Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Teoria do Grau e Aplicações

por

Orlando Batista de Almeida

sob orientação do

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB
Maio/2006

Teoria do Grau e Aplicações

por

Orlando Batista de Almeida

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Amauri da Silva Barros - UFAL

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes - UFCG

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Maio/2006

Resumo

Nesta dissertação, seguindo o trabalho do **Berestycki** [7] e idéias desenvolvidas por **Alves & de Figueiredo** [3] e **Alves, Corrêa & Gonçalves** [4], estudamos a Teoria do Grau de **Brouwer e Leray & Schauder,** bem como o **Método de Galerkin** para obter solução de alguns problemas elípticos.

Abstract

In this of dissertation, motivated by work of **Berestycki** [7] and ideas conceived by **Alves & from Figueiredo** [3] and **Alves, Corrêa & Gonçalves** [4], we styding the theory of Degree from **Brouwer and Leray & Schauder**, well how the **Method from Galerkin** to obtain solution of some ellíptic problems.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por toda benção e glória, saúde, força, coragem e perseverança para que eu podesse concluir este trabalho.

Ao meu querido professor e amigo Claudianor, um profissional e um ser humano que dispensa comentários, pela atenção, compreensão, paciência, que teve comigo nesta difícil jornada.

Ao professor Marco Aurélio Souto, ser humano maravilhoso, que foi responsável pela minha vinda para o mestrado da UFCG.

Aos professores Aparecido Jesuíno, Bráulio Maia, Claudianor, Daniel Cordeiro e Marco Aurélio pelas disciplinas que lecionaram e, que com seus conhecimentos contribuíram de forma decisiva para a minha formação.

A todos que fazem parte do Departamento de Matemática e Estatística da UFCG, pelo acolhimento.

Ao meu irmão e amigo Otacílio Almeida pelo incentivo e apoio.

Aos queridos e inesquecíveis AMIGOS, Aldo Trajano, Moisés Dantas, José Fernando, Cícero, Luiz Paulo, Tatiana, Jesualdo e JESUS pelo companheirismo, motivação, paciência e humildade e, que indiretamente contribuiram para a elaboração deste trabalho.

Aos professores: Dr. Amauri da Silva Barros e Dr. José de Arimatéia Fernandes por si mostrarem prestativos e disponíveis para fazerem à avaliação deste meu trabalho de dissertação, fazendo parte da Banca Examinadora.

A toda minha família, em especial as minhas filhas: Michaella, Sabrina, O‘hana e O‘hara pela ausência e falta de atenção nos momentos que mais precisaram de mim, e que mesmo assim me deram muita força e incentivo para que pudesse concluir este curso de pós-graduação e, dizer que foi nelas que encontrei força e inspiração.

Dedicatória

A minha mãe Edite, a minha esposa, minhas filhas: Michaella, Sabrina, O'hana e O'hara e aos meus irmãos.

Notações:

(1) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produto interno.

(2) $[\cdot]$ referência bibliográfica.

(3) $(\cdot)$ referência citada no texto.

(4) $\rho\{A, B\}$ distância entre os conjuntos A e B.

(5) $supt\varphi$ suporte da função φ.

(6) Se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é uma função, usamos ao longo da dissertação as seguintes notações:

 (i) $|f(x)|$ é a norma usual do $\mathbb{R}^N$ para $f(x)$.

 (ii) $|x|$ é a norma usual do $\mathbb{R}^N$ para x.

 (iii) $|x|$ é o valor absoluto de x, se $n = 1$.

 (iv) $|f'(x)|$ é a norma da transformação linear de $f'(x)$, se f for diferenciável.

(7) Se $f : X \to Y$ é uma função com X *e* Y espaços de Banach, usamos as mesmas notações do item (6) usando-se $\| \cdot \|$ ao invés de $| \cdot |$.

(8) $div\varphi$ é o divergente da aplicação φ.

(9) $diamA$ é o diâmetro do conjunto A.

(10) $m(A)$ é a medida do conjunto A.

(11) $m^*(A)$ é a medida exterior do conjunto A.

(12) $J_f(x) = det[f'(x)]$ é o valor do determinante jacobiano de f aplicado no ponto x.

(13) $\overline{B}_r(x)$ é a bola fechada de centro x e raio r.

(14) $sgnf$ é o sinal da função f

Conteúdo

Introdução

Muitos problemas em Análise Funcional não-linear podem ser reduzidos ao estudo de encontrar soluções para equações do tipo:

$$\varphi(x) = b \tag{1}$$

sobre um espaço de Banach adequado.

A teoria do grau tem sido desenvolvida como um método utilizado para estudar o conjunto das soluções da equação (1), obtendo infomações sobre a existência, multiplicidade e a natureza destas soluções.

Este tipo de abordagem tem sido usada principalmente em Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e Equações Diferenciais Parciais (EDP).

Neste trabalho , temos por objetivo apresentar a Teoria do Grau, que será estudada em duas etapas: Na primeira será feita o estudo do Grau Topológico de Brouwer que vale em espaços vetoriais de dimensão finita e na segunda etapa será estudado o Grau de Leray & Schauder que vale em espaços vetoriais de dimensão infinita, que teve por base o trabalho da Tese de Doutorado de Henry Berestycki [7] de 1975, cujo objeto de estudo foi Métodos Topológicos e Problemas Auxiliares Limitados. Uma vez mostrada a existência do grau topológico usamos o mesmo para obter soluções para duas classes de problemas elípticos. O método aplicado para obter as soluções dos problemas está centralizado no **Método de Galerkin** e no teorema do **Ponto Fixo de Schaeffer.**

No Capítulo 1, seguindo o trabalho de Berestycki [7], construímos o Grau Topológico de Brouwer, definindo o mesmo para o caso Regular. Depois estudamos o grau para as funções contínuas, e em seguida estudamos suas propriedades e as principais consequências dessas propriedades. Definimos o Grau de Leray & Schauder, trabalhamos as suas propriedades e as suas principais consequências.

No capítulo 2, norteado ainda pelo trabalho de Berestycki [7], definimos alguns espaços de Schauder com suas respectivas normas e apresentamos alguns resultados devido a Schauder. Usando a teoria do Grau de Leray & Schauder demonstramos o Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer, o qual juntamente com os resultados de Schauder são usados para mostrar a existência de solução para a seguinte classe de problemas elípticos quaselineares

$$\begin{cases} Lu &= F(x,u), \quad \Omega \\ u &= 0, \qquad\quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{P}$$

onde, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado, o operador L diferencial é dado por

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)u_{x_i}(x) + c(x)u(x)$$

com $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, sendo uma função de classe $C^2(\overline{\Omega})$, $N \geq 1$ e $F \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ com $\alpha \in (0,1)$.

No capítulo 3, seguindo idéias desenvolvidas por **Alves & de Figueiredo** [3] (2003) e **Alves, Corrêa & Gonçalves** [4] (2005), usamos o grau de Brouwer para demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e uma consequência do mesmo, o qual chamaremos de Lema Fundamental, que é utilizado para mostrar a existência de solução positiva para a seguinte classe de problemas elípticos singulares

$$\begin{cases} -\Delta u &= \dfrac{1}{u^\gamma}, \quad \Omega \\ u &> 0, \quad \Omega \\ u &= 0, \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado, $0 < \gamma < 1$, $N \geq 2$. O método utilizado para obter tal solução é conhecido como **Método de Galerkin,** que é uma técnica de resolução de alguns problemas não lineares, que consiste em aproximar o espaço $H_0^1(\Omega)$ por uma sequência de subespaço de dimensão finita. Neste capítulo, usamos um resultado de Regularidade devido a Agmon [1], e também destacamos um importante resultado devido a Ambrosetti, Brézis e Cerami [5], que é um Teorema envolvendo Subsolução e Supersolução, o qual estabelece a unicidade de solução para uma classe de problemas singulares que inclui o problema (P_1).

No apêndice **A,** recordamos algumas definições e enunciamos os principais teoremas de análise no $\mathbb{R}^N$ utilizados neste trabalho.

No apêndice **B,** apresentamos alguns resultados envolvendo os espaços de Sobolev e Teoria da Medida e Integração que foram usados nesta dissertação.

Capítulo 1

O Grau Topológico

Nosso objetivo neste capítulo é definir e demonstrar os principais resultados sobre a teoria do grau de **Brouwer** e do grau de **Leray & Schauder.**

1.1 O Grau Topológico de Brouwer

Nesta seção iremos mostrar como é construído o grau de Brouwer. Começamos o nosso estudo com o seguinte resultado.

Teorema 1.1 *(Teorema de Sard) Seja* Λ *um aberto do* $\mathbb{R}^N$, f *uma função de classe* $\mathcal{C}^1(\Lambda, \mathbb{R}^N)$ *e* $S = \{x \in \Lambda; J_f(x) = 0\}$. *Então,* $f(S)$ *é um conjunto de medida nula.*

Demonstração: Seja $\mathcal{C}$ um cubo fechado contido em Λ de lado a. Vamos dividir $\mathcal{C}$ em K^N subcubos, com K um número natural.
Temos que a aplicação f' é uniformemente contínua em $\mathcal{C}$, pois f' é contínua e está definida no compacto $\mathcal{C}$ (*ver Teorema* A.9), então dado $\epsilon > 0$, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\forall x, y \in \ \mathcal{C} \ \ teremos \ \ |x - y| < \ \alpha \ \Rightarrow \ |f'(x) - f'(y)| < \epsilon. \tag{1.1}$$

Fixe K de maneira que os subcubos $\widetilde{C} \subset \mathcal{C}$ tenham diâmetro menor que α. Desde que, o diâmetro de $\widetilde{C}$ é dado por $diam(\widetilde{C}) = \dfrac{a}{K}\sqrt{N}$, então $\dfrac{a}{K}\sqrt{N} < \alpha$. Além disso, f é lipschitziana em $\mathcal{C}$ com

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \forall x, y \in \mathcal{C}, \ com \ M = \max_{z \in \mathcal{C}} |f'(z)|.$$

Dado $x \in \mathcal{C} \cap S$, existe $\widetilde{C} \subset \mathcal{C}$ tal que $x \in \widetilde{C} \cap S$, então $\forall y \in \widetilde{C}$ tem-se

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Sendo $diam(\widetilde{C}) = \sup\{|x-y|; x,y \in \widetilde{C}\}$ temos $|x-y| \leq diam(\widetilde{C})$ e assim

$$|f(x) - f(y)| \leq M diam(\widetilde{C}).$$

Portanto,

$$f(y) \in \overline{\mathcal{B}}(f(x), M diam(\widetilde{C})),$$

onde $\mathcal{B}(f(x), M diam(\widetilde{C}))$ é a bola fechada de centro $f(x)$ e raio $M diam(\widetilde{C})$. Desde que, $y \in \widetilde{C}$ é qualquer concluímos

$$f(\widetilde{C}) \subset \overline{\mathcal{B}}(f(x), M diam(\widetilde{C})).$$

Por outro lado, pelo teorema $A.6$ temos

$$f(y) - f(x) - f'(x)(y-x) = \int_0^1 [f'(x + t(y-x)) - f'(x)](y-x)dt.$$

Daí, segue

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y-x)| = \Big| \int_0^1 [f'(x + t(y-x)) - f'(x)](y-x)dt \Big|$$

o que implica

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y-x)| \leq \int_0^1 |[f'(x + t(y-x)) - f'(x)](y-x)|dt. \tag{1.2}$$

Sendo

$$|f'(x)| = \sup_{|v| \neq 0} \frac{|f'(x)v|}{|v|}$$

obtemos

$$\frac{|f'(x)v|}{|v|} \leq |f'(x)| \text{ e portanto } |f'(x)v| \leq |f'(x)||v|.$$

Assim, segue de (1.2)

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y-x)| \leq \int_0^1 |[f'(x + t(y-x)) - f'(x)]||y-x|dt.$$

Desde que,

$$|x + t(y-x) - x| = |t(y-x)| = |t||y-x| < |y-x| < \alpha,$$

pois $t \in [0,1]$, segue de (1.1)

$$|f'(x + t(y-x)) - f'(x)| < \epsilon.$$

Consequentemente

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y-x)| \leq \epsilon |y-x|,$$

o que implica

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y-x)| \leq \epsilon \, diam(\widetilde{C}). \tag{1.3}$$

Desde que, $x \in \mathcal{C} \cap S$ tem-se que $J_f(x) = 0$. Logo $f'(x)$ não é inversível e podemos afirmar que $f'(x)(\mathbb{R}^N) \subset H$, onde H é um hiperplano do $\mathbb{R}^N$.

Por (1.3) temos

$$|f(y) - (f(x) + f'(x)(y-x))| \leq \epsilon \, diam(\widetilde{C}), \;\; onde \;\; f'(x)(y-x) \in H$$

e sendo $\rho(f(y), f(x) + H)$ a distância entre o ponto $f(y)$ e o conjunto $f(x)+H$, por definição da função distância temos

$$\rho(f(y), f(x) + H) = inf\{|f(y) - (f(x) + h)|; h \in H\}.$$

Assim, se considerarmos $h = f'(x)(y-x)$, obtemos

$$\rho(f(y), f(x) + h) \leq |f(y) - (f(x) + f'(x)(y-x))|, \forall \; h \in H$$

e com isso

$$\rho(f(y), f(x) + H) \leq \epsilon \, diam(\widetilde{C}).$$

Desta forma, $f(\widetilde{C})$ está contido num paralelepípedo P de centro $f(x)$ e volume

$$V(P) = 2\epsilon \, diam(\widetilde{C})(2M diam(\widetilde{C}))^{N-1}.$$

Sendo assim, a medida exterior do conjunto $f(\widetilde{C})$ é dada por

$$m^*(f(\widetilde{C})) \leq 2\epsilon \, diam(\widetilde{C})(2M diam(\widetilde{C}))^{N-1}$$

implicando

$$m^*(f(\widetilde{C})) \leq 2^N M^{N-1} diam(\widetilde{C})^N \, \epsilon.$$

Logo

$$m^*(f(\widetilde{C})) \leq 2^N M^{N-1} (\frac{a}{K}\sqrt{N})^N \, \epsilon.$$

Agora, veja que

$$m^*(f(\mathcal{C} \cap S)) \leq \sum_{\widetilde{C} \cap S \neq \emptyset} m^*(f(\widetilde{C} \cap S))$$

e consequentemente

$$m^*(f(\mathcal{C} \cap S)) \leq \sum_{\widetilde{C} \cap S \neq \emptyset} m^*(f(\widetilde{C})),$$

donde obtemos

$$m^*(f(\mathcal{C} \cap S)) \leq 2^N M^{N-1} N^{\frac{N}{2}} (\frac{a}{K})^N . \epsilon . K^N.$$

Portanto

$$m^*(f(\mathcal{C} \cap S)) \leq 2^N M^{N-1} N^{\frac{N}{2}} (a)^N \epsilon.$$

Considerando $2^N M^{N-1} N^{\frac{N}{2}} (a)^N = \sigma$, temos que $m^*(f(C \cap S)) \leq \sigma\epsilon$.

Fazendo $\epsilon \to 0$, concluímos

$$m^*(f(C \cap S)) = 0.$$

Agora, considere uma família de cubos abertos $\{C_\lambda\}$ verificando

$$S \subset \bigcup_{S \cap C_\lambda \neq \emptyset} C_\lambda, \ \ \textit{com} \ C_\lambda \ \textit{aberto} \ \textit{e} \ C_\lambda \subset \Lambda.$$

Segue do teorema de Lindëlof que existe $\{C_j\}_{j \in N} \subset \{C_\lambda\}$, tal que

$$S \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (\overline{C}_j \cap S).$$

Daí, segue

$$f(S) \subset f(\bigcup_{j=1}^{\infty} (\overline{C}_j \cap S)),$$

implicando

$$f(S) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} f(\overline{C}_j \cap S).$$

Logo

$$m^*(f(S)) \leq m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} f(\overline{C}_j \cap S))$$

e consequentemente

$$0 \leq m^*(f(S)) \leq \sum_{\overline{C_j} \cap S \neq \emptyset} m^*(f(\overline{C}_j \cap S)) = 0,$$

donde concluímos

$$m^*(f(S)) = 0.$$

Conforme resultado da teoria da medida (ver Teorema $B.3$) temos que $f(S)$ é mensurável com $m(f(S)) = m^*(f(S)) = 0$. ■

1.1.1 Definição do Grau para o Caso Regular

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ o espaço das funções k-vezes continuamente diferenciáveis em $\overline{\Omega}$, isto é, o espaço das funções contínuas em $\overline{\Omega}$ que possuem todas as derivadas até ordem k, sendo restrições de funções contínuas definidas em $\overline{\Omega}$.

Para o espaço $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ vamos considerar a seguinte norma

$$\|\varphi\|_k = \max_{0 \leq j \leq k} \sup_{x \in \Omega} \|D^{(j)}\varphi(x)\|.$$

Sejam $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $S = \{x \in \Omega; J_\varphi(x) = 0\}$, onde J_φ representa a matriz jacobiana de φ. Seja $b \in \mathbb{R}^N$ com $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$.

Se $x \in \varphi^{-1}(\{b\})$ temos que $J_\varphi(x) \neq 0$, então pelo Teorema da Aplicação Inversa φ é um difeomorfismo de uma vizinhança $\mathbf{U}$ de x sobre uma vizinhança $\mathbf{V}$ de b, isto é, $\varphi_{|\mathbf{U}} : \mathbf{U} \to \varphi(\mathbf{U}) = \mathbf{V}$ é um difeomorfismo.

Afirmação: O conjunto $\varphi^{-1}(\{b\})$ é finito.

De fato, $\varphi^{-1}(\{b\})$ é um fechado em $\overline{\Omega}$, consequentemente $\varphi^{-1}(\{b\})$ é um fechado e limitado em $\mathbb{R}^N$, pois $\varphi^{-1}(\{b\}) \subset \overline{\Omega}$. Portanto, $\varphi^{-1}(\{b\})$ é um compacto.

Para cada $x \in \varphi^{-1}(\{b\})$, considere a bola $B_{r_x}(x) \subset \mathbf{U}_x$.

Assim

$$\varphi^{-1}(\{b\}) \subseteq \bigcup_{x_j \in \varphi^{-1}(\{b\})} B_{r_j}(x_j),$$

e desde que $\{B_{r_j}(x_j)\}$ é uma cobertura por abertos para o compacto $\varphi^{-1}(\{b\})$, pelo Teorema de Borel-Lebesgue podemos extrair uma subcobertura finita de maneira que

$$\varphi^{-1}(\{b\}) \subset \bigcup_{j=1}^{k} B_{r_j}(x_j),$$

mostrando que $\varphi^{-1}(\{b\})$ é finito, ou seja, $\varphi^{-1}(\{b\}) = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_k\}$ com $J_\varphi(\xi_i) \neq 0$ para todo $i \in \{1, 2, 3, \ldots, k\}$.

Definição 1.2 *Sejam $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. Definimos o grau topológico de Brouwer da aplicação φ em relação a Ω no ponto b, como sendo o número inteiro*

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{\xi_i \in \varphi^{-1}(\{b\})} sgn(J_\varphi(\xi_i))$$

onde sgn é a função sinal que é definida por

$$sgn\ (t) = \begin{cases} 1, & se \quad t > 0 \\ -1, & se \quad t < 0. \end{cases}$$

Exemplo 1.1 *Considere a aplicação* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, *definida por* $\varphi(x) = sen\, x$ *com* $\Omega = (0, \dfrac{5\pi}{2})$ *e* $b = \dfrac{\pi}{4}$. *Nosso objetivo é calcular o grau topológico de Brouwer de* φ *com relação a* Ω *no ponto* b, *ou seja* $d(\varphi, \Omega, b)$.
Resolução:
Devemos primeiramente verificar se $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$, *para que o* $d\Big(senx, (0, \dfrac{5\pi}{2}), \dfrac{\pi}{4}\Big)$ *esteja bem definido. Veja que:*
$\partial\Omega = \{0, \dfrac{5\pi}{2}\}$, $\varphi(S) = \{x \in (0, \dfrac{5\pi}{2}); cos\, x = 0\} = \{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\}$, $\varphi(\partial\Omega) = \{0, 1\}$, $\varphi(S) = \{-1, 1\}$, *logo* $\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S) = \{-1, 0, 1\}$.
Com isso concluimos que $\dfrac{\pi}{4} \notin \{-1, 0, 1\}$.
Assim,

$$\varphi^{-1}(\{\frac{\pi}{4}\}) = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}.$$

Por definição,

$$d\Big(senx, (0, \frac{5\pi}{2}), \frac{\pi}{4}\Big) = \sum_{\xi_i \in \varphi^{-1}(\{\frac{\pi}{4}\})} sgn(J_\varphi(\xi_i))$$

logo,

$$d\Big(senx, (0, \frac{5\pi}{2}), \frac{\pi}{4}\Big) = sgn(\varphi'(\xi_1)) + sgn(\varphi'(\xi_2)) + sgn(\varphi'(\xi_3))$$

consequentemente,

$$d\Big(senx, (0, \frac{5\pi}{2}), \frac{\pi}{4}\Big) = 1 + (-1) + 1.$$

Portanto,

$$d\Big(senx, (0, \frac{5\pi}{2}), \frac{\pi}{4}\Big) = 1.$$

Observação 1.1 *Uma primeira observação que destacamos a partir da definição* 1.2 *é a seguinte igualdade*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi - b, \Omega, 0).$$

Com efeito, note primeiramente que

$$\varphi(x) = b \Leftrightarrow \varphi(x) - b = 0.$$

Considerando $\varphi - b = \psi$ temos que $\psi^{-1}(\{0\}) = \varphi^{-1}(\{b\})$. Desta forma,

$$d(\varphi - b, \Omega, 0) = d(\psi, \Omega, 0),$$

que implica

$$d(\psi, \Omega, 0) = \sum_{\eta_i \in \psi^{-1}(\{0\})} sgn[J_\psi(\eta_i)].$$

Desde que, a quantidade de parcelas dos dois somatórios

$$\sum_{\eta_i \in \psi^{-1}(\{0\})} sgn[J_\psi(\eta_i)] \;\; e \;\; \sum_{\xi_i \in \varphi^{-1}(\{b\})} sgn[J_\varphi(\xi_i)]$$

são iguais e

$$\psi(\eta_i) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\eta_i) - b = 0 \Leftrightarrow \varphi(\eta_i) = b$$

concluímos que $\xi_i = \eta_i$. Assim,

$$d(\psi, \Omega, 0) = \sum_{\xi_i \in \varphi^{-1}(\{b\})} sgn[J_\varphi(\xi_i)].$$

Portanto,

$$d(\psi, \Omega, 0) = d(\varphi, \Omega, b).$$

1.1.2 Cálculo do Grau por Integração

Considerando $\varphi^{-1}(\{b\}) = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_k\}$ temos $J_\varphi(\xi_i) \neq 0$ para todo $i \in \{1, 2, 3, ..., k\}$. Logo pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança $\mathbf{U}_i$ de ξ_i e $\varphi(\mathbf{U}_i)$ de b tal que $\varphi_{|\mathbf{U}_i} : \mathbf{U}_i \to \varphi(\mathbf{U}_i)$ com $i \in \{1, 2, 3, ..., k\}$ é um difeomorfismo. Além disso, existe $\epsilon > 0$ e vizinhanças $B_\epsilon(b)$ de b e $\mathbf{U}_i$ de ξ_i com $i \in \{1, 2, 3, ..., k\}$ tais que

$$\varphi_{|\mathbf{U}_i} : \mathbf{U}_i \to B_\epsilon(b)$$

é um difeomorfismo.

Para todo $\epsilon > 0$, existe uma aplicação $J_\epsilon \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ tal que $suptJ_\epsilon \subset B_\epsilon(b)$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} J_\epsilon(x)dx = 1$, onde $suptJ_\epsilon$ é o suporte da função J_ϵ, que é definido por

$$suptJ_\epsilon = \overline{\{x \in \mathbb{R}^N; J_\epsilon(x) \neq 0\}}.$$

Agora, vamos definir

$$I_\epsilon = \int_\Omega J_\epsilon(\varphi(x))J_\varphi(x)dx.$$

Note que

$$I_\epsilon = \int_{\{x \in \Omega; |\varphi(x) - b| < \epsilon\}} J_\epsilon(\varphi(x))J_\varphi(x)dx.$$

Fixando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, considere as vizinhanças $\mathbf{U}_i$ de ξ_i, desta forma I_ϵ é dado por

$$I_\epsilon = \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbf{U}_i} J_\epsilon(\varphi_{|\mathbf{U}_i}(x)) J_{\varphi_{|\mathbf{U}_i}}(x)dx,$$

onde $\varphi_i = \varphi_{|\mathbf{U}_i}$ com $1 \leq i \leq k$. Sendo

$$\varphi(\mathbf{U}_i) = B_\epsilon(b) \text{ temos } \quad \text{que } \mathbf{U}_i = \varphi^{-1}(B_\epsilon(b)).$$

Assim

$$I_\epsilon = \sum_{i=1}^{k} \int_{\varphi_i{}^{-1}(B_\epsilon(b))} J_\epsilon(\varphi_i(x)) J_{\varphi_i}(x)dx.$$

Usando o Teorema de Mudança de Variávéis temos

$$I_\epsilon = \sum_{i=1}^{k} \int_{B_\epsilon(b)} J_\epsilon(\varphi_i(\varphi_i^{-1}(x))) J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x)) |J_{\varphi_i^{-1}}(x)| dx,$$

ou seja,

$$I_\epsilon = \sum_{i=1}^{k} \int_{B_\epsilon(b)} J_\epsilon(x) J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x)) |J_{\varphi_i^{-1}}(x)| dx. \tag{1.4}$$

Desde que

$$\varphi_i(\varphi_i^{-1}(x)) = x$$

temos

$$|J_{\varphi_i^{-1}}(x)| = \frac{1}{|J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))|}. \tag{1.5}$$

Usando a igualdade (1.5) em (1.4) obtemos

$$I_\epsilon = \sum_{i=1}^{k} \int_{B_\epsilon(b)} J_\epsilon(x) J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x)) \frac{1}{|J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))|} dx.$$

Observe que

$$\frac{J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))}{|J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))|} = \begin{cases} 1 & , se \quad J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x)) > 0 \\ -1 & , se \quad J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x)) < 0 \end{cases}$$

e portanto

$$\frac{J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))}{|J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))|} = sgn[J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))].$$

Consequentemente,

$$I_\epsilon = \sum_{i=1}^{k} \int_{B_\epsilon(b)} J_\epsilon(x) sgn[J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))] dx.$$

Desde que,

$$sgn\Big[J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))\Big] = sgn J_{\varphi}(\xi_i), \;\; \forall\, x \in B_{\epsilon}(b),$$

segue-se que

$$I_{\epsilon} = \sum_{i=1}^{k} \int_{B_{\epsilon}(b)} J_{\epsilon}(x) sgn[J_{\varphi}(\xi_i)]dx.$$

Assim,

$$I_{\epsilon} = \sum_{i=1}^{k} sgn[J_{\varphi}(\xi_i)] \int_{B_{\epsilon}(b)} J_{\epsilon}(x)dx.$$

Sendo $suptJ_{\epsilon} \subset B_{\epsilon}(b)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} J_{\epsilon}(x)dx = 1$$

temos

$$I_{\epsilon} = \sum_{i=1}^{k} sgn[J_{\varphi}(\xi_i)]$$

donde podemos concluir que

$$I_{\epsilon} = d(\varphi, \Omega, b).$$

O número I_{ϵ} é denominado a Forma Integral do Grau Topológico de Brouwer de φ com relação a Ω no ponto b.

Observação 1.2 *Podemos concluir a partir do que já foi visto sobre a teoria do grau que, se $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_0) = b$.*

De fato, se $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ temos

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{\xi_i \in \varphi^{-1}(\{b\})} sgn(J_{\varphi}(\xi_i)) = \int_{\{x\in\Omega; |\varphi(x)-b|<\epsilon\}} J_{\epsilon}(\varphi(x))J_{\varphi}(x)dx.$$

Sendo $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, por hipótese, temos

$$\int_{\{x\in\Omega; |\varphi(x)-b|<\epsilon\}} J_{\epsilon}(\varphi(x))J_{\varphi}(x)dx \neq 0$$

implicando que $\{x \in \Omega; |\varphi(x) - b| < \epsilon\} \neq \emptyset$. Consequentemente, existe $x_{\epsilon} \in \Omega$ tal que $|\varphi(x_{\epsilon}) - b| < \epsilon$. Desde que $\overline{\Omega}$ seja limitado, fazendo $\epsilon \to 0$ temos que, $\varphi(x_0) - b = 0$ concluimos que $\varphi(x_0) = b$.

Lema 1.3 *Seja $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. Então, existe uma vizinhança* **U** *de φ pela topologia de $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que $\forall\, \psi \in$* **U**, *temos que:*
(i) $b \notin \psi(\partial\Omega)$,
(ii) $x \in \psi^{-1}(b) \Rightarrow J_{\varphi}(x) \neq 0$,
(iii) $d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b)$.

Demonstração: Prova do item (i).

Seja $\epsilon_1 = \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\} > 0$ e vamos considerar a seguinte vizinhança de φ

$$\|\psi - \varphi\|_{C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)} \leq \frac{\epsilon_1}{2}. \tag{1.6}$$

Afirmação: $b \notin \psi(\partial\Omega)$.

De fato, segue de (1.6)

$$|\psi(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\epsilon_1}{2}, \ \ \forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{1.7}$$

Assim, não existe $x_0 \in \partial\Omega$ com $\psi(x_0) = b$, pois caso contrário, em (1.7) teríamos

$$|\psi(x_0) - \varphi(x_0)| \leq \frac{\epsilon_1}{2}, \ \ ou \ \ seja, \ \ |b - \varphi(x_0)| \leq \frac{\epsilon_1}{2}$$

implicando que

$$\epsilon_1 = \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\} \leq \frac{\epsilon_1}{2},$$

que é um absurdo.

Prova do item (ii).

Considere $\varphi^{-1}(\{b\}) = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k\}$ e as vizinhanças $\mathbf{U_1}, \mathbf{U_2}, \mathbf{U_3}, \dots, \mathbf{U_k}$ e $\epsilon > 0$, tais que

$$\varphi_i = \varphi\Big|_{\mathbf{U_i}} : \mathbf{U_i} \ \rightarrow \ B_\epsilon(b)$$

é um difeomorfismo e vamos supor que

$$|J_{\varphi_i}(x)| > \eta > 0, \ \forall\, x \in \ \mathbf{U_i}, \ i = 1, 2, 3, \dots, k.$$

Usando o fato que $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, dado

$$\epsilon^* = \frac{1}{2M}, \ \text{onde } 0 < M = \max\{|\varphi'(\xi_i)^{-1}|;\, i = 1, 2, 3, \dots, k\},$$

existe $r > 0$ tal que

$$\forall\ x \in \ B_r(\xi_i), \ i = 1, 2, 3, \dots, k \ \text{ tem-se } |\varphi'(x) - \varphi'(\xi_i)| < \epsilon^* = \frac{1}{2M}.$$

Logo,

$$|\varphi'(\xi_i)^{-1}[\varphi'(x) - \varphi'(\xi_i)]| \leq |\varphi'(\xi_i)^{-1}||\varphi'(x) - \varphi'(\xi_i)|$$

e daí temos

$$|\varphi'(\xi_i)^{-1}[\varphi'(x) - \varphi'(\xi_i)]| < M \cdot \frac{1}{2M} = \frac{1}{2}, \ \forall\ x \in \ B_r(\xi_i), \ i = 1, 2, 3, \dots, k.$$

O r é escolhido de tal maneira que

$$sgnJ_\varphi(x) = sgnJ_\varphi(\xi_i),\ \forall\ x \in\ B_r(\xi_i),\ i = 1, 2, 3, \ldots, k.$$

Considere $\mathbb{D} = \overline{\Omega} \backslash \bigcup_{i=1}^{k} B_r(\xi_i)$. Note que $\mathbb{D}$ é um compacto, pois $\mathbb{D}$ é um fechado e limitado, e além disso, $b \notin \mathbb{D}$.

Considere $\epsilon_2 = \rho\{b, \varphi(\mathbb{D})\} > 0$ então, para $\forall\, \psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ satisfazendo

$$\|\psi - \varphi\|_{C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} \leq \frac{\epsilon_2}{2}$$

devemos ter $b \notin \psi(\mathbb{D})$. Assim, as soluções da equação $\psi(x) = b$, caso existam, devem pertencer ao conjunto $\bigcup_{i=1}^{k} B_r(\xi_i)$.

A aplicação $\varphi' : \overline{\Omega} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ é contínua e com isso, $\varphi'(\overline{\Omega})$ é um compacto em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Por outro lado, a aplicação $det : \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ é contínua, donde podemos concluir que a mesma é uniformemente contínua sobre uma vizinhança compacta K de $\varphi'(\overline{\Omega})$. Assim, existe $\epsilon_3 > 0$ tal que

$$|X - Y| < \epsilon_3 \Rightarrow |detX - detY| < \eta,\ \forall\ X, Y \in\ K.$$

Se $|X - Y| < \epsilon_3$, para algum $X \in \varphi'(\overline{\Omega})$ tem-se que $Y \in K$. Considerando agora a vizinhança de φ em $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ dada por

$$\|\psi - \varphi\|_{C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} \leq \frac{\epsilon_3}{2} \text{ com } \psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$$

temos que

$$\forall\ x \in\ \Omega,\ \psi'(x) \in K\ \ e\ \ |J_\psi(x) - J_\varphi(x)| < \eta.$$

Considerando

$$\mathbf{U_1} = \{\psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N); \|\psi - \varphi\|_{C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} \leq \frac{\epsilon_4}{2}\}$$

onde, $\epsilon_4 = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ obtemos

$$J_\psi(x) \neq 0,\ \forall\ \psi \in \mathbf{U_1}\ \ e\ \ \forall\ x \in\ \bigcup_{i=1}^{k} B_r(\xi_i).$$

De fato, note que

$$|J_\varphi(x)| - |J_\psi(x)| \leq |J_\varphi(x) - J_\psi(x)| < \eta$$

implicando que

$$|J_\psi(x)| > |J_\varphi(x)| - \eta, \ \ \forall \ x \in \bigcup_{i=1}^{k} B_r(\xi_i).$$

Mostrando que

$$J_\psi(x) \neq 0, \ \forall \ \psi \in \mathbf{U_1} \ \ e \ \ \forall \ x \in \bigcup_{i=1}^{k} B_r(\xi_i),$$

provando assim, o item (ii).

Prova do item (iii).

Para demonstrar que

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b), \ \ \forall \ \psi \ \in \ \mathbf{U_1},$$

devemos mostrar que em cada bola $B_r(\xi_i)$, existe um único $x_0^i \in B_r(\xi_i)$ tal que $\psi(x_0^i) = b$.

Fixe

$$a = 1 + \max_{1 \leq i \leq k}\{|\varphi'(\xi_i)^{-1}|\} > 0.$$

Podemos encontrar uma vizinhança $\mathbf{U}$ de φ contida em $\mathbf{U_1}$ tal que:

(1º) $\forall \ \psi \ \in \ \mathbf{U}, \ |\psi'(\xi_i)^{-1}| < a, \ \forall \ i = 1, 2, 3, \ldots, k$, tendo em vista que a inversão de matrizes é uma imersão contínua.

(2º) $|\psi'(\xi_i)^{-1}[\psi'(y) - \psi'(\xi_i)]| < \dfrac{3}{4}, \ \forall \ y \ \in \ B_r(\xi_i), \ i = 1, 2, 3, \ldots, k.$

Para fixar as idéias, considere

$$\mathbf{U} = \{\psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N); \|\varphi - \psi\|_{C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} \leq \epsilon\} \ \ com \ \ 0 < \epsilon < \min\left\{\epsilon_4, \frac{r}{4a}\right\}.$$

Neste caso,

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \epsilon < \frac{r}{4a}, \ \forall \ x \ \in \ \overline{\Omega}.$$

Defina a função

$$\theta_i(x) = \psi'(\xi_i)^{-1}\psi(x), \ \ \forall \ x \ \in \ \ B_r(\xi_i).$$

Afirmação: $\theta_i - I$ é uma $\dfrac{3}{4} -$ contração.

De fato,

$$|\theta_i^{'}(x) - I| = \max\{|\theta_i^{'}(x)v - v|; |v| = 1\}$$

implicando que

$$|\theta_i^{'}(x) - I| = \max\{|\psi'(\xi_i)^{-1}\psi'(x)v - v|; |v| = 1\}.$$

Logo
$$|\theta_i'(x) - I| = \max\{|\psi'(\xi_i)^{-1}[\psi'(x)v - \psi'(\xi_i)v]|; |v| = 1\},$$
donde se obtém
$$|\theta_i'(x) - I| \leq \frac{3}{4}, \ \forall \ x \ \in \ B_r(\xi_i).$$
Definindo $\psi_i(x) = \theta_i - x$ tem-se que $\theta_i = x + \psi_i(x)$, onde ψ_i é $\frac{3}{4} -$ contração. Usando o Lema $A.17 - (ii)$, θ_i é injetiva em $B_r(\xi_i)$, implicando que ψ é injetiva em $B_r(\xi_i)$.

Defina
$$\phi(x) = \theta_i(x + \xi_i) - \theta_i(\xi_i)$$
e note que
$$\phi(x) = x + (\theta_i(x + \xi_i) - x - \theta_i(\xi_i)).$$
Repetindo o mesmo argumento utilizado para mostrar que $\theta_i - I$ é $\frac{3}{4} -$ contração, podemos concluir que $\theta_i(x + \xi_i) - x - \theta_i(\xi_i)$ é $\frac{3}{4} -$ contração em $B_r(0)$.

Logo, pelo Lema $A.17$ temos que
$$\phi(B_r(0)) \supset B_{\frac{r}{4}}(0), \ \textit{ou seja}, \ \theta_i(B_r(\xi_i)) \supset B_r(0) + \theta_i(\xi_i) = B_{\frac{r}{4}}(0)(\theta_i(\xi_i)),$$
isto é,
$$\psi(B_r(\xi_i)) \supset \psi'(\xi_i)(B_{\frac{r}{4}}(\theta_i(\xi_i))).$$
Além disso,
$$\psi'(\xi_i)(B_{\frac{r}{4}}(\theta_i(\xi_i))) \supset B_{\frac{r}{4a}}(\psi(\xi_i)), \tag{1.8}$$
pois para $y \in B_{\frac{r}{4a}}(\psi(\xi_i))$ temos
$$|\psi'(\xi_i)^{-1}(y) - \theta_i(\xi_i)| = |\psi'(\xi_i)^{-1}y - \psi'(\xi_i)^{-1}\psi(\xi_i)|$$
implicando que
$$|\psi'(\xi_i)^{-1}(y) - \theta_i(\xi_i)| = |\psi'(\xi_i)^{-1}[y - \psi(\xi_i)]|.$$
Assim
$$|\psi'(\xi_i)^{-1}(y) - \theta_i(\xi_i)| \leq |\psi'(\xi_i)^{-1}|\,|y - \psi(\xi_i)|,$$
e consequentemente
$$|\psi'(\xi_i)^{-1}(y) - \theta_i(\xi_i)| < a\frac{r}{4a} = \frac{r}{4}.$$

Desta forma,

$$\psi'(\xi_i)^{-1}(y) \in B_{\frac{r}{4}}(\theta(\xi_i))$$

que implica

$$y \in \psi'(\xi_i)(B_{\frac{r}{4a}}(\psi(\xi_i))),$$

ou seja,

$$B_{\frac{r}{4a}}(\psi(\xi_i)) \subset \psi'(\xi_i)(B_{\frac{r}{4a}}(\psi(\xi_i))). \tag{1.9}$$

De (1.8) e (1.9) obtemos

$$\psi(B_r(\xi_i)) \supset B_{\frac{r}{4a}}(\psi(\xi_i)). \tag{1.10}$$

Recorde que

$$|\varphi(x) - \psi(x)| < \frac{r}{4a}, \ \forall\, x \in \overline{\Omega},$$

e com isso, para $x = \xi_i$ temos

$$|\varphi(\xi_i) - \psi(\xi_i)| < \frac{r}{4a}$$

isto é,

$$|b - \psi(\xi_i)| < \frac{r}{4a}$$

implicando que $b \in B_{\frac{r}{4a}}(\psi(\xi_i))$ e por (1.23) temos que $b \in \psi(B_r(\xi_i))$. Mostrando que existe um elemento $x_0^i \in B_r(\xi_i)$ verificando $\psi(x_0^i) = b$. Desde que ψ injetiva, tal elemento é único. Portanto,

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b), \ \forall\, \psi \in \mathbf{U}.$$

■

Observação 1.3 *O item (iii) afirma que o grau topológico de Brouwer é localmente constante na topologia $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$.*

Lema 1.4 *Sejam $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e b_1, b_2 pontos de $\mathbb{R}^N$ que não pertencem a $\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. Se b_1 e b_2 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \Big(\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)\Big)$, tem-se que*

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

Demonstração: Sejam b_1 e b_2 pontos de $\mathbb{R}^N \backslash \Big(\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)\Big)$. Desde que, a componente conexa que contém b_1 e b_2 é um aberto em $\mathbb{R}^N$, pois $\mathbb{R}^N \backslash \Big(\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)\Big)$ é um aberto, a mesma é conexa por caminhos, donde segue que existe

$$\begin{aligned} q: \ [0,1] &\to \mathbb{R}^N \\ t &\mapsto q(t) \in C_{b_1,b_2}, \end{aligned}$$

com $q(0) = b_1$ e $q(1) = b_2$ onde C_{b_1,b_2} é a componente contendo b_1 e b_2. Note que $q([0,1]) \subset C_{b_1,b_2}$ é um compacto em $\mathbb{R}^N$. Assim, existem $\epsilon > 0$ e $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_s\}$ tais que

$$q([0,1]) \subset \bigcup_{i=1}^{s} B_\epsilon(x_i) \quad e \quad B_\epsilon(x_i) \cap B_\epsilon(x_{i+1}) \neq \emptyset, \quad com \ \ i = 1, 2, 3, ..., s-1.$$

Vamos fixar nossa atenção a $B_\epsilon(x_1)$ com $x_1 = b_1$ e $x_s = b_2$.
Considere $x \notin \Big(\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)\Big)$. Assim $d(\varphi, \Omega, x)$ está bem definido e pelo Lema 1.3 temos

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi - b_1, \Omega, 0).$$

Além disso,

$$\|(\varphi - b_1) - (\varphi - x)\|_{C^1} = |b_1 - x| < \epsilon,$$

e pelo Lema 1.3 com ϵ suficientemente pequeno, temos que

$$d(\varphi - b_1, \Omega, 0) = d(\varphi - x, \Omega, 0), \forall x \in B_\epsilon(b_1),$$

que implica

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, x), \forall x \in B_\epsilon(x).$$

Seguindo com este raciocínio temos

$$d(\varphi, \Omega, x_i) = d(\varphi, \Omega, y), \ \forall \ y \in B_\epsilon(x_i), \ \ com \ \ i = 1, 2, 3, ..., s.$$

Desde que $B_\epsilon(x_i) \cap B_\epsilon(x_{i+1}) \neq \emptyset$ podemos concluir que

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

$\blacksquare$

Lema 1.5 *Seja* $\varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *e* b_1, b_2 *pontos de* $\mathbb{R}^N$ *que não pertencem a* $\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. *Se* b_1 *e* b_2 *estão na mesma componente conexa de* $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$, *temos que*

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

Demonstração: Considere Θ a componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$ que contém b_1 *e* b_2. Sendo Θ aberto e conexo, o mesmo é conexo por caminhos, logo existe um caminho

$$\begin{aligned} q: \ [0,1] &\to \mathbb{R}^N \\ t &\mapsto q(t) \in \Theta \end{aligned}$$

com $q(0) = b_1$ e $q(1) = b_2$.

Usando a compacidade do conjunto $q([0,1])$, existe $\epsilon > 0$ satisfazendo

$$\overline{B}_\epsilon(q(t)) \subset \Theta, \ \forall\, t \in [0,1],$$

ou seja,

$$B_\epsilon(q(t)) = B_\epsilon(0) + q(t) = B_\epsilon(b_1) - (b_1 - q(t)) \subset \Theta.$$

Considere uma função $J_\epsilon \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ com $supt J_\epsilon = \overline{B}_\epsilon(b_1)$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} J_\epsilon(x)dx = 1$.

Aplicando o Lema $A.19$, considerando $f(x) = J_\epsilon(x)$, $K = \overline{B}_\epsilon(b_1)$ e $\gamma(t) = b_1 - q(t)$ temos

$$J_\epsilon(x + \gamma(0)) - J_\epsilon(x + \gamma(1)) = div\, v(x),$$

que implica

$$J_\epsilon(x) - J_\epsilon(x + b_1 - b_2) = div\, v(x),$$

onde $v \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ com $supt\, v \cap \varphi(\partial\Omega) = \emptyset$, pois $supt\, v \subset \Theta$.

Aplicando agora o Lema $A.18$, existe $u \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ com $supt\, u \subset \Omega$ e $div\, u(x) = J_\varphi(x) div\, v(x)$. Assim,

$$(J_\epsilon(\varphi(x)) - J_\epsilon(\varphi(x) + b_1 - b_2))J_\varphi(x) = div\, u(x)$$

e portanto,

$$\int_\Omega (J_\epsilon(\varphi(x)) - J_\epsilon(\varphi(x) + b_1 - b_2))J_\varphi(x)dx = \int_\Omega div\, u(x)dx.$$

Pelo Teorema do Divergente $A.14$ temos

$$\int_\Omega div\, u(x)dx = \int_{\partial\Omega} u \overrightarrow{\eta}\, dS = 0,$$

pois $u(x) = 0, \ \forall\, x \in \partial\Omega$. Logo,

$$\int_\Omega (J_\epsilon(\varphi(x)) - J_\epsilon(\varphi(x) + b_1 - b_2))J_\varphi(x)dx = 0$$

e consequentemente,

$$\int_\Omega J_\epsilon \varphi(x) J_\varphi(x) = \int_\Omega J_\epsilon(\varphi(x) + b_1 - b_2) J_\varphi(x) dx,$$

que implica

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = \int_\Omega J_\epsilon(\varphi(x) + b_1 - b_2) J_\varphi(x) dx.$$

Vamos mostrar que

$$d(\varphi, \Omega, b_2) = \int_\Omega J_\epsilon(\varphi(x) + b_1 - b_2) J_\varphi(x) dx.$$

Note que,

$$\int_\Omega J_\epsilon(\varphi(x) + b_1 - b_2) J_\varphi(x) dx = \int_\Omega J_\epsilon(\varphi(x) + b_1 - b_2) J_{\varphi(x)+b_1-b_2}(x) dx.$$

Definindo a função $\psi(x) = \varphi(x) + b_1 - b_2$ temos que

$$\int_\Omega J_\epsilon(\varphi(x) + b_1 - b_2) J_\varphi(x) dx = \int_\Omega J_\epsilon(\psi(x)) J_\psi(x) dx.$$

Logo

$$d(\psi, \Omega, b_1) = \int_\Omega J_\epsilon(\varphi(x) + b_1 - b_2) J_\varphi(x) dx,$$

isto é,

$$d(\varphi + b_1 - b_2, \Omega, b_1) = d(\varphi + b_1 - b_2 - b_1, \Omega, 0) = d(\varphi - b_2, \Omega, 0) = d(\varphi, \Omega, b_2),$$

e com isso concluimos que

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

$\blacksquare$

Definição 1.6 *Seja* $\varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ *e* $b \in \varphi(S)$. *Considere* C_b *a componente conexa de* $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$, *que contém* b. *Sendo* C_b *um aberto, existe* $x \in C_b \backslash \varphi(S)$. *Definimos no que segue-se*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, x), \forall x \in C_b \backslash \varphi(S).$$

Lema 1.7 *Para* $\varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *e* $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, *existe uma vizinhança* $\mathbf{U}$ *de* φ *na topologia* $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *tal que para* $\forall \psi \in \mathbf{U}$ *temos:*
(i) $b \notin \psi(\partial\Omega)$,
(ii) $d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$.

Demonstração: Temos duas possibilidades a considerar:

(1^0) $b \notin \varphi(S)$, o resultado segue do Lema (1.3).

(2^0) $b \in \varphi(S)$.

Seja $r = \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\} > 0$. Pelo **Teorema de Sard** existe $b_1 \notin \varphi(S)$ satisfazendo

$$|b_1 - b| < \frac{r}{4}$$

pois caso contrário,

$$B_{\frac{r}{4}}(b) \subseteq \varphi(S)$$

e assim

$$0 < m(B_{\frac{r}{4}}(b)) \leq m(\varphi(S)),$$

que é um absurdo. Além disso, tem-se também

$$B_{\frac{r}{4}}(b) \subset \mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$$

portanto, b e b_1 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$. Usando a definição do grau para o caso $b \in \varphi(S)$ temos que

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b_1). \tag{1.11}$$

Temos que $b_1 \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$, assim aplicando o Lema 1.3 encontramos uma vizinhança $\mathbf{U}$ de φ em $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ de maneira que, $\forall \psi \in \mathbf{U}$ temos

$$b_1 \notin \psi(\partial\Omega) \cup \psi(S) \quad e \quad d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\psi, \Omega, b_1). \tag{1.12}$$

Note agora que

$$\rho\{b, \psi(\partial\Omega)\} \ \geq \ \frac{r}{2}, \ \forall \psi \in \mathbf{U}$$

implicando

$$B_{\frac{r}{4}}(b) \subset \mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega), \ \forall \psi \in \mathbf{U}.$$

Portanto, b e b_1 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \psi(\partial\Omega), \forall \psi \in \mathbf{U}$. Assim,

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b_1). \tag{1.13}$$

Segue de (1.11), (1.12) e (1.13) que $\ d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$. ∎

Lema 1.8 *(Invariância por Homotopia de Classe C^2) Seja $H(x,t) \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,1], \mathbb{R}^N)$, com $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Então,*

$$d(H(\cdot, t), \Omega, b) \equiv constante, \ \forall t \in [0,1].$$

Demonstração: As funções H e $\dfrac{\partial H}{\partial x}$ são uniformemente contínuas em $\overline{\Omega} \times [0,1]$. Então, para cada $\tau \in [0,1]$ fixado e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$t \in [0,1], |t-\tau| < \delta \Rightarrow \|H(\cdot,t) - H(\cdot,\tau)\|_{C^1} < \epsilon$$

(ver Teorema $A.10$). Segue do Lema 1.7 que

$$d(H(\cdot,\tau),\Omega,b) = d(H(\cdot,t),\Omega,b)$$

para t suficientemente próximo de τ. Assim, a função $t \mapsto d(H(\cdot,t),\Omega,b)$ é localmente constante em $[0,1]$. Sendo $[0,1]$ um compacto e conexo, podemos afirmar que a mesma é constante. ■

1.1.3 Definição do Grau para Funções Contínuas

Sejam $\varphi \in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$, $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ e $r = \rho\{b,\varphi(\partial\Omega)\} > 0$. Sendo $C^2(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$ denso em $C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$, devido ao **Teorema de Aproximação de Weirstrass,** existe $\psi \in C^2(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$ com $\|\varphi-\psi\|_\infty < \dfrac{r}{2}$.

Fixando

$$\mathbf{U} = \{\psi \in C^2(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N); \|\varphi-\psi\|_\infty < \frac{r}{2}\},$$

tem-se

$$d(\psi_1,\Omega,b) = d(\psi_2,\Omega,b),\ \forall\,\psi_1,\psi_2 \in \mathbf{U}.$$

De fato, defina a aplicação

$$\begin{aligned} H:\ \overline{\Omega}\times[0,1] &\to \mathbb{R}^N \\ (x,t) &\mapsto H(x,t) = t\psi_1(x) + (1-t)\psi_2(x). \end{aligned}$$

Observe que, $H \in C^2(\overline{\Omega}\times[0,1],\mathbb{R}^N)$ e $b \notin H(\partial\Omega\times[0,1])$.

Vamos justificar que

$$b \notin H(\partial\Omega\times[0,1]).$$

Para $x \in \overline{\Omega}$, e para cada $t \in [0,1]$ temos

$$|H(x,t)-\varphi(x)| = |t\psi_1(x) + (1-t)\psi_2(x) - t\varphi(x) - (1-t)\varphi(x)|,$$

que implica

$$|H(x,t)-\varphi(x)| = |t(\psi_1(x)-\varphi(x)) + (1-t)(\psi_2(x)-\varphi(x))|.$$

Portanto,

$$|H(x,t)-\varphi(x)| \leq t|\psi_1(x)-\varphi(x)|+(1-t)|\psi_2(x)-\varphi(x)|, \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Desde que

$|\psi_1(x)-\varphi(x)| \leq \|\psi_1-\varphi\|_\infty$ e $|\psi_2(x)-\varphi(x)| \leq \|\psi_2-\varphi\|_\infty, \quad \forall x \in \overline{\Omega}$

segue-se que

$$|H(x,t)-\varphi(x)| \leq t\|\psi_1-\varphi\|_\infty+(1-t)\|\psi_2-\varphi\|_\infty, \ \forall \ x \in \overline{\Omega}.$$

Logo

$$|H(x,t)-\varphi(x)| < t\,\frac{r}{2}+(1-t)\,\frac{r}{2},$$

implicando

$$|H(x,t)-\varphi(x)| < \frac{r}{2} \tag{1.14}$$

e consequentemente

$$b \notin H(\partial\Omega \times [0,1]),$$

pois caso contrário, existiria $x_0 \in \partial\Omega$ e $t_0 \in [0,1]$ tais que $H(x_0,t_0)=b$, e com isso

$$|H(x_0,t_0)-\varphi(x_0)| < \frac{r}{2},$$

que implicaria

$$|b-\varphi(x_0)| < \frac{r}{2}$$

o que é um absurdo, pois sendo $r=\rho\{b,\varphi(\partial\Omega)\}$ tem-se

$$|b-\varphi(x)| \geq r.$$

Portanto,

$$b \notin H(\partial\Omega \times [0,1]).$$

Pelo Lema 1.8 temos

$$d(H(\cdot,t),\Omega,b) \equiv \text{constante}, \forall t \in [0,1],$$

que implica

$$d(H(\cdot,0),\Omega,b)=d(H(\cdot,1),\Omega,b),$$

isto é,

$$d(\psi_2,\Omega,b)=d(\psi_1,\Omega,b).$$

Definição 1.9 *Definimos o Grau Topológico de Brouwer para* $\varphi \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *com* $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, *como sendo*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b), \ \forall \ \psi \in \mathbf{U}.$$

Observação 1.4 *Assim, para toda* $\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *com* $b \notin \psi(\partial\Omega)$, *temos que* $d(\psi, \Omega, b)$ *está bem definido e não depende da* ψ *escolhida, como foi mostrado acima.*

Um primeiro resultado obtido a partir da definição 1.9 é o seguinte

Lema 1.10 *Seja* $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *e* $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. *Então,*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi - b, \Omega, 0).$$

Demonstração: De acordo com a definição do grau topológico de Brouwer para as funções contínuas temos

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b), \ \forall \ \psi \in \mathbf{U}. \tag{1.15}$$

Fixando uma $\psi \in \mathbf{U}$ observamos que

$$\varphi(x) = b \Rightarrow (\varphi - b)(x) = 0, \ \forall \ x \in \overline{\Omega}$$

e

$$\|\psi - \varphi\|_\infty < \frac{r}{2}, \text{ onde}\, r = \rho\{0, (\varphi - b)(\partial\Omega)\},$$

pois

$$r{=}\rho\{0, (\varphi{-}b)(\partial\Omega)\}{=}inf\{|0{-}(\varphi{-}b)(x)|; x \in \partial\Omega\}{=}inf\{|b{-}(\varphi)(x)|; x \in \partial\Omega\}{=}\rho\{b, (\varphi)(\partial\Omega)\}.$$

Consequentemente,

$$\|\psi - b + b - \varphi\|_\infty < \frac{r}{2}$$

implicando que

$$\|(\psi - b) - (\varphi - b)\|_\infty < \frac{r}{2},$$

e portanto,

$$d(\varphi - b, \Omega, 0) = d(\psi - b, \Omega, 0). \tag{1.16}$$

Claramente,

$$b \notin \psi(\partial\Omega), \forall \psi \in \mathbf{U}.$$

Considere agora $b_1 \notin \psi(S)$ que está na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \psi(\partial\Omega)$ que contém b. Assim

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b_1) = d(\psi - b_1, \Omega, 0). \tag{1.17}$$

Escolhendo b_1 suficientemente próximo de b tal que

$$\|(\psi - b) - (\psi - b_1)\|_\infty = \|b_1 - b\|_\infty = |b_1 - b| < \epsilon < \frac{1}{2}\rho\{0, (\psi - b)(\partial\Omega)\},$$

obtemos

$$d(\psi - b, \Omega, 0) = d(\psi - b_1, \Omega, 0). \tag{1.18}$$

De (1.15) $-$ (1.18) concluímos

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b_1) = d(\psi - b_1, \Omega, 0) = d(\psi - b, \Omega, 0) = d(\varphi - b, \Omega, 0).$$

Portanto,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi - b, \Omega, 0).$$

■

1.1.4 Propriedades Principais do Grau Topológico de Brouwer

($\mathbf{P_1}$) Continuidade

Sejam $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Existe uma vizinhança V de φ na topologia $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, tal que para $\forall \psi \in V$ temos que:

(i) $b \notin \psi(\partial\Omega)$,

(ii) $d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$.

Demonstração: Sejam $r = \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\} > 0$ e $V = \{H \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N); \|\varphi - H\|_\infty < \frac{r}{4}\}$. Se $H \in V$ temos $b \notin H(\partial\Omega)$ e

$$\rho\{b, H(\partial\Omega)\} \geq \frac{3r}{4}, \tag{1.19}$$

pois

$$|b - H(x)| = |b - \varphi(x) + \varphi(x) - H(x)|,$$

que implica

$$|b - H(x)| \geq |b - \varphi(x)| - |\varphi(x) - H(x)|. \tag{1.20}$$

Desde que,

$$|b - \varphi(x)| \geq r, \ \forall x \ \in \partial\Omega$$

e

$$\|\varphi - H\|_\infty = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |\varphi(x) - H(x)|,$$

deduzimos que

$$|\varphi(x) - H(x)| \le \|\varphi - H\|_\infty < \frac{r}{4},\ \forall\ x \in \overline{\Omega}$$

implicando por (1.20)

$$|b - H(x)| \ge r - \frac{r}{4}.$$

Consequentemente

$$|b - H(x)| \ge \frac{3r}{4} > 0,\ \forall\, x \in\ \partial\Omega$$

mostrando assim que $b \notin H(\partial\Omega)$.

Agora fixe $\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ satisfazendo $\|\varphi - \psi\|_\infty < \dfrac{r}{8}$. Usando a definição do grau topológico de Brouwer para funções contínuas temos

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b). \tag{1.21}$$

Definindo para $H \in V$ o número $r^{'} = \rho\{b, H(\partial\Omega)\}$ temos que $r^{'} \ge \dfrac{3r}{4}$ e

$$\|\psi - H\|_\infty < \frac{r^{'}}{2}.$$

De fato, para $x \in \overline{\Omega}$ temos

$$|\psi(x) - H(x)| = |\psi(x) - \varphi(x) + \varphi(x) - H(x)|,$$

que implica

$$|\psi(x) - H(x)| \le |\psi(x) - \varphi(x)| + |H(x) - \varphi(x)|.$$

Desde que,

$|\psi(x) - \varphi(x)| \le \|\psi - \varphi\|_\infty$ e $|\psi(x) - H(x)| \le \|\psi - H\|_\infty, \forall x \in \overline{\Omega},$

temos que

$$|\psi(x) - H(x)| \le \|\psi - \varphi\|_\infty + \|H - \varphi\|_\infty.$$

Assim,

$$|\psi(x) - H(x)| < \frac{r}{8} + \frac{r}{4} = \frac{3r}{8} = \frac{1}{2}.\frac{3r}{4} < \frac{r^{'}}{2}$$

e portanto,

$$|\psi(x) - H(x)| < \frac{r^{'}}{2}.$$

Como o conjunto $\{|\psi(x) - H(x)|; x \in \overline{\Omega}\}$ é limitado superiormente, pelo postulado de Dedekind, o mesmo possui supremo. Assim,

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} |\psi(x) - H(x)| < \frac{r'}{2}$$

e com isso,

$$\|\psi - H\|_\infty < \frac{r'}{2}.$$

Usando novamente a definição do grau topológico de Brouwer temos

$$d(H, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b). \tag{1.22}$$

De (1.21) e (1.22) concluimos

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(H, \Omega, b), \ \forall \ H \in V.$$

■

($\mathbf{P_2}$) Invariância do Grau por Homotopia

Sejam $H \in C(\overline{\Omega} \times [0,1], \mathbb{R}^N)$ e $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Então,

$$d(H(\cdot, t), \Omega, b) \equiv \text{constante}, \forall t \in [0,1].$$

Demonstração: Para $\tau \in [0,1]$ fixado, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$t \in [0,1], |t - \tau| < \delta \Rightarrow \|H(\cdot, t) - H(\cdot, \tau)\|_\infty < \epsilon.$$

Usando a propriedade (P_1) a aplicação $t \mapsto d(H(\cdot, t), \Omega, b)$ é localmente constante. Sendo $[0,1]$ um conjunto compacto e conexo, segue que a função $t \mapsto d(H(\cdot, t), \Omega, b)$ é constante, isto é,

$$d(H(\cdot, t), \Omega, b) \equiv costante, \forall t \in [0,1].$$

■

(P_3) **O Grau é Constante em Componentes Conexas de** $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$.

Se b_1 e b_2 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$, tem-se que

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

Demonstração: Sejam b_1 e b_2 pontos de $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$ que pertencem a mesma componente conexa $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$. Desde que, a componente conexa que contém b_1 e b_2 é um aberto em $\mathbb{R}^N$, pois $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$ é um aberto, a mesma é conexa por caminhos, e com isso existe

$$\begin{aligned} q: \quad [0,1] \quad &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ t \qquad &\mapsto q(t) \in C_{b_1,b_2}, \end{aligned}$$

com $q(0) = b_1$ e $q(1) = b_2$ onde C_{b_1,b_2} é a componente conexa que contém b_1 e b_2. Note que $q([0,1]) \subset C_{b_1,b_2}$ é um compacto em $\mathbb{R}^N$. Assim, existem $\epsilon > 0$ e $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_s\}$ tais que

$$q([0,1]) \subset \bigcup_{i=1}^{s} B_\epsilon(x_i) \quad e \quad B_\epsilon(x_i) \cap B_\epsilon(x_{i+1}) \neq \emptyset, \quad com \;\; i = 1, 2, 3, ..., s-1.$$

Vamos fixar nossa atenção a $B_\epsilon(x_1)$ com $x_1 = b_1$ e $x_s = b_2$. Considerando $x \notin \varphi(\partial\Omega)$, temos que $d(\varphi, \Omega, x)$ está bem definido e pelo Lema 1.10 temos

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi - b_1, \Omega, 0).$$

Além disso,

$$\|(\varphi - b_1) - (\varphi - x)\|_{C^1} = |b_1 - x| < \epsilon.$$

Assim, pelo Lema 1.4 e ϵ suficientemente pequeno, temos

$$d(\varphi - b_1, \Omega, 0) = d(\varphi - x, \Omega, 0), \forall x \in B_\epsilon(b_1),$$

que implica

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, x), \forall x \in B_\epsilon(x).$$

Seguindo com este raciocínio temos

$$d(\varphi, \Omega, x_i) = d(\varphi, \Omega, y), \;\; \forall \; y \in B_\epsilon(x_i), \;\; com \;\; i = 1, 2, 3, ..., s.$$

Desde que $B_\epsilon(x_i) \cap B_\epsilon(x_{i+1}) \neq \emptyset$ concluimos que

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

$\blacksquare$

($\mathbf{P_4}$) Aditividade

Seja $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ com Ω_1, Ω_2 abertos, disjuntos e limitados. Se $b \notin \varphi(\partial\Omega_1) \cup \varphi(\partial\Omega_2)$ temos que:

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega_1, b) + d(\varphi, \Omega_2, b).$$

Demonstração: Sejam $r = \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\} > 0$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega_1) \cup \varphi(\partial\Omega_2) = \varphi(\partial\Omega)$ com $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ e $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$.

Considere

$$\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \ \ com \ \ \|\varphi - \psi\|_\infty < \frac{r^*}{2}$$

onde

$$r^* = min\{\rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\}, \rho\{b, \varphi(\partial\Omega_1)\}, \rho\{b, \varphi(\partial\Omega_2)\}\}.$$

Usando a definição do grau topológico de Brouwer para funções contínuas temos

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b),$$

$$d(\varphi, \Omega_1, b) = d(\psi, \Omega_1, b)$$

e

$$d(\varphi, \Omega_2, b) = d(\psi, \Omega_2, b).$$

Escolha $b_1 \notin \psi(S)$ e que pertença as componentes de $\mathbb{R}^N \backslash \psi(\partial\Omega)$, $\mathbb{R}^N \backslash \psi(\partial\Omega_1)$ e $\mathbb{R}^N \backslash \Psi(\partial\Omega_2)$ que contém b.

Assim

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b_1),$$

$$d(\psi, \Omega_1, b) = d(\psi, \Omega_1, b_1)$$

e

$$d(\psi, \Omega_2, b) = d(\psi, \Omega_2, b_1).$$

Segue da teoria do grau topológico de Brouwer para o caso regular

$$d(\psi, \Omega, b_1) = \sum_{\xi_i \in \psi^{-1}(\{b_1\}) \cap \Omega_1} sgn[J_\psi(\xi_i)] + \sum_{\xi_i \in \psi^{-1}(\{b_1\}) \cap \Omega_2} sgn[J_\psi(\xi_i)].$$

implicando

$$d(\psi, \Omega, b_1) = d(\psi, \Omega_1, b_1) + d(\psi, \Omega_2, b_1).$$

Portanto

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega_1, b) + d(\varphi, \Omega_2, b).$$

■

1.1.5 Consequências das Propriedades Principais do Grau Topológico de Brouwer

(C_1) (Normalização) Seja I a projeção canônica de $\overline{\Omega}$ em $\mathbb{R}^N$, isto é, $I(x) = x$ então,

$$d(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1 & , se \quad b \in \Omega \\ 0 & , se \quad b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Demonstração: Se $b \in \Omega$, então

$$d(I, \Omega, b) = \sum_{\xi_i \in I^{-1}(\{b\})} sgn J_I(\xi_i) = sgn J_I(\xi_i).$$

Como $J_I(\xi_i) = 1 > 0$ e

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & , se \quad t > 0 \\ -1 & , se \quad t < 0 \end{cases}$$

temos que

$$d(I, \Omega, b) = 1.$$

Agora, se $b \notin \overline{\Omega}$ temos

$$d(I, \Omega, b) = \sum_{\xi_i \in I^{-1}(\{b\})} sgn J_I(\xi_i) = \int_{\{x \in \Omega; |\varphi(x) - b| < \epsilon\}} J_\epsilon(\varphi(x)) \cdot J_\varphi(x) dx.$$

Note que, $\{x \in \Omega; |\varphi(x) - b| < \epsilon\} = \emptyset$, e com isso

$$\int_{\{x \in \Omega; |\varphi(x) - b| < \epsilon\}} J_\epsilon(\varphi(x)) \cdot J_\varphi(x) dx = 0.$$

Consequentemente

$$d(I, \Omega, b) = 0$$

$\blacksquare$

(C_2) (Existência de Solução) Se $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$ então, existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_0) = b$.

Demonstração: Sejam $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, e $r = \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\} > 0$. Como $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ é denso em $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass (*ver Teorema* A.11), existe $\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, com $\|\psi - \varphi\|_\infty < \dfrac{r}{2}$, tal que

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b).$$

Escolhendo b_1 suficientemente próximo de b com $b_1 \in C_b \backslash \psi(S)$, temos

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b_1).$$

Sendo $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, por hipótese, temos que $d(\psi, \Omega, b_1) \neq 0$, implicando que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\psi(x_0) = b_1$, pela mesma justificativa feita na observação 1.2.

Afirmação: $b \in \varphi(\Omega)$.

De fato, caso contrário

$$b \notin \varphi(\overline{\Omega}) \text{ com } \rho\{b, \varphi(\overline{\Omega})\} > 0.$$

Fixe $\delta > 0$ e considere o seguinte conjunto $(\varphi(\overline{\Omega}))_\delta = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \rho\{x, \varphi(\overline{\Omega})\} < \delta\}$, que é uma delta vizinhança de $\varphi(\overline{\Omega})$, onde

$$0 < \delta < \frac{1}{2}\rho\{b, \partial(\varphi(\overline{\Omega}))\}.$$

Fixado ψ de maneira que $\|\psi - \varphi\|_\infty < \delta$ temos que $\psi(\overline{\Omega}) \subset (\varphi(\overline{\Omega}))_\delta$. De fato,

$$|\psi(x) - \varphi(x)| \leq \|\psi - \varphi\|_\infty < \epsilon < \delta, \text{ onde } 0 < \epsilon < \frac{r}{2}.$$

Assim

$$\rho\{\psi(x), \varphi(\overline{\Omega})\} < \epsilon < \delta,$$

que implica

$$\psi(x) \subset (\varphi(\overline{\Omega}))_\delta, \ \forall x \in \overline{\Omega}$$

e consequentemente

$$\psi(\overline{\Omega}) \subset (\varphi(\overline{\Omega}))_\delta.$$

Logo, $\psi(\overline{\Omega}) \cap \{b_1\} = \emptyset$, que é um absurdo, pois $b_1 \in \psi(\overline{\Omega})$. Portanto, $b \in \varphi(\Omega)$ e segue-se que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_0) = b$. ∎

Observação 1.5 *Como consequência de* $(\mathbf{C_2})$ *temos que se* $b \notin \varphi(\overline{\Omega})$, *então*

$$d(\varphi, \Omega, b) = 0.$$

$(\mathbf{C_3})$ Se $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, então $\varphi(\Omega)$ é uma vizinhança de b, isto é, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_\delta(b) \subset \varphi(\Omega).$$

Demonstração: Sendo C_b a componente conexa de b em $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$, então para $\forall z \in C_b$ tem-se

$$d(\varphi, \Omega, z) = d(\varphi, \Omega, b) \neq 0,$$

por hipótese. Assim, por $(\mathbf{C_2})$, para cada $z \in C_b$ existe $y \in \Omega$ tal que $\varphi(y) = z$ e portanto $C_b \subset \varphi(\Omega)$. Desde que, C_b é um conjunto aberto e $b \in C_b$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(b) \subset C_b \subset \varphi(\Omega)$. Portanto, $B_\delta(b) \subset \varphi(\Omega)$. ■

$(\mathbf{C_4})$ Se $\varphi(\Omega)$ está contido num subespaço próprio de $\mathbb{R}^N$ temos que $d(\varphi, \Omega, b) = 0$.
Demonstração: Seja V um subespaço próprio de $\mathbb{R}^N$ tal que $\varphi(\Omega) \subset V$. Se $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, então por $(\mathbf{C_3})$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(b) \subset \varphi(\Omega) \subset V$ como todo subespaço próprio de um espaço que contém uma bola é o próprio espaço, concluimos que $V = \mathbb{R}^N$, que é um absurdo. Portanto, $d(\varphi, \Omega, b) = 0$. ■

$(\mathbf{C_5})$ **(Excisão)** Seja $K \subset \overline{\Omega}$ um compacto e $b \notin \varphi(K) \cup \varphi(\partial\Omega)$. Então,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega \backslash K, b).$$

Demonstração: Por definição, o grau topológico de Brouwer de φ com relação a Ω no ponto b, $d(\varphi, \Omega, b)$, está bem definido, pois $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Para que faça sentido a igualdade

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega \backslash K, b)$$

devemos mostrar que

$$b \notin \varphi(\partial(\Omega \backslash K)).$$

Afirmação:

$$b \notin \varphi(\partial(\Omega \backslash K)) \subseteq \varphi(\partial\Omega \cup \partial K).$$

De fato, caso contrário $b \in \varphi(\partial\Omega \cup \partial K)$ e assim existiria $x_0 \in \partial\Omega \cup \partial K$ tal que

$$\varphi(x_0) = b \ \ com \ \ x_0 \in \partial\Omega, \ \ isto \text{ é}, \ \ b \in \varphi(\partial\Omega)$$

ou

$$\varphi(x_0) = b \ \ com \ \ x_0 \in \partial K, \ \ isto \text{ é}, \ \ b \in \varphi(\partial K),$$

que é um absurdo, pois por hipótese $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(K)$. Portanto, $b \notin \varphi(\partial(\Omega \backslash K))$.
Fixe $\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ com

$$\|\psi - \varphi\|_\infty \leq \frac{1}{2} \min\{\rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\}, \rho\{b, \varphi(K)\}\}.$$

Então,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b) \ \ e \ \ d(\varphi, \Omega \backslash K, b) = d(\psi, \Omega \backslash K, b).$$

Segue da última condição que $b \notin \psi(K)$. De fato, sendo

$$\|\psi - \varphi\|_\infty \leq \frac{1}{2} \rho\{b, \varphi(K)\}$$

e se $b \in \psi(K)$, então existe $x_0 \in K$ tal que $\psi(x_0) = b$.
Assim,

$$|b - \varphi(x_0)| = |\psi(x_0) - \varphi(x_0)| \leq \|\psi - \varphi\|_\infty < \frac{1}{2} \rho\{b, \varphi(K)\}.$$

Desde que

$$\rho\{b, \varphi(K)\} = \inf\{|b - \varphi(y)|; y \in K\}$$

temos

$$\rho\{b, \varphi(K)\} \leq |b - \varphi(x_0)|.$$

Logo

$$\rho\{b, \varphi(K)\} < \frac{1}{2} \rho\{b, \varphi(K)\},$$

que é um absurdo. Mostrando que $b \notin \psi(K)$.
Vamos mostrar agora que $b \notin \psi(\partial\Omega)$.
De fato, como $b \notin \psi(\partial\Omega)$ e $\|\psi - \varphi\|_\infty < \frac{1}{2} \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\}$ supondo, por absurdo, que $b \in \psi(\partial\Omega)$ deve existir $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $\psi(x_0) = b$.
Assim,

$$|\psi(x_0) - \varphi(x_0)| \leq \|\psi - \varphi\|_\infty < \frac{1}{2} \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\},$$

isto é,

$$|b - \varphi(x_0)| < \frac{1}{2} \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\}.$$

Portanto,

$$\rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\} < \frac{1}{2} \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\},$$

que é um absurdo. Portanto, $b \notin \psi(\partial\Omega)$.

Agora vamos mostrar que $b \notin \psi(\partial(\Omega \backslash K))$.

Se $b \in \psi(\partial(\Omega \backslash K)) \subseteq \psi(\partial\Omega \cup \partial K)$, temos que

$$b = \psi(x_0) \ \text{ com } \ x_0 \in \partial\Omega \ \text{ e } \ \text{ com } \ \text{ isso } \ b \in \psi(\partial\Omega),$$

ou

$$b = \psi(x_0) \ \text{ com } \ x_0 \in \partial K \ \text{ e } \ \text{ com } \ \text{ isso } \ b \in \psi(\partial K),$$

que é um absurdo, pois já foi mostrado que $b \notin \psi(\partial\Omega) \cup \psi(K)$. Mostrando desta forma que $b \notin \psi(\partial(\Omega \backslash K))$.

Desde que $\{b\} \cap \psi(K) = \emptyset$, $\{b\} \cap \psi(\partial\Omega) = \emptyset$ e $\{b\} \cap \psi(\partial(\Omega \backslash K)) = \emptyset$ temos $\rho\{b, \psi(K)\} > 0$, $\rho\{b, \psi(\partial\Omega)\} > 0$ e $\rho\{b, \psi(\partial\Omega \cup \partial K)\} > 0$.

Considerando

$$\alpha = \frac{1}{2} \inf\{\rho\{b, \psi(K)\}, \rho\{b, \psi(\partial\Omega)\}, \rho\{b, \psi(\partial\Omega \cup \partial K)\} > 0,$$

pelo Teorema de Sard, existe $c \in B_\alpha(b)$ tal que

$$\forall x \in \psi^{-1}(\{c\}) \text{ tem-se } J_\psi(x) \neq 0.$$

Caso contrário, $\forall c \in B_\alpha(b)$, existe $x_0 \in \psi^{-1}(\{c\})$ com $J_\psi(x_0) = 0$ implicando que $x_0 \in S$. Logo,

$$\psi(x_0) = c \Rightarrow c \in \psi(S) \Rightarrow \psi(S) \supseteq B_\alpha(b)$$

e assim,

$$0 = m(\psi(S)) \geq m(B_\alpha(b)) = Vol(B_\alpha(b)) > 0,$$

que é um absurdo.

Note que, $c \notin \psi(K)$ implica que não existe $x_0 \in K$ tal que $\psi(x_0) = c$, e como $\psi^{-1}(\{c\}) \subset \Omega$ temos $\psi(x) = c \Rightarrow \psi^{-1}(\{c\}) \subset \Omega \backslash K$. Pela escolha do α temos que $c \notin \psi(K)$, b e c estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \psi(\partial\Omega)$ e de $\mathbb{R}^N \backslash \psi(\partial(\Omega \backslash K))$, respectivamente. Consequentemente,

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, c) \ \ e \ \ d(\psi, \Omega \backslash K, b) = d(\psi, \Omega \backslash K, c).$$

Desde que estamos tratando do grau topológico de Brouwer no caso regular temos

$$d(\psi, \Omega, c) = \sum_{\xi_i \in \psi^{-1}(\{c\})} sgn J_\psi(\xi_i) = \sum_{\xi_i \in \psi^{-1}(\{c\}) \cap (\Omega \backslash K)} sgn J_\psi(\xi_i)$$

que implica

$$d(\psi, \Omega, c) = \sum_{\xi_i \in \Omega \backslash K} sgn J_\psi(\xi_i),$$

ou seja,

$$d(\psi, \Omega, c) = d(\psi, \Omega \backslash K, c).$$

Portanto,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, c) = d(\psi, \Omega \backslash K, c) = d(\psi, \Omega \backslash K, b) = d(\varphi, \Omega \backslash K, b).$$

Mostrando assim que

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega \backslash K, b).$$

■

$(\mathbf{C_6})$ Seja $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ uma família de conjuntos abertos contidos em Ω, dois a dois disjuntos, e b um ponto tal que

$$\varphi^{-1}(b) \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i.$$

Então, $d(\varphi, \Omega_i, b) = 0$ a menos de um número finito de índices $i \in I$ e mais

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{i \in I} d(\varphi, \Omega_i, b).$$

Demonstração:

Devemos mostrar que o grau $d(\varphi, \Omega, b)$ está bem definido e para isso devemos provar que $b \notin \varphi(\partial\Omega_i), \ \forall i \in I$.

Afirmação: $b \notin \varphi(\partial\Omega_i), \ \forall i \in I$. Caso contrário, existiria um índice i tal que $b \in \varphi(\partial\Omega_i)$, e daí existiria $x_0 \in \partial\Omega_i$ tal que $\varphi(x_0) = b$, que implica $x_0 \in \varphi^{-1}(\{b\})$. Assim $x_0 \in \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ e consequentemente, $x_0 \in \Omega_{j_0}$ com $j_0 \in I$. Logo $x_0 \in \Omega_{j_0} \cap \partial\Omega_i$ e com isso $\Omega_{j_0} \cap \partial\Omega_i \neq \emptyset$, que é um absurdo, pois $\Omega_{j_0} \cap \partial\Omega_i = \emptyset$. Portanto, $b \notin \varphi(\partial\Omega_i), \forall i \in I$ e consequentemente $d(\varphi, \Omega_i, b)$ está bem definido para todo $i \in I$. Desde que $\varphi^{-1}(\{b\}) = \{x \in \overline{\Omega}\,;\, \varphi(x) = b\}$ é compacto, pois é fechado (devido ao fato de ser imagem inversa de um fechado por uma função contínua) e limitado pois $\varphi^{-1}(\{b\})$ é finito, existe um número finito de abertos $\Omega_i \subset \Omega$, que cobrem $\varphi^{-1}(\{b\})$, ou seja, existe um conjunto finito de índices I_0 tais que

$$\varphi^{-1}(\{b\}) \subset \bigcup_{i \in I_0} \Omega_i \subset \Omega \ \ com \ \ I_0 \subset I.$$

Dessa forma, para todo $i \in I\backslash I_0$, $b \notin \varphi(\overline{\Omega}_i)$ e pela observação 1.4 temos que $d(\varphi, \Omega_i, b) = 0$. Sendo $K = \overline{\Omega}\backslash \bigcup_{i\in I_0} \Omega_i$ um compacto, pois $K = \overline{\Omega} \cap (\bigcap_{i\in I_0} \Omega_i^c)$ então K é fechado e como, $K \subset \overline{\Omega}$, então K é limitado e consequentemente compacto. Sendo $b \notin \varphi(K)$, pela propriedade da excisão ($\mathbf{C_5}$) segue-se que

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega\backslash K, b) = d(\varphi, \Omega\backslash(\overline{\Omega}\backslash \bigcup_{i\in I_0} \Omega_i), b) = d(\varphi, \bigcup_{i\in I_0} \Omega_i, b).$$

Assim, pela propriedade aditiva do grau topológico de Brouwer, obtemos

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{i\in I_0} d(\varphi, \Omega_i, b),$$

ou seja,

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{i\in I} d(\varphi, \Omega_i, b).$$

■

(C_7 **(Dependência da Fronteira)** Suponha que $\varphi = \Psi$ em $\partial\Omega$ e que $\varphi, \Psi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Então, $\forall\, b \notin \varphi(\partial\Omega) = \Psi(\partial\Omega)$ tem-se que $d(\varphi, \Omega, b) = d(\Psi, \Omega, b)$.

Demonstração:

Considere a seguinte aplicação contínua

$$\begin{array}{rccl} H: & \Omega \times [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R}^N \\ & (x,t) & \mapsto & H(x,t) = t\cdot\varphi(x) + (1-t)\cdot\psi(x). \end{array}$$

Afirmação: $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$.

De fato, caso contrário existiria $x_0 \in \partial\Omega$ e $t \in [0,1]$ tal que $b = H(x_0, t)$. Como $\varphi = \psi$ em $\partial\Omega$, por hipótese, para todo $x \in \partial\Omega$ temos

$$H(x,t) = t\cdot\varphi(x) + (1-t)\cdot\varphi(x) = \varphi(x) = \psi(x).$$

Considerando $x = x_0$ segue-se que $b = H(x_0, t) = \varphi(x_0)$ o que é um absurdo, pelo fato que $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, mostrando que $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Sendo o grau topológico de Brouwer invariante por homotopia, concluímos que

$$d(H(\cdot, 0), \Omega, b) = d(H(\cdot, 1), \Omega, b),$$

donde segue-se que

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\Psi, \Omega, b).$$

■

$(\mathbf{C_8})$ Sendo φ, $\Psi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, e supondo que existe $\widetilde{H} \in C(\partial\Omega \times [0,1], \mathbb{R}^N)$ com $\widetilde{H}(\cdot, 0) = \varphi_{|_{\partial\varphi}}$ e $\widetilde{H}(\cdot, 1) = \Psi_{|_{\partial\varphi}}$ tem-se que $d(\varphi, \Omega, b) = d(\Psi, \Omega, b)$.

Demonstração: Pelo Teorema de Tietze (*ver Teorema* A.12), podemos estender $\widetilde{H}$ a uma função H contínua sobre $\overline{\Omega} \times [0,1]$ a valores no $\mathbb{R}^N$.

Assim,

$$\overline{\varphi} = \widetilde{H}(\cdot, 0) = H(\cdot, 0)_{|\partial\Omega} = \varphi_{|\partial\Omega} \text{ e } \overline{\psi} = \widetilde{H}(\cdot, 1) = H(\cdot, 1)_{|\partial\Omega} = \psi_{|\partial\Omega},$$

ou seja, $\overline{\varphi} = \varphi_{|\partial\Omega}$ e $\overline{\psi} = \psi_{|\partial\Omega}$, onde $\overline{\psi}$ e $\overline{\psi}$ são extensões de $\varphi_{|\partial\Omega}$ e $\psi_{|\partial\Omega}$, respectivamente.

Desde que, o grau topológico de Brouwer é invariante por homotopia temos que

$$d(\widetilde{H}(\cdot, 0), \Omega, b) = d(\widetilde{H}(\cdot, 1), \Omega, b),$$

mostrando que

$$d(\overline{\varphi}, \Omega, b) = d(\overline{\psi}, \Omega, b).$$

De acordo com a propriedade $(\mathbf{C_7})$ temos

$$d(\overline{\varphi}, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b) \text{ pois } \overline{\varphi}_{|\partial\Omega} = \varphi_{|\partial\Omega}.$$

De modo análogo, temos

$$d(\overline{\psi}, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b) \text{ pois } \overline{\psi}_{|\partial\Omega} = \psi_{|\partial\Omega}.$$

Portanto, $d(\varphi, \Omega, b) = d(\Psi, \Omega, b)$. ■

$(\mathbf{C_9})$ **(Teorema da Não-Contração da Bola Unitária)**

Não existe aplicação contínua $\varphi : \overline{B_1(0)} \to \partial B_1(0)$ com $\varphi_{|_{\partial B_1(0)}} \equiv I$.

Demonstração: Suponha que exista tal aplicação φ. Por $(\mathbf{C_3})$ temos $d(\varphi, B_1(0), 0) = 0$, pois $0 \notin \varphi(\overline{B_1(0)})$. Por outro lado, como $\varphi_{|_{\partial B_1(0)}} \equiv I_{|_{\partial B_1(0)}}$ e usando as propriedades $(\mathbf{C_1})$ e $(\mathbf{C_8})$ deduzimos que

$$0 = d(\varphi, B_1(0), 0) = d(I, B_1(0), 0) = 1,$$

que é um absurdo. Logo temos $(\mathbf{C_9})$. ■

$(\mathbf{C_{10}})$ Se N é ímpar, não existe aplicação contínua $H : S^{N-1} \times [0,1] \to S^{N-1}$ verificando $H(x, 0) = x$ e $H(x, 1) = -x$, $\forall x \in S^{N-1}$.

Demonstração:

Observe que $S^{N-1} = \partial B_1(0)$ em $\mathbb{R}^N$. Suponha que exista tal aplicação H.

Agora, considere $\overline{\Omega} = \overline{B}_1(0)$, $b = 0$, $\varphi(x) = x$ e $\psi(x) = -x$, $\forall x \in S^{N-1}$, onde $\varphi, \psi \in C(\overline{B}_1(0), R^N)$.

Por $(\mathbf{C_7})$ temos

$$d(I, B_1(0), 0) = d(-I, B_1(0), 0). \tag{1.23}$$

Mas, por $(\mathbf{C_1})$ temos que $d(I, B_1(0), 0) = 1$. Por outro lado, o grau topológico de Brouwer é dado por

$$d(-I, B_1(0), 0) = \sum_{\xi_i \in (-I)^{-1}(\{0\})} sgnJ_{-I}(\xi_i) = sgnJ_{-I}(0) = (-1)^N.$$

Sendo N é ímpar, concluímos que $d(-I, B_1(0), 0) = -1$, que contradiz (1.23).

Portanto não existe tal aplicação H. ■

$(\mathbf{C_{11}})$ Se N é ímpar, não existe aplicação contínua $\varphi : S^{N-1} \to \mathbb{R}^N$ com $\varphi(x) \neq 0$ e $\langle \varphi(x), x \rangle = 0, \quad \forall x \in S^{N-1}$.

Demonstração:

Suponha que exista tal aplicação φ. Considere

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{|\varphi(x)|} \text{ e } H(x,t) = x\cos(\pi t) + \psi(x)\sin(\pi t),$$

para $x \in S^{N-1}$ e $t \in [0, 1]$.

Note que, $\psi(x) \in S^{N-1}$ e $H(x,t) \in S^{N-1}$, pois

$$|H(x,t) - 0|^2 = |H(x,t)|^2 = |x\cos(\pi t) + \psi(x)\sin(\pi t)|^2,$$

que implica

$$|H(x,t)|^2 = |x|^2\cos^2(\pi t) + \sin(2\pi t)\langle x, \psi(x)\rangle + |\psi(x)|^2\sin^2(\pi t).$$

Sendo $|x| = 1$, $\psi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{|\varphi(x)|}$ e $\langle \varphi(x), x \rangle = 0$ temos $|H(x,t)| = 1$. Então, $|H(x,t)| = 1, \forall x \in S^{N-1}$ e $t \in [0, 1]$. Agora, observe que

$$H \in C(S^{N-1} \times [0,1], S^{N-1}),$$

$$H(x, 0) = x \cdot \cos(\pi \cdot 0) + \psi(x) \cdot \sin(\pi \cdot 0) = x \cdot 1 + \psi(x) \cdot 0 = x$$

e

$$H(x, 1) = x \cdot \cos(\pi \cdot 1) + \psi(x) \cdot \sin(\pi \cdot 1) = x \cdot (-1) + \psi(x) \cdot 0 = -x,$$

o que contadiz a propriedade $(\mathbf{C_{10}})$. Portanto, não existe a aplicação φ considerada no início da demonstração. ■

1.1.6 O Grau Topológico de Brouwer num Espaço Vetorial de Dimensão Finita

Considere V um espaço vetorial de dimensão finita e $\varphi \in C(\overline{\Omega}, V)$, onde Ω é um aberto limitado de V. O grau topológico de Brouwer pode ser estudado de maneira análoga ao que fizemos no $\mathbb{R}^N$.

Uma pergunta natural que surge é saber se mudando a base de V, o grau topológico de Brouwer é alterado. No que segue, seja β_1 uma outra base de V, $\varphi_1 = M^{-1} \circ \varphi \circ M$, onde $M(\Omega_1) = \Omega$, $M(b_1) = b$ e M é a matriz mudança de base. Veja que, se $\varphi(x) = b$ e $M(x_1) = x$ temos

$$\varphi_1(x_1) = (M^{-1} \circ \varphi \circ M)(x_1) = (M^{-1} \circ \varphi)(M(x_1)) = (M^{-1} \circ \varphi)(x) = M^{-1}(\varphi(x)) = M^{-1}(b) = b_1.$$

Uma resposta a tal pergunta é encontrada no lema que segue.

Lema 1.11 *O grau topológico de Brouwer é independente da base escolhida,isto é,*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi_1, \Omega_1, b_1).$$

Demonstração: Vamos considerar apenas o caso regular, ou seja, $\varphi_1 \in C^1(\overline{\Omega}_1, V)$ e $b_1 \notin \varphi_1(\Omega_1) \cup \varphi_1(S)$. Sendo $\varphi_1 = M^{-1} \circ \varphi \circ M$ e usando a regra da cadêia temos $\varphi_1{}'(x_1) = M^{-1} \circ \varphi'(x) \circ M$, e portanto

$$det(\varphi_1{}'(x_1)) = det(M^{-1} \circ \varphi'(x) \circ M).$$

Usando uma propriedade dos determinantes tem-se

$$det(\varphi_1{}'(x_1)) = det(M^{-1}).det(\varphi'(x)).det(M).$$

Desde que, $det(M^{-1}).det(M) = 1$ segue-se que

$$det(\varphi_1{}'(x_1)) = det(\varphi'(x)).$$

Logo

$$J_{\varphi_1}(x_1) = J_{\varphi}(x)$$

e daí obtemos

$$sgn(J_{\varphi_1}(x_1)) = sgn(J_{\varphi}(x)).$$

Consequentemente

$$\sum_{x_1 \in \varphi_1^{-1}(\{b_1\})} sgn(J_{\varphi_1}(x_1)) = \sum_{x \in \varphi^{-1}(\{b\})} sgn(J_\varphi(x)),$$

ou seja,

$$d(\varphi_1, \Omega_1, b_1) = d(\varphi, \Omega, b).$$

■

Vamos considerar a seguinte situação, onde a aplicação $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto com $m < N$. Com o objetivo de usar a teoria do grau topológico de Brouwer, podemos considerar a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ supondo que a mesma possui $N - m$ componentes(coordenadas) nulas, isto é,

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), ..., \varphi_m(x), 0, 0, ..., 0).$$

Lema 1.12 *Seja $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ com $m < N$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $\Phi(x) = x - \varphi(x)$, $\forall x \in \overline{\Omega}$. Se $b \in \mathbb{R}^m$ e $b \notin \Phi(\partial\Omega)$, então*

$$d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi_{|_{\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}}, \Omega \cap \mathbb{R}^m, b).$$

Demonstração: Observe que $b \notin \Phi_{|_{\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}}(\partial_{\mathbb{R}^m}(\Omega \cap \mathbb{R}^m))$, pois $\partial_{\mathbb{R}^m}(\Omega \cap \mathbb{R}^m) \subset \partial\Omega$. Vamos considerar apenas o caso regular, isto é, $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ e $b \notin \Phi(S)$. Além disso, $\Phi^{-1}(\{b\}) \subset \mathbb{R}^m$, pois $b \in \mathbb{R}^m$. Temos que

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} \Phi'_{|_{\Omega \cap \mathbb{R}^m}}(x) & A \\ 0 & I_{N-m} \end{pmatrix}$$

$\forall x \in \Omega \cap \mathbb{R}^m$. Assim,

$$det(\Phi'(x)) = det(\Phi'_{|_{\Omega \cap \mathbb{R}^m}}(x)), \ \forall x \in \Phi^{-1}(\{b\}).$$

Logo

$$J_\Phi(x) = J_{\Phi_{|_{\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}}}(x), \ \forall x \in \Phi^{-1}(\{b\})$$

e com isso,

$$sgn(J_\Phi(x)) = sgn(J_{\Phi_{|_{\overline{\Omega} \cap R^m}}}(x)).$$

Consequentemente

$$\sum_{x \in \Phi^{-1}(\{b\})} sgn(J_\Phi(x)) = \sum_{x \in \Phi^{-1}{}_{|_{\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}}(\{b\})} sgn(J_{\Phi_{|_{\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}}}(x)).$$

Portanto, segue da teoria do grau topológico de Brouwer, para o caso regular, que

$$d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi_{|\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}, \Omega \cap \mathbb{R}^m, b).$$

■

1.2 O Grau Topológico de Leray & Schauder

No que segue-se vamos denotar por E um espaço de Banach real e $\Omega \subset E$ um aberto limitado. A função distância entre conjuntos associada a norma de E, será denotada por ρ, isto é, $\rho(A, B) = \inf\{\|a - b\|; a \in A, b \in B\}$ com $A, B \subset E$. Seja $T \in C(\overline{\Omega}, E)$ uma aplicação tal que $T(\overline{\Omega})$ está contido num subespaço de dimensão finita de E. A aplicação $\Phi = I - T$ é chamada de Pertubação de Dimensão Finita da Identidade.

Definição 1.13 *Seja $b \in E$ com $b \notin \Phi(\partial\Omega)$. Se F é um subespaço de E de dimensão finita contendo $T(\overline{\Omega})$ e b, definimos o* **grau de Leray & Schauder de Φ com relação a Ω no ponto b, como sendo o número inteiro**

$$d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi_{|\overline{\Omega}\cap F}, \Omega \cap F, b).$$

Vamos mostrar que esta definição é consistente, isto é, independe da escolha do subespaço F. De fato, sejam F_1 e F_2 dois subespaços de E de dimensão finita tais que

$$T(\overline{\Omega}) \subset F_1,\ T(\overline{\Omega}) \subset F_2 \ \ e \ \ b \in F_1 \cap F_2.$$

Sendo $F = F_1 \cap F_2$ um subespaço de F_1 e também de F_2, que contém $T(\overline{\Omega})$ e b, segue-se do Lema 1.12 que

$$d(\Phi_{|\overline{\Omega}\cap F_1}, \Omega \cap F_1, b) = d(\Phi_{|\overline{\Omega}\cap \overline{F}}, \Omega \cap F, b)$$

e

$$d(\Phi_{|\overline{\Omega}\cap F_2}, \Omega \cap F_2, b) = d(\Phi_{|\overline{\Omega}\cap \overline{F}}, \Omega \cap F, b).$$

Portanto,

$$d(\Phi_{|\overline{\Omega}\cap F_1}, \Omega \cap F_1, b) = d(\Phi_{|\overline{\Omega}\cap F_2}, \Omega \cap F_2, b),$$

e a definição do grau de Leray-Schauder é consistente.

Definição 1.14 *Diremos que uma aplicação $T : \overline{\Omega} \to E$ é compacta, se T é contínuo e $T(\overline{\Omega})$ é relativamente compacto em E, ou seja, $\overline{T(\overline{\Omega})}$ é um compacto em E.*

No que segue-se denotaremos por $Q(\overline{\Omega}, E)$ o espaço de Banach dos operadores compactos $T : \overline{\Omega} \to E$ munido da norma da convergência uniforme, isto é,

$$\|T\|_{\infty,\overline{\Omega}} = \|T\|_{\infty} = \sup_{x\in\overline{\Omega}} \|T(x)\|, \quad \text{onde} \quad \|\cdot\| \quad \text{é} \quad \text{uma} \quad \text{norma} \quad \text{em} \quad E.$$

Lema 1.15 *Seja K um compacto de E. Para todo $\epsilon > 0$, existe um subespaço de dimensão finita $F_\epsilon \subset E$ e uma aplicação $g_\epsilon \in C(K, F_\epsilon)$ verificando*

$$\|x - g_\epsilon(x)\| < \epsilon, \forall x \in K.$$

Demonstração: Sendo K um compacto, dado $\epsilon > 0$, existe uma quantidade finita de pontos $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_p \in E$ tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{p} B_\epsilon(y_i).$$

Seja F_ϵ o subespaço gerado por $\{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_p\}$ e defina a função

$$\begin{array}{rccl} b_i : & K & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & b_i(x), i = 1, 2, \ldots, p, \end{array}$$

onde

$$b_i(x) = \begin{cases} \epsilon - \|x - y_i\| & , se \quad x \in B_\epsilon(y_i) \\ 0 & , se \quad x \in (B_\epsilon(y_i))^c. \end{cases}$$

Observe que

$b_i(x) \geq 0, \forall x \in E$ e que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} b_i(x) > 0, \ \forall x \in K.$

Defina a função g_ϵ de K em F_ϵ por

$$g_\epsilon(x) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} b_i(x) y_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} b_i(x)}.$$

Veja que a função g_ϵ está bem definida, isto é, $\forall x \in K$ temos $g_\epsilon(x) \in F_\epsilon$ pois, $g_\epsilon(x)$ é uma combinação linear dos y_i.

A aplicação g_ϵ é contínua em K, pois é um quociente de funções contínuas, onde

$\sum_{i=1}^{p} b_i(x) > 0$ e $g_\epsilon(x) \in F_\epsilon$, $\forall x \in K$.
Além disso, temos

$$\|x - g_\epsilon(x)\| = \left\| \frac{\sum_{i=1}^{p} b_i(x) \cdot x}{\sum_{i=1}^{p} b_i(x)} - \frac{\sum_{i=1}^{p} b_i(x) \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{p} b_i(x)} \right\|,$$

que implica

$$\|x - g_\epsilon(x)\| \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^{p} b_i(x)} \cdot \sum_{i=1}^{p} b_i(x) \cdot \|x - y_i\|.$$

Assim,

$$\|x - g_\epsilon(x)\| < \frac{1}{\sum_{i=1}^{p} b_i(x)} \cdot \sum_{i=1}^{p} b_i(x) \cdot \epsilon,$$

e portanto,

$$\|x - g_\epsilon(x)\| < \epsilon, \forall x \in K.$$

■

Lema 1.16 *Seja* Φ *uma perturbação compacta da identidade, onde* $\Phi = I - T$, $T : \overline{\Omega} \to E$ *e* $T \in Q(\overline{\Omega}, E)$. *Então:*
(I) Φ *é um operador fechado (isto é, a imagem por* Φ *de um fechado é um conjunto fechado.)*
(II) Φ *é própria (isto é, a imagem inversa por* Φ *de um compacto é um conjunto compacto.)*

Demonstração: (I) Φ é fechado.

Devemos mostrar que, se $G \subset \overline{\Omega}$ é um fechado em E, então $\Phi(G)$ é um fechado em E.

Seja $G \subset \overline{\Omega}$ um conjunto fechado e $\{u_n\} \subset G$ tal que $\Phi(u_n) \to z$ em E.

Nosso objetivo é mostrar que $z \in \Phi(G)$.

Usando a hipótese que T é um operador compacto, existe uma subsequência $\{u_{n_p}\} \subset \{u_n\}$ e $w \in E$ tal que $T(u_{n_p}) \to w$ em E. Sendo $\Phi = I - T$ temos

$$\Phi(u_{n_p}) = I(u_{n_p}) - T(u_{n_p})$$

implicando

$$u_{n_p} = \Phi(u_{n_p}) + T(u_{n_p}).$$

Desde que

$$\Phi(u_n) \to z \ em \ E \ e \ T(u_{n_p}) \to w \ em \ E$$

concluímos que

$$u_{n_p} \to z + w \ em \ E.$$

Agora, pela continuidade da Φ, obtemos

$$\Phi(u_{n_p}) \to \Phi(z + w) \ em \ E$$

e pela unicidade dos limites temos

$$\Phi(z + w) = z.$$

Como G é um conjunto fechado em E, $\{u_{n_p}\} \subset G$ e $u_{n_p} \to z + w$, devemos ter

$$z + w \in G.$$

Portanto, $z \in \Phi(G)$. Mostrando que $\Phi(G)$ é um conjunto fechado.

(II) Φ é própria.

Devemos mostrar que, se $K \subset E$ é um conjunto compacto, então $\Phi^{-1}(K)$ é um conjunto compacto.

Nosso objetivo é mostrar que toda sequência $\{u_n\} \subset \Phi^{-1}(K)$, possue uma subsequência convergente em E com limite em $\Phi^{-1}(K)$.

Seja $\{u_n\} \subset \Phi^{-1}(K)$. Logo existe, $\{v_n\} \subset K$ com $\Phi(u_n) = v_n$. Sendo K um compacto, existe uma subsequência

$$\{v_{n_j}\} \subset \{v_n\} \ e \ v \in E$$

de maneira que $v_{n_j} \to v \ em \ E$. Usando a definição de Φ temos

$$\Phi(u_{n_j}) = I(u_{n_j}) - T(u_{n_j}),$$

e portanto,

$$u_{n_j} = v_{n_j} + T(u_{n_j}).$$

Segue da compacidade do operador T que existe uma subsequência

$$u_{n_{j_p}} \subset u_{n_j} \ \text{ e } \ z \in E \ \text{ tal que } \ T(u_{n_{j_p}}) \to z \ em \ E.$$

Assim,

$$u_{n_{j_p}} = \Phi(u_{n_{j_p}}) + T(u_{n_{j_p}}) \quad \text{e} \quad \text{com} \quad \text{isso} \quad u_{n_{j_p}} \to v + z \ em\ E.$$

Como Φ uma aplicação contínua, o conjunto $\Phi^{-1}(K)$ é um conjunto fechado em $\overline{\Omega}$, logo é um conjunto fechado em E e consequentemente $v + z \in \Phi^{-1}(K)$. Mostrando que $\Phi^{-1}(K)$ é um conjunto compacto. ■

Considere o operador $T \in Q(\overline{\Omega}, E)$, $\Phi = I - T$, $\Phi \in C(\overline{\Omega}, E)$ e um ponto $b \notin \Phi(\partial\Omega)$. De acordo com o Lema 1.16 temos que $\Phi(\partial\Omega)$ é um conjunto fechado em E, logo $r = \rho\{b, \Phi(\partial\Omega)\} > 0$. Fixando $K = \overline{T(\overline{\Omega})}$, do Lema 1.15 encontramos um subespaço de dimensão finita $F_{\frac{r}{2}} \subset E$ e uma função contínua

$$\begin{array}{rccc} g_{\frac{r}{2}}: & K & \to & F_{\frac{r}{2}} \\ & x & \mapsto & g_{\frac{r}{2}}(x), \end{array}$$

satisfazendo

$$\|x - g_{\frac{r}{2}}(x)\| < \frac{r}{2}, \ \forall x \in K,$$

onde $x = \lim_{n\to\infty} T(y_n)$ com $y_n \in \overline{\Omega}$. Definindo

$$T_r(u) = g_{\frac{r}{2}}(T(u)), \ \forall u \in \overline{\Omega} \quad e \quad \Phi_r = (I - T_r)(u), \ \forall u \in \overline{\Omega}$$

observamos que Φ_r é uma perturbação de dimensão finita da identidade com $b \notin \Phi_r(\partial\Omega)$. De fato, para $x \in \partial\Omega$ temos

$$\|b - \Phi_r(x)\| = \|b - \Phi(x) + \Phi(x) - \Phi_r(x)\|$$

e portanto,

$$\|b - \Phi_r(x)\| \geq \|b - \Phi(x)\| - \|\Phi(x) - \Phi_r(x)\|. \tag{1.24}$$

Desde que,

$$\|b - \Phi(x)\| \geq r, \ \forall x \in \partial\Omega$$

sendo $\Phi(x) = x - T(x)$ e $\Phi_r(x) = x - T_r(x)$, $\forall x \in \overline{\Omega}$, temos

$$\|\Phi(x) - \Phi_r(x)\| = \|(x - T(x)) - (x - T_r(x))\|$$

implicando

$$\|\Phi(x) - \Phi_r(x)\| = \|T(x) - T_r(x)\|,$$

ou seja,

$$\|\Phi(x) - \Phi_r(x)\| = \|T(x) - g_{\frac{r}{2}}(T(x))\|.$$

Fazendo $T(x) = w \in K$ obtemos

$$\|\Phi(x) - \Phi_r(x)\| = \|w - g_{\frac{r}{2}}(w)\| < \frac{r}{2},$$

que implica

$$\|\Phi(x) - \Phi_r(x)\| \leq \frac{r}{2}, \ \forall w \in K.$$

Portanto, da desigualdade (1.24) temos

$$\|b - \Phi_r(x)\| \geq r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$$

donde segue-se que

$$\|b - \Phi_r(x)\| > \frac{r}{2} > 0, \ \forall x \in \partial\Omega.$$

O conjunto $\{\|b - \Phi_r(x)\|; x \in \partial\Omega\}$ é limitado inferiormente e pelo postulado de Dedekind possue ínfimo. Assim,

$$\inf\{\|b - \Phi_r(x)\|; x \in \partial\Omega\} \geq \frac{r}{2}$$

implicando que $\rho\{b, \Phi_r(\partial\Omega)\} \geq \dfrac{r}{2} > 0$. Mostrando que $b \notin \Phi_r(\partial\Omega)$. Agora, já podemos calcular o grau de Φ_r, pois o mesmo está definido com relação a Ω no ponto b e será definido da seguinte maneira.

Definição 1.17 *Seja Φ uma perturbação compacta da identidade, isto é, $\Phi = I - T$, onde $T : \overline{\Omega} \to E$ com $T \in Q(\overline{\Omega}, E)$. Definimos o* **grau de Leray & Schauder de Φ com relação a Ω no ponto** b, *como sendo*

$$d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi_r, \Omega, b),$$

onde Φ_r é uma perturbação de dimensão finita da identidade satisfazendo

$$\|\Phi(x) - \Phi_r(x)\| \leq \frac{r}{2}, \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Vamos mostrar que a definição é consistente, isto é, não depende da escolha do Φ_r. Sejam Φ_1 e Φ_2 duas perturbações de dimensão finita da identidade, denotadas por $\Phi_1 = I - T_1$ e $\Phi_2 = I - T_2$ com

$$\|\Phi(x) - \Phi_1(x)\| \leq \frac{r}{2} \quad e \quad \|\Phi(x) - \Phi_2(x)\| \leq \frac{r}{2}, \ \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Considere também F_1 e F_2 subespaços de E de dimensão finita, que contêm $T_1(\overline{\Omega})$ e $T_2(\overline{\Omega})$, respectivamente e, também o vetor $b \in E$. Fixe F um subespaço de E de dimensão finita que contém $F_1 + F_2$ e b. Assim, $T_1(\overline{\Omega}) \subset F$, $T_2(\overline{\Omega}) \subset F$ e $b \in F$. Consequentemente, pela definição do grau de uma perturbação finita da identidade, temos

$$d(\Phi_1, \Omega, b) = d(\Phi_{1|_{\overline{\Omega} \cap F}}, \Omega \cap F, b)$$

e

$$d(\Phi_2, \Omega, b) = d(\Phi_{2|_{\overline{\Omega} \cap F}}, \Omega \cap F, b).$$

Defina a seguinte homotopia

$$\begin{array}{rlll} H: & \overline{\Theta} \times [0,1] & \to & F \\ & (x,t) & \mapsto & H(x,t) = t \cdot \Phi_{1|_{\overline{\Omega} \cap F}}(x) + (1-t) \cdot \Phi_{2|_{\overline{\Omega} \cap F}}(x) \ \ com\ \Theta = \overline{\Omega} \cap F. \end{array}$$

Temos que $b \notin H(\partial\Theta \times [0,1])$. De fato, usando a invariânçia do grau de Brouwer, por homotopia segue-se que

$$d(H(\cdot, 0), \Theta, b) = d(H(\cdot, 1), \Theta, b).$$

Desde que $H(\cdot, 0) = \Phi_{1|_{\overline{\Omega} \cap F}}$, $H(\cdot, 1) = \Phi_{2|_{\overline{\Omega} \cap F}}$ e $\Theta = \overline{\Omega} \cap F$ concluimos que

$$d(\Phi_{2|_{\overline{\Omega} \cap F}}, \Omega \cap F, b) = d(\Phi_{1|_{\overline{\Omega} \cap F}}, \Omega \cap F, b).$$

Portanto, $d(\Phi_2, \Omega, b) = d(\Phi_1, \Omega, b)$. Mostrando que a definição do grau de Leray & Schauder de Φ com relação a Ω no ponto b é consistente.

1.2.1 Propriedades Fundamentais do Grau de Leray & Schauder

No que segue, vamos usar sempre $T \in Q(\overline{\Omega}, E)$ e $\Phi = I - T$.

($\mathbf{P_1}$) Continuidade em relação ao operador T

Existe uma vizinhança U de T em $Q(\overline{\Omega}, E)$ tal que $\forall\, S \in U$ temos que:

(i) $b \notin (I - S)(\partial\Omega)$,

(ii) $d(I - S, \Omega, b) = d(\Phi, \Omega, b)$.

Demonstração:

Fixe $r = \rho\{b, \Phi(\partial\Omega)\} > 0$, $U = \{S \in Q(\overline{\Omega}, E); \|S - T\|_\infty < \dfrac{r}{2}\}$ e $S \in U$. Definindo

$\Psi = I - S$ temos que $\rho\{b, \Psi(\partial\Omega)\} \geq \dfrac{r}{2}$ e $b \notin \Psi(\partial\Omega)$. De fato, para $x \in \partial\Omega$ temos

$$\|b - \Psi(x)\| = \|b - \Phi(x) + \Phi(x) - \Psi(x)\|$$

implicando

$$\|b - \Psi(x)\| \geq \|b - \Phi(x)\| - \|\Phi(x) - \Psi(x)\|. \tag{1.25}$$

Uma vez que

$$\|\Phi(x) - \Psi(x)\| \leq \|T - S\|_\infty < \frac{r}{2}, \ \forall x \in \overline{\Omega} \quad e \quad \|b - \Phi(x)\| \geq r$$

temos

$$\|b - \Psi(x)\| \geq \frac{r}{2} > 0.$$

Sendo o conjunto $\{\|b - \Psi(x)\|; x \in \partial\Omega\}$ limitado inferiormente, pelo postulado de Dedekind o mesmo possui ínfimo. Logo
$\inf\{\|b - \Psi(x)\|;\ x \in \partial\Omega\} \geq \dfrac{r}{2}$ e assim $\rho\{b, \Psi(\partial\Omega)\} \geq \dfrac{r}{2} > 0.$
Observando que $\{b\}$ é um compacto e $\Psi(\partial\Omega)$ um fechado, concluímos que $b \notin \Psi(\partial\Omega)$.
Considere Φ_1 e Φ_2 duas perturbações de dimensão finita da identidade, verificando $\|\Phi(x) - \Phi_1(x)\| \leq \dfrac{r}{4}$ e $\|\Psi(x) - \Phi_2(x)\| \leq \dfrac{r}{4}$, $\forall\, x \in \overline{\Omega}$. Logo, pela definição do grau de Leray & Schauder temos

$$d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi_1, \Omega, b) = d(\Phi_{1|_{\overline{\Omega} \cap F}}, \Omega \cap F, b)$$

e

$$d(\Psi, \Omega, b) = d(\Phi_2, \Omega, b) = d(\Phi_{2|_{\overline{\Omega} \cap F}}, \Omega \cap F, b),$$

onde F é um subespaço de dimensão finita contendo $T_1(\overline{\Omega})$, $S_1(\overline{\Omega})$ e o ponto b, com $\Phi_1 = I - T_1$ e $\Phi_2 = I - S_1$. Defina a seguinte homotopia

$$\begin{aligned} H :\ \overline{\Theta} \times [0,1] \ &\rightarrow \ F \\ (x,t) \ &\mapsto \ H(x,t) = t\Phi_{1|_{\overline{\Omega} \cap F}}(x) + (1-t)\Phi_{2|_{\overline{\Omega} \cap F}}(x), \ \text{ com } \Theta = \overline{\Omega} \cap F. \end{aligned}$$

Temos que $b \notin H(\partial\Theta \times [0,1])$, pois

$$\|H(x,t) - \Phi(x)\| = \|t\Phi_{1|_{\overline{\Omega} \cap F}}(x) + (1-t)\Phi_{2|_{\overline{\Omega} \cap F}}(x) - t\Phi(x) - (1-t)\Phi(x)\|.$$

Donde obtemos

$$\|H(x,t) - \Phi(x)\| \leq |t|\|\Phi_{1|_{\overline{\Omega} \cap F}}(x) - \Phi(x)\| + |1-t|\|\Phi_{2|_{\overline{\Omega} \cap F}}(x) - \Phi(x)\|.$$

Desde que

$$\|\Phi_{1|_{\overline{\Omega}\cap F}}(x) - \Phi(x)\| \leq \frac{r}{4} \quad \text{e} \quad \|\Phi_{2|_{\overline{\Omega}\cap F}}(x) - \Phi(x)\| \leq \frac{r}{4},$$

com $\Phi_{1|_{\overline{\Omega}\cap F}} = I - T_1$ e $\Phi_{2|_{\overline{\Omega}\cap F}} = I - T_2$ temos

$$\|H(x,t) - \Phi(x)\| \leq t \cdot \frac{r}{4} + (1-t) \cdot \frac{r}{4} = \frac{r}{4} > 0.$$

Portanto, $\|H(x,t) - \Phi(x)\| \leq \frac{r}{4}$, $\forall\, x \in \overline{\Omega}$. Sendo $\partial\Theta = \partial(\Omega \cap F) = \partial\Omega \cap F$, segue-se que

$$\rho\{b, H(\partial\Theta \times [0,1])\} \geq \frac{r}{2},$$

pois, para cada $x \in \partial(\Omega \cap F)$

$$\|b - H(x,t)\| = \|b - \Phi(x) + \Phi(x) - H(x,t)\|$$

e assim,

$$\|b - H(x,t)\| \geq \|b - \Phi(x)\| - \|\Phi(x) - H(x,t)\|.$$

Daí, segue-se que

$$\|b - H(x,t)\| \geq \frac{r}{2}, \ \forall\, x \in \partial(\Omega \cap F).$$

Sendo o conjunto

$$\{\|b - H(x,t)\|; x \in \partial(\Omega \cap F), t \in [0,1]\}$$

limitado inferiormente, pelo postulado de Dedekind possui ínfimo, logo

$$\inf\{\|b - H(x,t)\|;\ x \in \partial(\Omega \cap F), t \in [0,1]\} \geq \frac{r}{2}$$

e consequentemente $\rho\{b, H(\partial(\Omega \cap F))\} \geq \frac{r}{2} > 0$. Logo, $b \notin H(\partial\Theta \times [0,1])$. Usando a invariância do grau de Brouwer por homotopia segue-se que

$$d(H(\cdot,0), \Theta, b) = d(H(\cdot,1), \Theta, b).$$

Desde que, $H(\cdot,0) = \Phi_{2|_{\overline{\Omega}\cap F}}$, $H(\cdot,1) = \Phi_{1|_{\overline{\Omega}\cap F}}$, e $\Theta = \overline{\Omega} \cap F$ temos que

$$d(\Phi_{2|_{\overline{\Omega}\cap F}}, \Omega \cap F, b) = d(\Phi_{1|_{\overline{\Omega}\cap F}}, \Omega \cap F, b).$$

Portanto, $d(\Psi, \Omega, b) = d(\Phi, \Omega, b)$. ■

($\mathbf{P_2}$) Invariância do Grau por Homotopia

Seja H uma aplicação tal que $H \in C(\overline{\Omega} \times [0,1], E)$, definida por $H(x,t) = x - S(x,t)$, onde $S \in Q(\overline{\Omega} \times [0,1], E)$. Se $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$, então o grau $d(H(\cdot,t),\Omega,b)$ é constante em $[0,1]$.

Demonstração:

Considerando $r = \rho\{b, H(\partial\Omega \times [0,1])\}$, vamos mostrar que $r > 0$. Para este fim defina a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rccl} \widehat{H}: & \overline{\Omega} \times [0,1] & \to & E \times \mathbb{R} \\ & (x,t) & \mapsto & \widehat{H}(x,t) = (x,t) - (S(x,t),t), \end{array}$$

isto é,

$$\widehat{H}(x,t) = (x - S(x,t), 0).$$

Neste caso, temos que $\widehat{H} = I - \widehat{S}$ com $\widehat{S} : \overline{\Omega} \times [0,1] \to E \times \mathbb{R}$ dada por $\widehat{S}(x,t) = (S(x,t),t)$ uma perturbação compacta da identidade, no espaço de Banach $E \times \mathbb{R}$, pois S é um operador compacto.

Afirmação: O operador $\widehat{S}$ é um operador compacto.

De fato, devemos mostrar que

(i) $\widehat{S}$ é contínuo,

(ii) Sendo U limitado, então $\overline{\widehat{S}(U)}$ é compacto.

Prova de (i).

Desde que, S é um operador compacto tem-se que S é contínuo, e portanto $\widehat{S}$ é contínuo.

Prova de (ii).

Seja $R_n = (x_n, t_n)$ uma sequência em $\overline{\Omega} \times [0,1]$. Segue do Teorema de Bolzano-Weierstrass que existe uma subsequência $(t_{n_j}) \subset (t_n)$ tal que $t_{n_j} \to t_0$. Desde que S é compacto temos que existe uma subsequência

$$R_{n_{j_k}} = (x_{n_j}, t_{n_j}) \text{ tal que } (x_{n_{j_k}}, t_{n_{j_k}}) \to y_0 \text{ em } E \text{ com } (t_{n_{j_k}}) \subset (t_{n_j}).$$

Logo

$$(S(x_{n_{j_k}}, t_{n_{j_k}}), t_{n_{j_k}}) \to (y_0, t_0) \text{ em } E \times \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\widehat{S}(x_{n_{j_k}}, t_{n_{j_k}}) = (S(x_{n_{j_k}}, t_{n_{j_k}}), t_{n_{j_k}}) \to (y_0, t_0) \; em \; E \times \mathbb{R}.$$

Portanto, $\widehat{S}$ é um operador compacto.

Pelo Lema 1.16 $\widehat{H}(\partial\Omega \times [0,1])$ é um fechado, isto é, $H(\partial\Omega \times [0,1], 0)$ é um fechado em

$E \times \mathbb{R}$ o que implica $H(\partial\Omega \times [0,1])$ é um fechado E. Desde que, $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$ podemos concluir que $r > 0$.

Fixe $K = \overline{S(\overline{\Omega} \times [0,1])} \subset E$. Pelo Lema 1.15 existe um subespaço de dimensão finita $F_{\frac{r}{2}} \subset E$ e uma aplicação $g_{\frac{r}{2}} \in C(K, F_{\frac{r}{2}})$ verificando

$$\|x - g_{\frac{r}{2}}(x)\| < \frac{r}{2}, \forall x \in K.$$

Definindo

$$H_1(x,t) = x - g_{\frac{r}{2}}(S(x,t)),\ \forall\, x\, \in \overline{\Omega},\ \forall\, t\, \in [0,1]$$

encontramos

$$\|H(x,t) - H_1(x,t)\| < \frac{r}{2},\ \forall\, x\, \in \overline{\Omega},\ \forall\, t\, \in [0,1].$$

De fato,

$$\|H(x,t) - H_1(x,t)\| = \|(x - S(x,t)) - (x - g_{\frac{r}{2}}(S(x,t)))\|$$

implicando

$$\|H(x,t) - H_1(x,t)\| = \|S(x,t) - g_{\frac{r}{2}}(S(x,t))\|.$$

Considerando $w = S(x,t) \in K$, temos $\|H(x,t) - H_1(x,t)\| = \|w - g_{\frac{r}{2}}(w)\|$ e portanto

$$\|H(x,t) - H_1(x,t)\| < \frac{r}{2},\ \forall\, x\, \in \overline{\Omega},\ \forall\, t\, \in [0,1].$$

Desde que,

$$\{\|H(x,t) - H_1(x,t)\|;\ x\, \in \overline{\Omega},\ t \in [0,1]\}$$

é limitado superiormente, pelo postulado de Dedekind

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} \|H(x,t) - H_1(x,t)\| < \frac{r}{2}\ \ com\ \ t \in [0,1]$$

e com isso,

$$\|H(\cdot,t) - H_1(\cdot,t)\| < \frac{r}{2},\ \forall\, t\, \in [0,1].$$

Então, pela propriedade (P_1)

$$d(H(\cdot,t), \Omega, b) = d(H_1(\cdot,t), \Omega, b),\ \forall\, t\, \in [0,1].$$

Usando a invariância do grau por homotopia temos

$$d(H_1(\cdot,t)_{|\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b) \equiv \text{constante},$$

onde F é um subespaço de dimensão finita que contém $\overline{g_{\frac{r}{2}}(S(\overline{\Omega} \times [0,1]))}$ e b. Aplicando a definição do grau de Leray & Schauder para H_1 temos

$$d(H_1(\cdot,t),\Omega,b) = d(H_1(\cdot,t)_{|\overline{\Omega}\cap F},\Omega\cap F,b), \forall t \in [0,1].$$

Portanto,

$$d(H(\cdot,t),\Omega,b) \equiv constante.$$

∎

Antes de enunciarmos a próxima propriedade, precisamos do seguinte lema.

Lema 1.18 *Se* $b \notin \Phi(\partial\Omega)$, *então* $d(\Phi,\Omega,b) = d(\Phi - b,\Omega,0)$.

Demonstração: Seja $F \subset E$ um subespaço de dimensão finita que contém b e $T_r(\overline{\Omega})$. Então,

$$d(\Phi,\Omega,b) = d(\Phi_r,\Omega,b) = d(\Phi_{r|\overline{\Omega}\cap F},\Omega\cap F,b).$$

Segue do grau topológico de Brouwer que

$$d(\Phi_{r|\overline{\Omega}\cap F},\Omega\cap F,b) = d(\Phi_{r|\overline{\Omega}\cap F} - b,\Omega\cap F,0).$$

Note que

$$\Phi_{r|\overline{\Omega}\cap F} - b = (\Phi_r - b)_{|\overline{\Omega}\cap F}$$

e assim

$$d(\Phi,\Omega,b) = d((\Phi_r - b)_{|\overline{\Omega}\cap F},\Omega\cap F,0).$$

Por outro lado, da definição do grau de Leray & Schauder segue-se que

$$d(\Phi_r - b,\Omega,0) = d((\Phi_r - b)_{|\overline{\Omega}\cap F},\Omega\cap F,0).$$

Sendo, $\|\Phi(x) - \Phi_r(x)\| \leq \frac{r}{2}$, $\forall\ x \in \overline{\Omega}$ e tendo em vista que

$$\|(\Phi - b) - (\Phi_r - b)\| = \|\Phi - \Phi_r\| \leq \frac{r}{2}$$

obtemos

$$d(\Phi - b,\Omega,0) = d(\Phi_r - b,\Omega,0).$$

Portanto,

$$d(\Phi,\Omega,b) = d(\Phi - b,\Omega,0).$$

■

($\mathbf{P_3}$) O Grau é Constante em Componentes Conexas de $\mathbb{R}^N\backslash\Phi(\partial\Omega)$

Se b_1 e b_2 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N\backslash\Phi(\partial\Omega)$, então

$$d(\Phi,\Omega,b_1) = d(\Phi,\Omega,b_2).$$

Demonstração: Sejam b_1 e b_2 pontos de $\mathbb{R}^N\backslash\Phi(\partial\Omega)$ que pertencem à mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N\backslash\Phi(\partial\Omega)$. Desde que a componente conexa que contém b_1 e b_2 é um aberto em $\mathbb{R}^N$, pois $\mathbb{R}^N\backslash\Phi(\partial\Omega)$ é um aberto, esta componente conexa é conexa por caminhos. Assim, existe um caminho

$$\begin{array}{rccl} q: & [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R}^N \\ & t & \mapsto & f(t) \in C_{b_1,b_2} \quad com \quad b_1 = q(0) \;\; e \;\; b_2 = q(1), \end{array}$$

onde C_{b_1,b_2} é a componente conexa que contém o caminho que liga b_1 à b_2. Note que, $q([0,1]) \subset C_{b_1,b_2}$ é um compacto em $\mathbb{R}^N$. Assim, existem $\epsilon > 0$ e $\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_s\}$ tais que

$$f([0,1]) \subset \bigcup_{i=1}^{s} B_\epsilon(x_i) \quad com \quad B_\epsilon(x_i) \cap B_\epsilon(x_{i+1}) \neq \emptyset,$$

onde $i = 1,2,3,\ldots,s-1$. Vamos fixar atenção na bola $B_\epsilon(x_1)$ e, considere $b_1 = x_1$ e $b_2 = x_s$.

Seja $x \in B_\epsilon(x_1)$ de modo que $x \notin \Phi(\partial\Omega)$. Logo $d(\Phi,\Omega,b)$ e

$$d(\Phi,\Omega,b_1) = d(\Phi,\Omega,x),$$

pois

$$\|(\Phi - b_1) - (\Phi - x)\|_\infty = \|b_1 - x\|_\infty = \|b_1 - x\| < \epsilon.$$

Portanto, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$d(\Phi - b_1,\Omega,0) = d(\Phi - x,\Omega,0)$$

o que implica

$$d(\Phi,\Omega,b_1) = d(\Phi,\Omega,x), \;\; \forall\, x \in B_\epsilon(b_1).$$

Seguindo este raciocínio deduzimos

$$d(\Phi,\Omega,x_i) = d(\Phi,\Omega,y), \;\; \forall\, y \in B_\epsilon(x_i) \quad com \quad i = 1,2,3,\ldots,s.$$

Desde que, $B_\epsilon(x_i) \cap B_\epsilon(x_{i+1}) \neq \emptyset$, com $i = 1, 2, 3, \ldots, s-1$, podemos concluir que

$$d(\Phi, \Omega, b_1) = d(\Phi, \Omega, b_2).$$

■

($\mathbf{P_4}$) Aditividade

Sejam $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ e Ω_1, Ω_2 abertos, disjuntos e limitados em E com $b \notin \Phi(\partial\Omega_1) \cup \Phi(\partial\Omega_2)$. Então, $d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi, \Omega_1, b) + d(\Phi, \Omega_2, b)$.

Demonstração: Sendo Φ uma perturbação compacta da identidade, o grau de Leray & Schauder de Φ é dado por $d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi_r, \Omega, b)$, onde Φ_r é uma pertubação de dimensão finita da identidade, que satisfaz

$$\|\Phi(x) - \Phi_r(x)\| \leq \frac{r}{2}, \forall x \in \overline{\Omega} \text{ com } \Phi = I - T \text{ e } \Phi_r = I - T_r.$$

Assim, $d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi_{r|_{\overline{\Omega} \cap F}}, \Omega \cap F, b)$ onde, F é um subespaço de dimensão finita que contém $T_r(\overline{\Omega})$ e b. Por hipótese, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ e $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Logo,

$$\Omega \cap F = (\Omega_1 \cap F) \cup (\Omega_2 \cap F).$$

Usando a aditividade do grau de Brouwer temos

$$d(\Phi_{r|_{\overline{\Omega} \cap F}}, \Omega \cap F, b) = d(\Phi_{r|_{\overline{\Omega_1} \cap F}}, \Omega_1 \cap F, b) + d(\Phi_{r|_{\overline{\Omega_2} \cap F}}, \Omega_2 \cap F, b).$$

Portanto, $d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi, \Omega_1, b) + d(\Phi, \Omega_2, b)$. ■

1.2.2 Consequências das Principais Propriedades do Grau de Leray & Schauder

($\mathbf{C_1}$)(Normalização) Seja I a projeção canônica de $\overline{\Omega}$ em E, isto é, $I(x) = x$, então

$$d(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1, & se \quad b \in \Omega \\ 0, & se \quad b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Demonstração: Considerando $F = \langle b \rangle$, o espaço gerado por b, que é um espaço de dimensão finita, então $d(I, \Omega, b) = d(I_{|_{\overline{\Omega} \cap F}}, \Omega \cap F, b)$. Usando a propriedade ($\mathbf{C_1}$) do grau topológico de Brouwer temos

$$d(I_{|_{\overline{\Omega} \cap F}}, \Omega \cap F, b) = \begin{cases} 1, & se \quad b \in \Omega \cap F \\ 0, & se \quad b \notin \overline{\Omega} \cap F, \end{cases}$$

donde segue o resultado. ∎

($\mathbf{C_2}$) Se $b \notin \Phi(\overline{\Omega})$, então, $d(\Phi, \Omega, b) = 0$.

Demonstração: Sendo $\Phi = I - T$ uma perturbação compacta da identidade, pelo Lema 1.16 temos que Φ é fechado. Logo $\alpha = \rho\{b, \Phi(\overline{\Omega})\} > 0$. Por outro lado, $\alpha \leq r = \rho\{b, \Phi(\partial\Omega)\} > 0$ e pelo Lema 1.15 existe uma perturbação de dimensão finita da identidade $\Phi_\alpha \in C(\overline{\Omega}, E)$ tal que

$$\|\Phi(x) - \Phi_\alpha(x)\| < \frac{\alpha}{2}, \ \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

Afirmação: $b \notin \Phi_\alpha(\overline{\Omega})$.

De fato, para $x \in \overline{\Omega}$ temos

$$\|b - \Phi_\alpha(x)\| = \|b - \Phi(x) + \Phi(x) - \Phi_\alpha(x)\|$$

implicando

$$\|b - \Phi_\alpha(x)\| \geq \|b - \Phi(x)\| - \|\Phi(x) - \Phi_\alpha(x)\|$$

e consequentemente

$$\|b - \Phi_\alpha(x)\| \geq \frac{\alpha}{2}.$$

O conjunto $\{\|b - \Phi_\alpha(x)\|;\ x \in \overline{\Omega}\}$ é limitado inferiormente e pelo postulado de Dedekind possui ínfimo. Logo

$$\inf\{\|b - \Phi_\alpha(x)\|;\ x \in \overline{\Omega}\} \geq \frac{\alpha}{2}$$

o que implica $\rho\{b, \Phi_\alpha(\overline{\Omega})\} \geq \dfrac{\alpha}{2} > 0$. Desde que, $\{b\}$ é um compacto e $\Phi_\alpha(\overline{\Omega})$ é um fechado, tem-se $\rho\{b, \Phi_\alpha(\partial\Omega)\} > 0$, mostrando que $b \notin \Phi_\alpha(\overline{\Omega})$. Por definição

$$d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi_\alpha, \Omega, b) = d(\Phi_{\alpha|_{\overline{\Omega}\cap F}}, \Omega \cap F, b),$$

onde F é o subespaço de dimensão finita de E que contém b e $T(\overline{\Omega})$. Observando que $b \notin \Phi_{\alpha|_{\overline{\Omega}\cap F}}(\overline{\Omega} \cap F)$, pela propriedade ($\mathbf{C_3}$) do grau topológico de Brouwer, concluímos que $d(\Phi, \Omega, b) = 0$. ∎

($\mathbf{C_3}$) **(Existência de Solução)** Se $d(\Phi, \Omega, b) \neq 0$, então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_0) = b$.

Demonstração: Pela propriedade ($\mathbf{C_2}$) temos que, se $b \notin \Phi(\overline{\Omega})$, então $d(\Phi, \Omega, b) = 0$.

Fazendo a negação da propriedade $(\mathbf{C_2})$ temos que, se $d(\Phi,\Omega,b)\neq 0$, então existe $x_0\in\Omega$ tal que $\Phi(x_0)=b$. Mostrando a propriedade $(\mathbf{C_3})$. ■

$(\mathbf{C_4})$ Se $\Phi(\Omega)$ está contido em um subespaço próprio de E, então $d(\Phi,\Omega,b)=0$.

Demonstração: Considere V um subespaço próprio de E tal que $\Phi(\Omega)\subset V$. Se $d(\Phi,\Omega,b)\neq 0$, então pela propriedade $(\mathbf{C_3})$, $\Phi(\Omega)$ é uma vizinhança de b, ou seja, existe $\delta>0$ tal que $B_\delta(b)\subset\Phi(\Omega)\subset V$ e portanto $V=E$, o que é um absurdo, pois V é um subespaço próprio de E. Portanto, $d(\Phi,\Omega,b)=0$. ■

$(\mathbf{C_5})$ **(Excisão)** Seja K um fechado contido em $\overline{\Omega}$ com $b\in\Phi(K)$. Então, $d(\Phi,\Omega,b)=d(\Phi,\Omega\backslash K,b)$.

Demonstração: Usando a definição do grau de Leray & Schauder temos que

$$d(\Phi,\Omega,b)=d(\Phi_{|_{\overline{\Omega}\cap F}},\Omega\cap F,b),$$

onde F é um subespaço de dimensão finita que contém $T(\overline{\Omega})$ e b com $b\in E$ e $b\notin\Phi(\partial\Omega)$. Aplicando a propriedade $(\mathbf{C_5})$ do grau topológico de Brouwer, segue o resultado. ■

$(\mathbf{C_6})$ Seja $\{\Omega_i\}_{i\in\Gamma}$ uma família de abertos, dois a dois disjuntos, contidos em Ω com

$$\Phi^{-1}(\{b\})\subset\bigcup_{i\in\Gamma}\Omega_i.$$

Então, o grau $d(\Phi,\Omega,b)=0$, a menos de um número finito de índices $i\in\Gamma$. Além disso,

$$d(\Phi,\Omega,b)=\sum_{i\in\Gamma}d(\Phi,\Omega_i,b).$$

Demonstração: Uma vez que $b\notin\Phi(\partial\Omega_i)$ pelo Lema 1.16 $\Phi^{-1}(\{b\})$ é um compacto, pois estamos usando o fato que Φ é própria. Pelo Teorema $A.4$, existe um número finito de abertos $\Omega_i\subset\Omega$ que cobrem $\Phi^{-1}(\{b\})$, isto é, existe um conjunto finito Γ_0 de índices tal que $\Phi^{-1}(\{b\})\subset\bigcup\limits_{i\in\Gamma_0}\Omega_i$ com $\Omega_i\subset\Omega$. Portanto, $\forall\, i\in\Gamma\backslash\Gamma_0$ temos que $b\notin\Phi(\Omega_i)$ e pela propriedade (C_2) temos $d(\Phi,\Omega_i,b)=0$.

Considerando que $K=\overline{\Omega}\backslash\bigcup\limits_{i\in\Gamma_0}\Omega_i$ é um compacto, pois

$$K=\overline{\Omega}\backslash\bigcup_{i\in\Gamma_0}\Omega_i=\overline{\Omega}\cap(\bigcup_{i\in\Gamma_0}\Omega_i)^c=\overline{\Omega}\cap(\bigcap_{i\in\Gamma_0}\Omega_i{}^c),$$

temos que K é fechado e como $K \subset \overline{\Omega}$ temos que K é limitado e consequentemente K é compacto. Temos que $b \notin \Phi(K)$, pois $\Phi(b) \in \bigcup_{i \in \Gamma_0} \Omega_i$. Pela propriedade da excisão (C_5), segue-se que

$$d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi, \Omega \backslash K, b) = d(\Phi, \Omega \backslash (\overline{\Omega} \backslash \bigcup_{i \in \Gamma_0} \Omega_i), b)$$

e com isso, $d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi, \bigcup_{i \in \Gamma_0} \Omega_i, b)$. Pela propriedade aditiva ($\mathbf{P_4}$) temos

$$d(\Phi, \Omega, b) = \sum_{i \in \Gamma_0} d(\Phi, \Omega_i, b).$$

Portanto,

$$d(\Phi, \Omega, b) = \sum_{i \in \Gamma} d(\Phi, \Omega_i, b).$$

■

($\mathbf{C_7}$) Seja $\Psi = I - \Phi$, onde $S \in Q(\Omega, E)$ tal que $\Psi(x) = \Phi(x), \forall x \in \partial\Omega$. Se $b \notin \Phi(\partial\Omega) = \Psi(\partial\Omega)$, então, $d(\Phi, \Omega, b) = d(\Psi, \Omega, b)$.

Demonstração: Considere a seguinte homotopia

$$H(x,t) = t\Phi(x) + (1-t)\Psi(x), \ \forall \, x \in \overline{\Omega} \ \ e \ \ \forall \, t \in [0,1].$$

Para todo $t \in [0,1]$, $H(\cdot,t)$ é uma perturbação compacta da identidade, onde $H(x,t) = x - G(x,t)$ com $G(x,t) = tT(x) + (1-t)S(x)$. Desde que, $\Phi_{|\partial\Omega} = \Psi_{|\partial\Omega}$ temos que $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. De fato, caso contrário existiria $x_0 \in \partial\Omega$ e $t_0 \in [0,1]$ tal que $b = H(x_0, t_0)$ implicando que $H(x_0, t_0) = \Phi(x_0) = \Psi(x_0) = b$ o que é um absurdo, pois $b \notin \Phi(\partial\Omega) = \Psi(\partial\Omega)$. Mostrando que $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$.

Sendo o grau constante por homotopia compacta temos

$$d(H(\cdot,0), \Omega, b) = d(H(\cdot,1), \Omega, b),$$

com $H(\cdot,0) = \Psi$ e $H(\cdot,1) = \Phi$ e assim concluímos que $d(\Psi, \Omega, b) = d(\Phi, \Omega, b)$. ■

($\mathbf{C_8}$) Não existe operador $\Phi \in C(\overline{B}_1(0)), \partial B_1(0))$ da forma $\Phi = I - T$, onde $T \in Q(\overline{B}_1(0), E)$, verificando $\Phi_{\partial B_1(0)} \equiv I_{\partial B_1(0)}$.

Demonstração: Se tal aplicação existisse, então

$$d(\Phi, B_1(0), 0) = d(I, B_1(0), 0) = 1$$

e pela propriedade $(\mathbf{C_3})$ existiria $x_0 \in B_1(0)$ tal que $\Phi(x_0) = 0$ o que é uma contradição, pelo fato de que $\forall\, x \in \overline{B_1(0)}$ tem-se que $\|\Phi(x)\| = 1$. $\blacksquare$

Capítulo 2

Existência de Solução para uma Classe de Equações Semilineares Elípticas de 2^{a} Ordem

Pretendemos neste capítulo fazer uma aplicação da Teoria do Grau Topológico desenvolvida por Leray & Schauder, demonstrando o **Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer** e mostrando um método de obtenção de solução para uma classe de Problemas Semilineares de 2^{a} Ordem.

2.1 Preliminares Sobre Espaços de Schauder

Nesta seção iremos apresentar os principais resultados envolvendo os espaços de Schauder, que podem ser encontrados no livro do Adams [2]. No que segue Ω denota um domínio (um aberto e conexo) limitado do $\mathbb{R}^N$.

Definição 2.1 *Espaço* $C(\overline{\Omega})$.
O espaço $C(\overline{\Omega})$ *é o espaço das funções contínuas* $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, *munido da norma*

$$\|u\|_0 = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|.$$

Definição 2.2 *Espaço* $C^k(\overline{\Omega})$.
O espaço $C^k(\overline{\Omega})$, *para* $k \in \mathbb{N}$, *é o espaço das funções* $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *que juntamente com todas as derivadas de ordem inferior ou igual a* k *são uniformementes contínuas sobre* $\overline{\Omega}$.

Observação 2.1 *O espaço* $C^k(\overline{\Omega})$ *munido da norma*

$$\|u\|_k = \sum_{0 \leq |\sigma| \leq k} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |D^\sigma u(x)|$$

torna-se um espaço de Banach, onde:

$$(\sigma) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_N), \ \ com \ \ \sigma_i \in \mathbb{N}, \ \ |\sigma| = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_N$$

e

$$D^\sigma u(x) = \frac{\partial^{|\sigma|} u(x)}{\partial x_1^{\sigma_1} \partial x_2^{\sigma_2} \partial x_3^{\sigma_3} \ldots \partial x_N^{\sigma_N}}.$$

Definição 2.3 *Espaço $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$.*
O espaço $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, com $\alpha \in (0,1)$, é o subespaço de $C^k(\overline{\Omega})$ constituído pelas funções com k-ésimas derivadas sendo Holderianas com expoente α, isto é, que verificam

$$H_{k,\alpha}(u) = \max_{|\sigma|=k} \sup_{x,y \in \overline{\Omega}} \frac{|D^\sigma u(x) - D^\sigma u(y)|}{|x-y|^\alpha} \ < \ \infty, \ com \ x \neq y.$$

De forma abreviada temos

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\overline{\Omega}); H_{k,\alpha}(u) < \infty\}.$$

Em todo nosso trabalho vamos considerar a seguinte norma no espaço $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$

$$\|u\|_{k,\alpha} = \|u\|_k + H_{k,\alpha}(u),$$

a qual torna $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ um espaço de Banach.
No que segue-se usaremos as seguinte notações:

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = C^\alpha(\overline{\Omega}) \ \ com \ \ \alpha \in (0,1) \ \ e \ \ \|\cdot\|_{0,\alpha} = \|\cdot\|_\alpha.$$

2.2 Alguns Resultados Clássicos

Nesta seção iremos apresentar alguns resultados clássicos para o problema de Dirichlet no caso linear demonstrado por Schauder e também demonstrar um resultado de unicidade para tal classe de problema.

Em todo este capítulo vamos sempre considerar um operador diferencial L da seguinte forma

$$Lu = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x) u_{x_i} + c(x) u, \ \ com \ \ x \in \overline{\Omega} \ \ e \ \ u \in C^2(\overline{\Omega}).$$

Definição 2.4 (Operador Uniformemente Elíptico)
O operador L é dito uniformemente elíptico em $\overline{\Omega}$, quando existe $\nu > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \nu |\xi|^2, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{2.1}$$

onde $|\cdot|$ é a norma usual em $\mathbb{R}^N$.

Ao longo desta seção iremos sempre supor que $\alpha \in (0,1)$, Ω é um domínio limitado com fronteira suave e L é uniformemente elíptico com $a_{ij},$, b_i, $c \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$.

Teorema 2.5 (ESTIMATIVA DE SCHAUDER) *(Ver [9])*

Seja $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ e $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ uma solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Lu &= f, \quad \Omega \\ u &= 0, \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_1}$$

Então,

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq k(\|f\|_{\alpha} + \|u\|_0),$$

onde k é uma constante que depende de α, Ω, ν, N e das normas dos coeficientes de L em $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$.

O próximo resultado conhecido como **Princípio do Máximo Clássico** é um resultado de fundamental importância para estudar o sinal de funções de classe $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e estabelecer um importante resultado de unicidade para o problema (P_1).

2.2.1 Princípio do Máximo Clássico

Considere o operador linear diferenciável da forma

$$Lu = a_{ij}(x)D_{ij}u + b_i(x)D_iu + c(x)u, \quad com \quad a_{ij} = a_{ji}, \tag{2.2}$$

onde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \Omega$ um domínio de $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$. Assumiremos que $u \in C^2(\Omega)$.

Teorema 2.6 (Princípio do Máximo Fraco)
Seja L uniformemente elíptico num domínio limitado Ω. Suponha que

$$Lu \geq 0 \ (\leq 0) \ \ em \ \ \Omega, \ \ c = 0 \ \ em \ \ \Omega,$$

com $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Então, o máximo (mínimo) de u em $\overline{\Omega}$ é obtido sobre $\partial\Omega$, isto é,

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \ \left(\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u \right). \tag{2.3}$$

Demonstração: É claro que, se $Lu > 0$ *em* Ω, então o princípio do máximo forte é conservado, isto é, o máximo de u não é obtido em Ω. Pois se em $x_0 \in \Omega$ a função u

atinge o valor máximo em $\overline{\Omega}$, devemos ter $Du(x_0) = 0$ e a matriz $D^2u(x_0) = [D_{ij}u(x_0)]$ é não positiva. Mas, a matriz $[a_{ij}]$ é positiva, desde que L seja uniformemente elíptico. Consequentemente,

$$Lu(x_0) = a_{ij}u(x_0)D_{ij}u(x_0) \leq 0, \;\; (ver \;\; [10] \;\; página \;\; 328)$$

contrariando o fato que $Lu>0$. Note que, neste argumento é necessário apenas as propriedades da matriz $[a_{ij}]$. Para o operador L temos uma importante limitação com respeito aos termos b_i que é $\dfrac{|b_i|}{\nu} \leq b_0 = constante$. De fato, desde que $a_{11} \geq \nu$, existe uma constante suficientemente grande γ para a qual

$$Le^{\gamma x_1} = (\gamma^2 a_{11} + \gamma b_1)e^{\gamma x_1} \geq \nu(\gamma^2 - \gamma b_0)e^{\gamma x_1} > 0.$$

Assim, para qualquer $\epsilon > 0$, temos que $L(u + \epsilon e^{\gamma x_1}) > 0$ em Ω e também temos que

$$\sup_{\Omega}(u + \epsilon e^{\gamma x_1}) = \sup_{\partial\Omega}(u + \epsilon e^{\gamma x_1}).$$

Veja que para $\epsilon \to 0$ temos $\sup\limits_{\Omega} u = \sup\limits_{\partial\Omega} u$, demonstrando o Teorema. ■

Supondo de um modo mais geral $c \leq 0$ em Ω e considerando o subconjunto $\Omega^+ \subset \Omega$, definido por $\Omega^+ = \{x \in \Omega; u(x) > 0\}$ como $Lu \geq 0$ em Ω temos que

$$L_0 u = a_{ij}D_{ij}u + b_iD_iu \geq -cu \;\; em \;\; \Omega^+$$

e como o máximo de u em $\overline{\Omega}^+$ deve ser atingido em $\partial\overline{\Omega}^+$, consequentemente também será atingido sobre $\partial\Omega$. Então, escrevendo $u^+ = \max(u, 0)$, $u^- = \min(u, 0)$ obtemos o seguinte corolário:

Corolário 2.7 *Seja L uniformemente elíptico num domínio limitado Ω. Suponhamos que em Ω*

$$Lu \geq 0 (\leq 0) \;\; com \;\; c \leq 0 \tag{2.4}$$

e $u \in C^0(\overline{\Omega})$. Então,

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \left(\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-\right).$$

Se $Lu = 0$ em Ω, então

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Um fato importante que segue do princípio do máximo é uma melhora na estimativa de $\|u\|_{2,\alpha}$, mencionada na Estimativa de Schauder. Neste caso temos

$$\|u\|_0 \leq k^{'}\|f\|_0 \;\; (ver \;\; [7]), \tag{2.5}$$

onde $k^{'}$ é uma constante que depende de α, Ω, ν, N e das normas dos coeficientes de L em $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$.

Teorema 2.8 (Unicidade de Solução)
O problema de Dirichlet (P_1) tem uma única solução.

Demonstração: Se $u, v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ são soluções de (P_1), temos

$$\begin{cases} Lu = Lv, & \Omega \\ u = v, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Considere $w = u - v$. Assim

$$\begin{cases} Lw = Lu - Lv = 0, & \Omega \\ w = 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Segue do princípio de máximo que w atinge máximo e mínimo na fronteira, implicando que $w \equiv 0$, ou seja, $u = v$. ■

Teorema 2.9 (Teorema de Schauder)*(Ver [9])*
Se $c(x) \leq 0$, $\forall\, x \in \overline{\Omega}$, com as hipóteses anteriores sobre Ω e L, e assumindo que para cada $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, existe uma, e somente uma solução u do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = f, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases} \tag{P_1}$$

então, existe uma constante k_1 independente de f tal que

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq k_1\|f\|_{\alpha}. \tag{2.6}$$

2.3 Um Princípio de Resolução para uma Classe de Problemas Semilineares.

Nesta seção estamos interessados em obter uma solução para uma classe de problemas do tipo

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = F(x,u), & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_2}$$

No que segue, iremos assumir que Ω é um domínio limitado com fronteira suave. Os coeficientes a_{ij}, b_i, c e F são de classe C^1 sobre $\overline{\Omega}$ e $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, respectivamente, $c(x) \leq 0$, $\forall x \in \overline{\Omega}$ e o operador L dado por

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

sendo uniformemente elíptico.

O método utilizado para obter soluções para o problema (P_2) consiste em reduzir o mesmo a uma aplicação do **Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer.**

O método consiste em linearizar o problema (P_2). Para isto, fixamos uma função u no problema (P_2), na parte não linear $F(\cdot, u(\cdot))$, obtendo assim uma equação linear elíptica de segunda ordem, onde os resultados clássicos apresentados na última seção podem ser usados. Mais precisamente, o **Teorema de Schauder.**

Os resultados da teoria linear do problema de Dirichlet, enunciados na Seção 2.2 permitem construir um operador T que a cada função u faz corresponder uma solução $v = Tu$, ou seja,

$$\begin{array}{rccc} T: & C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) & \rightarrow & C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \\ & u & \mapsto & Tu = v \end{array}$$

do problema linear associado. Desta forma uma função $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução do problema (P_2) se, e somente se, u é um ponto fixo de T.

No que segue, $E = C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e para cada $u \in E$ consideramos a equação elíptica linear de segunda ordem em v.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)v_{x_i} + c(x)v = F(x, u(x)), & \forall x \in \Omega \\ v = 0, & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases} \qquad (P_2)_u$$

Os próximos resultados tem por objetivo mostrar algumas propriedades do operador T.

Definição 2.10 *Um domínio Ω satisfaz a propriedade da poligonal, quando existe $\gamma > 0$ tal que dois pontos quaisquer x e y de $\overline{\Omega}$ podem ser ligados por uma poligonal em Ω de comprimento l verificando $l \leq \gamma|x - y|$.*

Observação 2.2 *Um domínio com fronteira suave verifica a propriedade da poligonal (ver* [11]*).*

Lema 2.11 *Seja* Ω *um domínio que satisfaz a propriedade da poligonal. Se* $A \in C^1(\overline{\Omega})$, *então* A *é Lipschitziana em* $\overline{\Omega}$. *Além disso, existe uma constante* $K(\overline{\Omega})$, *que depende do domínio, tal que*

$$H_{0,1}(A) \leq K(\overline{\Omega})\|A\|_1. \tag{2.7}$$

Demonstração: Vamos mostrar primeiramente que A é Lipschitziana em $\overline{\Omega}$.

Considere $x_1, x_N \in \Omega$ de tal forma que $[x_1, x_N] \subseteq \Omega$. Como Ω é um aberto e conexo limitado do $\mathbb{R}^N$, que satisfaz a propriedade da poligonal, existe $\gamma > 0$ tal que quaisquer dois pontos $x_1, x_N \in \Omega$ podem ser ligados por uma poligonal em Ω de comprimento l verificando $l \leq \gamma|x_N - x_1|$.

Sendo $A \in C^1(\overline{\Omega})$ podemos aplicar o Teorema do Valor Médio, e desde que Ω satisfaz a propriedade da poligonal, quaisquer dois pontos distintos de Ω podem ser ligados por uma poligonal em Ω, onde $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N \in \overline{\Omega}$ são os seus vértices e a poligonal é dada por

$$\bigcup_{k=2}^{N} [x_{k-1}, x_k] \subset \overline{\Omega}. \tag{2.8}$$

Assim,

$$|A(x_N) - A(x_1)| = \Big| \sum_{k=2}^{N} \nabla A(x_{k-1} + (x_k - x_{k-1})\theta_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \Big|$$

e desde que, o somatório possui uma quantidade finita de termos, segue da desigualdade triangular

$$|A(x_N) - A(x_1)| \leq \sum_{k=2}^{N} |\nabla A(x_{k-1} + (x_k - x_{k-1})\theta_{k-1})(x_k - x_{k-1})|.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz encontramos

$$|A(x_N) - A(x_1)| \leq \sum_{k=2}^{N} |\nabla A(x_{k-1} + (x_k - x_{k-1})\theta_{k-1})|\,|x_k - x_{k-1}|. \tag{2.9}$$

Uma vez que

$$|\nabla A(x + (y - x)\theta)| \leq \|A\|_1, \forall x \in \overline{\Omega}, \tag{2.10}$$

temos

$$|\nabla A(x_{k-1} + (x_k - x_{k-1})\theta_k)| \leq \|A\|_1, \ \ \forall\, k = 2, 3, 4, \ldots, N, \ \ \theta_k \in (0,1)$$

e portanto por (2.9)

$$|A(x_N) - A(x_1)| \leq \|A\|_1 \sum_{k=2}^{N} |x_k - x_{k-1}|.$$

Sendo

$$\sum_{k=2}^{N} |x_k - x_{k-1}| = l$$

temos

$$|A(x_N) - A(x_1)| \leq \|A\|_1 l,$$

e portanto,

$$|A(x_N) - A(x_1)| \leq \|A\|_1 \gamma |x_N - x_1|.$$

Considerando $\|A\|_1\gamma = M > 0$, deduzimos que

$$|A(x_N) - A(x_1)| \leq M|x_N - x_1|,$$

mostrando que A é Lipschitziana em $\overline{\Omega}$.

Vamos mostrar agora que

$$H_{0,1}(A) \leq K(\overline{\Omega})\|A\|_1.$$

Pela primeira parte da demonstração temos

$$|A(x) - A(y)| \leq \|A\|_1 \gamma |x - y|, \ \forall\, x, y \in \overline{\Omega}. \tag{2.11}$$

Fazendo $\gamma = K(\overline{\Omega}) > 0$ e substituindo em (2.11) encontramos

$$\frac{|A(x) - A(y)|}{|x - y|} \leq K(\overline{\Omega})\|A\|_1,$$

e com isso onde podemos concluir que $K(\overline{\Omega})\|A\|_1$ é uma cota superior para o conjunto

$$\mathcal{C} = \left\{ \frac{|A(x) - A(y)|}{|x - y|};\ x, y \in \overline{\Omega} \right\}.$$

Logo, $\mathcal{C}$ é limitado superiormente e pelo postulado de Dedekind possui supremo, a saber,

$$\sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|A(x) - A(y)|}{|x - y|} \ \leq \ K(\overline{\Omega})\|A\|_1,\ com\ x \neq y.$$

Segue da última desigualdade e da definição de $H_{0,1}(A)$ a desigualdade,

$$H_{0,1}(A) \leq K(\overline{\Omega})\|A\|_1.$$

■

Recordando que estamos supondo a_{ij}, b_i, c, F funções de classe C^1, segue do Lema 2.11 que a_{ij}, b_i, c, $F \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$. Logo pelo Teorema de Schauder, existe para cada $u \in E$ uma e somente uma solução do problema $(P_2)_u$ que denotaremos por $v = Tu$ com $v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, onde:

$$(P_2)_u \begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)(Tu)_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)(Tu)_{x_i} + c(x)(Tu) & = \quad F(x,u(x)), \quad \forall x \in \Omega \\ \qquad\qquad Tu & = \qquad 0, \qquad \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Com o objetivo de usar um teorema de ponto fixo para o operador T, iremos mostrar que o mesmo é **compacto.** Para tanto, enunciaremos sem demonstrar o seguinte resultado que pode ser encontrado no livro do Adams [2].

Lema 2.12 *A imersão de $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ é compacta.*

O próximo Lema é fundamental para a aplicação do método utilizado neste trabalho.

Lema 2.13 *O operador $T : E \to E$ é compacto.*

Demonstração: O Lema 2.13 fica demonstrado se T verifica:
(**i**) $T(B)$ é relativamente compacto em $E = C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, ou seja, $\overline{T(B)}$ é compacto em $E = C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.
(**ii**) T é contínuo em $E = C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.
Se B um conjunto limitado de $E = C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então, existe $M > 0$ tal que

$$\|u\|_{1,\alpha} \leq M, \ \ \forall\, u \in B.$$

Usando a Estimativa de Schauder, quando $c \leq 0$, obtemos a seguinte desigualdade

$$\|Tu\|_{2,\alpha} \leq k_1 \|F(\cdot, u(\cdot))\|_{\alpha}.$$

Sendo a aplicação F de classe C^1 sobre $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, segue do Lema 2.11 que a mesma é Lipschitziana sobre $\overline{\Omega} \times [-M, M]$, uma vez que o domínio $\overline{\Omega} \times [-M, M]$ tem a propriedade da poligonal.

Afirmação: Existe $M_5 > 0$ tal que

$$\|F(\cdot, u(\cdot))\|_{\alpha} \leq M_5, \ \ \forall\, u \in B.$$

Para mostrar a afirmação, observamos que para cada $u \in B$ temos $\|u\|_{1,\alpha} \leq M$, o que implica

$$\|u\|_{\alpha} \leq M.$$

Por outro lado, pelo Lema 2.11 temos

$$H_{0,1}(u) \leq K(\overline{\Omega})\|u\|_1, \tag{2.12}$$

e assim, obtemos

$$\sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} \leq K(\overline{\Omega})\|u\|_1,\ com\ x \neq y.$$

Consequentemente,

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} \leq K(\overline{\Omega})\|u\|_1,$$

ou seja,

$$|u(x)-u(y)| \leq \|u\|_1 K(\overline{\Omega})|x-y|,\ \forall x,y \in \overline{\Omega}.$$

Assim,

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq \|u\|_1 K(\overline{\Omega})|x-y|^{1-\alpha},\ \forall x,y \in \overline{\Omega}\ com\ x \neq y.$$

Usando o fato que,

$$|x-y| \leq diam(\overline{\Omega})$$

tem-se

$$|x-y|^{1-\alpha} \leq (diam(\overline{\Omega}))^{1-\alpha}, \forall x,y \in \overline{\Omega}$$

o que implica

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq MK(\overline{\Omega})diam(\overline{\Omega})^{1-\alpha},\ \forall u \in B.$$

Daí,

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq M_1,\ \ \forall\, u \in B,$$

e com isso concluimos,

$$\sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \quad \leq \quad M_1, \forall u \in B,\ com\ x \neq y.$$

Portanto,

$$H_{0,\alpha}(u) \leq M_1,\ \forall u \in B. \tag{2.13}$$

Sendo F Lipschitziana sobre $\overline{\Omega}\times[-M,M]$, existe uma constante $C>0$ e observando que

$$(x,u(x))\in\overline{\Omega}\times[-M,M],\ \ \forall\, x\in\overline{\Omega}$$

temos

$$|F(x,u(x))-F(y,u(y))|\leq C(|x-y|+|u(x)-u(y)|),\ \forall u\in B,$$

para alguma constante $C>0$. Usando (2.13)

$$|F(x,u(x))-F(y,u(y))|\leq C(|x-y|+M|x-y|^{\alpha}),\ \forall u\in B$$

e assim

$$\frac{|F(x,u(x))-F(y,u(y))|}{|x-y|^{\alpha}}\leq C(|x-y|^{1-\alpha}+M),$$

ou equivalentemente,

$$\frac{|F(x,u(x))-F(y,u(y))|}{|x-y|^{\alpha}}\leq C(diam(\overline{\Omega})^{1-\alpha}+M),\ \forall u\in B.$$

Mostrando assim, que existe $M_3>0$ satisfazendo

$$\frac{|F(x,u(x))-F(y,u(y))|}{|x-y|^{\alpha}}\leq M_3,\ \forall u\in B.$$

Desta última desigualdade

$$\sup_{x,y\in\overline{\Omega}}\frac{|F(x,u(x))-F(y,u(y))|}{|x-y|^{\alpha}}\ \ \leq\ \ M_3,\ \forall u\in B,\ com\ x\neq y,$$

isto é,

$$H_{0,\alpha}(F(\cdot,u(\cdot)))\leq M_3,\ \forall u\in B.$$

Agora, observe que existe $M_4>0$ tal que

$$|F(\cdot,u(\cdot))|_0=\sup_{x\in\overline{\Omega}}|F(x,u(x))|\leq M_4,\ \forall u\in B$$

como $\overline{\Omega}\times[-M,M]$ é um compacto temos que $|F(x,\xi)|\leq K$, $\forall x\in\overline{\Omega}$ e $\forall\xi\in[-M,M]$. Usando o fato que $u(x)\in[-M,M]$ podemos afirmar que

$$|F(x,u(x))|\leq M_4,\ \forall x\in\overline{\Omega},\ \forall u\in B,$$

o que implica

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}}|F(x,u(x))|\ \ \leq M_4,\ \ \forall u\in B,$$

ou seja,

$$\|F(\cdot, u(\cdot))\|_0 \leq M_4, \ \forall u \in B.$$

Assim,

$$\|F(\cdot, u(\cdot))\|_\alpha \leq M_4 + M_3, \ \forall u \in B.$$

Consequentemente,

$$\|F(\cdot, u(\cdot))\|_\alpha \leq M_5, \ \forall u \in B,$$

mostrando a afirmação.

Desde que,

$$\|Tu\|_{2,\alpha} \leq K_1 \|F(\cdot, u(\cdot))\|_\alpha$$

chegamos a seguinte desigualdade

$$\|Tu\|_{2,\alpha} \leq K_1 M_5$$

e, fazendo $K_1 M_5 = K$ encontramos

$$\|Tu\|_{2,\alpha} \leq K, \ \forall u \in B.$$

Portanto, de acordo com o Lema 2.11, $T(B)$ é relativamente compacto em $E = C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ mostrando o item (i).

Nosso trabalho agora é mostrar o item (ii), isto é, que o operador T é contínuo. Mais precisamente, devemos mostrar que

$$u_n \longrightarrow u \quad em \quad E \implies v_n = Tu_n \longrightarrow Tu = v \quad em \quad E.$$

Para todo n, existe $v_n \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ solução do problema

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)(v_n)_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)(v_n)_{x_i} + c(x)(v_n) & = & F(x, u_n(x)), & \Omega \\ v_n & = & 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Sendo $\{u_n\}$ limitada, $\{v_n\}$ é limitada e usando o fato que a imersão

$$C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega})$$

é compacta, podemos extrair uma subsequência $\{v_{n_k}\}$ convergente na norma $C^2(\overline{\Omega})$ para uma função $v \in C^2(\overline{\Omega})$.

Por definição a norma $C^2(\overline{\Omega})$ é dada por

$$\|v_{n_k} - v\|_{C^2} = \|v_{n_k} - v\|_0 + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial v_{n_k}}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_0 + \sum_{i,j=1}^{N} \left\| \frac{\partial^2 v_{n_k}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_i} \right\|_0 \quad (2.14)$$

e segue-se da convegência, no sentido $C^2(\overline{\Omega})$, que

$$\|v_{n_k} - v\|_0 \to 0,$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial v_{n_k}}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_0 \to 0$$

e

$$\sum_{i,j=1}^{N} \left\| \frac{\partial^2 v_{n_k}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_i} \right\|_0 \to \ 0.$$

Sendo assim, podemos concluir que a função v verifica o seguinte problema

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) v_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) v_{x_i}(x) + c(x) v(x) & = & F(x, u(x)), & \Omega \\ v & = & 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Portanto, podemos deduzir que $v = Tu$, pois a solução do problema de Dirichlet é única, e desta forma

$$Tu_{n_k} \ \to \ Tu \ em \ C^2(\overline{\Omega}).$$

Para concluir a demonstração, devemos mostrar que

$$v_n = Tu_n \ \to \ v = Tu \ em \ C^2(\overline{\Omega}).$$

Suponhamos por contradição que o limite acima não ocorra. Então, existe $\epsilon_0 > 0$ e $\{v_{n_j}\} \subset \{v_n\}$ tal que

$$\|v_{n_j} - v\|_2 \geq \epsilon_0, \ \forall \ n_j. \tag{2.15}$$

Usando $\{v_{n_j}\}$ no lugar $\{v_n\}$ na primeira parte desta demonstração, existe $\{v_{n_{j_k}}\} \subset \{v_{n_j}\}$ tal que

$$v_{n_{j_k}} \ \to \ v = Tu \ em \ C^2(\overline{\Omega}).$$

Assim, existe $n_{j_0} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|v_{n_{j_k}} - v\|_2 < \frac{\epsilon_0}{2}, \ \forall \ n_{j_k} \geq n_{j_0}, \tag{2.16}$$

o que contradiz (2.15). Portanto, devemos ter

$$v_n \ \to \ v = Tu \ em \ C^2(\overline{\Omega}),$$

mostrando a continuidade do operador T. ∎

Agora, vamos introduzir um parâmetro $\sigma \in [0,1]$ no problema (P_2) obtendo o seguinte problema:

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)u_{x_ix_j}(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)u_{x_i}(x) + c(x)u(x) & = & \sigma F(x,u), & \Omega \\ u & = & 0, & \partial\Omega, \end{cases} \qquad (P_3)_\sigma$$

ou seja,

$$\begin{cases} Lu & = & \sigma F(x,u), & \Omega \\ u & = & 0, & \partial\Omega. \end{cases} \qquad (P_3)_\sigma$$

Observe que o problema (P_2) é obtido fazendo $\sigma = 1$ no problema $(P_3)_\sigma$. No que segue, definimos

$$\begin{array}{rccl} T & : & [0,1]\times E & \rightarrow & E \\ & & (\sigma,u) & \mapsto & T(\sigma,u) \end{array}$$

o operador que associa a cada par $(\sigma,u) \in [0,1]\times E$ a função $v = T(\sigma,u)$, que é a única solução do problema linear

$$\begin{cases} Lv & = & \sigma F(x,u), & \Omega \\ v & = & 0, & \partial\Omega. \end{cases} \qquad (P_3)_{u,\sigma}$$

Usando o mesmo tipo de argumento utilizado na demonstração do Lema 2.13, podemos concluir que $T : [0,1]\times E \rightarrow E$ é um operador compacto. Além disso, da definição do operador T, temos que u_σ é uma solução do problema $(P_3)_{u,\sigma}$ se, e somente se, u_σ é um ponto fixo do operador $T(\sigma,u)$. Note também que o operador T verifica a propriedade $T(0,u) = 0,\ \forall\ u \in E$, pois considerando $\sigma = 0$ no problema $(P_3)_{u,\sigma}$ obtemos

$$\begin{cases} Lv & = & 0, & \Omega \\ v & = & 0, & \partial\Omega. \end{cases} \qquad (P_v)$$

como a solução do problema (P_v) é unica e $v = 0$ é uma solução do problema acima devemos ter $T(0,u) = 0,\ \forall\ u \in E$.

No que segue, provaremos o Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer.

Teorema 2.14 (Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer.) *Seja S um operador compacto de $[0,1]\times E$ sobre E, ou seja,*

$$\begin{array}{rccl} S & : & [0,1]\times E & \rightarrow & E \\ & & (\sigma,u) & \mapsto & S(\sigma,u) \end{array}$$

com $S(0,u) = 0\ \forall u \in E$. *Se existe* $r > 0$ *tal que a igualdade* $u = S(\sigma, u)$ *com* $u \in E$ *e* $\sigma \in [0,1]$ *implica que* $\|u\| < r$, *então* $\forall\sigma \in [0,1]$ *o operador* $S(\sigma,\cdot)$ *admite um ponto fixo em* $B_r(0)$.

Demonstração:

Considere a seguinte homotopia

$$H(\sigma,u) = u - S(\sigma,u), \ \ \forall\sigma \in [0,1] \ \ e \ \ \forall u \in \overline{B_r(0)}.$$

Afirmação:

$$0 \notin H([0,1] \times \partial B_r(0)).$$

A afirmação é equivalente a mostrar

$$u - S(\sigma,u) \neq 0 \ \ \forall u \in \partial B_r(0) \ e \ \forall\sigma \in [0,1].$$

Suponhamos por absurdo que

$$0 \in H([0,1] \times \partial B_r(0)).$$

Logo, existe $u_0 \in \partial B_r(0)$ *e* $\sigma_0 \in [0,1]$ tal que $H(\sigma_0,u_0) = 0$, ou equivalentemente,

$$0 = H(\sigma_0,u_0) = u_0 - S(\sigma_0,u_0)$$

implicando

$$u_0 = S(\sigma_0,u_0).$$

Desta forma, temos um absurdo, pois sendo $u_0 = S(\sigma_0,u_0)$ com $u_0 \in E$ e $\sigma_0 \in [0,1]$ temos que $\|u_0\| < r$, ou seja, $u_0 \in B_r(0)$ e assim concluimos que

$$u_0 \notin \partial B_r(0).$$

Assim

$$0 \notin H([0,1] \times \partial B_r(0)).$$

Sendo o grau de Leray & Schauder invariante por homotopia, devemos ter $d(H(\sigma,\cdot), B_r(0), 0)$ constante. Logo

$$d(H(0,\cdot), B_r(0), 0) = d(H(\sigma,\cdot), B_r(0), 0), \ \forall\,\sigma \in [0,1].$$

Sendo

$$H(0,u) = u - S(0,u) \text{ temos } H(0,u) = u - 0 \text{ isto } \quad \text{é } H(0,u) = u.$$

Assim,

$$H(0,\cdot) = I$$

e, sendo

$$H(\sigma,\cdot) = I - S(\sigma,\cdot)$$

temos

$$d(I, B_r(0), 0) = d(I - S(\sigma,\cdot), B_r(0), 0).$$

Recordando que

$$d(I, B_r(0), 0) = 1,$$

concluimos que

$$d(I - S(\sigma,\cdot), B_r(0), 0) = 1 \neq 0,$$

implicando que existe $u_\sigma \in B_r(0)$ tal que $(I - S(\sigma,\cdot))(u_\sigma) = 0$ e assim

$$I(u_\sigma) - S(\sigma, u_\sigma) = 0,$$

e consequentemente,

$$u_\sigma = S(\sigma, u_\sigma).$$

Portanto, $u_\sigma \in B_r(0)$ é um ponto fixo do operador $S(\sigma,\cdot)$. ■

Usando as propriedades do operador T juntamente com o Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer , temos o seguinte resultado

Teorema 2.15 *Se existe um número $r > 0$ tal que $\forall\, \sigma \in [0,1]$ e para toda solução u do problema $(P_3)_\sigma$ temos a majoração à priori*

$$\|u\|_{1,\alpha} < r,$$

então para todo $\sigma \in [0,1]$, existe efetivamente uma solução $u_\sigma \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ do problema $(P_3)_\sigma$.

Demonstração: Usando a definição do operador T, segue da hipótese que existe $r > 0$ tal que $u = T(\sigma,u)$ e devemos ter $\|u\|_{1,\alpha} < r$. Uma vez que, $T(0,u) = 0,\ \forall\ u \in E$ segue-se do Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer que, para cada $\sigma \in [0,1]$ existe $u_\sigma \in E$ tal que

$$u_\sigma = T(\sigma, u_\sigma).$$

Sendo $T(\sigma, u_\sigma)$ solução do problema $(P_3)_{u,\sigma}$ temos

$$\begin{cases} L(T(\sigma, u_\sigma)) &= \sigma F(x, u_\sigma(x)), \quad \forall\, x \in \Omega \\ T(\sigma, u_\sigma) &= 0, \qquad \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} L(u_\sigma) &= \sigma F(x, u_\sigma(x)), \quad \forall\, x \in \Omega \\ u_\sigma &= 0, \qquad \partial\Omega. \end{cases}$$

■

Observação 2.3 *Em particular, para $\sigma = 1$ o problema semilinear (P_2), ou seja,*

$$(P_2)\begin{cases} Lu &= F(x, u(x)), \quad \forall\, x \in \Omega \\ u &= 0, \qquad \partial\Omega, \end{cases}$$

admite solução.

No que segue vamos considerar $F \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ uma função limitada.

Considere a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} Lu &= \sigma F(x, u(x)), \quad \forall\, x \in \Omega \\ u &= 0, \qquad \partial\Omega, \end{cases} \qquad (\Upsilon)_\sigma$$

onde $\sigma \in [0, 1]$ e $F \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ é uma função limitada em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$.

Vamos mostrar que esta classe de problemas verifica as condições do Teorema 2.15.

Teorema 2.16 (Estimativa a Priori) *Sendo $F \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ uma função limitada em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, existe $r > 0$ tal que qualquer solução u de $(\Upsilon)_\sigma$ verifica*

$$\|u\|_{1,\alpha} < r.$$

Demonstração:

Suponhamos que $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ seja uma solução de $(\Upsilon)_\sigma$. Uma primeira majoração é obtida usando o Princípio de Máximo ver (2.5)

$$\|u\|_0 \leq K \|\sigma F(\cdot, u(\cdot))\|_0, \tag{2.17}$$

e a segunda estimativa segue da Estimativa de Schauder

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq K_1 \|F(\cdot, u(\cdot))\|_\alpha. \tag{2.18}$$

Uma vez que

$$\|F(\cdot,u(\cdot))\|_\alpha = \|F(\cdot,u(\cdot))\|_0 + H_{0,\alpha}(F(\cdot,u(\cdot))) \tag{2.19}$$

segue da limitação da F que, existe $M_1 > 0$ tal que

$$|F(x,t)| \leq M_1, \ \forall\ x \in \overline{\Omega}, \ \forall\ t \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$|F(x,u(x))| \leq M_1, \ \forall\ x \in \overline{\Omega},$$

e assim obtemos

$$\|F(\cdot,u(\cdot))\|_0 \leq M_1.$$

Usando a estimativa (2.17) e a última desigualdade encontramos

$$\|u\|_0 \leq K|\sigma|M_1$$

e fazendo $K|\sigma|M_1 = M$, concluimos que

$$\|u\|_0 \leq M, \ \ \forall\ u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}). \tag{2.20}$$

De acordo com a desigualdade (2.19) temos que

$$\|F(\cdot,u(\cdot))\|_\alpha \leq M_1 + H_{0,\alpha}[F(\cdot,u(\cdot))]. \tag{2.21}$$

Como a aplicação F é de classe C^1 sobre $\overline{\Omega} \times [-M, M]$, segue do Lema 2.11 que F é Lipschitziana em $\overline{\Omega} \times [-M, M]$ e segue-se que existe $C > 0$ tal que

$$|F(x,\eta) - F(y,\xi)| \leq C(|x-y| + |\eta - \xi|).$$

Visto que $u(x) \in [-M, M]\ \ \forall\ x \in \overline{\Omega}$, pois $\|u\|_0 \leq M$, obtemos

$$|F(x,u(x)) - F(y,u(y))| \leq C(|x-y| + |u(x) - u(y)|). \tag{2.22}$$

Agora, usando a definição de $H_{0,\alpha}(u)$ temos

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \quad H_{0,\alpha}(u) \ \ com \ \ x \neq y.$$

Fixando

$$\delta = diam(\overline{\Omega}) = sup\{|x-y|; x, y \in \overline{\Omega}\} < \infty,$$

segue-se que

$$\frac{|F(x,u(x))-F(y,u(y))|}{|x-y|^\alpha} \le C(|x-y|^{1-\alpha}+H_{0,\alpha}(u)),$$

portanto,

$$\frac{|F(x,u(x))-F(y,u(y))|}{|x-y|^\alpha} \le C(\delta^{1-\alpha}+H_{0,\alpha}(u))$$

e assim obtemos

$$\sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|F(x,u(x))-F(y,u(y))|}{|x-y|^\alpha} \le C(\delta^{1-\alpha}+H_{0,\alpha}(u)), \ \ com \ \ x\neq y,$$

mostrando que

$$H_{0,\alpha}(F(\cdot,u(\cdot))) \le C(\delta^{1-\alpha}+H_{0,\alpha}(u)). \tag{2.23}$$

Substituindo (2.23) em (2.21) encontramos

$$\|F(\cdot,u(\cdot))\|_\alpha \le M_1 + C(\delta^{1-\alpha}+H_{0,\alpha}(u)). \tag{2.24}$$

Agora usando (2.24) em (2.18) obtemos

$$\|u\|_{2,\alpha} \le K_1(M_1 + C(\delta^{1-\alpha}+H_{0,\alpha}(u)))$$

implicando

$$\|u\|_{2,\alpha} \le K_1\cdot M_1 + K_1C\delta^{1-\alpha} + K_1CH_{0,\alpha}(u).$$

Se $M_2 = K_1M_1 + K_1C\delta^{1-\alpha}$ e $M_3 = K_1C$, ficamos com

$$\|u\|_{2,\alpha} \le M_2 + M_3H_{0,\alpha}(u). \tag{2.25}$$

Afirmação: Para todo $\epsilon > 0$, existe $\Psi(\epsilon)\in\mathbb{R}$ tal que,

$$H_{0,\alpha}(u) \le \epsilon\|u\|_1 + \Psi(\epsilon)\|u\|_0, \ \forall\ u\in C^1(\overline{\Omega}). \tag{2.26}$$

Assumindo por um momento a afirmação acima, segue de (2.25) que

$$\|u\|_{2,\alpha} \le M_2 + M_3(\epsilon\|u\|_1 + \Psi(\epsilon)\|u\|_0),$$

que implica

$$\|u\|_{2,\alpha} \le M_2 + M_3\epsilon\cdot\|u\|_1 + M_3\Psi(\epsilon)\cdot\|u\|_0. \tag{2.27}$$

Desde que, $\|u\|_0 \le M$ fazendo $\epsilon = \dfrac{1}{2M_3}$, obtemos

$$\|u\|_{2,\alpha} \le M_2 + \frac{1}{2}\|u\|_1 + M_3\Psi(\epsilon)M.$$

Assim,

$$2 \cdot \|u\|_{2,\alpha} \leq 2M_2 + \|u\|_1 + 2M_3\Psi(\epsilon)M. \tag{2.28}$$

Usando a definição da norma $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, segue-se que

$$2\|u\|_{2,\alpha} \geq \|u\|_2 + \|u\|_1 + H_{2,\alpha}(u),$$

implicando

$$2\|u\|_{2,\alpha} \geq \|u\|_{2,\alpha} + \|u\|_1.$$

Substituindo a última desigualdade em (2.28) encontramos

$$\|u\|_{2,\alpha} + \|u\|_1 \leq 2M_2 + \|u\|_1 + 2M_3\Psi(\epsilon)M,$$

e com isso concluimos que

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq 2(M_2 + M_3\Psi(\epsilon)M).$$

Considerando $c = 2(M_2 + M_3\Psi(\epsilon)M)$ temos que

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq c,$$

para toda u solução do problema $(\Upsilon)_\sigma$. Agora, usando o fato que a imersão

$$C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \ \hookrightarrow \ C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$$

é contínua existe $k > 0$ tal que

$$\|u\|_{1,\alpha} \leq k\|u\|_{2,\alpha},$$

implicando que

$$\|u\|_{1,\alpha} \leq kc.$$

Considerando $r = ck + 1$ temos,

$$\|u\|_{1,\alpha} < r, \ \forall \ u \in E.$$

Demonstração de (2.26)

Por um cálculo direto temos que

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq (H_{0,1}(u))^\alpha (2\|u\|_0)^{1-\alpha},$$

que implica

$$\sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq (H_{0,1}(u))^{\alpha}(2\cdot\|u\|_0)^{1-\alpha} \ \ com \ \ x\neq y.$$

Portanto,

$$H_{0,\alpha}(u) \leq (H_{0,1}(u))^{\alpha}(2\|u\|_0)^{1-\alpha}.$$

De acordo com o Lema 2.11

$$H_{0,1}(u) \leq K(\overline{\Omega})\|u\|_1$$

e com isso,

$$H_{0,\alpha}(u) \leq (K(\overline{\Omega})\|u\|_1)^{\alpha}(2\|u\|_0)^{1-\alpha}.$$

Assim,

$$H_{0,\alpha}(u) \leq 2^{1-\alpha}(K(\overline{\Omega}))^{\alpha}\|u\|_1^{\alpha}\|u\|_0^{1-\alpha}. \tag{2.29}$$

Considerando $a=(\epsilon_1\|u\|_1)^{\alpha}$, $b=(\epsilon_1)^{-\alpha}\|u\|_0^{1-\alpha}$ (com $\epsilon_1>0$), $p=\dfrac{1}{\alpha}$ temos que $q=\dfrac{1}{1-\alpha}$, pois $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ e segue-se da desigualdade de Young (Ver [2]) que

$$a\cdot b \leq \frac{a^p}{p}+\frac{a^q}{q}.$$

Logo,

$$ab=(\epsilon_1)^{\alpha}\|u\|_1^{\alpha}(\epsilon_1)^{-\alpha}\|u\|_0^{1-\alpha}=\|u\|_1^{\alpha}\|u\|_0^{1-\alpha}$$

e portanto

$$\|u\|_1^{\alpha}\|u\|_0^{1-\alpha} \leq \frac{((\epsilon_1\|u\|_1)^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}}{\dfrac{1}{\alpha}}+\frac{((\epsilon_1)^{-\alpha}\|u\|_0^{1-\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\dfrac{1}{1-\alpha}}.$$

Daí,

$$\|u\|_1^{\alpha}\|u\|_0^{1-\alpha} \leq \alpha\epsilon_1\|u\|_1+(1-\alpha)\epsilon_1^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}\|u\|_0$$

e obtemos

$$H_{0,\alpha}(u) \leq 2^{1-\alpha}(K(\overline{\Omega}))^{\alpha}(\ \alpha\epsilon_1\|u\|_1+(1-\alpha)(\epsilon_1)^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}\|u\|_0\ ). \tag{2.30}$$

Fixando

$$\epsilon_1=\frac{\epsilon}{2^{1-\alpha}(K(\overline{\Omega}))^{\alpha}\alpha},$$

temos que

$$H_{0,\alpha}(u) \leq \epsilon\|u\|_1+\Psi(\epsilon)\|u\|_0,\ \forall u\in C^1(\overline{\Omega})\ \ e\ \ \forall\epsilon>0, \tag{2.31}$$

onde

$$\Psi(\epsilon) = (1-\alpha)2^{1-\alpha}(K(\overline{\Omega}))^{\alpha}\Big(\frac{\epsilon}{2^{1-\alpha}(K(\overline{\Omega}))^{\alpha}\alpha}\Big)^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}.$$

mostrando a desigualdade (2.26). ■

Usando o Teorema 2.15, para cada $\sigma \in [0,1]$ existe u_σ solução do problema $(\Upsilon)_\sigma$, ou seja,

$$\begin{cases} L(u_\sigma) &= \sigma F(x, u_\sigma(x)), \quad \forall\, x \in \Omega \\ u_\sigma &= 0, \qquad \partial\Omega, \end{cases}$$

e desta forma podemos afirmar que vale o seguinte teorema:

Teorema 2.17 *Seja $F \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ uma função limitada sobre $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$, então a equação*

$$\begin{cases} Lu &= F(x, u(x)), \quad \forall\, x \in \Omega \\ u &= 0, \qquad \partial\Omega, \end{cases}$$

admite uma solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Observação 2.4 *A hipótese que F é limitada sobre $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ é essencial, pois no caso unidimensional, considerando $\Omega = (0, 2\pi)$, e $F(x,u) = -u + x$ o problema*

$$\begin{cases} u'' &= -u + x \\ u(0) &= u(2\pi) \quad = 0, \end{cases} \tag{P_4}$$

não admite solução.
De fato, temos que a solução geral para a equação $u'' = -u + x$ é dada por

$$y(x) = c_1 cosx + c_2 senx + x.$$

Impondo a condição $y(0) = y(2\pi) = 0$ chegamos a uma contradição. Logo o problema (P_4) não tem solução.

Capítulo 3

O Método de Galerkin e Aplicações

Neste capítulo pretendemos mostrar a existência de solução para a seguinte classe de problemas singulares

$$\begin{cases} -\Delta u &= \dfrac{1}{u^\gamma}, & \Omega \\ u &> 0, & \Omega \\ u &= 0, & \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $N \geq 2$ e $0 < \gamma < 1$. O método que utilizaremos é conhecido como o **Método de Galerkin.**

3.1 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer em.

Nesta seção demonstraremos o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Teorema 3.1 *Seja $f : \bar{B}_r(x) \to \bar{B}_r(x)$ com $\bar{B}_r(x) \subset \mathbb{R}^N$ uma função contínua. Então, existe $z \in \bar{B}_r(x)$ tal que $f(z) = z$, isto é, f tem um ponto fixo z em $\bar{B}_r(x)$.*

Demonstração: Vamos mostrar primeiro, o caso em que o centro x da bola é a origem. Neste caso temos $f : \bar{B}_r(0) \to \bar{B}_r(0)$. Defina a aplicação $\varphi : \bar{B}_r(0) \to \mathbb{R}^N$, dada por $\varphi(y) = y - f(y)$ que é contínua, pois é uma diferença de funções contínuas.
Vamos supor que

$$y - f(y) \neq 0, \ \forall y \ \in \ \partial B_r(0),$$

ou equivalentemente,

$$\varphi(y) \neq 0, \ \forall y \ \in \ \partial B_r(0),$$

pois, caso contrário o teorema já estaria demonstrado.

Agora, defina a seguinte homotopia

$$\begin{array}{rcl} H: \ \bar{B}_r(0)\times[0,1] & \rightarrow & \mathbb{R}^N \\ (y,t) & \mapsto & H(y,t)=y-tf(y). \end{array}$$

Vamos mostrar que

$$0\notin H(\partial B_r(0)\times[0,1]),$$

isto é,

$$H(y_0,t_0)\neq 0, \ \forall \ y_0 \ \in \ \partial B_r(0) \ \ e \ \forall \ t_0\in[0,1].$$

Se $t=1$ temos

$$H(y,1)=y-f(y)=\varphi(y)\neq 0, \ \forall \ y\in\partial B_r(0)$$

mostrando que

$$0 \ \notin \ H(\partial B_r(0)\times\{1\}).$$

Agora, vamos analisar o caso em que $t \in [0,1)$ e $y \in \partial B_r(0)$. Assim,

$$|tf(y)|=t|f(y)| \ \ \leqslant \ \ t.r<r=|y|$$

e com isso,

$$|tf(y)| \ \ < \ \ |y|.$$

Consequentemente,

$$tf(y) \ \ \neq \ \ y$$

donde segue-se que

$$y-tf(y) \ \ \neq \ \ 0 \ \ , \ \ \forall y\in\partial B_r(0) \ \ \ e \ \ \ \forall t\in[0,1),$$

isto é,

$$H(y,t) \ \ \neq \ \ 0 \ \ , \ \ \forall y\in\partial B_r(0) \ \ \ e \ \ \ \forall t\in[0,1),$$

ou seja,

$$0\notin H(\partial B_r(0)\times[0,1)).$$

Portanto,

$$0\notin H(\partial B_r(0)\times[0,1]).$$

Usando a propriedade que o grau topológico de Brouwer é invariante por homotopia temos

$$d(H(.,t),B_r(0),0) \ \ = \ \ \text{constante}, \ \ \forall t\in[0,1]$$

e portanto,

$$d(H(.,0), B_r(0), 0) \;=\; d(H(.,1), B_r(0), 0).$$

Daí, segue-se que

$$d(I, B_r(0), 0) \;=\; d(\varphi, B_r(0), 0).$$

Uma vez que

$$d(I, B_r(0), 0) = 1$$

temos que

$$d(\varphi, B_r(0), 0) = 1 \;\neq 0.$$

Agora, usando a propriedade (P_2) do grau topológico de Brouwer, existe $y_0 \in B_r(0)$ tal que $\varphi(y_0) = 0$, que implica

$$y_0 - f(y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \text{com} \quad \text{isso} \quad y_0 = f(y_0).$$

Portanto, a aplicação f tem um ponto fixo y_0 em $\bar{B}_r(0)$.
Vamos agora provar o caso geral, onde o centro da bola $\bar{B}_r$ é um ponto qualquer $x \in \mathbb{R}^N$.
Considere a aplicação $\varphi : \bar{B}_r(0) \;\rightarrow\; \bar{B}_r(0)$, dada por $\varphi(y) = f(x+y) - x$.
A aplicação φ é contínua e $\varphi(\bar{B}_r(0)) \subset \bar{B}_r(0)$, pois

$$|\varphi(y)| = \;|f(x+y) - x| \;\leq\; r, \text{ isto } \quad \text{é}, \; \varphi(y) \;\in\; \bar{B}_r(0).$$

Assim, φ tem um ponto fixo $z \in \bar{B}_r(0)$, ou seja,

$$\varphi(z) = z \;\Leftrightarrow\; f(x+z) - x = z \;\Leftrightarrow\; f(x+z) = x + z.$$

Denotando,

$$w = x + z \;\in\; \bar{B}_r(x)$$

concluímos que $f(w) = w$. Mostrando que f tem um ponto fixo em $\bar{B}_r(x)$. ■

3.2 Lema Fundamental

Lema 3.2 *Seja $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma função contínua com $\langle f(x), x\rangle \geq 0$, para todo x verificando $|x| = R > 0$. Então, existe $z_0 \in \bar{B}_r(0)$ tal que $f(z_0) = 0$.*

Demonstração: A demonstração do Lema Fundamental será feita por contradição. Considere $f(x) \neq 0,\ \forall\, x \in \bar{B}_R(0)$, e defina a função $g : \bar{B}_R(0) \to \bar{B}_R(0)$ dada por

$$g(x) = \frac{-R}{|f(x)|} f(x).$$

Observe que g verifica $g(\bar{B}_R(0)) \subset \bar{B}_R(0)$, pois

$$|g(x)| = \left| \frac{-R}{|f(x)|} f(x) \right| = \frac{R}{|f(x)|} |f(x)| = R \quad \text{e} \quad \text{com} \quad \text{isso} \quad g(x) \in \bar{B}_R(0).$$

Além disso, g é contínua, pois f é contínua por hipótese. Portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, a função g tem um ponto fixo em $\bar{B}_R(0)$. Seja x_0 tal ponto fixo de g, isto é, $x_0 = g(x_0)$. Desta forma,

$$|x_0| = |g(x_0)| = R > 0.$$

Por outro lado,

$$R^2 = |x_0|^2 = \langle x_0, x_0 \rangle = \langle x_0, g(x_0) \rangle = \langle x_0, \frac{-R}{|f(x_0)|} f(x_0) \rangle = \frac{-R}{|f(x_0)|} \langle x_0, f(x_0) \rangle.$$

Desde que, por hipótese,

$$\langle x_0, f(x_0) \rangle \geq 0,$$

temos que

$$0 < R^2 = \frac{-R}{|f(x_0)|} \langle x_0, f(x_0) \rangle \leq 0,$$

que é um absurdo. Portanto, existe $z_0 \in \bar{B}_R(0)$ tal que $f(z_0) = 0$. ■

3.3 Teorema Envolvendo Sub-Solução e Super-Solução.

Nesta seção definiremos sub-solução e super-solução para (3.1) e demonstraremos um **Teorema envolvendo Sub-Solução e Super-Solução.** Devido a Ambrosetti, Brézis & Cerami (ver [5]), o qual é crucial para mostrar a existência e unicidade do Problema Singular apresentado neste capítulo.

Definição 3.3 *Considere o problema*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta v & = & f(v), & \Omega \\ v & > & 0, & \Omega \\ v & = & 0, & \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Dizemos que uma solução $v_1 \in C^2(\overline{\Omega})$ *é uma sub-solução para o problema* (3.1), *se* v_1 *satisfaz:*

$$\begin{cases} -\Delta v_1 & \leq & f(v_1), & x \in \Omega \\ v_1 & > & 0, & x \in \Omega \\ v_1 & = & 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

Da mesma forma dizemos que uma solução $v_2 \in C^2(\overline{\Omega})$ *é uma super-solução para o problema* (3.1), *se* v_2 *satisfaz:*

$$\begin{cases} -\Delta v_2 & \geq & f(v_2), & x \in \Omega \\ v_2 & > & 0, & x \in \Omega \\ v_2 & = & 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

Teorema 3.4 *Considere* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e assuma que* $f(t)$ *é uma função tal que* $t^{-1}f(t)$ *é decrescente para* $t > 0$. *Sejam* v_1 *e* v_2 *satisfazendo* (3.2) *e* (3.3). *Então,* $v_2 \geq v_1$ *em* Ω.

Demonstração:

Multiplicando (3.2) por $-v_2$ e (3.3) por v_1, obtemos

$$v_2 \Delta v_1 \geq -v_2 f(v_1) \tag{3.4}$$

e

$$-v_1 \Delta v_2 \geq v_1 f(v_2). \tag{3.5}$$

Somando-se as desigualdades (3.4) e (3.5) encontramos

$$-v_1 \Delta v_2 + v_2 \Delta v_1 \geq v_1 f(v_2) - v_2 f(v_1), \tag{3.6}$$

donde segue-se que

$$-v_1 \Delta v_2 + v_2 \Delta v_1 \geq \Big[v_1 v_2 \Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1} \Big) \Big]. \tag{3.7}$$

Seja $\theta(t)$ uma função suave não decrescente tal que

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & se \quad t \geq 1 \\ 0, & se \quad t \leq 0. \end{cases}$$

Definindo para cada $\epsilon > 0$, a função

$$\theta_\epsilon(t) = \theta\Big(\frac{t}{\epsilon}\Big),$$

temos que

$$\theta_\epsilon(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

De fato:

$$\theta_\epsilon(t) = \theta\Big(\frac{t}{\epsilon}\Big) = \begin{cases} 1, & se \quad \frac{t}{\epsilon} \geq 1 \\ 0, & se \quad \frac{t}{\epsilon} \leq 0, \end{cases}$$

ou seja,

$$\theta_\epsilon(t) = \begin{cases} 1, & se \quad t \geq \epsilon \\ 0, & se \quad t \leq 0. \end{cases}$$

Sendo $\theta(t)$ uma função suave não decrescente segue-se que $\theta_\epsilon(t) \geq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$. Multiplicando a desigualdade (3.7) por $\theta_\epsilon(v_1 - v_2)$ e integrando em Ω, encontramos

$$\int_\Omega [-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1]\theta_\epsilon(v_1 - v_2)dx \geq \int_\Omega \Big[v_1 v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big]\theta_\epsilon(v_1 - v_2)dx. \quad (3.8)$$

Trabalhando com o lado esquerdo da desigualdade (3.8), ou seja, com o termo

$$\int_\Omega [-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1]\theta_\epsilon(v_1 - v_2)dx, \quad (3.9)$$

deduzimos que,

$$\int_\Omega [-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1]\theta_\epsilon(v_1 - v_2)dx = -\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\Delta v_2 dx + \int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_2]\Delta v_1 dx. \quad (3.10)$$

Usando a primeira identidade de Green na primeira parcela do segundo membro da igualdade (3.10) obtemos

$$-\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\Delta v_2 dx = -\Big[-\int_\Omega \nabla v_2 \nabla[\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]dx + \int_{\partial\Omega} [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\frac{\partial v_2}{\partial \eta} ds\Big] \quad (3.11)$$

e sendo $v_1 = 0$ *em* $\partial\Omega$ temos que

$$-\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\Delta v_2 dx = \int_\Omega \nabla[\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\nabla v_2 dx. \tag{3.12}$$

Calculando $\nabla[\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]$ e substituindo em (3.12) encontramos

$$-\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\Delta v_2 dx = \int_\Omega [\nabla[\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]v_1 + \theta_\epsilon(v_1 - v_2)\nabla v_1]\nabla v_2 dx. \tag{3.13}$$

Pela linearidade da integral

$$-\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\Delta v_2 dx = \int_\Omega [\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)\nabla(v_1 - v_2)]v_1\nabla v_2 dx + \int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]\nabla v_1\nabla v_2 dx$$

e consequentemente

$$-\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\Delta v_2 dx = \int_\Omega [\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)]v_1\nabla v_2 dx + \int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]\nabla v_1\nabla v_2 dx. \tag{3.14}$$

Agora, usando a primeira identidade de Green na segunda parcela do segundo membro de (3.10) obtemos

$$\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_2]\Delta v_1 dx = -\int_\Omega \nabla v_1\nabla[\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_2]dx + \int_{\partial\Omega} [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_2]\frac{\partial v_1}{\partial\eta} ds.$$

Sendo $v_2 = 0$ em $\partial\Omega$, temos que

$$\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_2]\Delta v_1 dx = -\int_\Omega \nabla v_1\nabla[\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_2]dx. \tag{3.15}$$

Calculando $\nabla[\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_2]$ e substituindo em (3.15) encontramos

$$\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_2]\Delta v_1 dx = -\int_\Omega [\nabla[\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]v_2 + [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]\nabla v_2]\nabla v_1 dx.$$

Consequentemente,

$$\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_2]\Delta v_1 dx = -\int_\Omega [\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)]\nabla(v_1 - v_2)v_2\nabla v_1 dx - \int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]\nabla v_1\nabla v_2 dx.$$

Usando a linearidade do gradiente obtemos

$$\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_2]\Delta v_1 dx = -\int_\Omega [\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)](\nabla v_1 - \nabla v_2)v_2\nabla v_1 dx - \int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]\nabla v_1\nabla v_2 dx. \tag{3.16}$$

Somando as igualdades (3.14) e (3.16) ficamos com

$$-\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\Delta v_2 dx + \int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2) \cdot v_2]\Delta v_1 dx$$

$$= \int_\Omega [\theta_\epsilon'(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)]v_1 \nabla v_2 dx + \int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]\nabla v_1 \nabla v_2 dx$$

$$- \int_\Omega [\theta_\epsilon'(v_1 - v_2)](\nabla v_1 - \nabla v_2)v_2 \nabla v_1 dx - \int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]\nabla v_1 \nabla v_2 dx.$$

Portanto,

$$-\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\Delta v_2 dx + \int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_2]\Delta v_1 dx$$

$$= \int_\Omega [\theta_\epsilon'(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)]v_1 \nabla v_2 dx - \int_\Omega [\theta_\epsilon'(v_1 - v_2)](\nabla v_1 - \nabla v_2)v_2 \nabla v_1 dx. \quad (3.17)$$

Usando novamente a linearidade da integral no lado esquerdo da igualdade (3.17) e somando e subtraindo

$$\int_\Omega [\theta_\epsilon'(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)]v_1 \nabla v_1 dx$$

no lado direito da mesma encontramos

$$\int_\Omega [-v_1 \Delta v_2 + v_2 \Delta v_1][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx =$$

$$= \int_\Omega [\theta_\epsilon'(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)]v_1 \nabla v_2 dx - \int_\Omega [\theta_\epsilon'(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)]v_1 \nabla v_1 dx \quad (3.18)$$

$$+ \int_\Omega [\theta_\epsilon'(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)]v_1 \nabla v_1 dx - \int_\Omega [\theta_\epsilon'(v_1 - v_2)](\nabla v_1 - \nabla v_2)v_2 \nabla v_1 dx.$$

Daí, segue-se que

$$\int_\Omega [-v_1 \Delta v_2 + v_2 \Delta v_1][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx$$

$$= \int_\Omega v_1[\theta_\epsilon'(v_1 - v_2)](\nabla v_1 - \nabla v_2)(\nabla v_2 - \nabla v_1)dx + \int_\Omega (v_1 - v_2)[\theta_\epsilon'(v_1 - v_2)]\nabla v_1(\nabla v_1 - \nabla v_2)dx. \quad (3.19)$$

Logo

$$\int_\Omega [-v_1 \Delta v_2 + v_2 \Delta v_1][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx$$

$$= -\int_\Omega v_1[\theta_\epsilon'(v_1 - v_2)]\|\nabla v_1 - \nabla v_2\|^2 dx + \int_\Omega (v_1 - v_2)[\theta_\epsilon'(v_1 - v_2)]\nabla v_1(\nabla v_1 - \nabla v_2)dx. \quad (3.20)$$

Observe que

$$-\int_\Omega v_1[\theta_\epsilon'(v_1 - v_2)]|\nabla v_1 - \nabla v_2|^2 dx \leq 0.$$

Assim, somando a ambos os membros da desigualdade acima a expressão

$$\int_\Omega (v_1 - v_2)[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)]\nabla v_1(\nabla v_1 - \nabla v_2)dx$$

obtemos

$$-\int_\Omega v_1[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)]|\nabla v_1 - \nabla v_2|^2 dx + \int_\Omega (v_1 - v_2)[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)]\nabla v_1(\nabla v_1 - \nabla v_2)dx$$

$$\leq \int_\Omega (v_1 - v_2)[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)]\nabla v_1(\nabla v_1 - \nabla v_2)dx.$$

Usando a desigualdade acima em (3.20) concluimos que

$$\int_\Omega [-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq \int_\Omega (v_1 - v_2)[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)]\nabla v_1(\nabla v_1 - \nabla v_2)dx.$$

Uma vez que

$$(v_1 - v_2)[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)](\nabla v_1 - \nabla v_2) = \nabla[\gamma_\epsilon(v_1 - v_2)], \;\; onde \;\; \gamma_\epsilon(t) = \int_0^t s\theta_\epsilon^{'}(s)ds \quad (3.21)$$

encontramos

$$\int_\Omega [-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq \int_\Omega \nabla v_1 \nabla[\gamma_\epsilon(v_1 - v_2)]dx. \quad (3.22)$$

Usando novamente a primeira identidade de Green no lado direito da desigualdade (3.22) obtemos

$$\int_\Omega \nabla v_1 \nabla[\gamma_\epsilon(v_1 - v_2)]dx = -\int_\Omega \gamma_\epsilon(v_1 - v_2)\Delta v_1 dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_\epsilon(v_1 - v_2) \cdot \frac{\partial v_1}{\partial \eta} ds$$

e sendo $v_1 - v_2 = 0 \;\; em \;\; \partial\Omega$, segue-se que $\gamma_\epsilon(v_1 - v_2) = \gamma_\epsilon(0) = 0$. Logo,

$$\int_\Omega \nabla v_1 \nabla[\gamma_\epsilon(v_1 - v_2)]dx = \int_\Omega \gamma_\epsilon(v_1 - v_2)(-\Delta v_1)dx.$$

Desde que,

$$-\Delta v_1 \leq f(v_1), \forall x \in \Omega$$

pela desigualdade (3.2) concluimos que

$$\int_\Omega \nabla v_1 \nabla[\gamma_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq \int_\Omega \gamma_\epsilon(v_1 - v_2) f(v_1)dx. \quad (3.23)$$

Usando o fato que, $0 \leq \gamma_\epsilon \;\leq\; \epsilon$, segue-se de (3.23)

$$\int_\Omega \nabla v_1 \nabla[\gamma_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq \int_\Omega \epsilon f(v_1)dx.$$

Pela desigualdade (3.22) obtemos

$$\int_\Omega [-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq \int_\Omega \epsilon f(v_1)dx$$

e consequentemente

$$\int_\Omega [-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq \epsilon \int_\Omega f(v_1)dx.$$

Fixando $\displaystyle\int_\Omega f(v_1)dx = M$ temos que

$$\int_\Omega [-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq \epsilon M.$$

Pela desigualdade (3.8) encontramos

$$\int_\Omega \Big[v_1v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq \epsilon M, \tag{3.24}$$

ou equivalentemente,

$$\int_{[v_1\leq v_2]} \Big[v_1v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx + \int_{[v_1>v_2]} \Big[v_1v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq \epsilon M. \tag{3.25}$$

Observe que, em $[v_1 \leq v_2]$ temos que $\theta_\epsilon(v_1 - v_2) \equiv 0$. Desta forma,

$$\int_{[v_1\leq v_2]} \Big[v_1v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \equiv 0.$$

Então,

$$\int_{[v_1>v_2]} \Big[v_1v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq \epsilon M.$$

No conjunto $[v_1 > v_2]$ temos

$$\Big[v_1v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big] [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)] \geq 0$$

e quando $\epsilon \to 0$ obtemos o limite

$$\Big[v_1v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big] [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)] \to \Big[v_1v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big].$$

Definindo

$$f_\epsilon(x) = \Big[v_1v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big] [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)](x) \geq 0 \quad com \;\; \Omega = [v_1 > v_2]$$

e
$$f(x)=\Big[v_1v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2}-\frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big](x),$$
concluimos pelo **Lema de Fatou** (ver Teorema $B.2$) em (3.25) que
$$0\geq \liminf_{\epsilon\to 0}\int_{[v_1>v_2]} f_\epsilon(x)dx \geq \int_{[v_1>v_2]} f(x)dx,$$
ou seja,
$$\int_{[v_1>v_2]}\Big[v_1v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2}-\frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big]dx \leq \liminf_{\epsilon\to 0}\int_{[v_1>v_2]}\Big[v_1v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2}-\frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big]\,[\theta_\epsilon(v_1-v_2)]dx\leq 0.$$

Assim
$$\int_{[v_1>v_2]}\Big[v_1v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2}-\frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big]dx=0.$$

Desde que,
$$\Big[v_1v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2}-\frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big]>0\ \ em\ \ [v_1>v_2]$$
concluimos que
$$med.[v_1>v_2]=0$$
(ver o Teorema $B.21$). Portanto,
$$v_1\leq v_2\ \ q.t.p.\ \ em\ \ \Omega.$$
Sendo v_1 *e* v_2 funções contínuas em $\overline{\Omega}$, temos que $v_1(x)\ \leq\ v_2(x),\ \ \forall\, x\ \in\ \overline{\Omega}$.

3.4 Um Problema Auxiliar

Para cada ϵ>0 fixado, considere o seguinte problema
$$\begin{cases} -\Delta u &= \dfrac{1}{(\epsilon+|u|)^\gamma}, \quad \Omega\\ \quad u &= \quad 0, \qquad\quad \partial\Omega. \end{cases} \qquad (P)_\epsilon$$
Um importante fato que temos a destacar é que cada solução clássica u_ϵ do problema $(P)_\epsilon$ é estritamente positiva em Ω, isto é,
$$u_\epsilon(x)>0,\ \forall x\in\Omega.$$

De fato, sendo u_ϵ solução do problema $(P)_\epsilon$, temos

$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon &= \dfrac{1}{(\epsilon + |u_\epsilon|)^\gamma}, \quad \Omega \\ u_\epsilon &= 0, \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim,

$$\Delta u_\epsilon(x) < 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Consequentemente, a função u_ϵ é super-harmônica1 e pelo Princípio do Máximo temos

$$u_\epsilon(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega,$$

pois,

$$u_\epsilon(x) \geq \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u = 0$$

e portanto,

$$u_\epsilon(x) \geq 0 \;\; \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Afirmação:

$$u_\epsilon(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

De fato, pois caso contrário, existiria

$$x_0 \in \Omega \quad tal \quad que \quad u_\epsilon(x_0) = 0.$$

Por outro lado,

$$u_\epsilon(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Portanto, pelo Teorema 2.6 o mínimo é atingido em $\partial\Omega$ e com isso

$$u_\epsilon(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega \;.$$

Recordamos que u_ϵ é uma solução fraca de $(P)_\epsilon$ se $u_\epsilon \in H_0^1(\Omega)$ e satisfaz a seguinte igualdade

$$\int_\Omega \nabla u_\epsilon \nabla \varphi dx = \int_\Omega \frac{\varphi}{(\epsilon + u_\epsilon)^\gamma} dx, \;\; \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Vamos agora fixar algumas notações:

No que segue-se, vamos denotar por $\beta = \{e_1, e_2, e_3, ...e_n, ...\}$ uma base Hilbertiana para $H_0^1(\Omega)$ e fixar a notação $\|.\| : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ para a norma usual de $H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$\|u\| = \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ vamos fixar

$$V_m = [e_1, e_2, e_3, ..., e_m],$$

o subespaço de $H_0^1(\Omega)$ gerado pelos vetores $e_1, e_2, e_3, ..., e_m$. Veja que, se $v \in V_m$ temos que

$$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i \ \ com \ \ \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Note que V_m é isomorfo ao $\mathbb{R}^m$, pois basta considerar a transformação linear $F : V_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $F(v) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_m)$, onde $v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$.
Observe que

$$\|v\| = |\alpha| \ \text{ com } \ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_m).$$

Considere agora a função $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $f(\alpha) = (f_1(\alpha), f_2(\alpha), f_3(\alpha), ..., f_m(\alpha))$, onde

$$f_j(\alpha) = \int_\Omega \nabla v \nabla e_j dx - \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx.$$

Aqui estamos identificando o vetor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_m)$ com a função $v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$.

Afirmação:

$(I) f$ é contínua,

(II)existe $R > 0$ tal que $\langle f(\alpha), \alpha \rangle \geq 0$, para $|\alpha| = R > 0$.

Análise de (I):

Devemos mostrar que

$$\alpha_n \longrightarrow \alpha_0 \ \text{ em } \mathbb{R}^m \text{ implica que} f(\alpha_n) \longrightarrow f(\alpha_0) \ \text{ em } \mathbb{R}^m.$$

Para α_n e α_0 vamos usar as funções $v_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{n_i} e_i$ e $v_0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{0_i} e_i$, onde $\alpha_n = (\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \alpha_{n_3}, \ldots, \alpha_{n_m})$ e $\alpha_0 = (\alpha_{0_1}, \alpha_{0_2}, \alpha_{0_3}, \ldots, \alpha_{0_m})$.
Observe que $\alpha_n \rightarrow \alpha_0$ implica que $\alpha_{n_k} \rightarrow \alpha_{0_k}$ para cada k fixado e $v_n \rightarrow v_0$ em $H_0^1(\Omega)$.
De acordo com a definição de f_j temos que

$$f_j(\alpha_n) = \int_\Omega \nabla v_n \nabla e_j dx - \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v_n|)^\gamma} dx$$

e

$$f_j(\alpha_0) = \int_\Omega \nabla v_0 \nabla e_j dx - \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v_0|)^\gamma} dx.$$

Desde que,

$$v_n \to v_0 \ \ em \ \ H_0^1(\Omega) \tag{3.26}$$

por propriedade de produto interno

$$\langle v_n, e_j \rangle \to \langle v_0, e_j \rangle.$$

Logo

$$\int_\Omega \nabla v_n \nabla e_j dx \to \int_\Omega \nabla v_0 \nabla e_j dx \ em \ \mathbb{R}. \tag{3.27}$$

Agora, vamos mostrar que

$$\int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v_n|)^\gamma} dx \to \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v_0|)^\gamma} dx.$$

Segue de (3.26) e do fato da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ser contínua que

$$v_n \ \ \longrightarrow \ \ v_0 \ \ em \ \ L^2(\Omega).$$

Assim, pelo Teorema $B.7$, existe uma subsequência $\{v_{n_k}\} \subset \{v_n\}$ tal que $\{v_{n_k}\} \subset L^2(\Omega)$ que satisfaz

$I)$ $v_{n_k}(x) \to v_0(x)$ q.t.p. em Ω,

$II)$ $|v_{n_k}(x)| \leq h(x), \ \forall \ k \ \ q.t.p.$ em Ω com $h \in L^2(\Omega)$.

Sendo $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ temos que $h \in L^1(\Omega)$.

Definindo as funções

$$f_{n_k}(x) = \frac{e_j(x)}{(\epsilon + |v_{n_k}(x)|)^\gamma} \ \ e \ \ f(x) = \frac{e_j(x)}{(\epsilon + |v_0(x)|)^\gamma}$$

e usando o fato que $v_{n_k}(x) \to v_0(x) \ \ q.t.p. \ \ em \ \ \Omega$ obtemos

$$\frac{e_j(x)}{(\epsilon + |v_{n_k}(x)|)^\gamma} \ \ \to \ \ \frac{e_j(x)}{(\epsilon + |v_0(x)|)^\gamma} \ \ q.t.p. \ \ em \ \ \Omega,$$

ou seja,

$$f_{n_k}(x) \ \ \to \ \ f(x) \ \ q.t.p. \ \ em \ \ \Omega.$$

Veja que, sendo

$$\frac{|e_j(x)|}{(\epsilon + |v_{n_k}(x)|)^\gamma} \leq \frac{|e_j(x)|}{\epsilon^\gamma}.$$

Por outro lado,

$$\Big|\frac{e_j(x)}{(\epsilon+|v_{n_k}(x)|)^\gamma}\Big| = \frac{|e_j(x)|}{(\epsilon+|v_{n_k}(x)|)^\gamma} \leq \frac{1}{\epsilon^\gamma}|e_j(x)| = h(x), \ \ \forall \ \ k.$$

Assim,

$$|f_{n_k}(x)| \leq \frac{1}{\epsilon^\gamma}|e_j(x)| = h(x), \ \ \forall \ \ k.$$

Logo,

$$\frac{1}{\epsilon^\gamma}|e_j| = h \in L^1(\Omega).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue concluímos que

$$\int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon+|v_{n_k}|)^\gamma}dx \to \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon+|v_0|)^\gamma}dx. \tag{3.28}$$

Desde que a convergência em (3.27) é valida para toda sequência $\{v_n\}$, a mesma também se verifica para a subsequência $\{v_{n_k}\} \subset \{v_n\}$. Logo, de (3.27) e (3.28) obtemos

$$\int_\Omega \nabla v_{n_k}\nabla e_j dx - \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon+|v_{n_k}|)^\gamma}dx \to \int_\Omega \nabla v_0 \nabla e_j dx - \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon+|v_0|)^\gamma}dx,$$

isto é,

$$f_j(\alpha_{n_k}) \to f_j(\alpha_0), \forall j = 1,2,3,\ldots,m$$

e desta forma

$$f(\alpha_{n_k}) \to f(\alpha_0) \ \ em \ \ \mathbb{R}^m.$$

Para concluírmos a demonstração do item (I), devemos mostrar que

$$f(\alpha_n) \to f(\alpha_0) \ \ em \ \ \mathbb{R}^m. \tag{3.29}$$

Suponhamos por contradição que o limite em (3.29) não ocorre, então existe $\epsilon_0 > 0$ e $\{f(\alpha_{n_j})\} \subset \{f(\alpha_n)\}$ tal que

$$|f(\alpha_{n_j}) - f(\alpha_n)|_{\mathbb{R}^m} \geq \epsilon_0, \ \ \forall \ n_j. \tag{3.30}$$

Usando $\{f(\alpha_{n_j})\}$ no lugar de $\{f(\alpha_n)\}$, na primeira parte da demonstração, existe $\{f(\alpha_{n_{j_p}})\} \subset \{f(\alpha_{n_j})\}$ tal que

$$f(\alpha_{n_{j_p}}) \to f(\alpha_0) \ \ \text{em} \ \ \mathbb{R}^m.$$

Assim, existe $n_{j_0} \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f(\alpha_{n_{j_p}}) - f(\alpha_0)| < \frac{\epsilon_0}{2}, \ \ \forall \ n_{j_p} \geq n_{j_0},$$

que é um absurdo com (3.30). Portanto, devemos ter

$$f(\alpha_n) \to f(\alpha_0) \;\; em \;\; \mathbb{R}^m.$$

Mostrando assim, a continuidade da função f em $\mathbb{R}^m$.

Análise de (II)**:**

Observe que

$$\langle f(\alpha), \alpha\rangle = f_1(\alpha)\alpha_1 + f_2(\alpha)\alpha_2 + f_3(\alpha)\alpha_3 + \ldots + f_m(\alpha)\alpha_m,$$

ou seja,

$$\langle f(\alpha), \alpha\rangle = \sum_{i=1}^{m} f_i(\alpha)\alpha_i.$$

Portanto

$$\langle f(\alpha), \alpha\rangle = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \Big[\int_\Omega \nabla v \nabla e_j dx - \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx\Big]$$

implicando

$$\langle f(\alpha), \alpha\rangle = \sum_{j=1}^{m} \Big[\alpha_j \int_\Omega \nabla v \nabla e_j dx - \alpha_j \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx\Big]$$

com isso,

$$\langle f(\alpha), \alpha\rangle = \|v\|^2 - \int_\Omega \frac{v}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx.$$

Sendo

$$-\int_\Omega \frac{|v|}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx \geq -\frac{1}{\epsilon^\gamma}\int_\Omega |v| dx,$$

temos

$$\langle f(\alpha), \alpha\rangle \geq \|v\|^2 - \frac{1}{\epsilon^\gamma}\int_\Omega |v| dx$$

mostrando que

$$\langle f(\alpha), \alpha\rangle \geq \|v\|^2 - \frac{1}{\epsilon^\gamma}\|v\|_{L^1(\Omega)}. \tag{3.31}$$

Usando o fato que a imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$ é contínua, temos que

$$|v|_{L^1(\Omega)} \leq c_1 \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{3.32}$$

Fazendo a substituição de (3.32) em (3.31), temos que

$$\langle f(\alpha), \alpha\rangle \geq \|v\|^2 - \frac{c_1}{\epsilon^\gamma}\|v\|. \tag{3.33}$$

Temos por (3.33) que $\|v\| = |\alpha|$, logo

$$\langle f(\alpha), \alpha\rangle \geq |\alpha|^2 - c_\epsilon|\alpha|, \;\; \text{onde} \;\; c_\epsilon = \frac{c_1}{\epsilon^\gamma}.$$

Fixando $R > 0$ tal que

$$R^2 - c_\epsilon R > 0$$

concluímos que

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle \geq 0, \quad \text{para } |\alpha| = R.$$

Provando desta forma o item (II).

Portanto, pelo Lema Fundamental, existe $z_m \in \mathbb{R}^m$ tal que $f(z_m) = 0$ e $|z_m| \leq R$. Logo,

$$f_j(z_m) = 0, \;\; \forall j = 1, 2, 3, \dots m,$$

isto é,

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla e_j dx - \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v_m|)^\gamma} dx = 0, \forall j = 1, 2, 3, \dots, m, \;\; \forall e_j \in V_m, \tag{3.34}$$

$$\text{com } \; z_m = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_m), \;\; v_m = \sum_{i=1}^{m} \eta_i e_i \;\; e \;\; \|v_m\| = |z_m| \leq R.$$

É imediato observar que de (3.34) temos a igualdade

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla \psi dx - \int_\Omega \frac{\psi}{(\epsilon + |v_m|)^\gamma} dx = 0, \;\; \forall \;\; \psi \in V_m, \;\; \|v_m\| \leq R.$$

Fixando

$$\Phi \in H_0^1(\Omega) \;\; \text{temos que} \;\; \Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i,$$

com

$$\|\Phi\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty.$$

Desde que

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$$

temos que

$$\Phi = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i.$$

Considerando

$$\Psi_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i \in V_m,$$

concluimos que

$$\Phi = \lim_{m \to \infty} \Psi_m \;\; \text{em} \;\; H_0^1(\Omega).$$

Observe que $V_m \subseteq V_k$, para $m \leq k$. No que segue, vamos fixar m e considerar $k > m$. Assim,

$$\int_\Omega \nabla v_k \nabla \Psi_m dx - \int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v_k|)^\gamma} dx = 0, \ \ \forall k > m, \ \ \text{pois} \ \ \Psi_m \in V_k. \tag{3.35}$$

Passando ao limite quando $k \to \infty$ na igualdade (3.35) e usando os limites

$$\int_\Omega \nabla v_k \nabla \Psi_m dx \to \int_\Omega \nabla v \nabla \Psi_m dx \tag{3.36}$$

e

$$\int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v_k|)^\gamma} dx \to \int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx, \tag{3.37}$$

obtemos

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \Psi_m dx - \int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx = 0, \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.38}$$

Vamos provar a convergência (3.36).

Temos que $H_0^1(\Omega)$ é um espaço reflexivo, pois é um espaço de Hilbert, toda sequência limitada $\{v_k\} \subseteq H_0^1(\Omega)$ admite uma subsequência $\{v_{k_j}\} \subseteq \{v_k\}$ que converge fraco v em $H_0^1(\Omega)$. Em símbolos,

$$v_{k_j} \rightharpoonup v \ \ em \ \ H_0^1(\Omega).$$

Considerando a aplicação

$$\begin{array}{rcccl} F & : & H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ & & w & \mapsto & F(w) = \displaystyle\int_\Omega \nabla w \nabla \Psi_m dx \end{array}$$

temos que, $F \in (H_0^1(\Omega))'$. De acordo com a definição de convergência fraca temos

$$F(v_{k_j}) \ \ \to \ \ F(v) \ \ em \ \ \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla v_{k_j} \nabla \Psi_m dx \ \ \to \ \ \int_\Omega \nabla v \nabla \Psi_m dx \ \ em \ \ \mathbb{R}. \tag{3.39}$$

Vamos provar a convergência (3.37).

Defina as seguintes aplicações

$$f_{k_j}(x) = \frac{\Psi_m(x)}{(\epsilon + |v_{k_j}(x)|)^\gamma} \ \ e \ \ f(x) = \frac{\Psi_m(x)}{(\epsilon + |v(x)|)^\gamma}.$$

Sendo $H_0^1(\Omega)$ reflexivo e $\{v_k\}$ limitada em $H_0^1(\Omega)$, existem uma subsequência $\{v_{k_j}\} \subset \{v_k\}$ e $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$v_{k_j} \rightharpoonup v \ \ em \ \ H_0^1(\Omega).$$

Desde que, a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é compacta temos que

$$v_{k_j} \ \ \rightarrow \ \ v \ \ em \ \ L^2(\Omega).$$

Assim, existe uma subsequência $\{v_{k_{j_p}}\} \subset L^2(\Omega)$ tal que $\{v_{k_{j_p}}\} \subset \{v_k\}$ e satisfaz:

$I)$ $v_{k_{j_p}}(x) \ \ \rightarrow \ \ v(x)$ q.t.p. em Ω,

$II)$ $|v_{k_{j_p}}(x)| \leq h(x)$, q.t.p. em Ω com $h \in L^2(\Omega)$.

Sendo Ω um domínio limitado tem-se $h \in L^1(\Omega)$.

Logo,

$$\frac{\Psi_m(x)}{(\epsilon + |v_{k_{j_p}}(x)|)^\gamma} \ \ \rightarrow \ \ \frac{\Psi_m(x)}{(\epsilon + |v(x)|)^\gamma} \ \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

ou seja,

$$f_{k_{j_p}}(x) \ \ \rightarrow \ \ f(x) \ \ q.t.p. \ \text{em} \ \Omega.$$

Veja que

$$|f_{k_{j_p}}(x)| = \left|\frac{\Psi_m(x)}{(\epsilon + |v_{k_{j_p}}(x)|)^\gamma}\right| = \frac{|\Psi_m(x)|}{(\epsilon + |v_{k_{j_p}}(x)|)^\gamma}.$$

Sendo

$$\frac{|\Psi_m(x)|}{(\epsilon + |v_{k_{j_p}}(x)|)^\gamma} \leq \frac{1}{\epsilon^\gamma}|\Psi_m(x)|,$$

encontramos

$$|f_{k_{j_p}}(x)| \leq \frac{1}{\epsilon^\gamma}|\Psi_m(x)| = g(x).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Ver Teorema $B.1$) concluimos que

$$\int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v_{k_{j_p}}|)^\gamma}dx \rightarrow \int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v|)^\gamma}dx. \tag{3.40}$$

Desde que, a igualdade (3.37) é válida para toda sequência $\{v_k\}$, em particular vale para a subsequência $\{v_{k_{j_p}}\} \subset \{v_{k_j}\}$, ou seja,

$$\int_\Omega \nabla v_{k_{j_p}} \nabla \Psi_m dx - \int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v_{k_{j_p}}|)^\gamma}dx = 0. \tag{3.41}$$

Portanto, passando ao limite quando $k_{j_p} \rightarrow \infty$ na igualdade (3.41) e, usando os limites (3.39) e (3.40) obtemos

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \Psi_m dx - \int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v|)^\gamma}dx = 0, \ \ \forall m \in \mathbb{N}, \tag{3.42}$$

Isto mostra, a igualdade (3.38).

Agora, passando ao limite quando $m \to \infty$ na igualdade (3.42) e usando os limites

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \Psi_m dx \to \int_\Omega \nabla v \nabla \Phi dx \tag{3.43}$$

e

$$\int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx \to \int_\Omega \frac{\Phi}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx, \tag{3.44}$$

obtemos a igualdade

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \Phi dx - \int_\Omega \frac{\Phi}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx = 0, \forall \Phi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.45}$$

Prova da convergência (3.43).

Temos que $\Psi_m \to \Phi$ em $H_0^1(\Omega)$, que implica

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \Psi_m dx \to \int_\Omega \nabla v \nabla \Phi dx.$$

Prova da convergência (3.44).

Desde que

$$\Psi_m \to \Phi \;\text{ em }\; H_0^1(\Omega),$$

então

$$\Psi_m \;\to\; \Phi \;\text{ em }\; L^2(\Omega).$$

Em consequência disso, existe uma subsequência $\{\Psi_{m_j}\} \subset L^2(\Omega)$ tal que $\{\Psi_{m_j}\} \subset \{\Psi_m\}$ e verifica:

$(I)\Psi_{m_j}(x) \to \Phi(x)$ q.t.p. em Ω,

$(II)|\Psi_{m_j}(x)| \leq h(x), \forall j$ q.t.p. em Ω com $h \in L^2(\Omega)$.

Sendo $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, *então* $h \in L^1(\Omega)$. Definindo

$$f_{m_j}(x) = \frac{\Psi_{m_j}(x)}{(\epsilon + |v(x)|)^\gamma} \quad e \quad f(x) = \frac{\Phi(x)}{(\epsilon + |v(x)|)^\gamma}$$

e tendo em vista que

$$\Psi_{m_j}(x) \to \Phi(x) \;\text{ q.t.p. em }\; \Omega$$

temos que

$$\frac{\Psi_{m_j}(x)}{(\epsilon + |v(x)|)^\gamma} \to \frac{\Phi(x)}{(\epsilon + |v(x)|)^\gamma} \;\text{ q.t.p. em }\; \Omega,$$

isto é,

$$f_{m_j}(x) \to f(x) \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega.$$

Desde que

$$|\Psi_{m_j}(x)| \leq h(x) \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega \ \forall m_j \in \mathbb{N},$$

temos que

$$\frac{|\Psi_{m_j}(x)|}{(\epsilon + |v(x)|)^\gamma} \leq \frac{1}{\epsilon^\gamma}|\Psi_{m_j}(x)| \leq \frac{1}{\epsilon^\gamma}h(x), \quad \forall m_j.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue concluimos que

$$\lim_{m_j \to \infty} \int_\Omega f_{m_j}(x)dx = \int_\Omega f(x)dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \frac{\Psi_{m_j}}{(\epsilon + |v|)^\gamma}dx \to \int_\Omega \frac{\Phi}{(\epsilon + |v|)^\gamma}dx. \tag{3.46}$$

Visto que a igualdade (3.43) é válida para toda sequência $\{\Psi_m\}$, também é verdadeira para uma subsequência $\{\Psi_{m_j}\} \subset \{\Psi_m\}$, ou seja,

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \Psi_{m_j} dx - \int_\Omega \frac{\Psi_{m_j}}{(\epsilon + |v|)^\gamma}dx = 0, \ \ \forall m_j \in \mathbb{N}. \tag{3.47}$$

Passando ao limite quando $m_j \to \infty$ em (3.47) e usando os limites (3.43) e (3.46) obtemos

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \Phi dx - \int_\Omega \frac{\Phi}{(\epsilon + |v|)^\gamma}dx = 0, \ \ \forall \Phi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.48}$$

Portanto, a função v é uma solução fraca do problema $(P)_\epsilon$, isto é,

$$(P)_\epsilon \begin{cases} -\Delta v &= \dfrac{1}{(\epsilon + |v|)^\gamma}, \quad \Omega \\ v &> 0, \quad \Omega \\ v &= 0, \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Mostramos assim, que dado $\epsilon > 0$, existe $u_\epsilon \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(P)_\epsilon \begin{cases} -\Delta u_\epsilon &= \dfrac{1}{(\epsilon + u_\epsilon)^\gamma}, \quad \Omega \\ u_\epsilon &> 0, \quad \Omega \\ u_\epsilon &= 0, \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

No que segue-se, vamos considerar $\epsilon_n = \dfrac{1}{n}$, $u_{\epsilon_n} = u_n$ e trabalhar com o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u_n &= \dfrac{1}{(\frac{1}{n}+u_n)^\gamma}, & \Omega \\ u_n &> 0, & \Omega \\ u_n &= 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Pela teoria da regularidade ver ([1]) é possível mostrar que

$$u_n \in C^2(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega).$$

Segue da definição de solução fraca que

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \Phi dx = \int_\Omega \frac{\Phi}{(\frac{1}{n}+u_n)^\gamma} dx, \quad \forall \Phi \in H_0^1(\Omega).$$

Escolhendo $\Phi = u_n$ deduzimos que

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n dx = \int_\Omega \frac{u_n}{(\frac{1}{n}+u_n)^\gamma} dx,$$

e portanto,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx = \int_\Omega \frac{u_n}{(\frac{1}{n}+u_n)^\gamma} dx.$$

Consequentemente,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq \int_\Omega u_n^{1-\gamma} dx \tag{3.49}$$

e assim,

$$\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq |\Omega|^\gamma \|u_n\|^{1-\gamma}_{L^1(\Omega)}. \tag{3.50}$$

Usando o fato que a imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ é contínua, existe $c > 0$ tal que

$$\|u_n\|^2 \leq c\|u_n\|^{1-\gamma}.$$

Disso concluimos que existe um $k > 0$ satisfazendo $\|u_n\| \leq k$, mostrando que u_n é limitada.

Sendo $H_0^1(\Omega)$ reflexivo, existe uma subsequência $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega)$$

e

$$u_{n_j}(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Denotando $u_{n_j} = v_j$, segue-se que

$$\begin{cases} -\Delta v_j &= \dfrac{1}{(\frac{1}{n_j} + v_j)^\gamma}, & \Omega \\ v_j &> 0, & \Omega \\ v_j &= 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

e portanto,

$$\begin{cases} -\Delta(v_j + \frac{1}{n_j}) &= \dfrac{1}{(\frac{1}{n_j} + v_j)^\gamma}, & \Omega \\ v_j &> 0, & \Omega \\ v_j &= 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Definindo

$$\Psi_j = v_j + \frac{1}{n_j}$$

tem-se que

$$\begin{cases} -\Delta \Psi_j &= \dfrac{1}{\Psi_j^\gamma}, & \Omega \\ \Psi_j &> 0, & \Omega \\ \Psi_j &> 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Usando o Teorema 3.4,

$$\Psi_j(x) \geq \varphi_1(x), \forall x \in \overline{\Omega}, \ \ \forall j \in \mathbb{N}, \tag{3.51}$$

onde φ_1 é uma autofunção positiva de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$ associada ao primeiro autovalor λ_1.

De acordo com a desigualdade (3.51) temos que

$$v_j(x) + \frac{1}{n_j} \geq \varphi_1(x), \forall x \in \overline{\Omega}, \ \ \forall j \in \mathbb{N}. \tag{3.52}$$

Logo, passando ao limite quando $j \to \infty$, na desigualdade (3.52), obtemos

$$\lim_{j \to \infty} \left(v_j(x) + \frac{1}{n_j} \right) \geq \lim_{n_j \to \infty} \varphi_1(x)$$

ou seja,

$$\lim_{j \to \infty} v_j(x) + \lim_{n_j \to \infty} \frac{1}{n_j} \geq \varphi_1(x).$$

Assim,

$$u(x) \geq \varphi_1(x) > 0 \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega. \tag{3.53}$$

Portanto, $\quad med(\{x \in \Omega; u(x) = 0\}) = 0.$

Segue da definição de solução fraca que

$$\int_\Omega \nabla v_j \nabla \varphi dx = \int_\Omega \frac{\varphi}{(\frac{1}{n} + v_j)^\gamma} dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.54}$$

Logo passando ao limite quando $j \to \infty$, na igualdade (3.54), e usando os limites

$$\int_\Omega \nabla v_j \nabla \varphi dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx \tag{3.55}$$

e

$$\int_\Omega \frac{\varphi}{(\frac{1}{n_j} + v_j)^\gamma} dx \to \int_\Omega \frac{\varphi}{u^\gamma} dx \tag{3.56}$$

obtemos a igualdade,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega \frac{\varphi}{u^\gamma} dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.57}$$

Prova da convergência (3.55).

Desde que

$$v_j \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega)$$

pela análise feita anteriormente temos que

$$\int_\Omega \nabla v_j \nabla \varphi dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

Prova da convergência (3.56).

Sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave e sendo $K \subset \Omega$ o suporte de φ temos a igualdade

$$\int_\Omega \frac{\varphi}{(\frac{1}{n_j} + v_j)^\gamma} dx = \int_K \frac{\varphi}{(\frac{1}{n_j} + v_j)^\gamma} dx.$$

Desde que,

$$\Psi_j(x) = v_j(x) + \frac{1}{n_j} \geq \varphi_1(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega$$

vale a desigualdade,

$$\Big| \frac{\varphi}{(v_j + \frac{1}{n_j})^\gamma} \Big| = \frac{|\varphi|}{(v_j + \frac{1}{n_j})^\gamma} \leq \frac{|\varphi|}{\varphi_1^\gamma}, \quad \forall j.$$

Sendo φ_1 uma autofunção positiva associada a λ_1 temos que $\varphi_1 \in C(\overline{\Omega})$ (*ver* [8]). Assim, existe $z \in K$ tal que

$$m_0 \quad = \quad \varphi_1(z) \quad = \quad \min_{x \in K} \varphi_1(x).$$

Logo, por definição de mínimo temos que

$$\varphi_1(x) \geq m_0, \quad \forall x \in K.$$

Portanto,

$$\Big|\frac{\varphi}{(v_j + \frac{1}{n_j})^\gamma}\Big| \leq \frac{|\varphi|}{{m_0}^\gamma} = h \in L^1(K).$$

Além disso,

$$\frac{\varphi(x)}{(v_j(x) + \frac{1}{n_j})^\gamma} \to \frac{\varphi(x)}{u(x)^\gamma}, \quad q.t.p. \text{ em } K.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue concluimos que

$$\int_\Omega \frac{\varphi}{(\frac{1}{n_j} + v_j)^\gamma} dx = \int_K \frac{\varphi}{(\frac{1}{n_j} + v_j)^\gamma} dx \to \int_K \frac{\varphi}{u^\gamma} dx = \int_\Omega \frac{\varphi}{u^\gamma} dx,$$

justificando assim a igualdade (3.57), ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega \frac{\varphi}{u^\gamma} dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.58}$$

Desde que,

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\|_{H^1(\Omega)}},$$

dada $\Psi \in H_0^1(\Omega)$, existe uma sequência $\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|\varphi_n - \Psi\|_{H^1(\Omega)} \to 0, \text{ quando n } \to \infty.$$

Afirmação: Dada $\Psi \in H_0^1(\Omega)$ temos que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \Psi dx = \int_\Omega \frac{\Psi}{u^\gamma} dx, \tag{3.59}$$

isto é, u é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= \frac{1}{u^\gamma}, & \Omega \\ u &> 0, & \Omega \\ u &= 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

De fato, fixado $\Psi \in H_0^1(\Omega)$ considere $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ com

$$\|\varphi_n - \Psi\|_{H^1(\Omega)} \to 0, \text{ quando n } \to \infty.$$

Segue da igualdade (3.58)

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_n dx = \int_\Omega \frac{\varphi_n}{u^\gamma} dx, \forall \ n \in \mathbb{N}. \tag{3.60}$$

Passando ao limite quando $n \ \rightarrow \ \infty$ na igualdade (3.60) e usando os limites

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_n dx \ \ \rightarrow \ \ \int_\Omega \nabla u \nabla \Psi dx \tag{3.61}$$

e

$$\int_\Omega \frac{\varphi_n}{u^\gamma} dx \ \ \rightarrow \ \ \int_\Omega \frac{\Psi}{u^\gamma} dx \tag{3.62}$$

encontramos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \Psi dx = \int_\Omega \frac{\Psi}{u^\gamma} dx, \forall \ \Psi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.63}$$

Vamos provar (3.62).

Veja que,

$$\Big| \int_\Omega \frac{\varphi_n}{u^\gamma} dx - \int_\Omega \frac{\Psi}{u^\gamma} \Big| = \Big| \int_\Omega \frac{\varphi_n - \Psi}{u^\gamma} dx \Big| \leq \int_\Omega \frac{|\varphi_n - \Psi|}{u^\gamma} dx.$$

Sendo

$$u(x) \geq \varphi_1(x) > 0, \ \ \forall \ \ x \in \overline{\Omega},$$

conforme (3.53) encontramos

$$\Big| \int_\Omega \frac{\varphi_n}{u^\gamma} dx - \int_\Omega \frac{\Psi}{u^\gamma} \Big| \leq \int_\Omega \frac{|\varphi_n - \Psi|}{{\varphi_1}^\gamma} dx. \tag{3.64}$$

Tendo em vista que, $|\varphi_n - \Psi| \in H_0^1(\Omega)$, segue da desigualdade de **Hardy-Sobolev** (ver Teorema $B.6$) que existe um $c > 0$ tal que

$$\Big| \int_\Omega \frac{\varphi_n}{u^\gamma} dx - \int_\Omega \frac{\Psi}{u^\gamma} \Big| \leq c \| \ |\varphi_n - \Psi| \ \| = c \|\varphi_n - \Psi\| \ \ \rightarrow \ \ 0 \tag{3.65}$$

e portanto,

$$\int_\Omega \frac{\varphi_n}{u^\gamma} dx \ \ \rightarrow \ \ \int_\Omega \frac{\Psi}{u^\gamma} dx. \tag{3.66}$$

Provando desta forma, a afirmação, ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \Psi dx = \int_\Omega \frac{\Psi}{u^\gamma} dx, \ \ \forall \ \ \Psi \in H_0^1(\Omega) \tag{3.67}$$

e mostrando a existência de solução fraca para o **problema singular (P).**

3.4.1 Unicidade de Solução para o Problema Singular

Suponha que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= \dfrac{1}{u^\gamma}, \quad \Omega \\ u &> 0, \quad \Omega \\ u &= 0, \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{P}$$

tenha duas soluções u_1 e u_2. Vamos mostrar que $u_1 \equiv u_2$ em Ω. Por hipótese temos que u_1 e u_2 são soluções do problema (P), assim u_1 e u_2 satisfazem

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla \varphi dx = \int_\Omega \frac{\varphi}{{u_1}^\gamma} dx, \ \ \forall \ \varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{3.68}$$

e

$$\int_\Omega \nabla u_2 \nabla \Psi dx = \int_\Omega \frac{\Psi}{{u_2}^\gamma} dx, \ \ \forall \ \Psi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.69}$$

Fixando

$$\varphi = \Psi = u_1 - u_2$$

obtemos

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla (u_1 - u_2) dx = \int_\Omega \frac{(u_1 - u_2)}{{u_1}^\gamma} dx \tag{3.70}$$

e

$$\int_\Omega \nabla u_2 \nabla (u_1 - u_2) dx = \int_\Omega \frac{(u_1 - u_2)}{{u_2}^\gamma} dx. \tag{3.71}$$

Portanto

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla (u_1 - u_2) dx - \int_\Omega \nabla u_2 \nabla (u_1 - u_2) dx = \int_\Omega \frac{(u_1 - u_2)}{{u_1}^\gamma} dx - \int_\Omega \frac{(u_1 - u_2)}{{u_2}^\gamma} dx, \tag{3.72}$$

e com isso,

$$\int_\Omega |\nabla (u_1 - u_2)|^2 dx = \int_\Omega \Big[\frac{1}{{u_1}^\gamma} - \frac{1}{{u_2}^\gamma}\Big](u_1 - u_2) dx. \tag{3.73}$$

Desde que,

$$\int_\Omega |\nabla (u_1 - u_2)|^2 dx = \|u_1 - u_2\|^2$$

segue-se da igualdade (3.73)

$$\|u_1 - u_2\|^2 = \int_\Omega \Big[\frac{1}{{u_1}^\gamma} - \frac{1}{{u_2}^\gamma}\Big](u_1 - u_2) dx. \tag{3.74}$$

Observando agora que vale a desigualdade

$$\Big[\frac{1}{{u_1}^\gamma} - \frac{1}{{u_2}^\gamma}\Big](u_1 - u_2) \leq 0, \ \ \forall \ x \in \Omega, \tag{3.75}$$

segue-se de (3.74) que

$$\|u_1 - u_2\|^2 = 0.$$

Portanto,

$$u_1 \equiv u_2.$$

3.4.2 Regularidade da Solução.

Considerando a função

$$\begin{array}{rcccl} f & : & (0,\infty) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & f(t) = \dfrac{1}{t^\gamma}, \end{array}$$

observamos que, para cada $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto,

$$0 < f(u(x)) = \frac{1}{(u(x))^\gamma} \leq \frac{1}{(\varphi_1(x))^\gamma} \leq \frac{1}{(m_0)^\gamma} = c_k, \text{ q.t.p. em } K,$$

pois

$$u(x) \geq \varphi_1(x) \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ e } m_0 = \min_{x \in K} \varphi_1(x).$$

Usando o Teorema da Regularidade (ver Teorema $B.20$), temos que $u \in C^2(\Omega)$ e

$$\begin{cases} -\Delta u & = & \dfrac{1}{u^\gamma}, & \Omega \\ u & > & 0, & \Omega. \end{cases}$$

Apêndice A

Resultados de Análise em $\mathbb{R}^N$.

Neste apêndice vamos recordar algumas definições e enunciar os principais resultados de Análise no $\mathbb{R}^N$ que foram utilizados nesta dissertação.

Teorema A.1 *(Teorema da Mudança de Variáveis)*(Ver[19]) *Sejam $h : U \to V$ um difeomorfismo de classe C^1 entre os abertos $U, V \in \mathbb{R}^m$, $X \subset U$ um compacto J-mensurável e $f : h(X) \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então, $f \circ h : X \to \mathbb{R}$ é integrável e*

$$\int_{h(X)} f(y)dy = \int_X f(h(x))|deth'(x)|dx.$$

Teorema A.2 *(Teorema da Aplicação Inversa)*(Ver[19]) *Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k $(k \geq 1)$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $a \in U$ é tal que $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é invertível, então existe uma bola aberta $B = B(a, \delta) \subset U$ tal que a restrição $f_{|B}$ é um difeomorfismo sobre um aberto $V \ni f(a)$.*

Teorema A.3 *(Teorema de Weirstrass)*(Ver[19]) *Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^N$ possui uma subsequência convergente.*

Teorema A.4 *(Teorema de Borel-Lebesgue)*(Ver[19]) *Seja $K \subset \mathbb{R}^N$ um compacto(isto é, limitado e fechado). Toda cobertura aberta de $K \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ admite uma subcobertura finita $K \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \ldots \cup A_{\lambda_i}$.*

Teorema A.5 (Ver[19]) *Se $K \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto compacto e $F \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto fechado, então existem $x_0 \in K$ e $y_0 \in F$ tais que $d(K, F) = |x_0 - y_0|$. Em particular, se $K \cap F = \emptyset$, então $d(K, F) > 0$.*

Teorema A.6 (Ver[17]) *Seja $f : [a, a+h] \to \mathbb{R}^N$ um caminho com derivada integrável. Então,*

$$f(a+h) - f(a) = \int_a^{a+h} f'(t)dt = h\int_0^1 f'(a+th)dt.$$

Teorema A.7 *(Teorema do Valor Médio)*$(Ver[19])$ *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ *um caminho contínuo, diferenciável no intervalo aberto* (a, b)*. Se* $|f'(t)| \leq M$ *para todo* $t \in (a, b)$*, então*

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

Teorema A.8 *(Desigualdade do Valor Médio)*$(Ver[19])$ *Dado* $U \subset \mathbb{R}^m$ *um aberto, seja* $f : U \to \mathbb{R}^N$ *diferenciável em cada ponto do segmento de reta aberto (a,a+v) e tal que sua restrição ao segmento fechado* $[a, a + v] \subset U$ *seja contínua. Se* $|f'(x)| \leq M$ *para todo* $x \in (a, a + v)$ *então,* $|f(a + v) - f(a)| \leq M|v|$*.*

Teorema A.9 $(Ver[19])$ *Toda aplicação contínua* $f : K \to \mathbb{R}^N$*, definida num compacto* $K \subset \mathbb{R}^m$ *é uniformemente contínua.*

Teorema A.10 $(Ver[19])$ *Seja* $f : X \times K \to \mathbb{R}^N$ *contínua, onde* K *é compacto. Fixemos* $x_0 \in X$*. Para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que*
$x \in X,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow\ |f(x, \alpha) - f(x_0, \alpha)| < \epsilon$*, seja qual for* $\alpha \in K$*.*

Teorema A.11 *(Teorema de Aproximação de Weierstrass)*$(Ver[18])$ *Dada uma função contínua* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, existe uma sequência de polinômios* p_n *tais que* $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = f$ *uniformemente em* $[a, b]$*.*

Teorema A.12 *(Teorema de Extensão de Tietze)*$(Ver[18])$ *Dada uma função real contínua* $f : X \to \mathbb{R}$*, definida num subconjunto fechado de* $X \subset \mathbb{R}^m$*, existe uma função* $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *contínua tal que* $F_{|X} = f$*.*

Teorema A.13 *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)* $(Ver[19])$ *Para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}^N$ *tem-se* $|\langle x, y\rangle| \leq |x||y|$*. Vale a igualdade se, e somente se, um dos vetores* x, y *é um múltiplo escalar do outro.*

Lema A.14 (Teorema da Divergência.)$(Ver[13])$ *Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *um domínio cuja fronteira* $(\partial\Omega)$ *é uma união finita de curvas suaves. Seja* $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ *um campo vetorial de classe* C^1 *em* $\overline{\Omega}$*. Então,*

$$\int_{\overline{\Omega}} \nabla . F dxdy = \int_{\partial\Omega} F.\eta dS,$$

onde η *é a normal externa unitária à* $\partial\Omega$*.*

Teorema A.15 *(As Identidades de Green)*$(Ver[13])$ *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio onde vale o teorema da divergência e sejam* $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$*. Então valem as seguintes identidades:*

$$\int_{\overline{\Omega}} (v\Delta u + \nabla v \nabla u) dxdy = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} ds, \tag{A.1}$$

e

$$\int_{\overline{\Omega}} (v\Delta u - u\nabla v) dxdy = \int_{\partial\Omega} (v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \eta}) ds, \tag{A.2}$$

onde $\frac{\partial}{\partial \eta}$ *é a derivada direcional na direção da normal unitária externa* $\widehat{n}$*.*

Teorema A.16 $(Ver[16])$ *Seja X um espaço vetorial normado e $(x_n) \subset X$. Então,*

$$x_n \to x \Leftrightarrow \text{ dada } (x_{n_j}) \subset (x_n),\ \exists\,(x_{n_{j_k}}) \subset (x_{n_j}) \text{ com } x_{n_{j_k}} \to x.$$

Lema A.17 $(Ver[5])$ *Seja X um espaço de Banach e $\Phi : B_2(0) \to X$, dada por $\Phi(x) = x + \Psi(x)$, onde Ψ é $\alpha-$ uma contração $(0 \leq \alpha < 1)$ e verifica $\Psi(0) = 0$. Então,*
(i) $\Phi(B_r(0)) \supset B_{r(1-\alpha)}(0)$.
(ii) Φ é injetiva.

Lema A.18 $(Ver[5])$ *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ e $v \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ com suporte compacto. Se $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e $suptv \cap \varphi(\partial\Omega) = \emptyset$, então existe $u \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tal que $suptu \subset \Omega$ e $divu(x) = J_\varphi(x) div(v(\varphi(x)))$.*

Lema A.19 $(Ver[5])$ *Seja $f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ com suporte K compacto e seja $\gamma \in C([0,1], \mathbb{R}^N)$. Se $\overline{convK} - \gamma(t) \subset \Theta$, $\forall\, t \in [0,1]$, onde Θ é um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ fixado, tem-se que $f(x+\gamma(0)) - f(x+\gamma(1)) = divv(x)$, onde $v \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ com $suptv \subset \Theta$.*

Apêndice B

Resultados sobre os Espaços de Sobolev e Teoria da Medida e Integração

Neste apêndice vamos apresentar alguns resultados dos Espaços de Sobolev e Teoria da Medida e Integração que foram utilizados nesta dissertação.

Teorema B.1 *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)*(Ver[6]) *Seja* $\{f_n\}$ *uma sequência de funções integráveis, as quais convergem em quase toda parte para uma função mensurável* f *a valores reais. Se existe uma função integrável* g *tal que* $|f_n| \leq g \ \forall \ n$*, então* f *é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Teorema B.2 *(Lema de Fatou)*(Ver[6]) *Seja* $(f_n) \subset M^+(X, \chi)$*, então*

$$\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Definição B.3 (Ver[6]) *Se* m^* *é a medida exterior definida para todos os subconjuntos de* $\mathbb{R}^N$ *, então a* $\sigma-$*álgebra* $\mathfrak{L}$ *de subconjuntos de* $\mathbb{R}^N$ *que satisfaz a condição de Carathéodory, isto é,*

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c), \ \forall \ A \subseteq \mathbb{R}^N$$

é chamada a $\sigma-$*álgebra de Lebesgue de* $\mathbb{R}^N$*. A restrição* m*, de* m^* *ao conjunto* $\mathfrak{L}$ *é chamada medida de Lebesgue em* $\mathbb{R}^N$*.*

Teorema B.4 *(Desigualdade de Hölder)*(Ver[6]) *Seja* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$*, onde* $p \geq 1$ *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*. Então,* $fg \in L^1(\Omega)$ *e* $\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$.

Teorema B.5 *(Desigualdade de Young)*(Ver[6]) *Considere* p *e* q *satisfazendo* $1 < p < \infty$ *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Se* a, b *são números reais não negativos, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{B.1}$$

a igualdade só ocorre se, e somente se, $a^p = b^q$.

Teorema B.6 *(Desigualdade de Hardy-Sobolev)*(Ver[10] *pág* 55) *Se* $u \in H_0^1(\Omega)$, *então* $\dfrac{u}{\varphi_1^\tau} \in L^q(\Omega)$, *onde* $q^{-1} = 2^{-1} - (1-\tau)N^{-1}$ *com* $0 \leq \tau \leq 1$, *e existe uma constante* $c > 0$ *tal que*

$$\left\| \frac{u}{\varphi_1^\tau} \right\|_{L^q(\Omega)} \leq c \cdot \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \ \forall\ u \in H_0^1(\Omega),$$

onde φ_1 *é uma autofunção positiva de* $-\Delta$ *em* $H_0^1(\Omega)$ *associada ao primeiro autovalor* λ_1.

Teorema B.7 (Ver[8]) *Seja* $\{f_n\}$ *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$, *tais que* $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. *Então, existe uma subsequência* $\{f_{n_k}\}$ *tal que*
(I) $f_{n_k} \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω
(II) $|f_{n_k}| \leq h(x)$ *q.t.p. em* Ω, $\forall\, k$, *com* $h \in L^p$.

Definição B.8 (Ver[8])*(Convergência Forte) Seja* X *um espaço vetorial normado e* $\{x_n\} \subset X$. *Dizemos que* x_n *converge forte em* X *se existe* $x \in X$ *com* $\|x_n - x\| \to 0$, *quando* $n \to \infty$. *Neste caso,* x *é o limite de* x_n *em* X.

Definição B.9 (Ver[8])*(Convergência Fraca) Seja* X *um espaço vetorial normado e* $x_n \in X$. *Dizemos que* x_n *converge fraco em* X, *se existe* $x \in X$ *verificando:*

$$\forall\ f \in X';\ f(x_n) \to f(x)\ \text{em}\ \mathbb{R}.$$

Neste caso, x *é chamado o limite fraco de* x_n *em* X, *e denotamos por* $x_n \rightharpoonup x$.

Teorema B.10 (Ver[8]) *Seja* $\{x_n\}$ *uma sequência fracamente convergente num espaço vetorial normado, isto é, existe* $x \in X$ *tal que*

$$x_n \rightharpoonup x\ \text{em}\ X.$$

Então;
a) O limite fraco x *de* $\{x_n\}$ *é único,*
b) Toda subsequência $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ *converge para* x,
c) A sequência $\{x_n\}$ *é limitada.*

Teorema B.11 (Ver[8]) *Seja X um espaço de Banach reflexivo e seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada. Então, existe $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ que converge fracamente em X, isto é, existe $x \in X$ tal que*

$$x_{n_j} \rightharpoonup x \ \ em \ X.$$

Definição B.12 (Ver[8])*(Convergência Fraca - $\star$) Dizemos que $\{f_n\} \subset X^{'}$ converge fraco - $\star$, se existir $f \in X^{'}$ tal que*

$$\forall x \in X; \ f_n(x) \ \rightarrow \ f(x) \ \ em \ \mathbb{R}.$$

Notação: $\quad f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em X'.

Teorema B.13 (Ver[8]) *Seja $\{f_n\} \subset X'$. Então;*

i) $f_n \rightarrow f$ *em* $X' \ \Rightarrow \ f_n \rightharpoonup f$ *em* X'

ii) $f_n \rightharpoonup f$ *em* $X' \ \Rightarrow \ f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* X'.

iii) $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* X', *então* $\|f_n\|$ *limitada e* $\|f\| \leq \liminf\limits_{n\rightarrow\infty} \|f_n\|$.

iv) Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *e* $x_n \rightarrow x$, *então* $f_n(x) \rightarrow f(x)$ *em* $\mathbb{R}$.

Definição B.14 *(Imersão Contínua)*(Ver[2]) *Dizemos que o espaço normado $(X, \|\cdot\|_X)$ está imerso continuamente no espaço $(Y, \|\cdot\|_Y)$ e escrevemos $X \hookrightarrow Y$ se:*
i)X for subespaço vetorial de Y,
ii) A aplicação identidade

$$\begin{array}{rcccl} i & : & X & \rightarrow & Y \\ & & x & \mapsto & i(x) = x \end{array}$$

é contínua, isto é, existe $M > 0$ tal que $\|i(x)\|_Y \leq M\|x\|_X, \ \forall \ x \in X$.

Teorema B.15 *(Imersões de Sobolev)*(Ver[2]) *As seguintes imersões são contínuas:*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} L^s(\Omega) & ; & 1 \leq s \leq 2^* = \frac{2N}{N-2} & para \ \ N \geq 3 \\ L^s(\Omega) & ; & 1 \leq s < \infty & para \ \ N = 1 \ \ ou \ \ N = 2. \end{array} \right.$$

Definição B.16 *(Operador Linear Compacto)*(Ver[16]) *Um operador linear $T : X \rightarrow Y$ é dito compacto, se toda sequência limitada $\{x_n\} \subset X$ é levada em uma sequência $(y_n = T(x_n))$ que admite uma subsequência convergente em Y.*

Definição B.17 *(Imersão Compacta)*(Ver[2]) *Dizemos que o espaço normado $(X, \|\cdot\|_X)$ está imerso compactamente no espaço $(Y, \|\cdot\|_Y)$ e escrevemos $X \hookrightarrow Y$ se:*

$$\begin{array}{rcccl} i & : & X & \rightarrow & Y \\ & & x & \mapsto & i(x) = x \end{array}$$

é um operador linear compacto.

Teorema B.18 *(Teorema da Imersão Compacta de Rellich-Kondrachov)*$(Ver[2])$ *Sendo* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, *as seguintes imersões são compactas:*

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^s(\Omega) \quad ; \quad 1 \leq s < 2^* = \frac{2N}{N-2} \quad para \quad N \geq 3 \\ L^s(\Omega) \quad ; \quad 1 \leq s < \infty \quad para \quad N = 1 \quad ou \quad N = 2. \end{cases}$$

Teorema B.19 *(Desigualdade de Poincaré)*$(Ver[2])$ *Seja* Ω *um aberto limitado de* $\mathbb{R}^N$. *Então existe uma constante* $C = C(\Omega, p)$ *tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \cdot \Big(\int_\Omega |\nabla u|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}, \ \forall \ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \ com \ 1 \leq p < \infty.$$

Teorema B.20 *(Teorema de Regularidade* $(Ver[1])$*) Seja* $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *uma função de classe* $C^\infty((0,\infty),(0,\infty))$. *Se* $u \in H_0^1(\Omega)$ *é uma função positiva q.t.p. em* Ω, *que verifica*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f(u) \cdot \varphi, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

e para cada $K \subset\subset \Omega$, *existe* $c_k > 0$ *tal que*

$$|f(u(x))| \leq c_k \ q.t.p. \ em \ K$$

então,

$$u \in C^2(\Omega).$$

Teorema B.21 $(Ver[6])$ *Se* $f \geq 0$ *e* $\displaystyle\int_\Omega f d\mu = 0$ *para* $f \neq 0$, *então* $med(\Omega) = 0$.

Definição B.22 $(Ver[9])$.**(Domínio de Classe $C^{m,\alpha}$)**
O conjunto Ω *é dito um domínio de classe* $C^{m,\alpha}$ *quando existir uma cobertura aberta* $\{U_j\}_j^q$ *de* $\partial\Omega$ *e funções bijetivas* $\phi_j : \overline{U_j} \to \overline{B}$ *onde* $B = \{y \in \mathbb{R}^N : |y| < 1\}$, *tais que:*
(i) *para cada* j, $\phi_j(U_j \cap \Omega) = \{y \in B : y_n > 0\}$,
(ii) $\|\phi_j\|_{m,\alpha}, \ \|\phi_j^{-1}\|_{m,\alpha} \leq M, \ \forall J$.

Teorema B.23 $(Ver[9])$ *Suponha que* Ω *satisfaça a propriedade da poligonal, isto é, existe* $\delta > 0$ *tal que quaisquer dois pontos* x *e* y *de* Ω *podem ser ligados por uma poligonal em* Ω *de comprimento* $L \leq \delta\|x - y\|$. *Então, para* $0 \leq s < r$, *a imersão* $C^r(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^s(\overline{\Omega})$. *é compacta*

Teorema B.24 $(Ver[9])$ *Todo domínio de classe* $C^{m,\alpha}$, $m > 0$, *satisfaz a propriedade da poligonal.*

Bibliografia

[1] Agmon S., *The L^p Approach to the Dirichlet Problem, Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa 13, 405-408, (1959).*

[2] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[3] Alves C.O. and de Figueiredo D.G., *Nonvariational elliptic systems via Galerkin Methods, Function Spaces, Differential Operator and Nonlinear Analysis.*, The Hans Triebel Anniversary volume, Birkhouser (2003), 47-57.

[4] Alves C.O. , Francisco J.S.A. Corrêa, José V.A. Gonçalves, *Existence of Solutions for some Classes of Singular Hamiltonian Systems.*, University of Texas at San Antonio, USA, Advanced Nonlinear Studies, volume 5, Number 2, May 2005.

[5] A. Ambrosetti, H. Brézis e G. Cerami,*Combined Effects of Concave and Convex Nonlinear in Some Elliptic Problems*, Journal of Functional Analysis, 122, 519-543, (1994).

[6] Bartle, Robert G.,*The Elements of Integration and Lebesgue Measuare*, Wiley Classics Library Edition Published, New York, 1995.

[7] Berestycki, *Methodes Topologiques et Problemes Aux limites non lineares (Tese de Doutorado de Berestycki), Soutenue*, These de Docteur, França, 1975.

[8] Brézis, Haïm, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.

[9] Bers, Jonh, Schechter, *Partial Differential Equations, Lectures on Applied Math*, vol.III(Intercience).

[10] Evans, Laurence C., *Partial Differential Equations Vol. 19*, American Mathematical Society, U.S.A., 1949.

[11] de Figueiredo, Djairo G., *Equações Elípticas Não Lineares, 11º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA*, Rio de Janeiro, 1977.

[12] de Figueiredo, Djairo G., *Positive Solution of Semilinear Elliptic Problems, Programa Brasil-México, IME-Universidade de São Paulo*, São Paulo, 29/06/81 à 17/07/81.

[13] Gilbarg, David e Trundinger Neil S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Classics in Mathematics, Springer, 3ª Edição*, New York, 2001.

[14] Holanda, Ângelo Roncalli Furtado, *Existência de Soluções Positivas Para uma Classe de Equações Elípticas*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2000.

[15] Iório Jr., Rafael José Iório, Valéria Iório,*Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução, CNPq-IMPA*, Rio de Janeiro, 1988.

[16] Kreyszig, Erwin, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley Classics Library Edition Published, New York, 1989.

[17] Kesavan, S., *Nonlinear Functional Analysis: A First Course*, Narosa Publishing House,1999.

[18] Lima, Elon L., *Curso de Análise Vol. 1 (10ª Edição), Projeto Euclides, IMPA*, Rio de Janeiro, 2002.

[19] Lima, Elon L., *Análise Real Vol. 2 Coleção Matemática Universitária, IMPA*, Rio de Janeiro, 2004 .

[20] Lima, Elon L., *Espaços Métricos, Projeto Euclides, IMPA, CNPq* . Rio de Janeiro, 1977.