Resumo

Neste trabalho usaremos métodos variacionais para mostrar a existência de solução fraca para dois tipos de problema. O primeiro consiste num problema não-linear da forma

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= \lambda_k h u + g(x,u), \ \mathbb{R}^N \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

tal que $N \geq 3$. O segundo, trata-se de uma Equação Diferencial Ordinária do tipo

$$\ddot{u} + G^{'}(u) = f(t).$$

Abstract

In this work we use variational methods to show the existence of weak solutions for two types problems. The first of them is a nonlinear problem of the form

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= \lambda_k h u + g(x,u), \ \mathbb{R}^N \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

where $N \geq 3$. The second, is related with a following Ordinary Differential Equations of the form

$$\ddot{u} + G^{'}(u) = f(t).$$

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos via métodos variacionais

por

Moisés Dantas dos Santos

sob orientação do

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB

Dezembro de 2005

Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos via métodos variacionais

por

Moisés Dantas dos Santos

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

____

Prof. Dr. Sergio Henrique Monari Soares - USP - São Carlos

____

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho - UFCG

____

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Dezembro de 2005

Agradecimentos

-Primeiramente, agradeço a Deus por toda saúde e coragem que me deu durante este trabalho.

-Ao professor Claudianor pela sempre atenção, paciência e pelo o exemplo de profissional e pessoa que ele é.

-Ao professor Marco Aurélio pela incasavel atenção e o auxilio dado durante a realização deste trabalho.

-Aos professores Daniel Cordeiro e Sergio Henrique por se apresentarem disponível nesta tarefa de me avaliar, fazendo parte da banca examinadora.

-A todos que fazem parte da minha família, em especial a meu pai que apesar de ser analfabeto, sempre acreditou e insentivou todos os filhos ao estudo.

-A minha namorada Tatiana pela compreensão, insentivo e ajuda nos momentos ausentes.

-Aos professores da Pós-Graduação: Aparecido, Claudianor, Daniel Cordeiro e Marco Aurélio pelas disciplinas que lecionaram e que contribuiram para a formação do meu conhecimento.

-A todos que fazem parte do departamento de Matemática e Estatística da UFCG.

-Aos meus amigos Orlando e Aldo pelo companherismo, motivação e que indiretamente contribuiram para a elaboração deste trabalho.

Dedicatória

Ao meu pai e a minha querida Tatiana.

Conteúdo

Introdução

Nesta dissertação vamos utilizar os métodos variacionais para determinar soluções fracas para dois tipos de problemas. O primeiro a ser tratado, é um problema não-linear do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= \lambda_k h u + g(x,u), \ \mathbb{R}^N \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{P}$$

onde $N \geq 3$, com as funções $h : \mathbb{R}^N \longmapsto \mathbb{R}_+$ e $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ contínuas verificando as seguintes condições:

(i) $h \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$;

(ii) Existe $Z \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$; $Z(x) > 0 \ \forall \, x \in \mathbb{R}^N,$ satisfazendo

$$|g(x,t)| \leq Z(x) \ \ \forall \, (x,t) \ \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \tag{1}$$

e considere λ_k o k-ésimo autovalor associado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= \lambda h u, \ \mathbb{R}^N \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{P_λ}$$

Além disso, vamos supor que g satisfaz uma das condições (g_2^+) ou (g_2^-), listadas abaixo:

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x, v(x))dx \longrightarrow \pm\infty \ \ quando \ \ \|v\| \longrightarrow \infty \ ; \ v \ \in N_{\lambda_k} \tag{$g_2^\pm$}$$

sendo N_{λ_k} o auto espaço associado a λ_k e $G(x,.) = \int_0^s g(x,\tau)d\tau$ designa a primitiva de $g(x,.)$.

É importante ressaltar, que a primeira versão referente a existência de solução do problema (P), para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado é devido a Lazer, Ahmad e Paul [3]. O que fizemos foi completar o resultado provado por eles, considerando o domínio como sendo o $\mathbb{R}^N$. Encontrar uma solução fraca para o problema (P) equivale a determinar pontos críticos do funcional energia associado definido por

$$\begin{array}{rcl}\Phi : H^1(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \Phi(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + |u|^2)dx - \frac{\lambda_k}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 h dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)dx.\end{array}$$

Uma das maiores dificuldades na procura de solução para problemas elípticos em um domínio não-limitado, como por exemplo o $\mathbb{R}^N$, é a falta de imersões compactas do espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$ nos espaços $L^p(\mathbb{R}^N)$. Para superar essa dificuldade vamos trabalhar com espaços com peso.

O segundo problema que iremos abordar, trata-se de uma Equação Diferencial Ordinária do tipo

$$\ddot{u} + G'(u) = f(t) \tag{2}$$

a qual é de grande importância para a Mecânica e á Física-Matemática. Em particular, se considerarmos $G(u) = -\cos u$, obtemos a equação do pêndulo forçado

$$\ddot{u} + \sin(u) = f(t).$$

A existência de solução T-periódica para a equação (1), é devido a Ambrosetti-Rabinowitz [13] e consiste em determinar pontos críticos do funcional energia definido por

$$\Phi(u) = \int_0^T [\frac{\dot{u}^2}{2} - G(u) + fu]dt.$$

No **Capítulo 1** fizemos um breve estudo sobre as integrais e E.D.O's em espaços de Banach, revizando as definições e as principais propriedades, as quais são ferramentas de grande importância para entendermos as duas versões do Teorema de Deformação que foram abordadas neste cápitulo. Como conseqüência, demonstraremos o Teorema do Ponto de Sela que será utilizado no estudo que desenvolvemos no Capítulo 2 procurando solução fraca para o problema (P).

No **Capítulo 2** definimos espaços com peso e verificamos que o espaço $\left(L^p(\mathbb{R}^N, hdx), \|.\|_{p,h}\right)$ com $1 \leq p < \infty$ é Banach. Também conseguimos mostrar que se $h \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, então vale a imersão contínua

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N, hdx)$$

para $p \in [1, 2^*]$ *se* $N \geq 3$, e que ocorre a imersão compacta com $h \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, de

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N, hdx)$$

para $p \in [1, 2^*]$ se $N \geq 3$. Em seguida, fizemos um estudo sobre o operador solução e algumas de suas propriedades, que serão bastante utilizadas no decorrer deste Capítulo. Depois destes fatos, voltamos ao problema (P) e mostramos a existência de solução fraca.

No **Capítulo 3** definimos algumas condições de compacidade que serão de extrema necessídade na procura de solução fraca para a equação (1). Logo após, demonstramos duas versões do Teorema do Passo da Montanha e apartir destas, sob certas condições conseguiremos garantir que equação (1) tem duas soluções T-periódicas que não diferem por multiplicidade 2π.

No **Capítulo 4** fizemos um breve estudo sobre as séries de Fourier e demonstramos alguns resultados básicos. Além disso, mostramos que o espaço vetorial

$$H = \left\{ u : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \,;\, u \text{ absolutamente contínua, T-periódica e } \int_0^T |\dot{u}(t)|^2 \, dt < \infty \right\},$$

é um espaço de Hilbert com relação ao produto interno dado por

$$(u, v) = \int_0^T (\dot{u}\dot{v} + uv) dt$$

e que o funcional Φ associado a equação (1) satisfaz a condição Fraca de Palais-Smale (FPS), definida no Capítulo 3. Em seguida, tratamos da existência de solução T-periódica para a equação

$$\ddot{u} + G'(u) = f(t),$$

onde $G \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é uma função 2π-periódica e $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ uma função T-periódica.

No **Apêndice A** definimos o Grau de Brouwer e suas propriedades que são utilizadas na dissertação.

No **Apêndice B** definimos a derivada de Fréchet e mostramos que os funcionais utilizados na dissertação são de classe C^1.

No **Apêndice C** mostramos que o operador $T : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$, definido por $T(u) = \nabla\psi(u)$, que foi considerado no **Capítulo 2** é compacto.

Finalmente no **Apêndice D** enunciamos os principais resultados utilizados no decorrer deste trabalho.

Capítulo 1

Teorema do Ponto de Sela

Nosso objetivo neste capítulo é demonstrar o Teorema do Ponto de Sela e, para isto, usaremos alguns Teoremas de Deformação e um pouco da Teoria do Grau e suas propriedades que veremos no decorrer de nosso trabalho. Começamos nosso estudo verificando alguns conceitos básicos envolvendo integrais em espaços de Banach.

1.1 Integrais em Espaços de Banach

Nesta seção iremos estudar o conceito de integrais em espaços de Banach e estudar algumas de suas propriedades que serão utilizadas na demonstração do Teorema de Deformação. Citamos o livro de Serge Lang [10] para maiores detalhes.

No que segue, G é um espaço vetorial normado completo cuja a norma é denotada por $|.|$. Considere E o espaço das funções limitadas de $[a,b]$ em G com a norma

$$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|\,.$$

Sejam a, b números reais tais que $a < b$, P uma partição do intervalo $[a,b]$ e considere a sequência de números $(a_0, a_1, ..., a_n)$ tal que

$$a = a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_n = b$$

Definição 1.1 *Seja $f : [a,b] \longmapsto G$ uma função. Dizemos que f é uma função escada, se existem elementos $w_1, ..., w_n \in G$ tais que*

$$f(t) = w_i \quad \textit{para} \quad a_{i-1} < t < a_i \ ; \quad i = 1, ..., n.$$

Assim, pela definição acima, f tem valor constante em cada intervalo aberto determinado pela partição.

Definição 1.2 *Seja f uma função escada com respeito a partição P. O valor da integral de f será definido por*

$$I_P(f) = (a_1 - a_0)w_1 + ... + (a_n - a_{n-1})w_n = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})w_i.$$

Proposição 1.3 *Suponha que f é uma função escada com respeito a outra partição Q de* $[a, b]$, *então*

$$I_P(f) = I_Q(f).$$

Demonstração: Primeiro vamos considerar uma partição obtida de P, formada pela inserção de um novo ponto entre os pontos de P,

$$P_c = (a_0, ..., a_k, c, a_{k+1}, ..., a_n)$$

com

$$a_0 < ... < a_k < c < a_{k+1} < ... < a_n.$$

Além disso, note que

$$a_k < t < a_{k+1} \quad e \quad f(t) = w_{k+1}$$

então, f tem valor constante em cada intervalo

$$a_k < t < c \quad e \quad c < t < a_{k+1}.$$

Consequentemente, a integral de f com respeito a P_c será

$$(a_1 - a_0)w_1 + ... + (c - a_k)w_{k+1} + (a_{k+1} - c)w_{k+1} + ... + (a_n - a_{n-1})w_n.$$

Assim, esta soma difere da soma dada por $I_P(f)$ apenas por um termo $(a_{k+1} - a_k)w_{k+1}$. Observe que

$$(c - a_k)w_{k+1} + (a_{k+1} - c)w_{k+1} = (a_{k+1} - a_k)w_{k+1}$$

o que implica,

$$I_{P_c}(f) = I_P(f).$$

A partição R é dita um refinamento de P, se cada ponto da partição P é ponto de R. Inserindo um número finito de pontos e usando indução, concluímos que R é um refinamento de P, então

$$I_R(f) = I_P(f).$$

Afirmação: Se Q é uma outra partição do intervalo $[a,b]$, então P e Q tem em comun um refinamento.
De fato, se $Q=(b_0,...,b_m)$, então podemos inserir indutivamente $b_0,...,b_m$ em P, obtendo assim um refinamento, que denotaremos por R. Dessa forma,

$$I_R(f)=I_P(f)=I_Q(f).$$

$\blacksquare$

Isto mostra que nossa integral não depende da partição. Vamos denotar a integral de f por $I(f)$.

É claro que f é limitada, pois f tem um número finito de valores e a norma de f será dada por

$$\|f\|=\max_{w_i\in G}\{|w_i|\ ;\ i=1,...,n\}.$$

Assim,

$$|I(f)|\leq\sum_{i=1}^{n}|a_i-a_{i-1}|\,|w_i|\leq\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})\,\|f\|$$

o que implica,

$$|I(f)|\leq(b-a)\,\|f\|.$$

Agora, vamos enunciar alguns resultados que não iremos demonstrar e, apartir destes, definir a integral no espaço de Banach.

Lema 1.4 *O conjunto das funções escadas $f:[a,b]\longmapsto G$ é um subespaço do espaço de todas as funções limitadas de $[a,b]$ em G, que denotaremos por $S_t([a,b],G)$. A função*

$$I:S_t([a,b],G)\longmapsto G$$

é linear e limitada, isto é,

$$|I(f)|\leq(b-a)\,\|f\|.$$

Teorema 1.5 *Toda função contínua de $[a,b]$ em G pode ser aproximada uniformemente por funções escadas. Além disso, o fecho de $S_t([a,b],G)$ contém $C([a,b],G)$.*

Teorema 1.6 *(Extensão Linear) Seja E um espaço vetorial normado, e F um subespaço. Seja $L:F\longmapsto G$ um funcional linear contínuo. Então, L tem uma única extensão linear contínua $\overline{L}:\overline{F}\longmapsto G$.*

Agora, considere

$$\begin{array}{rcl} I : S_t([a,b],G) & \longrightarrow & G \\ f & \longmapsto & I(f) = \int_a^b f(t)dt. \end{array}$$

Considerando $F = S_t([a,b],G)$ e $I = L$, podemos aplicar o **Teorema 1.6** com $\overline{F} = C([a,b],G)$ e concluir que existe uma única extensão linear contínua que denotaremos também por

$$\begin{array}{rcl} I : C([a,b],G) & \longrightarrow & G \\ f & \longmapsto & I(f) =: \int_a^b f(t)dt. \end{array}$$

Portanto, pelo **Teorema 1.5** e usando o fato de que $I(f)$ é linear e contínua temos

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)\,; \quad f_n \longrightarrow f, \quad f_n \in S_t([a,b],G)\,.$$

Assim,

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)dt.$$

O próximo Teorema é uma versão do Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema 1.7 *Seja $f : [a,b] \longmapsto G$ contínua e $F : [a,b] \longmapsto G$ diferenciável em $[a,b]$ com $F' = f$. Então,*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Corolário 1.8 *Se $f : [a,b] \longmapsto G$ é contínua e $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, então $F'(x) = f(x)$.*

1.2 Equações Diferenciais Ordinárias em Espaços de Banach

Nesta seção iremos fazer um breve estudo sobre as Equações Diferenciais Ordinárias em Espaços de Banach, mais especificamente sobre o problema de Cauchy. Vamos enunciar alguns resultados que serão utilizadas na demonstração do Teorema de Deformação.

Seja U um conjunto aberto em E. Um campo vetorial de classe $C^p; 1 \leq p \leq \infty$ em U é uma aplicação $f : U \longmapsto E$ de classe C^p.

Ao campo vetorial f associemos a equação diferencial

$$\alpha'(t) = f(\alpha(t)). \quad (*)$$

As soluções desta equação, são, as aplicações diferenciáveis $\alpha : J \subset \mathbb{R} \longmapsto U$, onde J é um intervalo aberto contendo o zero, tais que

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = \alpha^{'}(t) = f(\alpha(t))$$

e satisfazem a condição inicial

$$\alpha(0) = x_0 \ ; \quad x_0 \ \in \ U.$$

Essas soluções são chamadas trajetórias ou curvas integrais de f ou da equação diferencial $(*)$.

Comentário: Seja $\alpha : J \longmapsto U$ uma função contínua satisfazendo a condição

$$\alpha(t) = x_0 + \int_0^t f(\alpha(s))ds.$$

Então, pelo **Teorema 1.7**

$$\alpha^{'}(t) = f(\alpha(t)).$$

Definição 1.9 *Seja U_0 um aberto de U contendo x_0. A aplicação $\alpha : J \times U_0 \longmapsto U$; $J \times U_0 = \{(t, x); x \in U_0, t \in J\}$ chama-se fluxo gerado por f e vale as seguintes propiedades*
(i) $\alpha(0, x) = x$,
(ii) $\alpha(t + s, x) = \alpha(t, \alpha(x + s))$,.

Teorema 1.10 *Sejam J um intervalo aberto contendo o zero e U um aberto em E; $x_0 \in E$, e $0 < a < 1$ tais que*

$$\overline{B_{2a}}(x_0) \subset U.$$

Considere $f : J \times U \longmapsto E$ uma função contínua, limitada por uma constante $c > 0$ satisfazendo a condição de Lipschitziana em U com constante de Lipschitz $K > 0$, uniformemente com respeito a J. Se $b < \min\left\{\frac{a}{c}, \frac{1}{K}\right\}$, então existe um único fluxo

$$\alpha : J_b \times B_a \longmapsto U.$$

Além disso, se f é de classe C^p, então cada curva integral $\alpha(t, x)$ referente a $(*)$ também é de classe C^p.

1.3 Teorema de Deformação

Nesta seção vamos demonstrar duas versões do Teorema de Deformação (ver[4]) que serão fundamentais para a demonstração do Teorema do Ponto de Sela. No que segue, designamos por X um espaço de Banach, $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe $C^1(X,\mathbb{R})$,

$$Y = \{u \in X; \phi'(u) \neq 0\}$$

e

$$K_c = \{u \in X; \phi(u) = c, \phi'(u) = 0\}$$

o conjunto de todos os pontos críticos no nível c. Denotaremos por ϕ^c o conjunto de todos os níveis menores ou iguais a c, isto é,

$$\phi^c = \{u \in X; \phi(u) \leq c\}$$

Definição 1.11 *Um campo pseudo-gradiente para* $\phi \in C^1(X,\mathbb{R})$ *é uma aplicação localmente lipschitziana* $v : Y \to X$ *tal que, para cada* $u \in Y$,

$$\|v(u)\| \leq 2\|\phi'(u)\| \tag{1.1}$$

$$\langle \phi'(u), v(u)\rangle \geq \|\phi'(u)\|^2 . \tag{1.2}$$

Lema 1.12 *Assumindo as condições da* **Definição 1.11**, *existe um campo pseudo-gradiente para* ϕ *em* Y.

Demonstração: Seja ũ $\in Y$, logo $\phi'(\tilde{u}) \neq 0$. Então, existe $w = w(\tilde{u}) \in X$ com $\|w\| = 1$ e

$$\langle \phi'(\tilde{u}), w\rangle > \frac{2}{3}\|\phi'(\tilde{u})\| .$$

De fato, desde de que $\phi'(\tilde{u})$ é um funcional linear contínuo, tem-se

$$\|\phi'(\tilde{u})\| = \sup_{\|w\|=1} \langle \phi'(\tilde{u}), w\rangle . \tag{1.3}$$

Desde que

$$\|\phi'(\tilde{u})\| > \frac{2}{3}\|\phi'(\tilde{u})\| ,$$

por (1.3) temos que existe $(w_n) \subset X$ com $\|w_n\| = 1$ tal que

$$\langle \phi'(\tilde{u}), w_n\rangle \longrightarrow \|\phi'(\tilde{u})\| \ \ \textit{quando} \ \ n \to \infty.$$

Assim, existe $w = w_n$ para n suficientemente grande tal que

$$\langle \phi'(\tilde{u}), w \rangle > \frac{2}{3} \|\phi(\tilde{u})\| . \tag{1.4}$$

Agora, defina a seguinte função

$$\begin{array}{rcccl} v & : & Y & \longrightarrow & X \\ & & \tilde{u} & \longmapsto & v(\tilde{u}) = \dfrac{3}{2} \|\phi'(\tilde{u})\| \, w. \end{array}$$

Assim,

$$\|v(\tilde{u})\| = \frac{3}{2} \|\phi'(\tilde{u})\| < 2 \|\phi'(\tilde{u})\|$$

e

$$\langle \phi'(\tilde{u}), v(\tilde{u}) \rangle = \left\langle \phi(\tilde{u}), \frac{3}{2} \|\phi'(\tilde{u})\| \, w \right\rangle ,$$

de onde tem-se

$$\langle \phi'(\tilde{u}), v(\tilde{u}) \rangle = \frac{3}{2} \|\phi'(\tilde{u})\| \langle \phi'(\tilde{u}), w \rangle .$$

Agora, por (1.4) obtemos

$$\langle \phi'(\tilde{u}), v(\tilde{u}) \rangle > \frac{3}{2} . \frac{2}{3} \|\phi'(\tilde{u})\| \, \|\phi'(\tilde{u})\| ,$$

consequentemente

$$\langle \phi'(\tilde{u}), v(\tilde{u}) \rangle > \|\phi'(\tilde{u})\|^2 .$$

Desde que ϕ' é contínua, existe uma vizinhaça aberta de $\tilde{u}$ em Y que iremos denotar por $V_{\tilde{u}}$ tal que para cada $u \in V_{\tilde{u}}$ tem-se:

$$\|v(\tilde{u})\| < 2 \|\phi'(u)\| \tag{1.5}$$

$$\langle \phi'(u), v(\tilde{u}) \rangle > \|\phi'(u)\|^2 \tag{1.6}$$

Note que a família $\{V_{\tilde{u}};\ \tilde{u} \in Y\}$ é uma cobertura em Y. Além disso, $Y \subset X$ é metrizável, portanto paracompacto, logo existe um refinamento localmente finito $\{V_{\tilde{u}_i}\}_{i \in I}$. Desta forma, existe uma partição de unidade contínua e localmente lipischitziana $\{\phi_i\}_{i \in I}$ subordinada a $\{V_{\tilde{u}_i}\}_{i \in I}$; $0 \leq \phi_i \leq 1$ e

$$\sum_{i \in I} \phi_i = 1 \ em \ Y.$$

Considere

$$V(u) = \sum_{i \in I} \phi_i(u) v_i \ ; \ \ v_i = v(\tilde{u}_i) \ \ \forall \ \ u \in Y.$$

Fixado $u \in Y$, existe $J \subset I$ finito tal que

$$V(z) = \sum_{i \in J} \phi_i(z) v_i \ \ \forall \ z \ \in \ B_\delta(u).$$

Mostrando que V é localmente lipschitziana, pois V é soma finita de funções localmente lipschitziana $\phi_i(z)v_i$ em $B_\delta(u)$.

Para fixar a idéia, vamos supor $J = \{1, 2, ..., n_0\}$; $n_0 = n_0(u)$ e $\delta = \delta(u)$ portanto,

$$V(z) = \sum_{i=1}^{n_0} \phi_i(z) v_i \ \ \forall \ z \ \in \ B_\delta(u)$$

em particular,

$$V(u) = \sum_{i=1}^{n_0} \phi_i(u) v_i$$

consequentemente,

$$\|V(u)\| \leq \sum_{i=1}^{n_0} \phi_i(u) \|v_i\|.$$

Assim, usando (1.5) temos

$$\|V(u)\| \leq \sum_{i=1}^{n_0} 2\phi_i(u) \|\phi'(u)\|$$

o que implica,

$$\|V(u)\| \leq 2 \|\phi'(u)\| \sum_{i=1}^{n_0} \phi_i(u),$$

isto é,

$$\|V(u)\| \leq 2 \|\phi'(u)\|.$$

Além disso,

$$\left\langle \phi^{'}(u), V(u) \right\rangle = \left\langle \phi^{'}(u), \sum_{i=1}^{n_0} \phi_i(u) v_i \right\rangle$$

logo

$$\left\langle \phi^{'}(u), V(u) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n_0} \phi_i(u) \left\langle \phi^{'}(u), v_i \right\rangle,$$

de onde obtemos por (1.6)

$$\left\langle \phi^{'}(u), V(u) \right\rangle \geq \sum_{i=1}^{n_0} \phi_i(u) \left\| \phi^{'}(u) \right\|^2,$$

ou seja,

$$\left\langle \phi^{'}(u), V(u) \right\rangle \geq \left\| \phi^{'}(u) \right\|^2 \sum_{i=1}^{n_0} \phi_i(u).$$

Assim

$$\left\langle \phi'(u), V(u) \right\rangle \geq \left\| \phi'(u) \right\|^2,$$

mostrando que existe um campo pseudo-gradiente para ϕ. ■

Agora, vamos definir o conjunto S_δ o qual usaremos na demonstração do próximo teorema.

Definição 1.13 *Dados um subconjunto $S \subset X$ e $\delta > 0$, designamos por S_δ a vizinhança fechada de S definida por*

$$S_\delta = \{u \in X; \quad d(u, S) \leq \delta\}.$$

Teorema 1.14 *Seja X um espaço de Banach e $\phi : X \longmapsto \mathbb{R}$ um funcional de classe $C^1(X, \mathbb{R})$. Suponha que $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$ e $\epsilon, \delta > 0$ são tais que*

$$\|\phi'(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta} \tag{1.7}$$

para todo $u \in \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$. Então, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que, para todo $u \in X$ e $t \in [0,1]$, tem-se:
(i) $\eta(0, u) = u$,
(ii) $\eta(t, u) = u$ se $u \notin \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$,
(iii) $\eta(1, \phi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta$,
(iv) $\eta(t, .) : X \longmapsto X$ é um homeomorfismo.

Demonstração: Definindo

$$A = \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta},$$

$$B = \phi^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]) \cap S_\delta$$

e

$$Y = \{u \in X; \ \phi'(u) \neq 0\},$$

temos

$$B \subset A \subset Y.$$

Além disso, considere $v : Y \longmapsto X$ um campo pseudo-gradiente para ϕ e $0 \leq \rho \leq 1$ uma função localmente lipschitziana (ver [9]) definida por

$$\begin{aligned} \rho \ : \ X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \rho(u) = \tfrac{d(u, X \setminus A)}{d(u, X \setminus A) + d(u, B)}. \end{aligned}$$

Segue da definição de ρ que

$$\rho(u) = 1 \; se \;\; u \in B$$

e

$$\rho(u) = 0 \; se \;\; u \in X \backslash A.$$

Definindo $f : X \longmapsto X$ por

$$f(u) = \begin{cases} -\rho(u)\dfrac{v(u)}{\|v(u)\|}, & \text{se} \quad u \in A \\ \qquad\qquad 0, & \text{se} \quad u \notin A, \end{cases}$$

temos que f é localmente lipschitziana (Ver [9]) e que $\|f\| \leq 1$ para todo $u \in X$. Segue do **Teorema 1.10** que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} w'(t) &= f(w) \\ w(0) &= u \end{cases}$$

tem solução única a qual denotaremos por $w(t, u)$, sendo definida para todo $t \geq 0$.

Seja $\eta : [0, 1] \times X \longmapsto X$ definida por $\eta(t, u) = w(\delta t, u)$. Então,

(i) $\eta(0, u) = w(0, u) = u$;

(ii) $\eta(t, u) = w(\delta t, u) = u$ se $u \notin A = \phi^{-1}\left([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon)\right] \cap S_{2\delta}$

De fato, seja $w_1(t) = u \;\; \forall \;\; t \in \mathbb{R}$, note que

$$w_1'(t) = 0 = f(w_1(t))$$

o que implica,

$$\begin{cases} w_1'(t) &= f(w_1(t)) \; se \; u \notin A \\ w_1(0) &= u \end{cases}$$

Assim, pelo teorema de existência e unicidade temos

$$w_1(t) = w(t, u) = u \;\; \forall \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Daí,

$$\eta(t, u) = w(\delta t, u) = u \;\; \forall \;\; t \in \mathbb{R}.$$

(iii) Note que, para $t \geq 0$,

$$w(t, u) - w(0, u) = \int_0^t f(w(s, u))ds,$$

consequentemente

$$\|w(t,u) - w(0,u)\| \leq \int_0^t \|f(w(s,u))\| \, ds \leq t.$$

Note que $\forall \ t \in [0,\delta]$ tem-se

$$\|w(t,u) - u\| \leq t \leq \delta$$

portanto, se $u \in S$ temos

$$d(w(t,u), S) \leq \delta,$$

o que implica,

$$w(t,u) \in S_\delta \ \ \forall \ \ u \in S,$$

isto é,

$$w(t,S) \subset S_\delta \ \ \forall \ \ t \in [0,\delta]$$

de onde concluímos

$$\eta(t,S) \subset S_\delta \ \ \forall \ \ t \in [0,1]. \tag{1.8}$$

Por outro lado, para cada $u \in X$ fixado, a função $\phi(w(t,u))$ é não-crescente, pois

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) = \phi^{'}(w(t,u))w'(t,u)$$

de onde segue

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) = \phi^{'}(w(t,u))f(w(t,u)).$$

Pela definição de f, se $w(t,u) \notin A$, $\dfrac{d}{dt}\phi(w(t,u)) = 0$ e caso contrário

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) = -\rho(w(t,u))\phi^{'}(w(t,u))\frac{v(w(t,u))}{\|v(w(t,u))\|}.$$

Por (1.2), temos

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) \leq -\rho(w(t,u))\frac{\left\|\phi^{'}(w(t,u))\right\|^2}{\|v(w(t,u))\|}, \tag{1.9}$$

e portanto

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) \leq 0$$

mostrando que $\phi(w(t,u))$ é não-crescente.

Fixe $u \in \phi^{c+\epsilon} \cap S$ e observe as seguintes afirmações:

(a) Se $\phi(w(\hat{t},u)) < c - \epsilon$ para algum $\hat{t} \in [0,\delta)$ tem-se

$$\phi(\eta(1,u)) = \phi(w(\delta,u)) \leq \phi(w(\hat{t},u)) < c - \epsilon,$$

de onde podemos concluir que

$$\eta(1,u) \subset \phi^{c-\epsilon}.$$

Desta forma de (1.8) tem-se

$$\eta(1,u) \ \in \ \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta.$$

(b) Note que $\forall\, t \in [0,\delta]$ temos

$$\phi(w(t,u)) \leq \phi(w(0,u)) = \phi(u) \leq c+\epsilon$$

o que implica,

$$\phi(w(t,u)) \leq c+\epsilon.$$

Supondo que $w(t,u) \in B = \phi^{-1}\left([c-\epsilon, c+\epsilon]\right) \cap S_\delta, \ \ \forall \ t \in [0,\delta]$, segue de (1.1) , (1.9) e do fato que $\rho = 1$ em B, a seguinte desigualdade

$$\phi(w(\delta,u)) \leq \phi(u) - \frac{1}{2}\int_0^\delta \left\|\phi^{'}(w(t,u))\right\| dt,$$

o que implica

$$\phi(w(\delta,u)) \leq c+\epsilon - \frac{1}{2}\frac{4\epsilon}{\delta}\delta,$$

ou seja,

$$\phi(w(\delta,u)) \leq c-\epsilon.$$

Portanto, em qualquer um dos casos (a) ou (b),

$$\eta(1,u) = w(\delta,u) \ \ \in \ \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta \ \ se \ \ u \ \ \in \phi^{c+\epsilon} \cap S.$$

(iv) $\eta(t,.) : X \longmapsto X$ é um homeomorfismo, ou seja, $\eta(t,u) = w(\delta t, u)$ é uma aplicação bijetora com inversa contínua.

Para isto, defina as seguintes funções

$$\begin{aligned} h \ : \ X \ &\longrightarrow \ X \\ u \ &\longmapsto \ h(u) = w(\delta t, u) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g \ : \ X \ &\longrightarrow \ X \\ u \ &\longmapsto \ g(u) = w(-\delta t, u). \end{aligned}$$

Observe o seguinte

$$(h \circ g)(u) = w(\delta t, g(u)),$$

o que implica

$$(h \circ g)(u) = w(\delta t, w(-\delta t, u))$$

e assim

$$(h \circ g)(u) = w(\delta t - \delta t, u) = w(0, u) = u,$$

isto é,

$$(h \circ g)(u) = u.$$

Usando o mesmo tipo de raciocínio temos

$$(g \circ h)(u) = u$$

de onde segue η é inversível.

Além disso, $\eta(t, u) = w(\delta t, u)$ é contínua pela dependência contínua com relação aos dados iniciais para $w(\delta t, u)$. Desde que $w(-\delta t, u)$ também é contínua, $\eta(t, u) : X \longmapsto X$ é um homeomorfismo. ∎

Definição 1.15 *Um funcional $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1(X, \mathbb{R})$ é dito verificar a condição de Palais-Smale, denotada por (PS), se toda sequência $(u_n) \subset X$ com*

$$\phi(u_n) \longrightarrow d \ \ e \ \ \phi'(u_n) \longrightarrow 0$$

admite uma subsequência fortemente convergente em X.

Como uma consequência do **Teorema 1.14**, tem-se o seguinte Teorema:

Teorema 1.16 *Suponha que $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição Palais-Smale. Se $c \in \mathbb{R}$ não é um valor crítico de ϕ então, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que para qualquer $u \in X$ e $t \in [0,1]$ tem-se:*
(i) $\eta(0, u) = u$;
(ii) $\eta(t, u) = u$ *se* $u \notin \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$;
(iii) $\eta(t, \phi^{c+\epsilon}) \subset \phi^{c-\epsilon}$;
(iv) $\eta(t, .) : X \longmapsto X$ *é um homeomorfismo.*

Demonstação: Como $c \in \mathbb{R}$ não é um valor crítico de ϕ, devem existir constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que se $u \in \phi^{-1}([c - 2\alpha, c + 2\alpha])$ implique em $\left\|\phi'(u)\right\| \geq \beta$, pois caso contrário, para quaisquer $\alpha, \beta > 0$ existirá

$$u_{\alpha,\beta} \ \in \ \phi^{-1}([c - 2\alpha, c + 2\alpha])$$

com

$$\left\|\phi^{'}(u_{\alpha,\beta})\right\| < \beta.$$

Considerando $\alpha = \dfrac{1}{2n}$, $\beta = \dfrac{1}{n}$ e $u_n = u_{\alpha_n,\beta_n}$, tem-se

$$c - \frac{1}{n} \leq \phi(u_n) \leq c + \frac{1}{n} \qquad e \qquad \left\|\phi^{'}(u_n)\right\| < \frac{1}{n}.$$

Assim, passando ao limite quando $n \to \infty$ obtemos

$$\phi(u_n) \longrightarrow c \;\; e \;\; \phi^{'}(u_n) \longrightarrow 0.$$

Da condição Palais-Smale, existe uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ tal que

$$u_{n_k} \longrightarrow u.$$

Desde de que $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$,

$$\phi(u_{n_k}) \longrightarrow \phi(u) \;\; e \;\; \phi^{'}(u_{n_k}) \longrightarrow \phi^{'}(u).$$

Portanto, pela unicidade do limite obtemos

$$\phi(u) = c \qquad e \qquad \phi^{'}(u) = 0.$$

Logo, c é um valor crítico de ϕ, contradizendo a hipótese. Daí, usando o **Teorema 1.14** com $S = X$, $\epsilon \in (0, \alpha]$ fixado e $\delta = \dfrac{4\epsilon}{\beta}$, concluímos a demonstração do nosso teorema. ■

1.4 Teorema do Ponto de Sela

Nesta seção iremos demonstrar o Teorema do Ponto de Sela de Rabinowitz (ver[4]) o qual será utilizado para garantir a existência de solução fraca de um problema que veremos no próximo cápitulo. Para a demonstração do teorema usaremos algumas propriedades da teoria do Grau (ver apêndice A) e também o Teorema 1.16.

Teorema 1.17 *(Ponto de Sela) Seja $X = V \oplus W$ um espaço de Banach, de modo que dim $V < \infty$, e seja $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ uma aplicação satisfazendo a condição de Palais-Smale. Se D é uma vizinhaça limitada de 0 em V tal que*

$$a = \max_{\partial D} \phi < \inf_{W} \phi \equiv b, \tag{1.10}$$

então

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in \overline{D}} \phi(h(u))$$

é um valor crítico de ϕ com $c \geq b$, onde

$$\Gamma = \left\{ h \ \in \ C(\overline{D}, X) \ ; \ \ h(u) = u \ , \ \ \forall \ \ u \ \in \ \partial D \right\}.$$

Demonstração: Primeiro vamos verificar que $h(D) \cap W \neq \emptyset$ qualquer que seja $h \in \Gamma$. De fato, definindo

$$\begin{array}{rcl} P \ : \ X & \longrightarrow & V \\ x & \longmapsto & P(x) = x_1 \ ; \ \ x = x_1 + x_2; \ \ x_1 \ \in V \ \ e \ \ x_2 \in W \end{array}$$

a projeção sobre V, temos $P \circ h \in C(\overline{D}, V)$ (ver apêndice D) e

$$P(h(u)) = P(u) = u \neq 0 \ \ \forall \ \ u \ \in \ \partial D.$$

Uma vez que podemos identificar V com $\mathbb{R}^N$, o grau de Brouwer $d(Ph, D, 0)$ está bem definido e de suas propriedades (ver apêndice A) segue

$$d(P \circ h, D, 0) = d(I_d, D, 0) = 1.$$

Logo, existe $u_0 \in D$ tal que

$$P(h(u_0)) = 0,$$

de onde temos $h(u_0) \in W$. Sendo

$$b = \inf_W \phi = \inf \{\phi(w) \ ; w \in \ W\}$$

e $h(u_0) \in W$, obtemos

$$\phi(h(u_0)) \geq b.$$

Consequentemente

$$\max_{u \in \bar{D}} \phi(h(u)) \geq \phi(h(u_0)) \geq b \ \ \forall \ \ h \ \in \ \Gamma,$$

e sendo

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in \overline{D}} \phi(h(u)),$$

temos que $c \geq b$.

Suponha por contradição que c não é valor crítico. Então, pelo **Teorema 1.16**, dado

$$0 < \epsilon < \frac{b-a}{2}$$

existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que

$$\eta(t,u) = u \quad se \quad u \notin \phi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \tag{1.11}$$

e

$$\eta(t, \phi^{c+\epsilon}) \subset \phi^{c-\epsilon}. \tag{1.12}$$

Escolha $h \in \Gamma$ tal que

$$\max_{u \in \overline{D}} \phi(h(u)) \leq c + \epsilon \tag{1.13}$$

e defina

$$\hat{h}(u) = \eta(1, h(u)).$$

Usando o fato que $c \geq b$ tem-se

$$a < c - 2\epsilon.$$

Agora, se $u \in \partial D$

$$\phi(u) \leq a = \max_{u \in \partial D} \phi(u), \tag{1.14}$$

de onde podemos concluir,

$$\phi(u) \notin ([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$$

o que implica,

$$u \notin \phi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]).$$

Por outro lado, de (1.11) segue

$$\hat{h}(u) = \eta(1, h(u)) = \eta(1, u) = u \quad \forall \ u \in \partial D$$

logo, $\hat{h} \in \Gamma$.

Agora, por (1.13) teremos

$$\phi(h(u)) \leq \max_{u \in \overline{D}} \phi(h(u)) \leq c + \epsilon,$$

portanto

$$h(u) \in \phi^{c+\epsilon}.$$

Por (1.12) temos

$$\hat{h}(u) = \eta(1, h(u)) \ \in \ \phi^{c-\epsilon},$$

isto é,

$$\phi(\hat{h}(u)) \leq c - \epsilon \ \ \forall \ \ u \in \bar{D}$$

o que implica,

$$\max_{u \in \overline{D}} \phi(\hat{h}(u)) \leq c - \epsilon. \tag{1.15}$$

Desde que

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in \overline{D}} \phi(h(u)),$$

podemos afirmar que

$$c \leq \max_{u \in \overline{D}} \phi(h(u)) \ \ \forall \ \ h(u) \ \in \ \Gamma,$$

obtendo assim, por (1.15)

$$c \leq \max_{u \in \overline{D}} \phi(\hat{h}(u)) \leq c - \epsilon,$$

o que é um absurdo, mostrando que c é um valor crítico. ■

Capítulo 2

Existência de solução fraca para um problema elíptico não-linear em $\mathbb{R}^N$

Neste capítulo, vamos estudar a existência de solução fraca para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u & = & \lambda_k h u + g(x,u), \ \mathbb{R}^N \\ u & \in & H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{P}$$

onde $N \geq 3$, com as funções $h : \mathbb{R}^N \longmapsto \mathbb{R}_+$ e $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ continuas verificando as seguintes condições:

(i) $h \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$;

(ii) Existe $Z \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$; $Z(x) > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}^N, \$ satisfazendo

$$|g(x,t)| \leq Z(x) \ \ \forall \ (x,t) \ \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

e λ_k o k-ésimo autovalor associado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u & = & \lambda h u, \ \mathbb{R}^N \\ u & \in & H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{P_λ}$$

Além disso, vamos supor que g satisfaz uma das condições (g_2^+) ou (g_2^-),

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x, v(x))dx \longrightarrow \pm\infty \ \ quando \ \ \|v\| \longrightarrow \infty \ ; \ v \ \in N_{\lambda_k} \tag{$g_2^\pm$}$$

sendo N_{λ_k} o auto espaço associado a λ_k e $G(x,.) = \int_0^s g(x,\tau)d\tau$ designa a primitiva de $g(x,.)$.

O nosso objetivo, é mostrar a existência de solução fraca para o problema (P). A grande dificuldade, é a falta de imersões compactas do espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$ nos espaços $L^p(\mathbb{R}^N)$. Sendo assim, vamos estudar alguns espaços de modo que conseguiremos que essas imersões sejam compactas.

2.1 Espaços com Peso

Nesta seção vamos definir espaços com peso e mostrar algumas propriedades envolvendo tais espaços. Para isto, começaremos com a seguinte definição:

Definição 2.1 *Seja* $h : \mathbb{R}^N \longmapsto (0, +\infty)$ *uma função mensurável e* $1 < p < \infty$. *Definimos o espaço* $L^p(\mathbb{R}^N, hdx)$ *como sendo o seguinte conjunto:*

$$L^p(\mathbb{R}^N, hdx) = \left\{ f : \mathbb{R}^N \longmapsto \mathbb{R} \;\; mensuráveis\,; \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p \, h(x)dx < \infty \right\}.$$

No que segue denotaremos por

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx \right)^{1/2}$$

e

$$\|f\|_{p,h} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f|^p \, hdx \right)^{1/p}$$

as normas em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $L^p(\mathbb{R}^N, hdx)$, respectivamente.

Teorema 2.2 *O espaço* $\left(L^p(\mathbb{R}^N, hdx), \|.\|_{p,h} \right)$ *com* $1 \leq p < \infty$ *é Banach.*

Demonstração: Seja $\{u_n\} \subset L^p(\mathbb{R}^N, hdx)$ uma seqüência de Cauchy. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n - u_m\|_{p,h} < \epsilon \;\text{ para } n, m \geq n_0. \tag{2.2}$$

Definindo

$$v_n = h^{1/p} u_n,$$

segue de (2.2) que

$$\|v_n - v_m\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \epsilon \;\text{ para } n, m \geq n_0.$$

Sendo $L^p(\mathbb{R}^N)$ um espaço de Banach, existe um $w \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com

$$v_n \longrightarrow w \;\; em \;\; L^p(\mathbb{R}^N) \;\text{ quando }\; n \to \infty. \tag{2.3}$$

Definindo,

$$u(x) = \frac{w(x)}{h(x)^{1/p}},$$

observe que

$$\|u_n - u\|_{p,h} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^p \, hdx \right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| h^{1/p} u_n - h^{1/p} u \right|^p dx \right)^{1/p}$$

o que implica,

$$\|u_n - u\|_{p,h} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n - w|^p \, dx \right)^{1/p} = \|v_n - w\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} .$$

Por (2.3) temos

$$\|u_n - u\|_{p,h} \longrightarrow 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty,$$

ou seja,

$$u_n \longrightarrow u \ \text{ em } \ L^p(\mathbb{R}^N, hdx)$$

mostrando assim, que $L^p(\mathbb{R}^N, hdx)$ é um espaço de Banach. ■

Do **Teorema 2.2** podemos concluir que $\left(L^2(\mathbb{R}^N, hdx), \|.\|_{2,h} \right)$ é Hilbert com o seguinte produto interno

$$(f, g)_{2,h} = \int_{\mathbb{R}^N} hfgdx.$$

2.2 Um Resultado de Imersão Contínua

Nesta seção vamos estudar um resultado de imersão contínua para espaços com peso, que será de grande importância na busca de existência de solução fraca para o problema (P). Começaremos o nosso estudo enunciando o seguinte teorema:

Teorema 2.3 *Se $h \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, então vale a imersão contínua*

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N, hdx)$$

para $p \in [1, 2^*]$ se $N \geq 3$.

Demonstração: Para $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \, hdx \right)^{1/p} \leq \|h\|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \, dx \right)^{1/p} = \|h\|_\infty \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

onde, usamos o fato de que $h \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Das imersões continuas de Sobolev temos

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$$

para $p \in [2, 2^*]$ se $N \geq 3$. Assim, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\| \quad \forall\, u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Portanto,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \, h dx \right)^{1/p} \leq C \|h\|_\infty \|u\| \quad \forall\, u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Considerando $C_1 = C \|h\|_\infty$ obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \, h dx \right)^{1/p} \leq C_1 \|u\|,$$

isto é,

$$\|u\|_{p,h} \leq C_1 \|u\| \quad \forall\, u \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

mostrando a imersão contínua. ■

2.3 Um Resultado de Imersão Compacta

Nesta seção vamos estudar um resultado de imersão compacta que será de extrema importância para garantirmos a existência de uma solução para o problema (P).

Teorema 2.4 *Se $h \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, tem-se a imersão compacta*

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N, hdx)$$

para $p \in [1, 2^*)$ se $N \geq 3$.

Demonstração: Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada, usando o fato que $H^1(\mathbb{R}^N)$ é reflexivo existe $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \;\; em \;\; H^1(\mathbb{R}^N).$$

Afirmação: Dado $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\left\| u_{n_j} - u \right\|_{L^p(B^c_R(0), hdx)} < \frac{\epsilon}{2} \;\; \forall \;\; n_j.$$

De fato, para $R > 0$ e usando a desigualdade de Hölder com expoentes

$$\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2^*/p} = 1,$$

obtemos

$$\int_{B_R^c(0)} \left|u_{n_j} - u\right|^p hdx \leq \|h\|_{L^\gamma(B_R^c(0))} \cdot \left\|\left|u_{n_j} - u\right|^p\right\|_{L^{\frac{2*}{p}}(B_R^c(0))}$$

o que implica,

$$\int_{B_R^c(0)} \left|u_{n_j} - u\right|^p hdx \leq \|h\|_{L^\gamma(B_R^c(0))} \cdot \left\|u_{n_j} - u\right\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^p$$

e pelas imersões continuas de Sobolev

$$\int_{B_R^c(0)} \left|u_{n_j} - u\right|^p hdx \leq C\,\|h\|_{L^\gamma(B_R^c(0))} \cdot \left\|u_{n_j} - u\right\|^p.$$

Consequentemente

$$\int_{B_R^c(0)} h\left|u_{n_j} - u\right|^p dx \leq C_1\,\|h\|_{L^\gamma(B_R^c(0))}. \tag{2.4}$$

Segue da teoria da medida que se $h \in L^\gamma(\mathbb{R}^N)$ para $\gamma \in [1, \infty)$, dado $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$\|h\|_{L^\gamma(B_R^c(0))} < \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p \frac{1}{C_1}.$$

Agora, do resultado acima e por (2.4) tem-se

$$\int_{B_R^c(0)} h\left|u_{n_j} - u\right|^p dx \leq \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p \quad \forall \;\; n_j.$$

Portanto,

$$\left\|u_{n_j} - u\right\|_{L^p(B_R^c(0),hdx)} < \frac{\epsilon}{2} \;\; \forall \;\; n_j \tag{2.5}$$

mostrando a afirmação.

Por outro lado,

$$\left\|u_{n_j} - u\right\|_{L^p(B_R(0),hdx)} = \left(\int_{B_R(0)} h\left|u_{n_j} - u\right|^p dx\right)^{1/p} \leq \|h\|_\infty . \left\|u_{n_j} - u\right\|_{L^p(B_R(0))}.$$

Das imersões compactas de Sobolev, temos que

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(B_R(0)),$$

de onde segue

$$u_{n_j} \longrightarrow u \;\; em \;\; L^p(B_R(0)) \;\; quando \;\; n_j \to \infty.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$ existe n_{j_0} tal que

$$\left\|u_{n_j} - u\right\|_{L^p(B_R(0))} < \frac{\epsilon}{2\,\|h\|_\infty} \;\; para \;\; n_j \geq n_{j_0},$$

desta forma temos

$$\left\|u_{n_j} - u\right\|_{L^p(B_R(0),hdx)} < \frac{\epsilon}{2} \;\; para \;\; n_j \geq n_{j_0}. \tag{2.6}$$

Por (2.5) e (2.6)

$$\left\|u_{n_j} - u\right\|_{p,h} < \epsilon \;\; para \;\; n_j \geq n_{j_0}$$

o que implica,

$$u_{n_j} \longrightarrow u \;\; em \;\; L^p(\mathbb{R}^N, hdx) \;\; quando \;\; n_j \to \infty$$

mostrando a compacidade. ■

2.4 O Operador Solução

Dado $f \in L^2(\mathbb{R}^N, hdx)$, existe uma única solução $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= hf, \; \mathbb{R}^N \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{P_1}$$

pois, sendo $hf \in L^2(\mathbb{R}^N, hdx)$, considere

$$\begin{array}{rlcl} F: & H^1(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \phi & \longmapsto & F(\phi) = \int_{\mathbb{R}^N} f\phi h dx \end{array}$$

que é linear e contínuo, isto é,

$$|F(\phi)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f|\,|\phi|\, hdx$$

Por Hölder obtemos

$$|F(\phi)| \leq \|f\|_{2,h} \|\phi\|_{2,h}\,,$$

e das imersões continuas de Sobolev

$$|F(\phi)| \leq C\,\|f\|_{2,h}\,\|\phi\|$$

o que implica,

$$|F(\phi)| \leq M\,\|\phi\| \;\; ; \;\; M = C\,\|f\|_{2,h}$$

mostrando a continuidade de F.

Logo, $F \in H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ e pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$(u, \phi)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = F(\phi) \;\; \forall \;\; \phi \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

de onde segue

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \phi + u\phi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f\phi h dx \ \ \forall \ \ \phi \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

ou seja, u é a única solução fraca do problema (P_1). ■

Pelo que foi visto até o momento, podemos definir o seguinte operador

$$\begin{array}{rlcl} S: & L^2(\mathbb{R}^N, hdx) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{R}^N) \\ & f & \longmapsto & S(f) = u, \end{array}$$

que associa a cada $f \in L^2(\mathbb{R}^N, hdx)$ a única solução $u = S(f)$ do problema (P_1).

2.5 Propriedades do Operador Solução

Nesta seção iremos estudar algumas propriedades relacionadas ao operador solução, as quais serão usadas para a obtenção de solução para o problema (P).

(**P**.**1**) S é linear, isto é,

$$S(\lambda f + \gamma g) = \lambda S(f) + \gamma S(g), \ \ \forall \ \ f, g \in L^2(\mathbb{R}^N, hdx) \ \ e \ \ \forall \ \ \lambda, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Sejam $u = S(f)$ e $v = S(g)$.Por definição

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u + u & = & hf, \ \mathbb{R}^N \\ u & \in & H^1(\mathbb{R}^N) \end{array} \right.$$

e

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta v + v & = & hg, \ \mathbb{R}^N \\ v & \in & H^1(\mathbb{R}^N). \end{array} \right.$$

Logo, multiplicando respectivamente por λ e γ obtemos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta(\lambda u) + \lambda u & = & \lambda hf, \ \mathbb{R}^N \\ \lambda u & \in & H^1(\mathbb{R}^N) \end{array} \right.$$

e

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta(\gamma v) + \gamma v & = & \gamma hg, \ \mathbb{R}^N \\ \gamma v & \in & H^1(\mathbb{R}^N) \end{array} \right.$$

o que implica,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta(\lambda u + \gamma v) + \lambda u + \gamma v & = & h(\lambda f + \gamma g), \ \mathbb{R}^N \\ \lambda u + \gamma v & \in & H^1(\mathbb{R}^N), \end{array} \right.$$

consequentemente

$$S(\lambda f + \gamma g) = \lambda u + \gamma v,$$

isto é,

$$S(\lambda f + \gamma g) = \lambda S(f) + \gamma S(g), \ \ \forall \ \ f, g \in L^2(\mathbb{R}^N, hdx) \ \ e \ \ \forall \ \ \lambda, \gamma \in \mathbb{R}.$$

■

(**P**.**2**) S é contínuo, ou seja, existe $M > 0$ verificando

$$\|S(f)\| \leq M \|f\|_{2,h} \ \ \forall \ \ f \in L^2(\mathbb{R}^N, hdx)$$

Demonstração: Seja $u = S(f)$. Então,

$$\begin{cases} -\Delta u + u & = & hf, \ \mathbb{R}^N \\ u & \in & H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

o que implica, por definição

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \phi + u\phi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f\phi h dx \ \ \forall \ \ \phi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Escolhendo $\phi = u$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\left|\nabla u^2\right| + |u|^2) dx = \int_{\mathbb{R}^N} fuhdx,$$

assim,

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} fuhdx$$

de onde segue

$$\|u\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f| \, |u| \, |h| \, dx.$$

Por Hölder tem-se

$$\|u\|^2 \leq \|f\|_{2,h} \|u\|_{2,h} .$$

Das imersões continuas de Sobolev obtemos

$$\|u\|^2 \leq C \|f\|_{2,h} \|u\| .$$

Se $u \neq 0$, temos

$$\|u\| \leq C \|f\|_{2,h} ,$$

isto é,

$$\|S(f)\| \leq C_1 \|f\|_{2,h} \quad \forall \;\; f \in L^2(\mathbb{R}^N, hdx).$$

■

(**P**.**3**) S pode ser vista de $L^2(\mathbb{R}^N, hdx)$ em $L^2(\mathbb{R}^N, hdx)$. Além disso, neste caso S é linear e compacto.

Observe que,

$$S : L^2(\mathbb{R}^N, hdx) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$$

é uma aplicação contínua e pelo **Teorema 3.4**

$$i : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N, hdx)$$

é compacta. Recordando que

(a) Composição de aplição linear é linear.

(b) Composição de um operador contínuo com um compacto é compacto.

podemos concluir que o operador

$$S : L^2(\mathbb{R}^N, hdx) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N, hdx)$$

é linear compacto. ■

(**P**.**4**) O operador $S : L^2(\mathbb{R}^N, hdx) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N, hdx)$ é simétrico, ou seja,

$$(S(f), g)_{2,h} = (f, S(g))_{2,h}$$

onde, $(.)_{2,h}$ é o produto interno de $L^2(\mathbb{R}^N, hdx)$.

Demonstração: Sejam $u = S(f)$ e $v = S(g)$. Devemos mostrar a seguinte igualdade

$$\int_{\mathbb{R}^N} ughdx = \int_{\mathbb{R}^N} vfhdx.$$

Desde que $u = S(f)$ e $v = S(g)$ temos que

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= hf, \; \mathbb{R}^N \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta v + v &= hg, \; \mathbb{R}^N \\ v &\in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \phi + u\phi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f\phi h dx \ \ \forall \ \ \phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \nabla \varphi + v\varphi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} g\varphi h dx \ \ \forall \ \ \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Fixe $\phi = v$ e $\varphi = u$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \nabla u + uv) dx = \int_{\mathbb{R}^N} fvh dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \nabla u + uv) dx = \int_{\mathbb{R}^N} guh dx$$

de onde segue

$$\int_{\mathbb{R}^N} ugh dx = \int_{\mathbb{R}^N} vfh dx,$$

isto é,

$$(S(f), g)_{2,h} = (f, S(g))_{2,h}.$$

■

(**P**.**5**) $S(f) = 0$ se, e somente se, $f = 0$.

Demonstração: Considere que $S(f) = u$. Então, $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= hf, \ \mathbb{R}^N \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \phi + u\phi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f\phi h dx \ \ \forall \ \ \phi \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{2.7}$$

Se $f = 0$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \phi + u\phi) dx = 0.$$

Fixando $v = u$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx = \|u\|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0,$$

isto é,

$$S(f) = 0.$$

Supondo que $S(f)=0$, segue de (2.7)

$$\int_{\mathbb{R}^N} fvhdx = 0, \ \ \forall \ \ v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Considere $g = fh$ como $g \in L^2(\mathbb{R}^N) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, segue do Lema de Du Bois Raymond (ver Apêndice D) que

$$g = 0 \ \text{ q.t.p } \ \text{em } \ \mathbb{R}^N$$

e sendo $h > 0$, então

$$f = 0 \ \text{ q.t.p } \ \text{em } \ \mathbb{R}^N.$$

■

(**P**.**6**) $\lambda = 0$ não é autovalor de S.

Demonstração: Note que

$$N(S) = \left\{\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N, hdx) \, ; S(\varphi) = 0\right\},$$

por (**P**.**5**), temos

$$S(\varphi) = 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ \varphi = 0$$

logo $N(S) = 0$, mostrando a propriedade. ■

(**P**.**6**) S é positivo, isto é,

$$(S(f), f)_{2,h} > 0 \ \ \forall \ \ f \neq 0.$$

Demonstração: Seja $S(f) = u$ com $u \neq 0$, então

$$\begin{cases} -\Delta u + u & = & hf, \ \mathbb{R}^N \\ u & \in & H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

o que implica,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \phi + u\phi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f\phi hdx \ \ \forall \ \ \phi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Fixando $\phi = u$, segue

$$0 < \|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} fuhdx = \int_{\mathbb{R}^N} fS(f)hdx = (S(f), f)_{2,h}$$

mostrando que

$$(S(f), f)_{2,h} > 0 \ \ \forall \ \ f \neq 0.$$

■

Agora, usando a Análise Funcional (ver[3]) o operador $S : L^2(\mathbb{R}^N, hdx) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N, hdx)$ têm uma sequência de autovalores positivos μ_n verificando

$$\mu_1 > \mu_2 > ... > \mu_n > ... > 0$$

com

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0.$$

Além disso, os autovalores constituem uma base Hilbertiana para $L^2(\mathbb{R}^N, hdx)$.

Afirmação: Os autovalores de S são os inversos dos autovalores de (P_λ)

De fato, se λ é um autovalor de $-\Delta$, então existe $\phi \neq 0$ verificando

$$\begin{cases} -\Delta\phi + \phi & = & \lambda h\phi, \ \mathbb{R}^N \\ \phi & \in & H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Desde que $\lambda \neq 0$, segue da definição de solução fraca

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla\phi\nabla\psi + \phi\psi)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda\psi\phi h dx \ \ \forall \ \ \psi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Fixando, $\phi = \psi$ tem-se

$$\|\phi\|^2 = \lambda \|\phi\|_{2,h}^2,$$

consequentemente

$$\lambda = \frac{\|\phi\|^2}{\|\phi\|_{2,h}^2}.$$

Assim, considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta(\frac{1}{\lambda}\phi) + \frac{1}{\lambda}\phi & = & h\phi, \ \mathbb{R}^N \\ \phi & \in & H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

De onde segue,

$$S(\phi) = \frac{1}{\lambda}\phi$$

mostrando que $\frac{1}{\lambda}$ é autovalor de S.

Agora, se $\mu > 0$ é autovalor de S, então existe $\phi \in L^2(\mathbb{R}^N, hdx)$ com

$$S(\phi) = \mu\phi$$

logo,

$$\frac{1}{\mu}S(\phi) = \phi.$$

Visto que S é linear, temos

$$S(\frac{1}{\mu}\phi) = \phi,$$

de onde concluimos que

$$\begin{cases} -\Delta\phi + \phi &= \frac{1}{\mu}h\phi, \ \mathbb{R}^N \\ \phi &\in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

mostrando que $\frac{1}{\mu}$ é autovalor de (P_λ). ■

Este fato mostra que o problema (P_λ) possui uma sequência $\{\lambda_n\}$ de autovalores positivos verificando

$$\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < ...$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0.$$

2.6 Propriedades Relacionadas a λ_1

Nesta seção vamos mostrar duas importantes propriedades envolvendo o autovalor λ_1, as quais serão usadas no decorrer do nosso trabalho.

(**P.1**) Toda autofunção associada a λ_1 tem sinal definido.

Demonstração: Considere ϕ uma autofunção associada a λ_1 e suponhamos que

$$\phi^+ \neq 0$$

onde,

$$\phi^+ = \max\{\phi, 0\}.$$

Segue dos espaços de Sobolev que se $\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, então a função $\phi^+ \in H^1(\mathbb{R}^N)(ver[1])$.

Além disso,

$$\nabla\phi^+ = \begin{cases} \nabla\phi, & \text{se} \quad \phi \geq 0 \\ 0, & \text{se} \quad \phi < 0 \end{cases}$$

Assim,

$$\left(\phi,\phi^{+}\right)_{H^{1}(\mathbb{R}^{N})}=\int_{\mathbb{R}^{N}}(\nabla\phi\nabla\phi^{+}+\phi\phi^{+})dx=\int_{\mathbb{R}^{N}}\left(\left|\nabla\phi^{+}\right|^{2}+\left|\phi^{+}\right|^{2}\right)dx=\left\|\phi^{+}\right\|^{2}$$

e

$$\left(\phi,\phi^{+}\right)_{L^{2}(\mathbb{R}^{N},hdx)}=\int_{\mathbb{R}^{N}}\phi\phi^{+}hdx=\int_{\mathbb{R}^{N}}\left|\phi^{+}\right|^{2}hdx=\left\|\phi^{+}\right\|_{2,h}^{2}.$$

Além disso, considere o problema

$$\begin{cases}-\Delta\phi+\phi & = & \lambda_{1}h\phi,\ \mathbb{R}^{N}\\ \phi & \in & H^{1}(\mathbb{R}^{N})\end{cases}$$

o que implica, por definição de solução fraca

$$\int_{\mathbb{R}^{N}}(\nabla\phi\nabla v+\phi v)dx=\lambda_{1}\int_{\mathbb{R}^{N}}v\phi\ hdx;\ \forall\ v\in H^{1}(\mathbb{R}^{N}).$$

Fixando $v=\phi^{+}$,

$$\int_{\mathbb{R}^{N}}(\nabla\phi\nabla\phi^{+}+\phi\phi^{+})dx=\lambda_{1}\int_{\mathbb{R}^{N}}\phi^{+}\phi hdx\ \ \forall\ \ \phi^{+}\in H^{1}(\mathbb{R}^{N}),$$

isto é,

$$\left(\phi,\phi^{+}\right)_{H^{1}(\mathbb{R}^{N})}=\lambda_{1}\left\|\phi^{+}\right\|_{2,h}^{2},$$

logo

$$\left\|\phi^{+}\right\|^{2}=\lambda_{1}\left\|\phi^{+}\right\|_{2,h}^{2},$$

de onde concluímos que

$$\lambda_{1}=\frac{\|\phi^{+}\|^{2}}{\|\phi^{+}\|_{p,h}^{2}}.$$

Agora, usando o fato que

$$w=\frac{\phi^{+}}{\|\phi^{+}\|_{2,h}}$$

verifica o problema

$$\begin{cases}-\Delta w+w & = & \lambda_{1}hw,\ \mathbb{R}^{N}\\ w & \in & H^{1}(\mathbb{R}^{N}),\end{cases}$$

desde que $w\geq 0$ e $w(x)\neq 0$, pelo princípio do máximo forte

$$w(x)>0\ \ \forall\ \ x\in\mathbb{R}^{N}.$$

De onde temos

$$\phi^{+}(x)>0\ \ \forall\ \ x\in\mathbb{R}^{N},$$

isto é,

$$\phi^+(x) = \max\{\phi, 0\} > 0,$$

e portanto

$$\phi(x) > 0 \ \ \forall \ \ x \in \mathbb{R}^N.$$

Um raciocínio semelhante é feito para o caso $\phi^- \neq 0$. ■

(**P**.**2**) O autoespaço V_{λ_1} associado a λ_1 tem dimensão 1, e $V_{\lambda_1} = \langle \phi \rangle$.

Demonstração: sejam u e v autofunções associadas a λ_1. Considere

$$A = \left\{ t \in \mathbb{R} \, ; u(x) + tv(x) \geq 0, \ \ x \in \mathbb{R}^N \right\}$$

e

$$B = \left\{ t \in \mathbb{R} \, ; u(x) + tv(x) \leq 0, \ \ x \in \mathbb{R}^N \right\}.$$

Os conjuntos A e B são fechados, pois considerando $\{t_n\} \subset A$ e $t_n \longrightarrow t_0$ temos

$$u(x) + t_n v(x) \geq 0,$$

logo

$$\lim_{n\to\infty} (u(x) + t_n v(x)) = u(x) + \lim_{n\to\infty} t_n v(x) \geq 0,$$

ou seja,

$$u(x) + t_0 v(x) \geq 0$$

o que implica, $t_0 \in A$ e portanto A é fechado. Raciocínio semelhante é utilizado para demonstrar que B é fechado. Além disso,

$$A \neq \emptyset \ \ e \ \ B \neq \emptyset$$

portanto,

$$\mathbb{R} = A \cup B.$$

Uma vez que $\mathbb{R}$ é um conjunto conexo, segue-se

$$A \cap B \neq \emptyset.$$

Assim, existe $t_0 \in A \cap B$, isto é,

$$u(x) + t_0 v(x) = 0 \ \ \forall \ \ x \in \mathbb{R}^N$$

mostrando que u e v são linearmente dependentes. ■

2.7 Existência de Solução fraca para (P)

Nesta seção mostraremos a existência de solução fraca para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= \lambda_k h u + g(x,u), \ \mathbb{R}^N \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{P}$$

onde $N \geq 3$. O resultado principal deste capitulo é o seguinte teorema:

Teorema 2.5 *Se as condições (g_2^+) ou (g_2^-), são válidas então (P) possui uma solução fraca $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.*

Preliminares: Consideraremos o seguinte funcional

$$\begin{aligned} \Phi : H^1(\mathbb{R}^N) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \Phi(u) = \tfrac{1}{2}\textstyle\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + |u|^2)dx - \tfrac{\lambda_k}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 h dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)dx \end{aligned}$$

o qual está bem definido em $H^1(\mathbb{R}^N)$, é de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$ (ver Apêndice B) e seus pontos críticos são soluções fracas de (P).

Definindo o operador linear

$$Lu = u - \lambda_k S(u),$$

temos

$$(Lu,u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla(Lu)\nabla u + Lu.u)\, dx,$$

assim,

$$(Lu,u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla(u - \lambda_k S(u))\nabla u dx + \int_{\mathbb{R}^N} (u - \lambda_k S(u))\, u dx$$

isto é,

$$(Lu,u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |u|^2)dx - \lambda_k \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla S(u)\nabla u + S(u)u)dx. \tag{2.8}$$

Além disso, considerando $S(u) = w$ tem-se

$$\begin{cases} -\Delta w + w &= hu, \ \mathbb{R}^N \\ w &\in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

o que implica,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla\phi\nabla w + \phi w)dx = \int_{\mathbb{R}^N} uh\phi dx \ \ \forall \ \ \phi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Fixando $u = \phi$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla S(u)\nabla u + S(u)u)dx = \int_{\mathbb{R}^N} u^2 h dx \tag{2.9}$$

logo, por (2.8) e (2.9) temos

$$\frac{1}{2}\left(Lu, u\right)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |u|^2)dx - \frac{\lambda_k}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 h dx$$

de onde segue

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\left(Lu, u\right)_{H^1(\mathbb{R}^N)} - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u)dx.$$

Agora, vamos fixar a seguinte decomposição ortogonal de $X = H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$X = X_- \oplus X_0 \oplus X_+,$$

onde

$$X_0 = N_{\lambda_k},$$

$$X_- = N_{\lambda_1} \oplus N_{\lambda_2} \oplus ... \oplus N_{\lambda_{k-1}}$$

e

$$X_+ = N_{\lambda_{k+1}} \oplus N_{\lambda_{k+2}} \oplus ...$$

Proposição 2.6 *Se* $u \in X_0$, *então* $\left(Lu, u\right)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = 0$.

Demonstação: Como já vimos

$$\left(Lu, u\right)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |u|^2)dx - \lambda_k \int_{\mathbb{R}^N} u^2 h dx,$$

sendo $u \in X_0$, o mesmo é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= \lambda_k h u, \ \mathbb{R}^N \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

de onde temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla\phi\nabla u + \phi u) = \lambda_k \int_{\mathbb{R}^N} u\phi h dx; \ \forall \ \ \phi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Fixando $\phi = u$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |u|^2)dx = \lambda_k \int_{\mathbb{R}^N} u^2 h dx,$$

mostrando que

$$(Lu,u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = 0, \quad se \quad u \in X_0.$$

■

Proposição 2.7 *Se $u \in X_-$, então existe $\alpha > 0$ tal que $(Lu,u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq -\alpha \|u\|^2$, ou seja, L é definido negativo em X_-.*

Demonstação: Seja $u \in X_- = N_{\lambda_1} \oplus N_{\lambda_2} \oplus ... \oplus N_{\lambda_{k-1}}$, então

$$u = \phi_1 + \phi_2 + ... + \phi_{k-1} \ e \ \ \nabla u = \nabla\phi_1 + \nabla\phi_2 + ... + \nabla\phi_{k-1}.$$

Observe que por (2.8)

$$(Lu,u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |u|^2)dx - \lambda_k \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla S(u)\nabla u + uS(u))\, dx$$

assim,

$$(Lu,u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = (u,u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} - \lambda_k \left(S(u),u\right)_{H^1(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.10}$$

Desde que ϕ_j verifica

$$\begin{cases} -\Delta\phi_j + \phi_j &= \lambda_j h\phi_j, \ \mathbb{R}^N \\ \phi_j &\in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

por definição do operador solução

$$S(\lambda_j\phi_j) = \phi_j$$

portanto,

$$S(\phi_j) = \frac{1}{\lambda_j}\phi_j \ \ e \ \ \nabla S(\phi_j) = \frac{1}{\lambda_j}\nabla\phi_j\ .$$

Da linearidade de S,

$$S(u) = S(\phi_1) + S(\phi_2) + ... + S(\phi_{k-1})$$

o que implica,

$$S(u) = \frac{1}{\lambda_1}\phi_1 + \frac{1}{\lambda_2}\phi_2 + ... + \frac{1}{\lambda_{k-1}}\phi_{k-1}.$$

Assim,

$$(S(u),u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \left(S(\phi_1) + S(\phi_2) + ... + S(\phi_{k-1}), \phi_1 + \phi_2 + ... + \phi_{k-1}\right)_{H^1(\mathbb{R}^N)}$$

e desde que $(\phi_j, \phi_k)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = 0$, $se \;\; j \neq k$, obtemos

$$(S(u), u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{\lambda_1} (\phi_1, \phi_1)_{H^1(\mathbb{R}^N)} + ... + \frac{1}{\lambda_{k-1}} (\phi_{k-1}, \phi_{k-1})_{H^1(\mathbb{R}^N)} .$$

Segue da definição de produto interno em $H^1(\mathbb{R}^N)$ que

$$(S(u), u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{\lambda_1} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \phi_1|^2 + |\phi_1|^2) dx + ... + \frac{1}{\lambda_{k-1}} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \phi_{k-1}|^2 + |\phi_{k-1}|^2) dx$$

o que implica

$$\lambda_k \left(S(u), u\right)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda_k}{\lambda_j} (|\nabla \phi_j|^2 + |\phi_j|^2) dx$$

isto é,

$$\lambda_k \left(S(u), u\right)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_j} \|\phi_j\|^2 .$$

Além disso,

$$(u, u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = (\phi_1 + \phi_2 + ... + \phi_{k-1}, \phi_1 + \phi_2 + ... + \phi_{k-1})_{H^1(\mathbb{R}^N)}$$

portanto,

$$(u, u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \phi_j|^2 + |\phi_j|^2) dx = \sum_{j=1}^{k-1} \|\phi_j\|^2 .$$

Agora, podemos escrever (2.10) da seguinte forma

$$(Lu, u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \sum_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_j}\right) \|\phi_j\|^2$$

e usando o fato que

$$\lambda_j \leq \lambda_{k-1} \;\; \text{para} \;\; j \in \{1, 2, ..., k-1\}$$

o que implica,

$$1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \geq 1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_j}$$

logo,

$$(Lu, u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \sum_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right) \|\phi_j\|^2 = \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right) \sum_{j=1}^{k-1} \|\phi_j\|^2 .$$

Assim,

$$(Lu, u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right) \|u\|^2$$

de onde temos

$$(Lu, u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq -\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} - 1\right) \|u\|^2 ,$$

ou seja,

$$(Lu,u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq -\alpha \|u\|^2 < 0 \ \ \forall \ \ u \in X_- \setminus \{0\} \ \ e \ \ \alpha > 0.$$

■

Proposição 2.8 *Se $u \in X_+$, então existe $\alpha > 0$ tal que $(Lu,u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} \geq \alpha \|u\|^2$, ou seja, L é definido positivo em X_+.*

Demonstação: Seja $u \in X_+ = N_{\lambda_{k+1}} \oplus N_{\lambda_{k+2}} \oplus ...$ então

$$u = \phi_{k+1} + \phi_{k+2} + ...$$

Considere,

$$u = \sum_{j=k+1}^{\infty} \phi_j = \lim_{N\to\infty} w_N \ \ ; \ \ w_N = \sum_{j=k+1}^{N} \phi_j \ \text{ onde } \ w_N \in X_+.$$

Vamos mostrar que existe $\alpha > 0$ independente de N tal que

$$(Lw_N, w_N)_{H^1(\mathbb{R}^N)} \geq \alpha \|w_N\|^2, \ \ \forall \ \ N \in \{k+1, k+2, ...\}.$$

De fato, observe que

$$(Lw_N, w_N)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \left(\sum_{j=k+1}^{N} L\phi_j, \sum_{j=k+1}^{N} \phi_j \right)_{H^1(\mathbb{R}^N)}$$

o que implica,

$$(Lw_N, w_N)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \left(\sum_{j=k+1}^{N} (\phi_j - \lambda_k S(\phi_j)), \sum_{j=k+1}^{N} \phi_j \right)_{H^1(\mathbb{R}^N)}$$

consequentemente,

$$(Lw_N, w_N)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \left(\sum_{j=k+1}^{N} \phi_j, \sum_{j=k+1}^{N} \phi_j \right)_{H^1(\mathbb{R}^N)} - \left(\sum_{j=k+1}^{N} \lambda_k S(\phi_j), \sum_{j=k+1}^{N} \phi_j \right)_{H^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Agora, usando o mesmo raciocínio da **Proposição 2** temos

$$(Lw_N, w_N)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \sum_{j=k+1}^{N} \|\phi_j\|^2 - \sum_{j=k+1}^{N} \frac{\lambda_k}{\lambda_j} \|\phi_j\|^2$$

e observando que

$$\lambda_k \geq \lambda_{k+1}$$

encontramos

$$1-\frac{\lambda_k}{\lambda_j}\geq 1-\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}$$

logo,

$$(Lw_N,w_N)_{H^1(\mathbb{R}^N)}\geq\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)\sum_{j=k+1}^{N}\|\phi_j\|^2.$$

Assim,

$$(Lw_N,w_N)_{H^1(\mathbb{R}^N)}\geq\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)\|w_N\|^2$$

mostrando que

$$(Lw_N,w_N)_{H^1(\mathbb{R}^N)}\geq\alpha\|w_N\|^2\quad\forall\ \ N\in\{k+1,k+2,...\}, \tag{2.11}$$

onde $\alpha=\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)$. Usando o fato que

$$w_N\longrightarrow u\ \text{ quando }\ N\to\infty$$

obtemos

$$\|w_N\|^2\longrightarrow\|u\|^2$$

e da continuidade de L tem-se

$$L(w_N)\longrightarrow L(u).$$

Consequentemente,

$$(Lw_N,w_N)_{H^1(\mathbb{R}^N)}\longrightarrow(Lu,u)_{H^1(\mathbb{R}^N)}$$

desta forma, passando ao limite em (2.11) segue

$$(Lu,u)_{H^1(\mathbb{R}^N)}\geq\alpha\|u\|^2.$$

■

Observação: No que segue, denotaremos por P_-, P_0 e P_+ as projeções ortogonais em X_-, X_0 e X_+ respectivamente.

Lema 2.9 *Se $u=P_0u+P_+u\in X_0\oplus X_+$. Então, $(Lu,u)_{H^1(\mathbb{R}^N)}=(LP_+u,P_+u)_{H^1(\mathbb{R}^N)}$.*

Demonstração: Seja

$$(Lu,u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = (L(P_0u+P_+u), P_0u+P_+u)_{H^1(\mathbb{R}^N)},$$

então

$$(Lu,u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = (LP_0u+LP_+u, P_0u+P_+u)_{H^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Usando a **Proposição 2.6** e o fato de L ser simétrico obtemos

$$(Lu,u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = 2\,(LP_0u, P_+u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} + (LP_+u, P_+u)_{H^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Note que

$$(LP_0u, P_+u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = (P_0u - \lambda_k S(P_0u), P_+u)_{H^1(\mathbb{R}^N)}$$

portanto,

$$(LP_0u, P_+u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \lambda_k\,(S(P_0u), P_+u)_{H^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Assim, por definição do operador solução obtemos

$$(LP_0u, P_+u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = (P_0u, P_+u)_{L^2(\mathbb{R}^N, hdx)} = 0,$$

onde na última igualdade usamos a ortogonalidade das projeções. Logo,

$$(Lu,u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = (LP_+u, P_+u)_{H^1(\mathbb{R}^N)}.$$

■

Proposição 2.10 *Suponha válidas as condições* (2.1) *e* (g_2^-). *Então,*
(a) $\Phi(u) \longrightarrow -\infty$ *quando* $\|u\| \to +\infty$; $u \in X_-$.
(b) $\Phi(u) \longrightarrow +\infty$ *quando* $\|u\| \to +\infty$; $u \in X_0 \oplus X_+$.

Demonstração:(a) Seja $u \in X_-$. Usando o fato de L ser negativo definido em X_- obtemos

$$\Phi(u) \leq -\frac{1}{2}\alpha\,\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)dx.$$

Observe que pelo Teorema do Valor Médio temos

$$|G(x,u)-G(x,0)| = \left|G'(x,s)\right|\,|u-0|\,; \quad s(x) \in [0,u(x)] \ \ ou \ \ [u(x),0],$$

logo por (2.1)

$$|G(x,u)-G(x,0)| \leq Z(x)\,|u|$$

portanto,

$$-\int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)dx \leq \|u\|_{1,Z},$$

de onde temos que

$$\Phi(u) \leq -\frac{1}{2}\alpha \|u\|^2 + \|u\|_{1,Z}.$$

Pelo **Teorema 2.3** segue

$$\|u\|_{2,Z} \leq C_1 \|u\|,$$

então

$$\Phi(u) \leq -\frac{1}{2}\alpha \|u\|^2 + C_2 \|u\|$$

consequentemente,

$$\Phi(u) \longrightarrow -\infty \ \ quando \ \ \|u\| \to \infty \ \forall \ \ u \in X_-.$$

(b) Seja $u = P_0 u + P_+ u \in X_0 \oplus X_+$. Usando o **Lema 2.9** tem-se

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}(LP_+u, P_+u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)dx.$$

Além disso, sendo L positivo definido em X_+ segue

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{2}\alpha \|P_+u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} [G(x,u) - G(x,P_0u)]\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,P_0u)dx.$$

Usando novamente o Teorema do Valor Médio e (2.1),

$$-\int_{\mathbb{R}^N} [G(x,u) - G(x,P_0u)]\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |G(x,u) - G(x,P_0u)|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u - P_0u|\, Z(x)dx$$

o que implica,

$$-\int_{\mathbb{R}^N} [G(x,u) - G(x,P_0u)]\, dx \leq \|P_+u\|_{1,Z}.$$

Portanto, segue das imersões continuas obtida no **Teorema 2.3**

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{2}\alpha \|P_+u\|^2 - C\|P_+u\| - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,P_0u)dx. \tag{2.12}$$

Agora, usando a condição (g_2^-), o fato que

$$\|u\|^2 = \|P_+u\|^2 + \|P_0u\|^2$$

e analizando os casos:

(i) $\|P_0u\| \to +\infty$ e $\|P_+u\| \leq M$. Usando (g_2^-) e fazendo a análise em (2.12), tem-se

$$\Phi(u) \longrightarrow +\infty \ \ quando \ \ \|u\| \to \infty.$$

(ii) $\|P_+u\| \to +\infty$ e $\|P_0u\| \leq K$. Note que

$$\left| -\int_{\mathbb{R}^N} G(x, P_0u)dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |G(x, P_0u)|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |P_0u|\, Z(x)dx,$$

isto é,

$$\left| -\int_{\mathbb{R}^N} G(x, P_0u)dx \right| \leq K_1.$$

Logo, fazendo a análise em (2.12), obtemos

$$\Phi(u) \longrightarrow +\infty \;\; quando \;\; \|u\| \to \infty.$$

(iii) Se $\|P_+u\| \to \infty$ e $\|P_0u\| \to \infty$. Novamente da condição (g_2^-) e fazendo a análise em (2.12), segue

$$\Phi(u) \longrightarrow +\infty \;\; quando \;\; \|u\| \to \infty,$$

mostrando assim, o ítem (b). ■

Observação: Se tivéssemos assumido a condição (g_2^+) ao invés de (g_2^-) o raciocínio usado seria o mesmo e as conclusões seriam as seguintes:

(a) $\Phi(u) \longrightarrow -\infty$ quando $\|u\| \to \infty$; $u \in X_0 \oplus X_-$.

(b) $\Phi(u) \longrightarrow +\infty$ quando $\|u\| \to \infty$; $u \in X_+$.

No que segue demonstraremos o Teorema 2.5 que vai garantir a existência de um ponto crítico para o funcional Φ, e portanto a existência de uma solução fraca para o problema (P).

Demonstração do Teorema 2.5: Como já sabemos que $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, mostraremos no que segue, que Φ satisfaz a condição (PS), isto é, dada uma sequência $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ com

$$|\Phi(u_n)| \leq c \quad e \quad \Phi^{'}(u_n) \to 0$$

temos que (u_n) possui uma subsequência convergente.

De fato, sendo

$$\Phi(u_n) = \frac{1}{2}(Lu_n, u_n)_{H^1(\mathbb{R}^N)} - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u_n)dx,$$

então

$$\Phi^{'}(u_n)v = (Lu_n, v)_{H^1(\mathbb{R}^N)} - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)vdx$$

o que implica,

$$\left|\Phi^{'}(u_n)v\right| = \left|(Lu_n, v) - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)vdx\right|. \tag{2.13}$$

Além disso,

$$\left|\Phi^{'}(u_n)v\right| \leq \left\|\Phi^{'}(u_n)\right\| \|v\|$$

de onde temos

$$\left|\Phi^{'}(u_n)v\right| \leq \|v\| \quad \forall \;\; v \quad \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

para n suficientemente grande, pois

$$\Phi^{'}(u_n) \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\|\Phi^{'}(u_n)\right\| \to 0$$

logo,

$$\left\|\Phi^{'}(u_n)\right\| \leq 1.$$

Agora, nosso próximo passo é mostrar que

$$u_n = P_0u_n + P_{-}u_n + P_{+}u_n$$

é limitada. Observe que

(i) Se $v = P_{+}u_n$, substituindo em (2.13) segue

$$\left|\Phi^{'}(u_n)P_{+}u_n\right| = \left|(Lu_n, P_{+}u_n) - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)P_{+}u_n dx\right|.$$

Note que usando o mesmo raciocínio do **Lema 2.9**,

$$(Lu_n, P_{+}u_n) = (L(P_{-}u_n) + L(P_0u_n) + L(P_{+}u_n), P_{+}u_n) = (L(P_{+}u_n), P_{+}u_n).$$

Daí, usando o fato de L ser positivo definido em X_{+} temos

$$(Lu_n, P_{+}u_n) = (L(P_{+}u_n), P_{+}u_n) \geq \alpha \left\|P_{+}u_n\right\|^2.$$

Além disso,

$$\|P_{+}u_n\| \geq \left|\Phi^{'}(u_n)P_{+}u_n\right| \geq |(Lu_n, P_{+}u_n)| - \left|\int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)P_{+}u_n dx\right|$$

o que implica,

$$\|P_{+}u_n\| \geq \alpha \left\|P_{+}u_n\right\|^2 - \left\|P_{+}u_n\right\|_{1,Z}.$$

Do **Teorema 2.3** temos

$$\|P_{+}u_n\| \geq \alpha \left\|P_{+}u_n\right\|^2 - C \left\|P_{+}u_n\right\|$$

portanto, $\|P_+u_n\|$ é limitada.

(ii) Novamente considerando $v = P_-u_n$ em (2.13) obtemos

$$\Phi^{'}(u_n)P_-u_n \leq (Lu_n, P_-u_n) + \int_{\mathbb{R}^N} |g(x,u_n)|\,|P_+u_n|\,dx,$$

de onde segue

$$\Phi^{'}(u_n)P_-u_n \leq -\alpha\,\|P_-u_n\|^2 + \|P_-u_n\|_{1,Z}$$

assim,

$$-\|P_-u_n\| \leq \Phi^{'}(u_n)P_-u_n \leq -\alpha\,\|P_-u_n\|^2 + C_1\,\|P_-u_n\|$$

consequentemente,

$$\|P_-u_n\| \geq \alpha\,\|P_-u_n\|^2 - C_1\,\|P_-u_n\|\,.$$

Logo, $\|P_-u_n\|$ é limitada. Agora, por (i) e (ii) tem-se

$$\|u_n - P_0u_n\| = \|P_+u_n + P_-u_n\| \leq K. \tag{2.14}$$

Por outro lado, como podemos escrever

$$\Phi(u_n) = \frac{1}{2}\,(L(u_n - P_0u_n), u_n - P_0u_n) - \int_{\mathbb{R}^N} [G(x,u_n) - G(x,P_0u_n)]\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,P_0u_n)dx$$

temos,

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x,P_0u_n)dx = \frac{1}{2}\,(L(u_n - P_0u_n), u_n - P_0u_n) - \Phi(u_n) - \int_{\mathbb{R}^N} [G(x,u_n) - G(x,P_0u_n)]\,dx.$$

Agora, sendo $L = I - \lambda_k S$ temos que L é limitado, logo

$$|(L(u_n - P_0u_n), u_n - P_0u_n)| \leq \|L(u_n - P_0u_n)\|\,\|u_n - P_0u_n\| \leq \|L\|\,\|u_n - P_0u_n\|^2\,,$$

e por (2.14) obtemos

$$|(L(u_n - P_0u_n), u_n - P_0u_n)| \leq C.$$

Observe que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} G(x,P_0u_n)dx\right| \leq \frac{1}{2}\,|(L(u_n - P_0u_n), u_n - P_0u_n)| + |\Phi(u_n)| + \left|\int_{\mathbb{R}^N} [G(x,u_n) - G(x,P_0u_n)]\,dx\right|$$

portanto,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} G(x,P_0u_n)dx\right| \leq C_1.$$

Daí, usando a condição (g_2^-) podemos concluir que $\|P_0 u_n\|$ é limitada.

Note que pela ortogonalidade das projeções temos

$$\|u_n\|^2 = \|P_0 u_n\|^2 + \|P_- u_n\|^2 + \|P_+ u_n\|^2 \,,$$

mostrando que (u_n) é limitada.

Sabemos que

$$\Phi^{'}(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + uv)dx - \psi^{'}(u)v \ ; \ \ u \ , v \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

onde

$$\psi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} (\frac{\lambda_k}{2} u^2 h + G(x,u))dx,$$

logo

$$(\nabla \Phi(u), v)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = (u, v)_{H^1(\mathbb{R}^N)} - (\nabla \psi(u), v)_{H^1(\mathbb{R}^N)}$$

assim,

$$(\nabla \Phi(u), v)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = (u - \nabla \psi(u), v)_{H^1(\mathbb{R}^N)}$$

e consequentemente,

$$\nabla \Phi(u) = u - \nabla \psi(u).$$

Considerando $T(u) = \nabla \psi(u)$ temos

$$\nabla \Phi(u) = u - T(u)$$

portanto,

$$\nabla \Phi(u_n) = u_n - T(u_n)$$

o que implica,

$$u_n = \nabla \Phi(u_n) + T(u_n).$$

Agora, sendo $T : H^1(\mathbb{R}^N) \longmapsto H^1(\mathbb{R}^N)$ compacto (ver Apêndice C), existe $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que

$$T(u_{n_j}) \longrightarrow u \ \ quando \ \ n_j \to \infty,$$

e usando o fato de que

$$\Phi^{'}(u_n) \to 0 \Leftrightarrow \left\|\Phi^{'}(u_n)\right\| \to 0 \Leftrightarrow \|\nabla \phi(u_n)\| \to 0 \Leftrightarrow \nabla \Phi(u_n) \to 0,$$

passando ao limite em

$$u_{n_j} = \nabla\Phi(u_{n_j}) + T(u_{n_j})$$

encontramos

$$u_{n_j} \longrightarrow u \ \ quando \ \ n_j \to \infty,$$

mostrando que Φ satisfaz a condição (PS).

Finalmente, temos que $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, Φ satisfaz a condição de Palais-Smale e usando a **Proposição 2.10** podemos aplicar o Teorema do Ponto de Sela com

$$V = X_- \quad , W = X_0 \oplus X_+$$

e garantir a existência de um ponto crítico para Φ, isto é, uma solução fraca do problema (P). ■

2.8 Um exemplo para a condição (g_2^+)

No que segue iremos supor que $G(x,s) = Z(x)\tilde{G}(x,s)$ e $g(x,s) = Z(x)\tilde{g}(x,s)$; $|\tilde{g}(x,s)| \leq M$ e $Z(x) \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, onde

$$\tilde{G}(x,s) = \int_0^s \tilde{g}(x,\tau)d\tau.$$

Vamos considerar o caso $k = 1$, ou seja, o problema (P) pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= \lambda_1 hu + g(x,u), \ \mathbb{R}^N \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{P}$$

Usando as propriedades vistas na **Seção 2.6**, N_{λ_1} tem dimensão 1, $N_{\lambda_1} = \langle \phi_1 \rangle$ e ϕ_1 tem sinal definido.

Proposição 2.11 *Se a função $\tilde{g} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ é tal que*

$$\lim_{|s|\to\infty} \tilde{G}(x,s) = +\infty \quad uniformemente \ \ em \ \ x \in \mathbb{R}^N \tag{g_3^+}$$

ou

$$(g_3^-) \qquad \lim_{|s|\to\infty} \tilde{G}(x,s) = -\infty \quad uniformemente \ \ em \ \ x \in \mathbb{R}^N, \tag{g_3^+}$$

temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x,v(x))dx \longrightarrow \pm\infty \ \ quando \ \ \|v\| \longrightarrow \infty \ ; \ v \ \in N_{\lambda_k}. \tag{$g_2^\pm$}$$

Demonstração: Seja $v \in N_{\lambda_1}$ tal que $v = \rho w$ com $\rho = \|v\|$ e

$$w \in S \cap N_{\lambda_1} = \{w \in N_{\lambda_1}; \|w\| = 1\} = \{-\phi_1, \phi_1\},$$

onde

$$S = \left\{x \in H^1(\mathbb{R}^N); \|x\| = 1\right\}.$$

Afirmação 1: Existe $M_0 > 0$ tal que $\tilde{G}(x,s) \geq -M_0 \quad \forall \ (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$.

De fato, por (g_3^+), dado $M_1 > 0$ existe $N > 0$ tal que $\tilde{G}(x,s) \geq M_1$ para $|s| \geq N$ e $x \in \mathbb{R}^N$. Por outro lado, sendo $|\tilde{g}(x,s)| \leq M$ tem-se

$$\left|\tilde{G}(x,s)\right| \leq M\,|s|\,,$$

logo fixado $N > 0$, temos

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^N \\ s \in [-N,N]}} \left|\tilde{G}(x,s)\right| \leq MN = M_2$$

portanto,

$$\left|\tilde{G}(x,s)\right| \leq M_2, \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}^N \ \ e \ \ s \in [-N,N]$$

consequentemente

$$\tilde{G}(x,s) \geq -M_2, \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}^N \ \ e \ \ |s| \leq N.$$

Definindo

$$-M_0 = \min\{M_1, M_2\}$$

concluímos que

$$\tilde{G}(x,s) \geq -M_0, \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}^N \ \ e \ \ \forall \quad s \in \mathbb{R},$$

mostrando a afirmação.

Assim, desde de que $Z(x) > 0$, segue da **Afirmação 1**

$$G(x,s) \geq -M_0 Z(x), \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}^N \ \ e \ \ \forall \quad s \in \mathbb{R}. \tag{2.15}$$

Agora, note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x, \rho w(x))dx = \int_{\tilde{\Omega}} G(x, \rho w(x))dx + \int_{\Omega_{\rho,w,M}} G(x, \rho w(x))dx,$$

onde

$$\tilde{\Omega} = \left\{x \in \mathbb{R}^N;\ |\rho w(x)| < \alpha(M_1)\right\}$$

e

$$\Omega_{\rho,w,M_1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^N ;\ |\rho w(x)| \geq \alpha(M_1) \right\}.$$

Por (2.15) obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x, \rho w(x))dx \geq -M_0 \int_{\tilde{\Omega}} Z(x)dx + M_1 \int_{\Omega_{\rho,w,M_1}} Z(x)dx$$

portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x, \rho w(x))dx \geq -M_0 \int_{\mathbb{R}^N} Z(x)dx + M_1 \int_{\Omega_{\rho,w,M_1}} Z(x)dx.$$

Afirmação 2: Existe $\rho(M_1)$ tal que

$$\int_{\Omega_{\rho,w,M_1}} Z(x)dx \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} Z(x)dx \quad para \quad \rho \geq \rho(M_1).$$

De fato, suponha por absurdo que a afirmação não ocorra, então existem $(\rho_n) \subset \mathbb{R}$ com $\rho_n \longrightarrow +\infty$ e $(w_n) \subset S \cap N_{\lambda_1}$, tal que

$$\int_{\Omega_{\rho_n,w_n,M_1}} Z(x)dx < \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} Z(x)dx \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Afirmação 3: Existem $(\rho_{n_j}) \subset (\rho_n)$ e $(w_{n_j}) \subset (w_n)$ tais que

$$\int_{\Omega_{\rho_n,w_n,M_1}} Z(x)dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} Z(x)dx.$$

De fato, seja $(w_n) \subset S \cap N_{\lambda_1} = \{\phi_1, -\phi_1\}$. Portanto, existe $(n_j) \subset \mathbb{N}$ tal que

$$w_{n_j} = \phi_1, \quad \forall \quad n_j$$

ou

$$w_{n_j} = -\phi_1, \quad \forall \quad n_j.$$

Supondo sem perda de generalidade que

$$w_{n_j} = \phi_1 \ ; \quad \phi_1 > 0 \quad \forall \quad n_j$$

tem-se

$$\int_{\Omega_{\rho_{n_j},\phi_1,M_1}} Z(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{\rho_{n_j},\phi_1,M_1}(x) Z(x)dx,$$

onde $\chi_{\rho_{n_j},\phi_1,M_1}(x)$ é a função caracteristica do conjunto $\Omega_{\rho_{n_j},\phi_1,M_1}$. Fixado $x \in \mathbb{R}^N$ existe $n_{j_0}(x)$ tal que

$$\rho_{n_j} \phi_1(x) > \alpha(M_1), \quad \forall \quad n_j \geq n_{j_0}(x)$$

o que implica,

$$x \in \Omega_{\rho_{n_j},\phi_1,M_1} \quad \forall \quad n_j \geq n_{j_0}(x).$$

Definindo

$$f_{n_j}(x) = \chi_{\rho_{n_j},\phi_1,M_1}(x) Z(x),$$

e sendo

$$\chi_{\rho_{n_j},\phi_1,M_1}(x) = 1, \quad \forall \quad n_j \geq n_{j_0}(x)$$

obtemos

$$f_{n_j}(x) = Z(x), \quad \forall \quad n_j \geq n_{j_0}(x).$$

e

$$f_{n_j}(x) \longrightarrow Z(x) \quad quando \quad n_j \to \infty.$$

Por outro lado,

$$\left| f_{n_j} \right| \leq Z(x) \ \in L^1(\mathbb{R}^N),$$

de onde segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_{n_j}(x)dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} Z(x)dx,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega_{\rho_{n_j},\phi_1,M_1}} Z(x)dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} Z(x)dx.$$

Isto é equivalente a dizer, que dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para $n_j \geq n_0$

$$\left| \int_{\Omega_{\rho_{n_j},\phi_1,M_1}} Z(x)dx - \int_{\mathbb{R}^N} Z(x)dx \right| < \epsilon.$$

Então, para $n_j > n_0$ temos que

$$\int_{\Omega_{\rho_{n_j},\phi_1,M_1}} Z(x)dx \in \left(\int_{\mathbb{R}^N} Z(x)dx - \epsilon, \int_{\mathbb{R}^N} Z(x)dx + \epsilon \right)$$

logo para ϵ suficientemente pequeno

$$\int_{\Omega_{\rho_{n_j},\phi_1,M}} Z(x)dx \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} Z(x)dx, \quad \forall \quad n_j \geq n_0$$

o que é um absurdo com (2.16).

Portanto, da afirmação 2, concluímos que

$$\int_{\Omega_{\rho,w,M_1}} Z(x)dx \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} Z(x)dx \ \ para \ \ \rho \geq \rho(M_1)$$

assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x,\rho w(x))dx \geq -M_0 \int_{\mathbb{R}^N} Z(x)dx + M_1 \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} Z(x)dx. \tag{2.17}$$

Usando o fato que $Z(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, cada parcela em (2.17) é limitada. Considerando

$$K = -M_0 \int_{\mathbb{R}^N} Z(x)dx + M_1 \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} Z(x)dx$$

temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x,\rho w(x))dx \geq K.$$

Então, sendo $v = \rho w$ e $\|v\| = \rho$ obtemos que para ρ suficientemente grande

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x,v(x))dx \geq K,$$

portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x,v(x))dx \geq K \;\; para \;\; \|v\| \geq N_2 = \rho(M_1).$$

Assim, dado $M_2 > 0$ vamos escolher M_1 de maneira que $K \geq M_2$. Logo, da definição de limite temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x,v(x))dx \longrightarrow +\infty \;\; quando \;\; \|v\| \to \infty,$$

mostrando o exemplo. ■

Capítulo 3

Teoremas do Passo da Montanha

Neste capítulo iremos demonstrar algumas versões do Teorema do Passo da Montanha encontradas em Willem (ver[13]). Na demonstração dos teoremas abstratos usamos novamente os Teoremas de Deformação vistos no Capítulo 1.

3.1 Condições de Compacidade

Nesta seção vamos definir algumas condições de compacidade as quais serão utilizadas no decorrer deste capítulo.

Definição 3.1 *Seja X um espaço de Banach e $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. O funcional ϕ satisfaz a condição Fraca de Palais-Smale ou (FPS) se cada sequência (u_n) limitada tal que $|\phi(u_n)|$ é limitada e $\phi'(u_n) \to 0$ contém uma subsequência convergente.*

Definição 3.2 *Seja X um espaço de Banach, $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. O funcional ϕ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c ou $(PS)_c$ se dada uma sequência (u_n) tal que $\phi(u_n) \to c$ e $\phi'(u_n) \to 0$, então c é um valor crítico de ϕ.*

Teorema 3.3 *Seja X um espaço de Banach e $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Se*
(i) ϕ é limitado inferiormente; $c = \inf_X \phi$,
(ii) ϕ satisfaz a condição $(PS)_c$,
então existe $u_0 \in X$ tal que

$$\phi(u_0) = c = \inf_X \phi.$$

Logo, c é um valor crítico de ϕ.

Demonstração: Suponha por contradição, que c não é valor crítico de ϕ. Então, segue do **Teorema 1.15** que existe $\epsilon > 0$ e $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que

$$\eta(1, \phi^{c+\epsilon}) \subset \phi^{c-\epsilon}.$$

Usando a definição de c existe $u_0 \in X$ tal que

$$c \leq \phi(u_0) < c + \epsilon$$

o que implica,

$$u_0 \in \phi^{c+\epsilon}$$

assim,

$$\phi^{c+\epsilon} \neq \emptyset$$

de onde segue

$$\eta(1, u_0) \in \eta(1, \phi^{c+\epsilon}),$$

ou seja,

$$\eta(1, \phi^{c+\epsilon}) \neq \emptyset$$

o que é um absurdo uma vez que $\phi^{c-\epsilon} = \emptyset$. Logo, c é um valor crítico de ϕ.

3.2 Teoremas do Passo da Montanha

Nesta seção vamos demonstrar duas versões do Teorema do Passo da Montanha as quais serão utilizados no próximo capítulo.

Teorema 3.4 *Seja X um espaço de Banach, $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $u \neq v \in X$,*

$$\Gamma = \left\{g \in C^1(X, \mathbb{R}) : \ g(0) = u, \ \ g(1) = v\right\}$$

e

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} \phi(g(t)).$$

Se
(i) ϕ satisfaz a condição $(PS)_c$.
(ii) Existe $0 < R < \|u - v\|$ e $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|w - v\| = R$$

implica

$$\phi(w) \geq b > a = \max\left\{\phi(u), \phi(v)\right\},$$

então $c \geq b$ é valor crítico de ϕ.

Demonstração: Da condição (ii) para cada $g \in \Gamma$, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que

$$\|g(t_0) - u\| = R.$$

De fato, considere a seguinte função

$$\begin{array}{rcl} f \ : \ [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) = \|g(t) - u\| \ ; g \in \Gamma. \end{array}$$

Observe que

$$f(0) = \|g(0) - u\| = \|u - u\| = 0 < R$$

e

$$f(1) = \|g(1) - u\| = \|v - u\| > R,$$

isto é,

$$f(0) < R < f(1).$$

Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que

$$f(t_0) = \|g(t_0) - u\| = R$$

o que implica,

$$\phi(g(t_0)) \geq b$$

assim,

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \phi(g(t)) \geq b \ , \quad \forall \quad g \in \Gamma$$

portanto, desde de que

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} \phi(g(t))$$

segue $c \geq b$.

Suponha por absurdo que c não é um valor crítico, então pelo **Teorema 1.15**, existem $0 < \epsilon < \frac{c-a}{2}$ e $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tais que

$$\eta(t,u) = u \quad se \quad u \notin \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \tag{3.1}$$

e

$$\eta(1, \phi^{c+\epsilon}) \subset \phi^{c-\epsilon}. \tag{3.2}$$

Pela definição de c, existe $g \in \Gamma$ tal que

$$\max_{0\leq t\leq 1} \phi(g(t)) \leq c+\epsilon \tag{3.3}$$

e defina $\hat{h}(t)=\eta(1,g(t))$. Desde que,

$$\phi(v),\phi(u)\leq a < c-2\epsilon$$

obtemos

$$\phi(v),\phi(u)\notin [c-2\epsilon, c+2\epsilon]$$

o que implica,

$$v,u\notin \phi^{-1}([c-2\epsilon,c+2\epsilon]).$$

Logo, por (3.1) tem-se

$$\hat{h}(0)=\eta(1,g(0))=\eta(1,u)=u$$

e

$$\hat{h}(1)=\eta(1,g(1))=\eta(1,v)=v$$

portanto $\hat{h}\in\Gamma$. Agora, por (3.3) temos

$$\phi(g(t))\leq c+\epsilon \ \ \forall \ \ t\in[0,1]$$

assim,

$$g(t)\in\phi^{c+\epsilon} \ \ \forall \ \ t\in[0,1]$$

consequentemente, por (3.2) obtemos

$$\hat{h}(t)=\eta(1,g(t))\in\phi^{c-\epsilon} \ \ \forall \ \ t\in[0,1],$$

isto é,

$$\phi(\hat{h}(t))\leq c-\epsilon \ \ \forall \ \ t\in[0,1]$$

de onde segue,

$$\max_{0\leq t\leq 1}\phi(\hat{h}(t))\leq c-\epsilon.$$

Sendo

$$c=\inf_{g\in\Gamma}\max_{0\leq t\leq 1}\phi(g(t))$$

temos,

$$c\leq \max_{0\leq t\leq 1}\phi(g(t)) \ , \quad \forall \quad g\in\Gamma.$$

Portanto,

$$c \leq \max_{0 \leq t \leq 1} \phi(\hat{h}(t)) \leq c - \epsilon$$

o que é um absurdo, mostrando que c é um valor crítico de ϕ. ■

Teorema 3.5 *Seja X um espaço de Banach, $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $u \neq v \in X$,*

$$\Gamma = \left\{ g \in C^1(X, \mathbb{R}) : \ g(0) = u, \ \ g(1) = v \right\}$$

e

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} \phi(g(t)).$$

Se
(i) ϕ satisfaz a condição $(PS)_c$ e (FPS)
(ii) Existe $0 < r < R < \|u - v\|$ tal que, se $w \in X$ verifica

$$r \leq \|w - u\| \leq R$$

temos

$$\phi(w) \geq a = \max \left\{ \phi(u), \phi(v) \right\},$$

então $c \geq a$ e c é um valor crítico de ϕ. Além disso, se $c = a$, existe um único ponto crítico w tal que

$$\phi(w) = a \quad e \quad \|w - v\| = \frac{R + r}{2}.$$

Demonstração: Para $c > a$, basta repetir a demonstração do **Teorema 3.4**. Vamos mostrar o caso em que $c = a$. Seja $n \in \mathbb{N}$ de tal forma que

$$\frac{R - r}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Pela definição de $c = a$, tem-se

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \phi(g(t)) \leq a + \frac{1}{n}$$

o que implica,

$$\phi(g(t)) \leq a + \frac{1}{n} \ \ \forall \ \ t \in [0, 1]$$

ou seja

$$g(t) \in \phi^{a + \frac{1}{n}} \ \ \forall \ \ t \in [0, 1].$$

Afirmação: Da condição (ii) para cada $g \in \Gamma$, existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que

$$\|g(t_0) - u\| = \frac{R + r}{2}.$$

De fato, considere a seguinte função

$$\begin{array}{rcl} f \ : \ [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) = \|g(t) - u\| \ ; g \in \Gamma. \end{array}$$

Note que

$$0 < r < R$$

daí,

$$r < 2r < R + r < 2R$$

portanto,

$$\frac{r}{2} < r < \frac{R+r}{2} < R.$$

Assim,

$$f(0) = \|g(0) - u\| = \|u - u\| = 0 < \frac{R+r}{2}$$

e

$$f(1) = \|g(1) - u\| = \|v - u\| > R > \frac{R+r}{2},$$

isto é,

$$f(0) < \frac{R+r}{2} < f(1).$$

Logo, pelo Teorema do Valor Intermediario, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que

$$f(t_0) = \|g(t_0) - u\| = \frac{R+r}{2}$$

mostrando a afirmação. Agora, vamos considerar $u_n = g(t_0)$, então

$$a \leq \phi(u_n) \leq a + \frac{1}{n}$$

e

$$\|u_n - u\| = \frac{R+r}{2}.$$

Supondo por contradição que o **Teorema 1.14** pode ser aplicado com $S = \{u_n\}$, $c = a$, $\epsilon = \frac{1}{n}$ e $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$, para cada

$$u \in \phi^{-1}([c - \frac{2}{n}, c + \frac{2}{n}]) \cap S_{\frac{2}{\sqrt{n}}},$$

implica

$$\left\| \phi^{'}(u) \right\| \geq \frac{4}{\sqrt{n}}.$$

Usando o fato $u_n \in \phi^{a+\frac{1}{n}} \cap S_\delta$, segue da propriedade (iii) $\eta(1, \phi^{a+\epsilon} \cap S) \subset \phi^{a-\epsilon} \cap S_\delta$, logo

$$v_n = \eta(1, u_n) \in \phi^{a-\frac{1}{n}} \cap S_{\frac{1}{\sqrt{n}}}. \tag{3.4}$$

Note que

$$\|v_n - u\| \leq \|v_n - u_n\| + \|u_n - u\|$$

logo,

$$\|v_n - u\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{R+r}{2} \leq \frac{R-r}{2} + \frac{R+r}{2} = R,$$

Por outro lado,

$$\|v_n - u\| \geq \|u_n - u\| - \|v_n - u_n\|$$

portanto,

$$\|v_n - u\| \geq \frac{R+r}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{R+r}{2} - \frac{R-r}{2}$$

logo,

$$\|v_n - u\| \geq r$$

concluído desta forma que

$$r \leq \|v_n - u\| \leq R.$$

Por (3.4) tem-se

$$\phi(v_n) \leq a - \frac{1}{n} < a$$

e por (ii) segue

$$\phi(v_n) \geq a$$

o que é um absurdo. Então, o **Teorema 1.14** não pode ser aplicado, portanto existe algum

$$w_{\epsilon,\delta} \in \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$$

tal que

$$\left\|\phi^{'}(w_{\epsilon,\delta})\right\| \leq \frac{4\epsilon}{\delta}$$

logo,

$$\|u_n - w_{\epsilon,\delta}\| \leq 2\delta.$$

Sejam $\epsilon = \frac{1}{n}$, $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e considere $w_n = w_{\frac{1}{n},\frac{1}{\sqrt{n}}}$, então

$$c - \frac{2}{n} \leq \phi(w_n) \leq c + \frac{2}{n}\ , \tag{3.5}$$

$$\left\|\phi^{'}(w_n)\right\| \leq \frac{4}{\sqrt{n}} \tag{3.6}$$

e

$$\|u_n - w_n\| \leq \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Observe que

$$\|w_n - u\| \leq \|w_n - u_n\| + \|u_n - u\| \leq \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{R+r}{2} \leq R - r + \frac{R+r}{2}$$

o que implica,

$$\|w_n - u\| \leq \frac{3R-r}{2}.$$

Por outro lado,

$$\|w_n\| - \|u\| \leq \|w_n - u\| \leq \frac{3R-r}{2}$$

de onde segue

$$\|w_n\| \leq \frac{3R-r}{2} + \|u\| = C, \ \ \forall \ \ n \in \mathbb{N},$$

ou seja, w_n é limitada.

Passando ao limite em (3.5) e (3.6) tem-se

$$\phi(w_n) \longrightarrow c \ \ e \ \ \phi^{'}(w_n) \longrightarrow 0.$$

Da condição (FPS) temos que existe uma subsequência (w_{n_j}) tal que

$$w_{n_j} \longrightarrow w \ \ em \ \ X$$

portanto, usando o fato que $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ temos

$$\phi(w_{n_j}) \longrightarrow \phi(w) \ \ e \ \ \phi^{'}(w_{n_j}) \longrightarrow \phi^{'}(w).$$

Logo, pela unicidade do limite

$$\phi(w) = c \quad \ e \quad \phi^{'}(w) = 0,$$

mostrando que c é valor crítico de ϕ. Por outro lado,

$$\left\|u_{n_j} - w\right\| \leq \left\|u_{n_j} - w_{n_j}\right\| + \left\|w_{n_j} - w\right\|$$

o que implica,

$$\left\|u_{n_j} - w\right\| \leq \frac{2}{\sqrt{n_j}} + \left\|w_{n_j} - w\right\|$$

daí, passando ao limite tem-se

$$\|u_{n_j} - w\| \longrightarrow 0,$$

isto é,

$$u_{n_j} \longrightarrow w \ \ em \ \ X.$$

Desde que

$$\|u_{n_j} - u\| = \frac{R+r}{2},$$

passando ao limite obtemos

$$\|w - u\| = \frac{R+r}{2}$$

mostrando o Teorema. ■

Capítulo 4

Soluções Periódicas da Equação do Pêndulo Forçado

Nosso objetivo neste capítulo é usar métodos variacionais para mostrar a existência de soluções T-periódicas da equação

$$\ddot{u} + G^{'}(u) = f(t) \tag{4.1}$$

a qual é de grande importância para a Mecânica e a Física Matemática. Em particular, se considerarmos $G(u) = -\cos u$, obtemos a equação do pêndulo forçado

$$\ddot{u} + \sin(u) = f(t).$$

A garantia de solução T-periódica para a equação (4.1), é devido a Ambrosetti-Rabinowitz (ver[13]) e consiste em determinar pontos críticos do funcional energia definido por

$$\Phi(u) = \int_0^T [\frac{\dot{u}^2}{2} - G(u) + fu]dt.$$

4.1 Preliminares

Nesta seção vamos fazer um breve estudo sobre as séries de Fourier e demonstrar alguns resultados básicos que serão utilizados ao decorrer deste cápitulo. Maiores detalhes podem ser encontrados em [11].

Seja $u : [0, T] \longmapsto \mathbb{R}$, uma função integrável, a sua série de Fourier é a série dada por

$$S[u] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(\frac{2k\pi}{T}t) + b_k \sin(\frac{2k\pi}{T}t) \right). \tag{4.2}$$

Podemos rescrever a série de Fourier de uma função u definida em $[0, T]$ de uma maneira diferente, usando exponênciais complexas. Recorde que se $t \in \mathbb{R}$, temos

$$e^{\frac{i2k\pi}{T}t} = \cos(\frac{2k\pi}{T}t) + i\sin(\frac{2k\pi}{T}t)$$

de modo que

$$\cos(\frac{2k\pi}{T}t) = \frac{e^{\frac{i2k\pi}{T}t} + e^{\frac{-i2k\pi}{T}t}}{2}$$

e

$$\sin(\frac{2k\pi}{T}t) = \frac{e^{\frac{i2k\pi}{T}t} - e^{\frac{-i2k\pi}{T}t}}{2i}.$$

Portanto,

$$a_k\cos(\frac{2k\pi}{T}t) + b_k\sin(\frac{2k\pi}{T}t) = a_k\left(\frac{e^{\frac{i2k\pi}{T}t} + e^{\frac{-i2k\pi}{T}t}}{2}\right) + b_k\left(\frac{e^{\frac{i2k\pi}{T}t} - e^{\frac{-i2k\pi}{T}t}}{2i}\right)$$

o que implica,

$$a_k\cos(\frac{2k\pi}{T}t) + b_k\sin(\frac{2k\pi}{T}t) = \left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i}\right)e^{\frac{i2k\pi}{T}t} + \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i}\right)e^{\frac{-i2k\pi}{T}t}$$

de onde obtemos

$$a_k\cos(\frac{2k\pi}{T}t) + b_k\sin(\frac{2k\pi}{T}t) = \left(\frac{a_k - ib_k}{2}\right)e^{\frac{i2k\pi}{T}t} + \left(\frac{a_k + ib_k}{2}\right)e^{\frac{-i2k\pi}{T}t}.$$

Rescrevendo (4.2) tem-se

$$S[u] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k - ib_k}{2}\right)e^{\frac{i2k\pi}{T}t} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k + ib_k}{2}\right)e^{\frac{-i2k\pi}{T}t}$$

assim,

$$S[u] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\frac{i2k\pi}{T}t}$$

é a série de Fourier complexa de u, onde os coeficientes de Fourier são dados por

$$c_0 = \frac{a_0}{2}\ , \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \quad e \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}\ ; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Recorde que a_k, b_k, e a_0 são calculados da seguinte forma:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\cos(\frac{2k\pi}{T}t)dt,$$

$$b_k = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\sin(\frac{2k\pi}{T}t)dt$$

e

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt.$$

Teorema 4.1 *Seja u contínua, com $\dot{u} \in L^2([0,T])$ e u T-periódica. Então, a série de Fourier gerada por u converge uniformemente a u. Além disso, vale a identidade de Parseval*

$$\|c_k\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|^2\,dt = \frac{1}{T}\|u\|_2^2.$$

Proposição 4.2 *Seja $u : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^N$ uma função absolutamente contínua e T-periódica tal que $\int_0^T |\dot{u}(t)|^2\,dt < \infty$. Se $\int_0^T u(t)dt = 0$, então $\int_0^T |u(t)|^2\,dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |\dot{u}(t)|^2\,dt$.*

Demonstração: Seja

$$u \cong \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\frac{i2k\pi}{T}t}$$

a série de Fourier gerada por u, então a sua derivada é dada por

$$\dot{u} \cong \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{i2k\pi}{T} e^{\frac{i2k\pi}{T}t}.$$

Agora, usando a identidade de Parseval tem-se

$$\frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|^2\,dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2,$$

e

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\dot{u}(t)|^2\,dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{4\pi^2k^2}{T^2}|c_k|^2$$

de onde segue

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\dot{u}(t)|^2\,dt = \frac{4\pi^2}{T^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2.$$

Assim,

$$\frac{1}{T}\frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |\dot{u}(t)|^2\,dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2,$$

portanto

$$\frac{1}{T}\frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |\dot{u}(t)|^2\,dt \geq \frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|^2\,dt$$

logo,

$$\frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |\dot{u}(t)|^2\,dt \geq \int_0^T |u(t)|^2\,dt$$

mostrando a proposição. ■

4.2 Existência de Solução

Nesta seção iremos mostrar a existência de soluções T-periódicas para a equação

$$\ddot{u} + G^{'}(u) = f(t),$$

onde $G \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é uma função 2π-periódica e $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ uma função T-periódica. No que segue, denotaremos por H o seguinte espaço vetorial

$$H = \left\{ u : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \ ; \ u \ \text{ absolutamente } \ \text{contínua, } \ \text{T-periódica e } \int_0^T |\dot{u}(t)|^2 \, dt < \infty \right\},$$

com a seguinte norma

$$\|u\|_H^2 = \int_0^T \left(|\dot{u}|^2 + |u|^2 \right) dt$$

e por $\Phi : H \longrightarrow \mathbb{R}$, o seguinte funcional

$$\Phi(u) = \int_0^T [\frac{\dot{u}^2}{2} - G(u) + fu] dt$$

o qual está bem definido sendo de classe $C^1(H, \mathbb{R})$ (ver Apêndice B). Além disso, os pontos críticos de ϕ são soluções fraca de (4.1), com

$$\Phi^{'}(u)h = \int_0^T [\dot{u}\dot{h} - G^{'}(u)h + fh] dt \ ; \ \ \forall \ \ h \in H.$$

Lema 4.3 *O espaço H é Hilbert com relação ao produto interno dado por*

$$(u, v) = \int_0^T (\dot{u}\dot{v} + uv) dt.$$

Demonstração: Seja $(u_n) \subset H$ uma sequência de Cauchy. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n - u_m\|_H < \epsilon \ \ para \ \ m, n \geq n_0. \tag{4.3}$$

Observe que

$$\|u_n\|_H^2 = \int_0^T \left(|\dot{u_n}|^2 + |u_n|^2 \right) dt = \|\bar{u}_n\|_{H^1([0,T])}^2 ,$$

onde $\bar{u}_n = u_n \Big|_{[0,T]}$. Por outro lado,

$$\|u_n - u_m\|_H^2 = \|\bar{u}_n - \bar{u}_m\|_{H^1([0,T])}^2 .$$

Usando o fato que $H^1([0, T])$ é Hilbert, existe $\bar{u} \in H^1([0, T])$ tal que

$$\bar{u}_n \longrightarrow \bar{u} \ \ em \ \ H^1([0, T]).$$

Agora, considere $u(t) = \bar{u}(t); t \in [0, T]$ e defina

$$u(t) = \bar{u}(t - kT) \ \ se \ \ t \in [kT, (k+1)T] \ ; k \in \mathbb{Z}.$$

Das imersões continuas de Sobolev,

$$H^1([0, T]) \hookrightarrow C([0, T])$$

assim,

$$u_n(0) = \bar{u}_n(0) \longrightarrow \bar{u}(0)$$

e

$$u_n(T) = \bar{u}_n(T) \longrightarrow \bar{u}(T).$$

Segue do fato que u_n é T-periódica e da unicidade do limite,

$$\bar{u}(0) = \bar{u}(T).$$

Portanto, para cada $k \in \mathbb{Z}$ temos

$$u(t + T) = \bar{u}(t + T - KT) = u(t),$$

ou seja,

$$u(t + T) = u(t)$$

mostrando que u é T-periódica e portanto contínua.

Afirmação: $u : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ é absolutamente contínua, ou seja, dado $\epsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ tal que para toda sequência finita de intervalos disjuntos (a_i, b_i) de $[0, T]$ temos:

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |u(b_i) - u(a_i)| < \epsilon.$$

De fato, para mostrar a afirmação usaremos as seguintes propriedades:

(P_1) Se $f \in L^1(X, \mathcal{X}, \mu)$ dado $\epsilon > 0$, $\exists \ \delta > 0$ tal que $\mu(B) < \delta \Longrightarrow \int_B f d\mu < \epsilon$.

(P_2) Se $u \in W^{1,p}(I)$, então $u(x) - u(y) = \int_y^x |u'(t)| \, dt$ (ver[3]).

Considere,

$$B = (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup ... \cup (a_n, b_n) \ \ em \ \ [0, T]; \ \ i = 1, 2, ..., n,$$

e usando o fato que a união é disjunta,

$$\mu(B) = \mu((a_1, b_1)) + ... + \mu((a_n, b_n)); \ \ (\mu(B) := medida \ \ de \ \ Lebesgue)$$

portanto,

$$\mu(B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_n - b_n| = \sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta.$$

Segue de (P_1) e (P_2)

$$\sum_{i=1}^{n} |u(b_i) - u(a_i)| = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{a_i}^{b_i} u'(t)dt \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{(a_i,b_i)} |u'(t)|\, dt$$

o que implica,

$$\sum_{i=1}^{n} |u(b_i) - u(a_i)| \leq \int_{\cup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)} |u'(t)|\, dt = \int_B |u'(t)|\, dt < \epsilon$$

Segue do argumento acima e do fato que u é T-periódica que u deve ser absolutamente contínua.

Agora, sendo $u(t) = \bar{u}(t); t \in [0,T]$ uma função T-periódica e absolutamente contínua com $u_n \to u$ em $H^1([0,T])$, então

$$\|u_n - u\|_H^2 = \int_0^T |\bar{u_n} - \bar{u}|^2\, dt = \|\bar{u}_n - \bar{u}\|^2_{H^1([0,T])} \longrightarrow 0,$$

isto é,

$$u_n \longrightarrow u \ \ em \ \ H.$$

$\blacksquare$

Lema 4.4 *O funcional* Φ *satisfaz a condição* (FPS).

Demonstração: Seja $J : H \longrightarrow H'$ onde,

$$\langle J(u), h\rangle = \int_0^T \dot{u}\dot{h}dt + \int_0^T uhdt\ , \ \ \forall\ \ u,h \in H$$

assim,

$$\Phi'(u)h = \langle J(u), h\rangle - \int_0^T [uh - G'(u)h - fh]dt\ ; \ \ \forall\ \ h \in H.$$

Considere também $N : H \longrightarrow H'$ com

$$\langle N(u), h\rangle = \int_0^T [uh - G'(u)h - fh]dt\ ; \ \ \forall\ \ h \in H$$

portanto,

$$\langle J(u), h\rangle - \langle N(u), h\rangle = \int_0^T [\dot{u}\dot{h} - G'(u)h + fh]dt$$

o que implica,

$$\langle J(u), h\rangle - \langle N(u), h\rangle = \Phi^{'}(u)h,$$

isto é,

$$\Phi^{'}(u) = J(u) - N(u).$$

Afirmação: Se $u_k \rightharpoonup u$ em H, então $N(u_k) \longrightarrow N(u)$ em $H^{'}$.

De fato, usando a norma em $H^{'}$ temos

$$\|N(u_k) - N(u)\|_{H'} = \sup_{\|h\| \leq 1} |\langle N(u_k) - N(u), h\rangle| .$$

Agora, observe que

$$\langle N(u_k) - N(u), h\rangle = \int_0^T [u_k - G^{'}(u_k) - f - (u - G^{'}(u) - f)]hdt$$

de onde segue

$$\langle N(u_k) - N(u), h\rangle = \int_0^T [u_k - u + G^{'}(u_k) - G^{'}(u)]hdt$$

o que implica,

$$|\langle N(u_k) - N(u), h\rangle| \leq \int_0^T |u_k - u| \, |h| \, dt + \int_0^T \left|G^{'}(u_k) - G^{'}(u)\right| |h| \, dt.$$

Por Hölder, e das imersões contínuas obtemos

$$|\langle N(u_k) - N(u), h\rangle| \leq C \|u_k - u\|_{L^2([0,T])} \|h\|_H + C \left\|G^{'}(u_k) - G'(u)\right\|_{L^2([0,T])} \|h\|_H .$$

Agora, usando o fato que $u_k \rightharpoonup u$ em H, então (u_k) é limitada em H. E das imersões compactas de Sobolev

$$H^1([0,T]) \hookrightarrow L^2([0,T]).$$

Assim, dado (u_k) limitada em $H^1([0,T])$ existe uma subsequência, que também denotaremos por (u_k) tal que

$$u_k \longrightarrow u \;\; em \;\; L^2([0,T]),$$

e a menos de subsequência

$$u_k(t) \longrightarrow u(t) \;\; q.t.p \;\; em \;\; [0,T].$$

Da continuidade de $G^{'}$, tem-se

$$G^{'}(u_k(t)) \longrightarrow G^{'}(u(t)) \;\; q.t.p \;\; em \;\; [0,T]$$

e portanto,

$$\left|G^{'}(u_k(t)) - G^{'}(u(t))\right|^2 \longrightarrow 0 \;\; q.t.p \;\; em \;\; [0,T].$$

Por outro lado,

$$\left|G^{'}(u_k) - G^{'}(u)\right|^2 \leq \left(\left|G^{'}(u_k)\right| + \left|G^{'}(u)\right|\right)^2$$

daí,

$$\left|G^{'}(u_k) - G^{'}(u)\right|^2 \leq (M+M)^2 = 4M^2 \;\in L^1([0,T]),$$

onde M verifica

$$\left|G^{'}(t)\right| \leq M \;\; \forall \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue tem-se

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T \left|G^{'}(u_k) - G^{'}(u)\right|^2 dt = 0$$

o que implica,

$$G^{'}(u_k) \longrightarrow G^{'}(u) \;\; em \;\; L^2([0,T]).$$

Note que se considerarmos $\|h\| \leq 1$, obtemos

$$|\langle N(u_k) - N(u), h\rangle| \leq C\,\|u_k - u\|_{L^2([0,T])} + C\left\|G^{'}(u_k) - G'(u)\right\|_{L^2([0,T])} \tag{4.4}$$

de onde segue

$$\|N(u_k) - N(u)\|_{H'} \leq C\,\|u_k - u\|_{L^2([0,T])} + C\left\|G^{'}(u_k) - G'(u)\right\|_{L^2([0,T])}.$$

Passando ao limite quando $k \to \infty$ tem-se

$$\|N(u_k) - N(u)\|_{H'} \longrightarrow 0 \;\; quando \;\; k \to \infty,$$

isto é,

$$N(u_k) \longrightarrow N(u) \;\; em \;\; H^{'}$$

mostrando a afirmação.

Desde que

$$\Phi^{'}(u_k) = J(u_k) - N(u_k),$$

passando ao limite e usando o fato que $\Phi^{'}(u_k) \to 0$ e $N(u_k) \to N(u)$ temos

$$J(u_k) \longrightarrow N(u) \;\; quando \;\; k \to \infty.$$

Agora, note que

$$\langle J(u), h \rangle = \int_0^T \dot{u}\dot{h}dt + \int_0^T uhdt,$$

ou seja,

$$\langle J(u), h \rangle = (u, h)_{H^1([0,T])}\,.$$

Segue do Teorema da Representação de Riesz, que podemos fazer a seguinte identificação

$$J(u) \cong u$$

e consequentemente

$$\|J(u)\|_{H'} = \|u\|_{H^1([0,T])}\,.$$

Usando o mesmo raciocínio

$$\langle N(u), h \rangle = (Tu, h)_{H^1([0,T])}$$

e fazendo novamente a identificação com

$$Tu \cong N(u),$$

obtemos

$$\|N(u)\|_{H'} = \|Tu\|_{H^1([0,T])}\,,$$

portanto

$$\langle J(u_k) - N(u), h \rangle = (u_k - Tu, h)_{H^1([0,T])}\ \ ,\ \ \forall\ \ h \in H$$

consequentemente,

$$\|J(u_k) - N(u)\|_{H'} = \|u_k - Tu\|_{H^1([0,T])}\,. \tag{4.5}$$

Ora,

$$J(u_k) \longrightarrow N(u)\ \ quando\ \ k \to \infty\ \ em\ \ H^{'}$$

logo passando ao limite em (4.5) temos

$$\|u_k - Tu\|_{H^1([0,T])} \longrightarrow 0\ \ quando\ \ k \to \infty$$

o que implica,

$$u_k \longrightarrow Tu.$$

Considerando $w = Tu$ teremos

$$u_k \longrightarrow w$$

mostrando assim, que Φ satisfaz a condição (FPS).

Teorema 4.5 *Se* $\int_0^T f(t)dt = 0$*, então a equação* (4.1) *tem duas soluções* T*-periódicas que não diferem por multiplicidade* 2π*.*

Demonstração: Para cada $u \in H$ iremos escrever

$$v = u - \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$$

e

$$w = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$$

o que implica,

$$u = v + w \tag{4.6}$$

assim,

$$\dot{u} = \dot{v}. \tag{4.7}$$

Recorde que

$$\Phi(u) = \int_0^T [\frac{\dot{u}^2}{2} - G(u) + fu]dt$$

daí, por (4.6) e (4.7) obtemos

$$\Phi(u) = \int_0^T \frac{\dot{v}^2}{2}dt - \int_0^T G(v+w)dt + \int_0^T f[v+w]dt$$

e usando a hipótese que $\int_0^T f(t)dt = 0$ tem-se

$$\Phi(u) = \int_0^T \frac{\dot{v}^2}{2}dt - \int_0^T G(v+w)dt + \int_0^T fvdt. \tag{4.8}$$

Afirmação 1: Φ é limitado inferiormente.

De fato, seja

$$\alpha = \max_{u\in\mathbb{R}} G(u)$$

logo, por definição temos

$$\alpha \geq G(u) \ \ \forall \ \ u \in \mathbb{R}$$

portanto, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\Phi(u) \geq \int_0^T \frac{\dot{v}^2}{2}dt - \alpha\int_0^T dt - \left(\int_0^T f^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T v^2dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pela **Proposição 4.2** obtemos

$$\Phi(u) \geq \int_0^T \frac{\dot{v}^2}{2} dt - \alpha\, T - \frac{T}{4\pi} \left(\int_0^T f^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \dot{v}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

de onde segue

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{2} \|\dot{v}\|^2_{L^2([0,T])} - B \|\dot{v}\|_{L^2([0,T])} - C, \tag{4.9}$$

ou seja, Φ é limitado inferiormente.

Afirmação 2: Φ é 2π-periódica, isto é, $\Phi(u + 2\pi) = \Phi(u)$.

De fato, considere

$$u = v + w$$

consequentemente

$$\dot{u} = \dot{v},$$

então

$$\Phi(u + 2\pi) = \int_0^T \frac{\dot{v}^2}{2} dt - \int_0^T G(v + w + 2\pi) dt + \int_0^T f[v + w + 2\pi] dt$$

desta forma,

$$\Phi(u + 2\pi) = \int_0^T \frac{\dot{v}^2}{2} - \int_0^T G(v + w + 2\pi) dt + \int_0^T f v dt$$

portanto, usando o fato que

$$G(v + w + 2\pi) = G(v + w)$$

pois G é 2π-periódica, tem-se

$$\Phi(u + 2\pi) = \Phi(u).$$

Afirmação 3: Φ satisfaz $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

De fato, seja (u_k) uma subsequência em H tal que

$$\Phi(u_k) \to c \;\; e \;\; \Phi^{'}(u_k) \to 0.$$

Desde que $\Phi(u_k)$ é limitada, segue de (4.9)

$$C_1 \geq |\Phi(u_k)| \geq \frac{1}{2} \|\dot{v_k}\|^2_{L^2([0,T])} - B \|\dot{v_k}\|_{L^2([0,T])} - C,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\left\|\dot{v_k}\right\|^2_{L^2([0,T])} - B\left\|\dot{v_k}\right\|_{L^2([0,T])} - C \leq C_1$$

portanto, $(\dot{v_k})$ é limitada em $L^2([0,T])$. Por outro lado, pela **Proposição 4.2** temos

$$\frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |\dot{v_k}(t)|^2\,dt \geq \int_0^T |v_k(t)|^2\,dt$$

o que implica,

$$\|v_k\|^2_{L^2([0,T])} \leq C_2\left\|\dot{v_k}\right\|^2_{L^2([0,T])}$$

de onde temos

$$\|v_k\|^2_{L^2([0,T])} \leq C_3,$$

isto é, (v_k) é limitada em $L^2([0,T])$. Agora, desde que $u_k = v_k + w_k;\ \ w_k \in \mathbb{R}$, temos pela periocidade de Φ que

$$\Phi(u_k) = \Phi(v_k + \hat{w}_k);\ \hat{w}_k \in [0, 2\pi].$$

Denotando $\hat{u}_k = v_k + \hat{w}_k$ temos

$$\Phi(\hat{u}_k) = \Phi(u_k) \longrightarrow c\ \ e\ \ \Phi'(\hat{u}_k) = \Phi'(u_k) \longrightarrow 0. \tag{4.10}$$

Observe que

$$\int_0^T \hat{w}_k^2 \leq 4\pi^2 T$$

isto é,

$$\|\hat{w}_k\|^2_{L^2([0,T])} \leq 4\pi^2 T$$

de onde segue

$$\|\hat{w}_k\|_{L^2([0,T])} \leq 2\pi\sqrt{T},$$

mostrando que $(\hat{w}_k)$ é limitada em $L^2([0,T])$. Assim, como (v_k) e $(\hat{w}_k)$ são limitadas podemos concluir que $(\hat{u}_k)$ é limitada em H, então pelo **Lema 4.4**, $(\hat{u}_k)$ contém uma subsequência que também denotaremos por $(\hat{u}_k)$ tal que

$$\hat{u}_k \longrightarrow u\ \ em\ \ H.$$

Então, por (4.10) tem-se

$$\Phi(\hat{u}_k) \to c\ \ \ e\ \ \ \Phi^{'}(\hat{u}_k) \to 0$$

por outro lado,

$$\Phi(\hat{u}_k) \to \Phi(u) \quad e \quad \Phi^{'}(\hat{u}_k) \to \Phi^{'}(u)$$

pois, $\Phi \in C^1$. Logo, pela unicidade do limite temos

$$\Phi(u) = c \;\; e \;\; \Phi^{'}(u) = 0,$$

então c é um valor crítico, mostrando que Φ satisfaz a condição $(PS)_c$.

Segue da **Afirmação 1** e **Afirmação 3**, juntamente com o **Teorema 3.3** que Φ tem um mínimo em algum ponto $u \in H$. Consequentemente, da **Afirmação 2**

$$\Phi(u + 2\pi) = \Phi(u) = \min_{H} \Phi.$$

Considerando $v = u + 2\pi$ observe que

$$\|u - v\|_H = \left(\int_0^T [\dot{u} - \dot{v}]^2 dt + \int_0^T [u - v]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

e do fato que $\dot{u} = \dot{v}$, tem-se

$$\|u - v\|_H = \left(\int_0^T [u - v]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

ou seja,

$$\|u - v\|_H = \left(\int_0^T (2\pi)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

o que implica,

$$\|u - v\|_H = 2\pi\sqrt{T}.$$

Aplicando o **Teorema 3.5** com $v = u + 2\pi$, $0 < r < R < 2\pi\sqrt{T}$, w verificando

$$r \leq \|w - u\| \leq R$$

e observando que

$$\Phi(w) \geq a = \max \{\Phi(u), \Phi(v)\},$$

então o nível minimáx $c \geq a$ e c é um valor crítico de Φ. Agora, note que

(i) Se $c > a$, suponha que u_1 é um ponto crítico com $\Phi(u_1) = c$ e usando o fato que $\Phi(u) = a$, então

$$\Phi(u_1) > \Phi(u)$$

consequentemente

$$u_1 \neq u + 2k\pi,$$

pois caso contrário pela periodicidade de Φ teriamos $\Phi(u_1) = \Phi(u)$, o que seria um absurdo.

(ii) Se $c = a$, pelo **Teorema 3.5** temos um ponto crítico u_1 que verifica $\Phi(u_1) = a$ com

$$\Phi(u_1) = \Phi(u) \;\; e \;\; \|u_1 - u\| = \frac{R+r}{2}. \tag{4.11}$$

Considerando $u_1 = u + 2k\pi$ temos

$$\|u_1 - u\|^2 = \int_0^T [\dot{u}_1 - \dot{u}]^2 dt + \int_0^T [2k\pi]^2 dt$$

e sendo $\dot{u}_1 = \dot{u}$, segue

$$\|u_1 - u\| = 2\,|k|\,\pi\sqrt{T} \geq 2\pi\sqrt{T}$$

portanto, usando o fato que $0 < r < R < 2\,|k|\,\pi\sqrt{T}$ obtemos

$$\frac{R+r}{2} < 2\,|k|\,\pi\sqrt{T} = \|u_1 - u\|$$

o que contradiz (4.11). Logo, $u_1 \neq u + 2k\pi$ mostrando que a equação (4.1) possui duas soluções que não diferem por multiplicidade 2π. $\blacksquare$

Apêndice A

Grau topológico de Brouwer

Neste apêndice faremos uma breve apresentação dessa importante ferramenta topológica e de suas principais propriedades (ver [4]).

Seja $\phi \in C(\bar{U}, \mathbb{R}^N)$ onde $U \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto limitado. Dado $b \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial U)$ o problema consiste em resolver a equação

$$\phi(x) = b \tag{A.1}$$

em U. Isto pode ser feito em certos casos usando-se o chamado **Grau de Brouwer** da aplicação ϕ (*relativo a U no ponto a*), que é denotado por $d(\phi, U, b)$, o qual é um inteiro que representa uma "contagem algébrica" do número de soluções de $(A.1)$.

Citaremos a seguir, algumas propriedades que foram utilizadas durante o decorrer deste trabalho:

(P_1) (**Normalização**) Se $I_d : U \to \mathbb{R}^N$ é a aplicação inclusão então

$$d(I_d, U, b) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad b \in U \\ 0, & \text{se} \quad b \notin U \end{cases}$$

(P_2) (**Dependência na fronteira**) Se $\Psi = \phi$ em ∂U então

$$d(\Psi, U, b) = d(\phi, U, b).$$

(P_3) (**Propriedade de existência**) Se $d(\Psi, U, b) \neq 0$ então existe uma solução $x_0 \in U$ de (A_1).

Apêndice B

Funcionais diferenciáveis

Neste apêndice o nosso objetivo é mostrar que os funcionais definidos no decorrer deste trabalho são de classe C^1.

Definição B.1 *Seja $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional, onde X é um espaço normado. Diremos que J é Fréchet Diferenciável em $u \in X$, se existe $L : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funcional linear contínuo verificando o seguinte*

$$\frac{|J(u+h) - J(u) - L(h)|}{\|h\|} \longrightarrow 0 \ \textit{quando} \ \ \|h\| \to 0.$$

Considere o funcional definido por

$$\begin{array}{rcl} \Phi : H^1(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \Phi(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + |u|^2)dx - \frac{\lambda_k}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 h dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)dx, \end{array}$$

mostraremos neste momento apenas que

$$\begin{array}{rcl} I : H^1(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & I(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)dx \end{array}$$

é de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

Afirmação 1: I é Fréchet diferenciável.

De fato, seja $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e para cada $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, considere

$$r(v) = I(u+v) - I(u) - L(v),$$

de onde segue

$$r(v) = I(u+v) - I(u) - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)dx. \tag{B.1}$$

Nosso objetivo é mostrar que

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{|r(v)|}{\|v\|} = 0.$$

De (B_1) temos

$$r(v) = \int_{\mathbb{R}^N} (G(x,u+v) - G(x,u))\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G'(x,u)v dx.$$

Afirmação 2: Segue do Teorema Fundamental do Cálculo,

$$G(x,u+v) - G(x,u) = \int_0^1 \frac{d}{dt} G(x,u+tv)dt.$$

De fato, considere a seguinte função

$$\begin{array}{rcl} f : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) = G(x,u+tv) \;\; com \;\; u, v \;\; e \;\; x \;\; fixados, \end{array}$$

temos

$$\int_0^1 f'(t)dt = f(1) - f(0).$$

Por outro lado

$$\int_0^1 f'(t)dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} G(x,u+tv)dt = G(x,u+v) - G(x,u),$$

mostrando a afirmação 2. Note que,

$$\frac{d}{dt} G(x,u+tv)dt = G'(x,u+tv)v$$

consequentemente

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} G(x,u+tv)dt = \int_0^1 G'(x,u+tv)vdt$$

portanto,

$$r(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_0^1 g(x,u+tv)vdt \right] dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)vdx$$

o que implica,

$$r(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_0^1 g(x,u+tv)vdt - g(x,u)v \right] dx$$

assim,

$$r(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_0^1 g(x,u+tv)vdt - \int_0^1 g(x,u)vdt \right] dx$$

de onde temos

$$r(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_0^1 (g(x,u+tv) - g(x,u))\, vdt \right] dx,$$

ou seja,

$$|r(v)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_0^1 |g(x, u + tv) - g(x, u)| \, |v| \, dt \right] dx. \tag{B.2}$$

Desde de que $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, segue das imersões continuas de Sobolev

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N); \;\; s = 2^* = \frac{2N}{N-2},$$

logo $v \in L^s(\mathbb{R}^N)$.

Afirmação 3: A função $f(x) = g(x, u + tv) - g(x, u) \in L^r(\mathbb{R}^N)$; $\forall \, t \in [0, 1]$ e $r = \frac{2N}{N+2}$.

De fato,

$$|f(x)|^r \leq (|g(x, u + tv)| + |g(x, u)|)^r \leq (Z(x) + Z(x))^r = (2Z(x))^r$$

o que implica,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^r \leq \int_{\mathbb{R}^N} (2Z(x))^r = 2^r \, \|Z(x)\|_\infty^{r-1} \int_{\mathbb{R}^N} Z(x) dx < \infty$$

de onde segue que $f \in L^r(\mathbb{R}^N)$.

Aplicando o Teorema de Fubini em $(B.2)$ temos

$$|r(v)| \leq \int_0^1 \left[\int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 |g(x, u + tv) - g(x, u)| \, |v| \, dx \right] dt,$$

usando Hölder segue

$$|r(v)| \leq \int_0^1 \|g(x, u + tv) - g(x, u)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \, \|v\|_{L^s(\mathbb{R}^N)} \, dt$$

e das imersões continuas de Sobolev tem-se

$$|r(v)| \leq C \int_0^1 \|g(x, u + tv) - g(x, u)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \, \|v\| \, dt,$$

consequentemente

$$\frac{|r(v)|}{\|v\|} \leq C \int_0^1 \|g(x, u + tv) - g(x, u)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \, dt.$$

Nosso objetivo nesse momento é mostrar que

$$\frac{|r(v_n)|}{\|v_n\|} \longrightarrow 0 \;\; quando \;\; v_n \to 0 \;\; em \;\; H^1(\mathbb{R}^N).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina

$$\begin{array}{rcccl} s_n & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & s_n(t) = \|g(x, u + tv_n) - g(x, u)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \end{array}$$

portanto,
$$\frac{|r(v_n)|}{\|v_n\|} \leq \int_0^1 s_n(t)dt$$
assim, basta mostrar que
$$\int_0^1 s_n(t)dt \longrightarrow 0 \;\; n \to \infty.$$
Afirmação 4: Para cada t fixado, temos $\|g(x, u + tv_n) - g(x, u)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0$.

De fato, desde que $v_n \to 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ segue das imersões continuas de Sobolev que

$$v_n \longrightarrow 0 \;\; em \;\; L^s(\mathbb{R}^N)$$

portanto a menos de subsequência

$$v_n(x) \longrightarrow 0 \;\; q.t.p \;\; em \;\; \mathbb{R}^N.$$

Usando o fato de que g é contínua,

$$g(x, (u + tv_n)(x)) \longrightarrow g(x, u(x)) \;\; q.t.p \;\; em \;\; \mathbb{R}^N$$

logo,
$$|g(x, u + tv_n) - g(x, u)|^r \longrightarrow 0 \;\; q.t.p \;\; em \;\; \mathbb{R}^N.$$

Por outro lado,

$$|g(x, u + tv_n) - g(x, u)|^r \leq (|g(x, u + tv_n)| + |g(x, u)|)^r$$

o que implica,
$$|g(x, u + tv_n) - g(x, u)|^r \leq (2Z(x))^r \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |g(x, u + tv_n) - g(x, u)|^r \, dx = 0,$$

consequentemente, para cada t fixado

$$s_n(t) \longrightarrow 0, \;\; \forall \;\; t \in [0, 1].$$

Mostraremos agora que $\{s_n\}$ é limitada por uma função $\eta \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Desde de que $s_n(t) = \|g(x, u + tv_n) - g(x, u)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}$, então

$$0 \leq s_n(t) \leq \|g(x, u + tv_n)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} + \|g(x, u)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}$$

o que implica,

$$s_n(t) \leq \int_{\mathbb{R}^N} |Z(x)|^r \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |Z(x)|^r \, dx = 2 \int_{\mathbb{R}^N} |Z(x)|^r \, dx = \eta \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 s_n(t) dt = 0,$$

isto é,

$$s_n \longrightarrow 0 \ \ em \ \ L^1(\mathbb{R}^N)$$

mostrando que I é Fréchet diferenciável com

$$I'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u) v dx.$$

Observação: Em verdade mostramos que dado $\{v_n\}$ com $\|v_n\| \to 0$, existe $\left\{v_{n_j}\right\} \subset \{v_n\}$ satisfazendo

$$\lim_{n_j \to \infty} \frac{\left|r(v_{n_j})\right|}{\left\|v_{n_j}\right\|} = 0. \tag{B.3}$$

Afirmação 5: O limite em (B.3) ocorre de fato para sequência $\{v_n\}$.

De fato, suponha que (B.3) não vale para $\{v_n\}$, então deve existir $\{v_{n_k}\}$ e $\delta > 0$ tal que

$$\frac{|r(v_{n_k})|}{\|v_{n_k}\|} \geq \delta \ \ \forall \ \ n_k. \tag{B.4}$$

Repetindo o argumento utilizado anteriormente trocando $\{v_n\}$ por $\{v_{n_k}\}$, iremos encontrar $\left\{v_{n_{k_j}}\right\} \subset \{v_{n_k}\}$ com

$$\lim_{n_j \to \infty} \frac{\left|r(v_{n_{k_j}})\right|}{\left\|v_{n_{k_j}}\right\|} = 0$$

o que seria um absurdo com (B.4), mostrando que a afirmação ocorre.

Afirmação 6: I' é contínua, ou seja, se $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, devemos ter

$$\|I'(u_n) - I'(u)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0 \ \ quando \ \ n \to \infty.$$

Para mostrar essa afirmação basta verificar que

$$g(x, u+v) \longrightarrow g(x,u) \ \ em \ \ L^r(\mathbb{R}^N); \ \ quando \ \ v \to 0; \ \ v \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

o que é equivalente a

$$g(x, u+v_n) \longrightarrow g(x,u) \ \ com \ \ v_n \to 0 \ \ quando \ \ n \to 0.$$

De fato, considere $\{v_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ com $v_n \to 0$ e $J_n(x) = g(x, u + v_n)$. Segue das imersões continuas de Sobolev

$$v_n \longrightarrow 0 \ \ em \ \ L^s(\mathbb{R}^N)$$

logo, a menos de subsequência

$$v_n(x) \longrightarrow u(x) \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N.$$

Sendo g contínua, temos

$$g(x, (u + v_n)(x)) \longrightarrow g(x, u(x)) \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N$$

de onde segue

$$J_n(x) \longrightarrow J(x) \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N$$

portanto,

$$|J_n(x) - J(x)|^r \longrightarrow 0 \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N.$$

Por outro lado,

$$|J_n(x) - J(x)|^r \leq (|g(x, u + v_n)| + |g(x, u)|)^r$$

o que implica,

$$|J_n(x) - J(x)|^r \leq (2Z(x))^r \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Agora, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |J_n(x) - J(x)|^r \, dx = 0,$$

ou seja,

$$g(x, u + v_n) \longrightarrow g(x, u) \ \ em \ \ L^r(\mathbb{R}^N).$$

Por definição,

$$\|I'(u + v_n) - I'(u)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)} = \sup_{\|v\|\leq 1} |\langle I'(u + v_n) - I'(u), v\rangle|$$

e observe que

$$|\langle I'(u + v_n) - I'(u), v\rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} (g(x, u + v_n) - g(x, u)) v dx \right|$$

de onde temos

$$|\langle I'(u + v_n) - I'(u), v\rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |(g(x, u + v_n) - g(x, u))| \, |v| \, dx.$$

Por Hölder segue

$$|\langle I'(u+v_n) - I'(u), v\rangle| \leq \|g(x,u+v_n) - g(x,u)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{L^s(\mathbb{R}^N)}$$

portanto, para $\|v\| \leq 1$,

$$|\langle I'(u+v_n) - I'(u), v\rangle| \leq C \|g(x,u+v_n) - g(x,u)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}$$

e então

$$\|I'(u+v_n) - I'(u)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|g(x,u+v_n) - g(x,u)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0 \ \ quando \ \ n \to \infty,$$

isto é,

$$I'(u+v_n) \longrightarrow I'(u) \ \ em \ \ H^{-1}(\mathbb{R}^N),$$

mostrando que I' é contínuo. ■

Nosso objetivo agora, é mostrar que o funcional definido no **Capítulo 4**

$$\begin{array}{rcl} \Phi : H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \Phi(u) = \int_0^T \left[\frac{\dot{u}^2}{2} - G(u) + fu\right] dx \end{array}$$

é de classe $C^1(H,\mathbb{R})$. Utilizando o mesmo raciocínio feito anteriormente para o funcional I, mostraremos apenas que

$$\begin{array}{rcl} \psi : H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \psi(u) = \int_0^T G(u)dx \end{array}$$

é de classe $C^1(H,\mathbb{R})$.

Afirmação 1: ψ é Fréchet diferenciável.

De fato, seja $u \in H([0,T])$ e para cada $v \in H([0,T])$, considere

$$r(v) = \psi(u+v) - \psi(u) - \int_0^T G'(u)vdx. \tag{B.5}$$

De maneira análoga a que usamos para I, vamos verificar que

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{|r(v)|}{\|v\|} = 0.$$

De (B.5) temos que

$$r(v) = \int_0^T (G(u+v) - G(u))\, dx - \int_0^T G'(u)vdx,$$

segue do Teorema Fundamental do Cálculo

$$G(u+v)-G(u)=\int_0^1 \frac{d}{dt}G(u+tv)dt$$

consequentemente,

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}G(u+tv)dt=\int_0^1 G'(u+tv)vdt$$

portanto,

$$r(v)=\int_0^T \left[\int_0^1 G'(u+tv)vdt\right]dx-\int_0^1 G'(u)vdx$$

o que implica,

$$r(v)=\int_0^T \left[\int_0^1 G'(u+tv)vdt-\int_0^1 G'(u)vdt\right]dx$$

de onde temos

$$r(v)=\int_0^T \left[\int_0^1 \left(G'(u+tv)-G'(u)\right)vdt\right]dx,$$

ou seja,

$$|r(v)|\leq\int_0^T \left[\int_0^1 \left|G'(u+tv)-G'(u)\right||v|\,dt\right]dx. \tag{B.6}$$

Note que das imersões continuas de Sobolev

$$H([0,T])\hookrightarrow L^2([0,T])$$

logo $v\in L^2([0,T])$.

Afirmação 2: Para cada $t\in[0,T]$ a função

$$f(x)=G'(u+tv)-G'(u)\in L^2([0,T])$$

De fato,

$$|f(x)|^2=\left(|G'(u+tv)|+|G'(u)|\right)^2\leq(M+M)^2=(2M)^2,$$

onde M verifica

$$|G'(t)|\leq M\ \ \forall\ \ t\in\mathbb{R}.$$

O que implica,

$$\int_0^T |f(x)|^2\,dx\leq\int_0^T (2M)^2\,dx=(2M)^2\,T$$

de onde segue que $f\in L^2([0,T])$. Aplicando o Teorema de Fubini em (B.6) temos

$$|r(v)|\leq\int_0^T \left[\int_0^1 \left|G'(u+tv)-G'(u)\right||v|\,dx\right]dt,$$

usando Hölder

$$|r(v)| \leq \int_0^1 \|G'(u+tv) - G'(u)\|_{L^2([0,T])} \|v\|_{L^2([0,T])} \, dt$$

e das imersões continuas de Sobolev tem-se

$$|r(v)| \leq C \int_0^1 \|G'(u+tv) - G'(u)\|_{L^2([0,T])} \|v\| \, dt,$$

de onde segue

$$\frac{|r(v)|}{\|v\|} \leq C \int_0^1 \|G'(u+tv) - G'(u)\|_{L^2([0,T])} \, dt.$$

Nosso objetivo nesse momento é mostrar que

$$\frac{|r(v_n)|}{\|v_n\|} \longrightarrow 0 \;\; quando \;\; v_n \to 0.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$\begin{array}{rcl} s_n : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & s_n(t) = \|G'(u+tv_n) - G'(u)\|_{L^2([0,T])} \end{array}$$

portanto,

$$\frac{|r(v_n)|}{\|v_n\|} \leq \int_0^1 s_n(t)dt$$

assim, basta mostrar que

$$\int_0^1 s_n(t)dt \longrightarrow 0 \;\; n \to \infty.$$

Afirmação 3: Para cada t fixado, temos

$$\|G'(u+tv_n) - G'(u)\|_{L^2([0,T])} \longrightarrow 0.$$

De fato, considere $v_n \to 0$ em $H([0,T])$ e das imersões continuas de Sobolev,

$$v_n \longrightarrow 0 \;\; em \;\; L^2([0,T])$$

portanto a menos de subsequência

$$v_n(x) \longrightarrow u(x) \;\; q.t.p \;\; em \;\; [0,T],$$

e sendo G' é contínua

$$G'((u+tv_n)(x)) \longrightarrow G'(u(x)) \;\; q.t.p \;\; em \;\; [0,T]$$

logo,

$$|G'(u+tv_n)-G'(u)|^2 \longrightarrow 0 \ \ q.t.p \ \ em \ \ [0,T].$$

Por outro lado,

$$|G'(u+tv_n)-G'(u)|^2 \leq (|G'(u+tv_n)|+|G'(u)|)^2$$

o que implica,

$$|G'(u+tv_n)-G'(u)|^2 \leq (2M)^2 \in L^1([0,T]) \ \ \forall \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |G'(u+tv_n)-G'(u)|^2 \, dx = 0$$

consequentemente, para cada t fixado

$$s_n(t) \longrightarrow 0, \ \ \forall \ \ t \in [0,1].$$

Mostraremos agora que s_n é limitada por uma função $\eta \in L^1([0,T])$. Desde de que

$$s_n(t) = \|G'(u+tv_n)-G'(u)\|_{L^2([0,T])}\,,$$

então

$$0 \leq s_n(t) \leq \|G'(u+tv_n)\|_{L^2([0,T])} + \|G'(u)\|_{L^2([0,T])}$$

o que implica,

$$s_n(t) \leq 2M \left(\int_0^T dx \right)^{\frac{1}{2}} = 2MT^{\frac{1}{2}} = \eta$$

de onde segue

$$s_n(t) \leq \eta \ \ \ \in L^1([0,T]).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 s_n(t)dt = 0,$$

isto é,

$$s_n \longrightarrow 0 \ \ em \ \ L^1([0,T])$$

mostrando que ψ é Fréchet diferenciável com

$$\psi'(u)v = \int_0^T G'(u)vdx.$$

Afirmação 4: ψ' é contínua, ou seja, se $u_n \to u$ em $H([0,T])$, devemos ter

$$\|\psi'(u_n) - \psi'(u)\|_{H'} \longrightarrow 0 \ \ quando \ \ n \to \infty.$$

Para mostrar a Afirmação 4, começamos verificando que vale o seguinte limite

$$G'(u+v) \longrightarrow G'(u) \ \ em \ \ L^2([0,T]); \ \ quando \ \ v \to 0; \ \ v \in H([0,T])$$

o que é equivalente a

$$G'(u+v_n) \longrightarrow G'(u) \ \ com \ \ v_n \to 0 \ \ quando \ \ n \to 0.$$

De fato, considere $\{v_n\} \subset H([0,T])$ com $v_n \to 0$. Das imersões contínuas de Sobolev

$$v_n \longrightarrow 0 \ \ em \ \ L^2([0,T])$$

logo, a menos de subsequência

$$v_n(x) \longrightarrow u(x) \ \ q.t.p \ \ em \ \ [0,T].$$

Sendo G' contínua, temos

$$G'((u+v_n)(x) \longrightarrow G'(u(x)) \ \ q.t.p \ \ em \ \ [0,T]$$

portanto,

$$|G'((u+v_n)(x) - G'(u(x))|^2 \longrightarrow 0 \ \ q.t.p \ \ em \ \ [0,T].$$

Por outro lado,

$$|G'((u+v_n)(x) - G'(u(x))|^2 \leq (|G'(u+v_n)| + |G'(u)|)^2$$

o que implica,

$$|G'(u+v_n)(x) - G'(u(x))|^2 \leq (2M)^2 \ \in L^1([0,T]).$$

Agora, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |G'(u+v_n)(x) - G'(u(x))|^2 \, dx = 0,$$

ou seja,

$$G'(u+v_n) \longrightarrow G'(u) \ \ em \ \ L^2([0,T]).$$

Por definição,

$$\|\psi'(u+v_n)-\psi'(u)\|_{H'([0,T])} = \sup_{\|v\|\leq 1} |\langle \psi'(u+v_n)-\psi'(u), v\rangle|$$

e observe que

$$|\langle \psi'(u+v_n)-\psi'(u), v\rangle| = \left| \int_0^T (G'(u+v_n)-G'(u))v dx \right|$$

de onde temos

$$|\langle \psi'(u+v_n)-\psi'(u), v\rangle| \leq \int_0^T |(G'(u+v_n)-G'(u))| \, |v| \, dx.$$

Por Hölder segue

$$|\langle \psi'(u+v_n)-\psi'(u), v\rangle| \leq \|G'(u+v_n)-G'(u)\|_{L^2([0,T])} \|v\|_{L^2([0,T])}$$

e das imersões continuas de Sobolev e usando o fato que $\|v\| \leq 1$ obtemos

$$|\langle \psi'(u+v_n)-\psi'(u), v\rangle| \leq C \, \|G'(u+v_n)-G'(u)\|_{L^2([0,T])} ;$$

consequentemente,

$$\|\psi'(u+v_n)-\psi'(u)\|_{H'([0,T])} \leq C \, \|G'(u+v_n)-G'(u)\|_{L^2([0,T])} \longrightarrow 0 \;\; quando \;\; n \to \infty,$$

isto é,

$$\psi'(u+v_n) \longrightarrow \psi'(u)$$

mostrando que ψ' é contínuo. ■

Apêndice C

Operadores Compactos

Neste apêndice vamos mostrar que o operador $T : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$, definido por $T(u) = \nabla\psi(u)$, o qual foi considerado no **Capítulo 2** é compacto.

Sabemos que $H^1(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert, então pelo Teorema da Representação de Riesz existe um único vetor denotado por $\nabla\Phi(u)$ tal que

$$\Phi'(u).v = (\nabla\Phi(u), v)\,, \;\; \forall \;\; v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Recorde que,

$$\begin{array}{rcl} \Phi : H^1(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \Phi(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + |u|^2)dx - \frac{\lambda_k}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 h dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)dx, \end{array}$$

então

$$\Phi'(u).v = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + uv)\, dx - \psi'(u)v; \;\; u, v \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

onde estamos considerando

$$\psi(u) = \frac{\lambda_k}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 h dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)dx.$$

Usando novamente o Teorema da Representação de Riesz para $\psi'(u)$, segue que

$$\psi'(u)v = (\nabla\psi(u), v)\,; \;\; v \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

portanto,

$$(\nabla\Phi(u), v) = (u, v) - (\nabla\psi(u), v)$$

assim,

$$(\nabla\Phi(u), v) = (u - \nabla\psi(u), v)$$

consequentemente

$$\nabla\Phi(u) = u - \nabla\psi(u).$$

Considerando $T(u) = \nabla\psi(u)$ temos

$$\nabla\Phi(u) = u - T(u).$$

Proposição C.1 *O operador* $T : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ *é compacto.*

Demonstração: Considere $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada, sendo $H^1(\mathbb{R}^N)$ reflexivo, então existe uma subsequência

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \ \ em \ \ H^1(\mathbb{R}^N).$$

Segue do **Teorema 2.4** que vale a imersão compacta de

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N, hdx)$$

assim,

$$u_{n_j} \longrightarrow u \ \ em \ \ L^2(\mathbb{R}^N, hdx). \tag{C.1}$$

Afirmação: Se $f(x,u) = \lambda_k hu + g(x,u)$, então $f(x,u_n) \longrightarrow f(x,u)$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$.
De fato, segue de (C.1) que a menos de subsequência

$$u_n(x) \longrightarrow u(x) \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N$$

e

$$|u_n(x)| \leq F \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N,$$

onde $F \in L^2(\mathbb{R}^N, hdx)$. Desde que f é contínua,

$$f(x,u_n(x)) \longrightarrow f(x,u(x)) \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N$$

consequentemente,

$$|f(x,u_n(x)) - f(x,u(x))|^2 \longrightarrow 0 \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N.$$

Por outro lado,

$$|f(x,u_n(x)) - f(x,u(x))|^2 \leq (|f(x,u_n(x))| + |f(x,u(x))|)^2$$

o que implica,

$$|f(x,u_n(x)) - f(x,u(x))|^2 \leq C\left(|f(x,u_n(x))|^2 + |f(x,u(x))|^2\right)$$

portanto

$$|f(x,u_n(x)) - f(x,u(x))|^2 \leq C_1\left(|h|^2 |u_n|^2 + |Z(x)|^2 + |h|^2 |u|^2 + |Z(x)|^2\right).$$

Agora, note que

$$|u_n(x)| \leq F \in L^2(\mathbb{R}^N, hdx)$$

logo

$$h^2 |u_n|^2 \leq h^2 F^2$$

de onde segue

$$\int_{\mathbb{R}^N} h^2 |u_n|^2 \, dx \leq \|h\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} hF^2 dx < \infty$$

o que implica,

$$h^2F^2 \ \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

assim,

$$|f(x,u_n(x)) - f(x,u(x))|^2 \leq C_2\left(h^2F^2 + h^2 |u|^2 + 2\,|Z(x)|^2\right) \ \ \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x,u_n(x)) - f(x,u(x))|^2 \, dx = 0,$$

isto é,

$$f(x,u_n(x)) \longrightarrow f(x,u(x)) \ \ em \ \ L^2(\mathbb{R}^N)$$

Daí, usando o Teorema da Representação de Riesz tem-se

$$\|T(u_n) - T(u)\| = \|\psi'(u_n) - \psi'(u)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)} = \sup_{\|v\|\leq 1} |\langle \psi'(u_n) - \psi'(u), v\rangle|$$

por outro lado,

$$|\langle \psi'(u_n) - \psi'(u), v\rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x,u_n) - f(x,u)|\,|v|\,dx$$

portanto, usando Hölder e as imersões continuas de Sobolev para $\|v\| \leq 1$, tem-se

$$|\langle \psi'(u_n) - \psi'(u), v\rangle| \leq C\,\|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

consequentemente,

$$\|T(u_n) - T(u)\| \leq C \, \|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0$$

mostrando que T é compacto. ■

Apêndice D

Resultados utilizados na dissertação

Neste apêndice enunciaremos as principais definições e teoremas utilizados no decorrer deste trabalho.

Definição D.1 *(Ver [7]) Uma família* $\mathcal{C}=(C_\lambda)_{\lambda\in L}$ *de subconjuntos de um espaço métrico* M *chama-se localmente finita quando todo ponto* $x \in M$ *possui uma vizinhaça que intercepta apenas um número finito de conjuntos* C_λ.

Em termos mais explicitos: $\mathcal{C}$ é localmente finita se, e somente se, para cada $x \in M$ existem índices $\lambda_1, ..., \lambda_n \in L$ e uma vizinhaça $V \ni x$ tais que $V \cap C_\lambda \neq \emptyset \Rightarrow \lambda \in \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$.

Definição D.2 *(Ver [7]) Um espaço métrico* M *chama-se paracompacto quando toda cobertura aberta de* M *pode ser refinada por uma cobertura aberta localmente finita.*

Definição D.3 *(Ver [7]) Seja* M *um espaço métrico. Uma partição de unidade em* M *é uma família* $(\phi_\lambda)_{\lambda\in L}$ *de funções contínuas* $\phi_\lambda : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *tais que:*
1) *Para todo* $x \in M$ *e todo* $\lambda \in L$, *tem-se* $\phi_\lambda(x) \geq 0$;
2) *A família* $\mathcal{C}=(supp(\phi_\lambda))_{\lambda\in L}$ *é localmente finita em* M;
3) *Para todo* $x \in M$ *tem-se* $\sum_{\lambda\in L} \phi_\lambda(x) = 1$.

Teorema D.4 *(Ver [7]) Todo espaço métrico separável é paracompacto.*

Teorema D.5 *(Imersões de Sobolev)(Ver [1]) As seguintes imersões são contínuas:*

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \;\; 2 \leq p < \infty, \;\; se \;\; N = 1 \;\; ou \;\; N = 2;$$

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \;\; 2 \leq p < 2^*, \;\; se \;\; N \geq 3 \;\; onde \;\; 2^* = \frac{2N}{N-2}.$$

Teorema D.6 *(Imersões de Rellich)(Ver [1]) Se Ω for limitado, vale a seguinte imersão compacta*

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \;\; 1 \leq p < 2^*.$$

Teorema D.7 *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)(Ver [2]) Seja f_n uma sequência de funções integráveis que convergem em quase toda parte para uma função mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que*

$$|f_n| \leq g \;\; \forall \;\; n \in \mathbb{N},$$

então f é integrável e

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Teorema D.8 *(Desigualdade de Hölder)(Ver [2]) Seja $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, onde $1 \leq p < +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,*

$$fg \in L^1(\Omega) \;\; e \;\;\; |fg|_{L^1(\Omega)} \leq |f|_{L^p(\Omega)} \, |g|_{L^q(\Omega)} \, .$$

Teorema D.9 *(Ver [3]) Seja (x_n) uma sequência fracamente convergente em um espaço normado, isto é, existe $x \in X$ tal que $x_n \rightharpoonup x$ em X. Então,*
(i) O limete fraco x de (x_n) é único.
(ii) Toda subsequência $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ converge fraco para x.
(iii) A sequência (x_n) é limitada.

Teorema D.10 *(Teorema de Riesz)(Ver [5]) Todo funcional linear f sobre um espaço de Hilbert, pode ser representado em termos do produto interno, isto é,*

$$f(x) = \langle z, x \rangle$$

onde z é unicamente determinado e verifica

$$\|f\| = \|z\| \, .$$

Teorema D.11 *(Ver [3]) Seja H um espaço de Banach reflexivo. Se (u_n) é uma sequência limitada em H, então existem uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $u \in X$ tais que*

$$u_{n_j} \rightharpoonup x \;\; em \;\; H.$$

Teorema D.12 *(Ver [3]) Seja H um espaço de Banach. Sejam G e L dois subspaços vetoriais fechados tais que $G + L$ é fechado. Então existe uma constante $c \geq 0$ tal que todo $z \in G + L$ admite uma decomposição da forma $z = x + y$ com $x \in G$, $y \in L$, $\|x\| \leq c \, \|z\|$ e $\|y\| \leq c \, \|z\|$.*

Corolário D.13 *A projeção*

$$\begin{array}{rcll} P & : & X & \longrightarrow & V \\ & & x & \longmapsto & P(x) = x_1 \ ; \ \ x_1 \in V \end{array}$$

é contínua, onde $X = V \oplus W$.

De fato, seja $x \in X$, $x = x_1 + x_2$ tal que $x_1 \in V$ e $x_2 \in W$. Por definiçcao $P(x) = x_1$, segue do **Teorema D.12**

$$\|P(x)\| = \|x_1\| \leq c\,\|x\|$$

mostrando que $\|P(x)\| \leq c\,\|x\|$, ou seja, a projeção P é contínua. ■

Teorema D.14 *(Ver [3]) Suponhamos que* H *um espaço de Hilbert é separável. Seja* T *um operador compacto e autoadjunto. Então* H *admite uma base Hilbertiana formada por vetores próprios de* T.

Teorema D.15 *(Teorema de Fubini)(Ver [1]) Suponhamos que* $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. *Então, para todo* $x \in \Omega_1$

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \ \ e \ \ \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

De maneira análoga, para todo $y \in \Omega_2$

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \ \ e \ \ \int_{\Omega_1} F(x,y)dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx.$$

Teorema D.16 *(Critério de Compacidade)(Ver [5]) Sejam* X *e* Y *espaços normados. Um operador linear* $T : X \longrightarrow Y$ *é compacto se, e somente se, toda sequência limitada* $(x_n) \subset X$ *tem a propriedade que a sequência* $(T(x_n)) \subset Y$ *possui uma subsequência convergente.*

Teorema D.17 *(Ver [5]) Sejam* X *e* Y *espaços vetoriais normados e* $T : X \longrightarrow Y$ *um operador linear compacto. Se* $(x_n) \subset X$ *verifica*

$$x_n \rightharpoonup x \ \ em \ \ X,$$

então

$$T(x_n) \longrightarrow T(x) \ \ em \ \ Y.$$

Lema D.18 *(Du Bois Raymond)(Ver [3]) Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega u\phi dx = 0 \;\; \forall \;\; \phi \in C_0(\Omega).$$

Então,

$$u = 0 \;\; q.t.p \;\; em \;\; \Omega.$$

Proposição D.19 *Seja* G *um espaço de Banach e* $f : [a,b] \longrightarrow G$ *uma função contínua. Então,*

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| \, dt. \tag{D.1}$$

Demonstração: Fixe $\{\varphi_n\}$ uma sequência de funções escadas com

$$\sup_{t\in[a,b]} \|\varphi_n(t) - f(t)\| \longrightarrow 0. \tag{D.2}$$

Por definição

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt,$$

ou seja,

$$\left\| \int_a^b f(t)dt - \int_a^b \varphi_n(t)dt \right\| \longrightarrow 0$$

o que implica

$$\left\| \int_a^b \varphi_n(t)dt \right\| \longrightarrow \left\| \int_a^b f(t)dt \right\|. \tag{D.3}$$

Por outro lado

$$\int_a^b \|\varphi_n(t)\| \, dt \longrightarrow \int_a^b \|f(t)\| \, dt, \tag{D.4}$$

pois

$$\left| \int_a^b \|\varphi_n(t)\| \, dt - \int_a^b \|f(t)\| \, dt \right| = \left| \int_a^b (\|\varphi_n(t)\| - \|f(t))\| \, dt \right|$$

consequentemente,

$$\left| \int_a^b \|\varphi_n(t)\| \, dt - \int_a^b \|f(t)\| \, dt \right| \leq \int_a^b |\|\varphi_n(t)\| - \|f(t)\|| \, dt$$

de onde segue

$$\left| \int_a^b \|\varphi_n(t)\| \, dt - \int_a^b \|f(t)\| \, dt \right| \leq \int_a^b \|\varphi_n(t) - f(t)\|$$

portanto de (D2) temos

$$\left| \int_a^b \|\varphi_n(t)\| \, dt - \int_a^b \|f(t)\| \, dt \right| \longrightarrow 0$$

mostrando (D4).

Mostraremos agora que (D1) ocorre para funções escadas em geral. De fato, seja

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} w_i \chi_{(a_{i-1},a_i)}(t)$$

assim,

$$\int_a^b \varphi(t)dt = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) w_i$$

o que implica

$$\left\| \int_a^b \varphi(t)dt \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) \left\| w_i \right\| = \int_a^b \left\| \varphi(t) \right\| dt,$$

pois

$$\left\| \varphi(t) \right\| = \sum_{i=1}^{n} \left\| w_i \right\| \chi_{(a_{i-1},a_i)}(t).$$

Desta forma

$$\left\| \int_a^b \varphi(t)dt \right\| \leq \int_a^b \left\| \varphi(t) \right\| dt.$$

Usando a sequência $\{\varphi_n\}$ tem-se

$$\left\| \int_a^b \varphi_n(t)dt \right\| \leq \int_a^b \left\| \varphi_n(t) \right\| dt,$$

por (D3) e (D4) obtemos

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \left\| f(t) \right\| dt.$$

Bibliografia

[1] Adams, R. A., *Sobolev spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[2] Bartle, Robert G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure,* Wiley, New York, 1995.

[3] Brézis, Haim, *Analyse fonctionelle.* 2^a ed. Masson, 1987.

[4] Costa, David Goldstein, *Tópicos em análise não-linear e Aplicações ás Equações Diferenciais.* CNPq-IMPA, 1986.

[5] Kreyszing, Erwin, *Introductory Functional Analysis with Applications.* Wiley. 1989.

[6] Lima, E.L., *Curso de Análise,* Vol. 1, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.

[7] Lima, E.L., *Espaços métricos*, Projeto Euclides, CNPq-IMPA, 1977.

[8] Lima, E.L., *Curso de Análise,* Vol. 2 (6^a edição), Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2000.

[9] Cavalcante, Luís Paulo de Lacerda, *Existência de soluções positivas para uma classe de problemas elípticas não lineares em domínios não limitados.* Dissertação de Mestrado. UFCG, 2004.

[10] Lang, serg, *Analysis II.* Addison-Wesley, 1969.

[11] Iório Jr., Rafael José e Iório, Valéria, *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*, CNPq-IMPA, Rio de Janeiro, 1988.

[12] Sotomayor, Jorge, *Lições de equações diferenciais ordinárias.* Projeto Euclides IMPA, 1979.

[13] Willem, Michel, *Lectures on Critical Point Theory*, Michel Willem, 1983.

[14] Willem, Michel, *Minimax Theorems.* Birkhäuser, 1996.