Resumo

O estudo do comportamento assintótico de sistemas dissipativos é um campo de pesquisa em Equações Diferenciais Parciais-EDP. Existem na literatura várias técnicas para abordar o comportamento assintótico. Contudo, o objetivo deste trabalho é aplicar a técnica devido ao resultado obtido por Gearhart (ver Z. Liu e S. Zheng [21]) que consiste em explorar as propriedades dissipativas do semigrupo associado ao sistema.

Palavras Chave: Sistemas dissipativos, comportamento assintótico, Teorema de Gearhart.

Abstract

The study of the asymptotic behavior of dissipative systems is an important part of the research of Partial Differential Equations-PDE. Consequently, there are various methods to analize this one. The objective of this work is to apply the a result due to Gearhart (see Z. and S. Liu Zheng [21]) which consits in to explore the dissipation properties of the semigroups associated to dissipative systems.

Keywords: dissipative systems; asymptotic behavior; Theorem Gearhart.

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Comportamento Assintótico de Sistemas Dissipativos

por

Misaelle do Nascimento Oliveira †

sob orientação do

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

O48c Oliveira, Misaelle do Nascimento.
Comportamento assintótico de sistemas dissipativos / Misaelle do Nascimento Oliveira. – Campina Grande, 2015.
117 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2015.

"Orientação: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo".
Referências.

1. sistemas Dissipativos. 2. Comportamento Assintótico. 3. Teorema de Gearhart. I. Lourêdo, Aldo Trajano. II. Título.

CDU517.9(043)

Comportamento Assintótico de Sistemas Dissipativos.

por

Misaelle do Nascimento Oliveira

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Giovana Siracusa Gouveia

Prof. Dr.ª Giovana Siracusa Gouveia-UFS

Manuel Milla M

Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda-UEPB

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo-UEPB

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Agosto/2015

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por mais esta conquista, pois sem seu amparo, não teria alcançado este objetivo.

Agradeço, especialmente, ao amigo e professor Aldo Trajano Lourêdo, pela competente orientação, confiança, dedicação e pela disponibilidade em ajudar sempre com todo carinho.

Aos meus pais, Veralúcia e Genival, pelo constante apoio em todos os momentos em que decidi prosseguir com meus estudos e, principalmente, ao meu filhinho, por ser tão compreensivo, carinhoso e sempre me receber com abraços e sorrisos, na volta para casa.

À minha avó Severina (em memória) que sempre me incentivou, com tanto orgulho.

Aos professores Giovana Siracusa Gouveia, Manuel Antolino Milla Miranda e Severino Horácio da Silva por aceitarem o convite de participarem da conclusão de mais esta etapa na minha jornada universitária.

Aos colegas da UFCG: Bruno, Lêvi, Jammily, Keytt, Erivaldo, Alan Baia, Carlos, Claudemir, Alan Araújo, Michel, Arlandson e Emanuela Régia pelas dúvidas (matemáticas) esclarecidas e pela agradável convivência.

Aos colegas e amigos da Especialização na UEPB: Alex, Diego, Klécio e Rossane, que juntos compartilhamos conhecimentos e uma boa amizade.

Aos colegas e amigos do curso de graduação, por termos compartilhado tantos momentos de dificuldades e, em especial, à Ana Claúdia, que me deu muito apoio em sua casa, além de ter se tornado uma grande amiga, posso dizer, que é a irmã que não tenho.

Ao meu namorado, Jeandro, pela confiança no meu sucesso até mesmo quando eu duvidava, por ser tão presente na minha vida.

Aos professores da pós-graduação da UFCG: Antônio Velásquez, Severino Horácio, Aparecido Jesuíno e Lindoberg, pelos ensinamentos adquiridos durante o mestrado. Em especial ao Professor Marcelo, pela amizade, acolhimento e incentivo.

A Luciano dos Santos, Joselma Soares, Ana Alice Sobreira, Luiz Lima, Thiciany Matsudo, Carlos Eduardo, Roger Ruben e José Joelson, Luis Havelange e Brauner por toda dedicação, competência, pelas valorosas contribuições a minha formação enquanto matemático e por apostarem tanto no meu sucesso.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

Dedicatória

A minha avó (em memória), aos
meus pais, irmãos e meu filho.

Conteúdo

Notação

Para um operador $A : X \longrightarrow Y$, temos as seguintes notações:

- $D(A)$ é o domínio do operador A, que é um subespaço de X;
- $Im(A)$ é a imagem do operador A, que é um subespaço de Y;
- $G(A) = \{(w, Aw) \in X \times Y; w \in D(A)\}$ gráfico de A;
- X^* é o espaço dual de X;
- $\mathcal{L}(X) = \{L : X \longrightarrow X;\ L \, \text{é linear e limitado}\}$;
- $R(\lambda;\, A)$: operador resolvente de A associado à λ;
- $\overline{D(A)} = X$: $D(A)$ é denso em X;
- Ω : aberto limitado em $\mathbb{R}^N$;
- $\mathcal{D}(\Omega)$: espaço das funções teste;
- $D^{'}(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R};\ T$ é uma distribuição$\}$
- Γ: curva do plano complexo.

Introdução

O estudo do comportamento assintótico de sistemas dissipativos é um ramo de pesquisa em Equações Diferenciais Parciais - EDP. Nesse sentido, algumas técnicas analíticas para obter o decaimento foram utilizadas por vários autores.

Nosso trabalho deteve-se ao método introduzido na literatura por Gearhart (ver Z. Liu e S. Zheng [21]), o qual consiste em explorar as propriedades dissipativas do semigrupo associado ao sistema. Nosso objetivo principal é apresentar de forma didática os Teoremas de Huang e Gearhart, aplicando o Teorema de Gearhart a sistemas dissipativos.

A presente dissertação está dividida em três capítulos. No primeiro capítulo, apresentamos conceitos e definições sobre a teoria de semigrupos, bem como, mostramos a existência e unicidade de solução por meio da referida teoria, a qual teve início em meados da década de 40, com os trabalhos de K. Yosida e E. Hille. Vale ressaltar que, diversos outros matemáticos contribuíram para a consolidação desta teoria, dentre eles, destacamos Lumer e Phillips.

No segundo capítulo, enunciamos e mostramos a equivalência entre os Teoremas de Huang e Gearhart, os quais nos dão as condições necessárias e suficientes para um C_0-semigrupo de contrações ser exponencialmente estável. Neste capítulo, demonstramos também o teorema de Gearhat, que foi apresentado em etapas.

No terceiro e último capítulo, utilizamos o método descrito por Gearhart, aplicando-o ao estudo de sistemas dissipativos, a exemplo dos sistemas, Elástico, Termoelástico e Viscoelástico. Neste último, utilizamos a combinação do argumento de contradição com a técnica de multiplicadores, (ver Komornik [9]).

No final, apresentamos os Apêndices, que trazem resultados complementares, que reforçam o entendimento da teoria apresentada.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

O objetivo desta seção é resumir a Teoria de Semigrupo e enunciar e/ou demonstrar os principais resultados utilizados neste trabalho.

1.1 C_0-Semigrupos

Definição 1.1 *Seja X um espaço de Banach. Uma família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares limitados de X, isto é, $S(t) \in \mathcal{L}(X)$, $\forall t \geq 0$, é um* **semigrupo de operadores lineares limitados** *de X se*

(i) S(0)=I, onde I é o operador identidade em $\mathcal{L}(X)$;

(ii) S(t+s)=S(t)S(s), $\forall\ t,\ s \geq 0$.

Definição 1.2 *Dizemos que o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é de* **classe** C_0, *ou* **fortemente contínuo** *se,*

$$\lim_{t\to 0^+} \|(S(t)-I)x\| = 0 \ \ para\ cada\ x \in X.$$

Definição 1.3 *Dizemos que o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é* **uniformemente contínuo** *se*

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t)-I\| = 0.$$

Observação 1.4 *Denotaremos simplesmente por C_0-semigrupo, um semigrupo, $S(t)$, $t \geq 0$, fortemente contínuo.*

Lema 1.1 *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo em X, onde X é um espaço de Banach. Então, existem constantes $M \geq 1$ e $\delta > 0$ tais que, para $0 \leq t \leq \delta$,*

$$\|S(t)\| \leq M.$$

Demonstração: Suponha por absurdo que, dado $\delta > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ existe t_δ, com $0 \leq t_\delta \leq \delta$ tal que

$$\|S(t_\delta)\| > n.$$

Tome $\delta = \dfrac{1}{n}$, temos que existe uma sequência $\{t_n\}$ tal que $t_n \to 0$ quando $n \to +\infty$ e

$$\|S(t_n)\| \longrightarrow +\infty \text{ quando } n \to +\infty,$$

isto é, a sequência

$$\{\|S(t_n)\|\} \text{ é ilimitada.} \tag{1.1}$$

Como $\|S(t_n)\|_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo, segue pela Definição 1.2 que,

$$S(t_n)u \xrightarrow[n\to+\infty]{} u, \quad \text{para cada } \ u \in X,$$

logo,

$$\|S(t_n)u\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|u\|, \quad \text{para cada } \ u \in X.$$

Donde segue que, $\{\|S(t_n)u\|\}$ é uma sequência limitada para cada $u \in X$. Pelo o Teorema $(B.6)$ de Banach-Steinhaus, concluímos que $\{\|S(t_n)\|\}$ é limitada, o que contradiz (1.1). Portanto verifica-se o resultado. ■

Teorema 1.5 *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo em X, sendo X um espaço de Banach. Então, existem $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ tais que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \textit{para todo } \ t \geq 0.$$

Demonstração: Pelo Lema 1.1 existem $M \geq 1$ e $\delta > 0$ tais que, para $0 \leq t \leq \delta$

$$\|S(t)\| \leq M.$$

Sendo a exponencial e^t uma função crescente, temos que, para todo $\omega \geq 0$

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \ \ \forall t \in [0, \delta]\,. \tag{1.2}$$

Agora, para $t > \delta$ considere $\omega = \delta^{-1} \log M$. Note que,

$$\omega = \delta^{-1} \log M \geq 0, \text{ pois } M \geq 1.$$

Daí, sendo $t > \delta$ pelo Algoritmo de Euclides, existem $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \eta < \delta$ tal que $t = n\delta + \eta$. Logo, pela propriedade de semigrupo, obtemos

$$S(t) = S(n\delta + \eta) = S(n\delta)S(\eta) = (S(\delta))^n S(\eta).$$

Pelo Princípio de indução, mostra-se que: $S(n\delta) = (S(\delta))^n$. Logo, passando a norma em X, temos

$$\|S(t)\| = \|(S(\delta))^n S(\eta)\| \leq \|(S(\delta))^n\|\|S(\eta)\| \leq \|S(\delta)\|^n\|S(\eta)\| \leq M^n M,$$

o que implica

$$\|S(t)\| \leq M^n M. \tag{1.3}$$

Como consideramos $\omega = \delta^{-1}\log M$ temos $\delta\omega = \delta\delta^{-1}\log M$ e multiplicando a igualdade resultante por n, temos

$$n\delta\omega = n\log M = \log M^n,$$

portanto,

$$\omega t = \omega(n\delta + \eta) = n\delta\omega + \omega\eta \geq n\delta\omega = \log M^n.$$

Aplicando a exponencial na desigualdade acima, obtemos

$$e^{\omega t} \geq e^{\log M^n} \;\Rightarrow\; e^{\omega t} \geq M^n. \tag{1.4}$$

De (1.3) e (1.4), obtemos

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \;\; \forall t > \delta. \tag{1.5}$$

Portanto, de (1.2) e (1.5) temos

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \;\; \forall\, t \geq 0.$$

■

Corolário 1.6 *Se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo então, para cada $u \in X$ a aplicação*

$$\begin{aligned} S : [0,\infty) &\longrightarrow \mathcal{L}(X) \\ t &\longmapsto S(t) : X \longrightarrow X \\ &\qquad\qquad\quad u \longmapsto S(t)u. \end{aligned}$$

é contínua. Isto é, para $u \in X$

$$S(\cdot)u \in C\left([0,\infty); X\right).$$

Demonstração: Ver Pazy [14]. ■

Definição 1.7 *Dizemos que um C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é* **uniformemente limitado** *quando $\|S(t)\| \leq M$ e se $\|S(t)\| \leq 1$, dizemos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um* **semigrupo de contração**.

Lema 1.2 *Para cada $u \in X$ e $h \geq 0$*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)u \, d\tau = S(t)u.$$

Demonstração: Note que

$$\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)u \, d\tau - S(t)u \right\| \leq \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \big(S(\tau)u - S(t)u\big) \, d\tau \right\|.$$

Sendo $S(\cdot)u$ contínua, pelo Teorema $(B.7)$, obtemos

$$\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)u \, d\tau - S(t)u \right\| \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|S(\tau)u - S(t)u\| \, d\tau$$

e, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = h > 0$ tal que

$$\big\|S(\tau)u - S(t)u\big\| < \epsilon, \text{ sempre que } |\tau - t| < h.$$

Assim, tomando h suficientemente pequeno, temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)u \, d\tau - S(t)u \right\| &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|S(\tau)u - S(t)u\| \, d\tau \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \epsilon \, d\tau = \frac{1}{h}\epsilon \int_t^{t+h} d\tau = \\ &= \frac{1}{h}\epsilon \, h = \epsilon. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)u \, d\tau \longrightarrow S(t)u \text{ quando } h \to 0^+.$$

■

Definição 1.8 *Seja $\big\{S(t)\big\}_{t \geq 0}$ um C_0-semigrupo em X. O* **gerador infinitesimal do semigrupo** *é um operador linear $A: D(A) \longrightarrow X$, definido em*

$$D(A) = \left\{ u \in X; \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \textit{ existe} \right\}$$

onde

$$Au = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t}, \; u \in D(A).$$

Teorema 1.9 *Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0-semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então,*

(i) Para cada $u \in X$, $\int_0^t S(\tau)u \, d\tau \in D(A)$ e

$$A\left(\int_0^t S(\tau)u \, d\tau \right) = S(t)u - u;$$

(ii) Para cada $u \in D(A)$,

$$S(t)u - S(s)u = \int_s^t S(\tau)A(u)\,d\tau = \int_s^t AS(\tau)(u)\,d\tau.$$

Demonstração: Ver Pazy [14]. ∎

Proposição 1.10 *Um operador fechado com domínio denso é o gerador infinitesimal de, no máximo, um C_0-semigrupo.*

Demonstração: Ver Gomes [6]. ∎

Teorema 1.11 *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo então, A é um operador linear fechado e $\overline{D(A)} = X$.*

Demonstração: Ver Pazy [14]. ∎

Teorema 1.12 *Sejam $\{S_1(t)\}_{t\geq 0}$ e $\{S_2(t)\}_{t\geq 0}$ dois C_0-semigrupos com o mesmo gerador infinitesimal A, então $\{S_1(t)\}$ e $\{S_2(t)\}$ são idênticos.*

Demonstração: Ver Pazy [14]. ∎

Teorema 1.13 *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo. Se A é o seu gerador infinitesimal de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ e $u \in D(A)$. Então,*

$$S(\cdot)u \in C\left([0,\, \infty);\, D(A)\right) \cap C^1\left([0,\, \infty);\, X\right)$$

e

$$\frac{d}{dt}\big(S(t)u\big) \;=\; AS(t)u \;=\; S(t)Au.$$

Demonstração: Dado $u \in D(A)$ arbitrariamente, segue pela definição de gerador que

$$\frac{S(h)u - u}{h} \longrightarrow Au \;\text{ quando } h \to 0^+.$$

Daí,

$$\frac{S(h)S(t)u - S(t)u}{h} = \frac{S(t)S(h)u - S(t)u}{h} = S(t)\left(\frac{S(h)u - u}{h}\right) \xrightarrow[h\to 0^+]{} S(t)Au.$$

Logo,

$$S(t)u \in D(A) \;\text{ com }\; S(t)Au = AS(t)u. \tag{1.6}$$

Mas,

$$AS(t)u = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)S(t)u - S(t)u}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(t+h)u - S(t)u}{h} = \frac{d^+}{dt}S(t)u. \tag{1.7}$$

Agora temos que mostrar que a derivada à esquerda de $S(t)u$ existe e é igual a $AS(t)u$. Note que, para $h \in [0,t]$

$$\begin{aligned} S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h}\right) &= \frac{S(t-h)S(h)u - S(t-h)u}{h} = \\ &= \frac{S(t)u - S(t-h)u}{h}, \end{aligned}$$

o que implica,

$$\frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} - S(t)Au = S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h}\right) - S(t)Au.$$

Somando e subtraindo $S(t-h)Au$ no lado direito da igualdade acima, obtemos

$$S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h} - Au\right) + \big(S(t-h) - S(t)\big)Au. \tag{1.8}$$

Como,

$$\left\|S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h} - Au\right)\right\| \leq \|S(t-h)\| \left\|\frac{S(h)u-u}{h} - Au\right\|$$

e $u \in D(A)$, segue da limitação de $S(t-h)$, que

$$\left\|S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h} - Au\right)\right\| \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0\,. \tag{1.9}$$

Por outro lado, da continuidade forte de $S(\cdot)u$, temos por (1.8) que

$$\|(S(t-h) - S(t))\, Au\| \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0\,. \tag{1.10}$$

Por, (1.8), (1.9) e (1.10) obtemos

$$\left\|\frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} - S(t)Au\right\| \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0\,,$$

isto é, a derivada à esquerda de $S(t)u$

$$\frac{d^-}{dt}S(t)u = S(t)Au. \tag{1.11}$$

Segue de (1.6), (1.7) e (1.11) que

$$\frac{d}{dt}(S(t)u) = S(t)Au = AS(t)u.$$

Pelo Corolário (1.6), temos

$$\frac{d}{dt}\big(S(\cdot)u\big) = S(\cdot)Au \in C\left([0,\infty);\, X\right),$$

daí,

$$S(\cdot)u \in C^1([0,\infty);X).$$

Já vimos que, $S(\cdot)u \in D(A)$ quando $u \in D(A)$. Assim, considerando $D(A)$ com a norma do gráfico dada por

$$\|u\|_{D(A)} = \|u\|_X + \|Au\|_X$$

temos que

$$S(\cdot)u \in C([0,\,\infty);D(A)), \tag{1.12}$$

pois, dado $t \in [0,\infty)$ e $\{t_n\} \subset [0,\infty)$ com

$$t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} t \quad \text{em } [0,\,\infty),$$

obtemos,

$$\|S(t_n)u - S(t)u\|_{D(A)} = \|S(t_n)u - S(t)u\|_X + \|AS(t_n)u - AS(t)u\|_X\,.$$

Pelo Corolário 1.6, resulta

$$\|S(t_n)u - S(t)u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

e, portanto,

$$\|AS(t_n)u - AS(t)u\| = \|S(t_n)Au - S(t)Au\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Logo,

$$\|S(t_n)u - S(t)u\|_{D(A)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,,$$

o que mostra (1.12). Portanto,

$$S(\cdot)u \in C^1([0,\,\infty);\,X) \cap C([0,\,\infty);\,D(A))\,.$$

$\blacksquare$

Vamos considerar agora, o seguinte Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad t \geq 0 \\ \quad u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.13}$$

Como consequência do Teorema 1.13 e usando o resultado a seguir, mostraremos a *existência e unicidade de solução clássica* para o PVI (1.13). Antes, porém, temos a seguinte definição:

Definição 1.14 *Dizemos que uma função $u \in X$ é solução clássica de* (1.13) *quando*

$$u \in C^1\left([0,\, \infty);\, X\right) \cap C\left([0,\, \infty);\, D(A)\right)$$

e u verifica (1.13).

Corolário 1.15 *Se A é o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo $\big\{S(t)\big\}_{t\geq 0}$, então para todo $u_0 \in D(A)$,*

$$u(t) = S(t)u_0$$

é a única solução do PVI (1.13).

Demonstração: Seja $u(t) = S(t)u_0$, para cada $u_0 \in D(A)$, daí,

$$\frac{d}{dt}u(t) = \frac{d}{dt}(S(t)u_0) = AS(t)u_0, \;\; \forall u_0 \in D(A)$$

logo, segue do Teorema 1.13 que $u(t) = S(t)u_0$ é solução de (1.13).

A seguir, mostraremos que tal função é a única solução. De fato, suponha que $w(t)$ é solução do PVI (1.13). Defina,

$$v(s) = S(t-s)w(s).$$

Mostraremos que

$$\frac{d}{ds}v(s) = \frac{d}{ds}\big(S(t-s)w(s)\big) = -AS(t-s)w(s) + AS(t-s)w(s) = 0. \tag{1.14}$$

De onde concluímos que v é constante. Agora, note que

$$v(t) = S(t-t)w(t) = S(0)w(t) = w(t)$$

e

$$v(0) = S(t-0)w(0) = S(t)w(0) = S(t)u_0,$$

pois, w é solução do PVI (1.13). Sendo v constante, concluímos que

$$w(t) = S(t)u_0 = u(t).$$

Na sequência, justificamos a igualdade em (1.14).

Observe que,

$$\frac{d}{ds}v(s) = \lim_{h\to 0}\frac{v(s+h) - v(s)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{S\big(t-(s+h)\big)w(s+h) - S(t-s)w(s)}{h}.$$

Assim,

$$\frac{d}{ds}v(s) = \lim_{h\to 0}\frac{S(t-s-h)w(s+h) - S(t-s)w(s+h) + S(t-s)w(s+h) - S(t-s)w(s)}{h},$$

isto é,

$$\frac{d}{ds}v(s) = \lim_{h\to 0}\frac{\left[S(t-s-h) - S(t-s)\right]w(s+h) + S(t-s)\left[w(s+h) - w(s)\right]}{h}. \quad (1.15)$$

Agora, observe que:

(i) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{S(t-s)\left[w(s+h)-w(s)\right]}{h} = AS(t-s)w(s).$

Com efeito,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{S(t-s)\big[w(s+h)-w(s)\big]}{h} &= S(t-s)\left(\lim_{h\to 0}\frac{w(s+h)-w(s)}{h}\right) = \\ &= S(t-s)\frac{d}{ds}w(s) = S(t-s)Aw(s),\end{aligned}$$

o que implica

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(t-s)\big[w(s+h)-w(s)\big]}{h} = S(t-s)Aw(s) = AS(t-s)w(s).$$

(ii) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\big[S(t-s-h)-S(t-s)\big]w(s+h)}{h} = -AS(t-s)w(s).$

De fato,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\big[S(t-s-h)-S(t-s)\big]w(s+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\big[S(t-s-h)-S(t-s-h+h)\big]w(s+h)}{h}.$$

Pela propriedade de semigrupo, obtemos

$$\lim_{h\to 0}\frac{\big[S(t-s-h)-S(t-s)\big]w(s+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{S(t-s-h)\big[I-S(h)\big]w(s+h)}{h}.$$

Logo,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\big[S(t-s-h)-S(t-s)\big]w(s+h)}{h} = -\lim_{h\to 0}S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)w(s+h). \quad (1.16)$$

Note que,

$$\left\|S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)w(s+h)-AS(t-s)w(s)\right\| \leq$$

$$\leq \underbrace{\left\|S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)w(s+h)-S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)w(s)\right\|}_{N_1}+$$

$$+\underbrace{\left\|S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)w(s)-S(t-s-h)Aw(s)\right\|}_{N_2}+$$

$$+\underbrace{\left\|S(t-s-h)Aw(s)-S(t-s)Aw(s)\right\|}_{N_3}.$$

Afirmação 1: quando $h \to 0$ temos:

1. $N_1 \longrightarrow 0$;

2. $N_2 \longrightarrow 0$;

3. $N_3 \longrightarrow 0$.

Prova de (1): Sendo $S(t-s-\cdot)$ limitado, temos

$$\begin{aligned} N_1 &= \left\|S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)(w(s+h)-w(s))\right\|_X \leq \\ &\leq c_1\left\|\left(\frac{S(h)-I}{h}\big(w(s+h)-w(s)\big)\right)\right\|_X \end{aligned}$$

logo, somando e subtraindo $S(h)w'(s)$ e $w'(s)$ obtemos

$$\begin{aligned} N_1 &\leq c_1\left[\left\|S(h)\left(\frac{w(s+h)-w(s)}{h}\right)-S(h)w'(s)\right\|+\right. \\ &+ \left\|S(h)w'(s)-w'(s)\right\|+ \\ &+ \left.\left\|w'(s)-\frac{w(s+h)-w(s)}{h}\right\|\right] \end{aligned}$$

de onde segue

$$\begin{aligned} N_1 &\leq c_2\left\|w'(s)-\frac{w(s+h)-w(s)}{h}\right\|+ \\ &+ c_1\left\|S(h)w'(s)-w'(s)\right\|+ \\ &+ c_1\left\|w'(s)-\frac{w(s+h)-w(s)}{h}\right\|. \end{aligned}$$

Pela diferenciabilidade de w e continuidade de $S(\cdot)w'(s)$, verifica-se **(1)**.

Prova de (2): Como $S(\cdot)$ é limitado, existe $c_1 > 0$ tal que

$$N_2 \leq c_1 \left\| \left(\frac{S(h) - I}{h} \right) w(s) - Aw(s) \right\|.$$

Logo, passando ao limite, pela definição de gerador obtemos

$$\left(\frac{S(h) - I}{h} \right) w(s) \longrightarrow Aw(s),$$

de onde segue que, $w(s) \in D(A)$ e $N_2 \longrightarrow 0$.

Prova de (3): Segue da continuidade forte da função

$$S(t - s - \cdot)Aw(s).$$

Portanto, de acordo com a Afirmação 1,

$$\left\| S(t-s-h) \left(\frac{S(h) - I}{h} \right) w(s+h) - AS(t-s)w(s) \right\| \xrightarrow[h \to 0]{} 0\ . \tag{1.17}$$

De (1.16) e (1.17) verifica-se **(ii)**.

Por (1.15) e por **(i) (ii)**, (1.14) está provado. ∎

1.2 Teorema de Hille-Yosida

Definição 1.16 *Seja A um operador em um espaço de Banach X. Denominaremos o conjunto resolvente $\rho(A)$, de A por*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\},$$

onde

$$\mathcal{L}(X) = \{\, L : X \to X;\ \textit{é linear e contínuo}\}.$$

Definição 1.17 *Denominaremos de espectro de A o conjunto*

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A).$$

Observação 1.18 *Representamos a família $R(\lambda; A)$ por*

$$R(\lambda; A) = \{(\lambda I - A)^{-1};\ \lambda \in \rho(A)\ \textit{e}\ (\lambda I - A)^{-1}\ \textit{limitado}\},$$

onde, $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$ é dito o **operador resolvente** *de A associado a λ, sendo λ real ou complexo.*

Teorema 1.19 *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações $\{S(t)\}$, $t \geq 0$, então $(\lambda I - A)$ é invertível para todo $\lambda > 0$ e*

$$(\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda; A).$$

Ademais, para cada $\lambda > 0$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração: Ver Pazy [14]. ■

Definição 1.20 *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Pondo $A_0 = I$, $A_1 = A$ e supondo que A_{k-1} esteja definido, vamos definir A_k por*

$$D(A_k) = \{x \in D(A_{k-1}) : A_{k-1}x \in D(A)\},$$

$$A_k x = A(A_{k-1}x), \ \forall x \in D(A_k).$$

Proposição 1.21 *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo e A o seu gerador infinitesimal. Se $D(A_k)$ é o domínio do operador A_k, então $\cap D(A_k)$, $\forall k$ é denso em X.*

Demonstração: Ver Pazy [14]. ■

Teorema 1.22 (Hille-Yosida) *Um operador linear A, sobre um espaço de Banach X, é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações se, e somente se,*

(i) A é fechado e $\overline{D(A)} = X$;

(ii) O conjunto resolvente $\rho(A)$ contém $\mathbb{R}^+$ e para todo $\lambda > 0$, temos

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração: Ver Pazy [14]. ■

1.3 Teorema de Lumer-Phillips

Nesta seção, vamos enunciar e demonstrar o importante resultado devido a Lumer-Phillips.

Definição 1.23 *Seja X um espaço de Banach, X^* o dual de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X^*. Para cada $x \in X$, definimos*

$$J(x) = \{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Pelo Teorema de Hanh-Banach, $J(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in X$.

Definição 1.24 *Uma* **aplicação dualidade** *é uma aplicação* $j : X \longrightarrow X^*$ *tal que* $j(x) \in J(x)$, $\forall x \in X$, *além disso*

$$\|j(x)\| = \|x\|.$$

Definição 1.25 *Dizemos que o operador* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *é* **maximal** *se*

$$Im(I+A) = X,$$

isto é, para toda $f \in X$, *existe* $u \in D(A)$ *tal que* $(I + A)u = f$.

Definição 1.26 *Dizemos que o operador linear* $A : D(A) \subset X \to X$ *é* **dissipativo** *se, para alguma aplicação dualidade,* j

$$Re\langle Ax, j(x)\rangle \leq 0, \quad \forall x \in D(A).$$

Se, além disso, existir $\lambda > 0$, *tal que* $Im(\lambda I - A) = X$, *então dizemos que* A *é* **maximal dissipativo** *ou* m-**dissipativo**.

Proposição 1.27 *Se* A *é dissipativo, então*

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|, \quad \forall \lambda > 0 \text{ e } \forall\, x \in D(A). \tag{1.18}$$

Demonstração: Ver Gomes [6] ■

Proposição 1.28 *Se* A *é m-dissipativo e* $Im(\lambda_0 I - A) = X$, $\lambda_0 > 0$, *então:*

(i) $\lambda_0 \in \rho(A)$ *e* A *é fechado;*

(ii) $(0, \infty) \subset \rho(A)$;

(iii) $Im(\lambda I - A) = X$, $\forall \lambda > 0$.

Demonstração: Ver Gomes [6]. ■

Observação 1.29 *Se* X *é um espaço de Hilbert, então dizemos que* $A : D(A) \subset X \to X$ *é dissipativo se*

$$Re\langle Ax, x\rangle \leq 0, \quad \forall x \in D(A).$$

Lema 1.3 *Seja* $B : X \longrightarrow X$ *um operador linear e contínuo com inversa contínua. Seja* $S \in \mathcal{L}(X)$ *tal que*

$$\|S\| < \frac{1}{\|B^{-1}\|}.$$

Então, $B + S$ *é um operador linear contínuo e invertível.*

Demonstração: Vamos mostrar que $B + S$ é bijetora.

(i) $B+S$ é sobrejetora. Com efeito, tomemos $w \in X$ e denotemos por P a aplicação

$$P(v) = B^{-1}w - B^{-1}Sv.$$

Pelas hipóteses, P é um operador linear e limitado. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|P(v) - P(u)\| &= \|B^{-1}w - B^{-1}Sv - (B^{-1}w - B^{-1}Su)\| \\
&= \|-B^{-1}Sv + B^{-1}Su\| \\
&= \|-(B^{-1}Sv - B^{-1}Su)\| \\
&= \|B^{-1}Sv - B^{-1}Su\| \\
&= \|B^{-1}(Sv - Su)\| \\
&\leq \|B^{-1}\|\|Sv - Su\| \\
&\leq \underbrace{\|B^{-1}\|\|S\|}_{:=\alpha}\|v - u\| \\
&\leq \alpha\|v - u\|, \qquad (1.19)
\end{aligned}$$

onde $\alpha < 1$. Pelo Teorema do ponto fixo[1], segue que existe um único ponto x satisfazendo

$$P(x) = x.$$

Isto é,

$$P(x) = B^{-1}w - B^{-1}Sx = x.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
B(x) &= B(B^{-1}w - B^{-1}Sx) \\
&= w - S(x).
\end{aligned}$$

Portanto, para cada $w \in X$ existe uma única solução x do problema

$$(B + S)(x) = w.$$

Logo, $B+S$ é sobrejetora.

(ii) $B+S$ é injetora. De fato, se $(B+S)(x) = 0$ então

[1] Ver Apêndice B.

$$(B+S)(x) = B(x) + S(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad B(x) = -S(x) \quad \Rightarrow \quad x \, = \, B^{-1}S(x).$$

Tomando a norma de x, temos

$$\begin{aligned} \|x\| \;&=\; \|B^{-1}S(x)\| \,\leq\, \|B^{-1}\|\|S(x)\| \\ &\leq\; \|B^{-1}\|\|S\|\|x\| \,\leq\, \alpha\|x\|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|x\| \leq \alpha\|x\| \;\text{ implica }\; \alpha \geq 1.$$

Como $\alpha < 1$, a desigualdade acima só é satisfeita se $x = 0$. Logo, $B+S$ é injetora e portanto, bijetora. Desde que $B+S$ é contínuo, pelo Teorema do Gráfico Fechado, (ver, Teorema $B.5$) temos que a inversa do operador $B+S$ é também contínuo. ∎

Observação 1.30 *Escrevemos $A \in G(M,\omega)$ para indicar que o operador A, é o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ tal que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \;\; M \geq 1 \text{ e } \omega \geq 0.$$

Em particular, tomando $M = 1$ e $\omega = 0$, temos que, $A \in G(1,0)$ denota que A gera o C_0-semigrupo de contrações.

Teorema 1.31 (Lumer-Phillips) *$A \in G(1,0)$ se, e somente se, A é m-dissipativo e densamente definido.*

Demonstração: Se $A \in G(1,0)$ então, pelo Teorema 1.22 de Hille-Yosida, A é fechado, densamente definido e $(0,\infty) \subset \rho(A)$, de onde $Im(\lambda I - A) = X$, $\forall \lambda > 0$. Além disto, para cada aplicação dualidade, j, tem-se

$$\begin{aligned} Re\langle S(t)x,\, j(x)\rangle \leq |\langle S(t)x,\, j(x)\rangle| \;\;&\leq\;\; \|S(t)x\| \cdot \underbrace{\|j(x)\|}_{=\|x\|} \leq \\ &\leq\;\; \|S(t)\|\|x\| \cdot \|x\| \leq \|x\|^2 \end{aligned}$$

pois, por hipótese, $\{S(t)\}$ é um C_0-semigrupo de contração. Portanto,

$$Re\langle S(t)x - x,\, j(x)\rangle = Re\langle S(t)x,\, j(x)\rangle - \|x\|^2 \leq 0,$$

donde, dividindo por t e passando ao limite quando $t \to 0$, obtemos

$$Re\langle Ax, j(x)\rangle \leq 0, \;\; \forall\, x \in D(A).$$

Logo, A é dissipativo. Daí e, por ser $Im(\lambda I - A) = X$, concluímos que, A é m-dissipativo.

Por outro lado, se A é m-dissipativo, então, pela Proposição 1.28, A é fechado, $(0, \infty) \subset \rho(A)$ e, por (1.18)

$$\|x\| = \|(\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1}x\| \geq \lambda \|(\lambda - A)^{-1}x\|$$

ou seja,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}x\| \leq \Big(\frac{1}{\lambda}\Big)\|x\|, \ \ \forall\, x \in X \text{ e } \forall\, \lambda > 0.$$

Logo,

$$\big\|R(\lambda; A)\big\| \leq \frac{1}{\lambda}, \ \ \forall\, \lambda > 0$$

e, portanto, pelo Teorema 1.22, $A \in G(1, 0)$. ■

Proposição 1.32 (Liu-Zheng) *Seja $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ um operador linear e $\overline{D(A)} = H$, onde H é um espaço de Hilbert. Se A é dissipativo e $0 \in \rho(A)$ então A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contração de H.*

Demonstração: Sendo $0 \in \rho(A)$ então $(0I - A)$ é invertível e limitado. Logo,

$$A^{-1} \in \mathcal{L}(H).$$

Daí, vamos mostrar que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$;

(**a**) $$\lambda I - A = A(\lambda A^{-1} - I) \ \text{ é invertível,}$$

desde que,

(**b**) $$0 < \lambda < \|A^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(H)}.$$

De fato, como A é invertível, pelo Lema 1.3, tomando $B = -I$ e $S = \lambda A^{-1}$, para $|\lambda| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$, temos que $(\lambda A^{-1} - I)$ é invertível. E, como a composição de operadores invertíveis é invertível, a partir de **(a)** tem-se $(\lambda I - A)$ invertível. Usando a Série de Neumann para operadores $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} T^j = \frac{1}{I - T}$, se $\|T\| < 1$, segue que

$$\begin{aligned}
(\lambda I - A)^{-1} &= [A(\lambda A^{-1} - I)]^{-1} = (\lambda A^{-1} - I)^{-1}A^{-1} = \\
&= A^{-1}(\lambda A^{-1} - I)^{-1} = A^{-1}\frac{1}{(\lambda A^{-1} - I)} = \\
&= -A^{-1}\frac{1}{(I - \lambda A^{-1})} = \\
&= -A^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda A^{-1})^j, \quad \text{se } \ 0 < \|\lambda A^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < 1.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|(\lambda I - A)^{-1}\| &= \| - A^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda A^{-1})^j\| \\
&\leq \|A^{-1}\|\|\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda A^{-1})^j\| \\
&\leq \|A^{-1}\|\sum_{j=0}^{\infty}\|(\lambda A^{-1})^j\| \\
&\leq \|A^{-1}\|\sum_{j=0}^{\infty}\|(\lambda A^{-1})\|^j, \quad \text{se} \ \ 0 < \|\lambda A^{-1}\| < 1 \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H) \quad \text{desde que} \quad 0 < \|\lambda A^{-1}\| < 1.$$

Note que,

$$0 < \|\lambda A^{-1}\| < 1 \ \Leftrightarrow \ 0 < \|A^{-1}\| < \frac{1}{|\lambda|}, \ \ \text{para} \ \ \lambda \neq 0.$$

Assim, se $\lambda > 0$ tem-se

$$0 < \lambda\|A^{-1}\| < 1 \ \Leftrightarrow \ 0 < \lambda < \|A^{-1}\|^{-1}.$$

No caso em que $\lambda \in \mathbb{R}^*$, teríamos

$$0 < |\lambda| < \|A^{-1}\|^{-1}. \tag{1.21}$$

Deste modo, como $\overline{D(A)} = H$, A é dissipativo e $(\lambda I - A)$ é bijetivo sob a condição (1.21), então pelo Teorema de Lumer-Phillips, A é o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo de contração. ∎

Teorema 1.33 *Seja X um espaço normado completo e A um operador fechado não limitado e sobrejetor de X. Se o domínio de A tem imersão compacta em X, então a inversa de A é um operador compacto.*

Demonstração: Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$. A inversa de A está definida em todo X, com valores em $D(A)$, isto é,

$$A^{-1} : X \longrightarrow D(A).$$

Como a imersão i_A

$$i_A : D(A) \longrightarrow X$$

é compacta, temos que a aplicação

$$A^{-1} = A^{-1} \circ i_A : X \longrightarrow X$$

é compacta, o que demonstra o teorema. ■

1.4 Semigrupo Analítico

Nesta seção, apresentamos o conceito de semigrupo analítico e também veremos as suas principais propriedades.

No que segue, denotaremos por $\triangle(\alpha)$ o setor do plano complexo definido por

$$\triangle(\alpha) = \big\{ z \in \mathbb{C} \,:\, z \neq 0,\ |argz| < \alpha,\ 0 < \alpha \leq \pi \big\}.$$

Definição 1.34 *Seja* $S : \triangle(\alpha) \cup \{0\} \longrightarrow \mathcal{L}(X)$, *onde* $0 < \alpha \leq \pi/2$. *Dizemos que uma família de operadores lineares limitados* $\{S(z)\}_{z \in \triangle(\alpha) \cup \{0\}}$ *em* $\mathcal{L}(X)$ *é um* **semigrupo analítico de classe** C_0 *em* $\triangle(\alpha)$, *se:*

(i) $S(0) = I$;

(ii) $S(z_1 + z_2) = S(z_1) \circ S(z_2), \ \ \forall z_1,\, z_2 \in \triangle(\alpha)$;

(iii) $\lim\limits_{z \to 0} S(z)x = x, \ \ \forall x \in X,\ z \in \triangle(\alpha - \epsilon),\ 0 < \epsilon < \alpha$;

(iv) S *é analítico no setor* $\triangle(\alpha)$. *Isto é, para cada* $z_0 \in \triangle(\alpha)$ *o limite*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0}$$

existe em $\mathcal{L}(X)$.

Observação 1.35 *Todo* C_0*-semigrupo analítico restrito ao eixo real não-negativo é, claramente, um* C_0*-semigrupo diferenciável que satisfaz uma condição adicional que será estudada a seguir.*

Teorema 1.36 *Seja* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *o gerador infinitesimal de um* C_0*-semigrupo* $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. *Este semigrupo admite uma extensão analítica, de classe* C_0, *em um setor* $\triangle(\alpha)$, *para algum* α *tal que* $0 < \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$ *se, e somente se,* $\{S(t)\}$ *é um semigrupo diferenciável e satisfaz a condição*

$$\|tAS(t)\| \leq N, \quad 0 < t \leq 1. \tag{1.22}$$

Demonstração: Ver Gomes [6] ■

Corolário 1.37 *Se S é um C_0-semigrupo diferenciável, e*

$$\limsup_{t\to 0^+} t\|AS(t)\| < e^{-1},$$

então A é um operador linear limitado e S admite uma extensão analítica em todo o plano complexo.

Demonstração: Ver Gomes [6] ■

Observação 1.38 *Como consequência deste corolário, resulta que, se o gerador infinitesimal, A, de um semigrupo analítico de classe C_0 é não limitado, então*

$$\limsup_{t\to 0^+} t\|AS(t)\| \geq \frac{1}{e}.$$

Definição 1.39 *Seja A um operador linear de X. Dizemos que A é de classe (θ, M), onde $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ e $M > 0$, e escrevemos $A \in (\theta, M)$ quando*

(i) *A é fechado e densamente definido em X;*

(ii) $\triangle(\theta) \subset \rho(A)$;

(iii) $\|R(\lambda, A)\| \leq \dfrac{M}{|\lambda|}, \;\; \forall \lambda \in \triangle(\theta).$

Seja A um operador linear em (θ, M), $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon < 2\epsilon < \theta - \frac{\pi}{2}$ e Γ a curva do plano complexo composta dos arcos $re^{i(\theta-\epsilon)}$ e $re^{-i(\theta-\epsilon)}$, $1 \leq r < \infty$ e dos segmentos que ligam os pontos $e^{i(\theta-\epsilon)}$ e $e^{-i(\theta-\epsilon)}$ ao ponto $(1,0)$, orientada de $-\infty e^{-i(\theta-\epsilon)}$ para $+\infty e^{i(\theta-\epsilon)}$, com $\lambda_r = \{re^{i(\theta-\epsilon)} : \; r \in [1,\infty)\}$ e $\overline{\lambda_r} = \{re^{-i(\theta-\epsilon)} : \; r \in [1,\infty)\}$.

Por (ii) da Definição (1.39), a função

$$e^{\lambda z} R(\lambda; A) : \rho(A) \longrightarrow \mathcal{L}(X),$$

com

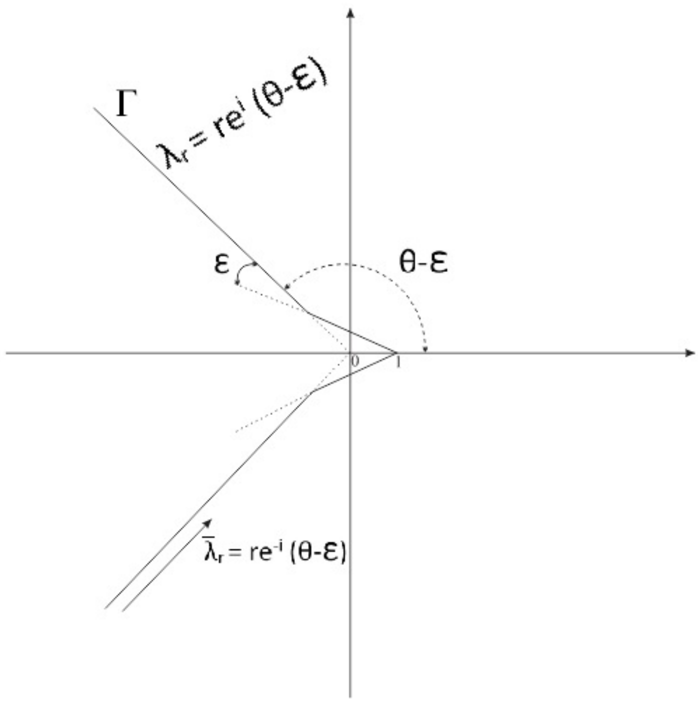
$$z \in \triangle(\alpha) = \{z \in \mathbb{C};\; z \neq 0,\; |arg\, z| < \alpha,\; \alpha = \theta - \frac{\pi}{2} - 2\epsilon\},$$

toma seus valores em $\mathcal{L}(X)$ e é contínua sobre Γ. Logo, se $\Gamma_r = \{\lambda \in \Gamma;\; |\lambda| \leq r;\; r \geq 1\}$, a integral

$$S_r(z) = \int_{\Gamma_r} e^{\lambda z} R(\lambda, A)\, d\lambda, \quad z \in \triangle(\alpha),$$

pertence a $\mathcal{L}(X)$. Além disto, como $\frac{\pi}{2} + \epsilon < arg\lambda z < \frac{3\pi}{2} - \epsilon$, $\lambda \in \Gamma$, $|\lambda| \geq 1$ e $z \in \triangle(\alpha)$, por (iii) da Definição (1.39) a estimativa

$$\left\|e^{\lambda z} R(\lambda, A)\right\| = \left|e^{\lambda z}\right| \left\|R(\lambda, A)\right\| \leq e^{Re\lambda z} \frac{M}{|\lambda|}, \;\; |\lambda| \geq 1,$$



mostra que, para cada $z \in \triangle(\alpha)$, a integral de Dunford-Taylor

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda, A)\, d\lambda, \tag{1.23}$$

converge absolutamente e, assim, define um operador linear limitado, $S(z)$ em X.

Vamos mostrar que S é um semigrupo analítico de classe C_0. Para tanto, estudamos os lemas a seguir.

Lema 1.4 *Se $z \in \triangle(\alpha)$ então:*

(i) $\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda}\, dz = 0,\ \forall\, \lambda'$ *situado à direita de* Γ;

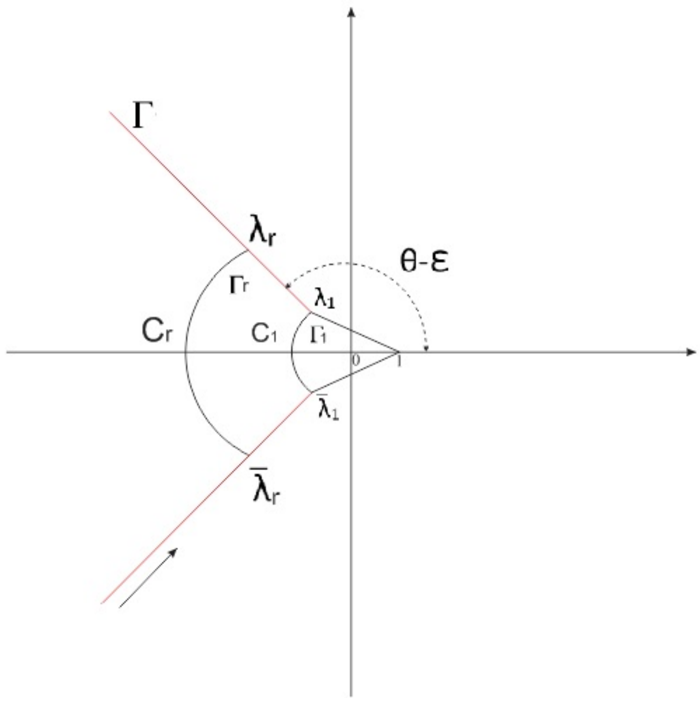
(ii) $\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda}\, d\lambda = 2\pi i$;

(iii) $\displaystyle\int_{\Gamma} e^{\lambda z}\, d\lambda = 0$;

(iv) $\displaystyle\int_{\Gamma} R(\lambda;\, A)\frac{d\lambda}{\lambda} = 0$;

(v) $\displaystyle\int_{|z|\Gamma} e^{\lambda\xi} R\left(\frac{\lambda}{|z|}; A\right)\frac{d\lambda}{|z|} = \int_{\Gamma} e^{\lambda\xi} R\left(\frac{\lambda}{|z|}; A\right)\frac{d\lambda}{|z|},$ *onde* $\xi = \dfrac{z}{|z|}$.

Demonstração: (i) Sejam $\lambda_r = re^{i(\theta-\epsilon)}$ e $\overline{\lambda}_r = re^{-i(\theta-\epsilon)}$ para cada $r \geq 1$. Portanto, λ_r e $\overline{\lambda}_r$ são os extremos do arco $\Gamma_r = \{\lambda \in \Gamma;\ |\lambda| \leq r\}$.



Seja C_r, $r \geq 1$, o arco de circunferência de centro na origem, raio r, situado à esquerda de Γ e de extremos λ_r e $\overline{\lambda}_r$. Uma vez que, a função $\dfrac{e^{\lambda z}}{(\lambda' - \lambda)}$ é analítica sobre Γ e na região situada à esquerda de Γ, pelo Teorema de Cauchy, tem-se

$$\int_{\Gamma_r \cup C_r} \frac{e^{\lambda z}}{(\lambda' - \lambda)}\, d\lambda = \int_{\Gamma_r} \frac{e^{\lambda z}}{(\lambda' - \lambda)}\, d\lambda + \int_{C_r} \frac{e^{\lambda z}}{(\lambda' - \lambda)}\, d\lambda = 0. \tag{1.24}$$

Mas, de $\lambda \in C_r$, escrevemos λ na forma polar: $\lambda = re^{i\varphi}$, onde $\theta - \epsilon \leq \varphi \leq 2\pi - \theta + \epsilon$, donde, tomando $z = \rho e^{i\psi}$, $|\psi| < \alpha$, temos

$$\int_{C_r} e^{Re \lambda z} |d\lambda| = \int_{\theta-\epsilon}^{2\pi-\theta+\epsilon} e^{r\rho\cos(\varphi+\psi)} r\, d\varphi. \tag{1.25}$$

Considerando $\frac{\pi}{2} + \epsilon \leq \psi + \varphi \leq \frac{3\pi}{2} - \epsilon$. Obtemos, $\cos(\psi + \varphi) \leq \cos(\frac{\pi}{2} + \epsilon)$. Donde segue,

$$\begin{aligned}\int_{\theta-\epsilon}^{2\pi-\theta+\epsilon} e^{r\rho\cos(\varphi+\psi)} r\, d\varphi &\leq \int_{\theta-\epsilon}^{2\pi-\theta+\epsilon} e^{r\rho\cos(\frac{\pi}{2}+\epsilon)} r\, d\varphi \\ &= e^{r\rho\cos(\frac{\pi}{2}+\epsilon)} r \int_{\theta-\epsilon}^{2\pi-\theta+\epsilon} d\varphi \\ &= 2re^{r\rho\cos(\frac{\pi}{2}+\epsilon)}(\pi - \theta + \epsilon). \end{aligned} \tag{1.26}$$

Passando ao limite em (1.26) quando $r \to \infty$, obtemos

$$2re^{r\rho\cos(\frac{\pi}{2}+\epsilon)}(\pi - \theta + \epsilon) \longrightarrow 0. \tag{1.27}$$

Daí, de (1.25), (1.26) e (1.27) tem-se

$$\int_{C_r} e^{Re\lambda z}|d\lambda| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } r \to \infty. \tag{1.28}$$

Como $m_r = \inf\{|\lambda' - \lambda|;\ \lambda \in C_r\}$, temos que $m_r \to \infty$, quando $r \to \infty$, por (1.28)

$$\begin{aligned} \left|\int_{C_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda}\, d\lambda\right| \leq \int_{C_r} \left|\frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda}\right| |d\lambda| &\leq \frac{1}{m_r}\int_{C_r} |e^{\lambda z}||d\lambda| = \\ &= \frac{1}{m_r}\int_{C_r} e^{Re\lambda z}|d\lambda| \to 0 \end{aligned}$$

quando $r \to \infty$. Daí e, passando ao limite em (1.24), quando $r \to \infty$, obtemos

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda}\, d\lambda.$$

(ii) Pela Fórmula de Cauchy, tem-se

$$1 = e^{0z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r \cup C_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda}\, d\lambda.$$

Mas, de $\lambda \in C_r$, segue que $|\lambda| = r \geq 1$. Assim, por (1.28), obtemos

$$\left|\int_{C_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda}\, d\lambda\right| \leq \int_{C_r} \left|\frac{e^{\lambda z}}{\lambda}\right| |d\lambda| \ = \ \frac{1}{r}\int_{C_r} e^{Re\lambda z}|d\lambda| \leq \int_{C_r} e^{Re\lambda z}|d\lambda| \to 0,$$

quando $r \to \infty$. Daí,

$$1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r \cup C_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\Gamma_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} d\lambda + \int_{C_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} d\lambda\right),$$

de onde, passando ao limite, quando $r \to \infty$, obtemos

$$1 = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda}\, d\lambda.$$

Portanto,

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda}\, d\lambda = 2\pi i.$$

(iii) Como $e^{\lambda z}$ é analítica em todo o plano complexo temos, pelo Teorema de Cauchy:

$$\int_{\Gamma_r \cup C_r} e^{\lambda z}\, d\lambda = 0.$$

Mas, por (1.28), temos

$$\left|\int_{C_r} e^{\lambda z}\, d\lambda\right| \leq \int_{C_r} |e^{\lambda z}||d\lambda| = \int_{C_r} e^{Re\lambda z}|d\lambda| \to 0,$$

quando $r \to \infty$. Logo,

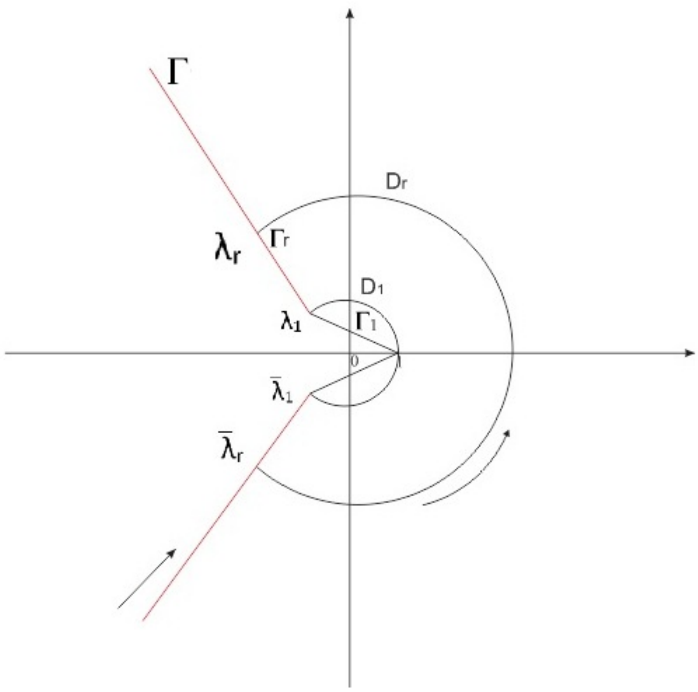
$$0 = \int_{\Gamma_r \cup C_r} e^{\lambda z}\, d\lambda = \int_{\Gamma_r} e^{\lambda z}\, d\lambda + \int_{C_r} e^{\lambda z}\, d\lambda.$$

Daí, passando ao limite, quando $r \to \infty$, temos

$$0 = \lim_{r\to\infty} \int_{\Gamma_r} e^{\lambda z}\, d\lambda = \int_{\Gamma} e^{\lambda z}\, d\lambda.$$

o que prova (iii).

(iv) A função $\frac{R(\lambda;A)}{\lambda}$ é, pela condição (ii) da Definição (1.39), analítica na região do plano complexo situada à direita e sobre Γ.



Logo, se D, é o arco da circunferência de centro na origem, raio $r \geq 1$, situado à direita de Γ e de extremos λ_r e $\overline{\lambda}_r$, então, pelo Teorema de Cauchy,

$$\int_{\Gamma_r \cup D_r} R(\lambda; A) \frac{d\lambda}{\lambda} = 0.$$

Mas, orientando D_r de $\overline{\lambda}_r$ para λ_r, temos, por (iii) da Definição (1.39),

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{D_r} R(\lambda; A) \frac{d\lambda}{\lambda} \right\| &\leq \int_{D_r} \left\| R(\lambda; A) \frac{d\lambda}{\lambda} \right\| = \int_{D_r} \| R(\lambda; A) \| \left| \frac{d\lambda}{\lambda} \right| \leq \\
&\leq \int_{D_r} \frac{M}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{|\lambda|}\, |d\lambda| = \int_{D_r} \frac{M}{r} \cdot \frac{1}{r}\, |d\lambda| = \\
&= \frac{M}{r^2} \int_{-\theta+\epsilon}^{\theta-\epsilon} \left| \frac{d\lambda}{d\varphi} \right| d\varphi = \frac{M}{r^2} \int_{-\theta+\epsilon}^{\theta-\epsilon} r\, d\varphi = \\
&= \frac{M}{r}(2\theta - 2\epsilon) = \frac{2M(\theta - \epsilon)}{r} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0\,.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\Gamma_r \cup D_r} R(\lambda; A)\frac{d\lambda}{\lambda} = 0 = \int_{\Gamma_r} R(\lambda; A)\frac{d\lambda}{\lambda} + \int_{D_r} R(\lambda; A)\frac{d\lambda}{\lambda},$$

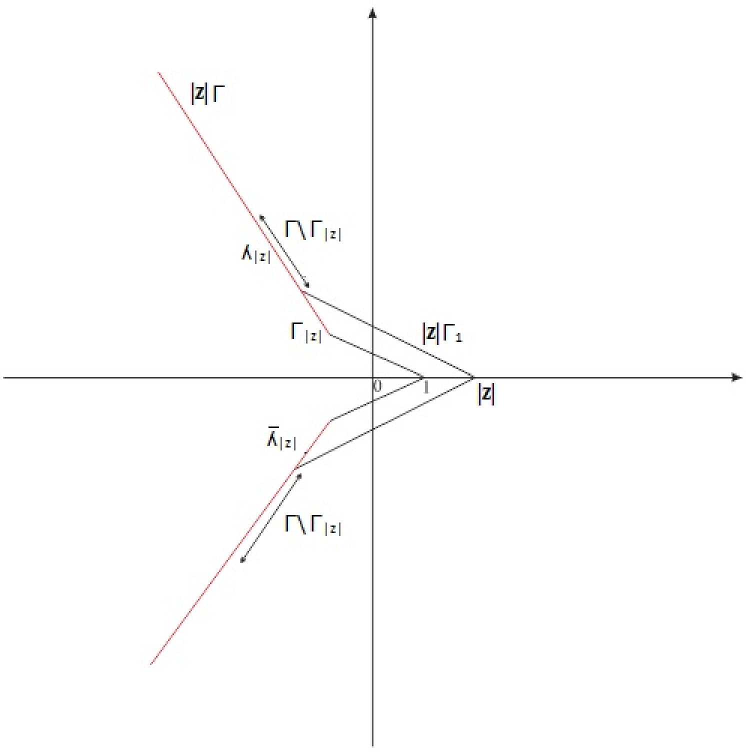
de onde, passando ao limite, obtemos

$$0 = \lim_{r\to\infty} \int_{\Gamma_r} R(\lambda; A)\frac{d\lambda}{\lambda} = \int_{\Gamma} R(\lambda; A)\frac{d\lambda}{\lambda}$$

o que prova (iv).

(v) Se $r = |z| > 1$, a curva $|z|\Gamma$ é a união do arco $|z|\Gamma_1$ com as duas semiretas $\Gamma\backslash\Gamma_{|z|}$. Os extremos do arco $|z|\Gamma_1$ são os pontos $\lambda_{|z|}$ e $\overline{\lambda}_{|z|}$ que são justamente os extremos do arco $\Gamma_{|z|}$. Daí, para $|z| > 1$, $\Gamma_{|z|} \cup |z|\Gamma_1$ é um contorno simples e fechado mas, como a função $e^{\lambda\xi}R\left(\frac{\lambda}{|z|}; A\right)$ é analítica no interior e sobre o contorno, temos, do Teorema de Cauchy,

$$\int_{\Gamma|z|\cup|z|\Gamma_1} e^{\lambda\xi}R\left(\frac{\lambda}{|z|}; A\right)\frac{d\lambda}{|z|} = 0.$$

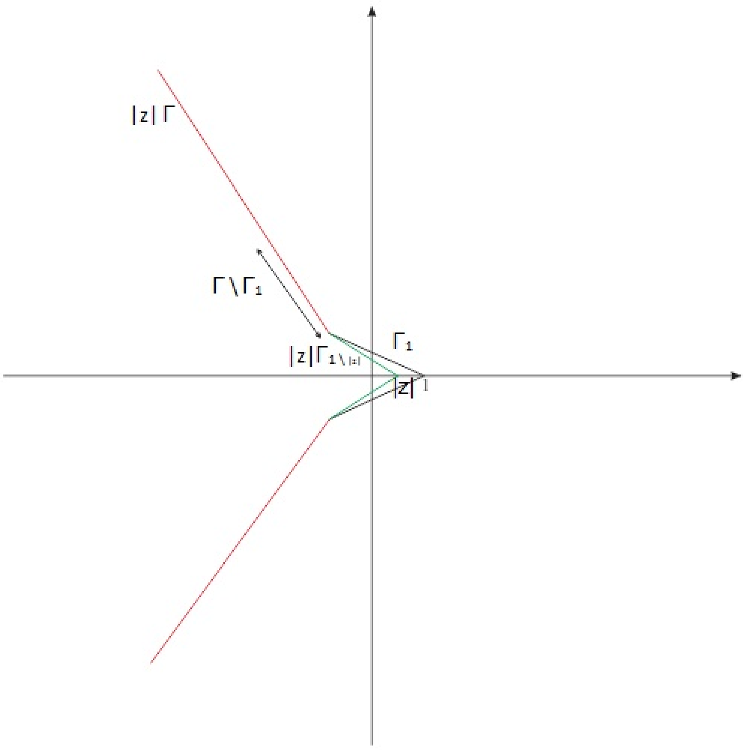


Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{|z|\Gamma} e^{\lambda\xi} R\left(\frac{\lambda}{|z|};A\right)\frac{d\lambda}{|z|} &= \int_{|z|\Gamma_1} e^{\lambda\xi} R\left(\frac{\lambda}{|z|};A\right)\frac{d\lambda}{|z|} + \int_{\Gamma\backslash\Gamma|z|} e^{\lambda\xi} R\left(\frac{\lambda}{|z|};A\right)\frac{d\lambda}{|z|} = \\
&= \int_{\Gamma_{|z|}} e^{\lambda\xi} R\left(\frac{\lambda}{|z|};A\right)\frac{d\lambda}{|z|} + \int_{\Gamma\backslash\Gamma|z|} e^{\lambda\xi} R\left(\frac{\lambda}{|z|};A\right)\frac{d\lambda}{|z|} = \\
&= \int_{\Gamma_{|z|}\cup\Gamma\backslash\Gamma_{|}z|} e^{\lambda\xi} R\left(\frac{\lambda}{|z|};A\right)\frac{d\lambda}{|z|} = \\
&= \int_{\Gamma} e^{\lambda\xi} R\left(\frac{\lambda}{|z|};A\right)\frac{d\lambda}{|z|},
\end{aligned}$$

ou seja, (v) está provada para $r = |z| > 1$.

Agora, se $|z| < 1$ então, $|z|\Gamma = \Gamma\backslash\Gamma_1 \cup |z|\Gamma_{\frac{1}{|z|}}$, $\Gamma_1 \cup |z|\Gamma_{\frac{1}{|z|}}$ é um contorno simples e fechado e a função $e^{\lambda\xi} R\left(\frac{\lambda}{|z|};A\right)\frac{1}{|z|}$ é analítica no interior e sobre ele. Logo, por um argumento análogo ao caso $|z| > 1$, o item (v) continua válida quando $|z| < 1$, $z \in \triangle(\alpha)$. Para $|z| = 1$, (v) é trivial. ■



Lema 1.5 *Seja Γ' a curva do plano complexo definida por*

$$\Gamma' = \{\lambda' \in \mathbb{C};\ \lambda' = \lambda + \delta,\ \lambda \in \Gamma,\ \delta > 0\},$$

com a orientação induzida pela de Γ. Então, $\forall\, z \in \triangle(\alpha)$:

(i) $\displaystyle\int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda; A)\, d\lambda = \int_{\Gamma'} e^{\lambda z} R(\lambda; A)\, d\lambda;$

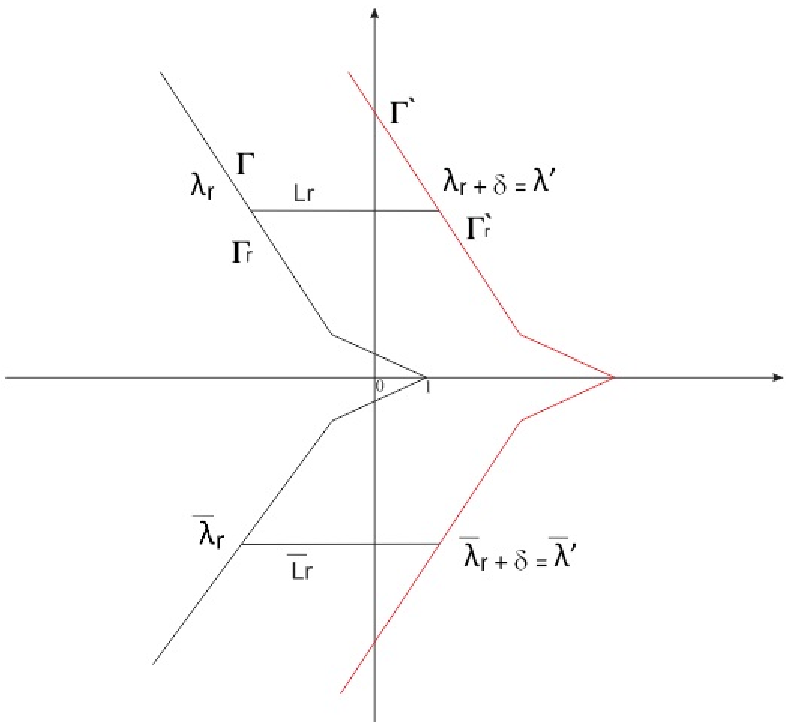
(ii) $\displaystyle\int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda}\, d\lambda' = 2\pi i\, e^{\lambda z}, \ \forall\, \lambda$ situado à esquerda de Γ'.

Demonstração: Os pontos λ_r, $\overline{\lambda}_r$ e o arco Γ_r foram definidos no Lema anterior. Seja Γ'_r o arco de Γ' de extremos $\overline{\lambda}_r + \delta$ e $\lambda_r + \delta$, L_r o segmento de reta de extremos λ_r e $\lambda_r + \delta$, $\overline{L}_r$ o segmento de extremos $\overline{\lambda}_r$ e $\overline{\lambda}_r + \delta$ e Λ_r o contorno $\Gamma_r \cup L_r \cup \Gamma'_r \cup \overline{L}_r$. Pelo Teorema de Cauchy, temos:

$$\int_{\Lambda_r} e^{\lambda z} R(\lambda; A)\, d\lambda = 0,$$

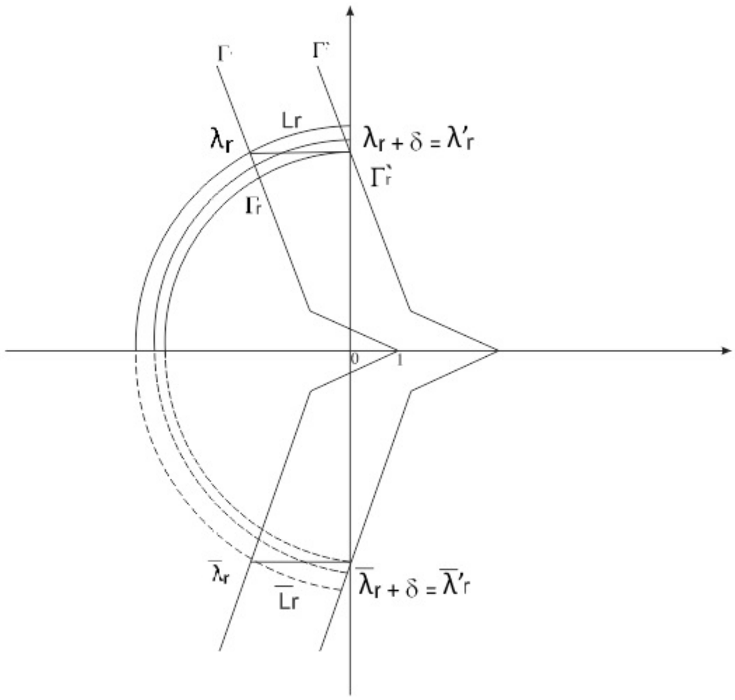
pois, por (ii) da Definição (1.39), a função $e^{\lambda z} R(\lambda; A)$ é analítica à direita de Γ e sobre Γ. Mas, para um raio r suficientemente grande, temos que, $Re(\lambda_r + \delta) < 0$ e, sendo assim, $|\lambda| \geq |\lambda_r + \delta|$, $\forall\, \lambda \in L_r$.

Ilustração da curva Γ' induzida pela curva Γ.



Além disso, para r suficientemente grande, tem-se $arg\lambda z > \frac{\pi}{2} + \frac{\epsilon}{2}$, $\forall\, \lambda \in L_r$. Assim, para r suficientemente grande temos $|\lambda| > |\lambda_r + \delta|$ e $Re\lambda z < 0 \ \ \forall\, \lambda \in L_r$, donde por (iii) da Definição (1.39),

$$\begin{aligned}\left\|e^{\lambda z}R(\lambda;A)\right\| &= \left|e^{\lambda z}\right|\|R(\lambda;A)\| = e^{Re\lambda z}\|R(\lambda;A)\| = \\ &= \frac{1}{e^{Re\lambda z}}\|R(\lambda;A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \leq \frac{M}{|\lambda_r+\delta|}, \quad \forall\, \lambda \in L_r.\end{aligned}$$



Daí, orientando L_r de λ_r para $\lambda_r+\delta$, segue que

$$\begin{aligned}\left\|\int_{L_r} e^{\lambda z}R(\lambda;A)d\lambda\right\| &\leq \int_{\lambda_r}^{\lambda_r+\delta}\left\|e^{\lambda z}R(\lambda;A)\right\|d\lambda \leq \int_{\lambda_r}^{\lambda_r+\delta}\frac{M}{|\lambda_r+\delta|}d\lambda = \\ &= \frac{M}{|\lambda_r+\delta|}\int_{\lambda_r}^{\lambda_r+\delta}d\lambda = \frac{M\delta}{|\lambda_r+\delta|}. \qquad (1.29)\end{aligned}$$

Passando ao limite em (1.29) quando $r\to\infty$, obtemos

$$\lim_{r\to\infty}\left\|\int_{L_r} e^{\lambda z}R(\lambda;A)d\lambda\right\| \leq \lim_{r\to\infty}\frac{M\delta}{|\lambda_r+\delta|} = 0,$$

pois, δ é uma constate. Logo,

$$\lim_{r\to\infty}\int_{L_r} e^{\lambda z}R(\lambda;A)d\lambda = 0.$$

De modo análogo, orientando $\overline{L}_r$ de $\overline{\lambda}_r$ para $\overline{\lambda}_r+\delta$, temos

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\overline{L}_r} e^{\lambda z}R(\lambda;A)d\lambda = 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{r\to\infty}\int_{\Lambda_r} e^{\lambda z}R(\lambda;A)d\lambda \\ &= \lim_{r\to\infty}\int_{\Gamma_r} e^{\lambda z}R(\lambda;A)d\lambda + \lim_{r\to\infty}\int_{\Gamma'_r} e^{\lambda z}R(\lambda;A)d\lambda \\ &= \int_{\Gamma} e^{\lambda z}R(\lambda;A)d\lambda + \int_{\Gamma'} e^{\lambda z}R(\lambda;A)d\lambda, \end{aligned}$$

o que implica,

$$\int_{\Gamma} e^{\lambda z}R(\lambda;A)d\lambda = -\int_{\Gamma'} e^{\lambda z}R(\lambda;A)d\lambda = \int_{-\Gamma'} e^{\lambda z}R(\lambda;A)d\lambda.$$

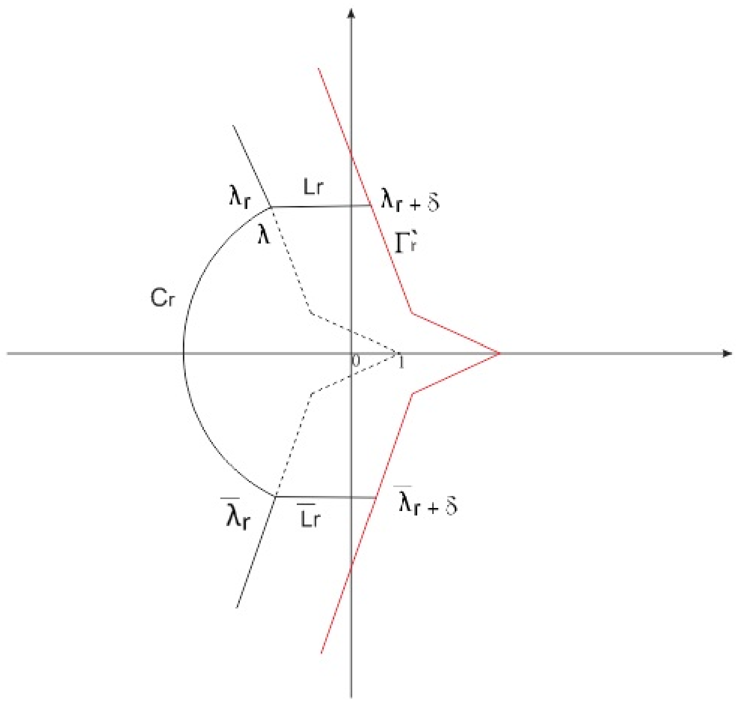
Como, pelo Teorema B.13

$$\int_{-\Gamma'} e^{\lambda z}R(\lambda;A)d\lambda = \int_{\Gamma'} e^{\lambda z}R(\lambda;A)d\lambda.$$

Temos portanto,

$$\int_{\Gamma} e^{\lambda z}R(\lambda;A)d\lambda = \int_{\Gamma'} e^{\lambda z}R(\lambda;A)d\lambda.$$

(ii) Seja r sufucientemente grande para que λ esteja situado no interior da curva fechada $\Gamma'_r \cup L_r \cup C_r \cup \overline{L}_r = \Lambda'_r$.



Como $\dfrac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda}$ é analítica sobre Γ' e na região situada à esquerda de Γ', segue que, $\dfrac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda}$ é analítica no interior e sobre Λ'. Daí, pela Fórmula de Cauchy, temos

$$\int_{\Lambda_r'} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = 2\pi i e^{\lambda z}, \tag{1.30}$$

mas, se $\mu_r = \inf\{|\lambda' - \lambda|;\ \lambda' \in L_r\}$, então

$$\begin{aligned} \left| \int_{L_r} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' \right| &\leq \int_{L_r} \left| \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda} \right| |d\lambda'| \\ &\leq \frac{1}{\mu_r} \int_{L_r} |e^{\lambda' z}| |d\lambda'| = \frac{1}{\mu_r} \int_{L_r} e^{Re\lambda' z} |d\lambda'| \to 0, \end{aligned}$$

quando $r \to \infty$, pois, $\mu_r \to \infty$, quando $r \to \infty$ e para r suficientemente grande, obteremos $Re\lambda' z < 0,\ \ \forall\, \lambda' \in L^r$. Logo,

$$\lim_{r\to\infty} \int_{L_r} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = 0 \tag{1.31}$$

e, analogamente,

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\overline{L}_r} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = 0. \tag{1.32}$$

Além disto, por (1.28) tem-se, para $m_r = \inf\{|\lambda' - \lambda|;\ \lambda' \in C_r\}$

$$\left| \int_{C_r} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' \right| \leq \frac{1}{m_r} \int_{C_r} e^{Re\lambda' z} |d\lambda'| \to 0,$$

quando $r \to \infty$. Daí e de (1.30) à (1.32), vem

$$\lim_{r\to\infty} 2\pi i e^{\lambda z} = \lim_{r\to\infty} \int_{\Lambda_r'} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = \lim_{r\to\infty} \int_{\Gamma_r'} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda'.$$

Portanto,

$$\int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = 2\pi i e^{\lambda z}.$$

■

Teorema 1.40 *Seja $A \in (\theta, M)$. Então, para cada $\epsilon > 0$ tal que $2\epsilon < \theta - \dfrac{\pi}{2}$, A é o gerador infinitesimal da restrição a $\mathbb{R}^+$, de um semigrupo analítico de classe C_0 no setor $\triangle(\theta - \frac{\pi}{2} - 2\epsilon)$ e uniformemente limitado nesse setor.*

Demonstração: Mostraremos que a função

$$S : \triangle(\alpha) \cup \{0\} \longrightarrow \mathcal{L}(X)$$

dada por $S(0) = I$ e

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda; A) d\lambda, \quad z \in \triangle(\alpha), \quad \alpha = \theta - \frac{\pi}{2} - 2\epsilon, \tag{1.33}$$

é um semigrupo analítico de classe C_0, uniformemente limitado no setor $\triangle(\theta - \frac{\pi}{2} - 2\epsilon)$ e A é o gerador infinitesimal da restrição de S a $\mathbb{R}^+$.

Por (i) do Lema (1.5), temos que, $\forall\, w \in \triangle(\alpha)$ com $\alpha = \theta - \dfrac{\pi}{2} - 2\epsilon$

$$S(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} e^{\lambda' w} R(\lambda'; A) d\lambda'. \tag{1.34}$$

Logo, para $z,\ w \in \triangle(\alpha)$,

$$\begin{aligned} S(z)S(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda; A) d\lambda \cdot \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} e^{\lambda' w} R(\lambda'; A) d\lambda' \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} e^{\lambda z + \lambda' w} R(\lambda; A) R(\lambda'; A) d\lambda' d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} e^{\lambda z + \lambda' w} \left(\frac{R(\lambda; A) - R(\lambda'; A)}{\lambda' - \lambda} \right) d\lambda' d\lambda, \end{aligned}$$

pois, $S(w)$ tem a forma explícita em (1.34) e $R(\lambda, A) - R(\lambda', A) = (\lambda' - \lambda) R(\lambda, A) R(\lambda', A)$ é a Identidade do Resolvente, com $\lambda,\ \lambda' \in \rho(A)$. Como Γ está à esquerda de Γ' e $\lambda' \in \Gamma'$ segue, por (i) do Lema (1.4) e por (ii) do Lema (1.5),

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda' w}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = 2\pi i e^{\lambda w},$$

respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned} S(z)S(w) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} \left(\frac{e^{\lambda z + \lambda' w} R(\lambda; A)}{\lambda' - \lambda} - \frac{e^{\lambda z + \lambda' w} R(\lambda'; A)}{\lambda' - \lambda} \right) d\lambda'\, d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \left(e^{\lambda z} R(\lambda; A) \int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda' w}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' - \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} \int_{\Gamma'} e^{\lambda' w} R(\lambda'; A)\, d\lambda' \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left(\int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda; A) (2\pi i e^{\lambda w}) d\lambda - \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} \int_{\Gamma'} e^{\lambda' w} R(\lambda'; A) d\lambda'\, d\lambda \right). \end{aligned}$$

Daí, usando o Teorema de Fubini, temos que

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \left(2\pi i \int_{\Gamma} e^{\lambda z + \lambda w} R(\lambda; A) d\lambda - \int_{\Gamma'} e^{\lambda' w} R(\lambda'; A) \underbrace{\left(\int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda \right)}_{=0} d\lambda' \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda(z+w)} R(\lambda; A)\, d\lambda = S(z+w), \quad \forall\ z,\ w \in \triangle(\alpha).$$

Portanto,

$$S(z)S(w) = S(z+w), \ \ \forall\, z,\, w \in \triangle(\alpha).$$

Agora, fazendo em (1.33) a mudança de variáveis $\lambda^{'} = |z|\lambda$, com $z \in \triangle(\alpha)$, a curva Γ transforma-se na curva $|z|\Gamma$ e por (v) do Lema (1.4)

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|\Gamma} e^{\lambda^{'}\xi} R\left(\frac{\lambda^{'}}{|z|}, A\right)\frac{d\lambda^{'}}{|z|} = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda^{'}\xi} R\left(\frac{\lambda^{'}}{|z|}, A\right)\frac{d\lambda^{'}}{|z|}, \ \text{ onde } \xi = \frac{z}{|z|} = e^{i\,arg(z)}. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Como $A \in (\theta, M)$, por (iii) da Definição (1.39), temos

$$\left\| R\left(\frac{\lambda^{'}}{|z|}; A\right)\right\| \leq \frac{M}{\frac{|\lambda^{'}|}{|z|}} = \frac{M|z|}{|\lambda^{'}|}. \tag{1.36}$$

$$\begin{aligned} \|S(z)\| &= \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda^{'}\xi} R\left(\frac{\lambda^{'}}{|z|}; A\right)\frac{d\lambda^{'}}{|z|}\right\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\left\| e^{\lambda^{'}\xi} R\left(\frac{\lambda^{'}}{|z|}; A\right)\frac{d\lambda^{'}}{|z|}\right\| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} e^{Re\lambda^{'}\xi}\frac{M|z|}{|\lambda^{'}|}\frac{|d\lambda^{'}|}{|z|} = \frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma} e^{Re\lambda^{'}\xi}\frac{|d\lambda^{'}|}{|\lambda^{'}|} \\ &= \frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma_1} e^{Re\lambda^{'}\xi}\frac{|d\lambda^{'}|}{|\lambda^{'}|} + \frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma\backslash\Gamma_1} e^{Re\lambda^{'}\xi}\frac{|d\lambda^{'}|}{|\lambda^{'}|} \\ &\leq \frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{1}{e^{Re\lambda^{'}\xi}}\frac{|d\lambda^{'}|}{|\lambda^{'}|} + \frac{M}{\pi}\int_{1}^{\infty} e^{r\cos(\varphi + arg\, z)}\frac{dr}{r} \\ &\leq \frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma_1} 1\cdot\frac{|d\lambda^{'}|}{r_0} + \frac{M}{\pi}\int_{1}^{\infty} e^{r\cos(\frac{\pi}{2}+\epsilon)}\frac{dr}{r} \\ &\leq \frac{Me}{2\pi r_0}\int_{\Gamma_1}|d\lambda^{'}| + \frac{M}{\pi}\int_{1}^{\infty} e^{r\cos\left(\frac{\pi}{2}+\epsilon\right)}dr \\ &= M_0(\epsilon) < \infty, \quad \forall\, z \in \triangle(\alpha), \end{aligned} \tag{1.37}$$

onde $r_0 = \inf\{|\lambda|;\, \lambda \in \Gamma_1\}$, isto é, o semigrupo S é uniformente limitado em $\triangle(\alpha)$.

Seja $z \in \triangle(\alpha)$, $|z| < 1$. Para cada $x \in D(A)$ temos por (1.33), por (ii) do Lema (1.4) e por $R(\lambda; A) = \big(\lambda I - A\big)^{-1}$ que

$$\begin{aligned} S(x) - x &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda; A)x\, d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{\lambda z}}{\lambda}\, x\, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda z}\left[R(\lambda; A) - \lambda^{-1}\right] x\, d\lambda \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda z}\left[\frac{\lambda R(\lambda; A) - I}{\lambda}\right] x\, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda z}\frac{R(\lambda; A)A}{\lambda}\, x\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda; A)Ax\frac{d\lambda}{\lambda}. \end{aligned}$$

Como, a norma do integrando é limitada por $\dfrac{M\|Ax\|}{|\lambda|^2}$, com $Re\lambda z < 0$. Temos, pelo Teorema da Convergência Dominada e por (iv) do Lema (1.4),

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0}\big(S(z)x - x\big) &= \lim_{z\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda z}R(\lambda z)R(\lambda;A)\,Ax\,\frac{d\lambda}{\lambda}\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lim_{z\to 0} e^{\lambda z}R(\lambda;A)\,Ax\,\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\lambda;A)\,Ax\,\frac{d\lambda}{\lambda}\\
&= \frac{1}{2\pi i}Ax\underbrace{\int_\Gamma R(\lambda;A)\,\frac{d\lambda}{\lambda}}_{=0} = 0, \quad \text{para cada } x \in D(A).
\end{aligned}$$

Mas, por hipótese, $\overline{D(A)} = X$ e, por (1.37), $\|S(z)\| \leq M_0(\epsilon),\ \ \forall\, z \in \triangle(\alpha)$. Logo,

$$\lim_{z\to 0} S(z)x = x,$$

para cada $x \in X$ e $z \in \triangle(\alpha)$, demonstrando que $S(z)$ é fortemente contínua.

Vamos motrar que S é analítica em $\triangle(\alpha)$. Com efeito, já vimos que a integral em (1.23) converge. Agora, mostraremos que a convergência é uniforme em $\triangle(\alpha)$. Fazendo a mudança de variáveis $\mu = |z|\lambda$, considerando a condição (v) do Lema (1.4) e pondo $\xi = \frac{z}{|z|}$, temos para $r \geq 1$.

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda z}R(\lambda;A)d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|\Gamma} e^{\frac{\mu}{|z|}z}R\left(\frac{\mu}{|z|};A\right)\frac{d\mu}{|z|}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\mu\xi}R\left(\frac{\mu}{|z|};A\right)\frac{d\mu}{|z|} = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\Gamma_r} e^{\mu\xi}R\left(\frac{\mu}{|z|};A\right)\frac{d\mu}{|z|} + \int_{\Gamma\backslash\Gamma_r} e^{\mu\xi}R\left(\frac{\mu}{|z|};A\right)\frac{d\mu}{|z|}\right).$$

Logo, se $\mu = \rho e^{i\varphi}$ então,

$$\begin{aligned}
\left\|S(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} e^{\mu\xi}R\left(\frac{\mu}{|z|};A\right)\frac{d\mu}{|z|}\right\| &= \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\backslash\Gamma_r} e^{\mu\xi}R\left(\frac{\mu}{|z|};A\right)\frac{d\mu}{|z|}\right\|\\
\leq\ \frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma\backslash\Gamma_r} e^{Re\,\mu\xi}\frac{d|\mu|}{|\mu|} &\leq \frac{M}{\pi}\int_r^\infty e^{\rho\cos(\varphi + arg\, z)}\frac{d\rho}{\rho}\\
\leq\ \frac{M}{\pi}\int_r^\infty e^{\rho\cos(\frac{\pi}{2}+\epsilon)}\,d\rho &= \frac{M}{\pi}\lim_{a\to\infty}\int_r^a e^{\rho\cos(\frac{\pi}{2}+\epsilon)}d\rho\\
=\ \frac{M}{\pi}\lim_{a\to\infty}&\left(\frac{e^{a\cos(\frac{\pi}{2}+\epsilon) - r\cos(\frac{\pi}{2}+\epsilon)}}{\cos(\frac{\pi}{2}+\epsilon)}\right)\\
=\ \frac{M}{\pi}\lim_{a\to\infty}&\left(\frac{1}{e^{a\cos(\frac{\pi}{2}+\epsilon)}}\cdot\frac{1}{e^{r\cos(\frac{\pi}{2}+\epsilon)}}\cdot\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}+\epsilon)}\right) = 0.
\end{aligned}$$

converge uniformemente em $\triangle(\alpha)$ quando $a \to \infty$. Logo,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} e^{\lambda z}R(\lambda;A)d\lambda \longrightarrow\ S(z)$$

uniformemente em $\triangle(\alpha)$, quando $r \to \infty$. Como Γ é uma curva simples, $\triangle(\alpha)$ é um setor do plano complexo com $e^{\lambda z}R(\lambda; A)$ contínua, para $z \in \triangle(\alpha)$ e $\lambda \in \Gamma$ e, é também analítica em $\triangle(\alpha)$, para cada $\lambda \in \Gamma$. Temos, pelo Teorema $(B.15)$ que (1.33) pode ser diferenciada sob o sinal de integração, isto é,

$$\frac{d^n S}{dz^n} = \int_\Gamma \frac{\partial^n}{\partial z^n} e^{\lambda z} R(\lambda; A) d\lambda$$

e, portanto,

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda z}R(\lambda; A)d\lambda; \;\; z \in \triangle(\alpha), \;\; \alpha = \theta - \frac{\pi}{2} - 2\epsilon$$

é analítica em $\triangle(\alpha)$.

Resta mostrar que A é o gerador infinitesimal do semigrupo $S : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{L}(X)$. Com efeito, seja $x \in D(A)$. De $R(\lambda; A)(\lambda I - A) = I$ e do Lema (1.4)-(iii), segue

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}S(z)x &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda z}\lambda R(\lambda; A)x\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda z}\left(R(\lambda; A)A + I\right)x\, d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_\Gamma e^{\lambda z}R(\lambda; A)Ax\, d\lambda + \underbrace{\int_\Gamma e^{\lambda z}x\, d\lambda}_{=0}\right) = S(z)Ax, \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{d}{dz}S(z)x = S(z)Ax, \;\; \forall\, x \in D(A). \tag{1.38}$$

Tendo em vista (1.38), tem-se

$$S(h)x - x = \int_0^h S(t)Ax\, dt, \;\; x \in D(A).$$

Supondo que B é o gerador infinitesimal do semigrupo $S : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{L}(X)$, temos

$$Bx = \lim_{h\to 0^+}\frac{S(h)x - x}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^h S(t)Ax\, dt = S(0)Ax = Ax,$$

de onde segue que, $x \in D(B)$ e, consequentemente, $D(A) \subset D(B)$ e $B\,|_{D(A)}= A$. Por outro lado, sendo $x \in D(B)$ e considerando

$$y = R(1)(I - B)x \in D(A)$$

e,

$$\begin{aligned} (I - A)y &= (I - A)\big(R(1)(I - B)x\big) = \\ &= (I - A)(I - A)^{-1}(I - B)x = (I - B)x. \end{aligned}$$

Daí, obtemos que

$$\begin{aligned} y - Ay = x - Bx \;&\Rightarrow\; y - By = x - Bx \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; (I - B)y + (I - B)(-x) = 0 \\ &\Rightarrow\; (I - B)(y - x) = 0. \end{aligned}$$

Como já vimos, para $\lambda = 1$ o operador $(I - B)$ é invertível, logo, $(I - B)$ é bijetor e, consequentemente, injetivo. Então, $(y - x) \in Ker\,(I - B) \Rightarrow y = x$. Sendo assim, $x \in D(A)$ e, isto implica, $D(B) \subset D(A)$. Portanto, $D(A) = D(B)$ implica $A = B$. ■

Corolário 1.41 *Seja $A \in (\theta; M)$. A extensão S, analítica em $\triangle(\alpha)$, $\alpha = \theta - \dfrac{\pi}{2} - 2\epsilon$, do semigrupo gerado por A, satisfaz as condições:*

(i) Para todo $n \geq 1$, $S(z)x$ pertence ao domínio de A^n, $\forall\, x \in X$ e $\forall z \in \triangle(\alpha)$;

(ii) Para todo $n \geq 1$ existe $M_n(\epsilon)$, constante que só depende de ϵ, tal que

$$\left\|A^n S(z)\right\| \leq \frac{M_n(\epsilon)}{|z|^n}, \quad \forall\, z \in \triangle(\alpha);$$

(iii) $\|A[S(t) - S(s)]\| \leq M_2(\epsilon) \cdot (t - s)/st, \quad 0 < s \leq t.$

Demonstração: Ver Gomes [6]. ■

Teorema 1.42 *Seja S um C_0-semigrupo analítico e uniformemente limitado em um setor $\triangle(\alpha)$, $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ e A o gerador infinitesimal de sua restrição a $\mathbb{R}^+$. Então, $\forall \epsilon > 0$ existem constantes θ_ϵ e M_ϵ positivas tais que $A - \epsilon I \in (\theta_\epsilon, M_\epsilon)$.*

Demonstração: Ver Gomes [6] ■

Capítulo 2

O Teorema de Gearhart

2.1 Teorema de Gearhart

Nesta seção, enunciaremos e mostraremos a equivalência entre dois resultados, devidos a Huang [7] e a Gearhart [20] respectivamente. Os quais, referem-se às condições necessárias e suficientes para um C_0-semigrupo de contrações ser exponencialmente estável, em um espaço de Hilbert.

Definição 2.1 *Seja* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0*-semigrupo em um espaço de Hilbert* H*. Dizemos que* $S(t)$, $t \geq 0$, *é* **exponencialmente estável***, se*

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\omega t}, \;\; \forall t \geq 0, \;\; M \geq 1 \;\; e \;\; \omega > 0.$$

Teorema 2.2 (Huang) *Seja* $S(t) = e^{At}$, $t \geq 0$, *um* C_0*-semigrupo em um espaço de Hilbert* H*. Então,* $S(t)$ *é exponencialmente estável se, e somente se*

$$\sup\{Re\lambda\,;\; \lambda \in \sigma(A)\} \;<\; 0 \tag{2.1}$$

e

$$\sup_{Re\lambda \geq 0} \|(\lambda I - A)^{-1}\| < \infty. \tag{2.2}$$

Alternativamente, temos o seguinte teorema devido a Gearhart.

Teorema 2.3 (Gearhart) *Seja* $S(t) = e^{At}$, $t \geq 0$, *um* C_0*-semigrupo de contrações em um espaço de Hilbert* H*. Então,* $S(t)$ *é exponencialmente estável se, e somente se*

$$\{i\beta\,;\; \beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \rho(A) \tag{2.3}$$

e

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < \infty. \tag{2.4}$$

No que segue, faremos a prova da equivalência destes dois resultados sob a condição que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ seja um C_0-semigrupo de contações em H.

Demonstração: (2.1) $\Rightarrow$ (2.3) Por hipótese, tem-se que existe $\gamma \in \mathbb{R}$, com $\gamma < 0$, tal que

$$\{Re\lambda;\ \lambda \in \sigma(A)\} \leq \gamma < 0$$

Logo, se $\lambda \in \sigma(A)$ então $Re\lambda \leq \gamma < 0$. Assim, para $z = i\beta$ resulta que $Rez = 0$. Portanto, $z \in \rho(A)$.

(2.2) $\Rightarrow$ (2.4) Por hipótese, tem-se que existe $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, tal que

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq M,\ \forall\ \lambda = \alpha + i\beta,\ \mathrm{Re} \geq 0.$$

Assim,

$$\|(i\beta I - A)^{-1}\| \leq M,\ \forall \beta \in \mathbb{R},$$

o que implica (2.4).

Agora, mostraremos que o Teorema (2.3) implica o Teorema (2.2). Faremos isto, provando que (2.3) $\Rightarrow$ (2.2) e (2.4) $\Rightarrow$ (2.1).

(2.3) $\Rightarrow$ (2.2) Suponha que A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de

contrações, isto é,

$$\|e^{At}\| \leq 1.$$

Daí, pelo Corolário 1.22, temos $(0, \infty) \subset \rho(A)$ e, se $Re\lambda > 0$ então

$$\|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\| \leq 1.$$

Como $\mathcal{L}(X)$ é um espaço vetorial, obtemos

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|}.$$

Assim, para todo $\delta_0 < 0$ quando $|\lambda| > |\delta_0|$ temos

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|} < \frac{1}{|\delta_0|} \tag{2.5}$$

e, quando $|\lambda| \leq |\delta_0|$ temos

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\delta_0|} \leq \frac{1}{|\lambda|}.$$

Mas, por hipótese,

$$\{i\beta;\ \beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \rho(A).$$

Logo, para todo $\lambda = i\beta$ tem-se $Re(\lambda) = 0$. Portanto,

$$\sup_{Re\lambda \geq 0} \|(\lambda I - A)^{-1}\| < \infty.$$

(2.4) $\Rightarrow$ (2.1) No que segue, provamos que existe $\sigma_0 < 0$ com $|\sigma_0|$ suficientemente pequeno tal que

$$\sigma(A) \subseteq \{\lambda\ ;\ Re\lambda \leq \sigma_0\}. \tag{2.6}$$

De fato, considere $\lambda = a + bi$, com $a,\, b \in \mathbb{R}$ e observe que

$$\begin{aligned} \lambda I - A &= (a+bi)I - A \ = \ aI + biI - A \\ &= a(biI - A)^{-1}(biI - A) + biI - A \\ &= \big(a(biI - A)^{-1} + I\big)(biI - A). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Segue-se de (2.4) que $biI - A$ é invertível. Assim, quando $|a|$ for suficientemente pequeno, pelo Lema 1.3, temos que o operador $\big(a(biI - A)^{-1} + I\big)$ é invertível. De onde, para $\lambda = a + bi$ tem-se $\lambda I - A$ invertível, por ser uma composição de operadores invertíveis.

Como, por hipótese,

$$\limsup_{|\beta| \to \infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < \infty. \tag{2.8}$$

então, existe $\sigma_0 < 0$ com $|\sigma_0|$ suficientemente pequeno, tal que

$$\sigma(A) \subseteq \{\lambda\ ;\ Re\lambda \leq \sigma_0 < 0\}. \tag{2.9}$$

Daí,

$$\{Re\lambda\ ;\ \lambda \in \sigma(A)\} < 0$$

e, portanto,

$$\sup\{Re\lambda\ ;\ \lambda \in \sigma(A)\} < 0.$$

Provando (2.1). ■

No que segue, daremos a prova do principal resultado deste trabalho, o Teorema de Gearhart.

Demonstração: Mostraremos que as condições (2.3) e (2.4) do Teorema 2.3 são suficientes para a estabilidade exponencial do semigrupo de contrações,

$$S(t) = e^{At} \quad \text{tal que} \quad \|e^{At}\| \leq 1, \ \ \forall t \geq 0.$$

Desenvolveremos a prova em 6 etapas.

Etapa 1: $\lambda \in \rho(S(t))$ implica $\big\|S(t)\big\| < |\lambda|, \ \ \forall t \geq 0.$

De fato, definimos $S := S(t) = e^{At}$, $\forall t \geq 0$ e $\lambda \in \rho(S)$. Então,

(i) $$(\lambda I - S)^{-1} = \lambda^{-1}\frac{1}{\big(I - \lambda^{-1}S\big)}.$$

E pela série de Neumann em espaços de Banach,

$$\sum_{n=0}^{\infty} T^n = \frac{1}{\big(I - T\big)}, \text{ se } \|T\| < 1,$$

obtemos de (i) que

$$\big(\lambda I - S\big)^{-1} = \lambda^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda^{-1}S)^j, \text{ se } \|\lambda^{-1}S\| < 1.$$

Donde segue

$$\frac{1}{|\lambda|}\|S\| < 1 \ \Rightarrow \ \|S\| < |\lambda|, \ \ \forall t \geq 0.$$

Etapa 2: $\|S(t)\| \geq |\lambda| \ \Rightarrow \ \sigma(S(t)) \subset B_{\|S(t)\|}(0) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq \|S(t)\|\}.$

Com efeito, pela etapa anterior, vimos que $\lambda \in \rho(S(t))$ implica $\|S(t)\| < |\lambda|$. Portanto, se $\|S(t)\| \geq |\lambda|$ implica que $\lambda \notin \rho(S(t))$ e, por definição, $\lambda \in \sigma(S(t))$. Isto é,

$$|\lambda| \leq \|S(t)\| \ \Rightarrow \ \lambda \in B_{\|S(t)\|}(0)$$

e, portanto,

$$\sigma(S(t)) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; \ |\lambda| \leq \|S(t)\|\}.$$

Etapa 3: se $1 \in \rho(e^A)$ então

(i) $\{2\pi in;\ n \in \mathbb{Z}\} \subset \rho(A)$;

(ii) $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \left\|(2\pi inI - A)^{-1}\right\| =: M < \infty$.

De fato, se $1 \in \rho\big(e^A\big)$, considere a sucessão de operadores $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, onde para cada $n \in \mathbb{Z}$ definimos

$$T_n x = \big(I - e^A\big)^{-1} \int_0^1 e^{As} e^{-2\pi ins} x\, ds,\ \forall x \in H \text{ e } n \in \mathbb{Z}.$$

Note que T_n está bem definido, para cada $n \in \mathbb{Z}$, uma vez que, $\big(I - e^A\big)^{-1}$ é invertível, linear, limitado e a integral é finita.

Como o operador A comuta com e^{As} e com $(\lambda I - A)^{-1}$. Então, $\forall\ x \in D(A)$, tem-se

$$\big(2\pi inI - A\big)T_n x \ = \ T_n\big(2\pi inI - A\big)x.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
T_n\big(2\pi inI - A\big)x &= \big(I - e^A\big)^{-1} \int_0^1 e^{(A-2\pi inI)s}(2\pi inI - A)x\, ds \\
&= \big(I - e^A\big)^{-1} \int_0^1 (2\pi inI - A)e^{(A-2\pi inI)s}x\, ds \\
&= -\big(I - e^A\big)^{-1} \int_0^1 (A - 2\pi inI)e^{(A-2\pi inI)s}x\, ds \\
&= -\big(I - e^A\big)^{-1} \int_0^1 \frac{d}{ds}e^{(A-2\pi inI)s}x\, ds.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo para operadores, obtemos

$$\begin{aligned}
-\big(I - e^A\big)^{-1}\big(e^{A-2\pi in}x - Ix\big) &= \big(I - e^A\big)^{-1}\big(Ix - e^{A-2\pi in}x\big) \\
&= \big(I - e^A\big)^{-1}\big(I - e^A\big)x \ = \ x,
\end{aligned}$$

pois,

$$e^{A-2\pi in} = e^A e^{-2\pi in} = e^A\big(\cos(-2\pi n) + isen(-2\pi n)\big) = e^A, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Logo,

$$(2\pi inI - A)T_n x = x.$$

Donde, conclui-se que, $(2\pi inI - A)$ é invertível, para cada $n \in \mathbb{Z}$ e $(2\pi inI - A)^{-1} = T_n$. Assim,

$$\begin{aligned} \left\|(2\pi inI - A)^{-1}\right\| = \|T_n\| &= \left\|\left(I - e^A\right)^{-1}\int_0^1 e^{(A-2\pi inI)s}\,ds\right\| \\ &\leq \left\|\left(I - e^A\right)^{-1}\right\|\left\|\int_0^1 e^{(A-2\pi inI)s}\,ds\right\| \\ &\leq \left\|\left(I - e^A\right)^{-1}\right\|\int_0^1\left\|e^{(A-2\pi inI)s}\right\|ds \\ &\leq \left\|\left(I - e^A\right)^{-1}\right\|\sup_{0\leq s\leq 1}\left\|e^{As}\right\| \leq c\cdot k =: M < \infty, \end{aligned}$$

o que verifica (ii). Sendo assim, como consequência imediata, obtemos

$$\left\{2\pi in;\ \ n \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq \rho(A),$$

verificando (i).

Etapa 4: Seja $\mu > 0$ e $L_\mu = \{\lambda \in \mathbb{C};\ e^\lambda = \mu\}$. Se $z \in \dfrac{1}{t}L_1$ então $z \in \rho(A)$.

Se $z \in \dfrac{1}{t}L_1$ temos $z = \dfrac{\lambda}{t} \in \mathbb{C}$ e $e^{\frac{\lambda}{t}} = 1$, $\forall\ \lambda = a + bi$; $a,\ b \in \mathbb{R}$ e $t > 0$. Então,

$$e^{\frac{a+bi}{t}} = e^{\frac{a}{t}}e^{\frac{b}{t}i} = e^{\frac{a}{t}}\big(\cos\frac{b}{t} + isen\frac{b}{t}\big) = 1.$$

Em particular, se $\dfrac{a}{t} = 0$ e $\dfrac{b}{t} = 2\pi n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ e $t > 0$ tem-se $a = 0$ e $b = 2\pi nt$. Daí, $z = 2\pi ni$. Segue de (i) da Etapa 3 que, $z = 2\pi ni \in \rho(A)$. Logo,

$$\frac{1}{t}L_1 \subset \rho(A). \tag{2.10}$$

De (2.10) e (ii) da Etapa 3, obtemos

$$\sup_{\lambda\in\frac{1}{t}L_1}\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq k. \tag{2.11}$$

Etapa 5: de um modo geral, se $e^{\alpha t} \in \rho(e^{At})$ então

$$\left(\left(\frac{2\pi n}{t}i + \alpha\right)I - A\right)^{-1} \in \mathcal{L}(H).$$

Se $e^{\alpha t} \in \rho\big(e^{At}\big)$ então

$$\begin{aligned} \left(e^{\alpha t}I - e^{At}\right)^{-1} \in \mathcal{L}(H) &\Rightarrow e^{-\alpha t}\left(I - e^{(A-\alpha I)t}\right)^{-1} \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(I - e^{(A-\alpha I)t}\right)^{-1} \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 \in \rho\big(e^{(A-\alpha I)t}\big) \overbrace{\Rightarrow}^{Etapa3-(i)} \\ &\Rightarrow 2\pi ni \in \rho\big((A-\alpha I)t\big). \end{aligned}$$

Mas, isto implica que

$$\Big(2\pi n i I - \big((A-\alpha I)t\big)\Big)^{-1} \in \mathcal{L}(H) \;\Rightarrow\; t^{-1}\Big(\Big(\frac{2\pi n}{t}i+\alpha\Big)I - A\Big)^{-1} \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \Big(\Big(\frac{2\pi n}{t}i+\alpha\Big)I - A\Big)^{-1} \in \mathcal{L}(H),$$

como queríamos.

Observe que, denotando $(\frac{2\pi n}{t}i+\alpha)=\lambda$ e $\mu = e^{\alpha t}$ tem-se,

$$\mu \in \rho\big(e^{At}\big) \Longleftrightarrow \frac{1}{t}L_\mu \subset \rho(A) \;\text{ e }\; \sup_{\lambda\in\frac{1}{t}L_\mu}\big\|(\lambda I - A)^{-1}\big\| \leq k. \tag{2.12}$$

Etapa: 6 Para todo $t>0$ tem-se que o raio espectral

$$R_E(e^{At}) = \lim_{s\longrightarrow\infty}\big[\big\|e^{As}\big\|^{\frac{1}{s}}\big]^t < 1.$$

Das hipóteses do teorema e usando (2.10), temos

$$\sup_{\mu\in B}\big\|(\mu I - A)^{-1}\big\| \leq M, \;\text{ onde }\; B := \{i\beta;\, \beta\in\mathbb{R}\,\text{e}\,\|e^{i\beta}\|=1\}.$$

Sendo $S(t)=e^{At}$ um C_0-semigrupo de contração, $\|S(t)\|\leq 1$, segue da Etapa 2 que o espectro

$$\sigma\big(e^{At}\big) \subset B_1[0] := \{\lambda\in\mathbb{C};\, |\lambda|\leq 1\}.$$

Por (2.12), tem-se $e^\mu \in \rho(e^{At})$, onde $\mu\in i\mathbb{R}$. Em particular, $e^{i\theta}\in\rho(e^{At})$, $\forall\theta\in\mathbb{R}$. Logo, existe $\theta = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ tal que $e^{i\theta}=1$, donde segue que, $1\in\rho(e^{At})$. Ora, sendo

$$\sigma(e^{At})\subset B_1[0] \;\text{ e }\; 1\in\rho(e^{At})$$

então

$$\sigma(e^{At}) \subset B_1(0) = \{\lambda\in\mathbb{C};\, |\lambda|<1\}. \tag{2.13}$$

Como, os conjuntos $\sigma(e^{At})$ e $\rho(e^{At})$ são disjuntos e $\rho(e^{At})$ é aberto, concluímos que

$$\sigma(e^{At}) \text{ é fechado} \tag{2.14}$$

implicando por (2.13) e (2.14) que $\sigma(e^{At})$ é um conjunto compacto. Logo,

$$\sup\sigma(e^{At}) < 1.$$

Por definição, o raio espectral é dado por $R_E(e^{At}) = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(e^{At})} |\lambda|$. Por outro lado, pela Fórmula de Gelfand[1], para todo $t > 0$ temos

$$R_E(e^{At}) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \left\| e^{Atk} \right\|^{\frac{1}{k}}.$$

Fazendo $t \cdot k = s$, obtemos $k = \dfrac{s}{t}$. Daí,

$$R_E(e^{At}) = \lim_{\frac{s}{t} \to \infty} \left\| e^{As} \right\|^{\frac{1}{\frac{s}{t}}} = \lim_{s \to \infty} \left[\left\| e^{As} \right\|^{\frac{1}{s}} \right]^t < 1.$$

Por fim, sendo $\lim\limits_{s \longrightarrow \infty} \left\| e^{As} \right\|^{\frac{1}{s}} < 1$, segue que

$$\ln \lim_{s \to \infty} \left\| e^{As} \right\|^{\frac{1}{s}} < \ln 1.$$

De onde temos, pela continuidade da função *logartmo*, que

$$\lim_{s \to \infty} \ln \left\| e^{As} \right\|^{\frac{1}{s}} < 0,$$

o que implica,

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\ln \left\| e^{As} \right\|}{s} < 0.$$

Isto é, $\lim\limits_{s \to \infty} \dfrac{\ln \left\| e^{As} \right\|}{s} = -\gamma$, com $\gamma > 0$. Logo, por definição, dado $\epsilon > 0$, $\exists\ s_0 > 0$ tal que, se $s > s_0$ então

$$\left| \frac{\ln \left\| e^{As} \right\|}{s} + \gamma \right| < \epsilon.$$

De onde segue,

$$-\epsilon - \gamma < \frac{\ln \left\| e^{As} \right\|}{s} < \epsilon - \gamma.$$

Em particular, se $\epsilon = \dfrac{\gamma}{2} > 0$ tem-se

$$\frac{\ln \left\| e^{As} \right\|}{s} \leq -\frac{\gamma}{2} \quad \Rightarrow \quad \ln \left\| e^{As} \right\| \leq -\frac{\gamma s}{2}.$$

Portanto,

$$\left\| e^{As} \right\| \leq e^{-\gamma \frac{s}{2}},$$

como queríamos provar. ∎

[1] Ver Rivera [15]

Capítulo 3

Aplicações

Neste capítulo, estudaremos existência e unicidade de solução e estabilidade exponencial do semigrupo associado a modelos dissipativos. Para tal estudo, utilizaremos o método via semigrupo, enfatizando na terceira e última aplicação, a combinação do argumento de contradição com a técnica de multiplicadores como feito em [9].

3.1 Sistema Elástico

Estudaremos a equação da onda com condição de fronteira de Dirichlet nula. A qual é conhecida na literatura como "Equação do Telegráfo".

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \Delta u + \alpha u_t = 0, & \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty);\ \alpha > 0 \\ u(x,t) = 0 & \text{em} \quad \Gamma \times (0,\infty); \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{em} \quad \Omega; \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

3.1.1 Existência e Unicidade de Solução

Formulação Abstrata do Problema

No que segue, transformaremos o Problema (3.1) em um sistema abstrato de primeira ordem.

Defina $v = u_t$. Daí, $v_t = u_{tt} = \Delta u - \alpha v$. Assim, podemos escrever

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u - \alpha v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta I & -\alpha I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Considerando,

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}; \quad U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta I & -\alpha I \end{pmatrix}$$

e, a partir daí, reescrevemos a equação em (3.1) como

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} U = AU \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Escolha do espaço H

Fazendo o produto interno de $(3.1)_1$ com $u_t \in L^2(\Omega)$, sendo Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$, temos

$$\begin{aligned} (u_{tt},\, u_t) \;-\; (\Delta u,\, u_t) \;+\; \alpha(u_t,\, u_t) \;&=\; 0 \;\Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t|^2 \;-\; (\Delta u,\, u_t) \;+\; \alpha|u_t|^2 \;&=\; 0. \end{aligned}$$

o que implica

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t|^2 \;-\; \int_\Omega \Delta u(x,t) u_t(x,t) dx \;+\; \alpha|u_t|^2 \;=\; 0.$$

Aplicando o Teorema de Green e lembrando que u se anula na fronteira de Ω, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t|^2 \;+\; \int_\Omega \nabla u(x,t) \nabla u_t(x,t) dx \;+\; \alpha|u_t|^2 \;=\; 0.$$

Daí,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v|_2^2 \;+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u|_2^2 \;=\; -\alpha|u_t|_2^2$$

de onde segue,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}|\nabla u|_2^2 \;+\; \frac{1}{2}|v|_2^2\right) \;=\; -\alpha|u_t|_2^2. \tag{3.3}$$

Definindo

$$E(t) \;=\; \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2 + \frac{1}{2}|v|_2^2, \tag{3.4}$$

tem-se de (3.3) que, $\dfrac{d}{dt}E(t) = -\alpha|u_t|_2^2$.

Segue de (3.4) e de $(3.1)_2$ que o espaço H é dado por

$$H \;=\; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

com a norma

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_H^2 = \left|\nabla u\right|_{L^2(\Omega)}^2 + \left|v\right|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{3.5}$$

Considere o produto interno em H

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle_H = \big(\nabla u_1, \nabla u_2\big)_{L^2(\Omega)} + \big(v_1, v_2\big)_{L^2(\Omega)} \tag{3.6}$$

e observe que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$ e $\left|\nabla u\right|_{L^2(\Omega)}^2$ são equivalentes, pois,

$$\big\||u|\big\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \left|\nabla u\right|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left|\nabla u\right|_{L^2(\Omega)}^2 + \left|u\right|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

e, por outro lado, pela desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \;&=\; \left|\nabla u\right|_{L^2(\Omega)}^2 + \left|u\right|_{L^2(\Omega)}^2 \;\;\leq\;\; \left|\nabla u\right|_{L^2(\Omega)}^2 + C\left|\nabla u\right|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &=\; \big(1+C\big)\left|\nabla u\right|_{L^2(\Omega)}^2 \;\;=\;\; \big(1+C\big)\big\||u|\big\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\big\||u|\big\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \big(1+C\big)\big\||u|\big\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

ou, equivalentemente, existem constantes C_1 e C_2 tais que

$$C_1\left|\nabla u\right|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C_2\left|\nabla u\right|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{3.7}$$

De (3.7) resulta que, a norma (3.5) provém do produto interno (3.6), uma vez que, satisfaz a lei do paralelogramo.

De fato, sejam $\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \in H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Daí,

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\|_H^2 \;&=\; \left\| \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ v_1 + v2 \end{pmatrix} \right\|_H^2 = \left|\nabla(u_1+u_2)\right|_{L^2(\Omega)}^2 + \left|v_1+v_2\right|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &=\; \left|\nabla u_1 + \nabla u_2\right|_{L^2(\Omega)}^2 \;+\; \left|v_1+v_2\right|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &=\; \left|\nabla u_1\right|_{L^2(\Omega)}^2 \;+\; 2\big(\nabla u_1, \nabla u_2\big) \;+\; \left|\nabla u_2\right|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+\; \left|v_1\right|_{L^2(\Omega)}^2 \;+\; 2\big(v_1, v_2\big) \;+\; \left|v_2\right|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \tag{3.8}$$

e

$$\begin{aligned}
\left\|\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}\right\|_H^2 &= \left\|\begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ v_1 - v_2 \end{pmatrix}\right\|_H^2 = \Big|\nabla(u_1 - u_2)\Big|^2_{L^2(\Omega)} + \Big|v_1 - v_2\Big|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \big|\nabla u_1 - \nabla u_2\big|^2_{L^2(\Omega)} + \big|v_1 - v_2\big|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \big|\nabla u_1\big|^2_{L^2(\Omega)} - 2\big(\nabla u_1, \nabla u_2\big) + \big|\nabla u_2\big|^2_{L^2(\Omega)} + \\
&+ \big|v_1\big|^2_{L^2(\Omega)} - 2\big(v_1, v_2\big) + \big|v_2\big|^2_{L^2(\Omega)}. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Somando (3.8) e (3.9) obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}\right\|_H^2 &+ \left\|\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}\right\|_H^2 = \\
&= 2\big|\nabla u_1\big|^2_{L^2(\Omega)} + 2\big|v_1\big|^2_{L^2(\Omega)} + 2\big|\nabla u_2\big|^2_{L^2(\Omega)} + 2\big|v_2\big|^2_{L^2(\Omega)} = \\
&= 2\Big(\big|\nabla u_1\big|^2_{L^2(\Omega)} + \big|v_1\big|^2_{L^2(\Omega)} + \big|\nabla u_2\big|^2_{L^2(\Omega)} + \big|v_2\big|^2_{L^2(\Omega)}\Big) = \\
&= 2\left(\left\|\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}\right\|_H^2 + \left\|\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}\right\|_H^2\right). \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

H é um espaço de Hilbert com a norma (3.5)

Seja $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ uma sequência de Cauchy em H. O que implica, $\big(\nabla u_n\big)$ e $\big(v_n\big)$ são sequências de Cauchy em $L^2(\Omega)$ e, desde que, $L^2(\Omega)$ é um espaço completo, obtemos

$$\nabla u_n \longrightarrow z \in L^2(\Omega) \;\text{ e }\; v_n = u_{n_t} \longrightarrow v \in L^2(\Omega). \qquad (3.11)$$

Agora, usando a equivalência das normas em (3.7), segue que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $H_0^1(\Omega)$. Logo,

$$\begin{aligned}
u_n &\longrightarrow u \quad \text{em} \quad L^2(\Omega) \\
\nabla u_n &\longrightarrow z \quad \text{em} \quad L^2(\Omega).
\end{aligned}$$

De $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$, resulta que, $u_n \to u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e, de $\nabla u_n \longrightarrow z$ em $L^2(\Omega)$, obtemos $\nabla u_n \longrightarrow z$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, portanto,

$$\nabla u_n \longrightarrow \nabla u \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \qquad (3.12)$$

$$\nabla u_n \longrightarrow z \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega). \qquad (3.13)$$

Pela unicidade do limite em $\mathcal{D}'(\Omega)$, temos que $z = \nabla u$. De onde segue que, $\nabla u \in L^2(\Omega)$. Como $u = 0$ em Γ, obtemos $u \in H_0^1(\Omega)$ e, portanto

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ em } H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

mostrando que, H é um espaço de Hilbert.

Escolha do domínio $D(A)$ do operador A

Para a escolha de $D(A)$, A deve ser um operador fechado e densamente definido.

No cálculo da energia, devemos ter a derivada fraca de v bem definida, isto é, $v \in H_0^1(\Omega)$. Contudo, sendo $u_t \in L^2(\Omega)$, obtemos $\Delta u - \alpha v \in L^2(\Omega)$.

Assim,

$$A\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u - \alpha v \end{pmatrix} \in H$$

e, portanto, escolhemos

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H \; ; \; A\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) \in H \right\}.$$

3.1.2 Caracterização explícita de D(A)

Seja $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$. Note que, para o cálculo da energia, devemos integrar $\Delta u \cdot u_t$ e, como $u_t \in L^2(\Omega)$, é suficiente que $\Delta u \in L^2(\Omega)$. Então, $u \in H^2(\Omega)$ e, desde que, $u \in H_0^1(\Omega)$ resulta que

$$u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Além disso, $v \in H_0^1(\Omega)$. Portanto,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \big(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\big) \times H_0^1(\Omega).$$

Logo,

$$D(A) \subset \big(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\big) \times H_0^1(\Omega). \tag{3.14}$$

Por outro lado, seja

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \big(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\big) \times H_0^1(\Omega).$$

Como

$$u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \qquad \text{e} \qquad H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega), \tag{3.15}$$

temos,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \qquad \text{e} \qquad A\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u - \alpha v \end{pmatrix} \in H.$$

Logo, $u \in D(A)$ o que implica

$$\big(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\big) \times H_0^1(\Omega) \subset D(A). \tag{3.16}$$

Portanto, de (3.14) e (3.16) obtemos

$$D(A) = \big(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\big) \times H_0^1(\Omega). \qquad \square$$

Afirmação 3.1 *Seja $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ um operador linear:*

(i) *A é densamente definido;*

(ii) *A é um operador fechado.*

Demonstração: (i) A partir de (3.15) segue que

$$\overline{H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)}^{H_0^1(\Omega)} = H_0^1(\Omega) \quad e \quad \overline{H_0^1(\Omega)}^{L^2(\Omega)} = L^2(\Omega).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \overline{D(A)}^{H} &= \overline{H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)}^{H_0^1(\Omega)} \times \overline{H_0^1(\Omega)}^{L^2(\Omega)} = \\ &= \overline{\big(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\big) \times H_0^1(\Omega)}^{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} = \\ &= H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) = H. \end{aligned}$$

(ii) Seja $z_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \in D(A) \subset H$ tal que

$$A(z_n) = A\left(\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v_n \\ \Delta u_n - \alpha v_n \end{pmatrix} \in H.$$

Então,

$$\big(z_n,\, A(z_n)\big) \longrightarrow \big(z,\, w\big) \;\text{ em }\; H \times H, \quad \text{onde } z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A).$$

Vamos mostrar que, o gráfico $G(A)$ de A é um conjunto fechado. Para isto, basta provar que $w = A(z)$.

Considere $w = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$. Como $A(z_n) = \begin{pmatrix} v_n \\ \Delta u_n - \alpha v_n \end{pmatrix} \longrightarrow w = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ em H e

$$z_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = z \text{ em } H.$$

Desde que, $v_n \to u_1$ em $H_0^1(\Omega)$, temos que, $v_n \to u_1$ em $L^2(\Omega)$. Mas, $v_n \to v$ em $L^2(\Omega)$. Logo, pela unicidade do limite em $L^2(\Omega)$, obtemos, $v = u_1$.

Agora, como $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$ então $u_n \to u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e, consequentemente, $\Delta u_n \to \Delta u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Uma vez que, $\Delta u_n - \alpha v_n \to v_1$ em $L^2(\Omega)$ implica que $\Delta u_n - \alpha v_n \to v_1$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Sendo $\mathcal{D}'(\Omega)$ um espaço vetorial e $\alpha v_n \to \alpha v$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, temos que

$$\Delta u_n - \alpha v_n \longrightarrow \Delta u - \alpha v \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Logo, pela unicidade do limite em $\mathcal{D}'(\Omega)$,

$$v_1 = \Delta u - \alpha v.$$

Portanto,

$$w = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u - \alpha v \end{pmatrix} = A\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right).$$

■

Teorema 3.2 *O operador A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em H.*

Demonstração: Para $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta I & -\alpha I \end{pmatrix}$ temos,

$$\begin{aligned} \langle AU, U \rangle_H &= \left(\begin{pmatrix} v \\ \Delta u - \alpha v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) = \\ &= (\nabla u, \nabla v)_{H_0^1(\Omega)} + \big((\Delta u - \alpha v), v \big)_{L^2(\Omega)} = \\ &= (\nabla u, \nabla v) + (\Delta u, v) - \alpha (v, v) = \\ &= (\nabla u, \nabla v) + \int_\Omega \Delta u(x, t) v(x, t) dx - \alpha \int_\Omega |v(x,t)|^2 dx. \end{aligned}$$

Usando o Teorema de Green e lembrando que $v = u_t = 0$ na fronteira de Ω, temos que o lado direito da igualdade acima é igual a:

$$\begin{aligned}\big(\nabla u,\, \nabla v\big) - \int_\Omega \nabla u(x,\, t)\nabla v(x,\, t)dx \quad &- \quad \alpha \int_\Omega |v(x,t)|^2 dx \;= \\ &= \quad -\alpha \int_\Omega |v(x,t)|^2 dx \;\leq\; 0. \qquad (3.17)\end{aligned}$$

Mostrando que A é dissipativo.

Agora, provaremos que $0 \in \rho(A)$. Para isto, seja $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ então, existe uma única $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$ tal que

$$-\,AU \;=\; F. \qquad (3.18)$$

Com efeito, $-AU \;=\; F \;\Longrightarrow\; \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u + \alpha v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$

Assim,

$$\left\{\begin{array}{rcl} -v & = & f \;\Rightarrow\; v \;=\; -f \in H_0^1(\Omega) \\ -\Delta u + \alpha v & = & g \end{array}\right. \qquad (3.19)$$

Substituindo, $(3.19)_1$ em $(3.19)_2$ obtemos $-\Delta u = \alpha f + g$, daí

$$\left\{\begin{array}{rclll} -\Delta u & = & \alpha f + g & \text{em} & Q \;=\; \Omega \times (0,\, \infty) \\ u & = & 0 & \text{em} & \Gamma \times (0, \infty). \end{array}\right. \qquad (3.20)$$

Desde que, $f \in H_0^1(\Omega)$ e $g \in L^2(\Omega)$ segue que $\alpha f + g \in L^2(\Omega)$. Aplicando o Teorema $(A.18)$ temos que existe uma única solução fraca do Problema (3.20) tal que $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Daí e, de $(3.19)_1$ segue que $v \in H_0^1(\Omega)$, uma vez que, $f \in H_0^1(\Omega)$. Assim, (3.18) possui uma única solução,

$$(u,\, v)^T \in \big(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\big) \times H_0^1(\Omega).$$

Ou seja,

$$\exists!\; U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A) \;\text{ tal que }\; (0 \cdot I - A)U = F.$$

De onde temos que $0 \in \rho(A)$.

Como $\overline{D(A)} = H$, A é dissipativo e $0 \in \rho(A)$, pela Proposição 1.32, A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações. ∎

Do Corolário 1.15, obtemos que $U(t) = S(t)U(0)$ é a única solução do problema (3.2) e,

$$U \in C\left([0,\, \infty);\, D(A)\right) \cap C^1\left([0,\, \infty);\, H\right),$$

isto implica,

$$\begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} \in C\Big(\,[0,\, \infty);\, \big(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\big) \times H_0^1(\Omega)\,\Big) \cap C^1\Big(\,[0,\, \infty);\, H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)\,\Big),$$

isto é,

$$u \in C\big([0,\, \infty);\, (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))\big) \cap C^1\big([0,\, \infty);\, H_0^1(\Omega)\big);$$

$$u_t \in C^1\big([0,\, \infty);\, L^2(\Omega)\big) \Rightarrow u \in C^2\big([0,\, \infty);\, L^2(\Omega)\big).$$

Daí, temos

$$u \in C\Big(\,[0,\, \infty);\, H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\,\Big) \cap C^1\Big(\,[0,\, \infty);\, H_0^1(\Omega)\,\Big) \cap C^2\Big(\,[0,\, \infty);\, L^2(\Omega)\,\Big).$$

3.1.3 Decaimento Exponencial

Teorema 3.3 *O C_0-semigrupo de contrações $\{e^{At}\}_{t\geq 0}$ gerado pelo operador linear ilimitado A, definido por*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta I & -\alpha I \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

satisfaz

$$\left\|e^{At}\right\|_{\mathcal{L}(H)} \leq Me^{-\omega t}, \;\; \forall\, t \geq 0 \;\; com \;\; M \geq 1 \;\; e \;\; \omega > 0. \tag{3.22}$$

Demonstração: Sendo $H = H_0^1(\Omega) \times H^2(\Omega)$ e $D(A) = \big(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\big) \times H_0^1(\Omega)$, pela Proposição 1.32, vimos que, A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contração. Sendo assim, para garantirmos que (3.22) é satisfeita, pelo Teorema de Gearhart, é suficiente mostrar que

$$\big\{i\beta\,;\; \beta \in \mathbb{R}\big\} \subseteq \rho(A) \tag{3.23}$$

e

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty. \tag{3.24}$$

E, isto será feito por contradição, negando (3.23) e (3.24).

Primeiramente, note que, da Proposição 1.32, se $0 \in \rho(A)$ então

$$i\beta I - A = A(i\beta A^{-1} - I) \text{ é invertível, } \forall\, \beta \in \mathbb{R},$$

desde que

$$0 < |i\beta| = |\beta| < \left\|A^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(H)}^{-1}. \tag{3.25}$$

Ademais, a aplicação

$$\beta \longmapsto \left\|(i\beta I - A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(H)}$$

é contínua no intervalo $J := \Big(-\left\|A^{-1}\right\|^{-1}, \left\|A^{-1}\right\|^{-1}\Big)$, já que $\big(i\beta I - A\big)^{-1}$ é linear e limitado, $\forall\, \beta \in J$.

Agora, suponha que (3.23) não ocorre. Então, $(i\beta I - A)$ não é invertível para $\beta \in \mathbb{R}$. Logo, (3.25) não ocorre. Assim, existe $\gamma \in \mathbb{R}$ com

$$\left\|A^{-1}\right\|^{-1} \leq |\gamma| < \infty,$$

tal que

$$\big\{i\beta\ ;\ |\beta|\ <\ |\gamma|\big\} \subset \rho(A), \tag{3.26}$$

e

$$\sup\Big\{\left\|\big(i\beta I - A\big)^{-1}\right\|\ ;\ |\beta| < |\gamma|\Big\} = \infty. \tag{3.27}$$

De (3.27) sendo $\beta \in \big(-|\gamma|, |\gamma|\big) \subset \mathbb{R}$, existe uma sequência $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ com $\beta_n \in \big(-|\gamma|, |\gamma|\big)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ tal que $\beta_n \longmapsto \gamma$ quando $n \to \infty$ e, existe também, uma sequência de funções vetoriais complexas $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $W_n \in H$ tal que

$$\frac{\left\|\big(i\beta_n I - A\big)^{-1} W_n\right\|}{\left\|W_n\right\|} \geq n, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\left\|\big(i\beta_n I - A\big)^{-1} W_n\right\| \geq n\left\|W_n\right\|, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.28}$$

Como A é o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo, pelo o Teorema de Lumer-Phillips, A é $m - dissipativo$ em H. Uma vez que, $\big(W_n\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$, existe uma única sequência $\big(U_n\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ com norma unitária em H, isto é,

$$\left\|U_n\right\|_H^2 \ = \ \left|\nabla u_n\right|_{L^2(\Omega)}^2, + |v_n|_{L^2(\Omega)}^2 \ = \ 1 \tag{3.29}$$

tal que

$$\big(i\beta_n I - A\big)U_n \;=\; W_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.30}$$

Daí, e de (3.28) temos $U_n \;=\; \big(i\beta_n I - A\big)^{-1} W_n$ e

$$\frac{\big\|\big(i\beta_n I - A\big)^{-1} W_n\big\|}{\big\|W_n\big\|} \;=\; \frac{\big\|U_n\big\|}{\big\|\big(i\beta_n I - A\big)U_n\big\|} \geq\; n, \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ou seja,

$$\big\|\big(i\beta_n I - A\big)U_n\big\| \leq \frac{1}{n}\big\|U_n\big\|, \quad \text{com} \;\; \big\|U_n\big\|_H \;=\; 1. \tag{3.31}$$

Passando ao limite em (3.31) quando $n \to \infty$, obtemos

$$\big\|\big(i\beta_n I - A\big)U_n\big\|_H \longrightarrow 0. \tag{3.32}$$

Logo,

$$\left\| \begin{pmatrix} i\beta_n u_n \\ i\beta_n v_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_n \\ \Delta u_n - \alpha v_n \end{pmatrix} \right\|_H \longrightarrow 0.$$

e, portanto

$$\left\{ \begin{array}{rcl} i\beta_n u_n \;-\; v_n & \xrightarrow{forte} & 0 \;\text{ em }\; H_0^1(\Omega) \;\text{ quando }\; n \to \infty \\ i\beta_n v_n \;-\; \Delta u_n \;+\; \alpha v_n & \xrightarrow{forte} & 0 \;\text{ em }\; L^2(\Omega) \;\text{ quando }\; n \to \infty. \end{array} \right. \tag{3.33}$$

Tomando o produto escalar de U_n com $\big(i\beta_n I - A\big)U_n$ em H, tem-se

$$\begin{aligned} \Big(\big(i\beta_n I - A\big)U_n,\, U_n\Big)_H \;&=\; \big(i\beta_n U_n,\, U_n\big)_H \;-\; \big(AU_n,\, U_n\big)_H \;= \\ &=\; \bar{i}\beta_n\big(U_n,\, U_n\big)_H \;-\; \left(\begin{bmatrix} v_n \\ \Delta u_n - \alpha v_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}\right)_H \\ &=\; \bar{i}\beta_n\big\|U_n\big\|_H^2 \;-\; \big[\big(\nabla u_n,\, \nabla v_n\big)_{L^2} \;+\; \big(\Delta u_n - \alpha v_n,\, v_n\big)_{L^2}\big] \\ &=\; \bar{i}\beta_n\big\|U_n\big\|_H^2 - \int_\Omega \nabla u_n \nabla v_n - \int_\Omega (\Delta u_n - \alpha v_n) v_n \\ &=\; \bar{i}\beta_n\big\|U_n\big\|_H^2 - \int_\Omega \nabla u_n \nabla v_n - \\ &-\; \int_\Omega \Delta u_n v_n \;+\; \int_\Omega \alpha |v_n|_{\mathbb{R}}^2 dx \\ &. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Usando o Teorema de Green e o fato de $u = 0$ em Γ, obtemos

$$\Big(\big(i\beta_n I - A\big)U_n,\, U_n\Big)_H \;=\; \bar{i}\beta_n\big\|U_n\big\|_H^2 \;+\; \alpha \int_\Omega |v_n|_{\mathbb{R}}^2\, dx.$$

Daí,

$$Re\Big(\big(i\beta_n I - A\big)U_n,\, U_n\Big)_H = \alpha\big|v_n\big|^2_{L^2}.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, e usando o fato que $D(A) \hookrightarrow H$ e $\|U_n\| = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\alpha\big|v_n\big|^2_{L^2} &\leq \Big|\Big(\big(i\beta_n I - A\big)U_n,\, U_n\Big)\Big|_H \\
&\leq \big\|(i\beta_n I - A)U_n\big\|_H \big\|U_n\big\|_H \\
&\leq \big\|(i\beta_n I - A)U_n\big\|_H k\big\|U_n\big\|_{D(A)} \\
&\leq k\big\|(i\beta_n I - A)U_n\big\| \longrightarrow 0 \text{ por } (3.32)
\end{aligned}$$

portanto,

$$v_n \longrightarrow 0 \text{ forte em } L^2(\Omega). \tag{3.35}$$

Daí e, de $(3.33)_2$ obtém-se que

$$\Delta u_n \longrightarrow 0 \text{ forte em } L^2(\Omega). \tag{3.36}$$

Como

$$u_n \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

temos, pela equivalência das normas, que

$$\big|\nabla u_n\big|_{L^2(\Omega)} \leq \big|\Delta u_n\big|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u_n \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Então, de (3.36) seque que

$$u_n \longrightarrow 0 \text{ forte em } H_0^1(\Omega). \tag{3.37}$$

De $(3.35) - (3.37)$ resulta que

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \longrightarrow 0 \text{ forte em } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Logo,

$$\Big\|U_n\Big\|^2_H = \big|\nabla u_n\big|^2_{L^2(\Omega)} + \big|v_n\big|^2_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0,$$

o que contradiz (3.29). Portanto, (3.23) é verdade.

Para mostrarmos (3.24), suponha por contradição que

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \big\|(\lambda I - A)^{-1}\big\|_H = \infty, \quad \text{onde} \;\; \lambda = i\beta. \tag{3.38}$$

Daí, existe uma sequência de funções complexas $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $W_n \in H$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\frac{\big\|(\lambda_n I - A)^{-1} W_n\big\|_H}{\big\|W_n\big\|_H} \geq n, \quad \forall \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Donde,

$$\big\|(\lambda_n I - A)^{-1} W_n\big\|_H \geq n\big\|W_n\big\|_H, \quad \forall \;\; n \in \mathbb{N}. \tag{3.39}$$

Desde que A é m-dissipativo em H, para toda sequência $(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ e $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, existe uma única sequência $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ com $\big\|U_n\big\|_H = 1$, tal que

$$\big(\lambda_n I - A\big)U_n \; = \; W_n, \quad \forall \, n \in \mathbb{N}.$$

Daí, e de (3.39) resulta

$$\frac{\big\|(\lambda_n I - A)^{-1} W_n\big\|_H}{\big\|W_n\big\|_H} \; = \; \frac{\big\|U_n\big\|}{\big\|(\lambda_n I - A)U_n\big\|} \geq n, \quad \forall \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Ou seja,

$$\big\|(\lambda_n I - A)U_n\big\| \leq \frac{1}{n}\big\|U_n\big\|. \tag{3.40}$$

Definindo

$$Z_n := \big(\lambda_n I - A\big)U_n, \tag{3.41}$$

temos de (3.40) e de $\|U_n\| = 1$, que

$$\big\|Z_n\big\|_H \leq \frac{1}{n}\big\|U_n\big\| \; = \; \frac{1}{n}.$$

Logo,

$$\big\|Z_n\big\|_H \overset{forte}{\longrightarrow} 0 \;\; \text{em} \;\; H, \; \text{quando} \; n \to \infty. \tag{3.42}$$

Tomando o produto escalar de U_n com Z_n em H, resulta que

$$\begin{aligned} \big(U_n,\, Z_n\big)_H \;&=\; \big(U_n,\, (\lambda_n I - A)U_n\big)_H \\ &=\; \lambda_n\big(U_n,\, U_n\big)_H \;-\; \big(AU_n,\, U_n\big)_H \\ &=\; \lambda_n\big\|U_n\big\|_H^2 \;+\; \alpha\big|v_n\big|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Daí, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e do fato que $D(A) \hookrightarrow H$ e que $\|U_n\| = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} Re\big(U_n,\, Z_n\big) &= \alpha\big|v_n\big|^2_{L^2(\Omega)} \leq \big|\big(Z_n,\, U_n\big)\big| \\ &\overset{C.S.}{\leq} \big\|Z_n\big\|_H \big\|U_n\big\|_H \\ &\leq \big\|Z_n\big\|_H C \big\|U_n\big\|_{D(A)}, \\ &= C\big\|Z_n\big\| \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{3.44}$$

$$v_n \longrightarrow 0 \ \text{ forte em } \ L^2(\Omega). \tag{3.45}$$

A partir de (3.41) e considerando $Z_n = \begin{pmatrix} z_n^1 \\ z_n^2 \end{pmatrix}$, obtemos

$$\begin{pmatrix} \lambda_n u_n \\ \lambda_n v_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_n \\ \Delta u_n - \alpha v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_n^1 \\ z_n^2 \end{pmatrix}.$$

O que implica,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_n u_n - v_n &=& z_n^1 \\ \lambda_n v_n - \Delta u_n + \alpha v_n &=& z_n^2. \end{array} \right. \tag{3.46}$$

De (3.45) e $(3.46)_2$ temos

$$\Delta u_n \longrightarrow 0 \ \text{ forte em } \ L^2(\Omega). \tag{3.47}$$

Daí, pela equivalência das normas, temos que, para todo $u_n \in H_0^1(\Omega)$,

$$u_n \longrightarrow 0 \ \text{ forte em } \ H_0^1(\Omega). \tag{3.48}$$

Logo, de (3.45) e (3.48), obtemos

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \longrightarrow 0 \ \text{ forte em } \ H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega). \tag{3.49}$$

Mas, isto é um absurdo, pois, contradiz o fato de $\Big\|U_n\Big\|_H^2 = 1$. De onde temos que, (3.24) é verdade.

Portanto, verificadas as condições (3.23) e (3.24), do Teorema de Gearhart, obtemos que (3.22) é satisfeita. ∎

3.2 Sistema Termoelástico

Provaremos a estabilidade exponencial do semigrupo associado ao sistema termoelástico unidimensional linear. Consideremos uma barra de comprimento l com densidade unitária. Denotaremos por u o deslocamento transversal e por θ a diferença de temperatura entre uma barra e o meio ambiente. As equações descritas no sistema abaixo são ditas equação do momento e equação da energia, respectivamente.

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx} + a\theta_x = 0 & \text{em} \quad (0,\, l) \times (0, \infty), \ a > 0, \\ \theta_t - \theta_{xx} + au_{xt} = 0 & \text{em} \quad (0,\, l) \times (0, \infty), \\ u(0,\, t) \ = \ u(l,\, t) \ = \ 0 & \text{para} \quad t > 0, \\ \theta(0,\, t) \ = \ \theta(l,\, t) \ = \ 0 & \text{para} \quad t > 0, \\ u(x, 0) \ = \ u_0(x) & \text{em} \quad (0,\, l), \\ u_t(x, 0) \ = \ u_1(x) & \text{em} \quad (0,\, l), \\ \theta(x, 0) \ = \ \theta_0(x) & \text{em} \quad (0,\, l). \end{cases} \tag{3.50}$$

A fim de encontrarmos existência e unicidade de solução para o problema (3.50) via semigrupo, transformaremos o modelo acima em um Problema Abstrato linear.

3.2.1 Existência e Unicidade de Solução

Formulação Abstrata do Problema

Seja $v = u_t$. Assim, $v_t = u_{tt} = u_{xx} - a\theta_x$. Daí, sendo $U(t) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix}$ então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U &= \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ \theta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u_{xx} - a\theta_x \\ \theta_{xx} - au_{xt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u_{xx} - a\theta_x \\ -av_x + \theta_{xx} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ (\cdot)_{xx} & 0 & -a(\cdot)_x \\ 0 & -a(\cdot)_x & (\cdot)_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Considere,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ (\cdot)_{xx} & 0 & -a(\cdot)_x \\ 0 & -a(\cdot)_x & (\cdot)_{xx} \end{pmatrix};\ U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix};\ U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \theta_0 \end{pmatrix}$$

A partir daí, temos que o Problema (3.50) é equivalente ao problema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U &= AU \\ U(0) &= U_0. \end{cases} \tag{3.51}$$

Escolha do espaço H

Fazendo o produto interno de $(3.50)_1$ com $u_t \in L^2(0,l)$, com $(0,l) \subset \mathbb{R}$ temos

$$(u_{tt},\, u_t) - (u_{xx},\, u_t) + (a\theta_x,\, u_t) = 0.$$

Admitindo regularidade para refazer os cálculos, obtemos

$$(a\theta_x,\, u_t) = -(\theta,\, au_{xt}).$$

Sendo assim,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t|^2_{L^2(0,l)} - \int_0^l u_{xx}(x,t)\, u_t(x,t)dx - (\theta, au_{xt}) = 0.$$

Aplicando o Teorema de Green e por $(3.50)_3$, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t|^2_{L^2(0,l)} + \int_0^l u_x(x,t)u_{xt}(x,t)dx - (\theta,\, \theta_{xx} - \theta_t) = 0.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t|^2_{L^2(0,l)} + (u_x,\, u_{xt})_{L^2(0,l)} - (\theta_{xx},\, \theta) + (\theta,\, \theta_t) = 0,$$

o que implica

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v|^2_{L^2(0,l)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_x|^2_{L^2(0,l)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\theta|^2_{L^2(0,l)} = (\theta_{xx},\, \theta)$$

e, isto implica

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}|u_x|^2_{L^2(0,l)} + \frac{1}{2}|v|^2_{L^2(0,l)} + \frac{1}{2}|\theta|^2_{L^2(0,l)}\Big) = -|\theta_x|^2_{L^2(0,l)}. \tag{3.52}$$

Definindo

$$E(t) = \frac{1}{2}|u_x|^2_{L^2(0,l)} + \frac{1}{2}|v|^2_{L^2(0,l)} + \frac{1}{2}|\theta|^2_{L^2(0,l)}, \tag{3.53}$$

tem-se de (3.52) que, $\dfrac{d}{dt}E(t) = -\left|\theta_x\right|^2_{L^2(0,l)}$.

De (3.53) e de $(3.50)_3$ tem-se que o espaço H onde a energia está definida é:

$$H \;=\; H^1_0(0,\, l) \times L^2(0,\, l) \times L^2(0,\, l)$$

com a norma
$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} \right\|^2_H = \left|u_x\right|^2_{L^2(0,l)} + \left|v\right|^2_{L^2(0,l)} + \left|\theta\right|^2_{L^2(0,l)}. \tag{3.54}$$

Considerando o produto interno usual em H

$$\left\langle (u_1, v_1, \theta_1)^t\,, (u_2, v_2, \theta_2)^t \right\rangle_H = \big(u_{x1},\, u_{x2}\big)_{L^2(0,l)} + \big(v_1,\, v_2\big)_{L^2(0,l)} + \big(\theta_1,\, \theta_2\big)_{L^2(0,l)} \tag{3.55}$$

e como $\left\|u\right\|^2_{H^1_0(0,l)}$ e $\left\|\left|u\right|\right\|^2_{H^1_0(0,l)} = \left|u_x\right|^2_{L^2(0,l)}$ são equivalentes, logo, existem constantes C e $\widetilde{C}$ tais que

$$C\left|u_x\right|^2_{L^2(0,l)} \leq \left\|u\right\|^2_{H^1_0(0,l)} \leq \widetilde{C}\left|u_x\right|^2_{L^2(0,l)}. \tag{3.56}$$

Usando a equivalência em (3.56) segue que, a norma em (3.54) é proveniente do produto interno (3.55), já que, satisfaz a lei do paralelogramo.

Com efeito, sejam $\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \in H = H^1_0(0, l) \times L^2(0, l) \times L^2(0, l)$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \right\|^2_H &= \left\| \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ v_1 + v_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \end{pmatrix} \right\|^2_H = \left|(u_1 + u_2)_x\right|^2_{L^2(0,l)} + \\
&+ \left|v_1 + v_2\right|^2_{L^2(0,l)} + \left|\theta_1 + \theta_2\right|^2_{L^2(0,l)} \\
&= \left|u_{1x} + u_{2x}\right|^2_{L^2(0,l)} + \left|v_1 + v_2\right|^2_{L^2(0,l)} + \left|\theta_1 + \theta_2\right|^2_{L^2(0,l)} \\
&= \left|u_{1x}\right|^2 + 2\big(u_{1x}, u_{2x}\big) + \left|u_{2x}\right|^2 + \\
&+ \left|v_1\right|^2 + 2\big(v_1, v_2\big) + \left|v_2\right|^2 + \\
&+ \left|\theta_1\right|^2 + 2\big(\theta_1, \theta_2\big) + \left|\theta_2\right|^2.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \right\|_H^2 &= \left\| \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ v_1 - v_2 \\ \theta_1 - \theta_2 \end{pmatrix} \right\|_H^2 = \left|(u_1 - u_2)_x\right|_{L^2(0,l)}^2 + \\
&+ \left|v_1 - v_2\right|_{L^2(0,l)}^2 + \left|\theta_1 - \theta_2\right|_{L^2(0,l)}^2 \\
&= \left|u_{1x} - u_{2x}\right|_{L^2(0,l)}^2 + \left|v_1 - v_2\right|_{L^2(0,l)}^2 + \left|\theta_1 - \theta_2\right|_{L^2(0,l)}^2 \\
&= \left|u_{1x}\right|^2 - 2\big(u_{1x}, u_{2x}\big) + \left|u_{2x}\right|^2 + \\
&+ \left|v_1\right|^2 - 2\big(v_1, v_2\big) + \left|v_2\right|^2 + \\
&+ \left|\theta_1\right|^2 - 2\big(\theta_1, \theta_2\big) + \left|\theta_2\right|^2. \qquad (3.58)
\end{aligned}
$$

De (3.57) e (3.58), obtemos

$$
\begin{aligned}
\left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \right\|_H^2 &+ \left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \right\|_H^2 = \\
&= 2\left|u_{1x}\right|^2 + 2\left|u_{2x}\right|^2 + 2\left|v_1\right|^2 + 2\left|v_2\right|^2 + 2\left|\theta_1\right|^2 + 2\left|\theta_2\right|^2 \\
&= 2\Big(\left|u_{1x}\right|^2 + \left|v_1\right|^2 + \left|\theta_1\right|^2 + \left|u_{2x}\right|^2 + +\left|v_2\right|^2 + \left|\theta_2\right|^2\Big) \\
&= 2\left(\left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \right\|\right).
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que H munido da norma (3.54) é um espaço de Hilbert.

De fato, seja $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ \theta_n \end{pmatrix} \in H$ uma sequência de Cauchy em H. Logo, $\big(u_{nx}\big)$, (v_n) e (θ_n) são sequências de Cauchy em $L^2(0,\, l)$. Como $L^2(0,\, l)$ é um espaço vetorial normado completo, tem-se

$$
\begin{aligned}
u_{nx} &\longrightarrow z \quad \text{em} \quad L^2(0,l); \\
v_n = u_{nt} &\longrightarrow v \quad \text{em} \quad L^2(0,l); \qquad (3.59) \\
\theta_n &\longrightarrow \theta \quad \text{em} \quad L^2(0,l).
\end{aligned}
$$

Da equivalência das normas em (3.56), obtemos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $H_0^1(0,l)$.

Logo,

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em} \quad L^2(0,l) \ \Rightarrow \ u_n \longrightarrow u \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(0,l)$$

e

$$u_{nx} \longrightarrow z \quad \text{em} \quad L^2(0,l),$$

o que implica

$$\begin{aligned} u_{nx} &\longrightarrow u_x \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,l) \\ u_{nx} &\longrightarrow z \quad \ \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,l). \end{aligned}$$

Pela unicidade do limite em $\mathcal{D}'(0,l)$, tem-se $z = u_x$. Logo, $u \in H_0^1(0,l)$ e, portanto

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ \theta_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} \quad \text{em } \ H = H_0^1(0,l) \times L^2(0,l) \times L^2(0,l).$$

Portanto, H é um espaço de Hilbert.

Escolha do domínio D(A) do operador A

Devemos escolher $D(A)$ de tal modo que, A seja fechado e densamente definido. Note que, para o cálculo da energia, $v = u_t$ deve possuir a derivada fraca v_x bem definida e, por $(3.50)_3$, $v \in H_0^1(0,l)$. Daí, $v_x \in L^2(0,l)$ e, consequentemente, $av_x \in L^2(0,l),\ a \in \mathbb{R}$.

Além disso, também devemos integrar $u_{xx} \cdot u_t$ e $a\theta_x \cdot u_t$. Como $u_t \in L^2(0,l)$, é suficiente que $u_{xx},\ \theta_x \in L^2(0,l)$ e, sendo $L^2(0,l)$ um espaço vetorial, $u_{xx} - a\theta_x \in L^2(0,l)$. Por um raciocínio análogo, temos que $-av_x + \theta_{xx} \in L^2(0,l)$ pois, para o cálculo da energia o produto interno $(\theta_{xx}, \theta) \in L^2(0,l)$ deve está bem definido, o qual, representa a dissipação de energia da onda. Sendo assim, obtemos

$$A\left(\begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v \\ u_{xx} - a\theta_x \\ -av_x + \theta_{xx} \end{pmatrix} \in H = H_0^1(0,l) \times L^2(0,l) \times L^2(0,l).$$

Daí,

$$D(A)=\left\{\begin{bmatrix}u\\v\\\theta\end{bmatrix}\in H\,;\,A\left(\begin{bmatrix}u\\v\\\theta\end{bmatrix}\right)\in H\right\}.$$

3.2.2 Caracterização explícita de D(A)

Seja $\begin{bmatrix}u\\v\\\theta\end{bmatrix}\in D(A)$. Como, do cálculo da energia, $u_{xx}\in L^2(0,l)$ então $u\ \in\ H^2(0,l)$. Desde que, $u\in H_0^1(0,l)$ implica que $u\in H_0^1(0,l)\cap H^2(0,l)$. Além disso, $v\in H_0^1(0,l)$. Por outro lado, temos que θ "se anula na fronteira"e possui derivada fraca bem definida, isto é, θ_x, $\theta_{xx}\in L^2(0,l)$. Daí, $\theta\in H_0^1(0,l)\cap H^2(0,l)$. Portanto,

$$\begin{bmatrix}u\\v\\\theta\end{bmatrix}\in\Big(H_0^1(0,l)\cap H^2(0,l)\Big)\times H_0^1(0,l)\times\Big(H_0^1(0,l)\cap H^2(0,l)\Big). \tag{3.60}$$

Por outro lado, dado

$$\begin{bmatrix}u\\v\\\theta\end{bmatrix}\in\Big(H_0^1(0,l)\cap H^2(0,l)\Big)\times H_0^1(0,l)\times\Big(H_0^1(0,l)\cap H^2(0,l)\Big),$$

desde que,

$$H_0^1(0,l)\cap H^2(0,l)\subset H_0^1(0,l)\ \text{ e }\ H_0^1(0,l)\hookrightarrow L^2(0,l),$$

tem-se

$$\begin{pmatrix}u\\v\\\theta\end{pmatrix}\in D(A)=\left\{\begin{pmatrix}u\\v\\\theta\end{pmatrix}\in H\,;\,\begin{pmatrix}v\\u_{xx}-a\theta_x\\-av_x+\theta_{xx}\end{pmatrix}\in H\right\}.$$

Portanto,

$$D(A)=\Big(H_0^1(0,l)\cap H^2(0,l)\Big)\times H_0^1(0,l)\times\Big(H_0^1(0,l)\cap H^2(0,l)\Big).$$

No que segue, temos o seguinte resultado:

Afirmação 3.4 *Seja $A:D(A)\subset H\longrightarrow H$ um operador linear. Então:*

(1) *A é densamente definido em H;*

(2) *A é um operador fechado.*

Demonstração: (1) A é densamente definido em H. Com efeito, como

$$\overline{H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)}^{H_0^1(0,l)} = H_0^1(0,l); \qquad \overline{H_0^1(0,l)}^{L^2(0,l)} = L^2(0,l)$$

e

$$\overline{H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)}^{L^2(0,l)} = L^2(0,l).$$

Tem-se,

$$\begin{aligned} \overline{D(A)}^{H} &= \overline{H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)}^{H_0^1(0,l)} \times \overline{H_0^1(0,l)}^{L^2(0,l)} \times \overline{H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)}^{L^2(0,l)} \\ &= H_0^1(0,l) \times L^2(0,l) \times L^2(0,l) = H. \end{aligned} \tag{3.61}$$

(2) $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ é um operador fechado.

Vamos mostrar que o gráfico de A, definido por

$$G(A) = \big\{(z, A(z)) \in H \times H\,;\, z \in D(A)\big\}$$

é um subconjunto fechado de $H \times H$.

Seja $z_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ \theta_n \end{pmatrix} \in D(A) \subset H$. Logo,

$$\begin{aligned} A(z_n) = A\left(\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ \theta_n \end{bmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & I & o \\ (\cdot)_{xx} & 0 & -a(\cdot)_x \\ 0 & -a(\cdot)_x & (\cdot)_{xx} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ \theta_n \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} v_n \\ u_{n,xx} - a\theta_{n,x} \\ -av_{n,x} + \theta_{n,xx} \end{pmatrix} \in H. \end{aligned}$$

Então,

$$\big(z_n,\, A(z_n)\big) \longrightarrow \big(z,\, w\big) \text{ em } H \times H, \text{ com } z = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} \in D(A).$$

Mostraremos que $A(z) = w$.

Considere então, $w = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \in H$. Como,

$$A(z_n) = \begin{pmatrix} v_n \\ u_{n,xx} - a\theta_{n,x} \\ -av_{n,x} + \theta_{n,xx} \end{pmatrix} \longrightarrow w = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

e

$$z_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ \theta_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} = z \text{ em } H$$

temos que,

$$\begin{aligned} v_n &\longrightarrow u_1 \quad \text{em} \quad H_0^1(0,l) \;\Rightarrow\; v_n \longrightarrow u_1 \text{ em } L^2(0,l) \\ v_n &\longrightarrow v \quad \text{em} \quad L^2(0,l), \end{aligned}$$

logo, pela unicidade do limite em $L^2(0,l)$ tem-se $v = u_1$. Além disso,

$$\begin{aligned} v_n \longrightarrow v \text{ em } \mathcal{D}'(0,l) \quad &\Rightarrow \quad v_{n,x} \longrightarrow v_x \text{ em } \mathcal{D}'(0,l) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad av_{n,x} \longrightarrow av_x \text{ em } D'(0,l). \end{aligned}$$

Agora, sendo

$$\begin{aligned} u_n \longrightarrow u \text{ em } H_0^1(0,l) \quad &\Rightarrow \quad u_n \longrightarrow u \text{ em } \mathcal{D}'(0,l) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad u_{n,xx} \longrightarrow u_{xx} \text{ em } \mathcal{D}'(0,l). \end{aligned}$$

Por fim,

$$\theta_n \longrightarrow \theta \text{ em } L^2(0,l) \quad \Rightarrow \quad \theta_n \longrightarrow \theta \text{ em } \mathcal{D}'(0,l),$$

donde segue,

$$\begin{aligned} \theta_{n,x} &\longrightarrow \theta_x \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,l) \\ \theta_{n,xx} &\longrightarrow \theta_{xx} \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,l), \end{aligned}$$

respectivamente. Assim, desde que $\mathcal{D}'(0,l)$ é um espaço vetorial, obtemos que

$$\begin{aligned} u_{n,xx} - a\theta_{n,x} \quad &\longrightarrow \quad u_{xx} - a\theta_x \text{ em } \mathcal{D}'(0,l) \qquad (3.62) \\ \theta_{n,xx} - av_{n,x} \quad &\longrightarrow \quad \theta_{xx} - av_x \text{ em } \mathcal{D}'(0,l). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} u_{n,xx} - a\theta_{n,x} &\longrightarrow v_1 \text{ em } L^2(0,l) \\ \theta_{n,xx} - av_{n,x} &\longrightarrow \theta_1 \text{ em } L^2(0,l), \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} u_{n,xx} - a\theta_{n,x} &\longrightarrow v_1 \text{ em } \mathcal{D}'(0,l) \\ \theta_{n,xx} - av_{n,x} &\longrightarrow \theta_1 \text{ em } \mathcal{D}'(0,l). \end{aligned} \tag{3.63}$$

Pela unicidade do limite em $\mathcal{D}'(0,l)$, segue-se a partir de $(3.62)_1$ e $(3.63)_1$, $(3.62)_2$ e $(3.63)_2$, que

$$u_{xx} - a\theta_x = v_1 \text{ e } \theta_{xx} - av_x = \theta_1$$

respectivamente. Portanto,

$$w = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ u_{xx} - a\theta_x \\ -av_x + \theta_{xx} \end{bmatrix} = A\left(\begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix}\right) = A(z).$$

$\blacksquare$

Teorema 3.5 *O operador A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $S(t) = e^{At}$, $t \geq 0$ em H.*

Demonstração: Pela afirmação (3.4) temos que $\overline{D(A)} = H$. Devemos mostrar que A é dissipativo e que $0 \in \rho(A)$. De fato, sejam $A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ (\cdot)_{xx} & 0 & -a(\cdot)_x \\ 0 & -a(\cdot)_x & (\cdot)_{xx} \end{pmatrix}$ e

$U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix}$. Daí,

$$
\begin{aligned}
\big(AU,\, U\big)_H &= \left(\begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ (\cdot)_{xx} & 0 & -a(\cdot)_x \\ 0 & -a(\cdot)_x & (\cdot)_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} \right)_H = \\
&= \left(\begin{pmatrix} v \\ u_{xx} - a\theta_x \\ -av_x + \theta_{xx} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} \right)_H = \\
&= \big(u_x,\, v_x\big)_{L^2(0,l)} + \big(\big(u_{xx} - a\theta_x\big), v\big)_{L^2(0,l)} + \big(\big(-av_x + \theta_{xx}\big), \theta\big)_{L^2(0,l)} = \\
&= \int_0^l u_x v_x + \int_0^l u_{xx} v - \int_0^l (a\theta_x) v - \int_0^l (av_x)\theta + \int_0^l \theta_{xx}\theta.
\end{aligned}
$$

Lembrando que $u = 0$ na fronteira e $\int_0^l (av_x)\theta = -\int_0^l (a\theta_x)v$, obtemos

$$\big(AU,\, U\big)_H = -\int_0^l (a\theta_x)v + \int_0^l (a\theta_x)v - \int_0^l \big|\theta_x\big|^2 \leq 0.$$

Ou seja,

$$Re\big(AU,\, U\big)_H = -\int_0^l \big|\theta_x\big|^2 \leq 0.$$

De onde conclui-se que A é dissipativo.

Seja $F = (f,\, g,\, h)^t \in H$. considere a equação

$$-\, AU = F, \tag{3.64}$$

isto é,

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
-v & = & f \quad \Rightarrow v = -f \in H_0^1(0,l) \\
-u_{xx} + a\theta_x & = & g \quad \in L^2(0,l) \\
av_x - \theta_{xx} & = & h \quad \Rightarrow -\theta_{xx} = h - av_x \in L^2(0,l).
\end{array}
\right. \tag{3.65}
$$

Substituindo $(3.65)_1$ em $(3.65)_3$, obtemos

$$-\theta_{xx} = h + af_x,$$

daí

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
-\theta_{xx} & = & \varphi \quad \text{em} \;\; (0,l) \times (0,T), \;\; \text{com} \; \varphi = h + af_x \in L^2(0,l) \\
\theta & = & 0 \qquad t > 0
\end{array}
\right. \tag{3.66}
$$

Portanto, pelo Teorema $(A.18)$, existe uma única $\theta \in H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)$ solução fraca de (3.66).

De $(3.65)_2$, tem-se

$$\begin{cases} -u_{xx} = g - a\theta_x = \psi \text{ em } (0,l)\times(0,T) \text{ com } \psi \in L^2(0,l) \\ u = 0 \quad t > 0. \end{cases} \tag{3.67}$$

Aplicando o Teorema $(A.18)$ de regularidade de equações elípticas, temos que, existe uma única $u \in H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)$ solução fraca de (3.67). Assim,

$$\exists!\, U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} \in D(A) = \left(H_0^1(0,l)\cap H^2(0,l)\right) \times H_0^1(0,l) \times \left(H_0^1(0,l)\cap H^2(0,l)\right)$$

solução de (3.64). Além disso, $D(A) \hookrightarrow H$ então, de (3.64), $\|U\|_H \leq k\|F\|_H$ com $k \geq 0$ independente de U. De onde concluímos que $0 \in \rho(A)$. Daí e, da Afirmação (3.4), concluímos pela Proposição 1.32 que, A é o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo de contração. ∎

Agora, pelo Corolário 1.15, $U(t) = e^{At}U_0$, é a única solução que satisfaz o problema (3.51) e

$$U \in C\left([0,\infty);\, D(A)\right) \cap C^1\left([0,\infty);\, H\right).$$

3.2.3 Decaimento Exponencial

Teorema 3.6 *O C_0-semigrupo de contação $\{e^{At}\}_{t\geq 0}$ gerado pelo operador linear não-limitado A, definido por*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ (\cdot)_{xx} & 0 & -a(\cdot)_x \\ 0 & -a(\cdot)_x & (\cdot)_{xx} \end{pmatrix}$$

é exponencialmente estável, isto é, existem duas constantes M e ω tais que

$$\|e^{At}\|_H \leq Me^{-\omega t},\ \forall t \geq 0,\ M \geq 1 \ \text{ e } \ \omega > 0. \tag{3.68}$$

Demonstração: Pelo Teorema 3.5 vimos que A é o gerador do C_0-semigrupo $\{e^{At}\}_{t\geq 0}$ de contração. Devemos mostrar a estabilidade exponencial do semigrupo associado ao sistema de evolução (3.50). Para isso, usaremos o Teorema de Gearhart. Assim, sendo $0 \in \rho(A)$ e A invertível, usando o Lema 1.3 temos que, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $0 < |\lambda| < \|A^{-1}\|^{-1}$ o operador

$$\lambda I - A = A\big(\lambda A^{-1} - I\big) \tag{3.69}$$

é invertível, uma vez que, tomando $B = -I$ e $S = \lambda A^{-1}$, obtemos $(\lambda A^{-1} - I)$ invertível. Donde, consequentemente, a composição de operadores invertíveis é invertível.

Sendo assim, suponha que a hipótese (2.3) do Teorema de Gearhart não ocorre. Então, $(\lambda I - A)$ para $\lambda = \beta i$, $\beta \in \mathbb{R}$, não é invertível, já que, $|\lambda| < \|A^{-1}\|^{-1}$ não ocorre. Daí, existe $\gamma \in \mathbb{R}$ com $\|A^{-1}\|^{-1} \leq |\gamma| < \infty$ tal que

$$\big\{i\beta;\ |\beta| < |\gamma|\big\} \subset \rho(A) \tag{3.70}$$

e

$$\sup\big\{\big\|(i\beta I - A)^{-1}\big\|;\ |\beta| < |\gamma|\big\} = \infty. \tag{3.71}$$

De (3.71) tem-se que, existe uma sequência $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\beta_n \in \mathbb{R}$ com $|\beta_n| < |\gamma|$ tal que $\beta_n \longrightarrow \gamma$ e, uma sequência de funções vetoriais complexas $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $W_n \in H$ tal que

$$\frac{\big\|\big(i\beta I - A\big)^{-1} W_n\big\|}{\big\|W_n\big\|} \geq n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\big\|\big(i\beta_n I - A\big)^{-1} W_n\big\| \geq n\big\|W_n\big\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.72}$$

Como A é o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo de contração, pelo Teorema de Lumer-Phillips, segue que, A é m-dissipativo em H. Assim, para $(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ existe $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ \theta_n \end{pmatrix}$, com norma unitária, isto é,

$$\big\|U_n\big\|_H^2 = \big|u_{nx}\big|_{L^2(0,l)}^2 + \big|v_n\big|_{L^2(0,l)}^2 + \big|\theta_n\big|_{L^2(0,l)}^2 = 1 \tag{3.73}$$

tal que

$$\big(i\beta_n I - A\big)U_n = W_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daí e, de (3.72) tem-se $U_n = \big(i\beta_n I - A\big)^{-1} W_n$ e, portanto,

$$\frac{\big\|\big(i\beta_n I - A\big)^{-1} W_n\big\|}{\big\|W_n\big\|} = \frac{\big\|U_n\big\|}{\big\|\big(i\beta_n I - A\big)U_n\big\|} \geq n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ou seja,

$$\|(i\beta_n I - A)U_n\| \leq \frac{1}{n}\|U_n\|. \tag{3.74}$$

Passando ao limite em (3.74) quando $n \longrightarrow \infty$, obtemos

$$\|(i\beta_n I - A)U_n\|_H \longrightarrow 0, \tag{3.75}$$

logo,

$$\left\| \begin{pmatrix} i\beta_n u_n \\ i\beta_n v_n \\ i\beta_n \theta_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_n \\ u_{n,xx} - a\theta_{n,x} \\ \theta_{n,xx} - av_{n,x} \end{pmatrix} \right\| \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow \infty$$

e, portanto,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} i\beta_n u_n \; - \; v_n & \stackrel{forte}{\longrightarrow} & 0 \;\; \text{em} \;\; H_0^1(0,l) \text{ com } \; n \to \infty, \\ i\beta_n v_n \; - \; u_{n,xx} \; + \; a\theta_{n,x} & \stackrel{forte}{\longrightarrow} & 0 \;\; \text{em} \;\; L^2(0,l) \text{ com } n \to \infty, \\ i\beta_n \theta_n \; - \; \theta_{n,xx} \; + \; av_{n,x} & \stackrel{forte}{\longrightarrow} & 0 \;\; \text{em} \;\; L^2(0,l) \text{ com } n \to \infty. \end{array} \right. \tag{3.76}$$

Tomando o produto escalar de U_n com $(i\beta_n I - A)U_n$ em H, obtemos

$$\begin{array}{rcl} \big((i\beta_n I - A)U_n,\, U_n\big)_H & = & \big(i\beta_n U_n,\, U_n\big)_H - \big(AU_n,\, U_n\big)_H \\ & = & \bar{i}\beta_n \|U_n\|_H^2 - \left[\begin{pmatrix} v_n \\ u_{n,xx} - a\theta_{n,x} \\ \theta_{n,xx} - av_{n,x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ \theta_n \end{pmatrix} \right] \\ & = & \bar{i}\beta_n \|U_n\|_H^2 - \big[(u_{n,x}, v_{n,x}) + \big((u_{n,xx} - a\theta_{n,x}), v_n\big)\big] - \\ & - & \big((\theta_{n,xx} - av_{n,x}), \theta_n\big) \\ & = & \bar{i}\beta_n \|U_n\|_H^2 - \big(u_{n,x}, v_{n,x}\big) - \big(u_{n,xx}, v_n\big) + \\ & + & \big(a\theta_{n,x}, v_n\big) - \big(\theta_{n,xx}, \theta_n\big) + \big(av_{n,x}, \theta_n\big) \\ & = & \bar{i}\beta_n \|U_n\|_H^2 - \big(u_{n,x}, v_{n,x}\big) + \big(u_{n,x}, v_{n,x}\big) + \\ & + & \big(a\theta_{n,x}, v_n\big) + \big(\theta_{n,x}, \theta_{n,x}\big) + \big(av_{n,x}, \theta_n\big) \\ & = & \bar{i}\beta_n \|U_n\|_H^2 + |\theta_{n,x}|_{L^2(0,l)}^2 + \big(a\theta_{n,x}, v_n\big) + \big(av_{n,x}, \theta_n\big) \\ & = & \bar{i}\beta_n \|U_n\|_H^2 + |\theta_{n,x}|_{l^2(0,l)}^2 + \big(a\theta_{n,x}, v_n\big) - \big(av_n, \theta_{n,x}\big) \\ & = & \bar{i}\beta_n \|U_n\|_H^2 + |\theta_{n,x}|_{L^2(0,l)}^2 \end{array}$$

e assim, a parte real é dada por $Re\big((i\beta_n I - A)U_n,\, U_n\big) = |\theta_{n,x}|_{L^2(0,l)}^2$.

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} \left|\theta_{n,x}\right|^2_{L^2(0,l)} &= Re\big((i\beta_n I - A)U_n, U_n\big) \leq \\ &\leq \left|\big((i\beta_n I - A)U_n, U_n\big)\right|_H \leq \\ &\leq \left\|(i\beta_n I - A)U_n\right\|_H \left\|U_n\right\|_H = \\ &= \left\|(i\beta_n I - A)U_n\right\|_H \longrightarrow 0, \text{ por } (3.75). \end{aligned} \tag{3.77}$$

Assim,

$$\theta_n \longrightarrow 0 \text{ forte em } H^1_0(0,l) \tag{3.78}$$

Usando a desigualdade de Poincaré, tem-se

$$\left|\theta_n\right|^2_{L^2(0,l)} \leq c\left|\theta_{n,x}\right|^2_{L^2(0,l)}, \quad \forall \theta_n \in H^1_0(0,l),\ n \in \mathbb{N}.$$

Donde, obtemos

$$\theta_n \longrightarrow 0 \text{ forte em } L^2(0,l). \tag{3.79}$$

A partir de (3.79) e $(3.76)_3$ tem-se

$$\theta_{n,xx} - av_{n,x} \longrightarrow 0 \text{ forte em } L^2(0,l). \tag{3.80}$$

Integrando (3.80) de 0 à x, obtemos

$$\int_0^x \frac{d}{dx}(\theta_{n,x} - av_n)dx \longrightarrow 0,$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\theta_{n,x}(x) - \theta_{n,x}(0) - a\big(v_n(x) - v_n(0)\big) \longrightarrow 0 \text{ forte em } L^2(0,l).$$

O que implica por (3.78) que

$$\theta_{n,x}(0) + av_n(x) \longrightarrow 0 \text{ forte em } L^2(0,l). \tag{3.81}$$

Desde que,

$$\left\|U_n\right\|^2_H = \left|u_{n,x}\right|^2_{L^2(0,l)} + \left|v_n\right|^2_{L^2(0,l)} + \left|\theta_n\right|^2_{L^2(0,l)} = 1,$$

então $\left|u_{n,x}\right|^2_{L^2(0,l)} \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, de $(3.76)_1$ temos

$$\left|i\beta_n u_{n,x} - v_{n,x}\right| \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(0,l), \quad n \longrightarrow \infty. \tag{3.82}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\left|v_{n,x}\right|_{L^2(0,l)} &= \left|v_{n,x} - i\beta_n u_{n,x} + i\beta_n u_{n,x}\right|_{L^2(0,l)} \leq \\
&\leq \left|i\beta_n u_{n,x} - v_{n,x}\right|_{L^2(0,l)} + \left|\beta_n\right|\left|u_{n,x}\right|_{L^2(0,l)} \leq k, \qquad (3.83)
\end{aligned}
$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, já que $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada.

A partir disto e de (3.80) temos

$$
\begin{aligned}
\left|\theta_{n,xx}\right|_{L^2(0,l)} &= \left|\theta_{n,xx} - av_{n,x} + av_{n,x}\right|_{L^2(0,l)} \\
&\leq \left|\theta_{n,xx} - av_{n,x}\right|_{L^2(0,l)} + \left|av_{n,x}\right|_{L^2(0,l)} \\
&= \left|\theta_{n,xx} - av_{n,x}\right|_{L^2(0,l)} + |a||v_{n,x}|_{L^2(0,l)} \\
&\leq \left|\theta_{n,xx} - av_{n,x}\right|_{L^2(0,l)} + |a| \cdot k \leq k_1, \qquad (3.84)
\end{aligned}
$$

desde que $\left|\theta_{n,xx} - av_{n,x}\right|_{L^2(0,l)} \longrightarrow 0$ por (3.80).

Portanto, de (3.83) e (3.84) obtemos, $\left|\theta_{n,xx}\right|$ é uniformemente limitada com respeito a n.

Pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg e por (3.84), segue que

$$
\begin{aligned}
\left|\theta_{n,x}(0)\right| \leq \left\|\theta_{n,x}\right\|_{L^\infty} &\leq c_1\left|\theta_{n,xx}\right|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,l)}\left|\theta_{n,x}\right|^{1-\frac{1}{2}}_{L^2(0,l)} + c_2\left|\theta_{n,x}\right|_{L^2(0,l)} \\
&\leq c_1 \cdot k_1\left|\theta_{n,x}\right|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,l)} + c_2\left|\theta_{n,x}\right|_{L^2(0,l)} \ \text{ por } \ \textbf{(b)} \\
&= c_3\left|\theta_{n,x}\right|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,l)} + c_2\left|\theta_{n,x}\right|_{L^2(0,l)} \longrightarrow 0, \ \text{ por } \ (3.77). \qquad (3.85)
\end{aligned}
$$

A partir de (3.81) e (3.85) segue que

$$
v_n \longrightarrow 0 \ \text{ forte em } \ l^2(0,l). \qquad (3.86)
$$

Tomando o produto interno de $(3.76)_2$ com u_n em $L^2(0,l)$ e denotando

$$
i\beta_n v_n - u_{n,xx} + a\theta_{n,x} = f_n
$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
\left(f_n, u_n\right)_{L^2(0,l)} &= \left(i\beta_n v_n - u_{n,xx} + a\theta_{n,x}, u_n\right)_{L^2(0,l)} \\
&= \left(i\beta_n v_n, u_n\right)_{L^2(0,l)} - \left(u_{n,xx}, u_n\right)_{L^2(0,l)} + \left(a\theta_{n,x}, u_n\right)_{L^2(0,l)}.
\end{aligned}
$$

Como, pelo Teorema de Green $\left(u_{n,xx}, u_n\right)_{L^2(0,l)} = -\left(u_{n,x}, u_{n,x}\right)_{L^2(0,l)}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left|u_{n,x}\right|^2_{L^2(0,l)} &= \left(-i\beta_n v_n, u_n\right)_{L^2(0,l)} + \left(-a\theta_{n,x}, u_n\right)_{L^2(0,l)} + \left(f_n, u_n\right)_{L^2(0,l)} \\
&\leq \left|-i\beta_n v_n\right|_{L^2(0,l)}\left|u_n\right|_{L^2(0,l)} + \left|-a\theta_{n,x}\right|_{L^2(0,l)}\left|u_n\right|_{L^2(0,l)} + \left|f_n\right|_{L^2(0,l)}\left|u_n\right|_{L^2(0,l)} \\
&= \left|\beta_n\right|_{\mathbb{R}}\left|v_n\right|_{L^2(0,l)}\left|u_n\right|_{L^2(0,l)} + |a|\left|\theta_{n,x}\right|_{L^2(0,l)}\left|u_n\right|_{L^2(0,l)} + \left|f_n\right|_{L^2(0,l)}\left|u_n\right|_{L^2(0,l)}
\end{aligned}
$$

e pela desigualdade de Poincaré, existe uma constante c tal que

$$\begin{aligned}\big|u_{n,x}\big|_{L^2(0,l)} &\leq \big(|\beta_n|\big|v_n\big|_{L^2(0,l)} + |a|\big|\theta_{n,x}\big|_{L^2(0,l)} + \big|f_n\big|_{L^2(0,l)}\big)\big|u_n\big|_{L^2(0,l)}\\ &\leq \big(|\beta_n|\big|v_n\big|_{L^2(0,l)} + |a|\big|\theta_{n,x}\big|_{L^2(0,l)} + \big|f_n\big|_{L^2(0,l)}\big)c\big|u_{nx}\big|_{L^2(0,l)}.\end{aligned}$$

De onde temos

$$\big|u_{n,x}\big|_{L^2(0,l)} \leq c\big(|\beta_n|\big|v_n\big|_{L^2(0,l)} + |a|\big|\theta_{n,x}\big|_{L^2(0,l)} + \big|f_n\big|_{L^2(0,l)}\big). \tag{3.87}$$

Logo, de $(3.76)_2$, (3.78) e (3.86) segue que

$$\begin{cases} f_n \longrightarrow 0 \quad \text{(forte) em } L^2(0,\,l), \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow \infty;\\ \theta_{n,x} \longrightarrow 0 \quad \text{(forte) em } L^2(0,\,l), \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow \infty;\\ v_n \longrightarrow 0 \quad \text{(forte) em } L^2(0,\,l), \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow \infty,\end{cases} \tag{3.88}$$

respectivamente.

Como $\beta_n \longrightarrow \gamma$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e, substituindo (3.88) em (3.87), obtemos que

$$u_{n,x} \longrightarrow 0 \text{ forte em } L^2(0,l), \text{ quando } n \longrightarrow \infty. \tag{3.89}$$

De (3.79), (3.86) e (3.89) segue que

$$\big\|U_n\big\|_H^2 = \big|u_{nx}\big|^2_{L^2(0,l)} + \big|v_n\big|_{L^2(0,l)} + \big|\theta_n\big|_{L^2(0,l)} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Por outro lado, $\big\|U_n\big\| = 1$, que é uma contradição. Portanto,

$$i\mathbb{R} \equiv \big\{i\beta;\ \beta \in \mathbb{R}\big\} \subset \rho(A).$$

Agora suponha, por contradição, que (2.4) não é verdadeiro. Logo,

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\| = \infty.$$

Então, existe uma sequência β_n, com $|\beta_n| \longrightarrow +\infty$ e uma sequência de funções vetoriais complexas $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em H tal que

$$\frac{\big\|(i\beta_n I - A)^{-1}V_n\big\|}{\big\|V_n\big\|} \geq n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

donde seque que

$$\big\|(i\beta_n I - A)^{-1}V_n\big\| \geq n\big\|V_n\big\|. \tag{3.90}$$

Uma vez que, A é o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo de contração, pelo Teorema de Lumer-Phillips, resulta que A é m-dissipativo em H. Daí, para toda sequência $(V_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$, existe uma única sequência $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$, com $\|U_n\|_H = 1$ tal que

$$(i\beta_n I - A)U_n = V_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daí e, de (3.90) tem-se

$$\frac{\big\|(i\beta_n I - A)^{-1}V_n\big\|}{\big\|V_n\big\|} = \frac{\big\|U_n\big\|}{\big\|(i\beta_n I - A)U_n\big\|} \geq n. \tag{3.91}$$

Isto é, $\big\|U_n\big\| \geq n\big\|(i\beta_n I - A)U_n\big\|$. Denotando,

$$Z_n := \big(i\beta_n I - A\big)U_n \tag{3.92}$$

e substituindo-o em (3.91), obtemos

$$\big\|Z_n\big\| \leq \frac{1}{n}\big\|U_n\big\|.$$

Uma vez que $\big\|U_n\big\| = 1$, obtemos,

$$\big\|Z_n\big\|_H \longrightarrow 0, \ \text{ quando } \ n \longrightarrow \infty. \tag{3.93}$$

De onde segue

$$\left\| \begin{pmatrix} i\beta_n u_n \\ i\beta_n v_n \\ i\beta_n \theta_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_n \\ u_{n,xx} - a\theta_{n,x} \\ \theta_{n,xx} - a v_{n,x} \end{pmatrix} \right\| \longrightarrow 0, \ \text{ quando } \ n \longrightarrow \infty$$

e, portanto

$$\left\{ \begin{array}{rcl} i\beta_n u_n \ - \ v_n & \overset{forte}{\longrightarrow} & 0 \ \text{ em } \ H_0^1(0,l) \text{ com } \ n \to \infty \\ i\beta_n v_n \ - \ u_{n,xx} \ + \ a\theta_{n,x} & \overset{forte}{\longrightarrow} & 0 \ \text{ em } \ L^2(0,l), \text{ com } n \to \infty \\ i\beta_n \theta_n \ - \ \theta_{n,xx} \ + \ a v_{n,x} & \overset{forte}{\longrightarrow} & 0 \ \text{ em } \ L^2(0,l), \text{ com } n \to \infty. \end{array} \right. \tag{3.94}$$

Tomando o produto escalar de U_n com Z_n em H, resulta que

$$\begin{aligned}
\big(U_n,\, Z_n\big)_H &= \big(U_n,\, i\beta_n u_n\big)_H - \big(U_n,\, AU_n\big)_H = \\
&= \bar{i}\beta_n \big\|U_n\big\|_H^2 - \left[\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ \theta_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_n \\ u_{n,xx} - a\theta_{n,x} \\ \theta_{n,xx} - av_{n,x} \end{pmatrix}\right]_H = \\
&= \bar{i}\beta_n \big\|u_n\big\|_H^2 - \big[(u_{n,x}, v_{n,x}) + \big(u_{n,xx}, v_n\big) - \big(a\theta_{n,x}, v_n\big) + \big(\theta_{n,xx}, \theta_n\big) - \big(av_{n,x}, \theta_n\big)\big] = \\
&= \bar{i}\beta_n \big\|U_n\big\|_H^2 + \big(a\theta_{n,x}, v_n\big) - \big(\theta_{n,xx}, \theta_n\big) + \big(av_{n,x}, \theta_n\big) = \\
&= \bar{i}\beta_n \big\|U_n\big\|_H^2 - \big(\theta_{n,xx}, \theta_n\big) = \\
&= \bar{i}\beta_n \big\|U_n\big\|_H^2 + \big|\theta_{n,x}\big|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

logo,

$$Re\big(U_n,\, Z_n\big)_H = \big|\theta_{n,x}\big|_{L^2(0,l)}^2.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
\big|\theta_{n,x}\big|_{L^2(0,l)}^2 &= Re\big(U_n, Z_n\big)_H \leq \\
&\leq \big|\big(U_n, Z_n\big)\big|_H \leq \big\|U_n\big\|\big\|Z_n\big\|_H \leq \\
&\leq k\big\|Z_n\big\|_H \longrightarrow 0, \quad \text{por (3.93).}
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Portanto,

$$\theta_n \longrightarrow 0 \ \text{ forte em } \ H_0^1(0,l) \tag{3.96}$$

e, pela desigualdade de Poincaré

$$\big|\theta_n\big|_{L^2(0,l)}^2 \leq c\big|\theta_{n,x}\big|_{L^2(0,l)}^2, \quad \forall \theta_n \in H_0^1(0,l),\ n \in \mathbb{N},$$

obtemos

$$\theta_n \longrightarrow 0 \ \text{ forte em } \ L^2(0,l). \tag{3.97}$$

Note que, a prova desta etapa é mais delicada, em relação a etapa anterior, pois, $\beta_n \longrightarrow \infty,\ n \in \mathbb{N}$. Sendo assim, dividindo $(3.94)_3$ por $\beta_n \neq 0$ obtemos

$$i\theta_n - \frac{\theta_{n,xx}}{\beta_n} + \frac{av_{n,x}}{\beta_n} = i\theta_n - \frac{\theta_{n,xx} - av_{n,x}}{\beta_n} \overset{forte}{\longrightarrow} 0 \text{ em } L^2(0,l)$$

donde por (3.97) temos que

$$\frac{\theta_{n,xx} - av_{n,x}}{\beta_n} \overset{forte}{\longrightarrow} 0 \text{ em } L^2(0,l). \tag{3.98}$$

Dividindo $(3.94)_1$ por β_n, obtemos

$$iu_n - \frac{v_n}{\beta_n} \longrightarrow 0 \ \ \overset{forte}{\longrightarrow} 0 \text{ em } H_0^1(0,l)$$

então,

$$iu_{n,x} - \frac{v_{n,x}}{\beta_n} \overset{forte}{\longrightarrow} 0 \text{ em } L^2(0,l), \text{ quando } n \to \infty, \tag{3.99}$$

donde resulta

$$v_{n,x} = i\beta_n u_{n,x}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.100}$$

Substituindo (3.100) em (3.98) decorre que

$$\frac{\theta_{n,xx}}{\beta_n} - iau_{n,x} \overset{forte}{\longrightarrow} 0 \ \text{ em } \ L^2(0,l). \tag{3.101}$$

Desde que,

$$\|U_n\|_H = |u_{n,x}|^2_{L^2(0,l)} + |v_n|^2_{L^2(0,l)} + |\theta_n|^2_{L^2(0,l)} = 1,$$

podemos afirmar que $|u_{n,x}|^2_{L^2(0,l)} \leq 1$. Daí e por (3.101), obtemos

$$\begin{aligned} \left|\frac{\theta_{n,xx}}{\beta_n}\right| &= \left|\frac{\theta_{n,xx}}{\beta_n} - iau_{n,x} + iau_{n,x}\right|_{L^2(0,l)} \leq \\ &\leq \left|\frac{\theta_{n,xx}}{\beta_n} - iau_{n,x}\right|_{L^2(0,l)} + |iau_{n,x}|_{L^2(0,l)} \leq |a| \cdot 1 \leq C_0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left|\frac{\theta_{n,xx}}{\beta_n}\right| \text{ é uniformemente limitada.}$$

Tomando o produto interno de (3.101) com $u_{n,x}$ em $L^2(0,l)$ tem-se

$$\left(\frac{\theta_{n,xx}}{\beta_n} - iau_{n,x}, u_{n,x}\right)_{L^2(0,l)} = \left(\frac{\theta_{n,xx}}{\beta_n}, u_{n,x}\right) - ia|u_{n,x}|^2_{L^2(0,l)}. \tag{3.102}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$\begin{aligned} Re\left(\frac{\theta_{n,xx}}{\beta_n} - iau_{n,x}, u_{n,x}\right) &\leq \left|\left(\frac{\theta_{n,xx}}{\beta_n} - iau_{n,x}, u_{n,x}\right)\right| \leq \\ &\leq \left|\frac{\theta_{n,xx}}{\beta_n} - iau_{n,x}\right|_{L^2(0,l)} |u_{n,x}|_{L^2(0,l)} \leq \\ &\leq \left|\frac{\theta_{n,xx}}{\beta_n} - iau_{n,x}\right|_{L^2(0,l)} \cdot 1 \longrightarrow 0 \ \text{ por } (3.101), \end{aligned}$$

obtemos por (3.102) que

$$\left(\frac{\theta_{n,xx}}{\beta_n}, u_{n,x}\right) - ia|u_{n,x}|^2_{L^2(0,l)} \overset{forte}{\longrightarrow} 0 \ \text{ em } \ L^2(0,l).$$

Integrando $\left(\dfrac{\theta_{n,xx}}{\beta_n}, u_{n,x}\right)$ por partes, temos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\theta_{n,xx}}{\beta_n}, u_{n,x}\right)_{L^2(0,l)} &= \frac{1}{\beta_n}\int_0^l \theta_{n,xx}(x,t)u_{n,x}(x,t)dx \\
&= \frac{1}{\beta_n}u_{n,x}(x,t)\theta_{n,x}(x,t) - \\
&- \frac{1}{\beta_n}\int_0^l \theta_{n,x}(x,t)u_{n,xx}(x,t)dx \\
&= \frac{u_{n,x}(l,t)\theta_{n,x}(l,t)}{\beta_n} - \frac{u_{n,x}(0,t)\theta_{n,x}(0,t)}{\beta_n} - \\
&- \left(\frac{\theta_{n,x}}{\beta_n}, u_{n,xx}\right). \qquad (3.103)
\end{aligned}$$

Dividindo $(3.94)_2$ por β_n, obtém-se

$$iv_n - \frac{u_{n,xx}}{\beta_n} + a\frac{\theta_{n,x}}{\beta_n} \overset{forte}{\longrightarrow} 0 \text{ em } L^2(0,l),$$

donde, por (3.95) tem-se

$$iv_n - \frac{u_{n,xx}}{\beta_n} \overset{forte}{\longrightarrow} 0 \text{ em } L^2(0,l) \qquad (3.104)$$

e, usando o fato de que $\left|v_n\right|^2_{L^2(0,l)} \leq 1$, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{u_{n,xx}}{\beta_n}\right| &= \left|\frac{u_{n,xx}}{\beta_n} - iv_n + iv_n\right| \\
&\leq \left|\frac{u_{n,xx}}{\beta_n} - iv_n\right| + \left|iv_n\right| \leq 1,
\end{aligned}$$

desde que, por (3.104), $\left|\dfrac{u_{n,xx}}{\beta_n} - iv_n\right|_{L^2(0,l)} \longrightarrow 0$. Logo,

$$\left|\frac{u_{n,xx}}{\beta_n}\right| \text{ é uniformemente limitada.}$$

Assim, segue-se a partir de (3.95) e da desigualdade de Cauchy-Schwarz, que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\theta_{n,x}}{\beta_n}, u_{n,xx}\right)_{L^2(0,l)} &= \left(\theta_{n,x}, \frac{u_{n,xx}}{\beta_n}\right)_{L^2(0,l)} \\
&\leq \left|\left(\theta_{n,x}, \frac{u_{n,xx}}{\beta_n}\right)\right| \\
&\leq \left|\theta_{n,x}\right|_{L^2(0,l)}\left|\frac{u_{n,xx}}{\beta_n}\right|_{L^2(0,l)} \\
&\leq \left|\theta_{n,x}\right| \cdot 1 \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\left(\frac{\theta_{n,x}}{\beta_n}, u_{n,xx}\right)_{L^2(0,l)} \longrightarrow 0. \tag{3.105}$$

Daí, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, temos que

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\theta_{n,x}}{\sqrt{|\beta_n|}}\right\|_{L^\infty(0,l)} &\leq C_1\frac{|\theta_{n,xx}|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{|\beta_n|}}|\theta_{n,x}|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,l)} + C_2\frac{|\theta_{n,x}|}{\sqrt{|\beta_n|}} \\
&= C_1\left|\frac{\theta_{n,xx}}{\beta_n}\right|^{\frac{1}{2}}|\theta_{n,x}|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,l)} + C_2\frac{|\theta_{n,x}|}{|\beta_n|^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq C_1\cdot C_0|\theta_{n,x}|_{L^2(0,l)} + C_2\frac{|\theta_{n,x}|}{|\beta_n|^{\frac{1}{2}}} \longrightarrow 0,
\end{aligned} \tag{3.106}$$

uma vez que, $|\theta_{n,x}| \longrightarrow 0$ e $\beta_n \longrightarrow \infty$ quando $n \longrightarrow \infty$.

Também temos,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{u_{n,x}}{\sqrt{|\beta_n|}}\right\|_{L^\infty(0,l)} &\leq C_1\frac{|u_{n,xx}|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{|\beta_n|}}|u_{n,x}|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,l)} + C_2\frac{|u_{n,x}|}{\sqrt{|\beta_n|}} \\
&= C_1\left|\frac{u_{n,xx}}{\beta_n}\right|^{\frac{1}{2}}|u_{n,x}|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,l)} + C_2\frac{|u_{n,x}|}{|\beta_n|^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq C_1\cdot 1|u_{n,x}|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,l)} + C_2\frac{|u_{n,x}|}{|\beta_n|^{\frac{1}{2}}} \leq C,
\end{aligned} \tag{3.107}$$

com C uma constante positiva independente de n. Então, verifica-se a apartir de (3.106) e (3.107) que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{u_{n,x}\theta_{n,x}}{\beta_n}\right| &\leq \left\|\frac{u_{n,x}\theta_{n,x}}{\beta_n}\right\|_{L^\infty(0,l)} = \left\|\frac{u_{n,x}\theta_{n,x}}{\beta_n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}\right\|_{L^\infty(0,l)} \\
&\leq \frac{\|u_{n,x}\theta_{n,x}\|_{L^\infty(0,l)}}{\sqrt{|\beta_n|}\sqrt{|\beta_n|}} \\
&\leq \frac{\|u_{n,x}\|_{L^\infty(0,l)}}{\sqrt{|\beta_n|}}\frac{\|\theta_{n,x}\|_{L^\infty(0,l)}}{\sqrt{|\beta_n|}} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Daí e, por (3.105) obtemos de (3.103) que

$$\left(\frac{\theta_{n,xx}}{\beta_n}, u_{n,x}\right) \xrightarrow{forte} 0 \;\text{ em } L^2(0,l). \tag{3.108}$$

Logo, substituindo (3.108) em (3.102) resulta que

$$|u_{n,x}|^2_{L^2(0,l)} \longrightarrow 0. \tag{3.109}$$

Agora, substituindo (3.109) em (3.99) decorre que

$$\frac{v_{n,x}}{\beta_n} \xrightarrow{forte} 0 \;\text{ em } L^2(0,l), \text{ quando } n \longrightarrow \infty. \tag{3.110}$$

Como por (3.95), $|\theta_{n,x}|_{L^2(0,l)} \longrightarrow 0$ temos de $(3.94)_2$

$$i\beta_n v_n - u_{n,xx} \overset{forte}{\longrightarrow} 0 \text{ em } L^2(0,l). \tag{3.111}$$

Fazendo o produto interno de (3.111) com v_n em $L^2(0,l)$, obtemos

$$\begin{aligned}\big(i\beta_n v_n - u_{n,xx}, v_n\big)_{L^2(0,l)} &= \big(i\beta_n v_n, v_n\big) - \big(u_{n,xx}, v_n\big)\\ &\overbrace{=}^{Green} i\beta_n|v_n|^2_{L^2(0,l)} + \big(u_{n,x}, v_{n,x}\big)_{L^2(0,l)} \to 0\end{aligned}$$

por (3.111). Dividindo o resultado por β_n, implica que

$$i|v_n|^2_{L^2(0,l)} + \left(u_{n,x}, \frac{v_{n,x}}{\beta_n}\right)_{L^2(0,l)} \to 0. \tag{3.112}$$

Note que,

$$\left|\left(u_{n,x}, \frac{v_{n,x}}{\beta_n}\right)\right| \leq |u_{n,x}|_{L^2(0,l)}\left|\frac{v_{n,x}}{\beta_n}\right|_{L^2(0,l)} \to 0,$$

por, (3.109) e (3.110), respectivamente. Daí e, por (3.112), obtemos que

$$v_n \overset{forte}{\longrightarrow} 0 \text{ em } L^2(0,l). \tag{3.113}$$

Logo, de (3.113), (3.109) e (3.97) temos

$$\|U_n\|_H = |u_{n,x}|_{L^2(0,l)} + |v_n|_{L^2(0,l)} + |\theta_n|_{L^2(0,l)} \longrightarrow 0,$$

o que contradiz o fato de que $\|U_n\| = 1$. Sendo assim,

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < \infty$$

e, portanto, o semigrupo $\{e^{At}\}_{t\geq 0}$ é exponencialmente estável. ∎

3.3 Sistema Viscoelástico

Primeiramente, consideramos o movimento transversal de uma corda elástica, com comprimento finito π, o qual denotamos por $u(x,\, t)$, com $x \in (0, \pi)$, o deslocamento horizontal da corda em cada instante $t > 0$. Agora, vamos assumir que a corda está presa em ambas extremidades, $x = 0$ e $x = \pi$. Então, temos as seguintes condições de contorno:

$$u(0,\, t) = 0, \quad u(\pi,\, t) = 0.$$

Agora, note que na equação $u_{tt} - u_{xx} + u_t = 0$, a dissipação está distribuída uniformemente em toda a corda. No entanto, é desejável, na prática, considerar o problema com dissipação localmente distribuída. Mais precisamente, nesta seção, consideraremos o seguinte modelo com dissipação localmente distribuída:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + a(x)u_t = 0 & (x,\, t) \in (0,\, \pi) \times (0, \infty), \\ u(0,\, t) \;=\; u(\pi,\, t) \;=\; 0 & t > 0, \\ u(x, 0) \;=\; u_0(x) & x \in [0,\, \pi], \\ u_t(x, 0) \;=\; u_1(x) & x \in [0,\, \pi], \end{cases} \tag{3.114}$$

onde $a(x)$ é uma função dada tal que $a \in W^{1,\infty}(0, \pi)$, $a(x) \geq 0$ em $[0, \pi]$ e

$$a_0 = \int_0^{\pi} a(x)dx > 0. \tag{3.115}$$

Isto significa que $a(x)$ pode se anular em alguns pontos do intervalo $[0,\, \pi]$, mas a medida do seu suporte é positiva.

3.3.1 Existência e Unicidade de Solução

Formulação Abstrata do Problema

Considere $v = u_t$. Daí, $v_t = u_{tt} = u_{xx} - a(x)u_t$. Sendo assim, escrevendo $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, temos

$$U' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u_{xx} - a(x)v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ (\cdot)_{xx} & -a(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Agora, usando a notação:

$$U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ (\cdot)_{xx} & -a(x) \end{pmatrix},$$

podemos reescrever o problema (3.114) como um problema de valor inicial de 1ª ordem:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U \;=\; AU \\ U(0) \;=\; U_0 \end{cases} \tag{3.116}$$

Escolha do Espaço H

Não obstante, estamos interessados em provar que A é o gerador infinitesimal de um C_0- semigrupo de contração. Mas primeiramente, façamos o seguinte: tomando o produto interno de $(3.114)_1$ com $u_t \in L^2(0,\pi)$ e fazendo integração por partes, temos

$$(u_{tt},\, u_t) \;-\; (u_{xx},\, u_t) \;+\; (a(x)u_t,\, u_t) \;=\; 0,$$

o que implica

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big|u_t\big|^2_{L^2(0,\pi)} + \int_0^\pi u_x\, u_{x,t} dx + \int_0^\pi a(x)|u_t|^2 dx = 0,$$

de onde segue,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big|v\big|^2_{L^2(0,\pi)} + \big(u_{x,t},\, u_x\big)_{L^2(0,\pi)} + \int_0^\pi a(x)|v|^2 dx = 0.$$

Daí,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big|v\big|^2_{L^2(0,\pi)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big|u_x\big|^2_{L^2(0,\pi)} = -\int_0^\pi a(x)\big|v\big|^2 dx$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\big|u_x\big|^2_{L^2(0,\pi)} + \frac{1}{2}\big|v\big|^2_{L^2(0,\pi)}\right) = -\int_0^\pi a(x)\big|v\big|^2_{L^2(0,\pi)} dx. \tag{3.117}$$

Definindo

$$E(t) = \frac{1}{2}\big|u_x\big|^2_{L^2(0,\pi)} + \frac{1}{2}\big|v\big|^2_{L^2(0,\pi)} \tag{3.118}$$

obtemos de (3.117) e (3.118) que

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_0^\pi a(x)\big|v\big|^2_{L^2(0,\pi)}.$$

A partir de (3.118) e de $(3.114)_2$ temos o seguinte espaço

$$H = H_0^1(0,\, \pi) \times L^2(0,\, \pi)$$

equipado com o produto interno

$$\big(U_1,\, U_2\big)_H = \big(u_{1x}, u_{2x}\big)_{L^2(0,\,\pi)} + (v_1,\, v_2)_{L^2(0,\pi)} \tag{3.119}$$

onde $U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$ em H. No que segue, a norma em H é dada por

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_H^2 = \big|u_x\big|^2_{L^2(0,\pi)} + \big|v\big|^2_{L^2(0,\pi)}. \tag{3.120}$$

Ademais, a norma usual $\|u\|^2_{H_0^1(0,\pi)} = |u_x|^2_{L^2(0,\pi)} + |u|^2_{L^2(0,\pi)}$ e a norma $\||u|\|^2_{H_0^1(0,\pi)} = |u_x|^2_{L^2(0,\pi)}$ são equivalentes em $H_0^1(0,\pi)$. De fato,

$$\||u|\|^2_{H_0^1(0,\pi)} = |u_x|^2_{L^2(0,\pi)} \leq |u_x|^2_{L^2(0,\pi)} + |u|^2_{L^2(0,\pi)} = \|u\|^2_{H_0^1(0,\pi)},$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{H_0^1(0,\pi)} = |u_x|^2_{L^2(0,\pi)} + |u|^2_{L^2(0,\pi)} &\leq |u_x|^2_{L^2(0,\pi)} + c|u_x|^2_{L^2(0,\pi)} = \\ &= (1+c)|u_x|^2_{L^2(0,\pi)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\||u|\|^2_{H_0^1(0,\pi)} \leq \|u\|^2_{H_0^1(0,\pi)} \leq \tilde{c}\||u|\|^2_{H_0^1(0,\pi)}.$$

Mais precisamente, existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$c_1\||u|\|^2_{H_0^1(0,\pi)} \leq \|u\|^2_{H_0^1(0,\pi)} \leq c_2\||u|\|^2_{H_0^1(0,\pi)}. \tag{3.121}$$

Segue de (3.121) que a norma em (3.120) é proveniente do produto interno (3.119), já que satisfaz a lei do paralelogramo:

$$\left\|\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}\right\|^2_H + \left\|\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}\right\|^2_H = 2\left(\left\|\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}\right\|^2_H + \left\|\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}\right\|^2_H\right)$$

com,

$$U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}; \quad U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \in H.$$

H é um Espaço de Hilbert com a Norma (3.120)

Para verificarmos que H é um espaço de Hilbert na norma mencionada, procedemos como nas aplicações anteriores. Isto é, tomando arbitrariamente $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \in H$ uma sequência de Cauchy em H, temos que, $(u_{n,x})$ e (v_n) são sequências de Cauchy em $L^2(0,\pi)$. Como $L^2(0,\pi)$ é um espaço de Banach, existem w e v em $L^2(0,\pi)$ tais que

$$u_{n,x} \longrightarrow w \ \text{ em } \ L^2(0,\pi) \ \text{ e } \ v_n = u_{n,t} \longrightarrow v \ \text{ em } \ L^2(0,\pi). \tag{3.122}$$

Usando a equivalência das normas em (3.121), obtemos

$$\|u\|^2_{H_0^1(0,\pi)} \leq c_2|u_x|_{L^2(0,\pi)}$$

obtemos que (u_n) é uma sequência de Cauchy em $H_0^1(0,\pi)$. Logo, (u_n) é de Cauchy em $L^2(0,\pi)$ e

$$\begin{cases} u_n \longrightarrow u & \text{em} \quad L^2(0,\pi); \\ u_{n,x} \longrightarrow w & \text{em} \quad L^2(0,\pi), \end{cases} \tag{3.123}$$

o que implica,

$$\begin{cases} u_{n,x} \longrightarrow u_x & \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,\,\pi) \\ u_{n,x} \longrightarrow w & \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,\pi). \end{cases} \tag{3.124}$$

Pela unicidade do limite em $\mathcal{D}'(0,\pi)$, $w = u_x$. Portanto, $u \in H_0^1(0,\pi)$ e, consequentemente,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{em} \;\; H = H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi).$$

Portanto, H é um espaço de Hilbert.

Escolha do domínio D(A) do operador A.

Devemos mostrar que o operador A é fechado e densamente definido.

No que segue, $v = u_t \in H_0^1(0,\pi)$, já que, para o cálculo da energia é necessário que v tenha derivada fraca $v_x = u_{t,x}$ bem definida e, $u_t = 0$ na fronteira. Temos também que integrar $u_{xx}u_t$ e como $u_t = v \in L^2(0,\pi)$, é suficiente que $u_{xx} \in L^2(0,\pi)$. Sendo $L^2(0,\pi)$ um espaço vetorial, obtemos que

$$u_{xx} - a(x)v \in L^2(0,\pi),$$

de onde segue,

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H; \;\; A\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) \in H \right\}.$$

Para a forma explícita de $D(A)$, tome arbitrariamente $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$. Como u_{xx} existe e $u_{xx} \in L^2(0,\pi)$ então $u \in H^2(0,\pi)$ e, desde que, $u \in H_0^1(0,\pi)$ obtemos $u \in H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)$. Além disso, $v \in H_0^1(0,\pi)$, o que implica

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \big(H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)\big) \times H_0^1(0,\pi)$$

e, portanto

(i) $D(A) \subset \left(H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)\right) \times H_0^1(0,\pi)$.

Por outro lado, seja

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \left(H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)\right) \times H_0^1.$$

Como,

$$H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi) \hookrightarrow H_0^1(0,\pi) \ \text{ e } \ H_0^1 \hookrightarrow L^2(0,\pi)$$

obtemos,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi) = H$$

e, observe que

$$A\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v \\ u_{xx} - a(x)v \end{pmatrix} \in H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi) = H.$$

Isto é, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$ implicando (ii) $\left(H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)\right) \times H_0^1(0,\pi) \subset D(A)$.
Portanto,

$$D(A) = \left(H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)\right) \times H_0^1(0,\pi). \tag{3.125}$$

4.1.) A é um operador densamente definido em H. De fato,

como $\overline{H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)}^{H_0^1(0,\pi)} = H_0^1(0,\pi)$ e $\overline{H_0^1(0,\pi)}^{L^2(0,\pi)} = L^2(0,\pi)$, temos,

$$\begin{aligned} \overline{D(A)}^H &= \overline{H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)}^{H_0^1(0,\pi)} \times \overline{H_0^1(0,\pi)}^{L^2(0,\pi)} = \\ &= \overline{\left(H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)\right) \times H_0^1(0,\pi)}^{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} = \\ &= H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi) = H. \end{aligned}$$

Portanto, A é denso em H.

4.2.) $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ é um operador fechado.

Mostraremos que o gráfico $G(A)$ é um subconjunto fechado de H.

Seja $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \in D(A) \subset H$ tal que

$$A(U_n) = A\left(\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v \\ u_{xx} - a(x)v \end{pmatrix} \in H.$$

Então,

$$\big(U_n,\, AU_n\big) \longrightarrow \big(U,\, Z\big) \ \text{ em } \ H \times H,$$

com $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$. Devemos mostrar que $A(U) = Z$.

Seja $Z = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \in H$. Sabemos que,

$$A(U_n) = \begin{pmatrix} v_n \\ u_{n,xx} - a(x)v_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = Z \ \text{ em } \ H$$

e

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = U \ \text{ em } \ H.$$

Daí, $v_n \longrightarrow u_1$ em $H_0^1(0,\pi)$ o que implica $v_n \longrightarrow u_1$ em $L^2(0,\pi)$. Por outro lado, $v_n \longrightarrow v$ em $L^2(0,\pi)$ donde segue, pela unicidade do limite em $L^2(0,\pi)$ que $v = u_1$.

Agora, desde que, $u_n \longrightarrow u$ em $H_0^1(0,\pi)$ implica que $u_n \longrightarrow u$ em $\mathcal{D}'(0,\pi)$, o que implica, $u_{n,xx} \longrightarrow u_{xx}$ em $\mathcal{D}'(0,\pi)$. Como $v_n \longrightarrow v$ em $L^2(0,\pi)$ temos que $a(x)v_n \longrightarrow a(x)v$ em $L^2(0,\pi)$ o que implica $a(x)v_n \longrightarrow a(x)v$ em $\mathcal{D}'(0,\pi)$. Logo,

$$u_{n,xx} - a(x)v_n \longrightarrow u_{xx} - a(x)v \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(0,\pi). \tag{3.126}$$

Por outro lado,

$$u_{n,xx} - a(x)v_n \longrightarrow v_1 \ \text{ em } \ L^2(0,\pi)$$

e, consequentemente,

$$u_{n,xx} - a(x)v_n \longrightarrow v_1 \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(0,\pi). \tag{3.127}$$

De (3.126) e (3.127) obtemos $u_{xx} - a(x)v = v_1$. Portanto,

$$Z = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u_{xx} - a(x)v \end{pmatrix} = A\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = A(U).$$

Teorema 3.7 *O operador A definido por*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ (\cdot)_{xx} & -a(x)I \end{pmatrix}$$

gera um C_0-semigrupo $S(t) = e^{At}$, $t \geq 0$ de contrações em um espaço de Hilbert H.

Demonstração: Já vimos que $D(A)$ é denso em H. Portanto, pela Proposição 1.32, de Liu-Zheng, é suficiente mostrar que $0 \in \rho(A)$ e que A é dissipativo.

Dado $A = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$ e $AU = \begin{pmatrix} v \\ u_{xx} - a(x)v \end{pmatrix}$ temos

$$\begin{aligned}
\big(U, AU\big)_H &= \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ u_{xx} - a(x)v \end{pmatrix} \right) \\
&= \big(u_x, v_x\big)_{L^2(0,\pi)} + \big(v, u_{xx} - a(x)v\big)_{L^2(0,\pi)} \\
&= \int_0^\pi u_x\, v_x dx + \int_0^\pi u_{xx}\, v dx - \int_0^\pi a(x)|v|^2 dx \overbrace{=}^{Green} \\
&= -\int_0^\pi a(x)|v|^2 \leq 0.
\end{aligned} \tag{3.128}$$

Isto é, A é dissipativo. Portanto, resta provar que $0 \in \rho(A)$.

Para qualquer $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H$, considere a equação

$$AU = F$$

o que implica

$$\begin{pmatrix} v \\ u_{xx} - a(x)v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{aligned}
v &= f \in H_0^1(0,\pi) \\
u_{xx} - a(x)v &= g \in L^2(0,\pi).
\end{aligned} \tag{3.129}$$

Substituindo $(3.129)_1$ em $(3.129)_2$ obtemos

$$u_{xx} = af + g \in L^2(0,\pi). \tag{3.130}$$

Portanto, pelo Teorema (A.18), (3.130) possui uma única solução fraca

$$u \in H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi).$$

Assim, existe uma única

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A) = \big(H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)\big) \times H_0^1(0,\pi)$$

que satisfaz $AU = F$ e, como $D(A) \hookrightarrow H$ então $\|U\|_H \leq k\|F\|_H$ com $k > 0$ independente de U. Logo, $0 \in \rho(A)$. Portanto, A é o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo de contrações $\{e^{At}\}_{t\geq 0}$. ■

Obtemos pelo Corolário 1.15, que $U(t) = e^{At}U_0$ é solução única do Problema (3.116), onde $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ e

$$U \in C\left([0, \infty); D(A)\right) \cap C^1\left([0, \infty); H\right).$$

3.3.2 Decaimento Exponencial

Teorema 3.8 *O C_0-semigrupo de contração $S(t) = \{e^{At}\}_{t\geq 0}$ gerado pelo operador linear não-limitado*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ (\cdot)_{xx} & -a(x)I \end{pmatrix}$$

satisfaz

$$\left\|e^{At}\right\| \leq Me^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0,\ M \geq 1\, e\, \omega > 0. \tag{3.131}$$

Demonstração: Pelo Teorema 2.3 de Gearhart, é suficiente verificarmos que as condições (2.3) e (2.4) são satisfeitas.

Suponha, por contradição, que (2.3) não é verdade, então existe $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ tal que $i\beta \in \sigma(A)$. Como H é um espaço de Hilbert e A é um operador fechado, não-limitado e sobrejetor em H e, desde que, $D(A) \hookrightarrow H$ é uma imersão compacta em H, pelo Teorema (1.33), A^{-1} é um operador compacto, $i\beta$ é um autovalor de A. Daí, existe uma função vetorial

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A), \text{ com } \left\|U\right\|_H = 1$$

tal que $AU = i\beta U$. Sendo assim,

$$\begin{pmatrix} i\beta u \\ i\beta v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v \\ u_{xx} - a(x)v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.132}$$

isto é,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} i\beta u - v & = & 0 \\ i\beta v - u_{xx} + a(x)v & = & 0. \end{array} \right. \tag{3.133}$$

Tomando o produto interno de (3.133) com $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ em H, obtemos

$$\begin{aligned}
\Big(\big(i\beta U - AU\big),\, U\Big)_H &= \big(i\beta U,\, U\big)_H - \big(AU,\, U\big) \\
&= \bar{i}\beta \big\|U\big\|_H^2 - \left(\begin{pmatrix} v \\ u_{xx} - a(x)v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \\
&= \bar{i}\beta \big\|U\big\|_H^2 - \big(u_x,\, v_x\big)_{L^2(0,\pi)} - \Big(\big(u_{xx} - a(x)v\big), v\Big)_{L^2(0,\pi)} \\
&\overbrace{=}^{Green} \bar{i}\beta \big\|U\big\|_H^2 + \int_0^\pi a(x)|v|^2 dx.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi a(x)|v|^2 dx &= Re\big(i\beta U - AU,\, U\big) \leq \big|\big(i\beta U - AU,\, U\big)\big| \\
&\overbrace{\leq}^{C.S.} \underbrace{\big\|i\beta U - AU\big\|_H}_{\text{por (3.132)}} \big\|U\big\|_H \;=\; 0,
\end{aligned}$$

desde que $\big\|U\big\|_H = 1$. Logo,

$$Re\big(i\beta U - AU, U\big)_H = \int_0^\pi a(x)|v|^2 dx = 0. \tag{3.134}$$

Segue-se a partir da seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\big\|a(x)v\big\|^2 &= \int_0^\pi |a(x)v|^2 dx \;=\; \int_0^\pi |a(x)|^2 |v|^2 dx \\
&\leq \int_0^\pi \|a\|_{L^\infty} |a(x)||v|^2 dx \\
&= \|a\|_{L^\infty} \int_0^\pi a(x)|v|^2 dx \;=\; 0,
\end{aligned} \tag{3.135}$$

que

$$a(x)v = 0, \;\; \forall\, x \in [0,\, \pi]. \tag{3.136}$$

Por $(3.133)_1$ temos $v = i\beta u$. Substituindo em $(3.133)_2$ e usando (3.136), tem-se

$$i\beta(i\beta u) - u_{xx} + a(x)v = 0 \;\;\Rightarrow\;\; -\beta^2 u - u_{xx} = 0.$$

Desde que, u satisfaz a condição de fronteira de Dirichlet, escrevemos

$$\begin{cases} -u_{xx} - \beta^2 u \;=\; 0 \\ \quad u(x,t) \;=\; 0,\; t > 0, \end{cases} \tag{3.137}$$

de onde, deve existir um inteiro $n \in \mathbb{N}$ tal que $\beta = n$. Daí, por regularidade elíptica, (ver Brézis [3]) existe uma única

$$u \;=\; c\,sen\,nx \text{ em } H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)$$

solução fraca de (3.137), para alguma constante $c \neq 0$.
Portanto, segue-se de $(3.133)_1$ e de (3.136) que

$$0 = a(x)v \;=\; a(x)i\beta u \;=\; icn\,a(x)sen\,nx, \quad \forall x \in [0,\pi]. \tag{3.138}$$

Note que, $sen\,nx = 0$ apenas para $x = 0$ e $x = \pi$. Sendo $n \in \mathbb{N}$ e $c \neq 0$ temos que (3.138) ocorre se, $a(x) = 0$, $\forall x \in [0,\pi]$. Mas, isto contradiz as hipóteses em $a(x)$, uma vez que, $a(x) \geq 0$ em $[0,\pi]$ e a medida do seu suporte ser positiva. Portanto, (2.3) se verifica.

Agora, suponha que (2.4) não ocorre. Temos que,

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\| = \infty.$$

Então, existe uma sequência $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $\beta_n \to \infty$ e uma sequência de funções vetoriais complexas $(V_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ tal que

$$\frac{\big\|(i\beta_n I - A)^{-1}V_n\big\|_H}{\big\|V_n\big\|_H} \geq n, \quad n \in \mathbb{N},\ \beta_n \in \mathbb{R}.$$

Daí, segue que

$$\big\|(i\beta_n I - A)^{-1}V_n\big\| \geq n\big\|V_n\big\|. \tag{3.139}$$

Como A é o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo de contração $S(t) = e^{At}$, $t \geq 0$. Então, pelo Teorema de Lumer-Phillips, A é maximal dissipativo, de onde segue a sobrejetividade do operador $(i\beta_n I - A)$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Sendo assim, de $i\beta_n \in \rho(A)$, para toda sequência $(V_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ existe uma única sequência $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$, com $\big\|U_n\big\| = 1$ tal que

$$(i\beta_n I - A)U_n = V_n,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Isto é,

$$U_n = (i\beta_n I - A)^{-1}V_n.$$

Daí e, de (3.139) temos

$$\big\|U_n\big\| \geq n\big\|(i\beta_n I - A)U_n\big\|.$$

Seja $F_n = (i\beta_n I - A)U_n$. Substituindo-o na desigualdade acima, obtemos

$$\|F_n\| \leq \frac{1}{n}\|U_n\|, \text{ onde } \|U_n\| = 1,$$

logo,

$$\|F_n\| \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty. \tag{3.140}$$

Fazendo o produto interno de U_n com F_n, temos que

$$\begin{aligned} \big(U_n,\, F_n\big)_H &= \big(U_n,\, i\beta_n U_n - AU_n\big)_H = \\ &= \bar{i}\beta_n\|U_n\|_H^2 + \int_0^\pi a(x)|v_n|^2 dx. \end{aligned}$$

Donde,

$$Re\big(U_n,\, F_n\big)_H = \int_0^\pi a(x)|v_n|^2 dx.$$

Agora, usando a estimativa (3.135) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue

$$\begin{aligned} \|a(x)v_n\| &\leq \|a\|_{L^\infty}\int_0^\pi a(x)|v_n|^2 dx \\ &= \|a\|_{L^\infty} Re\big(U_n,\, F_n\big)_H \\ &\leq \|a\|_{L^\infty}\big|(U_n, F_n)_H\big| \\ &\leq \|a\|_{L^\infty}\|U_n\|_H\|F_n\|_H \longrightarrow 0 \ \text{ por } \ (3.140). \end{aligned}$$

Logo,

$$a(x)v_n \longrightarrow 0 \ \text{ forte em } \ L^2(0,\pi). \tag{3.141}$$

Por outro lado, escrevendo $F_n = \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix}$ e a partir de (3.140) temos

$$\begin{aligned} f_n &= i\beta_n u_n - v_n \longrightarrow 0 \ \text{ forte em } \ H_0^1(0,\pi), \\ g_n &= i\beta_n v_n - u_{xx} + a(x)v_n \longrightarrow 0 \ \text{ forte em } \ L^2(0,\pi). \end{aligned} \tag{3.142}$$

De onde podemos deduzir, substituindo $(3.142)_1$ em $(3.142)_2$ que

$$-\beta_n^2 u_n - u_{n,xx} = g_n + i\beta_n f_n - a(x)v_n. \tag{3.143}$$

Seja $q(x)$ uma função real de classe C^1. Tomando o produto interno de (3.143) com $q(x)u_{n,x}$ em $L^2(0,\pi)$ e integrando por partes, obtemos:

$$\textbf{(i)} \qquad -\left(\beta_n^2 u_n,\, q(x)u_{n,x}\right) - \left(u_{n,xx}, q(x)u_{n,x}\right) = \frac{-\beta_n^2 q(x)|u_n|^2 \,/_0^\pi + \int_0^\pi q_x \beta_n^2 |u_n|^2 dx}{2} + \\ + \frac{-q(x)|u_{n,x}|^2 \,/_0^\pi + \int_0^\pi q_x |u_{n,x}|^2 dx}{2}.$$

$$\textbf{(ii)} \qquad (g_n, q(x)u_{n,x}) + (i\beta_n f_n, q(x)u_{n,x}) - (a(x)v_n, q(x)u_{n,x}) = (g_n, q(x)u_{n,x}) \\ - (i\beta_n (f_n q)_x, u_n).$$

Prova: (i)

(i.1) Da primeira parcela do lado esquerdo de **(i)**, temos,

$$\begin{aligned} -(\beta_n^2 u_n, q(x)u_{n,x}) &= -\frac{d}{dx}(\beta_n^2 u_n, q(x)u_n) + (\beta_n^2 u_{n,x}, q(x)u_n) + (\beta_n^2 u_n, q_x u_n) = \\ &= -\beta_n^2 q(x)|u_n|^2/_0^\pi + \int_0^\pi \beta_n^2 q(x) u_n\, u_{n,x} dx + (\beta_n^2 u_n, q_x u_n) = \\ &= -\beta_n^2 q(x)|u_n|^2/_0^\pi + \beta_n^2 q(x)|u_n|^2/_0^\pi - \int_0^\pi q_x \beta_n^2 |u_n|^2 dx \\ &- \int_0^\pi \beta_n^2 q(x) u_n\, u_{n,x} dx + (\beta_n^2 u_n, q_x u_n). \end{aligned}$$

(i.2) Da segunda parcela do lado esquerdo de **(i)**, temos

$$\begin{aligned} -(u_{n,xx}, q(x)u_{n,x}) &= -\frac{d}{dx}(u_{n,x}, q(x)u_{n,x}) + (u_{n,x}, q_x u_{n,x}) + (u_{n,x}, q(x)u_{n,xx}) = \\ &= -q(x)|u_{n,x}|^2 + (u_{n,x}, q_x u_{n,x}) + \int_0^\pi q(x) u_{n,xx}\, u_{n,x} dx = \\ &= -q(x)|u_{n,x}|^2 + (u_{n,x}, q_x u_{n,x}) + q(x)|u_{n,x}| \\ &- \int_0^\pi q_x |u_{n,x}|^2 dx - \int_0^\pi q(x) u_{n,x}\, u_{n,xx} dx. \end{aligned}$$

Somando (i.1) e (i.2) resulta que

$$\begin{aligned} -(\beta_n^2 u_n,\, q(x)u_{n,x}) - (u_{n,xx}, q(x)u_{n,x}) &= -\int_0^\pi \beta_n^2 q(x) u_n\, u_{n,x} dx \\ &- \int_0^\pi q(x) u_{n,x}\, u_{n,xx} dx. \end{aligned}$$

Note que,

(i.3) Temos,

$$\begin{aligned} -\int_0^\pi \beta_n^2 q(x) u_n\, u_{n,x} dx &= -\beta_n^2 q(x)|u_n|^2 \,/_0^\pi + \int_0^\pi q_x \beta_n^2 |u_n|^2 dx + \\ &+ \int_0^\pi \beta_n^2 q(x) u_n\, u_{n,x} dx. \end{aligned}$$

Adicionando $-\int_0^\pi \beta_n^2 q(x)u_n\, u_{n,x}dx$ a ambos os membros da igualdade, obtemos

$$-2\int_0^\pi \beta_n^2 q(x)u_n\, u_{n,x}dx = -\beta_n^2 q(x)|u_n|^2 \,/_0^\pi + \int_0^\pi q_x\beta_n^2|u_n|^2dx,$$

o que implica,

$$-\int_0^\pi \beta_n^2 q(x)u_n\, u_{n,x}dx = \frac{-\beta_n^2 q(x)|u_n|^2/_0^\pi + \int_0^\pi q_x\beta_n^2|u_n|^2dx}{2}.$$

(i.4) Agora como

$$\begin{aligned} -\int_0^\pi q(x)u_{n,x}\, u_{n,xx}dx &= -q(x)|u_{n,x}|^2/_0^\pi + \int_0^\pi q_x|u_{n,x}|^2dx + \\ &+ \int_0^\pi q(x)u_{n,x}\, u_{n,xx}dx. \end{aligned}$$

Adicionando $-\int_0^\pi q(x)u_{n,x}\, u_{n,xx}dx$ a ambos os membros da igualdade, temos

$$-2\int_0^\pi q(x)u_{n,x}\, u_{n,xx}dx = -q(x)|u_{n,x}|^2/_0^\pi + \int_0^\pi q_x|u_{n,x}|^2dx,$$

sendo assim,

$$-\int_0^\pi q(x)u_{n,x}\, u_{n,xx}dx = \frac{-q(x)|u_{n,x}|^2/_0^\pi + \int_0^\pi q_x|u_{n,x}|^2dx}{2}$$

de onde verifica-se (i).

Prova: (ii)

(ii.1) Trabalhando com a segunda parcela de (ii), segue que

$$(i\beta_n f_n\, , q(x)u_{n,x}) \;=\; \frac{d}{dx}(i\beta_n f_n\, , q(x)u_n) - (i\beta_n f_{n,x}\, , q(x)u_n) - (i\beta_n f_n\, , q_x u_n)$$

e

(ii.2) $\big(a(x)v_n, q(x)u_{n,x}\big) = 0.$

Somando (ii.1), (ii.2) ao produto escalar $\big(g_n, q(x)u_{n,x}\big)$ e usando o fato de $u(\pi,t) = 0,\ \forall\, t > 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \big(g_n, q(x)u_{n,x}\big) &- \big(i\beta_n(f_{n,x}q(x) + f_n q_x), u_n\big) = \\ &= \big(g_n, q(x)u_{n,x}\big) - \big(i\beta_n(f_n q)_x, u_n\big), \end{aligned}$$

o que verifica (ii).

Somando (i) e (ii) resulta que

$$\begin{aligned}\int_0^\pi q_x\big(|u_{n,x}|^2+\beta_n^2|u_n|^2\big)dx \;&-\; q(\pi)|u_{n,x}(\pi)|^2+q(0)|u_{n,x}(0)|^2 \;=\\ &=\; 2\big(g_n,q(x)u_{n,x}\big)-2\big(i\beta_n(f_nq)_x,u_n\big).\end{aligned} \tag{3.144}$$

Desde que,

$$\big\|U_n\big\|_H=\big|u_{n,x}\big|^2_{L^2(0,\pi)}+\big|v_n\big|^2_{L^2(0,\pi)}=1,$$

temos que $\big|u_{n,x}\big|^2_{L^2(0,\pi)}\le 1$, donde deduzimos que

$$\begin{aligned}\big|2(g_n\,,q(x)u_{n,x})\big| \;&\le\; 2\big|g_n\big|_{L^2(0,\pi)}\big|q(x)u_{n,x}\big|_{L^2(0,\pi)}= \\ &=\; 2\big|g_n\big|_{L^2(0,\pi)}\big|q(x)\big|\big|u_{n,x}\big|_{L^2(0,\pi)}\longrightarrow 0 \text{ por } (3.142)_2.\end{aligned} \tag{3.145}$$

Por sua vez, de $\big|v_n\big|_{L^2(0,\pi)}\le 1$, temos

$$\begin{aligned}\big|\beta_nu_n\big| \;&=\; \big|i\beta_nu_n\big|_{L^2(0,\pi)} \;=\; \big|i\beta_nu_n-v_n+v_n\big|_{L^2(0,\pi)}\le\\ &\le\; \big|i\beta_nu_n-v_n\big|_{L^2(0,\pi)}+\big|v_n\big|_{L^2(0,\pi)}\le 1,\end{aligned}$$

pois, por $(3.142)_1$

$$f_{n,x}=i\beta_nu_{n,x}-v_{n,x}\overset{forte}{\longrightarrow}0 \text{ em } L^2(0,\pi),$$

de onde, pela desigualdade de Poincaré, existe uma constante c talque

$$\big|f_n\big|_{L^2(0,\pi)}\le c\big|f_{n,x}\big|_{L^2(0,\pi)},\quad \forall f_n\in H_0^1(0,\pi)$$

e, consequentemente,

$$f_n=i\beta_nu_n-v_n\overset{forte}{\longrightarrow}0 \;\text{ em }\; L^2(0,\pi).$$

Logo,

$$\beta_nu_n \text{ é uniformemente limitada em } \; L^2(0,\pi).$$

Daí, note que

$$\begin{aligned}\big|\big(i\beta_n(f_nq)_x\,,u_n\big)\big| \;&=\; \big|\big(i\beta_nf_nq_x\,,u_n\big)+\big(i\beta_nf_{n,x}q(x)\,,u_n\big)\big|\\ &\le\; \big|\big(f_nq_x\,,i\beta_nu_n\big)\big|+\big|\big(f_{n,x}q(x)\,,i\beta_nu_n\big)\big|\\ &\le\; \big|f_nq_x\big|\big|i\beta_nu_n\big|+\big|f_{n,x}q(x)\big|\big|i\beta_nu_n\big|\\ &=\; \big|f_n\big|\big|q_x\big|\big|i\beta_nu_n\big|+\big|f_{n,x}\big|\big|q(x)\big|\big|i\beta_nu_n\big|\longrightarrow 0.\end{aligned} \tag{3.146}$$

Então, por (3.145) e (3.146) o lado direito de (3.144) converge para zero. Tomando $q(x) = x,\ 1-x$, respectivamente, deduzimos a partir de (3.144) que

$$\begin{aligned}\int_0^\pi 1\cdot\big(|u_{n,x}|^2+\beta_n^2|u_n|^2\big)dx \ &- \ \pi|u_{n,x}(\pi)|^2 + 0\cdot|u_{n,x}(0)|^2 = \\ &= \ 2\big(g_n\,, xu_{n,x}\big) - 2\big(i\beta_n(f_nx)_x\,, u_n\big) \end{aligned} \tag{3.147}$$

e

$$\begin{aligned}-\int_0^\pi \big(|u_{n,x}|^2+\beta_n^2|u_n|^2dx\big) \ &- \ (1-\pi)|u_{n,x}(\pi)|^2 + 1\cdot|u_{n,x}(0)|^2 = \\ &= \ 2\big(g_n\,, (1-x)u_{n,x}\big) - \\ &- \ 2\big(i\beta_n(f_n(1-x))_x\,, u_n\big). \end{aligned} \tag{3.148}$$

Adicionando (3.147) a (3.148) e lembrando que o lado direito das respectivas equações acima, convergem para zero, temos

$$-|u_{n,x}(\pi)|^2 + |u_{n,x}(0)|^2 \longrightarrow 0.$$

Sendo $\big\|U_n\big\|_H = 1$. Então,

$$|u_{n,x}(\pi)|^2 \longrightarrow 1 \ \text{ e } \ |u_{n,x}(0)|^2 \longrightarrow 1.$$

Agora, tome $q(x) = \int_0^x a(s)ds$ em (3.144). Daí, obtemos

$$\int_0^\pi a(x)\big(|u_{n,x}|^2+\beta_n^2|u_n|^2\big)dx - \int_0^\pi a(s)ds|u_{n,x}(\pi)|^2 \longrightarrow 0,$$

o que implica,

$$\big(a\beta_nu_n, \beta_nu_n\big) + \big(au_{n,x}, u_{n,x}\big) \longrightarrow \int_0^\pi a(s)ds = a_0 > 0. \tag{3.149}$$

No que segue, provaremos que isso é uma contradição. Com efeito, vimos a partir da equação $(3.142)_1$ e da desigualdade de Poincaré que

$$f_n \longrightarrow 0 \ \text{ forte em } \ L^2(0,\pi).$$

Ademais,

$$af_n = ia\beta_nu_n - av_n \overset{forte}{\longrightarrow} 0 \ \text{ em } \ L^2(0,\pi),$$

logo, por (3.141), $ia\beta_nu_n \overset{forte}{\longrightarrow} 0$ em $L^2(0,\pi)$. De onde segue-se que o primeiro termo do lado esquerdo de (3.149) converge para zero. Portanto, resta provar que o segundo termo do lado esquerdo de (3.149) também converge para zero. Tomando o produto interno de $(3.142)_2$ com au_n e, integrando por partes, obtemos

$$i\big(av_n, \beta_n u_n\big) + \big(au_{n,x}\,, u_{n,x}\big) + \big(av_n, au_n\big) \longrightarrow 0. \tag{3.150}$$

Daí, a partir de $(3.142)_1$ e de (3.141) o primeiro termo à esquerda de (3.150) converge para zero. Dividindo $(3.142)_1$ por β_n, temos que

$$\frac{f_n}{\beta_n} = iu_n - \frac{v_n}{\beta_n} \overset{forte}{\longrightarrow} 0 \ \text{ em } \ H_0^1(0,\pi)$$

o que implica,

$$\frac{f_n}{\beta_n} = iu_n - \frac{v_n}{\beta_n} \overset{forte}{\longrightarrow} 0 \ \text{ em } \ L^2(0,\pi)$$

e, consequentemente,

$$\frac{af_n}{\beta_n} = iau_n - \frac{av_n}{\beta_n} \overset{forte}{\longrightarrow} 0 \ \text{ em } \ L^2(0,\pi).$$

Logo,

$$au_n \overset{forte}{\longrightarrow} 0 \ \text{ em } \ L^2(0,\pi).$$

Sendo assim, o terceiro termo à esquerda de (3.150) também converge para zero, resultando na convergência do segundo termo à esquerda de (3.150) para zero, o que contradiz (3.149). Então,

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} \big\|(i\beta I - A)^{-1}\big\| < \infty.$$

Portanto, o semigrupo $\left\{e^{At}\right\}_{t\geq 0}$ é exponencialmente estável. $\blacksquare$

Apêndice A

Espaços $L^p(\Omega)$ e $W^{m,p}(\Omega)$

Neste capítulo, enunciaremos alguns resultados clássicos envolvendo os espaços de funções $L^p(\Omega)$ e $W^{m,p}(\Omega)$. Mas, antes, apresentamos algumas noções sobre **Derivada Fraca**.

A.1 Derivada Fraca

Em 1936, S. Sobolev introduziu o conceito de Derivada Fraca com o intuito de sanar a necessidade existente em muitos problemas descritos pelas Equações Diferenciais Parciais que possuem como dados iniciais funções que não são regulares o suficiente para possuírem derivadas no sentido clássico. Para o entendimento deste conceito, vejamos o seguite:

Uma n-upla de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é denominada *multi-índice* e sua ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$. Representamos por D^α o operador derivação de ordem $|\alpha|$, isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\ldots\partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Se $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$ definimos $D^0 u$ como o operador identidade.

Definição A.1 *Sejam Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Definimos o* **suporte** *de f, e denotamos por $supp(f)$, como sendo o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$. Se este conjunto for um compacto do $\mathbb{R}^n$, então dizemos que f possui* **suporte compacto**.

Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto.

Definição A.2 *Seja* Ω *um aberto do* $\mathbb{R}^n$. *Uma sequência* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $C_0^\infty(\Omega)$ *converge para* φ *em* $C_0^\infty(\Omega)$, *quando existe um compacto* $K \subset \Omega$ *tal que:*
i) $supp(\varphi), supp(\varphi_n) \subset K, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
ii) *Para todo multi-índice* $\alpha \in \mathbb{N}^n$, *tem-se* $D^\alpha(\varphi_n - \varphi) \to 0$ *uniformemente em* K.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, *munido dessa noção de convergência, é chamado de* **Espaço das Funções Teste sobre Ω** *e é representado por* $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definição A.3 *Uma* **distribuição** *sobre um aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é um funcional linear* $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *contínuo no sentido da convergência em* $\mathcal{D}(\Omega)$, *isto é,*
i) $T(a\varphi + b\psi) = aT(\varphi) + bT(\psi), \forall a, b \in \mathbb{R}$ *e* $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$;
ii) *Se* φ_n *converge para* φ *em* $\mathcal{D}(\Omega)$, *então* $T(\varphi_n)$ *converge para* $T(\varphi)$ *em* $\mathbb{R}$.

O espaço das distribuições sobre Ω *é denotado por* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Se $T \in \mathcal{D}(\Omega)$, representamos o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi\rangle$. Com isso, dizemos que

$$T_n \to T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega),$$

quando,

$$\langle T_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle \text{ em } \mathbb{R}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Denotaremos por $L^1_{loc}(\Omega)$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $|u|$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto $K \subset \Omega$.

Exemplo A.4 (Distribuição) *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *O funcional* $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, *definido por*

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$$

é uma distribuição.

Sejam u, v definidos num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, cuja fronteira Γ é regular. Supondo que u e v possuem derivadas parciais contínuas em $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Se u ou v se anula sobre Γ, obtemos da fórmula de Green que

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)dx.$$

Essa expressão motivou a definição de derivada fraca dada por Sobolev: Uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é **derivável no sentido fraco** em Ω, quando existe uma função $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)dx = -\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx.$$

para todo $\varphi \in D(\Omega)$.

Apesar da introdução desse conceito ter sido considerada de extrema importância na evolução das Equações Diferenciais Parciais, ocorria ainda que: nem toda função de $L^1_{loc}(\Omega)$ possui derivada nesse sentido. Daí, com o objetivo de sanar este problema, em 1945, Laurent Schwartz introduziu a noção de derivada no sentido das distribuições.

Definição A.5 *Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada $D^\alpha T$ de ordem $|\alpha|$ de T é um funcional $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^n \langle T, D^\alpha \varphi\rangle.$$

Além disso, $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω.

Observação A.6 *Decorre da definição acima que uma distribuição tem derivadas de todas as ordens.*

A.2 Espaços $L^p(\Omega)$

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Denotamos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das (classes de) funções reais f definidas em Ω cuja p-ésima potência é integrável no sentido de Lebesgue e por $L^\infty(\Omega)$ denotamos o conjuntos das (classes de) funções mensuráveis e essencialmente limitadas em Ω. O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma,

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} ess|f(x)|_{\mathbb{R}}$$

é um espaço de Banach.

No caso $p = 2$, o espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, denotamos o espaço das (classes de) funções reais definidas em Ω, cuja p-ésima potência é integrável à Lebesgue sobre qualquer subconjunto compacto do $\mathbb{R}^n$ contido em Ω e por $L^\infty_{loc}(\Omega)$ o espaço das (classes de) funções mensuráveis e essencialmente limitadas em qualquer subconjunto compacto do $\mathbb{R}^n$ contido em Ω.

A seguir apresentaremos alguns resultados relacionados aos Espaços $L^p(\Omega)$.

Proposição A.7 (Desigualdade de Young) *Sejam $1 < p, q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $a, b > 0$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Ver prova em [11]. ∎

Proposição A.8 (Desigualdade de Minkowski) *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $f, g \in L^p(\Omega)$, então*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Demonstração: Ver prova em [11]. ∎

Proposição A.9 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p, q \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

Demonstração: Ver prova em [11]. ∎

Corolário A.10 (Desigualdade de Hölder Generalizada) *Sejam $u_1, u_2, \ldots, u_k$ funções reais, tais que $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq p_i$ para $i = 1, \ldots, k$, e ainda, $\sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} = \frac{1}{p} \leq 1$. Então, $u = u_1 u_2 \ldots u_k \in L^p(\Omega)$ e*

$$\|u\|_p \leq \|u_1\|_{p_1} \|u_2\|_{p_2} \ldots \|u_k\|_{p_k}.$$

Definição A.11 *Sejam X e Y espaços de Banach, com $X \subset Y$. Seja $i : X \to Y$ a injeção canônica de X em Y, que a cada elemento $x \in X$ fazemos corresponder $i(x) = x$ como um elemento de Y. Dizemos que a* **imersão é contínua** *quando existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\|x\|_X \leq C \|x\|_Y, \ \forall x \in X.$$

onde $\|.\|_X$ e $\|.\|_Y$ denotam as normas de X e Y, respectivamente.

Dizemos que a **imersão é compacta** quando a imagem de subespaços limitados de X por i são relativamente compactos em Y.
Denotamos as imersões contínua e compacta de X em Y, respectivamente, por

$$X \hookrightarrow Y \quad \text{e} \quad X \overset{c}{\hookrightarrow} Y.$$

Sabendo disso, vale:

- Se Ω é limitado e $1 \leq p \leq q \leq \infty$ então

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

A.3 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Para um número inteiro $m > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, representamos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções u pertencentes a $L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, temos que a derivada de u no sentido das distribuições $D^\alpha u$, pertence a $L^p(\Omega)$ (ver [21]). Então, temos que, $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, \text{ quando } p = \infty.$$

Observação A.12 *Para $p = 2$, representamos $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$, por apresentar estrutura Hilbertiana.*

Proposição A.13 *O espaço $H^m(\Omega)$ munido do produto interno*

$$((u, v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

é um espaço de Hilbert.

Demonstração: Ver prova em [12]. ■

O fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$ e por $H^{-m}(\Omega)$ o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$.

No que segue listamos algumas propriedades importantes dos Espaços de Sobolev.

Teorema A.14 *Sejam j e m inteiros quaisquer satisfazendo $0 \leq j < m$, e seja $1 \leq q, p \leq \infty$, e $r \in \mathbb{R}$, $\frac{j}{m} \leq a \leq 1$ tal que*

$$\frac{1}{r} - \frac{j}{n} = a\left(\frac{1}{p} - \frac{m}{n}\right) + (1-a)\frac{1}{q}.$$

Então,

(i) Para qualquer $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, existe uma constante positiva C dependendo apenas de n, m, j, q, p, e a tal que temos a seguinte desigualdade:

$$|D^j u|_r \leq C|D^m u|_p^a |u|_q^{1-a} \tag{A.1}$$

com a seguinte exceção: se $1 < p < \infty$ e $m - j - \frac{n}{p}$ é um inteiro não-negativo, então (A.1) é satisfeita somente para $\frac{j}{m} \leq a < 1$.

(ii) Para qualquer $u \in W^{m,p}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ onde Ω é um abeto limitado com fronteira suave, existem duas constantes positivas C_1, C_2 tal que temos a seguinte desigualdade:

$$|D^j u|_{p,\Omega} \leq C_1|D^m u|_{r,\Omega}^a |u|_{q,\Omega}^{1-a} + C_2|u|_{q,\Omega} \tag{A.2}$$

com a mesma exceção da condição anterior.
Em particular, para qualquer $u \in W^{m,p}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, a constante C_2 em (A.2) pode ser nula.

Teorema A.15 (Desigualdade de Poincaré) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $u \in H_0^1(\Omega)$. Então, existe uma constante positiva C dependendo apenas de Ω e n tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^n}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Corolário A.16 *Em $H_0^m(\Omega)$, com Ω nas condições do Teorema (A.15), as normas $\|u\|_{H^m(\Omega)}$ e*

$$\|u\|_{H_0^m(\Omega)} = \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^n} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{A.3}$$

são equivalentes.

A prova deste resultado pode ser vista pelo leitor em [12].

Problema de Dirichlet Homogêneo

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= \quad f, \ \text{ em } \Omega \\ u = 0, & \text{em} \quad \Gamma = \partial\Omega. \end{cases} \tag{A.4}$$

Definição A.17 *Uma* **solução clássica** *de* $(A.4)$ *é uma função* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *que verifica* $(A.4)$. *Uma* **solução fraca** *de* $(A.4)$ *é uma função* $u \in H_0^1(\Omega)$ *que verifica*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega f\, v, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Temos o seguinte resultado de regularidade para o problema de Derichlet.

Teorema A.18 (Teorema de Regularidade) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto de classe* C^2 *com fronteira limitada. Seja* $f \in L^2(\Omega)$ *e seja* $u \in H_0^1(\Omega)$ *que verifica*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega f\, v \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Então, $u \in H^2(\Omega)$ *e*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_2,$$

onde c *é uma constante que só depende de* Ω. *Além disso, se* Ω *é de classe* C^{m+2} *e* $f \in H^m(\Omega)$ *então*

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \quad \textit{com} \quad \|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c\|f\|_{H^m(\Omega)},$$

em particular, se $m > \frac{N}{2}$ *então* $u \in C^2(\overline{\Omega})$. *Por último, se* Ω *é de classe* C^∞ *e se* $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, *então* $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver Brézis [3]. ■

Apêndice B

Mais alguns resultados

Nesta seção, veremos alguns resultados utilizados no decorrer deste trabalho.

Sejam X e Y são espaços de Banach sobre os reais (ou complexos). Denotamos por $\mathcal{L}(X,Y)$ a família de operadores lineares limitados, isto é, a família dos operadores lineares $A : X \to Y$ tais que

$$\|A\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Au\| < +\infty.$$

Definição B.1 *Um operador linear* $A : D(A) \subset X \to Y$ *é dito* **limitado** *se existe ema constante* $c > 0$, *tal que*

$$\|Au\|_Y \leq c\|u\|_X, \;\; \forall\, u \in D(A).$$

Caso não exista tal constante, A é dito um **operador ilimitado**, isto é, se existe uma sequência $(u_n) \subset D(A)$ tal que

$$\frac{\|Au_n\|_Y}{\|u_n\|_X} \to +\infty \;\text{ quando } n \to +\infty.$$

No caso em que $Y = X$ escrevemos simplesmente, $\mathcal{L}(X)$ em vez de $\mathcal{L}(X,X)$.

Temos que, para a norma em $\mathcal{L}(X)$ são válidas as seguintes igualdades:

$$\|A\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Au\| = \sup_{\|u\| = 1} \|Au\| = \inf\{c > 0;\, \|Au\| \leq c\|u\|,\, \forall u \in X\}.$$

Definição B.2 (Aplicação aberta) *Sejam* X *e* Y *espaços métricos e*

$$A : D(A) \subset X \to Y$$

uma aplicação dada. Então, A diz-se uma aplicação aberta se para cada conjunto aberto em $D(A)$ a imagem é um conjunto aberto em Y.

Observação B.3 *Quando uma aplicação $A : D(A) \subset X \to Y$ não é sobrejetiva é preciso distinguir entre a aplicação ser aberta do seu domínio*

(a) em Y;

(b) sobre a sua imagem $Im(A) = A(D(A))$.

(b) é mais fraco que (a), pois, se $X \subset Y$ a aplicação

$$A : X \to X \subset Y, ;\ u \mapsto Au := u$$

é aberta se, e só se, X é um aberto de Y. Enquanto que a aplicação

$$A : X \to Im(A) = X,\ \ u \mapsto Au := u$$

é aberta em qualquer caso.

Recordamos que uma aplicação $A : X \to Y$ diz-se contínua se a pré-imagem de qualquer aberto em Y é um aberto em X. Isto não implica que A seja uma aplicação aberta. Por exemplo, a aplicação

$$sen(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto sent$$

é contínua mas não é aberta, pois, a imagem de $(0, 2\pi)$ é $[-1, 1]$.

Teorema B.4 (Aplicação aberta) *Sejam X, Y espaços de Banach e $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ um operador dado. Então, A é uma aplicação aberta.*

Demonstração: Ver Kreyszig [10]. ■

O operador linear A é dito **densamente definido** se $\overline{D(A)} = X$. O operador linear A é dito **fechado** se o gráfico de A, dado por

$$G(A) = \{(u, Au) \in X \times Y;\ u \in D(A)\}$$

é um subespaço fechado de $X \times Y$.

Se A é um operador fechado podemos considerar $D(A)$ com a norma do gráfico $\|\cdot\|_{D(A)}$ dada por

$$\|u\|_{D(A)} = \|u\|_X + \|Au\|_Y.$$

Teorema B.5 (Teorema do Gráfico Fechado) *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dois espaços de Banach. Seja $A : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Suponha que o gráfico de A, $G(A)$, é fechado em $X \times Y$. Então, A é contínuo.*

Demonstração: Ver Kreyszig [10]. ■

Teorema B.6 (Banach-Steinhaus) *Sejam E e F dois espaços de Banach. Seja $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma}$ uma família de operadores lineares limitados de E em F. Suponha que*

$$\sup_{\lambda\in\Gamma} \|T_\lambda x\| < +\infty, \quad \forall x \in E.$$

Então,

$$\sup_{\lambda\in\Gamma} \|T_\lambda\| < +\infty.$$

Demonstração: Ver Brézis [3]. ■

A seguir enunciaremos alguns resultados sobre Integração de Funções Vetoriais.

Teorema B.7 *Seja $f : [a, b] \longrightarrow X$ contínua. Então:*

(i) Se k é uma constante,

$$\int_a^b kf(t)\, dt = k \int_a^b f(t)\, dt;$$

(ii) $\displaystyle\int_a^b (f + g)(t)\, dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)\, dt;$

(iii) Se $a \leq c \leq b$ então,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt;$$

(iv) $\displaystyle\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt;$

(v) $\displaystyle\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq \sup_{a\leq t\leq b} \|f(t)\|(b - a).$

Demonstração: Ver Gomes [6] ■

Teorema B.8 (Teorema Fundamental do Cálculo) *Se F é diferenciável em $[a, b]$ e $F'(t) = f(t)$, $t \in [a, b]$, então*

$$\int_a^b f(\tau)\, d\tau = F(b) - F(a).$$

Definição B.9 *Seja* $f : (a, b) \longrightarrow X$ **uma função** *e* X *um espaço de Banach, com* X *real ou complexo. Diz-se que* f *é* **diferenciável** *no ponto* $t_0 \in (a, b)$ *quando, o limite*

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

existe em X. *O qual, é dito* **derivada** *de* f *no ponto* t_0.

Ademais, diz-se que f é **diferenciável** em $\Omega \subset (a, b)$ se f for diferenciável em todo ponto de Ω.

Definição B.10 *Diz-se que um semigrupo* $\{S(t)\}$, *de classe* C_0, *com gerador infinitesimal* A, *é* **diferenciável** *para* $t > t_0 \geq 0$ *se* $S(t)X \subset D(A)$, $\forall t > t_0$. *Diz-se que* $S(t)$ *é* **diferenciável** *se* $S(t)$ *é diferenciável para* $t > 0$.

Teorema B.11 *Seja* $S(t)$ *um semigrupo diferenciável para* $t > t_0$ *e* $S^{(n)}(t)$ *o operador linear definido por* $S^{(n)}(t) = A^{(n)}S(t)$, $A^0 = I$, $n = 0, 1, \ldots$. *Então:*

(i) O operador $S^{(n)}(t)$ *tem as seguintes propriedades:*

a) $\forall t > (n+1)t_0$ *e todo* s *tal que* $t - t_0 > s > nt_0$, *tem-se*

$$S^{(n)}(t)x = S(t-s)S^{(n)}(s)x, \;\; \forall x \in X, \; n = 0, 1, \ldots;$$

b) $S^{(n)}(t)$ *é limitado para todo* $t > nt_0$, $n = 0, 1, \ldots;$

c) $S^{(n)}(t) = \left[AS\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = \left[S^{(1)}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n, \;\; \forall t > nt_0, \; n = 1, \ldots;$

(ii) $\forall x \in X$ *a aplicação* $S(t)x$ *é* n *vezes continuamente diferenciável em todo* $t > nt_0$ *e*

$$\frac{d^n}{dt^n}S(t)x = S^{(n)}(t)x, \;\; n = 1, \ldots;$$

(iii) $S^{(n)}$ *é uma aplicação contínua na topologia uniforme de* $\mathcal{L}(X)$ *em todo* $t > (n+1)t_0, \;\; n = 0, 1, \ldots;$

(iv) A aplicação S *é* n *vezes diferenciável na topologia uniforme de* $\mathcal{L}(X)$ *em todo* $t > (n+1)t_0$ *e*

$$\frac{d^n}{dt^n}S(t) = S^{(n)}(t), \quad n = 1, \ldots.$$

Demonstração: Ver Gomes [6]. ∎

No que segue, vamos considerar o teorema de Cauchy, que apresentamos sob as seguintes formulações equivalentes:

Teorema B.12 *Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R. Então,*

$$\oint_C f(z)\, dz = 0$$

para todo contorno fechado C contido em R.

Teorema B.13 *Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R. Então, a integral de f ao longo de um contorno ligando z_0 a z só depende destes pontos, e não do contorno de integração.*

Demonstração: a prova da equivalência dos Teoremas (B.12) e (B.13) pode ser vista em Rudin [17]. ■

Teorema B.14 (Fórmula Integral de Cauchy) *Se f é uma função analítica no interior e sobre um contorno simples e fechado, C, e ξ é um ponto do interior de C, então*

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-\xi}dw$$

e

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-\xi)^{n+1}}dw, \quad n = 1, ...$$

Teorema B.15 *Seja C um contorno simples $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq h$, onde $x(t)$ e $y(t)$ têm derivada contínua em (a, h) e G uma região do plano complexo. Seja $f(z, w)$ uma função contínua para $z \in G$ e $w \in C$ e analítica em G para cada $w \in C$. Então, a função*

$$F(z) = \int_C f(z, w)dw$$

é analítica em G e

$$\frac{d^n F}{dz^n} = \int_C \frac{\partial^n f}{\partial z^n}dw.$$

A prova destes dois resultados´pode ser vista em Rudin [17]

Teorema B.16 (Identidade do Resolvente) *Seja X um espaço de Banach e A um operador fechado em X. Então, para μ, $\lambda \in \rho(A)$ tem-se que*

$$R(\lambda; A) - R(\mu; A) = (\mu - \lambda)R(\lambda; A)R(\mu; A),$$

e $R(\mu; A)$ comuta com $R(\lambda; A)$.

Demonstração: Ver Gomes [6]. ■

Teorema B.17 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja (f_n) uma sequência de funções mensuráveis com*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad q.t.p. \ \ em\, \mathbb{R}$$

onde g é uma função integrável e

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \quad q.t.p. \ \ em\, \mathbb{R}.$$

Então,

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n(x)\,dx = \int f(x)\,dx.$$

Demonstração: Ver Bartle [2]. ■

Teorema B.18 (Teorema do Ponto Fixo de Banach) *Sejam (X,d) um espaço métrico completo e $F: X \longrightarrow X$ uma contração, isto é,*

$$d(F(x),F(y)) \leq kd(x,y) \quad 0 \leq k < 1.$$

Então, existe um único ponto fixo p, por F, isto é, $F(p) = p$.

Demonstração: Ver Sotomayor [19]. ■

Teorema B.19 (Fórmula de Green) *Seja Ω um aberto limitado regular do R^N. Se $u, v \in H^1(\Omega)$, para $1 \leq j \leq n$ temos que*

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_j}dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}vdx + \int_\Gamma uv\nu^j d\sigma$$

onde $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ denota o vetor unitário normal a Γ.

E, se $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$, então

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = -\int_\Omega \Delta u dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v dx.$$

Demonstração: Veja a prova em [4] ■

Bibliografia

[1] A. HARAUX & E. ZUAZUA; *Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems.* Arch. Rat. Mech. Anal. Vol. 100(2), pages 191-206,(1988).

[2] BARTLE, Robert G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure.*, Wiley, New York, 1995.

[3] BRÉZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equation*, Springer, 2010.

[4] CAVALCANTI, M.M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V.N., *Iniciação à Teoria das distribuições e aos Espaços de Sobolev.* Volume II, DMA/UEM, Maringá, 2000.

[5] CUNHA, Carlos A. R. da; *Semigrupos Aplicados a Sistemas Dissipativos em EDP* - Florianópolis, SC: SBMAC, 2007, 79 p. ; 20.5cm. - (Notas em Matemática Aplicada; v. 32)

[6] GOMES, A. M., *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução*, Instituto de Matemática-UFRJ, Rio de Janeiro, (1985).

[7] HUANG, F. L. *Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces*, Ann. of Diff. Eqs, 1(1) (1985), 43-56.

[8] KESAVAN, S., *Topics in functional analysis and applications*, Johw Wiley e Sons. 1989.

[9] KOMORNIK, U; E. ZUAZUA; *A direct method for boundary stabilization of wave equations*, J. Math. Puro Appl. 69(1990) 33-54.

[10] KREYSZIG, Erwin. *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley Classic Library, 1989.

[11] MEDEIROS, L. A.; MELLO, E.A.,*A Integral de Lebesgue.* Textos de Métodos Matemáticos 18, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. (1989).

[12] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA,M. M ., *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Eliticos Não Homogêneos)*, Editora IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (2000).

[13] MELO, R. A., *A Teoria de Semigrupo Aplicada às Equações Diferenciais Parciais.* Dissertação de Mestrado. CCT-UFCG, 2006.

[14] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Diferential Equations*, Springer-Verlag, New York (1983).

[15] RIVERA, Jaime E. M., *Estabilização de Semigrupos e Aplicações.* Academia das contas, Petrópolis-RJ, IM-UFRJ, (2008).

[16] RIVERA, J. E. M,; BARRETO, R. K., *Existence and exponential decay in nonlinear thermoelasticity. Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications Vol. 31(1-2), pages 149-162, (1998.)*

[17] RUDIN, W; *Real and Complex Analysis*; Megraw-Hill Book. Company, New York, 1987.

[18] dos SANTOS, M. D., *Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos via métodos variacionais.* Dissertação de Mestrado. CCT-UFCG, 2005.

[19] SOTOMAYOR, Jorge, *Lições de equações diferenciaisordinárias*, Projeto Euclides IMPA, 1979.

[20] WYLER, A. *Stability ofwave equationswithdissipativeboundary conditions in a bounded domain. Differential and Integral Equations*, Vol. 7, No.2(1994), 345-366.

[21] Z. Liu and S. Zheng; *Semigroups associated with dissipative systems.* Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics, 398, (1999).