theta_n t_n h)h,$$

isto é

$$\lim_n \frac{1}{t_n}\left(\int_\Omega |u + t_n h|^p dx - \int_\Omega |u|^p dx\right) = p \int_\Omega |u|^{p-2} uhdx.$$

Logo

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(\int_\Omega |u + th|^p dx - \int_\Omega |u|^p dx\right) = p \int_\Omega |u|^{p-2} uhdx.$$

Portanto, existe a derivada de Gateaux de G, e vale

$$G^{'}(u)h = p \int_\Omega |u|^{p-2} uhdx.$$

Continuidade da derivada de Gateaux de G.

Assumindo que $u_n \to u$ em $H_o^1(\Omega)$, temos que

$$p|u_n|^{p-2}u_n \to p|u|^{p-2}u \text{ em } L^{\frac{p}{p-1}}.$$

Observe o seguinte

$$\begin{aligned} |(G^{'}(u_n) - G^{'}(u)).h| &= \left|p \int_\Omega |u_n|^{p-2} u_n hdx - p \int_\Omega |u|^{p-2} uhdx\right| \\ &= \left|p \int_\Omega \left(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right) hdx\right|. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Hölder

$$|(G'(u_n) - G'(u)).h| \leq p||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)}|h|_{L^p(\Omega)}.$$

Usando a imersão contínua de $H^1_o(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ para $2 < p < 2^*$

$$|(G'(u_n) - G'(u)).h| \leq cp||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)}||h||$$

donde segue

$$||G'(u_n) - G'(u)||_{H^{-1}} =\leq cp||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)}.$$

Portanto

$$||G'(u_n) - G'(u)||_{H^{-1}} \longrightarrow 0 \text{ quando } n \to +\infty,$$

mostrando que a derivada de Gateaux de G é contínua em $H^1_o(\Omega)$.

Existência da segunda derivada de Gateaux de G.

Sejam $u,\ h,\ v \in H^1_o(\Omega)$. Dados $x \in \Omega$ e $0 < |t| < 1$, pelo Teorema do Valor Médio existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\frac{(p|u(x)+th(x)|^{p-2}(u(x)+th(x)) - p|u(x)|^{p-2}(u(x))v(x)}{t} =$$

$$= p(p-1)|u(x)+\theta th(x)|^{p-2}h(x)v(x)$$

implicando em

$$\frac{|p|u(x)+th(x)|^{p-2}(u(x)+th(x)) - p|u(x)|^{p-2}(u(x)||v(x)|}{|t|} =$$

$$\begin{aligned} &= p(p-1)|u(x)+\theta th(x)|^{p-2}|h(x)||v(x)| \\ &\leq p(p-1)(|u(x)|+|h(x)|)^{p-2}|h(x)||v(x)| \\ &\leq p(p-1)(|u(x)|+|h(x)|)^{p-1}|v(x)|. \end{aligned}$$

De modo análogo ao feito para a primeira derivada, temos que $(|u|+|h|)^{p-1}|v| \in L^1(\Omega)$.

Considere a seqüência $k_n = p(p-1)|u+\theta_n t_n h|^{p-2}hv$, com $t_n \to 0$ quando $n \to +\infty$.

Assim k_n converge para $k = p(p-1)|u|^{p-2}hv$. E mais, $|k_n| \leq (|u|+|h|)^{p-1}|v|$.

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_n \int_\Omega k_n dx = p(p-1)\int_\Omega |u|^{p-2}hv.$$

Por argumentos semelhantes aos feitos na primeira derivada, concluímos que a segunda derivada de Gateaux de G existe e vale

$$G''(u)h.v = p(p-1)\int_\Omega |u|^{p-2}hv.$$

Continuidade da segunda derivada de Gateaux de G.

Assumindo que $u_n \to u$ em $H_o^1(\Omega)$, temos que

$$p(p-1)|u_n|^{p-2} \to p(p-1)|u|^{p-2} \text{ em } L^{\frac{p}{p-2}}.$$

Logo

$$\begin{aligned}|(G''(u_n) - G''(u))h.v| &= \left| p(p-1)\int_\Omega |u_n|^{p-2}hv - p(p-1)\int_\Omega |u|^{p-2}hv \right| \\ &= p(p-1)\left| \int_\Omega \left(|u_n|^{p-2} - |u|^{p-2}\right) hv \right|.\end{aligned}$$

Note que $|u|^{p-2} \in L^{\frac{p}{p-2}}$ e $h,\ v \in L^p(\Omega)$, e desde que

$$\frac{1}{\frac{p}{p-2}} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1$$

pela Desigualdade de Hölder

$$|(G''(u_n) - G''(u))h.v| = p(p-1)||u_n|^{p-2} - |u|^{p-2}|_{L^{\frac{p}{p-2}}} |h|_{L^p(\Omega)} |v|_{L^p(\Omega)}.$$

Usando o Teorema de Sobolev

$$|(G''(u_n) - G''(u))h.v| = c^2 p(p-1)||u_n|^{p-2} - |u|^{p-2}|_{L^{\frac{p}{p-2}}} ||h|| ||v||.$$

Logo

$$||G''(u_n) - G''(u)|| \leq c^2 p(p-1)||u_n|^{p-2} - |u|^{p-2}|_{L^{\frac{p}{p-2}}},$$

implicando que

$$||G''(u_n) - G''(u)|| \longrightarrow 0 \ \text{ quando } n \to +\infty$$

e portanto a segunda derivada de Gateaux de G é contínua em $H_o^1(\Omega)$. Pela Proposição A.2 temos que $G \in C^2(H_o^1(\Omega), \mathbb{R})$.

$\square$

Sendo $J,\ G \in C^2(H_o^1(\Omega), \mathbb{R})$ e desde que

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + \lambda u^2)dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx = \frac{1}{2}J(u) - \frac{1}{p}G(u),$$

concluímos, portanto, que $I \in C^2(H_o^1(\Omega), \mathbb{R})$.

A demonstração de que os outros funcionais, associados aos problemas estutados no nosso trabalho, são de classes $C^2(H_o^1(\Omega), \mathbb{R}^N)$ procede de forma semelhante aos feitos nesta seção.

Apêndice B

Simetrização de Schwarz

Definição B.1 *Sejam* $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n$ *alguns conjuntos borelianos do* $\mathbb{R}^N$*, dois a dois disjuntos de medida finita, e* $0 < a_n < a_{n-1} < ... < a_1$ *números reais. Se* f *é uma função degrau tal que*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i},$$

então definiremos ser um rearranjo de f *por*

$$f^* = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{[R_{i-1} \leq |x| \leq R_i]}$$

onde $R_o = 0$ *e* $R_{i-1} \leq R_i$ *são dados pela relação*

$$med([R_{i-1} \leq |x| \leq R_i]) = med(A_i).$$

onde med é a medida de Lebesgue.

Notação: $[R_{i-1} \leq |x| \leq R_i] = \{x \in \mathbb{R}^N :\ R_{i-1} \leq |x| \leq R_i\}$, onde $|.|$ é a norma euclidiana do $\mathbb{R}^N$.

Observação: Note que esta definição mostra que a partir da função degrau f encontramos uma função f^* que tem as seguintes propriedades:

i) Simétrica em relação a origem;

ii) Decrescente quando os raios R_i' s vão aumentando;

iii) A integral de Lebesgue de f^* no $\mathbb{R}^N$ é igual a de f, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^*(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx.$$

Consideremos f uma função degrau que tem um número finito de valores

$$a_1 > a_2 > ... > a_n > 0.$$

Se $A_i = [f = a_i] = \{x \in \mathbb{R}^N : \ f(x) = a_i\}$ então

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$$

pode ser escrita da seguinte forma

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{[f \geq a_i]} \tag{B.1}$$

onde $f_1 \geq f_2 \geq ... \geq f_n$ e os $\lambda_i'\,s$ são dados pela relação

$$f_i = \chi_{[f \geq a_i]}, \ \ \lambda_i = a_i - a_{i+1} \text{ para } 1 \geq i \geq n \ \text{ e } \ a_{n+1} = 0.$$

Vamos mostrar este fato usando o princípio de indução em n.

Primeiramente consideremos $n = 2$. Note que para este caso $a_3 = 0$, e assim

$$\begin{aligned} f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 &= (a_1 - a_2)\chi_{[f \geq a_1]} + (a_2 - a_3)\chi_{[f \geq a_2]} \\ &= a_1 \chi_{[f \geq a_1]} - a_1 \chi_{[f \geq a_1]} + a_2 \chi_{[f \geq a_2]} - a_3 \chi_{[f \geq a_2]}. \end{aligned}$$

Desde que $\chi_{[f \geq a_1]} = \chi_{A_1}$ e $\chi_{[f \geq a_2]} = \chi_{A_1 \cup A_2} = \chi_{A_1} + \chi_{A_2}$, além do mais A_1 e A_2 são disjuntos. Logo

$$\begin{aligned} f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 &= a_1 \chi_{A_1} - a_2 \chi_{A_1} + a_2 \chi_{A_1} + a_2 \chi_{A_2} \\ &= a_1 \chi_{A_1} + a_2 \chi_{A_2}. \end{aligned}$$

Mostrando portanto que a mudança na expressão vale para $n = 2$.

Consideremos agora que a expressão vale para $n = k$, ou seja,

$$f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_{[f \geq a_i]} = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}.$$

Agora, considere o seguinte

$$f = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \chi_{[f \geq a_i]} = \lambda_1 \chi_{[f \geq a_1]} + \lambda_2 \chi_{[f \geq a_2]} + ... + \lambda_k \chi_{[f \geq a_k]} + \lambda_{k+1} \chi_{[f \geq a_{k+1}]}.$$

Considerando $a_{k+2} = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} f \ &= \lambda_1 \chi_{[f \geq a_1]} + \lambda_2 \chi_{[f \geq a_2]} + ... + \lambda_{k-1} \chi_{[f \geq a_{k-1}]} + a_k \chi_{[f \geq a_k]} - a_{k+1} \chi_{[f \geq a_k]} + \\ &+ a_{k+1} \chi_{[f \geq a_{k+1}]} - a_{k+2} \chi_{[f \geq a_{k+1}]} \\ &= \lambda_1 \chi_{[f \geq a_1]} + \lambda_2 \chi_{[f \geq a_2]} + ... + \lambda_{k-1} \chi_{[f \geq a_{k-1}]} + a_k \chi_{[f \geq a_k]} - \\ &- a_{k+1} \chi_{[f \geq a_k]} + a_{k+1} \chi_{[f \geq a_{k+1}]}, \end{aligned}$$

desde que a expressão $(B.1)$ vale para $n = k$, então

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i} + a_{k+1}\chi_{A_{k+1}}$$

donde segue que

$$f = \sum_{i=1}^{k+1} a_i \chi_{A_i}.$$

Mostrando com isto que se a expressão vale para $n = k$ também vale para $n = k + 1$, e portanto acabamos de mostrar por indução que realmente podemos fazer a mudança indicada anteriormente.

Desta forma a simetrização de f é dado por

$$f^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i^*$$

onde $f_1^* \geq f_2^* \geq ... \geq f_n^*$.

Com efeito é suficiente observar que

$$(\lambda_i f_i)^* = \lambda_i f_i^* = \lambda_i \chi_{[|x|<R_i]},$$

onde R_i verifica

$$med(A_i) = med([R_{i-1} \leq |x| < R_i])$$
$$\text{e } med([|x| < R_i]) = med([f \geq a_i]) = med(A_1) + med(A_2) + ... + med(A_i).$$

Sendo $\lambda_i = a_i - a_{i+1}$, concluímos que

$$f^* = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{[R_{i-1} \leq |x| < R_i]} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{[|x|<R_i]} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i^* = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \right)^*.$$

Isto é interessante, pois a aplicação $f \longmapsto f^*$ não é linear. No entanto, quando a função f pode ser escrita na forma $B.1$ o rearranjo de f é a soma dos rearranjos $\lambda_i f_i^*$.

O teorema a seguir permite definir o rearranjo de uma função positiva e mensurável qualquer.

Teorema B.1 *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ uma função positiva. Existe uma única $f^* \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tal que $f^* \geq 0$ e para todo $\alpha > 0$*

$$med([f \geq \alpha]) = med([f^* \geq \alpha]),$$

onde o conjunto $[f^* \geq \alpha]$ é uma bola $B_{R_\alpha}(0)$. A função f^* é radialmente decrescente e é chamada de **rearranjo decrescente** *ou* **a simetrização de Schwarz da função f**.

Além do mais, para toda função contínua e crescente

$$G : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

tal que $G(0) = 0$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G\left(f^*(x)\right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} G\left(f(x)\right) dx.$$

Os resultados que se seguem encontramos maiores detalhes em Kavian[11].

Proposição B.1 *Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ uma função positiva. Então a simetrização $u^* \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e temos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^*(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Proposição B.2 *O ínfimo em (3.1) é atingido e para qualquer u tal que $||u||^2_{\mathbb{R}^N} = M_\lambda$ e $|u|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 1$ corresponde uma solução regular positiva de*

$$(P_0) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u + \lambda u & = & |u|^{p-2}u, \ \mathbb{R}^N \\ u & \in & H^1(\mathbb{R}^N) \end{array} \right. .$$

Além disso, qualquer solução regular positiva de (P_0) é radialmente simétrica sobre algum ponto do $\mathbb{R}^N$, $u_r < 0$, para $r > 0$, r sendo a coordenada radial em relação ao ponto e

$$\lim_{r \to +\infty} r^{\frac{N-1}{2}} e^r u(r) = \gamma > 0.$$

Demonstração: A demonstração de que M_λ é atingido foi feita na seção 2.3 e a condição de simetria e regularidade da solução do problema é devido a um resultado de Guidas, Ni e Niremberg [9].

Considerando uma seqüência minimizante $\{u_n\}$ para (3.1), de modo que $u_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

De fato, basta trocar $\{u_n\}$ por $\{|u_n|\}$. Definindo $u^+(x) = \ max\{u(x), \ 0\}$ e $u^-(x) = \ min\{u(x), \ 0\}$, notemos que

$$||\ |u_n|\ ||^2_{\mathbb{R}^N} = ||u_n^+ - u_n^-||^2_{\mathbb{R}^N} = ||u_n^+||^2_{\mathbb{R}^N} + ||u_n^-||^2_{\mathbb{R}^N} = ||u_n||^2_{\mathbb{R}^N}$$

e

$$|\ |u_n|\ |_{L^p(\mathbb{R}^N)} = |u_n|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Usando a Simetrização de Schwarz existe uma seqüência minimizante $\{u_n^*\} \subset H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^*(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n(x)|^2 dx. \tag{B.2}$$

Definindo a seguinte função

$$\begin{array}{rccl} G: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & t & \longmapsto & G(t) = \lambda t^2 \end{array}$$

onde $\lambda > 0$.

Notemos que esta função é crescente, logo pelo Teorema B.1 visto na Simetrização de Schwarz temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(u_n^*) dx = \int_{\mathbb{R}^N} G(u_n) dx,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lambda (u_n^*)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda u_n^2 dx. \tag{B.3}$$

De $(B.2)$ e $(B.3)$, concluímos que

$$||u_n^*||^2_{\mathbb{R}^N} = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n^*(x)|^2 + \lambda (u_n^*)^2 \right) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n(x)|^2 + \lambda (u_n)^2 \right) dx = ||u_n||^2_{\mathbb{R}^N}.$$

De modo análogo, considere agora a função

$$\begin{array}{rccl} H: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & t & \longmapsto & H(t) = |t|^p \end{array}$$

para $p \geq 1$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lambda |u_n^*|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda |u_n|^p dx.$$

Assim, para cada n

$$|u_n^*|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = |u_n|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 1.$$

Logo,

$$M_\lambda \leq ||u_n^*||^2_{\mathbb{R}^N} \leq ||u_n||^2_{\mathbb{R}^N}.$$

Desde que $||u_n||^2_{\mathbb{R}^N} \to M_\lambda$ quando $n \to +\infty$, então mostramos que

$$||u_n^*||^2_{\mathbb{R}^N} \to M_\lambda \text{ quando } n \to +\infty.$$

Portanto a seqüência $\{u_n^*\}$ também é minimizante, e com isto $\{u_n^*\}$ é limitada em $H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N)$.

Sendo $H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N)$ um espaço reflexivo, então existem $\{u_{n_j}^*\} \subset \{u_n^*\}$ e $u \in H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$u_{n_j}^* \rightharpoonup u \text{ em } H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N).$$

Uma vez que a imersão

$$H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$$

é compacta para $2 < p < \frac{2N}{N-2}$, obtemos

$$u_{n_j}^* \to u \text{ em } L^p(\mathbb{R}^N).$$

Por outro lado,

$$||u||^2_{\mathbb{R}^N} \leq \varliminf_{n_j} ||u_{n_j}^*||^2_{\mathbb{R}^N}.$$

Passando ao limite temos que

$$|u|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 1 \text{ e } ||u||^2_{\mathbb{R}^N} \leq M_\lambda,$$

mostrando, portanto, que u é um minimizador para (3.1).

Utilizaremos o Teorema do Multiplicador de Lagrange para mostrarmos que existe solução para (P_0). Para tal, observemos o seguinte:

$H^1(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach;

$$\begin{array}{rccl} J: & H^1(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & J(v) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^2 + \lambda v^2\right) dx \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccl} F: & H^1(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & J(v) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx \end{array}$$

são funcionais de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^N); \mathbb{R})$.

Consideremos a variedade

$$V = \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^N);\ \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx = 1 \right\},$$

donde segue que

$$F^{'}(v).h = p\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p-2} vhdx, \;\; \forall h \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Considerando $h = v$, temos

$$F^{'}(v).v = p\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p} dx = p \neq 0,$$

logo

$$F^{'}(v) \neq 0, \;\; \forall v \in V.$$

Mais ainda, vimos anteriormente que para $u \in V$, temos

$$M_\lambda = J(u) = \inf_{v\in V} J(v).$$

Assim, pelo Teorema do Multiplicador de Lagrange existe uma constante $\delta > 0$ tal que

$$J^{'}(u) = \delta F^{'}(u)$$

ou seja,

$$J^{'}(u).h = \delta F^{'}(u).h, \;\; \forall h \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Fazendo os cálculos, obtemos

$$2\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla h + \lambda u h)\, dx = \delta p \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} uhdx, \;\; \forall h \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Considerando $h = u$, e desde que $J(u) = M_\lambda$ e $F(u) = 1$ temos que $\dfrac{\delta p}{2} = M_\lambda$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla h + \lambda u h)\, dx = M_\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} uhdx, \;\;\; \forall h \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Com isto e pelo fato de $u \geq 0$ (uma vez que u é o limite fraco de uma seqüência de funções não negativas em $H^1(\mathbb{R}^N)$), temos que u é solução do seguinte problema

$$(P_3) \;\; \left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u + \lambda u &=& M_\lambda u^{p-1}, \;\; \mathbb{R}^N \\ u &\in& H^1(\mathbb{R}^N) \end{array} \right. .$$

Consideremos $v = \alpha u \geq 0$, onde $\alpha > 0$. Logo, é fácil ver que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \nabla h + \lambda v h)\, dx = \frac{M_\lambda}{\alpha^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^N} v^{p-1} hdx, \, \forall h \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Fazendo $\dfrac{M_\lambda}{\alpha^{p-2}} = 1$, obtemos $\alpha = M_\lambda^{\frac{1}{p-2}}$ e portanto $v = M_\lambda^{\frac{1}{p-2}} u$ é solução do problema (P_0).

Pelo Princípio do Máximo Forte temos que $u > 0$ e conseqüentemente $v > 0$.

Finalmente, devido a Gidas, Ni e Nirenberg temos que ocorre a assintoticidade e a monotonicidade de v (e de u) afirmando que qualquer solução regular de (P_0) é radialmente simétrica e tem o comportamento descrito na proposição.

$\square$

Apêndice C

Lema de Brézis e Lieb

Neste apêndice demonstraremos alguns Lemas devido a Brézis e Lieb que diz respeito a convergências de funções nos espaços L^p. Estas versões foram utilizados no nosso trabalho.

Lema C.1 *Sejam* $1 < p < \infty$ *e* $\{f_n\}$ *uma seqüência limitada de* $L^p(\Omega)$ *tal que*

$$f_n \to f \ \ q.t.p. \ \ em \ \Omega.$$

Então

$$f_n \rightharpoonup f \ \ em \ L^p(\Omega).$$

Demonstração: Primeiramente, uma vez que $\{f_n\}$ é limitada em $L^p(\Omega)$ e sendo este um espaço de Banach reflxivo, então existem $g \in L^p(\Omega)$ e $\{f_{n_i}\} \subset \{f_n\}$ tais que

$$f_{n_i} \rightharpoonup g \ em \ L^p(\Omega). \tag{C.1}$$

Considere

$$\Omega_n = \{x \in \Omega : \ |f_k(x) - f(x)| \leq 1 \ \ \forall k \geq n\}.$$

Fixando n e considerando ϕ pertencente a $L^{p'}(\Omega)$ com suporte compacto tal que

$$supp(\phi) \subset \Omega_n.$$

De $(C.1)$ tem-se

$$\int_\Omega f_{n_i}.\phi dx \longrightarrow \int_\Omega g.\phi dx.$$

Por outro lado, por hipótese temos que

$$f_n \to f \text{ q.t.p. em } \Omega$$

logo

$$f_n.\phi \to f.\phi \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Assim, temos que pela desigualdade de Hölder $f.\phi \in L^1(\Omega)$ e desde que ϕ tem suporte compacto em Ω então

$$|f_{n_i}\phi| = |(f_{n_i} - f)\phi + f.\phi| \leq |f_{n_i} - f||\phi| + |f||\phi| \leq |\phi| + |f||\phi| \in L^1(\Omega)$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que

$$\int_\Omega f_{n_i}.\phi dx \longrightarrow \int_\Omega f.\phi dx.$$

Pela unicidade de limite

$$\int_\Omega g.\phi dx = \int_\Omega f.\phi dx.$$

Desde que ϕ é arbitrária, então para cada n fixado

$$\int_\Omega g.\phi dx = \int_\Omega f.\phi dx, \quad \forall \phi \textit{ com suporte compacto em } \Omega_n.$$

Considerando $\Psi \in L^{p'}(\Omega)$ com suporte compacto em Ω, existe uma seqüência $\{\Phi_n\} \subset L^{p'}(\Omega)$ com suporte compacto em Ω_n para cada n tal que

$$\Phi_n \to \Psi.$$

Usando argumentos semelhantes aos anteriores, concluímos que

$$\int_\Omega g.\Psi dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g.\Phi_n dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f.\Phi_n dx = \int_\Omega f.\Psi dx.$$

Desde que Ψ é arbitrária, segue

$$\int_\Omega g.\Psi dx = \int_\Omega f.\Psi dx, \quad \forall \Psi \textit{ com suporte compacto em } \Omega.$$

implicando que

$$g = f \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Com isto obtemos que

$$f_{n_i} \rightharpoonup f \text{ em } L^p(\Omega)$$

portanto

$$f_n \rightharpoonup f \ em \ L^p(\Omega). \tag{C.2}$$

Considere que $(C.2)$ não ocorre. Portanto, existem uma subseqüência $\{f_{n_j}\}$ de $\{f_n\}$, $F : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ e $\epsilon_o > 0$ tais que

$$|F(f_{n_j}) - F(f)| \geq \epsilon_o, \quad \forall n_j. \tag{C.3}$$

Por hipótese, $\{f_{n_j}\}$ é limitada em $L^p(\Omega)$, e usando argumentos já vistos nesta demonstração temos que existe uma subseqüência $\{f_{n_{j_k}}\}$ de $\{f_{n_j}\}$ tal que

$$f_{n_{j_k}} \rightharpoonup f \ em \ L^p(\Omega),$$

contradizendo $(C.3)$. Portanto, $(C.2)$ ocorre, terminando a demonstração deste Lema.

□

Lema C.2 *Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$ e seja $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$. Se*

a) $\{u_n\}$ é limitada em $L^p(\Omega)$,
b) $u_n \to u$ q.t.p. em Ω,

então

$$\lim_{n\to+\infty} \left(|u_n|^p_{L^p(\Omega)} - |u_n - u|^p_{L^p(\Omega)} \right) = |u|^p_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Desde que $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$, segue-se que $\{|u_n|^p\} \subset L^1(\Omega)$. Pelo Lema de Fatou e sendo $\{u_n\}$ limitada em $L^p(\Omega)$

$$\int_\Omega \underline{\lim}_n |u_n|^p dx \leq \underline{\lim}_n \int_\Omega |u_n|^p dx < \infty.$$

Uma vez que $u_n \to u$ q.t.p. em Ω

$$|u_n|^p \to |u|^p \text{ q.t.p. em } \Omega$$

logo

$$\underline{\lim}_n |u_n|^p = |u|^p \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Com isto, obtemos

$$|u|^p_{L^p(\Omega)} \leq \underline{\lim}_n |u_n|^p_{L^p(\Omega)} < \infty.$$

Por outro lado, dado $\epsilon > 0$ existe $c(\epsilon)$ tal que

$$||a+b|^p - |a|^p| \leq \epsilon |a|^p + c(\epsilon)|b|^p, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{C.4}$$

De fato, Pelo Teorema do Valor Médio existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$|a+b|^p - |a|^p = p|a+\theta b|^{p-2}(a+\theta b)b.$$

Disto, decorre que

$$\begin{aligned} ||a+b|^p - |a|^p| &= p|a+\theta b|^{p-1}|b| \leq p\left(|a| + \theta|b|\right)^{p-1}|b| \leq p\left(2\max\{|a|, \theta|b|\}\right)^{p-1}|b| \\ &\leq 2^{p-1} p \max\{|a|^{p-1}, |b|^{p-1}\}|b| \leq 2^{p-1}p(|a|^{p-1} + |b|^{p-1})|b|. \end{aligned}$$

Assim

$$||a+b|^p - |a|^p| \leq 2^{p-1}p|a|^{p-1}|b| + 2^{p-1}p|b|^p.$$

Sendo $\dfrac{p}{p-1}$ e p expoentes conjugados, então pela Desigualdade de Young temos que

$$|a|^{p-1}|b| = \epsilon_o |a|^{p-1}.\frac{1}{\epsilon_o}|b| \leq \frac{p-1}{p}\epsilon_o^{\frac{p}{p-1}}|a|^p + \frac{1}{p\epsilon_o^p}|b|^p.$$

Logo, obtemos o seguinte

$$\begin{aligned} ||a+b|^p - |a|^p| &\leq 2^{p-1}(p-1)\epsilon_o^{\frac{p}{p-1}}|a|^p + 2^{p-1}\frac{1}{\epsilon_o^p}|b|^p + 2^{p-1}|b|^p \\ &= 2^{p-1}(p-1)\epsilon_o^{\frac{p}{p-1}}|a|^p + 2^{p-1}\left(\frac{1}{\epsilon_o^p} + 1\right)|b|^p \end{aligned}$$

Considerando $\epsilon = 2^{p-1}(p-1)\epsilon_o^{\frac{p}{p-1}}$, temos que existe $c(\epsilon)$ tal que

$$||a+b|^p - |a|^p| \leq \epsilon|a|^p + c(\epsilon)|b|^p, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

mostrando, portanto, que $(C.4)$ ocorre.

Considere agora a função f_n^ϵ tal que

$$f_n^\epsilon = (||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p| - \epsilon|u_n - u|^p)^+ \leq (1 + c(\epsilon))\,|u|^p. \tag{C.5}$$

Se

$$||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p| - \epsilon|u_n - u|^p < 0,$$

então $(C.5)$ ocorre de imediato.

Caso contrário,

$$(||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p| - \epsilon|u_n - u|^p)^+ = ||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p| - \epsilon|u_n - u|^p.$$

Considerando $a = u_n - u$ e $b = u$, de $(C.4)$ temos que

$$||u_n|^p - |u_n - u|^p| \leq \epsilon|u_n - u|^p + c(\epsilon)|u|^p.$$

Logo, concluímos que

$$\begin{aligned} f_n^{\epsilon_o} &\leq ||u_n|^p - |u_n - u|^p| + |u|^p - \epsilon|u_n - u|^p \\ &\leq \epsilon|u_n - u|^p + c(\epsilon)|u|^p + |u|^p - \epsilon|u_n - u|^p \\ &\leq (1 + c(\epsilon))\, |u|^p \end{aligned}$$

mostrando que $(C.5)$ ocorre.

Uma vez que $u \in L^p(\Omega)$, então $(1 + c(\epsilon))\, |u|^p \in L^p(\Omega)$.

Além disso, desde que $u_n \to u$ q.t.p. em Ω, temos que

$$f_n^\epsilon \to 0 \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que

$$\int_\Omega f_n^\epsilon dx \longrightarrow 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Dos argumentos usados anteriormente temos:

(i) $||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p| - \epsilon|u_n - u|^p < 0 = f_n^\epsilon$;

(ii) $||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p| - \epsilon|u_n - u|^p = f_n^\epsilon$.

Assim de (i) e (ii), temos que

$$||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p| \leq f_n^\epsilon + \epsilon|u_n - u|^p$$

e sendo a seqüência $\{u_n\}$ limitada em $L^p(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega ||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p| dx &\leq \int_\Omega f_n^\epsilon dx + \epsilon \int_\Omega |u_n - u|^p dx \\ &\leq \int_\Omega f_n^\epsilon dx + \epsilon \sup_n |u_n - u|^p_{L^P(\Omega)}. \end{aligned}$$

Logo

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_\Omega ||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p| dx \leq \epsilon \sup_n |u_n - u|^p_{L^P(\Omega)}.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ e sendo $\sup_n |u_n - u|^p_{L^P(\Omega)} < +\infty$, então

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_\Omega (|u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p)\, dx \right| \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_\Omega ||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p| dx \to 0$$

e portanto

$$\lim_{n\to+\infty} \left(|u_n|^p_{L^p(\Omega)} - |u_n - u|^p_{L^p(\Omega)} \right) = |u|^p_{L^p(\Omega)}.$$

Terminando a demonstração do Lema.

$\square$

Lema C.3 *Seja $u_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ com $\{u_n\} \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para $p \geq 2$, $u_n \to 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e $A(y) = |y|^{p-2}y$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Então se*

$$|u_n|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \quad \forall n \in N,$$

temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |A(u_n + w) - A(u_n) - A(w)|^{\frac{p}{p-1}}\, dx = o_n(1)$$

para cada $w \in L^p(\mathbb{R}^N)$ fixado.

Demonstração: Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$A(u_n + w) - A(u_n) = \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} A(u_n + tw) \right) dt,$$

isto é,

$$A(u_n+w) - A(u_n) = \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} \left(|u_n + tw|^{p-2}(u_n + tw) \right) \right) dt = \int_0^1 (p-1)|u_n + tw|^{p-2} w dt.$$

Logo,

$$|A(u_n + w) - A(u_n)| \leq (p-1)|w| \int_0^1 |u_n + tw|^{p-2} dt \leq (p-1)|w| \left(|u_n| + |w| \right)^{p-2}.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} (|u_n| + |w|)^{p-2} &\leq (2 \max\{|u_n|, |w|\})^{p-2} \\ &\leq 2^{p-2} \max\{|u_n|^{p-2}, |w|^{p-2}\} \\ &\leq 2^{p-2}|w|^{p-2} + 2^{p-2}|u_n|^{p-2}, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$|A(u_n + w) - A(u_n)| \leq (p-1)2^{p-2}|w|^{p-1} + (p-1)2^{p-2}|u_n|^{p-2}|w|.$$

Pela Desigualdade de Young para cada $\epsilon > 0$, existe $c(\epsilon)$ tal que

$$|A(u_n + w) - A(u_n)| \leq \epsilon |u_n|^{p-1} + c(\epsilon)|w|^{p-1}. \tag{C.6}$$

De fato, para cada $\epsilon_o > 0$ uma vez que $p-1$ e $\dfrac{p-1}{p-2}$ expoentes conjugados, então pela Desigualdade de Young temos que

$$|u_n|^{p-2}|w| = \epsilon_o |u_n|^{p-2}\frac{1}{\epsilon_o}|w| \leq \frac{p-2}{p-1}\epsilon_o^{\frac{p-1}{p-2}}|u_n|^{p-1} + \frac{1}{(p-1)\epsilon_o^{p-1}}|w|^{p-1}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
|A(u_n + w) - A(u_n)| &\leq (p-1)2^{p-2}|w|^{p-1} + (p-1)2^{p-2}\left(\tfrac{p-2}{p-1}\epsilon_o^{\frac{p-1}{p-2}}|u_n|^{p-1} + \tfrac{1}{(p-1)\epsilon_o^{p-1}}|w|^{p-1}\right)\\
&\leq (p-2)2^{p-2}\epsilon_o^{\frac{p-1}{p-2}}|u_n|^{p-1} + 2^{p-2}\left((p-1) + \frac{1}{\epsilon_o^{p-1}}\right)|w|^{p-1}
\end{aligned}$$

Considere $\epsilon = (p-2)2^{p-2}\epsilon_o^{\frac{p-1}{p-2}}$, então existe $c(\epsilon)$ tal que $(C.6)$ ocorre.

Agora, para cada $\epsilon > 0$ consideremos a seguinte função

$$f_n^\epsilon(x) = \left(|A(u_n + w) - A(u_n) - A(w)|(x) - \epsilon |u_n|^{p-1}(x)\right)^+$$

e desde que $u_n \to 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, então

$$f_n^\epsilon(x) \to 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Além disso, observemos que

$$\begin{aligned}
0 \leq f_n^\epsilon &\leq |A(u_n + w) - A(u_n)| + |A(w)| - \epsilon |u_n|^{p-1}\\
&\leq \epsilon |u_n|^{p-1} + c(\epsilon)|w|^{p-1} + |w|^{p-1} - \epsilon |u_n|^{p-1}\\
&\leq c_1 |w|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N).
\end{aligned}$$

Assim, uma vez que $w \in L^p(\mathbb{R}^N)$, temos o seguinte

$$0 \leq |f_n^\epsilon(x)|^{\frac{p}{p-1}} \leq c_2 |w|^p \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f_n^\epsilon(x)|^{\frac{p}{p-1}} dx \longrightarrow 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Note que pela definição de f_n^ϵ temos que

$$|A(u_n + w) - A(u_n) - A(w)| - \epsilon |u_n|^{p-1} \leq f_n^\epsilon$$

isto é,

$$|A(u_n + w) - A(u_n) - A(w)| \leq f_n^\epsilon + \epsilon |u_n|^{p-1}$$

e com isto temos o seguinte

$$\begin{aligned} |A(u_n + w) - A(u_n) - A(w)|^{\frac{p}{p-1}} &\leq (f_n^\epsilon + \epsilon |u_n|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \leq (2\max\{f_n^\epsilon, \epsilon |u_n|^{p-1}\})^{\frac{p}{p-1}} \\ &\leq 2^{\frac{p}{p-1}} \max\left\{|f_n^\epsilon|^{\frac{p}{p-1}}, \epsilon^{\frac{p}{p-1}} |u_n|^p\right\} \leq 2^{\frac{p}{p-1}} |f_n^\epsilon|^{\frac{p}{p-1}} + 2^{\frac{p}{p-1}} \epsilon^{\frac{p}{p-1}} |u_n|^p. \end{aligned}$$

Assim, obtemos para todo $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\mathbb{R}^N} |A(u_n + w) - A(u_n) - A(w)|^{\frac{p}{p-1}} dx &\leq 2^{\frac{p}{p-1}} \epsilon^{\frac{p}{p-1}} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx \\ &\leq 2^{\frac{p}{p-1}} \epsilon^{\frac{p}{p-1}} . C^p \end{aligned}$$

implicando que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |A(u_n + w) - A(u_n) - A(w)|^{\frac{p}{p-1}} dx = 0.$$

Concluindo a demonstração do Lema.

□

Apêndice D

Grau topológico de Brouwer

Neste apêndice faremos uma breve apresentação desta ferramenta topológica e de suas principais propriedades. Seja $\phi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto limitado. Dado $b \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$ o problema consiste em resolver a equação

$$\phi(x) = b \tag{D.1}$$

em Ω. Isto pode ser feito em certos casos usando-se o chamado **grau de Brouwer** da aplicação ϕ (relativo a Ω no ponto b), $d(\phi, \Omega, b)$, o qual é um inteiro que representa uma "contagem algébrica" do número de soluções de $(D.1)$.

Neste momento citaremos as propriedades que utilizamos durante o decorrer deste trabalho:

$(G1)$ **Normalização:** Se $I : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ é a aplicação inclusão então

$$d(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1, & se \;\; b \in \Omega \\ 0, & se \;\; b \notin \Omega. \end{cases}$$

$(G2)$ **Propriedade de existência:** Se $d(\phi, \Omega, b) \neq 0$, então existe uma solução $x_o \in \Omega$ de $(D.1)$.

$(G3)$ **Invariância por homotopia:** Se $H \in C([0,1] \times \Omega, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin H([0,1] \times \partial\Omega)$, então

$$d(H(t,.), \Omega, b) = \; constante \quad \forall t \in [0,1].$$

Apêndice E

Resultados utilizados na dissertação

Neste apêndice enunciaremos os principais teoremas utilizados nas demonstrações durante todo este trabalho.

No que segue-se temos as seguintes notações:

. X é um conjunto mensurável;

. μ é uma medida em X;

. M^+ é o conjunto das funções mensuráveis não-negativas em X.

Lema E.1 (Lema de Fatou) *Se $\{f_n\}$ pertence a M^+, então*

$$\int \underline{\lim}_{n} f_n d\mu \leq \underline{\lim}_{n} \int f_n d\mu.$$

Teorema E.1 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções integráveis que converge em quase toda parte para uma função mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que*

$$|f_n| \leq g \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

então f é integrável e

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Teorema E.2 (Desigualdade de Hölder) *Seja $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, onde $1 < p < +\infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então*

$$fg \in L^1(\Omega) \text{ e } |fg|_{L^1(\Omega)} \leq |f|_{L^p(\Omega)} |g|_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema E.3 (Desigualdade de Interpolação) *Seja $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, onde $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Então*

$$f \in L^r(\Omega) \quad \forall p \le r \le q$$

e

$$|fg|_{L^r(\Omega)} \le |f|^{\theta}_{L^p(\Omega)} |g|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}, \text{ com } 0 \le \theta \le 1 \text{ tal que } \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

Teorema E.4 *Sejam* $\{f_n\}$ *uma seqüência de* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$*, tais que*

$$f_n \to f \text{ em } L^p(\Omega).$$

Então existe uma subseqüência $\{f_{n_j}\}$ *tal que*
(i) $f_{n_j}(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω*;*
(ii) $|f_{n_j}(x)| \le h(x)$ *q.t.p. em* $\Omega \ \ \forall j$*, onde* $h \in L^p(\Omega)$*.*

Teorema E.5 *Sejam* H *um espaço de Banach e* $\{u_n\} \subset H$*. Então valem os seguintes:*
(i) $u_n \rightharpoonup u$ *em* H *se, e somente se,* $F(u_n) \to F(u) \ \ \forall F \in H'$*;*
(ii) Se $u_n \rightharpoonup u$ *em* H*, então* $||u|| \le \varliminf_n ||u_n||$*;*
(iii) Se $u_n \rightharpoonup u$ *em* H *e* $f : H \to \mathbb{R}$ *uma função convexa, então* $f(u) \le \varliminf_n f(u_n)$*.*

Teorema E.6 *Sejam* H *um espaço de Banach reflexivo e* $X \subset H$ *um subespaço vetorial fechado. Então* X *(munido da norma induzida por* H*) é reflexivo.*

Teorema E.7 *Seja* H *um espaço de Banach reflexivo. Se* $\{u_n\}$ *é uma seqüência limitada em* H*, então exitem uma subseqüência* $\{u_{n_j}\}$ *de* $\{u_n\}$ *e* $u \in X$ *tais que*

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \text{ em } H.$$

Teorema E.8 *Seja* H *um espaço de Banach uniformemente convexo. Se* $\{u_n\}$ *é uma seqüência limitada em* H *tal que* $u_n \rightharpoonup u$ *em* H *e* $\varlimsup_n ||u_n|| \le ||u||$*. Então*

$$u_n \to u \text{ em } H.$$

Teorema E.9 *Sejam* H *e* V *espaços de Banach, um subconjunto aberto* $U \subset H$ *e* $x,\ z\ \in U$ *tal que o segmento de reta entre* x *e* z *está contida em* U *(que é o segmento* $x + t(z-x)$ *com* $0 \le t \le 1$*. Se* $f : U \to V$ *de classe* C^1*. Então*

$$|f(z) - f(x)| \le |z - x| \sup |f'(v)|,$$

onde o sup *é obtido sobre todo* v *no segmento de reta entre* x *e* z*.*

No que se segue daremos as definições necessárias para enterdermos o enunciado do Princípio do Máximo Forte. Este resultado é muito utilizado quando queremos mostrar que uma solução é estritamente positiva.

Considere o operador diferencial elíptico linear da forma

$$Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u, \quad a^{ij} = a^{ji},$$

onde $x = (x_1, ..., x_n)$ está num domínio Ω do $\mathbb{R}^N$, para $N \geq 2$.

Dizemos que L é elíptico num ponto $x \in \Omega$ se a matriz coeficiente $[a^{ij}(x)]$ é positiva; isto é, se $\alpha(x)$, $A(x)$ denota respectivamente o mínimo e máximo autovalores de $[a^{ij}(x)]$, então

$$0 < \alpha(x)|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq A(x)|\xi|^2$$

para todo $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^N \setminus 0$. Se A/α é limitado em Ω dizemos que L é uniformemente elíptico em Ω.

Teorema E.10 (Princípio do Máximo Forte de Hopf) *Sejam L uniformemente elíptico, $c = 0$ e $Lu \geq 0$ (≤ 0) num domínio Ω (não necessariamente limitado). Então se u atinge seu máximo (mínimo) no interior de Ω, u é uma constante. Se $c \leq 0$ e c/α é limitado, então u não pode atingir um máximo não negativo (mínimo não positivo) no interior de Ω a menos que seja constante.*

Teorema E.11 (Teorema de Brézis-Kato) *Sejam Ω um domínio no $\mathbb{R}^N$ e $g : \Omega \times \mathbb{R}^N$ uma função de Carathéodory tal que para quase todo $x \in \Omega$ vale*

$$|g(x, u)| \leq a(x)(1 + |u|)$$

onde $a \in L^{N/2}_{loc}(\Omega)$. Seja também $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ uma solução fraca de

$$-\Delta u = g(., u) \quad em \quad \Omega.$$

Então $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ para qualquer $p < \infty$. Se $u \in H^1_o(\Omega)$, e $a \in L^{N/2}(\Omega)$, então $u \in L^p(\Omega)$ para qualquer $p < \infty$.

Teorema E.12 *Seja $u(x)$ uma solução de classe C^2 positiva de*

$$-\Delta u + m^2 u = g(u) \text{ em } \mathbb{R}^N,\ N \geq 2,\ m > 0$$

com $u(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$ e g contínua, $g(u) = O(u^\alpha)$, $\alpha > 1$ próximo de $u = 0$. Sob o intervalo $0 \leq s \leq u_o = \max u(x)$, assuma que

$$g(s) = g_1(s) + g_2(s)$$

com g_2 não decrescente e $g_1 \in C^1$ satisfazendo, para algum $C > 0$, $p > 1$,

$$|g_1(u) - g_2(v)| \leq C|u - v|/|log\ min(u,\ v)|^p, \quad 0 \leq u,\ v \leq u_o.$$

Então $u(x)$ é esfericamente simétrica sobre algum ponto do $\mathbb{R}^N$ e $u_r < 0$ para $r > 0$, onde r é a cordenada radial sobre tal ponto. Além disso

$$\lim_{r \to \infty} r^{(N-1)/2} e^r u(r) = \gamma > 0.$$

Bibliografia

[1] ALVES, Claudianor Oliveira, *Existence of positive solutions for a problem with lack of compactness involving the p-Laplacian*. Nonlinear Analysis, num 51, 2002, p. 1187-1206.

[2] BARTLE, Robert G., *The Elements of Real Analysis*. $2^{\underline{a}}$ ed. Wiley, 1975.

[3] BARTLE, Robert G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. Wiley, 1995.

[4] BENCI, Vieri & CERAMI, Giovanna, *Positive Solutions of Some Nonlinear Elliptic Problems in Exterior Domains*. Archive fo Racional Mechanics and Analysis, 1987, p. 283-300

[5] BRÉZIS, Haïm, *Analyse fonctionelle*. $2^{\underline{a}}$ ed. MASSON, 1987.

[6] COSTA, David Goldsteim, *Tópicos em Análise não-Linear e Aplicações às Equações Diferenciais*. CNPq-IMPA, 1986.

[7] DING, W. Y. & NI, W. M. *On the existence of positive entire solutions of a semilinear elliptic equation*. Arch. Rat. Math. Anal. 31, 1986, P. 283-308.

[8] FERNANDES, José de Arimatéia, *Princípios de Minimax e Algumas Aplicações ao Problema de Dirichlet Semilinear*. Dissertação de Mestrado. UnB, 1993.

[9] GIDAS, B., NI, Wei-Ming & NIRENBERG, L., *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^n$. Mathematical Analysis and Applications Part A. vol. 7A, 1981, p. 369-402.

[10] GILBARG, David & TRUNDINGER, Neil S. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag, 1977.

[11] KAVIAN, Otared, *Introduction à la Théorie des Points Critiques.* Springer-Verlag, 1993.

[12] KREYSZIG, Erwin, *Introductory Functional Analysis with Applications.* Wiley, 1989.

[13] LANG, Serge, *Analysis II.* Addison-Wesley, 1969.

[14] LIONS, P. L., *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case.* Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Lineare 1, 1984, p. 109-145 e 223-283.

[15] SOTOMAYOR, Jorge, *Lições de equações diferenciais ordinárias.* Projeto Euclides IMPA, 1979.

[16] STRAUSS, W. A., *Existence of solitary waves in higher dimensions.* Comm. Math. Phys. 55, 1977, p. 149-162.

[17] STRUWE, Michael, *Variational Methods.* Springer-Verlag, 1990.

[18] WILLEM, Michel, *Minimax Theorems.* Birkhäuser, 1996.