Resumo

Neste trabalho apresentamos resultados devidos a Ding & Tanaka e Alves, de Morais Filho & Souto sobre existência e multiplicidade de soluções positivas do tipo multi-bumps para equações de Schrödinger

$$\begin{aligned} -\Delta u + (\lambda V(x) + Z(x))u &= f(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{aligned}$$

onde $\lambda > 0$, as aplicações $V, Z : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são contínuas e satisfazem algumas hipóteses e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função não-linear. Mais precisamente, estudamos os casos em que

$$f(s) = s|s|^{p-1}, \quad \forall\, s \in \mathbb{R},$$

com $N \geq 3$, $p \in (1, 2^* - 1)$, onde $2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2}$, e

$$f(s) = \beta s|s|^{q-1} + s|s|^{2^*-2}, \quad \forall\, s \in \mathbb{R},$$

onde $\beta > 0$, $N \geq 3$ e $q \in (1, 2^* - 1)$.

Abstract

In this work we present results due to Ding & Tanaka and Alves, de Morais Filho e Souto about existence and multiplicity of positive multi-bump solutions for Schrödinger equations

$$\begin{aligned} -\Delta u + (\lambda V(x) + Z(x))u &= f(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{aligned}$$

where $\lambda > 0$, the aplications $V, Z : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ are continuous and satisfy some hypothesis and $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a nonlinear function. More precisely, we study the cases

$$f(s) = s|s|^{p-1}, \quad \forall\, s \in \mathbb{R},$$

with $N \geq 3$, $p \in (1, 2^* - 1)$, where $2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2}$, and

$$f(s) = \beta s|s|^{q-1} + s|s|^{2^*-2}, \quad \forall\, s \in \mathbb{R},$$

where $\beta > 0$, $N \geq 3$ and $q \in (1, 2^* - 1)$.

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Teconologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sobre Soluções Multi-bumps para Equações de Schrödinger em $\mathbb{R}^N$

por

Rodrigo Cohen Mota Nemer †

sob orientação do

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

Sobre Soluções Multi-bumps para Equações de Schrödinger em $\mathbb{R}^N$

por

Rodrigo Cohen Mota Nemer

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna (UFPB)

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho (UFCG)

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto (UFCG)
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Março/2009

Agradecimentos

Aos meus pais, Jorge e Rosineide. Devo minha vida a eles. Amo vocês!

Aos professores da graduação, em especial aos professores Hugo e Guerra, que me deram todo o incentivo para começar esta jornada.

A todos os amigos de Santarém e de Campina Grande, que sempre estiveram do meu lado, inclusive nas horas de estudo, apesar de, nessas horas, nem tanto... E é assim que tem de ser, afinal de *contas*, ninguém é de ferro!

Aos amigos do DME, em especial a Damião e Vinícius e, principalmente, a Rawlilson, que tanto me ajudoram nos estudos e, se não fosse por eles, com certeza teria passado por maus bocados.

A todos os professores do mestrado, principalmente ao Professor Aparecido, que me recebeu tão bem nesta cidade e que muito me ajudou no início da caminhada, ao Professor Claudianor, sempre disposto a ajudar de todas as formas, e, em especial, ao Professor Marco Aurélio, pela orientação, dedicação e paciência - *thank you very much, my boy!*

Aos professores Fagner Araruna e Daniel Cordeiro, membros da banca, pela disposição e sugestões.

À minha princesinha, Jéssyca, minha eterna namorada, por todas as palavras de apoio, pelos momentos, por tudo! Te Amo!

À CAPES, pelo apoio financeiro.

A todos que contribuiram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho, muito obrigado!

Dedicatória

Aos meus pais, Jorge e Rosineide.

Conteúdo

Notações

$B_R(x)$	Bola aberta de centro em x e raio R;
$\mathcal{M}(\Omega)$	Espaço das funções Lebesgue mensuráveis sobre $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$;
$L^p(\Omega, \mu)$	Espaço das funções Lebesgue mensuráveis sobre $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ p-integráveis, com $1 \leq p \leq \infty$, segundo a medida μ. Se μ denotar a medida de Lebesgue, poremos $L^p(\Omega)$;
$\lvert . \rvert_{p,\Omega}$	Norma do espaço $L^p(\Omega)$. Caso $\Omega = \mathbb{R}^N$, poremos $\lvert . \rvert_p$;
$W^{k,p}(\Omega)$, $H^1(\Omega)$	Espaços de Sobolev, com $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aberto;
$\lVert . \rVert_{k,p,\Omega}$	Norma do espaço $W^{k,p}(\Omega)$. Caso tenhamos $\Omega = \mathbb{R}^N$, poremos apenas $\lVert . \rVert_{k,p}$. Se $k = 1$ e $p = 2$, denotaremos a norma por $\lVert . \rVert_\Omega$.

Introdução

Neste trabalho apresentaremos os resultados mostrados nos artigos de Ding & Tanaka [19] e Alves, de Morais Filho & Souto [6], sobre a existência e multiplicidade de soluções positivas do tipo multi-bumps de equações de Schrödinger

$$\begin{aligned} -\Delta u + (\lambda V(x) + Z(x))u &= f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), & \end{aligned} \tag{P_λ}$$

onde $\lambda > 0$ e a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é não-linear.

No primeiro capítulo, mostraremos os resultados de Ding & Tanaka [19] referentes ao problema (P_λ) para o caso em que $N \geq 3$ e

$$f(s) = s|s|^{p-1}, \quad \forall\, s \in \mathbb{R},$$

onde $p \in (1, 2^* - 1)$, $2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2}$. Além disso, as funções $V, Z : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfazem as seguintes condições:

(V1) $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ é uma função não-negativa;

(V2) O conjunto $\Omega = \text{int} V^{-1}(\{0\})$ é não-vazio, aberto, com fronteira suave, formado por 3 componentes conexas que denotaremos por Ω_j, $j = 1, 2, 3$, com

$$\text{dist}(\Omega_j, \Omega_i) > 0, \ \text{ para } \ j \neq i$$

e $V^{-1}(\{0\}) = \overline{\Omega}$;

(V3) Existe uma constante $M_0 > 0$ tal que a medida de Lebesgue do conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R}^N \, ; \, V(x) \leq M_0\}$$

é finita, isto é, $|A| < \infty$;

(Z1) $Z \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$;

(Z2) Existe uma constante positiva $M_1 > 1$ tal que

$$|Z(x)| \leq M_1(V(x) + 1)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N\,;$$

(Z3) Para cada $j = 1, 2, 3$, o primeiro autovalor do problema abaixo é positivo[1]

$$\begin{array}{rcl} -\Delta u + Z(x)u & = & \mu u \ \text{ em } \ \Omega_j, \\ u & = & 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega_j, \end{array} \tag{1}$$

isto é, existem constantes positivas K_j, satisfazendo

$$|u|^2_{2,\Omega_j} \leq K_j \int_{\Omega_j} |\nabla u|^2 + Z(x)u^2\,, \quad \forall\, u \in H^1_0(\Omega_j)\,,$$

para $j = 1, 2, 3$.

Neste momento, chamamos a atenção para o número de componentes conexas do conjunto Ω. Aqui supomos que elas são em 3, mas no artigo no qual baseamos este capítulo, o problema é tratado sob a hipótese de que o conjunto Ω tem k componentes conexas. Fizemos esta adaptação para facilitar o entendimento, mas todas as técnicas aqui apresentadas podem ser facilmente estendidas para o caso citado. Além disso, em Ding & Tanaka [19] temos $N \geq 1$.

Sob as condições acima, as soluções não-negativas de (P_λ) podem ser caracterizadas como pontos críticos do funcional $\Upsilon_\lambda : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Upsilon_\lambda(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}(\lambda V(x) + Z(x))u^2 - \frac{1}{p+1}u_+^{p+1}\,\mathrm{d}x\,,$$

para todo $u \in \mathcal{H}$, onde

$$\mathcal{H} = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\,;\, \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2\mathrm{d}x < \infty\}\,.$$

Quando o parâmetro λ é suficientemente grande, o conjunto Ω tem papel importante nos nossos estudos, de modo que o problema

$$\begin{array}{rcl} -\Delta u + Z(x)u & = & |u|^{p-1}u \ \text{ em } \Omega, \\ u & = & 0 \ \text{ em } \partial\Omega, \end{array} \tag{2}$$

[1]Esta propriedade é válida se, por exemplo, Z for não-negativa em Ω

surge como limite do problema original (P_λ). Por sua vez, as soluções deste problema são caracterizadas como pontos críticos do funcional $I_\Omega : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\Omega(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}Z(x)u^2 - \frac{1}{p+1}u_+^{p+1}\,\mathrm{d}x\,,$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Antes de enunciarmos os principais resultados deste capítulo, vejamos algumas definições.

Dizemos que uma solução $u \in \mathcal{H}$ de (P_λ) é uma *solução de energia mínima* se

$$\Upsilon_\lambda(u) = c_\lambda := \inf\{\Upsilon_\lambda(v)\,;\, v \in \mathcal{H}\backslash\{0\} \text{ é uma solução de } (P_\lambda)\}\,.$$

Analogamente, uma solução $u \in H_0^1(\Omega)$ de (2) é uma *solução de energia mínima* se

$$I_\Omega(u) = c(\Omega) := \inf\{I_\Omega(v)\,;\, v \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} \text{ é uma solução de } (2)\}\,.$$

Mais ainda, os valores $c(\Omega)$ e c_λ são chamados de *níveis de energia mínima* dos funcionais I_Ω e Υ_λ ou, equivalentemente, associados aos problemas (2) e (P_λ), respectivamente.

Vejamos agora o teorema que mostraremos no final deste capítulo e que garante a existência de soluções para o problema (P_λ).

Teorema 0.1 *Sob as condições $(V1)-(V3)$ e $(Z1)-(Z3)$, para cada $\varepsilon > 0$ e cada conjunto não-vazio $J \subseteq \{1,2,3\}$, existe $\Lambda = \Lambda(\varepsilon)$ tal que, para $\lambda \geq \Lambda$, (P_λ) tem solução positiva $u_\lambda \in \mathcal{H}$ satisfazendo*

$$\left| \int_{\Omega_j} |\nabla u_\lambda|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u_\lambda^2\,\mathrm{d}x - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c(\Omega_j) \right| \leq \varepsilon\,, \tag{3}$$

para $j \in J$, e

$$\int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega_J} |\nabla u_\lambda|^2 + u_\lambda^2\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon\,, \tag{4}$$

onde $\Omega_J = \bigcup_{j\in J}\Omega_j$ e $c(\Omega_j)$ é um nível de energia mínima associado ao problema

$$\begin{array}{rcl} -\Delta u + Z(x)u &=& u^p \text{ em } \Omega_j, \\ u &>& 0 \text{ em } \Omega_j, \\ u &=& 0 \text{ em } \partial\Omega_j. \end{array} \tag{5}$$

Mais ainda, para qualquer sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$, existe uma subsequência $(\lambda_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{\lambda_{n_l}} \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, onde a função limite $u \in H_0^1(\Omega_J)$ é identicamente nula em $\mathbb{R}^N\backslash\Omega_J$ e, para cada $j \in J$, a restrição $u\big|_{\Omega_j}$ é solução de energia mínima de (5).

Como uma consequência imediata do Teorema 0.1, temos o seguinte corolário que garante a multiplicidade de soluções.

Corolário 0.2 *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 0.1, existe* $\Lambda > 0$ *tal que, para* $\lambda \geq \Lambda$*,* (P_λ) *tem pelo menos* $2^3 - 1 = 7$ *soluções positivas.*

Bartsch & Wang [11] estudaram este mesmo problema sob as hipóteses $(V1) - (V3)$ e assumindo que a função Z satisfaz $Z \equiv 1$. Os autores provaram a existência de uma solução de energia mínima u_λ de (P_λ) para λ suficientemente grande e quando $\lambda \to \infty$ a sequência de soluções u_λ converge fortemente em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para uma solução de energia mínima do problema (2). Bartsch & Wang [10] e Bartsch, Pankov & Wang [9] também mostraram resultados sobre existência e multiplicidade de soluções do problema (P_λ) sob as condições $(V1) - (V3)$ e

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^N} Z(x) > 0\,.$$

Os autores mostraram a existência de uma função

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathbb{N} &\to (0, \infty) \\ k &\mapsto \Lambda(k) \end{aligned}$$

onde $\Lambda(k)$ é tal que se $\lambda \geq \Lambda(k)$, então (P_λ) tem pelo menos k soluções não necessariamente positivas; este resultado foi tratado de forma mais geral por de Figueiredo & Ding [17], no sentido de que a função Z não é necessariamente positiva e o problema envolvia expoentes críticos de Sobolev.

No segundo capítulo, apresentaremos os resultados de Alves, de Morais Filho & Souto [6] relativos ao problema (P_λ) para $N \geq 3$ e

$$f(s) = \beta s|s|^{q-1} + s|s|^{2^*-2}\,, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}\,,$$

onde $\beta > 0$, $q \in (1, 2^* - 1)$ e as funções $V, Z : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfazem as condições $(V1)$, $(V2)$, $(Z1)$ e também

(V3') Existe uma constante $M_0 > 0$ tal que

$$M_0 \leq V(x) + Z(x)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N\,,$$

(Z2') Existe uma constante positiva $M_1 > 0$ tal que

$$|Z(x)| \leq M_1\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N\,.$$

Assim como no problema anterior, aqui também admitimos que o conjunto Ω tem 3 componentes conexas, mas em Alves, de Morais Filho & Souto [6] o problema é tratado sob a condição de que existem k componentes. Essa adaptação tem o mesmo intuito da feita no primeiro capítulo e também não compromete a fidelidade do nosso trabalho.

O principal resultado deste capítulo é o

Teorema 0.3 *Sob as hipóteses $(V1), (V2), (V3'), (Z1)$ e $(Z2')$, para cada conjunto não-vazio $J \subseteq \{1, 2, 3\}$, existem constantes $\beta^* > 0$ e $\lambda^* = \lambda^*(\beta^*)$ tais que, para todo $\beta \geq \beta^*$ e $\lambda \geq \lambda^*$, o problema (P_λ) possui uma família de soluções positivas com a seguinte propriedade: para qualquer sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ com $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$, existe uma subsequência $(\lambda_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{\lambda_{n_l}} \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, onde a função limite $u \in H_0^1(\Omega_J)$ é identicamente nula em $\mathbb{R}^N \backslash \Omega_J$ e, para todo $j \in J$, a restrição $u\big|_{\Omega_j} \in H_0^1(\Omega_j)$ é solução de energia mínima do problema*

$$\begin{aligned} -\Delta u + Z(x)u &= \beta u^q + u^{2^*-1} \quad \text{em } \Omega_j, \\ u &> 0 \quad \text{em } \Omega_j, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega_j. \end{aligned}$$

Para garantir a multiplicidade de soluções de (P_λ) neste capítulo, temos o seguinte corolário, que é uma consequência imediata do Teorema 0.3.

Corolário 0.4 *Sob as condições do Teorema 0.3, existem $\beta^* > 0$ e $\lambda^* = \lambda^*(\beta^*)$ tais que, para $\beta \geq \beta^*$ e $\lambda \geq \lambda^*$, o problema (P_λ) tem pelo menos $2^3 - 1 = 7$ soluções positivas.*

Nos últimos anos, foram publicados vários artigos tratando sobre existênia e multiplicidade de soluções para este tipo de problema. Por exemplo, quando a função $\lambda V(x) + Z(x)$ é coerciva, Miyagaki [26] demonstrou alguns resultados de existência de solução para (P_λ). Quando a função $\lambda V(x) + Z(x)$ é 1-periódica, Alves, Carrião & Miyagaki [4] mostraram a existência de soluções do problema (P_λ). Se $\lambda V(x) + Z(x)$ é radial, Alves, de Morais Filho & Souto [7] demonstraram a existência de soluções positivas de (P_λ). Além de resultados sobre existência, os artigos de Clap & Ding [15], de Figueiredo & Ding [17], Gui [23] e Séré [28] também trazem resultados sobre a multiplicidade de soluções para o problema (P_λ).

Capítulo 1

Equação não-linear de Schrödinger: Caso subcrítico

Neste capítulo abordaremos os resultados apresentados no artigo de Ding & Tanaka [19] sobre a existência e multiplicidade de soluções positivas do tipo multi-bump da equação não-linear de Schrödinger

$$\begin{aligned} -\Delta u + (\lambda V(x) + Z(x))u &= |u|^{p-1}u \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), & \end{aligned} \qquad (P_\lambda)$$

quando o parâmetro λ for suficientemente grande, onde $N \geq 3$, $p \in (1, 2^* - 1)$, $2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2}$. Além disso, as funções $V, Z : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfazem as seguintes condições:

(V1) $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ é uma função não-negativa;

(V2) O conjunto $\Omega = \text{int}V^{-1}(\{0\})$ é não-vazio, aberto, com fronteira suave, formado por 3 componentes conexas que denotaremos por Ω_j, $j = 1, 2, 3$, com

$$\text{dist}(\Omega_j, \Omega_i) > 0\,, \ \text{ para } \ j \neq i$$

e $V^{-1}(\{0\}) = \overline{\Omega}$;

(V3) Existe uma constante $M_0 > 0$ tal que a medida de Lebesgue do conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R}^N\,;\, V(x) \leq M_0\}$$

é finita, isto é, $|A| < \infty$;

(Z1) $Z \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$;

(Z2) Existe uma constante positiva $M_1 > 1$ tal que

$$|Z(x)| \leq M_1(V(x) + 1)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N\,;$$

(Z3) Para cada $j = 1, 2, 3$, o primeiro autovalor do problema abaixo é positivo[1]

$$\begin{aligned} -\Delta u + Z(x)u &= \mu u \;\text{ em }\; \Omega_j, \\ u &= 0 \;\text{ em }\; \partial\Omega_j, \end{aligned} \tag{1.1}$$

isto é, existem constantes positivas K_j, satisfazendo

$$|u|^2_{2,\Omega_j} \leq K_j \int_{\Omega_j} |\nabla u|^2 + Z(x)u^2\,, \quad \forall\, u \in H^1_0(\Omega_j)\,,$$

para $j = 1, 2, 3$.

Sob as condições acima, as soluções não-negativas de (P_λ) podem ser caracterizadas como pontos críticos do funcional $\Upsilon_\lambda : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Upsilon_\lambda(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}(\lambda V(x) + Z(x))u^2 - \frac{1}{p+1}u_+^{p+1}\,\mathrm{d}x\,,$$

para todo $u \in \mathcal{H}$, onde

$$\mathcal{H} = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\,;\, \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2\mathrm{d}x < \infty\}\,.$$

Quando o parâmetro λ é suficientemente grande, o conjunto Ω tem papel importante nos nossos estudos, de modo que o problema

$$\begin{aligned} -\Delta u + Z(x)u &= |u|^{p-1}u \;\text{ em }\Omega, \\ u &= 0 \;\text{ em }\partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.2}$$

surge como limite do problema original (P_λ). Por sua vez, as soluções deste problema são caracterizadas como pontos críticos do funcional $I_\Omega : H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\Omega(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}Z(x)u^2 - \frac{1}{p+1}u_+^{p+1}\,\mathrm{d}x\,,$$

para todo $u \in H^1_0(\Omega)$.

Antes de enunciarmos os principais resultados deste capítulo, vejamos algumas definições.

[1]Esta propriedade é válida se, por exemplo, Z for não-negativa em Ω

Dizemos que uma solução $u \in \mathcal{H}$ de (P_λ) é uma *solução de energia mínima* se

$$\Upsilon_\lambda(u) = c_\lambda := \inf\{\Upsilon_\lambda(v)\,;\, v \in \mathcal{H}\backslash\{0\} \text{ é uma solução de } (P_\lambda)\}\,.$$

Analogamente, uma solução $u \in H_0^1(\Omega)$ de (1.2) é uma *solução de energia mínima* se

$$I_\Omega(u) = c(\Omega) := \inf\{I_\Omega(v)\,;\, v \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} \text{ é uma solução de (2)}\}\,.$$

Mais ainda, os valores $c(\Omega)$ e c_λ são chamados de *níveis de energia mínima* dos funcionais I_Ω e Υ_λ ou, equivalentemente, associados aos problemas (1.2) e (P_λ), respectivamente.

Vejamos agora o teorema que mostraremos no final deste capítulo e que garante a existência de soluções para o problema (P_λ).

Teorema 1.1 *Sob as condições $(V1)-(V3)$ e $(Z1)-(Z3)$, para cada $\varepsilon > 0$ e cada conjunto não-vazio $J \subseteq \{1,2,3\}$, existe $\Lambda = \Lambda(\varepsilon)$ tal que, para $\lambda \geq \Lambda$, (P_λ) tem solução positiva $u_\lambda \in \mathcal{H}$ satisfazendo*

$$\left| \int_{\Omega_j} |\nabla u_\lambda|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u_\lambda^2 \,\mathrm{d}x - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c(\Omega_j) \right| \leq \varepsilon\,, \tag{1.3}$$

para $j \in J$, e

$$\int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega_J} |\nabla u_\lambda|^2 + u_\lambda^2 \,\mathrm{d}x \leq \varepsilon\,, \tag{1.4}$$

onde $\Omega_J = \bigcup\limits_{j\in J} \Omega_j$ e $c(\Omega_j)$ é um nível de energia mínima associado ao problema

$$\begin{array}{rcl} -\Delta u + Z(x)u &=& u^p \text{ em } \Omega_j, \\ u &>& 0 \text{ em } \Omega_j, \\ u &=& 0 \text{ em } \partial\Omega_j. \end{array} \tag{1.5}$$

Mais ainda, para qualquer sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$, existe uma subsequência $(\lambda_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{\lambda_{n_l}} \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, onde a função limite $u \in H_0^1(\Omega_J)$ é identicamente nula em $\mathbb{R}^N\backslash\Omega_J$ e, para cada $j \in J$, a restrição $u\big|_{\Omega_j}$ é solução de energia mínima de (1.5).

Como uma consequência imediata do Teorema 1.1, temos o seguinte corolário que garante a multiplicidade de soluções.

Corolário 1.2 *Sob as hipóteses do Teorema 1.1, existe $\Lambda > 0$ tal que, para $\lambda \geq \Lambda$, (P_λ) tem pelo menos $2^3 - 1 = 7$ soluções positivas.*

Ressaltamos que a maioria dos resultados aqui apresentados foram baseados no artigo de Ding & Tanaka [19]. Caso contrário, serão dadas as devidas referências.

1.1 Resultados Preliminares

Trabalharemos no espaço normado

$$\mathcal{H} = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 < \infty \right\},$$

cuja norma é dada por

$$||u||^2_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + (V(x) + 1)\, u^2, \quad \forall\, u \in \mathcal{H}\,.$$

Dado um conjunto aberto $\Theta \subset \mathbb{R}^N$, também definimos

$$\mathcal{H}(\Theta) = \left\{ u \in H^1(\Theta); \int_{\Theta} V(x)u^2 < \infty \right\}$$

com a norma

$$||u||^2_{\mathcal{H}(\Theta)} = \int_{\Theta} |\nabla u|^2 + (V(x) + 1)\, u^2, \quad \forall\, u \in \mathcal{H}(\Theta)\,.$$

É fácil ver que o espaço $(\mathcal{H}(\Theta), ||.||_{\mathcal{H}(\Theta)})$ é um espaço de Hilbert, com produto interno

$$\begin{array}{rcl} <.,.>: \mathcal{H}(\Theta) \times \mathcal{H}(\Theta) & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & <u,v> = \displaystyle\int_{\Theta} \nabla u \nabla v + (V(x)+1)uv\,, \end{array}$$

satisfazendo trivialmente a imersão contínua

$$\mathcal{H}(\Theta) \hookrightarrow \ H^1(\Theta).$$

Além disso, quando o conjunto Θ é limitado, segue da continuidade da função V que as normas $||.||_{\mathcal{H}(\Theta)}$ e $||.||_{\Theta}$ são equivalentes e daí $\mathcal{H}(\Theta) \equiv H^1(\Theta)$.

Tendo em vista $(V2)$, fixemos, para cada $j \in \{1,2,3\}$, um conjunto aberto, limitado e com fronteira suave $\Omega'_j \subset \mathbb{R}^N$ tal que

(i) $\overline{\Omega_j} \subset \Omega'_j$;

(ii) $\overline{\Omega'_i} \cap \overline{\Omega'_j} = \emptyset$, para todo $i, j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$.

Nesta seção, discutiremos a positividade do operador

$$\begin{array}{rcl} \Delta + (\lambda V(x) + Z(x)) : \mathcal{H}(\Theta) & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \Delta u + (\lambda V(x) + Z(x))u \end{array}$$

onde Θ é um dos conjuntos

$$\Omega'_j\,,\ j=1,2,3\,,\quad \mathbb{R}^N\backslash\bigcup_{j\in J}\Omega'_j\,,\ J\subseteq\{1,2,3\}\,,\quad \mathbb{R}^N. \tag{1.6}$$

Neste sentido, vejamos o próximo resultado.

Proposição 1.3 *Existem $\lambda_1\geq 1$ e $C_1>0$ tais que, para qualquer conjunto Θ em (1.6) e para todo $\lambda\geq\lambda_1$,*

$$|u|^2_{2,\Theta}\leq C_1\int_\Theta|\nabla u|^2+(\lambda V(x)+Z(x))u^2\,,\quad\forall\, u\in\mathcal{H}(\Theta).$$

Demonstração:

Primeiramente suponha $\Theta=\Omega'_j$, com $j\in\{1,2,3\}$ qualquer.

Para esse caso, consideraremos o problema de autovalor

$$\begin{aligned} -\Delta u+(\lambda V(x)+Z(x))u &= \mu u\ \text{ em } \Omega'_j,\\ \frac{\partial u}{\partial\eta} &= 0\ \text{ em } \partial\Omega'_j. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Denotaremos o primeiro autovalor de (1.7) por $\mu_{\lambda j}$. Lembramos que $\mu_{\lambda j}$ é uma função estritamente crescente de λ e $\mathcal{H}(\Omega'_j)\equiv H^1(\Omega'_j)$, pois Ω'_j é limitado.

Precisaremos também do seguinte resultado:

Lema 1.4 *Com as notações acima, temos*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\mu_{\lambda j}=\mu_{0j}\ ,$$

onde μ_{0j} é o primeiro autovalor do problema (1.1).

Demonstração:

Pela caracterização variacional do primeiro autovalor, temos, para todo $\lambda\geq 1$,

$$\begin{aligned} \mu_{\lambda j} &= \inf\left\{\int_{\Omega'_j}|\nabla u|^2+(\lambda V(x)+Z(x))u^2\,;u\in H^1(\Omega'_j),|u|^2_{2,\Omega'_j}=1\right\}\\ &\leq \inf\left\{\int_{\Omega_j}|\nabla u|^2+Z(x)u^2\,;u\in H^1_0(\Omega_j)\,,u\equiv 0\text{ em }\Omega'_j\backslash\Omega_j\,,|u|^2_{2,\Omega_j}=1\right\}\\ &= \mu_{0j}\ . \end{aligned}$$

Logo $\lim_{\lambda\to\infty}\mu_{\lambda j}\leq\mu_{0j}$. Para concluirmos a demonstração, resta mostrar que não ocorre a desigualdade estrita.

Suponhamos, por contradição, que

$$\tilde{\mu} := \lim_{\lambda\to\infty} \mu_{\lambda j} < \mu_{0j}$$

(vale ressaltar que este limite existe porque $\mu_{\lambda j}$ é uma função estritamente crescente de λ).

Tomemos uma sequência qualquer $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $\lambda_n \to \infty$. Então devemos ter

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{\lambda_n j} = \tilde{\mu} < \mu_{0j}$$

Para cada n, seja $u_{\lambda_n} \in H^1(\Omega'_j)$ uma autofunção de (1.7), com $\lambda = \lambda_n$, associada ao autovalor $\mu_{\lambda_n j}$, isto é,

$$\begin{aligned} -\Delta u_{\lambda_n} + (\lambda_n V(x) + Z(x))u_{\lambda_n} &= \mu_{\lambda_n j} u_{\lambda_n} \quad \text{em } \Omega'_j, \\ \frac{\partial u_{\lambda_n}}{\partial \eta} &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega'_j. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$|u_{\lambda_n}|_{2,\Omega'_j} = 1\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,. \tag{1.9}$$

Note que, pela definição de solução fraca de (1.8) e usando $u_{\lambda_n} \in H^1(\Omega'_j)$ como função teste,

$$|\nabla u_{\lambda_n}|^2_{2,\Omega'_j} + \int_{\Omega'_j} (\lambda_n V(x) + Z(x))u^2_{\lambda_n} = \mu_{\lambda_n j} |u_{\lambda_n}|^2_{2,\Omega'_j}\,,$$

donde

$$\begin{aligned} |\nabla u_{\lambda_n}|^2_{2,\Omega'_j} + \lambda_n \int_{\Omega'_j} V(x)u^2_{\lambda_n} &\leq \left(\max_{x\in\overline{\Omega'_j}} |Z(x)| + \mu_{\lambda_n j} \right) |u_{\lambda_n}|^2_{2,\Omega'_j} \\ &= \max_{x\in\overline{\Omega'_j}} |Z(x)| + \tilde{\mu}\,, \end{aligned} \tag{1.10}$$

já que Z é contínua, $\tilde{\mu} \geq \mu_{\lambda_n j}$ e por (1.9). Logo a sequência $(u_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathcal{H}(\Omega'_j) \equiv H^1(\Omega'_j)$ e podemos assumir que existem uma subsequência, que também denotaremos por $(u_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$, e uma função $u_0 \in H^1(\Omega'_j)$ tais que

$$u_{\lambda_n} \rightharpoonup u_0 \quad \text{em } H^1(\Omega'_j)\,. \tag{1.11}$$

Mais ainda, como $H^1(\Omega'_j)$ está imerso compactamente em $L^2(\Omega'_j)$, temos também

$$u_{\lambda_n} \to u_0 \quad \text{em } L^2(\Omega'_j)\,. \tag{1.12}$$

Afirmamos que u_0 pertence a $H_0^1(\Omega'_j)$ e é uma autofunção do problema (1.1) associada ao autovalor $\tilde{\mu}$. De fato, primeiramente note que, por (1.9) e (1.12) temos

$$1 = \lim_{n\to\infty} |u_{\lambda_n}|_{2,\Omega'_j} = |u_0|_{2,\Omega'_j}\,,$$

isto é, $u_0 \neq 0$. Além disso, por (1.10), temos

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n \int_{\Omega'_j} V(x) u_{\lambda_n}^2 < \infty\,,$$

donde, como $\lambda_n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega'_j} V(x) u_{\lambda_n}^2 = 0\,.$$

Além disso, como $V \in L^\infty(\Omega'_j)$, então

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega'_j} V(x) u_{\lambda_n}^2 = \int_{\Omega'_j} V(x) u_0^2\,.$$

Portanto, pela unicidade do limite,

$$\int_{\Omega'_j} V(x) u_0^2 = 0\,,$$

e daí, usando $(V1) - (V2)$,

$$\int_{\Omega'_j \setminus \Omega_j} V(x) u_0^2 = \int_{\Omega'_j} V(x) u_0^2 = 0\,,$$

o que implica em $u_0\big|_{\Omega'_j\setminus\Omega_j} \equiv 0$ e, consequentemente, como Ω_j tem fronteira suave, $u_0 \in H_0^1(\Omega_j)$ e, em particular, no sentido do traço,

$$u_0 \equiv 0 \ \text{ em } \partial\Omega_j\,. \tag{1.13}$$

Agora, para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_j)$, pela definição de solução fraca de (1.8), temos

$$\int_{\Omega_j} \nabla u_{\lambda_n} \nabla \varphi + Z(x) u_{\lambda_n} \varphi = \mu_{\lambda_n j} \int_{\Omega_j} u_{\lambda_n} \varphi\,.$$

Logo, fazendo $n \to \infty$ na igualdade acima e usando (1.11),

$$\int_{\Omega_j} \nabla u_0 \nabla \varphi + Z(x) u_0 \varphi = \tilde{\mu} \int_{\Omega_j} u_0 \varphi\,, \qquad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega_j)\,.$$

Assim, como $C_c^\infty(\Omega_j)$ é denso em $H_0^1(\Omega_j)$, u_0 satisfaz

$$-\Delta u_0 + Z(x) u_0 = \tilde{\mu} u_0\,. \tag{1.14}$$

Dessa forma, por (1.14) e (1.13), $u_0 \in H_0^1(\Omega_j)$ é uma autofunção do problema (1.1) associada o autovalor $\tilde{\mu} < \mu_{0j}$, o que é uma contradição, haja visto que μ_{0j} é o primeiro autovalor de (1.1). Logo devemos ter $\tilde{\mu} = \mu_{0j}$.

■

Voltemos à demonstração da Proposição 1.3 com $\Theta = \Omega_j'$.

Seja $C' := \frac{1}{2}\min_{1\leq j\leq 3}\mu_{0j} > 0$. Então $C_1 > \frac{1}{C'}$ satisfaz a conclusão da proposição. De fato, escolhamos $\lambda_1 \geq 1$ tal que $\mu_{\lambda_1 j} \geq \frac{1}{2}\mu_{0j}$, para todo $j = 1, 2, 3$ (note que tal número existe pois $\mu_{\lambda j}$ é função estritamente crescente de λ). Assim, como $\mu_{\lambda_1 j}$ é o primeiro autovalor de (1.7) com $\lambda = \lambda_1$, temos, para todo $u \in \mathcal{H}(\Omega_j')$ e todo $\lambda \geq \lambda_1$,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{C_1}|u|^2_{2,\Omega_j'} &\leq \frac{1}{2}\mu_{0j}|u|^2_{2,\Omega_j'} \\
&\leq \mu_{\lambda_1 j}|u|^2_{2,\Omega_j'} \\
&\leq \int_{\Omega_j'} |\nabla u|^2 + (\lambda_1 V(x) + Z(x))u^2 \\
&\leq \int_{\Omega_j'} |\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u^2\,,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
|u|^2_{2,\Omega_j'} \leq C_1 \int_{\Omega_j'} |\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u^2\,.
$$

Portanto, como j é arbitrário, segue o resultado para todo Ω_j', $j \in \{1, 2, 3\}$.

Antes de mostrarmos os casos restantes, provaremos o resultado para o conjunto $\Theta = \mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{1\leq j\leq 3}\Omega_j'$.

Para cada $\mu \in (0, M_0]$, seja

$$
A_\mu = \{x \in \Theta\,;\, V(x) \leq \mu\}\,.
$$

Como $V(x) > 0$ em Θ a menos de um conjunto de medida nula, a saber, $\bigcup\limits_{1\leq j\leq 3}\partial\Omega_j'$, usando $(V3)$ temos

$$
\lim_{\mu\to 0}|A_\mu| = \left|\bigcap_{\mu\downarrow 0} A_\mu\right| = 0\,. \tag{1.15}
$$

Note também que para qualquer $\mu \in (0, M_0]$, existe $\lambda_0(\mu) \geq 1$ tal que

$$
1 \leq \lambda V(x) + Z(x) + M_2\chi_{A_\mu}(x)\,, \qquad \forall\, x \in \Theta, \quad \forall\, \lambda \geq \lambda_0(\mu)\,, \tag{1.16}
$$

onde $M_2 = M_1(M_0+1)+1$. Com efeito, fixemos $\mu \in (0, M_0]$ arbitrariamente. Se $x \in A_\mu$, então $V(x) \leq \mu$ e por $(Z2)$

$$|Z(x)| \leq M_1(V(x)+1) \leq M_1(M_0+1)\,.$$

Assim

$$1 \leq 1 + Z(x) + |Z(x)| \leq Z(x) + M_2 \leq \lambda V(x) + Z(x) + M_2\,,$$

ou seja, (1.16) vale para $x \in A_\mu$ e $\lambda \geq 1$. Se $x \in \Theta \backslash A_\mu$, então $V(x) > \mu$ e tomando $\lambda_0(\mu) = M_1(1+\frac{1}{\mu}) + \frac{1}{\mu}$, segue que, por $(Z2)$,

$$\begin{aligned}
1 &\leq 1 + |Z(x)| + Z(x) \\
&\leq 1 + M_1(V(x)+1) + Z(x) \\
&\leq \left[\frac{1}{V(x)} + M_1\left(1 + \frac{1}{V(x)}\right)\right] V(x) + Z(x) \\
&\leq \left[\frac{1}{\mu} + M_1\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\right] V(x) + Z(x) \\
&\leq \lambda V(x) + Z(x)\,,
\end{aligned}$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0(\mu)$. Logo (1.16) é válida também para todo $x \in \Theta \backslash A_\mu$ e, portanto, para todo x em Θ.

Agora fixemos $u \in \mathcal{H}(\Theta)$ arbitrariamente.

Fixemos[2] também $r \in (2, 2^*)$. Usando a desigualdade de Hölder, o fato de $A_\mu \subset A$ ter, por $(V3)$, medida finita e a Imersão de Sobolev $H^1(\Theta) \hookrightarrow L^r(\Theta)$ (cuja constante de imersão denotaremos por C_*) temos, para todo $\mu \in (0, M_0]$,

$$\begin{aligned}
\int_{A_\mu} u^2 &\leq |A_\mu|^{1-\frac{2}{r}} |u|^2_{r,A_\mu} \\
&\leq |A_\mu|^{1-\frac{2}{r}} |u|^2_{r,\Theta} \\
&\leq C_*^2 |A_\mu|^{1-\frac{2}{r}} ||u||^2_\Theta\,.
\end{aligned}$$

No que segue, faremos $C_\mu = C_*^2 |A_\mu|^{1-\frac{2}{r}}$. A partir da desigualdade acima e por (1.16) temos, para cada μ e $\lambda \geq \lambda_0(\mu)$,

$$\begin{aligned}
\int_{A_\mu} u^2 &\leq C_\mu \int_\Theta |\nabla u|^2 + u^2 \leq C_\mu \int_\Theta |\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + Z(x) + M_2 \chi_{A_\mu}) u^2 \\
&= C_\mu \int_\Theta |\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + Z(x)) u^2 + C_\mu M_2 \int_{A_\mu} u^2\,.
\end{aligned}$$

[2]Estes valores garantem as imersões contínuas $H^1(\Theta) \hookrightarrow L^r(\Theta)$ e $L^r(A_\mu) \hookrightarrow L^2(A_\mu)$, pois $|A_\mu| < \infty$.

isto é,

$$(1 - M_2 C_\mu) \int_{A_\mu} u^2 \le C_\mu \int_\Theta |\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u^2 \,. \tag{1.17}$$

para cada μ e $\lambda \ge \lambda_0(\mu)$.

Por (1.15) e pela definição de C_μ, podemos escolher $\mu_0 \in (0, M_0]$ suficientemente pequeno tal que

$$M_2 C_{\mu_0} \le \frac{1}{2} \,. \tag{1.18}$$

Seja $\lambda_1 = M_1(1 + \frac{1}{\mu_0}) + \frac{1}{\mu_0}$. Então, por (1.17) e (1.18) temos, para μ_0 e $\lambda \ge \lambda_1$,

$$\int_{A_{\mu_0}} u^2 \le 2C_{\mu_0} \int_\Theta |\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u^2 \,. \tag{1.19}$$

Por fim, calculemos $|u|_{2,\Theta}^2$.

Tendo em vista (1.16) e usando μ_0 temos, para $\lambda \ge \lambda_1$,

$$|u|_{2,\Theta}^2 \le \int_\Theta (\lambda V(x) + Z(x))u^2 + M_2 \int_{A_{\mu_0}} u^2 \,.$$

Mais ainda, usando (1.19) e (1.18) respectivamente,

$$\begin{aligned} |u|_{2,\Theta}^2 &\le \int_\Theta |\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u^2 + M_2 \int_{A_{\mu_0}} u^2 \\ &\le (1 + 2M_2 C_{\mu_0}) \int_\Theta |\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u^2 \\ &\le 2 \int_\Theta |\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u^2 \,. \end{aligned}$$

Portanto, como u é arbitrária, vale a Proposição 1.3 também para esse caso, com $C_1 = 2$.

Finalmente, suponhamos que $\Theta = \mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{j \in J} \Omega'_j$, onde $J \subseteq \{1, 2, 3\}$ é arbitrário (em particular, trataremos o caso $\Theta = \mathbb{R}^N$, pois este é consequência de tomarmos $J = \emptyset$).

Dado um subconjunto $J \subseteq \{1, 2, 3\}$ qualquer, seja $J' := \{1, 2, 3\} \setminus J$. Então, pelos casos mostrados anteriormente, temos, para todo $u \in \mathcal{H}(\Theta)$,

$$\begin{aligned}
|u|^2_{2,\Theta} &= \sum_{j\in J'} |u|^2_{2,\Omega'_j} + |u|^2_{2,\mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{1\le j\le 3} \Omega'_j} \\
&\le C_1 \left(\sum_{j\in J'} \int_{\Omega'_j} (|\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u^2) + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{1\le j\le 3} \Omega'_j} (|\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u^2) \right) \\
&= C_1 \int_\Theta |\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u^2 \,.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Pela proposição anterior, a forma bilinear simétrica

$$\begin{aligned}
< .,. >_\lambda : \mathcal{H}(\Theta) \times \mathcal{H}(\Theta) &\rightarrow \mathbb{R} \\
(u,v) &\mapsto < u,v >_\lambda = \int_\Theta \nabla u \nabla v + (\lambda V(x) + Z(x))uv
\end{aligned}$$

é positiva definida em $\mathcal{H}(\Theta)$, para todo $\lambda \ge \lambda_1$. Assim, a aplicação

$$\begin{aligned}
||.||_{\lambda,\Theta} : \mathcal{H}(\Theta) &\rightarrow \mathbb{R} \\
u &\mapsto ||u||^2_{\lambda,\Theta} = \int_\Theta |\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u^2
\end{aligned}$$

define uma norma em $\mathcal{H}(\Theta)$, para todo $\lambda \ge \lambda_1$ e para todo Θ em (1.6). Quando $\Theta = \mathbb{R}^N$, escreveremos simplesmente $||.||_\lambda := ||.||_{\lambda,\mathbb{R}^N}$.

O próximo resultado garante a equivalência entre as normas $||.||_{\mathcal{H}(\Theta)}$ e $||.||_{\lambda,\Theta}$. Antes enunciá-lo, façamos algumas considerações.

Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$\lambda_1 \ge 2M_1(1 + \frac{1}{M_0})\,.$$

Assim, se $x \in \Theta$ satisfaz $V(x) > M_0$, então, por $(Z2)$,

$$2|Z(x)| \le 2M_1(V(x)+1) < 2M_1(1 + \frac{1}{M_0})V(x) \le \lambda_1 V(x)\,,$$

ou seja,

$$|Z(x)| \le 2|Z(x)| + Z(x) \le \lambda V(x) + Z(x)\,, \tag{1.20}$$

para todo $x \in \Theta$ tal que $V(x) > M_0$ e para todo $\lambda \ge \lambda_1$.

Além disso, uma vez que $M_1 > 1$, temos

$$\lambda_1 = 2M_1\left(1 + \frac{1}{M_0}\right) > M_1\left(1 + \frac{1}{M_0}\right) + \frac{1}{M_0}\,,$$

e então, de (1.16), se $x \in \Theta$ é tal que $V(x) \leq M_0$, temos

$$0 \leq \lambda V(x) + Z(x) + M_1(M_0+1)\,, \quad \forall\, \lambda \geq \lambda_1\,. \tag{1.21}$$

Essas observações nos ajudarão a demonstrar o

Corolário 1.5 *Existe $C_2 > 0$ independente de $\lambda \geq \lambda_1$ tal que, para qualquer conjunto Θ em (1.6) e qualquer $u \in \mathcal{H}(\Theta)$,*

$$\int_\Theta |Z(x)|u^2 \leq C_2||u||^2_{\lambda,\Theta}\,, \tag{1.22}$$

$$\int_\Theta V(x)u^2 \leq C_2||u||^2_{\lambda,\Theta}\,. \tag{1.23}$$

Mais ainda, existem $C_{3,\lambda}, C'_{3,\lambda} > 0$ tais que

$$C_{3,\lambda}||u||_{\mathcal{H}(\Theta)} \leq ||u||_{\lambda,\Theta} \leq C'_{3,\lambda}||u||_{\mathcal{H}(\Theta)}\,, \quad \forall\, u \in \mathcal{H}(\Theta)\,. \tag{1.24}$$

Demonstração:

Sejam Θ em (1.6), $u \in \mathcal{H}(\Theta)$ e $\lambda \geq \lambda_1$ quaisquer.

Primeiramente mostraremos que vale (1.22).

Sejam os conjuntos $A_{M_0} = \{x \in \Theta; V(x) \leq M_0\}$ e $B_{M_0} = \{x \in \Theta; V(x) > M_0\}$. Note que $A_{M_0} \cup B_{M_0} = \Theta$.

Usando (1.20) e (1.21), temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_{M_0}} |Z(x)|u^2 \;&\leq\; \int_{B_{M_0}} (\lambda V(x) + Z(x))u^2 \\
&\leq\; \int_{B_{M_0}} (\lambda V(x) + Z(x))u^2 + \int_\Theta |\nabla u^2| + \\
&\qquad + \int_{A_{M_0}} (\lambda V(x) + Z(x))u^2 + M_1(M_0+1)\int_{A_{M_0}} u^2 \\
&\leq\; ||u||^2_{\lambda,\Theta} + M_1(M_0+1)\int_\Theta u^2\,,
\end{aligned}$$

donde, pela proposição anterior,

$$\int_{B_{M_0}} |Z(x)|u^2 \leq [C_1M_1(M_0+1)+1]\,||u||^2_{\lambda,\Theta}\,. \tag{1.25}$$

Por outro lado, por $(Z2)$ e novamente pela proposição anterior,

$$\begin{aligned} \int_{A_{M_0}} |Z(x)|u^2 &\leq \int_{A_{M_0}} M_1(V(x)+1)u^2 \\ &\leq M_1(M_0+1)|u|^2_{2,\Theta} \\ &\leq C_1 M_1(M_0+1)||u||^2_{\lambda,\Theta}\,. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Logo, por (1.25) e (1.26)

$$\int_\Theta |Z(x)|u^2 \leq [2C_1M_1(M_0+1)+1]\,||u||^2_{\lambda,\Theta}\,,$$

e segue a estimativa (1.22).

Para verificar (1.23), basta notar que, usando a última estimativa,

$$\begin{aligned} \int_\Theta V(x)u^2 &\leq \int_\Theta \lambda V(x)u^2 \leq \int_\Theta (\lambda V(x)+Z(x))u^2 + \int_\Theta |Z(x)|u^2 \\ &\leq ||u||^2_{\lambda,\Theta} + \int_\Theta |Z(x)|u^2 \\ &\leq [2C_1M_1(M_0+1)+2]\,||u||^2_{\lambda,\Theta}\,. \end{aligned}$$

Portanto, a constante C_2 do enunciado pode ser tomada como $C_2 = 2C_1M_1(M_0+1)+2$.

Para concluirmos, vejamos (1.24). Note que, por (1.22) e pela Proposição 1.3,

$$\begin{aligned} ||u||^2_{\mathcal{H}(\Theta)} &\leq \int_\Theta |\nabla u|^2 + (\lambda V(x)+Z(x))u^2 + \int_\Theta |Z(x)|u^2 + \int_\Theta u^2 \\ &\leq ||u||^2_{\lambda,\Theta} + C_2||u||^2_{\lambda,\Theta} + C_1||u||^2_{\lambda,\Theta} \\ &= (1+C_1+C_2)||u||^2_{\lambda,\Theta}\,, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} ||u||^2_{\lambda,\Theta} &\leq \lambda\left(\int_\Theta |\nabla u|^2 + V(x)u^2 + |Z(x)|u^2\right) \\ &\leq \lambda\left(\int_\Theta |\nabla u|^2 + V(x)u^2 + M_1(V(x)+1)u^2\right) \\ &\leq \lambda\left(\int_\Theta |\nabla u|^2 + (M_1+1)(V(x)+1)u^2\right) \\ &\leq \lambda(M_1+1)||u||^2_{\mathcal{H}(\Theta)}\,. \end{aligned}$$

Portanto, fazendo $C_{3,\lambda} = (C_1+C_2+1)^{-\frac{1}{2}}$ e $C'_{3,\lambda} = [\lambda(M_1+1)]^{-\frac{1}{2}}$, obtemos (1.24) e, assim, o corolário está demonstrado.

■

O próximo corolário nos fornecerá uma desigualdade muito útil em nossos estudos.

Corolário 1.6 *Dado* $\delta_0 \in (0,1)$, *existe* $\nu_0 \in (0,1)$ *tal que, para qualquer conjunto* Θ *em (1.6),*

$$\delta_0 ||u||^2_{\lambda,\Theta} \le ||u||^2_{\lambda,\Theta} - p\nu_0 |u|^2_{2,\Theta}\,, \quad \forall\, u \in \mathcal{H}(\Theta)\,,\ \forall\, \lambda \ge \lambda_1\,.$$

Demonstração:

Fixado $\delta_0 \in (0,1)$, basta tomar

$$\nu_0 = \frac{1-\delta_0}{pC_1} > 0\,,$$

onde C_1 é a constante da Proposição 1.3. Logo

$$C_1 = \frac{1-\delta_0}{p\nu_0}$$

e o resultado segue pela Proposição 1.3.

■

1.2 Funcional Modificado e a Condição de Palais-Smale

Nesta seção, daremos, efetivamente, os primeiros passos em direção à demonstração do Teorema 1.1.

Seguindo os argumentos de Ding & Tanaka [19], faremos uma modificação na não-linearidade do funcional Υ_λ, definido no início deste capítulo, para obtermos as estimativas do Teorema 1.1.

Fixemos $\delta_0 \in (0,1)$ e seja ν_0 a constante dada no Corolário 1.6. Definamos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \begin{cases} \min\{\nu_0\xi, \xi^p\}, & \xi \ge 0,\\ 0, & \xi < 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \nu_0\xi, & \xi \ge \nu_0^{\frac{1}{p-1}},\\ \xi^p, & 0 \le \xi \le \nu_0^{\frac{1}{p-1}},\\ 0, & \xi < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Definamos também $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$F(\xi) = \int_0^\xi f(s)\mathrm{d}s = \begin{cases} \frac{1}{p+1}\nu_0^{\frac{p+1}{p-1}} + \frac{1}{2}\nu_0(\xi^2 - \nu_0^{\frac{2}{p-1}}), & \xi \ge \nu_0^{\frac{1}{p-1}},\\ \frac{1}{p+1}\xi^{p+1}, & 0 \le \xi \le \nu_0^{\frac{1}{p-1}},\\ 0, & \xi < 0. \end{cases}$$

A partir daqui, suporemos, sem perda de generalidade, que $J = \{1, 2\}$. Ponhamos

$$\Omega_J = \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad \text{e} \quad \Omega'_J = \Omega'_1 \cup \Omega'_2 \,.$$

e

$$\chi_J(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega'_J, \\ 0, & x \notin \Omega'_J. \end{cases}$$

Sejam as funções $g, G : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$g(x, \xi) = \chi_J(x)\xi_+^p + (1 - \chi_J(x))f(\xi) \,,$$

e

$$G(x, \xi) = \int_0^\xi g(x, s)\mathrm{d}s = \frac{\chi_J(x)}{p+1}\xi_+^{p+1} + (1 - \chi_J(x))F(\xi) \,,$$

e consideremos o funcional $\Phi_\lambda : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) \,.$$

Sob as condições $(V1)-(V3)$, $(Z1)-(Z3)$ e pelas definições de g e G, o funcional Φ_λ é de classe $C^1(\mathcal{H}, \mathbb{R})$ e seus pontos críticos são soluções não-negativas do problema

$$-\Delta u + (\lambda V(x) + Z(x))u = g(x, u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N \,. \tag{1.27}$$

Note que, pela definição da função g, um ponto crítico de Φ_λ é uma solução de (P_λ) se, e somente se, $u(x) \leq \nu_0^{\frac{1}{p-1}}$ em $\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J$.

O objetivo da construção do funcional Φ_λ, é evitar que uma sequência de soluções $(u_{\lambda_n}) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ de (1.27) com $\lambda = \lambda_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$, possua subsequências que convirjam para soluções não-nulas de (1.5), com $j = 3$. Essa observação tornar-se-á mais clara no decorrer do trabalho, mais precisamente na Proposição 1.9.

Antes de mostrarmos a condição de Palais-Smale[3] para o funcional Φ_λ, vejamos o seguinte lema.

Lema 1.7 *Suponha que as sequências* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ *e* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [\lambda_1, \infty)$ *satisfaçam*

$$\Phi_{\lambda_n}(u_n) \to c \,, \tag{1.28}$$

$$||\Phi'_{\lambda_n}(u_n)||^*_{\lambda_n} \to 0 \,, \tag{1.29}$$

[3]Ver Apêndice A, Seção A.3.

onde

$$||f||_\lambda^* = \sup_{\varphi\in\mathcal{H}\,,\,||\varphi||_\lambda\leq 1} |f(\varphi)|\,, \quad \textit{para} \;\; f\in\mathcal{H}'\,.$$

Então existem constantes $m = m(c)$ e $M = M(c)$, que independem das sequências tomadas, tais que

$$m\leq \liminf ||u_n||_{\lambda_n}^2 \leq \limsup ||u_n||_{\lambda_n}^2 \leq M. \tag{1.30}$$

Mais ainda, m é positiva se c o for. Em particular, se a sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é constante com $\lambda_n = \lambda \geq \lambda_1$, para todo $n\in\mathbb{N}$, então $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{H}$ é uma sequência $(PS)_c$ de Φ_λ, isto é, satisfaz

$$\Phi_\lambda(u_n) \to c\,, \tag{1.31}$$

$$\Phi'_\lambda(u_n)\to 0 \quad \textit{em} \;\; \mathcal{H}' \quad , \tag{1.32}$$

e vale a estimativa (1.30).

Demonstração:

Sejam $(u_{\lambda_n})\subset\mathcal{H}$ e $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset[\lambda_1,\infty)$ sequências quaisquer satisfazendo (1.28) e (1.29). Então podemos escrever

$$\Phi_{\lambda_n}(u_n) = o_n(1) + c \qquad e \qquad \frac{\Phi'_{\lambda_n}(u_n)u_n}{||u_n||_{\lambda_n}} = \tilde{\varepsilon}_n\,, \tag{1.33}$$

onde $(\tilde{\varepsilon}_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ é uma sequência convergindo para zero. Logo vale a igualdade

$$\Phi_{\lambda_n}(u_n) - \frac{1}{p+1}\Phi'_{\lambda_n}(u_n)u_n = c + o_n(1) + \varepsilon_n||u_n||_{\lambda_n}\,,$$

onde $\varepsilon_n = -\frac{\tilde{\varepsilon}_n}{p+1}$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Assim, usando a definição de Φ_{λ_n} e de Φ'_{λ_n} ,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)||u_n||_{\lambda_n}^2 - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} F(u_n) - \frac{f(u_n)u_n}{p+1} &= \Phi_{\lambda_n}(u_n) - \frac{1}{p+1}\Phi'_{\lambda_n}(u_n)u_n \\ &= c + o_n(1) + \varepsilon_n||u_n||_{\lambda_n}\,. \qquad (1.34)\end{aligned}$$

Observemos que, pelas definições de F e f,

$$F(\xi) - \frac{1}{p+1}f(\xi)\xi = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\nu_0(\xi^2 - \nu_0^{\frac{2}{p+1}})\,, \quad \forall\,\xi\in[\nu_0^{\frac{1}{p+1}},\infty)\,,$$

e

$$F(\xi) - \frac{1}{p+1}f(\xi)\xi = 0\,, \quad \forall\,\xi\in[0,\nu_0^{\frac{1}{p+1}}]\,,$$

donde

$$F(\xi) - \frac{1}{p+1}f(\xi)\xi \leq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\nu_0\xi^2\,, \quad \forall\,\xi\geq 0\,.$$

Portanto, de (1.34),

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)(||u_n||^2_{\lambda_n}-\nu_0|u_n|^2_2)\leq c+o_n(1)+\varepsilon_n||u_n||_{\lambda_n}$$

e, pelo Corolário 1.6,

$$0<\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\delta_0||u_n||^2_{\lambda_n}\leq c+o_n(1)+\varepsilon_n||u_n||_{\lambda_n}\,.$$

Dessa forma, a sequência $(||u_n||_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e

$$\limsup ||u_n||^2_{\lambda_n}\leq M:=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)^{-1}\delta_0^{-1}c\,. \tag{1.35}$$

Por outro lado,

$$F(\xi)-\frac{1}{p+1}f(\xi)\xi\geq 0\,,\quad \forall\,\xi\geq 0\,.$$

Assim, por (1.34),

$$\liminf_{n\to\infty}||u_n||^2_{\lambda_n}\geq m:=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)^{-1}c\,. \tag{1.36}$$

Logo, por (1.35) e (1.36) segue (1.30) e o lema está demonstrado.

■

Vejamos agora a condição de Palais-Smale[4] para Φ_λ.

Proposição 1.8 *Para $\lambda\geq\lambda_1$, Φ_λ satisfaz a condição de Palais-Smale $(PS)_c$ para todo $c\in\mathbb{R}$, isto é, qualquer sequência $(PS)_c$ em $\mathcal{H}$ possui uma subsequência convergente em $\mathcal{H}$.*

Demonstração:

Sejam $c\in\mathbb{R}$ e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{H}$ uma sequência $(PS)_c$ de Φ_λ, isto é, valem (1.31) e (1.32).

Pelo lema anterior, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathcal{H}$ e, consequentemente, em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Logo, da reflexividade destes espaços, existe $u\in\mathcal{H}$ tal que

$$u_n\rightharpoonup u\quad \text{em } \mathcal{H} \text{ e } H^1(\mathbb{R}^N)$$

e, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov,

$$u_n\to u\quad \text{em } L^r_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)\,,\ \text{para } r\in[1,2^*)\,.$$

[4]Ver Apêndice A, Seção A.3.

Mostremos que $u_n \to u$ fortemente em $\mathcal{H}$.

Primeiramente, note que a função limite u é um ponto crítico de Φ_λ. De fato, fixemos $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ arbitrariamente. Por (1.32),

$$\lim_{n\to\infty} \Phi'_\lambda(u_n)\varphi = 0\,. \tag{1.37}$$

Por outro lado, pela natureza de φ, a aplicação

$$w \in H^1(\mathbb{R}^N) \longmapsto \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla \varphi + (\lambda V(x) + Z(x)) w\varphi$$

define um funcional linear e contínuo em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Logo, como $u_n \rightharpoonup u$ em neste espaço,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \varphi + (\lambda V(x) + Z(x)) u_n\varphi \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi + (\lambda V(x) + Z(x)) u\varphi\,. \tag{1.38}$$

Além disso, como $p \in [1, 2^*)$, então $u_n \to u$ fortemente em $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, donde

$$\int_{\Omega'_J} u_{n+}^{p}\varphi \longrightarrow \int_{\Omega'_J} u_+^p \varphi\,. \tag{1.39}$$

Mais ainda, a convergência

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} f(u_n)\varphi \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} f(u)\varphi \tag{1.40}$$

segue de $u_n \to u$ em $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ e de, pelo Teorema A.3, a função $\tilde{f} : V \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde V é um compacto com $V \supset (\operatorname{supp}\varphi \cap \mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J)$, dada por

$$\tilde{f}(x,s) = f(s)\varphi(x)\,, \quad \forall\,(x,s) \in V \times \mathbb{R}\,,$$

definir uma aplicação de Nemytskii $N_{\tilde{f}} : L^1(\mathbb{R}^N) \to L^1(\mathbb{R}^N)$ contínua, já que $\tilde{f}$ é uma função de Carathéodory satisfazendo, pela definição de f,

$$|\tilde{f}(x,s)| \le |\varphi|_\infty |f(s)| \le |\varphi|_\infty \nu_0 |s|\,, \quad \forall\,(x,s) \in V \times \mathbb{R}\,.$$

Portanto, usando (1.38), (1.39) e (1.40), temos

$$\lim_{n\to\infty} \Phi'_\lambda(u_n)\varphi = \Phi'_\lambda(u)\varphi$$

e tendo em vista (1.37) e a arbitrariedade de $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\Phi'_\lambda(u)\varphi = 0\,, \quad \forall\,\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)\,.$$

Assim, como $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso[5] em $\mathcal{H}$, segue que u é ponto crítico de Φ_λ.

De (1.32) e da conclusão acima temos

$$\lim_{n\to\infty} \left(\Phi'_\lambda(u_n) - \Phi'_\lambda(u)\right)(u_n - u) = 0\,,$$

isto é,

$$||u_n - u||_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} (f(u_n) - f(u))(u_n - u) = \int_{\Omega'_J} (u_{n+}^p - u_+^p)(u_n - u) + o_n(1)\,. \quad (1.41)$$

Agora, como $\max_{\xi\in\mathbb{R}} |f'(\xi)| \le p\nu_0$, temos também

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} (f(u_n) - f(u))(u_n - u) \le p\nu_0 |u_n - u|_2^2\,. \quad (1.42)$$

Então, pelo Corolário 1.6, por (1.41), pela desigualdade de Hölder (tendo em vista que $u_{n+}^p, u_+^p \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega'_J)$) e usando que $u_n \to u$ em $L^{p+1}(\Omega'_J)$, pois $p+1 \in [1, 2^*)$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \delta_0 ||u_n - u||_\lambda^2 &\le \lim_{n\to\infty} \left(||u_n - u||_\lambda^2 - p\nu_0 |u_n - u|_2^2\right) \\
&\le \lim_{n\to\infty} \left(||u_n - u||_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} (f(u_n) - f(u))(u_n - u)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_{\Omega'_J} (u_{n+}^p - u_+^p)(u_n - u) + o_n(1)\right) \\
&\le \lim_{n\to\infty} \left(\left(|u_{n+}^p|_{\frac{p+1}{p},\Omega'_J} + |u_+^p|_{\frac{p+1}{p},\Omega'_J}\right) |u_n - u|_{p+1,\Omega'_J} + o_n(1)\right) \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

ou seja, $u_n \to u$ em $\mathcal{H}$.

Sendo assim, como $c \in \mathbb{R}$ e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são arbitrárias, a proposição está demonstrada.

■

Note que a Proposição 1.8 os permite aplicar um argumento do tipo Minimax ao funcional Φ_λ.

A próxima proposição nos auxiliará no estudo do comportamento de sequências $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ e $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [\lambda_1, \infty)$, satisfazendo as condições (1.28), (1.29) com

$$\lambda_n \to \infty\,. \quad (1.43)$$

[5] Ver Apêndice A, Lema A.9

Proposição 1.9 *Sejam as sequências* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [\lambda_1, \infty)$ *satisfazendo as condições (1.28), (1.29) e (1.43). Então, a menos de subsequência,*

$$u_n \rightharpoonup u \quad em\, \mathcal{H}\ e\ H^1(\mathbb{R}^N)\,,$$

para alguma $u \in \mathcal{H}$. *Mais ainda:*

(i) $u \equiv 0$ *em* $\mathbb{R}^N \backslash \Omega_J$ *e* $u\big|_{\Omega_j}$ *é uma solução não-negativa de*

$$\begin{aligned} -\Delta u + Z(x)u &= u^p \;\; em\, \Omega_j, \\ u &= 0 \quad em\, \partial\Omega_j, \end{aligned} \tag{1.44}$$

para $j = 1, 2$;

(ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* u *em um sentido forte:*

$$||u_n - u||_{\lambda_n} \to 0\,, \tag{1.45}$$

$$u_n \to u \quad em\, \mathcal{H}\ e\ H^1(\mathbb{R}^N)\,; \tag{1.46}$$

(iii) a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *também satisfaz:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n V(x) u_n^2 \to 0\,, \tag{1.47}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(u_n) \to I_{\Omega_J}(u)\,, \tag{1.48}$$

$$||u_n||^2_{\lambda_n, \mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J} \to 0\,, \tag{1.49}$$

$$||u_n||^2_{\lambda_n, \Omega'_j} \to \int_{\Omega_j} |\nabla u|^2 + Z(x)u^2\,,\ j = 1, 2\,, \tag{1.50}$$

onde

$$I_{\Omega_J}(v) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_J} |\nabla v|^2 + Z(x)v^2 - \frac{1}{p+1}\int_{\Omega_J} v_+^{p+1}\,.$$

Demonstração:

Sejam as sequências $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [\lambda_1, \infty)$ como no enunciado.

Pelo Lema (1.7), temos

$$m \leq \liminf ||u_n||^2_{\lambda_n} \leq \limsup ||u_n||^2_{\lambda_n} \leq M. \tag{1.51}$$

Logo $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $\mathcal{H}$ e $H^1(\mathbb{R}^N)$, donde podemos assumir que existe $u \in \mathcal{H}$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } \mathcal{H} \text{ e } H^1(\mathbb{R}^N) \tag{1.52}$$

$$u_n \to u \quad \text{em } L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N),\ \text{para todo } q \in [1, 2^*) \tag{1.53}$$

Para mostrarmos (i), consideremos o conjunto

$$C_m=\{x\in\mathbb{R}^N; V(x)\geq \frac{1}{m}\}\,,$$

para todo $m\in\mathbb{N}$.

Note que, para n suficientemente grande,

$$\lambda_n\leq 2(\lambda_n-\lambda_1). \tag{1.54}$$

Assim, para todo $m\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\int_{C_m}u_n^2 &\leq \int_{C_m}mV(x)u_n^2\leq\frac{m}{\lambda_n}\int_{C_m}\lambda_nV(x)u_n^2\\ &\leq \frac{m}{\lambda_n}\int_{\mathbb{R}^N}2(\lambda_n-\lambda_1)V(x)u_n^2\leq\frac{2m}{\lambda_n}\int_{\mathbb{R}^N}(\lambda_n-\lambda_1)V(x)u_n^2+\frac{2m}{\lambda_n}||u_n||_{\lambda_1}^2\\ &= \frac{2m}{\lambda_n}||u_n||_{\lambda_n}^2\,.\end{aligned}$$

Daí, passando ao limite $n\to\infty$ e tendo em vista (1.43) e (1.51) obtemos

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|_{2,C_m}=0\,,\quad\forall\, m\in\mathbb{N}\,,$$

e pelo Lema de Fatou,

$$|u|_{2,C_m}=0\,,\quad\forall\, m\in\mathbb{N}\,.$$

Portanto, $u\equiv 0$ em C_m, para todo $m\in\mathbb{N}$, ou seja, $u\equiv 0$ em $\bigcup_{m\in\mathbb{N}}C_m=\mathbb{R}^N\backslash\overline{\Omega}$. Assim, como Ω tem fronteira suave, $u\in H_0^1(\Omega)$, ou equivalentemente, $u\big|_{\Omega_j}\in H_0^1(\Omega_j)$, para todo $j\in\{1,2,3\}$.

Mostremos agora que $u\big|_{\Omega_j}\in H_0^1(\Omega_j)$ é solução do problema (1.44), para $j=1,2$, e $u\big|_{\Omega_3}\equiv 0$.

Pelo que foi mostrado acima, $u\big|_{\partial\Omega_j}\equiv 0$, para todo $j\in\{1,2,3\}$, no sentido do traço.

Por (1.29), temos, para todo $j\in\{1,2,3\}$,

$$\lim_{n\to\infty}|\Phi'_{\lambda_n}(u_n)\varphi|\leq||\Phi'_{\lambda_n}(u_n)||_{\lambda_n}^*||\varphi||_{\lambda_n}=0\,,\quad\forall\,\varphi\in C_c^\infty(\Omega_j)\,.$$

Logo,

$$\int_{\Omega_j}\nabla u\nabla\varphi+Z(x)u\varphi-g(x,u)\varphi=0\,,\quad\forall\,\varphi\in C_c^\infty(\Omega_j)\,, \tag{1.55}$$

para todo $j \in \{1,2,3\}$. Assim, como $C_c^\infty(\Omega_j)$ é denso em $H_0^1(\Omega_j)$, $u\big|_{\Omega_j}$ é solução do problema (1.44), para $j = 1,2,3$. Em particular, se $j = 3$, tomando $u\big|_{\Omega_3}$ como função teste em (1.55), temos

$$\int_{\Omega_3} |\nabla u|^2 + Z(x)u^2 - f(u)u = 0\,,$$

ou seja,

$$||u||^2_{\lambda_1,\Omega_3'} - \int_{\Omega_3'} f(u)u = 0\,,$$

já que $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} V = \emptyset$. Assim, pelo Corolário 1.6 e por termos $f(\xi)\xi \leq \nu_0 \xi^2$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}$,

$$\delta_0 |u|^2_{2,\Omega_3'} \leq ||u||^2_{\lambda_1,\Omega_3'} - \nu_0 |u|^2_{2,\Omega_3'} \leq ||u||^2_{\lambda_1,\Omega_3'} - \int_{\Omega_3'} f(u)u = 0\,.$$

Logo, $u\big|_{\Omega_3} \equiv 0$, e fica mostrado (i).

Para (ii), usaremos a igualdade

$$\begin{aligned}(\Phi'_{\lambda_n}(u_n) - \Phi'_{\lambda_n}(u))(u_n - u) = \\ = ||u_n - u||^2_{\lambda_n} - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} (f(u_n) - f(u))(u_n - u) - \int_{\Omega'_J} (u_{n+}^p - u_+^p)(u_n - u)\,. \quad (1.56)\end{aligned}$$

Por (1.53), temos $u_n \to u$ em $L^{p+1}(\Omega'_J)$, donde

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega'_J} (u_{n+}^p - u_+^p)(u_n - u) = 0\,. \tag{1.57}$$

Tendo em vista (1.52),

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \Phi'_{\lambda_n}(u)(u_n - u) = \\ = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\Omega_J} \nabla u \nabla(u_n - u) + Z(x)u(u_n - u) - \int_{\Omega_J} u^p(u_n - u)\right) = 0\,. \quad (1.58)\end{aligned}$$

Mais ainda, por (1.29) e pela limitação de $(||u_n||_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\lim_{n\to\infty} |\Phi'_{\lambda_n}(u_n)(u_n - u)| \leq ||\Phi'_{\lambda_n}(u_n)||^*_{\lambda_n}(||u_n||_{\lambda_n} + ||u||_{\lambda_n}) = 0\,. \tag{1.59}$$

Logo, por (1.56)-(1.59),

$$\lim_{n\to\infty}\left(||u_n - u||^2_{\lambda_n} - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} (f(u_n) - f(u))(u_n - u)\right) = 0\,.$$

Assim, pelo Corolário 1.6 e por (1.42),

$$\begin{aligned}\delta_0 ||u_n - u||^2_{\lambda_n} &\leq ||u_n - u||^2_{\lambda_n} - p\nu_0 |u_n - u|^2_2 \\ &\leq ||u_n - u||^2_{\lambda_n} - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} (f(u_n) - f(u))(u_n - u) \to 0\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. Portanto vale (1.45). As convergências (1.46) seguem do Corolário 1.5 e de (1.45).

Finalmente, vejamos (iii).

Como $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} V = \emptyset$, temos, por (1.54),

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n V(x) u_n^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda_n - \lambda_1) V(x) u_n^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda_n - \lambda_1) V(x)(u_n - u)^2 \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda_n - \lambda_1) V(x)(u_n - u)^2 + ||u_n - u||_{\lambda_1}^2 \\
&= ||u_n - u||_{\lambda_n}^2 ,
\end{aligned}
$$

e por (1.45) segue (1.47).

Para os casos restantes, basta considerar (1.46), (1.47), (1.53) e os limites

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_J} F(u_n) = 0 ,$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Theta} Z(x) u_n^2 = \int_{\Theta} Z(x) u^2 ,$$

para $\Theta = \mathbb{R}^N,\ \mathbb{R}^N \setminus \Omega'_J,\ \Omega'_j,\ j = 1, 2$. Por sua vez, estes seguem, respectivamente, de termos $u\big|_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}} \equiv 0$ juntamente com a desigualdade

$$F(\xi) \leq \frac{\nu_0}{2}\xi^2 , \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R} ,$$

a qual é consequência da definição de F, e do limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |Z(x)||u_n^2 - u^2| = 0 .$$

Para verificar a convergência acima, note que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |Z(x)||u_n^2 - u^2| &\leq M_1 \int_{\mathbb{R}^N} (V(x)+1)|u_n + u||u_n - u| \\
&\leq M_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} (V(x)+1)|u_n + u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (V(x)+1)|u_n - u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq M_1 ||u_n + u||_{\mathcal{H}} ||u_n - u||_{\mathcal{H}}
\end{aligned}
$$

donde concluímos por (1.46).

■

Como mencionamos anteriormente, um ponto crítico de Φ_λ é uma solução de (P_λ) se, e somente se, $u(x) \leq \nu_0^{\frac{1}{p-1}}$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_J$. Neste sentido, vejamos a

Proposição 1.10 *Para cada $M > 0$, existe uma constante $\Lambda(M) \geq \lambda_1$ tal que se u_λ é um ponto crítico não-negativo de Φ_λ satisfazendo*

$$\Phi_\lambda(u_\lambda) \leq M\,, \qquad \lambda \geq \Lambda(M)\,,$$

então u_λ satisfaz

$$u_\lambda(x) \leq \nu_0{}^{\frac{1}{p-1}} \quad em \;\; \mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J\,.$$

Em particular, u_λ é solução do problema original (P_λ).

Demonstração:

Seja $(u_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ uma sequência tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ e, para cada n, u_{λ_n} é um ponto crítico não-negativo de Φ_{λ_n}, isto é, u_{λ_n} é solução não-negativa de (1.27),

$$-\Delta v + (\lambda_n V(x) + Z(x))v = g(x,v) \quad \text{em} \;\; \mathbb{R}^N\,.$$

Para simplificar a notação, façamos $u_{\lambda_n} = u_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pelo Lema 1.7, passando a uma subsequência se necessário, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e, pela Proposição 1.9, a menos de subsequência,

$$u_n \to u \quad \text{em } H^1(\mathbb{R}^N)\,,$$

onde u é o limite fraco da sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

A demonstração é um pouco longa e, por isso, a dividiremos em partes.

1^o *Parte: Existe $C > 0$ satisfazendo*

$$|u_n|_\infty \leq C\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Nossa intenção é usar o Corolário A.20. Dito isto, verifiquemos as suas hipóteses.

Inicialmente, observemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se u_n é solução não-negativa de (1.27), então também é solução não-negativa de

$$-\Delta v + (\lambda_n V(x) + \chi_{\mathbb{R}^N\backslash A_{\lambda_n}}(x) Z(x))v = \tilde{g}_n(x,v) \quad \text{em} \;\; \mathbb{R}^N\,, \tag{1.60}$$

onde $A_{\lambda_n} = \{x \in \mathbb{R}^N\,;\, \lambda_n V(x) + Z(x) \leq 0\}$ e $\tilde{g}_n : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada[6] por

$$\tilde{g}_n(x,v) = \frac{g(x,u_n)}{u_n} v - (\chi_{A_{\lambda_n}}(x) Z(x))v\,.$$

[6]Pela definição de g, não há problema em considerar

$$\frac{g(x,s)}{s} = s_+^{p-1}\chi_J(x) + (1-\chi_J(x))\min\{s_+^{p-1}\,,\,\nu_0\}\,.$$

Porém, usamos um abuso de notação por não termos necessariamente $s > 0$.

Além disso, claramente

$$\lambda_n V(x) + \chi_{\mathbb{R}^N \setminus A_{\lambda_n}}(x) Z(x) \geq 0\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N\,.$$

Vejamos agora que a função $\tilde{g}_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, satisfaz a desigualdade (A.42) do Corolário A.20.

Afirmamos que, para λ_n suficientemente grande,

$$\chi_{A_{\lambda_n}} Z \in L^t(\mathbb{R}^N)\,, \ \ \forall\, t \in [1, \infty]\,. \tag{1.61}$$

Para provar a afirmação, basta mostrar que a função Z é limitada em A_{λ_n} e que este conjunto possui medida de Lebesgue finita.

Tomemos o conjunto A definido em $(V3)$, o qual tem medida de Lebesgue finita. Notemos que $A_{\lambda_n} \subset A$. De fato, se $x \notin A$, então $V(x) > M_0$ e daí, usando $(Z3)$,

$$|Z(x)| \leq M_1(V(x) + 1) < M_1 \left(1 + \frac{1}{M_0}\right) V(x)\,,$$

donde, para $\lambda_n \geq 1 + M_1 \left(1 + \dfrac{1}{M_0}\right)$,

$$\lambda_n V(x) + Z(x) > 1 + M_1 \left(1 + \frac{1}{M_0}\right) V(x) - M_1 \left(1 + \frac{1}{M_0}\right) V(x) = V(x) > M_0$$

e, por conseguinte, $x \notin A_{\lambda_n}$. Logo $\mathbb{R}^N \setminus A \subset \mathbb{R}^N \setminus A_{\lambda_n}$, ou seja, $A_{\lambda_n} \subset A$, donde concluímos que A_{λ_n} tem medida de Lebesgue finita. Além disso,

$$|\chi_{A_{\lambda_n}}(x) Z(x)| \leq M_1(M_0 + 1)\,, \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N\,.$$

Portanto, pelo que foi dito a princípio, vale (1.61). Mais ainda, pela definição de g,

$$\left| \frac{g(x, u_n)}{u_n} \right| \leq u_n^{p-1} \quad \text{e} \quad u_n^{p-1} \in L^{\frac{2^*}{p-1}}(\mathbb{R}^N)\,, \tag{1.62}$$

onde $\dfrac{2^*}{p-1} > \dfrac{N}{2}$ se, e somente se, $p < 2^* - 1$, que é o nosso caso. Logo, tendo em vista a definição de $\tilde{g}_n$, (1.61) e (1.62), temos

$$|\tilde{g}_n(x, s)| \leq \left(u_n^{p-1}(x) + \chi_{A_{\lambda_n}}(x) Z(x)\right) |s|, \quad \forall\, (x, s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},$$

onde

$$u_n^{p-1} + \chi_{A_{\lambda_n}} Z \in L^{\frac{2^*}{p-1}}(\mathbb{R}^N)\,, \text{ com } \frac{2^*}{p-1} > \frac{N}{2}\,.$$

Dessa forma, aplicando o Corolário A.20 na equação (1.60), concluímos a demonstração desta parte.

2º Parte: Para cada n, $u_n \in C^{1,\mu}(B_1(0))$, para algum $0 < \mu < 1$, e

$$u_n(x) \to 0 \quad \textit{quando} \ \ |x| \to \infty\,. \tag{1.63}$$

De fato, fixemos n arbitrariamente e seja $f_{\lambda,n} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_{\lambda,n}(x) = -(\lambda V(x) + Z(x))u_n(x) + g(x, u_n(x))\,, \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N\,.$$

Notemos que, usando a definição de g e a continuidade de $\lambda V + Z$, a função $f_{\lambda,n}$ pertence a $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ e, consequentemente,

$$f_{\lambda,n} \in L^t_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)\,, \ \ \text{para } t \in [1, \infty]\,.$$

Daí, pelo Teorema A.16,

$$u_n \in W^{2,t}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)\,, \ \ \text{para } t \in [1, \infty]\,,$$

e, tomando $R > 1$,

$$||u_n||_{2,p,B_1(0)} \leq C\left(|u_n|_{p,B_R(0)} + |f_{\lambda,n}|_{p,B_R(0)}\right)\,, \tag{1.64}$$

onde $C = C(R, p, N) > 0$ é invariante por translações. Agora tomando $t_0 > N$ e usando as imersões de Sobolev,

$$u_n \in W^{2,t_0}(B_1(0)) \hookrightarrow C^{1,\mu}(\overline{B}_1(0))\,, \ \ \mu = 2 - \frac{N}{t_0}\,,$$

como queríamos mostrar.

Para concluir o limite (1.63), observemos que por (1.64) e usando a definição da função $f_{\lambda,n}$ e a imersão acima, existe uma constante $C' > 0$, invariante por translações, tal que, para $R > 1$,

$$||u_n||_{C^{1,\mu}(B_1(x))} \ \ \leq \ \ C'\left(|u_n|_{t_0,B_R(x)} + |u_n|^{2^*-1}_{t_0,B_R(x)}\right)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N\,. \tag{1.65}$$

Agora, dado $\delta > 0$, existe $R_\delta > 0$ tal que

$$\left(|u_n|_{t_0,\mathbb{R}^N\setminus B_{R_\delta}(0)} + |u_n|^{2^*-1}_{t_0,\mathbb{R}^N\setminus B_{R_\delta}(0)}\right) < \frac{\delta}{C'}$$

Tomemos então $x \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$|x| > 2R + R_\delta \,.$$

Dessa forma,

$$B_R(x) \subset \mathbb{R}^N \backslash B_{R_\delta}(0)\,,$$

isto é,

$$\begin{aligned} |u_n|_{t_0,B_R(x)} + |u_n|^{2^*-1}_{t_0,B_R(x)} &\leq |u_n|_{t_0,\mathbb{R}^N\backslash B_{R_\delta}(0)} + |u_n|^{2^*-1}_{t_0,\mathbb{R}^N\backslash B_{R_\delta}(0)} \\ &< \frac{\delta}{C'}\,. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} |u_n(x)| &\leq ||u_n||_{C^{1,\mu}(\overline{B}_1(0))} \\ &\leq C'\left(|u_n|_{t_0,B_R(x)} + |u_n|^{2^*-1}_{t_0,B_R(x)}\right) \\ &< \delta\,, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ com $|x| > 2R + R_\delta$. Assim, vale o limite (1.63).

3^o *Parte: Existe* $\Lambda = \Lambda(M)$ *tal que*

$$|u_\lambda|_{\infty,\partial\Omega'_J} \leq \nu_0^{\frac{1}{p-1}}\,, \quad \forall\,\lambda \geq \Lambda\,.$$

Seja $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \partial\Omega'_J$ uma sequência qualquer. Como $\partial\Omega'_J$ é compacto, podemos assumir, sem perda de generalidade, que existe $\tilde{x} \in \partial\Omega'_J$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = \tilde{x}$. Consideremos agora a sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}$ dada por

$$v_n(x) = u_n(\epsilon_n x + \tilde{x}_n)\,, \quad \forall\,n \in \mathbb{N}\,,$$

onde

$$\epsilon_n^2 = \frac{1}{\lambda_n}\,, \forall\,n \in \mathbb{N}\,.$$

Sem perder a generalidade, podemos assumir que $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, para alguma $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, uma vez que esta sequência é limitada neste espaço, já que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o é. Além disso, temos, como consequência das propriedades das funções u_n,

$$|v_n|_\infty \leq C\,, \quad \forall\,n \in \mathbb{N}\,,$$

$$-\Delta v_n + (V(\epsilon_n x + \tilde{x}_n) + \epsilon_n^2 Z(\epsilon_n x + \tilde{x}_n))v_n = \epsilon_n^2 g(\epsilon_n x + \tilde{x}_n, v_n) \quad \text{em } \mathbb{R}^N$$

e, por (1.65) e pela primeira parte,

$$||v_n||_{C^1(B_1(0))} \leq K\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

A última estimativa juntamente com o Teorema de Ascoli-Arzelá, nos dizem que o limite fraco v de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pertence a $C(B_1(0))$ e

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v \quad \text{em} \;\; C(B_1(0))\,.$$

Passando a uma subsequência, se necessário, assumamos, por contradição, que existe $\eta > 0$ satisfazendo

$$u_n(\tilde{x}_n) \geq \eta\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,$$

então temos

$$v_n(0) \geq \eta\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Logo, $v \neq 0$ em $B_1(0)$. Por outro lado, a função v verifica a equação

$$-\Delta v + V(\tilde{x})v = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N\,,$$

donde $v \equiv 0$ (ver Souto [29], Teorema I.2), o que é uma contradição. Portanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u_n|_{\infty,\partial\Omega'_J} \leq \nu_0^{\frac{1}{p-1}}\,, \quad \forall\, n > n_0.$$

Consequentemente, como as sequências tomadas são arbitrárias, concluímos que existe $\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}(M)$ tal que

$$|u_\lambda|_{\infty,\partial\Omega'_J} \leq \nu_0^{\frac{1}{p-1}}\,, \quad \forall\, \lambda \geq \tilde{\Lambda}\,.$$

4^o *Parte: Conclusão.*

Fixemos $\lambda \geq \tilde{\Lambda}$ e seja $w_\lambda : \mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J \to \mathbb{R}$ dada por

$$w_\lambda(x) = (u_\lambda - \nu_0^{\frac{1}{p-1}})_+(x)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J\,.$$

Primeiramente, observemos que, tendo em vista as 2^o e 3^o partes, o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J\,;\, u_\lambda(x) \geq \nu_0^{\frac{1}{p-1}}\}$$

é compacto e

$$\operatorname{supp} w_\lambda \subseteq A \subset\subset \mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J \,,$$

ou seja,

$$w_\lambda \in L^2(\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J) \,.$$

Além disso,

$$\nabla w_\lambda = \nabla u_\lambda(x).\chi_A(x) \,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J \,.$$

Dessa forma, $w_\lambda \in H_0^1(\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J)$ e, então, a função $\tilde{w}_\lambda : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{w}_\lambda = \begin{cases} w_\lambda(x) \,, & x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J \,, \\ 0 \quad\quad\;\;\,, & x \in \Omega'_J \,, \end{cases}$$

pertence a $H^1(\mathbb{R}^N)$. Assim, como u_λ é um ponto crítico não negativo de Φ_λ,

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi'(u_\lambda)\tilde{w}_\lambda = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_\lambda \nabla \tilde{w}_\lambda + (\lambda V(x) + Z(x)) u_\lambda \tilde{w}_\lambda - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_\lambda)\tilde{w}_\lambda \\ &= ||\tilde{w}_\lambda||_\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J} \nu_0^{\frac{1}{p-1}} (\lambda V(x) + Z(x))\tilde{w}_\lambda - \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J} \nu_0 u_\lambda \tilde{w}_\lambda \,. \end{aligned}$$

Agora seja $\overline{\Lambda} \geq \lambda_1$ tal que

$$\overline{\Lambda} \inf_{x \in A} V(x) + \inf_{x \in A} Z(x) > \nu_0$$

e façamos $\Lambda = \max\{\overline{\Lambda}\,,\, \tilde{\Lambda}\}$. Então, para $\lambda \geq \Lambda$,

$$\begin{aligned} 0 &= ||\tilde{w}_\lambda||_\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J} \nu_0^{\frac{1}{p-1}} (\lambda V(x) + Z(x))\tilde{w}_\lambda - \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J} \nu_0 u_\lambda \tilde{w}_\lambda \\ &\geq ||\tilde{w}_\lambda||_{\lambda, \mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J}^2 + \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J} \nu_0^{\frac{1}{p-1}} \nu_0 \tilde{w}_\lambda - \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J} \nu_0 u_\lambda \tilde{w}_\lambda \\ &= ||\tilde{w}_\lambda||_{\lambda, \mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J}^2 - \nu_0 \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J} (u_\lambda - \nu_0^{\frac{1}{p-1}})\tilde{w}_\lambda \\ &= ||\tilde{w}_\lambda||_{\lambda, \mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J}^2 - \nu_0 \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J} \tilde{w}_\lambda^2 \,, \end{aligned}$$

e pelo Corolário 1.6,

$$\begin{aligned} 0 &\geq ||\tilde{w}_\lambda||_{\lambda, \mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J}^2 - \nu_0 \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J} \tilde{w}_\lambda^2 \\ &\geq \delta_0 ||\tilde{w}_\lambda||_{\lambda, \mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J}^2 \,, \end{aligned}$$

isto é, para $\lambda \geq \Lambda$,

$$\tilde{w}_\lambda \equiv 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N$$

e daí

$$u_\lambda(x) \leq \nu_0^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{em } \mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J\,,$$

como queríamos.

■

1.3 Argumentos do tipo Minimax para o funcional Φ_λ

Primeiramente, consideremos os seguintes funcionais, para $j = 1, 2$

$$\begin{aligned} I_{\Omega_j} : H_0^1(\Omega_j) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto I_{\Omega_j}(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_j} |\nabla u|^2 + Z(x)u^2 - \frac{1}{p+1}\int_{\Omega_j} u_+^{p+1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda,\Omega'_j} : H^1(\Omega'_j) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \Phi_{\lambda,\Omega'_j}(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_j} |\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u^2 - \frac{1}{p+1}\int_{\Omega'_j} u_+^{p+1}\,, \end{aligned}$$

(vale lembrar que $H^1(\Omega'_j) \equiv \mathcal{H}(\Omega'_j)$) cujos pontos críticos são soluções não-negativas de

$$\begin{aligned} -\Delta u + Z(x)u &= u_+^p \;\; \text{em } \Omega_j, \\ u &= 0 \;\; \text{em } \partial\Omega_j, \end{aligned} \tag{1.66}$$

e

$$\begin{aligned} -\Delta u + (\lambda V(x) + Z(x))u &= u_+^p \;\; \text{em } \Omega'_j, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0 \;\; \text{em } \partial\Omega'_j, \end{aligned} \tag{1.67}$$

respectivamente. Esses funcionais são essenciais em nossos argumentos para encontrar soluções de energia mínima sobre os conjuntos Ω_1 e Ω_2.

Note que ambos os funcionais I_{Ω_j} e Φ_{λ,Ω'_j} têm a geometria do Passo da Montanha, isto é,

(*i*) $I_{\Omega_j}(0) = \Phi_{\lambda,\Omega'_j}(0) = 0$;

(*ii*) Existem $r_0, r_1 > 0$, independentes de $\lambda \geq \lambda_1$, satisfazendo, para todo $u \in H_0^1(\Omega_j)$ e $v \in \mathcal{H}(\Omega'_j)$:

(1) $I_{\Omega_j}(u)\,, \Phi_{\lambda,\Omega'_j}(v) \geq 0$, se $||u||_{0,\Omega_j}\,, ||v||_{\lambda,\Omega'_j} \leq r_0$;

(2) $I_{\Omega_j}(u)\,, \Phi_{\lambda,\Omega'_j}(v) \geq r_1$, se $||u||_{0,\Omega_j} = ||v||_{\lambda,\Omega'_j} = r_0$,

onde

$$||u||^2_{0,\Omega_j} = \int_{\Omega_j} |\nabla u|^2 + Z(x)u^2\,, \quad \forall\, u \in H^1_0(\Omega_j)\,,$$

é uma norma para $H^1_0(\Omega_j)$ equivalente à norma usual, por $(Z3)$;

(iii) Existe $\varphi \in C^\infty_c(\Omega_j)$ tal que

$$||\varphi||_{0,\Omega_j} = ||\varphi||_{\lambda,\Omega'_j} > r_0 \quad \text{e} \quad I_{\Omega_j}(\varphi) = \Phi_{\lambda,\Omega'_j}(\varphi) < 0\,.$$

Desse modo, os números positivos

$$c_j = \inf_{\gamma\in\Gamma_j} \max_{t\in[0,1]} I_{\Omega_j}(\gamma(t)) \quad \text{e} \quad c_{\lambda,j} = \inf_{\gamma\in\Gamma_{\lambda,j}} \max_{t\in[0,1]} \Phi_{\lambda,\Omega'_j}(\gamma(t))\,,$$

onde

$$\Gamma_j = \{\gamma \in C([0,1], H^1_0(\Omega_j))\,;\, \gamma(0) = 0\,, I_{\Omega_j}(\gamma(1)) \leq 0\,\}$$

e

$$\Gamma_{\lambda,j} = \{\gamma \in C([0,1], H^1(\Omega'_j))\,;\, \gamma(0) = 0\,, \Phi_{\lambda,\Omega'_j}(\gamma(1)) \leq 0\,\}\,,$$

para $j = 1, 2$, estão bem definidos. Além disso, é fácil verificar que os funcionais $\Phi_{\lambda,\Omega'_j} \in C^1(H^1(\Omega'_j), \mathbb{R})$ e $I_{\Omega_j} \in C^1(H^1_0(\Omega_j), \mathbb{R})$ satisfazem a condição de Palais-Smale, seguindo os mesmos argumentos do Lema 1.7 e da Proposição 1.8. Portanto, pelo Teorema do Passo da Montanha (Teorema A.6), os valores $c_{\lambda,j}$ e c_j definidos acima são valores críticos de Φ_{λ,Ω'_j} e I_{Ω_j}, respectivamente, isto é, existem $w_j \in H^1_0(\Omega_j)$ e $w_{\lambda,j} \in H^1(\Omega'_j)$, pontos críticos Φ_{λ,Ω'_j} e I_{Ω_j}, respectivamente, tais que

$$\Phi_{\lambda,\Omega'_j}(w_{\lambda,j}) = c_{\lambda,j} \quad \text{e} \quad I_{\Omega_j}(w_j) = c_j\,,$$

para $j = 1, 2$.

Vejamos algumas propriedades dos valores críticos $c_{\lambda,j}$ e c_j.

Lema 1.11 *Com as notações acima, temos, para $j = 1, 2$:*

(i) $0 < r_1 \leq c_{\lambda,j} \leq c_j$, *para todo* $\lambda \geq \lambda_1$*;*

(ii) Os valores críticos $c_{\lambda,j}$ e c_j são níveis de energia mínima para Φ_{λ,Ω'_j} e I_{Ω_j}, respectivamente, isto é,

$$c_j = \inf\{I_{\Omega_j}(v)\,;\, v \in H^1_0(\Omega_j)\backslash 0\,,\, I'_{\Omega_j}(v) = 0\},$$
$$c_{\lambda,j} = \inf\{\Phi_{\lambda,\Omega'_j}(v)\,;\, v \in H^1(\Omega'_j)\backslash 0\,,\, \Phi'_{\lambda,\Omega'_j}(v) = 0\}\,;$$

(iii) $c_j = \max_{t>0} I_{\Omega_j}(tw_j)$ *e* $c_{\lambda,j} = \max_{t>0} \Phi_{\lambda,\Omega'_j}(tw_{\lambda,j})$ *;*

(iv) $\lim_{\lambda\to\infty} c_{\lambda,j} = c_j$.

Demonstração:

Fixemos $j \in \{1, 2\}$ arbitrariamente.

Vejamos (i). A desigualdade $0 < r_1 \leq c_{\lambda,j}$ segue do fato de $\Phi_{\lambda,j}$ ter a geometria do Passo da Montanha (mais especificamente, de 2.ii). Para a desigualdade restante, $c_{\lambda,j} \leq c_j$, basta notar que, dada $u \in H^1_0(\Omega_j)$ qualquer, a função

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{em } \Omega_j, \\ 0, & \text{em } \Omega'_j\backslash\Omega_j. \end{cases}$$

está em $H^1(\Omega'_j)$. Portanto, podemos considerar a inclusão $H^1_0(\Omega_j) \subset H^1(\Omega'_j)$ e, por conseguinte, $\Gamma_j \subset \Gamma_{\lambda,j}$. Assim

$$\begin{aligned} c_{\lambda,j} &= \inf_{\gamma\in\Gamma_{\lambda,j}} \max_{t\in[0,1]} \Phi_{\lambda,\Omega'_j}(\gamma(t)) \\ &\leq \inf_{\gamma\in\Gamma_j} \max_{t\in[0,1]} \Phi_{\lambda,\Omega'_j}(\gamma(t)) \\ &\leq \inf_{\gamma\in\Gamma_j} \max_{t\in[0,1]} I_{\Omega_j}(\gamma(t)) \\ &= c_j \end{aligned}$$

e fica provado (i).

As propriedades (ii) e (iii) são consequências, respectivamente, do Teorema A.8 e do Lema A.7.

Por fim, vejamos o ítem (iv).

Fixemos arbitrariamente $j \in \{1, 2\}$.

Suponhamos por contradição que não ocorre

$$c_{\lambda,j} \to c_j \quad \text{quando} \quad \lambda \to \infty\,.$$

Então existe uma sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [\lambda_1, \infty)$ com $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ tal que $(c_{\lambda_n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ não admite c_j como um valor de aderência.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, seja $w_{\lambda_n,j} \in H^1(\Omega'_j)$ uma solução do problema (1.67), com $\lambda = \lambda_n$, tal que

$$\Phi_{\lambda_{n_k},\Omega'_j}(w_{\lambda_{n_k},j}) = c_{\lambda_{n_k},j}\,, \tag{1.68}$$

onde, vale ressaltar, pelo ítem (i), $c_{\lambda_{n_k}} \in (0, c_j]$.

Por um argumento análogo ao desenvolvido na Proposição 1.9, existe uma subsequência $(\lambda_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que,

$$w_{\lambda_{n_k},j} \to u_0 \quad \text{em} \;\; H^1(\Omega'_j) \;\; \text{quando} \; n \to \infty\,,$$

onde $u_0 \in H_0^1(\Omega_j)$ é solução do problema (1.66), e

$$\lim_{k\to\infty} \Phi_{\lambda_{n_k},\Omega'_j}(w_{\lambda_{n_k},j}) = \Phi_{\lambda_{n_k},\Omega'_j}(u_0) = I_{\Omega_j}(u_0)\,.$$

Usando o ítem (i), (1.68) e que c_j é um nível de energia mínima para I_{Ω_j}, devemos ter

$$\begin{aligned} c_j \geq \limsup_{k\to\infty} c_{\lambda_{n_k},j} &= \limsup_{k\to\infty} \Phi_{\lambda_{n_k},\Omega'_j}(w_{\lambda_{n_k},j}) \\ &= I_{\Omega_j}(u_0) \\ &\geq c_j\,, \end{aligned}$$

donde segue que $c_j = \limsup_{k\to\infty} c_{\lambda_{n_k},j}$ é um valor de aderência da sequência $(c_{\lambda_n,j})_{n\in\mathbb{N}}$, o que contradiz nossa suposição inicial. Logo vale o ítem (iv).

■

Para os próximos resultados, lembramos que as soluções de energia mínima dos problemas (1.66) e (1.67) também podem ser obtidas através dos problemas de minimização

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-\frac{p-1}{p+1}} c_j^{\frac{p-1}{p+1}} = \inf\left\{ ||v||^2_{0,\Omega_j}\,;\; v \in H_0^1(\Omega_j)\,,\; \int_{\Omega_j} v_+^{p+1} = 1 \right\}$$

e

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-\frac{p-1}{p+1}} c_{\lambda,j}^{\frac{p-1}{p+1}} = \inf\left\{ ||v||^2_{\lambda,\Omega'_j}\,;\; v \in H^1(\Omega'_j)\,,\; \int_{\Omega'_j} v_+^{p+1} = 1 \right\}\,,$$

respectivamente, os quais são equivalentes a

$$c_j = \inf\left\{ I_{\Omega_j}(v)\,;\; v \in H_0^1(\Omega_j)\,,\; \int_{\Omega_j} v_+^{p+1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_j \right\}$$

e

$$c_{\lambda,j} = \inf\left\{\Phi_{\lambda,\Omega'_j}(v)\,;\, v \in H^1(\Omega'_j)\,,\, \int_{\Omega'_j} v_+^{p+1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_{\lambda,j}\right\}. \tag{1.69}$$

A seguir, elaboraremos um argumento do tipo Minimax para o funcional Φ_λ.

Para começar, fixemos $R > 2$ tal que

$$I_{\Omega_j}(Rw_j) < 0 \quad \text{e} \quad R^{p+1}|w_j|_{p+1,\Omega_j}^{p+1} \geq 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_j\,,$$

para todo $j = 1, 2$. Assim, para $j = 1, 2$, o caminho $\overline{\gamma}_j : [0,1] \to H_0^1(\Omega_j)$ dado por $\overline{\gamma}_j(s) = sRw_j$ pertence a Γ_j e

$$\max_{s\in[0,1]} I_{\Omega_j}(sRw_j) = c_j,$$

pelo Lema 1.11 (iii).

Seja $\gamma_0 : [0,1]^2 \equiv [0,1] \times [0,1] \to \mathcal{H}$ dada por

$$\gamma_0(s_1, s_2)(x) = s_1 Rw_1(x) + s_2 Rw_2(x)\,, \forall\,(s_1, s_2) \in [0,1]^2\,. \tag{1.70}$$

Definamos então o conjunto

$$\Gamma_J = \{\gamma \in C([0,1]^2, \mathcal{H})\,;\, \gamma(s) = \gamma_0(s)\,, \forall\, s = (s_1, s_2) \in \partial([0,1]^2)\}$$

e

$$b_{\lambda,J} = \inf_{\gamma\in\Gamma_J} \max_{s\in[0,1]^2} \Phi_\lambda(\gamma(s))\,.$$

Note que $\Gamma \neq \emptyset$, pois $\gamma_0 \in \Gamma_J$, e que $b_{\lambda,J}$ está bem definido.

No que segue, poremos $c_J := c_1 + c_2$.

A próxima proposição nos traz algumas relações entre os valores $c_j, c_{\lambda,j}$ e $b_{\lambda,J}$. Para a sua demonstração, precisaremos do seguinte lema.

Lema 1.12 *Para qualquer $\gamma \in \Gamma_J$ e para cada*

$$\xi = (\xi_1, \xi_2) \;\in\; K_R := [0, R^{p+1}|w_1|_{p+1,\Omega_1}^{p+1}] \times [0, R^{p+1}|w_2|_{p+1,\Omega_2}^{p+1}]\,,$$

existe $s_\gamma = (s_1, s_2) \in [0,1]^2$ tal que

$$\int_{\Omega'_j} \gamma(s_\gamma)(x)_+^{p+1} \mathrm{d}x = \xi_j\,,\ \forall\, j \in 1, 2\,.$$

Demonstração:

Seja $\gamma \in \Gamma_J$ qualquer. Definamos a aplicação $\tilde{\gamma} : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ por

$$\tilde{\gamma}(s) = \left(\int_{\Omega_1'} \gamma(s)(x)_+^{p+1} \mathrm{d}x, \int_{\Omega_2'} \gamma(s)(x)_+^{p+1} \mathrm{d}x \right).$$

Se mostrarmos que existe $s_\gamma \in [0,1]^2$ tal que

$$\tilde{\gamma}(s_\gamma) = \xi = (\xi_1, \xi_2)$$

terminamos.

Observemos inicialmente que se $s = (s_1, s_2) \in \partial([0,1]^2)$, então, necessariamente, s_1 ou s_2 pertence ao conjunto $\{0,1\}$ e

$$\tilde{\gamma}(s) = (s_1^{p+1} R^{p+1} |w_1|_{p+1,\Omega_1}^{p+1}, s_2^{p+1} R^{p+1} |w_2|_{p+1,\Omega_2}^{p+1}).$$

Escolhamos $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in K_R$ arbitrariamente.

Caso $\xi \in \partial(K_R)$, então ξ é da forma

$$\xi = (t_1 R^{p+1} |w_1|_{p+1,\Omega_1}^{p+1}, t_2 R^{p+1} |w_2|_{p+1,\Omega_2}^{p+1})$$

onde $t_1, t_2 \in [0,1]$, com t_1 ou t_2 em $\{0,1\}$. Portanto, tomando $s_\gamma = (s_1, s_2)$ com $s_1 = t_1{}^{\frac{1}{p+1}}$ e $s_2 = t_2{}^{\frac{1}{p+1}}$ e pela observação feita acima, segue o resultado para este caso.

Suponhamos agora que $\xi \in (0,1)^2$.

Para concluirmos a existência de s_γ nesse caso, usaremos os resultados da Teoria do Grau Topológico presentes no apêndice.

Consideremos a função $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(s_1, s_2) \;\;=\;\; (s_1^{p+1} R^{p+1} |w_1|_{p+1,\Omega_1}^{p+1}, s_2^{p+1} R^{p+1} |w_2|_{p+1,\Omega_2}^{p+1}).$$

Claramente $f \equiv \tilde{\gamma}$ em $\partial((0,1)^2)$. Então, pelo Teorema A.21,

$$d(\tilde{\gamma}, (0,1)^2, (\xi_1, \xi_2)) = d(f, (0,1)^2, (\xi_1, \xi_2)). \tag{1.71}$$

Mais ainda, é fácil ver que f é injetora, com

$$f\left(\frac{\xi_1^{\frac{1}{p+1}}}{R|w_1|_{p+1,\Omega_1}}, \frac{\xi_2^{\frac{1}{p+1}}}{R|w_2|_{p+1,\Omega_2}} \right) = (\xi_1, \xi_2),$$

e f é diferenciável, com

$$A := f'\left(\frac{\xi_1^{\frac{1}{p+1}}}{R|w_1|_{p+1,\Omega_1}}, \frac{\xi_2^{\frac{1}{p+1}}}{R|w_2|_{p+1,\Omega_2}}\right) = (a_{ij})_{i,j=1,2}$$

onde

$$a_{ij} = \begin{cases} \xi_i^{\frac{p}{p+1}}\,(p+1)\,R\,|w_i|_{p+1,\Omega_i}\,, & i = j, \\ 0\,, & i \neq j. \end{cases}$$

Assim, como

$$a_{ii} > 0\,,$$

para $i = 1, 2$, A é uma transformação linear inversível com

$$\text{sinal}(\det A) = 1\,,$$

donde, pelos Teoremas A.22 e A.23,

$$d(f, (0,1)^2, (\xi_1, \xi_2)) = d(A, B_1(0), (0,0)) = 1\,.$$

Portanto, tendo em vista a igualdade acima e (1.71),

$$d(\tilde{\gamma}, (0,1)^2, (0,0)) = 1\,,$$

e, consequentemente, existe $s_\gamma \in (0,1)^2$ satisfazendo a conclusão do lema.

■

Proposição 1.13 *Com as notações acima, temos:*

(i) $c_{\lambda,1} + c_{\lambda,2} \leq b_{\lambda,J} \leq c_J$, *para todo* $\lambda \geq \lambda_1$*;*

(ii) Sendo $r_1 > 0$ *a constante do Lema 1.11* (i)*,*

$$\Phi_\lambda(\gamma(s)) \leq c_J - r_1\,,$$

para todo $\lambda \geq \lambda_1$*,* $\gamma \in \Gamma_J$ *e* $s \in \partial([0,1]^2)$*.*

Demonstração:

Vejamos (i).

Para a desigualdade $c_{\lambda,1} + c_{\lambda,2} \leq b_{\lambda,J}$, fixe $\gamma \in \Gamma_J$ qualquer. Pela forma como R foi escolhido e lembrando o Lema 1.11 (i), podemos tomar o par

$$(\xi_1, \xi_2) = \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_{\lambda,1}, \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_{\lambda,2} \right)$$

no Lema 1.12, donde existe $s_\gamma \in [0,1]^2$ tal que

$$\int_{\Omega'_j} \gamma(s_\gamma)(x)_+^{p+1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_{\lambda,j}\,,$$

para $j = 1, 2$.

Afirmamos que

$$\Phi_{\lambda,\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J}(\gamma(s_\gamma)) \geq 0\,,$$

onde

$$\Phi_{\lambda,\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} |\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} F(u)\,, \quad \forall\, u \in \mathcal{H}\,.$$

De fato, notemos que, pela definição,

$$F(\xi) \leq \frac{1}{2}\nu_0\xi^2\,, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}\,.$$

Assim, pelo Corolário 1.6,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\lambda,\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J}(\gamma(s_\gamma)) &= \frac{1}{2}||\gamma(s_\gamma)||^2_{\lambda,\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} F(\gamma(s_\gamma)) \\
&\geq \frac{1}{2}||\gamma(s_\gamma)||^2_{\lambda,\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} - \frac{1}{2}\nu_0|\gamma(s_\gamma)|^2_{2,\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} \\
&\geq \frac{1}{2}||\gamma(s_\gamma)||^2_{\lambda,\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} - \frac{1}{2}p\nu_0|\gamma(s_\gamma)|^2_{2,\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} \\
&\geq \frac{\delta_0}{2}||\gamma(s_\gamma)||^2_{\lambda,\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Portanto, por (1.69) e pela afirmação acima,

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(\gamma(s_\gamma)) &= \Phi_{\lambda,\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J}(\gamma(s_\gamma)) + \sum_{j=1,2} \Phi_{\lambda,\Omega'_j}(\gamma(s_\gamma)) \\
&\geq \sum_{j=1,2} \inf\left\{\Phi_{\lambda,\Omega'_j}(v)\,;\, v \in H^1(\Omega'_j)\,,\, \int_{\Omega'_j} v_+^{p+1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_{\lambda,j}\right\} \\
&= \sum_{j=1,2} c_{\lambda,j}\,.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\max_{s\in[0,1]^2} \Phi_\lambda(\gamma(s)) \geq \Phi_\lambda(\gamma(s_\gamma)) \geq c_{\lambda,1} + c_{\lambda,2}$$

e como $\gamma \in \Gamma_J$ é arbitrária, temos $b_{\lambda,J} \geq c_{\lambda,1} + c_{\lambda,2}$.

Para a desigualdade $b_{\lambda,J} \leq c_J$, basta observar que, como γ_0 pertence ao conjunto Γ_J, então

$$\begin{aligned} b_{\lambda,J} &\leq \max_{s\in[0,1]^2} \Phi_\lambda(\gamma_0(s)) \\ &= \max_{s\in[0,1]^2} I_{\Omega_1}(s_1 R w_1) + I_{\Omega_2}(s_2 R w_2) \\ &= c_1 + c_2 = c_J\,. \end{aligned}$$

Para o ítem (ii), tomemos $\gamma \in \Gamma_J$ e $s = (s_1, s_2) \in \partial([0,1]^2)$ arbitrariamente. Então temos, pela definição de Γ_J,

$$\gamma(s) = \gamma_0(s) = \sum_{j=1,2} s_j R w_j\,,$$

donde

$$\Phi_\lambda(\gamma(s)) = \Phi_\lambda \gamma_0(s) = \sum_{j=1,2} I_{\Omega_j}(s_j R w_j)\,.$$

Além disso, $I_{\Omega_j}(s_j R w_j) \leq c_j$, para todo $j = 1,2$. Mais ainda, como $s \in \partial([0,1]^2)$, devemos ter s_1 ou s_2 em $\{0,1\}$, digamos s_1, e, consequentemente, $I_{\Omega_1}(s_1 R w_1) \leq 0$. Logo, pelo Lema 1.12,

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(\gamma(s)) &= I_{\Omega_1}(s_1 R w_1) + I_{\Omega_2}(s_2 R w_2) \\ &\leq 0 + c_2 \leq (c_1 - r_1) + c_2 \\ &= c_J - r_1\,. \end{aligned}$$

■

Como consequência do resultado acima, temos o

Corolário 1.14 *(i)* $\lim_{\lambda\to\infty} b_{\lambda,J} = c_J$ *;*

(ii) $b_{\lambda,J}$ *é um valor crítico de* Φ_λ*, para* λ *suficientemente grande.*

Demonstração:

O limite em (i) é verificado a partir do Lema 1.11 (iv) e da Proposição 1.13 (i).

Com relação a (ii), usando a parte (i),

$$b_{\lambda,J} > c_J - \frac{m}{2}\,, \tag{1.72}$$

para λ suficientemente grande, onde $m := \dfrac{1}{2} \min_{j=1,2} c_j$. Além disso, pela Proposição 1.8, o funcional Φ_λ satisfaz $(PS)_{b_{\lambda,J}}$.

Agora vejamos que $b_{\lambda,J}$ é um valor crítico. Para isso, usaremos o Lema da Deformação (Lema A.5).

Suponhamos por contradição que $b_{\lambda,J}$ não é um valor crítico para Φ_λ. Então, para $\overline{\varepsilon} = m/2$, o Lema da Deformação nos fornece $\varepsilon \in (0, m/2)$ e $\eta \in C([0,1] \times \mathcal{H}, \mathcal{H})$ tais que

$$\eta(1,u) = u\,, \quad \forall\, u \in \mathcal{H} \ \text{ tal que } \ \Phi_\lambda(u) \notin \left[b_{\lambda,J} - \frac{m}{2}\,,\, b_{\lambda,J} + \frac{m}{2} \right] \tag{1.73}$$

e

$$\eta(1, \Phi_\lambda^{b_{\lambda,J}+\varepsilon}) \subset \Phi_\lambda^{b_{\lambda,J}-\varepsilon}\,, \tag{1.74}$$

onde, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, Φ_λ^α denota o conjunto $\{u \in \mathcal{H}\,;\, \Phi_\lambda(u) \leq \alpha\}$.

Pela definição de $b_{\lambda,J}$, existe $g \in \Gamma$ satisfazendo

$$\max_{s \in [0,1]^2} \Phi_\lambda(g(s)) \leq b_{\lambda,J} + \varepsilon\,. \tag{1.75}$$

Definamos então a aplicação $h : [0,1]^2 \to \mathcal{H}$ por

$$h(s) = \eta(1, g(s))\,, \quad \forall\, s \in [0,1]^2\,.$$

Afirmamos que $h \in \Gamma$. De fato, h é contínua por construção. Agora tomemos $s \in \partial([0,1]^2)$, digamos $s = (s_1, s_2)$, onde, sem perder a generalidade, $s_1 \in \{0,1\}$. Então, pelo Lema 1.11 *(iii)* e (1.72), temos, caso $s_1 = 0$,

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(g(s)) &= \Phi_\lambda\left(0Rw_1 + s_2 Rw_2\right) \\
&= I_{\Omega_1}(0) + I_{\Omega_2}(s_2 Rw_2) \\
&\leq 0 + c_2 \leq c_J - \frac{c_1}{2} \leq c_J - m \\
&< b_{\lambda,J} - \frac{m}{2}\,.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $s_1 = 1$, então, pela forma como R foi fixado,

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(g(s)) &= \Phi_\lambda\left(Rw_1 + s_2 Rw_2\right) \\
&= I_{\Omega_1}(Rw_1) + I_{\Omega_2}(s_2 Rw_2) \\
&< 0 + c_2 < c_J - m \\
&< b_{\lambda,J} - \frac{m}{2}\,.
\end{aligned}$$

Assim sendo,

$$\Phi_\lambda(g(s)) \notin \left[b_{\lambda,J} - \frac{m}{2} \, , \, b_{\lambda,J} + \frac{m}{2} \right] ,$$

para todo $s \in \partial([0,1]^2)$, e daí, por (1.73),

$$h(s) = \eta(1, g(s)) = g(s) = \gamma_0(s) \, , \quad \forall \, s \in \partial([0,1]^2) \, ,$$

donde $h \in \Gamma$. Portanto

$$b_{\lambda,J} \leq \max_{s \in [0,1]^2} \Phi_\lambda(h(s)) \, .$$

Porém, por (1.74) e (1.75), devemos ter também

$$\max_{s \in [0,1]^2} \Phi_\lambda(h(s)) \leq b_{\lambda,J} - \varepsilon \, ,$$

o que é uma contradição. Logo $b_{\lambda,J}$ é um valor crítico de Φ_λ, para λ suficientemente grande.

■

Na próxima e última seção deste capítulo, provaremos a existência de um ponto crítico $u_\lambda \in \mathcal{H}$ tal que

(i) $\lim_{\lambda \to \infty} \Phi_\lambda(u_\lambda) = c_J$;

(ii) $u_\lambda\big|_{\Omega_j}$ converge para uma solução de energia mínima do problema (1.5), para $j = 1, 2$;

(iii) $u_\lambda\big|_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_J} \to 0$ fortemente em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

1.4 Demonstração do Teorema 1.1

Nosso objetivo nesta seção é encontrar uma solução não-negativa u_λ, para λ suficientemente grande, que se aproxima de uma solução de energia mínima de (1.66) em cada Ω_j, $j \in J$, e de zero em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_J$.

Dado $\mu > 0$, seja o conjunto

$$D_\mu^\lambda = \{ u \in \mathcal{H} \, ; \, ||u||_{\lambda, \mathbb{R}^N \setminus \Omega'_J} \leq \mu \, , \, \left| ||u||_{\lambda, \Omega'_j} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right)^{-1} c_j} \right| \leq \mu \, , \, j = 1, 2 \} \, .$$

Seja também o conjunto $\Phi_\lambda^{c_J}$ dado por

$$\Phi_\lambda^{c_J} = \{u \in \mathcal{H}\,;\, \Phi_\lambda(u) \leq c_J\}\,.$$

Em geral, soluções de energia mínima de (1.66) não são únicas. Porém, observe que, dado $j \in \{1,2\}$, uma solução de energia mínima w_j de (1.66) deve satisfazer $I_{\Omega_j}(w_j) = c_j$ e $I'_{\Omega_j}(w_j)w_j = 0$, donde

$$I_{\Omega_j}(w_j) + \frac{1}{p+1} I'_{\Omega_j}(w_j)w_j = c_j$$

e, consequentemente,

$$\int_{\Omega_j} |\nabla w_j|^2 + Z(x)w_j^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_j\,.$$

Segue daí que o conjunto $D_\mu^\lambda \cap \Phi_\lambda^{c_J}$, para $\mu > 0$ qualquer, contém todas as funções da forma

$$\omega(x) = \begin{cases} w_j(x)\,, & x \in \Omega_j, \\ 0\,, & x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega_J. \end{cases}$$

A partir de agora, fixemos $\mu > 0$ tal que

$$\mu < \frac{1}{3} \min_{j=1,2} \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_j}\,.$$

A seguir, apresentamos uma estimativa uniforme para $||\Phi'_\lambda(u)||_\lambda^*$ sobre o conjunto $(D_{2\mu}^\lambda \backslash D_\mu^\lambda) \cap \Phi_\lambda^{c_J}$.

Proposição 1.15 *Com μ fixado acima, existem $\sigma_0 > 0$ e $\Lambda_* \geq \lambda_1$ tais que*

$$||\Phi'_\lambda(u)||_\lambda^* \geq \sigma_0$$

para todo $u \in (D_{2\mu}^\lambda \backslash D_\mu^\lambda) \cap \Phi_\lambda^{c_J}$ e todo $\lambda \geq \Lambda_*$.

Demonstração:

A demonstração será feita por contradição e com o auxílio da Proposição 1.9.

Suponhamos então que existam sequências $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [\lambda_1, \infty)$ e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ tais que $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ e $u_n \in (D_{2\mu}^{\lambda_n} \backslash D_\mu^{\lambda_n}) \cap \Phi_{\lambda_n}^{c_J}$ satisfaça $||\Phi'_\lambda(u_n)||_{\lambda_n}^* \to 0$ quando $n \to \infty$.

Como $u_n \in D_{2\mu}^{\lambda_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $(||u_n||_{\lambda_n,\mathbb{R}^N})$ é uma sequência limitada. Daí $(\Phi_{\lambda_n}(u_n))$ também o é e podemos assumir, sem perda de generalidade, que

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{\lambda_n}(u_n) = c \leq c_J\,,$$

onde a desigualdade segue de $u_n \in \Phi_{\lambda_n}^{c_J}$.

Portanto estamos nas hipóteses da Proposição 1.9 e a partir dela podemos extrair uma subsequência, que ainda denotaremos por $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $u_n \to u \in H_0^1(\Omega_J)$ fortemente em $H^1(\mathbb{R}^N)$, onde o limite u é uma solução não-negativa de (1.66) e

$$I_{\Omega_J}(u) = \lim_{n\to\infty} \Phi_{\lambda_n}(u_n) \leq c_J \tag{1.76}$$

$$||u_n||^2_{\lambda_n,\Omega'_j} \to \textstyle\int_{\Omega_j} |\nabla u|^2 + Z(x)u^2 \quad \text{para } j = 1,2\,, \tag{1.77}$$

$$||u_n||^2_{\lambda_n,\mathbb{R}^N\backslash\Omega'_J} \to 0\,. \tag{1.78}$$

Como $c_J = c_1 + c_2$ e $c_1, c_2 > 0$ são níveis de energia mínima, (1.76) nos dá duas possibilidades:

1 - $I_{\Omega_j}\left(u\big|_{\Omega_j}\right) = c_j$, para $j = 1, 2$, ou seja, $u\big|_{\Omega_j}$ é solução de energia mínima de (1.66), para $j = 1, 2$;

2 - existe $j_0 \in \{1, 2\}$, tal que $I_{\Omega_{j_0}}\left(u\big|_{\Omega_{j_0}}\right) = 0$, isto é, $u\big|_{\Omega_{j_0}} \equiv 0$.

Se ocorre a primeira, então, pelo comentário feito no início desta seção, u deve satisfazer

$$\int_{\Omega_j} |\nabla u|^2 + Z(x)u^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_j\,, \quad \text{para } j = 1,2\,,$$

e por (1.77) e (1.78) u_n deve pertencer ao conjunto $D_\mu^{\lambda_n}$, para n suficientemente grande, contradizendo a nossa suposição inicial de que $u_n \in (D_{2\mu}^{\lambda_n} \backslash D_\mu^{\lambda_n})$.

Se ocorre a segunda possibilidade, então, por (1.77),

$$\lim_{n\to\infty} \left| ||u_n||_{\lambda_n,\Omega'_{jo}} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_{j_0}} \right| =$$

$$= \left| \lim_{n\to\infty} ||u_n||_{\lambda_n,\Omega'_{jo}} - \lim_{n\to\infty} \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_{j_0}} \right| =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_{j_0}} \geq 3\mu\,,$$

o que também contradiz $u_n \in (D_{2\mu}^{\lambda_n} \backslash D_\mu^{\lambda_n})$.

Portanto, nenhuma das possibilidades pode ocorrer e então devem existir constantes $\sigma_0 > 0$ e $\Lambda_* \geq \lambda_1$ satisfazendo a conclusão do teorema.

∎

A próxima proposição nos dará as últimas ferramentas para demonstrar o Teorema 1.1.

Proposição 1.16 *Sejam μ fixado anteriormente e $\Lambda_* \geq \lambda_1$ a constante dada pela Proposição 1.15. Então, para $\lambda \geq \Lambda_*$ existe uma solução u_λ do problema (P_λ) com $u_\lambda \in D_\mu^\lambda \cap \Phi_\lambda^{c_J}$.*

Demonstração:

Faremos a demonstração por contradição.

Suponhamos então que exista $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [\Lambda_*, \infty)$ tal que $\lambda_n \to \infty$ e que, para cada $n \in \mathbb{N}$, não existam pontos críticos no conjunto $D_\mu^{\lambda_n} \cap \Phi_{\lambda_n}^{c_J}$. Mais ainda, como a Proposição 1.8 assegura que, para todo n, o funcional Φ_{λ_n} satisfaz (PS), então deve existir uma constante $d_{\lambda_n} = d(\lambda_n) > 0$ com

$$||\Phi'_{\lambda_n}(u)||^*_{\lambda_n} \geq d_{\lambda_n}, \quad \forall\, u \in D_\mu^{\lambda_n} \cap \Phi_{\lambda_n}^{c_J}.$$

Além disso, pela Proposição 1.15 temos

$$||\Phi'_{\lambda_n}(u)||^*_{\lambda_n} \geq \sigma_0, \quad \forall\, u \in (D_{2\mu}^{\lambda_n} \backslash D_\mu^{\lambda_n}) \cap \Phi_{\lambda_n}^{c_J}, \tag{1.79}$$

onde $\sigma_0 > 0$ não depende de λ_n.

Nosso objetivo é mostrar que, sob as condições acima, não ocorre

$$b_{\lambda_n} \to c_J, \quad \text{quando} \ \ n \to \infty.$$

Para isso, estudaremos, para cada n, a relação entre o funcional Φ_{λ_n} e o conjunto $D_\mu^{\lambda_n}$. Fixemos então $\lambda_n \in \{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Para simplificar a notação, faremos $\lambda_n = \lambda$.

Pelo fato de a demonstração ser um tanto longa, a dividiremos em passo de modo a facilitar o entendimento.

1^o *Passo: Construção de uma deformação η.*

Escolhamos um funcional Lipschitz $\Psi : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\Psi \equiv 1 \ \text{ em } \ D_{\frac{3\mu}{2}}^\lambda, \quad \Psi \equiv 0 \ \text{ em } \ \mathcal{H}\backslash D_{2\mu}^\lambda \ \text{ e } \ 0 \leq \Psi \leq 1 \ \text{ em } \ \mathcal{H}.$$

e definamos, para $u \in \Phi_\lambda^{c_J}$,

$$V(u) = -\Psi(u)\frac{\Phi'_\lambda(u)}{||\Phi'_\lambda(u)||^*_\lambda} : \Phi_\lambda^{c_J} \to \mathcal{H}' \equiv \mathcal{H}$$

onde identificamos os espaços $\mathcal{H}$ e o seu dual $\mathcal{H}'$ pelo Teorema de Representação de Riesz. Agora, seja a deformação $\eta : [0,\infty) \times \Phi_\lambda^{c_J} \to \Phi_\lambda^{c_J}$ definida pela equação

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = V(\eta), \\ \eta(0,u) = u \in \Phi_\lambda^{c_J}. \end{cases}$$

Note que esta aplicação está bem definida pelo Teorema de Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias, já que V é uma função lipschitziana. A deformação η tem as seguintes propriedades:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(\eta(t,u))}{\mathrm{d}t} = -\Psi(\eta(t,u))||\Phi_\lambda'(\eta(t,u))||_\lambda^* \leq 0\,, \quad \forall\, t \geq 0\,, \forall\, u \in \Phi_\lambda^{c_J}\,, \tag{1.80}$$

$$\eta(t,u) = u\,, \quad \forall\, t \geq 0\,, \forall\, u \in \Phi_\lambda^{c_J} \backslash D_{2\mu}^\lambda\,, \tag{1.81}$$

e

$$\left|\left|\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}\right|\right|_\lambda = ||V(\eta)||_\lambda \leq 1\,, \quad \forall\, t \geq 0\,, \forall\, u \in \Phi_\lambda^{c_J}\,. \tag{1.82}$$

2^o *Passo: A aplicação* $\eta(t,\gamma_0)$.

Seja $\gamma_0 \in \Gamma_J$ a aplicação definida em (1.70).

Primeiramente, observe que

$$\gamma_0(s) \notin D_{2\mu}^\lambda\,, \quad \forall\, s \in \partial([0,1]^2).$$

De fato, tome $s = (s_1, s_2) \in \partial([0,1]^2)$ qualquer. Suponhamos então, sem perda de generalidade, que s_1 pertença a $\{0,1\}$. Temos dois casos a considerar. Se $s_1 = 0$, então $||\gamma_0(0,s_2)||_{\lambda,\Omega_1'} = 0$ e daí segue imediatamente a não inclusão. Caso $s_1 = 1$, então, pela definição, $\gamma_0(1,s_2)\big|_{\Omega_1'} = Rw_1$, com $R > 2$, e daí

$$||\gamma_0(1,s_2)||_{\lambda,\Omega_1'} = R||w_1||_{0,\Omega_1} = R\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_1}\,,$$

donde segue que

$$\left| ||\gamma_0(1,s_2)||_{\lambda,\Omega_1'} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_1} \right| > 2\mu$$

e, consequentemente, $\gamma_0(1,s_2) \notin D_{2\mu}^\lambda$.

Mais ainda, por (1.81),

$$\eta(t,\gamma_0(s)) = \gamma_0(s)\,, \quad \forall\, s \in \partial([0,1]^2)$$

e por conseguinte $\eta(t,\gamma_0(s)) \in \Gamma_J$, para todo $t \geq 0$.

Agora, note que:

$a)$ $\operatorname{supp}\gamma_0(s) \subset \overline{\Omega_J}$, para todo $s \in [0,1]^2$, e, consequentemente, as propriedades de γ_0 independem de $\lambda \geq \lambda_1$;

$b)$ $\Phi(\gamma_0(s)) \leq c_J$, para todo $s \in [0,1]^2$ e vale a igualdade se, e somente se, $s_1 = s_2 = R^{-1}$, isto é, se, e somente se, $\gamma_0(s_1,s_2) = w_1 + w_2$.

Assim, como $w_1 + w_2 \in D^\lambda_\mu$, o número

$$m_0 = \max\{\Phi_\lambda(u)\,;\, u \in \gamma_0([0,1]^2)\backslash D^\lambda_\mu\} \tag{1.83}$$

não depende de λ, pela observação (a), e é estritamente menor que c_J.

3^o Passo: Afirmação:

$$\max_{s\in[0,1]^2} \Phi_\lambda(\eta(T,\gamma_0(s))) \leq \max\{m_0, c_J - \frac{1}{2}\sigma_0\mu\}\,,$$

para T suficientemente grande, onde $m_0 < c_J$ é dado em (1.83) e σ_0 é dado pela Proposição 1.15.

Fixemos $s \in [0,1]^2$ qualquer e vejamos o que acontece com $\Phi_\lambda(\eta(t,\gamma_0(s)))$ caso $\gamma_0(s)$ pertença ou não a D^λ_μ.

Se $\gamma_0(s) \notin D^\lambda_\mu$, então, por (1.80),

$$\Phi_\lambda(\eta(t,\gamma_0(s))) \leq \Phi_\lambda(\gamma_0(s)) \leq m_0\,,$$

para todo $t \geq 0$, donde segue que

$$\max_{s\in[0,1]^2} \Phi_\lambda(\eta(T,\gamma_0(s))) \leq \max\{m_0, c_J - \frac{1}{2}\sigma_0\mu\}\,.$$

Suponhamos agora que $\gamma_0(s) \in D^\lambda_\mu$ e analisemos o comportamento da aplicação $\eta_0(t) = \eta(t,\gamma_0(s))$.

Sejam $\tilde{d}_\lambda = \min\{d_\lambda, \sigma_0\}$ e $T = \dfrac{\sigma_0\mu}{2\tilde{d}_\lambda}$.

Temos dois casos a considerar:

1. $\eta_0(t) \in \operatorname{int}(D^\lambda_{3\mu/2})$, para todo $t \in [0,T]$;

2. $\eta_0(t_0) \in \partial(D^{\lambda}_{3\mu/2})$, para algum $t_0 \in (0, T]$.

Se ocorre a primeira possibilidade, então, pela natureza de Ψ, temos $\Psi(\eta_0(t)) = 1$ e $||\Phi'_\lambda(\eta_0(t))||^*_\lambda \geq \tilde{d}_\lambda$, para todo $t \in [0, T]$. Assim, por (1.80),

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(\eta_0(T)) &= \Phi_\lambda(\gamma_0(s)) + \int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Phi_\lambda(\eta_0(r))\mathrm{d}r \\
&= \Phi_\lambda(\gamma_0(s)) - \int_0^T \Psi(\eta_0(r))||\Phi'_\lambda(\eta_0(r))||^*_\lambda \mathrm{d}r \\
&\leq c_J - \int_0^T \tilde{d}_\lambda \mathrm{d}r \\
&= c_J - \tilde{d}_\lambda T = c_J - \frac{1}{2}\sigma_0\mu\,.
\end{aligned}$$

Se ocorre a segunda possibilidade, então, pela continuidade de η_0, existe $0 \leq t_1 < t_0 \leq T$ tal que

$$\eta_0(t_1) \in \partial D^\lambda_\mu, \tag{1.84}$$

$$\eta_0(t) \in D^\lambda_{\frac{3\mu}{2}} \backslash D^\lambda_\mu\,, \quad \forall\, t \in [t_1, t_0]\,. \tag{1.85}$$

Afirmamos que

$$||\eta_0(t_0) - \eta_0(t_1)||_\lambda \geq \frac{\mu}{2}\,. \tag{1.86}$$

De fato, a forma como t_0 foi tomado implica em

$$||\eta_0(t_0)||_{\lambda, \mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J} = \frac{3\mu}{2} \quad \text{ou} \quad \left| ||\eta_0(t_0)||_{\lambda, \Omega'_{j_0}} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_{j_0}} \right| = \frac{3\mu}{2}\,,$$

para algum $j_0 \in \{1, 2\}$. Suponhamos que

$$||\eta_0(t_0)||_{\lambda, \mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J} = \frac{3\mu}{2}\,.$$

De (1.84), temos

$$||\eta_0(t_1)||_{\lambda, \mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J} \leq \mu\,.$$

Então, pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}
||\eta_0(t_0) - \eta_0(t_1)||_{\lambda, \mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J} &\geq ||\eta_0(t_0)||_{\lambda, \mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J} - ||\eta_0(t_1)||_{\lambda, \mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J} \\
&\geq \frac{\mu}{2}\,.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se

$$\left| ||\eta_0(t_0)||_{\lambda, \Omega'_{j_0}} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_{j_0}} \right| = \frac{3\mu}{2}\,,$$

então mais uma vez de (1.84) obtemos

$$\left| ||\eta_0(t_1)||_{\lambda,\Omega'_{j_0}} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_{j_0}} \right| \leq \mu$$

e novamente pela desigualdade triangular chegamos a

$$||\eta_0(t_0) - \eta_0(t_1)||_{\lambda,\Omega'_{j_0}} \geq \frac{1}{2}\mu\,.$$

Portanto

$$\begin{aligned} ||\eta_0(t_0) - \eta_0(t_1)||_\lambda &\geq ||\eta_0(t_0) - \eta_0(t_1)||_{\lambda,\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} + ||\eta_0(t_0) - \eta_0(t_1)||_{\lambda,\Omega'_{j_0}} \\ &\geq \frac{1}{2}\mu \end{aligned}$$

e temos a conclusão da afirmação.

Para finalizar a demonstração do terceiro passo, note que a partir de (1.86), pelo Teorema do Valor Médio e por (1.82), concluímos que

$$t_0 - t_1 \geq \frac{1}{2}\mu\,.$$

Além disso, tendo em vista (1.80) e as características de Ψ, temos $\Psi(\eta_0) \equiv 1$ em $[t_1, t_0]$. Assim, usando (1.85) e (1.79),

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(\eta_0(T)) &= \Phi_\lambda(\gamma_0(s)) + \int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Phi_\lambda(\eta_0(r))\mathrm{d}r \\ &= \Phi_\lambda(\gamma_0(s)) - \int_0^T \Psi(\eta_0(r))||\Phi'_\lambda(\eta_0(r))||_\lambda^*\mathrm{d}r \\ &\leq c_J - \int_{t_1}^{t_0} \Psi(\eta_0(r))||\Phi'_\lambda(\eta_0(r))||_\lambda^*\mathrm{d}r \\ &\leq c_J - \int_{t_1}^{t_0} \sigma_0\mathrm{d}r = c_J - (t_0 - t_1)\sigma_0 \\ &= c_J - \frac{1}{2}\sigma_0\mu \end{aligned}$$

e, portanto, segue a conclusão da afirmação.

4^o Passo: Conclusão da Proposição.

Como $\eta_0(s) = \eta(T, \gamma_0(s)) \in \Gamma_J$, então, lembrando que fizemos $\lambda = \lambda_n$,

$$b_{\lambda_n,J} \leq \max_{s\in[0,1]^2} \Phi_{\lambda_n}(\eta_0(s)) \leq \max\{m_0, c_J - \frac{1}{2}\sigma_0\mu\} < c_J\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Logo, passando ao limite $n \to \infty$ e tendo em vista o Corolário 1.14 e o fato de que m_0 e σ_0 não dependem de λ_n,

$$c_J = \lim_{n\to\infty} b_{\lambda_n,J} \leq \max\{m_0, c_J - \frac{1}{2}\sigma_0\mu\} < c_J$$

o que é um absurdo. Dessa forma, Φ_λ tem ponto crítico $u_\lambda \in D_\mu^\lambda$, para λ suficientemente grande, e, pela Proposição 1.10, fazendo $M = c_J$, u_λ é solução do problema (P_λ).

■

Agora demonstraremos o resultado principal deste capítulo, o Teorema 1.1

Demonstração do Teorema 1.1:

Seja $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência arbitrária tal que $\lambda_n \geq \Lambda_*$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. Usando a Proposição 1.16, obtemos uma sequência $(u_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_{\lambda_n} \in D_\mu^{\lambda_n} \cap \Phi_{\lambda_n}^{c_J}$ é uma solução não-negativa do problema (P_λ), com $\lambda = \lambda_n$.

Pela Proposição 1.9, podemos extrair uma subsequência, que também denotaremos por $(u_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $u_{\lambda_n} \to u \in H_0^1(\Omega_J)$ fortemente em $H^1(\mathbb{R}^N)$, onde o limite u é uma solução não-negativa de (1.66),

$$||u_{\lambda_n}||^2_{\lambda_n,\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} \to 0 \tag{1.87}$$

e

$$||u_{\lambda_n}||^2_{\lambda_n,\Omega'_j} \to \int_{\Omega_j} |\nabla u|^2 + Z(x)u^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_j\,, \tag{1.88}$$

para $j = 1, 2$, onde o último limite é obtido usando argumentos análogos aos explorados na Proposição 1.15 e que u_{λ_n} pertence ao conjunto $D_\mu^{\lambda_n}$, para todo n.

Como as convergências acima não dependem da sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ escolhida inicialmente, temos (1.3) e (1.4) de (1.88) e (1.87), respectivamente. Além disso, ainda como resultado da Proposição 1.9, temos $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N\setminus\Omega_J$ e, de (1.88), $u\big|_{\Omega_j}$ é solução de energia mínima de (1.66), para $j = 1, 2$. Portanto, fica provado o Teorema 1.1.

■

Capítulo 2

Equação não-linear de Schrödinger: Caso Crítico

No presente capítulo, apresentaremos os resultados resultados de Alves, de Morais Filho & Souto [6] sobre a existência e multiplicidade de soluções positivas do tipo multi-bump da equação não-linear de Schrödinger

$$\begin{array}{c} -\Delta u + (\lambda V(x) + Z(x))u = \beta u|u|^{q-1} + u|u|^{2^*-2} \;\text{ em }\; \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{array}, \qquad (P_\lambda)$$

onde $\lambda > 0$, $\beta > 0$, $N \geq 3$, $q \in (1, 2^* - 1)$ e as funções $V, Z : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfazem as condições $(V1)$, $(V2)$, $(Z1)$ do problema do Capítulo 1 e também

(V3') Existe uma constante $M_0 > 0$ tal que

$$M_0 \leq V(x) + Z(x)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N\,,$$

(Z2') Existe uma constante positiva $M_1 > 0$ tal que

$$|Z(x)| \leq M_1\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N\,.$$

Com as hipóteses acima, as soluções não-negativas de (P_λ) podem ser caracterizadas como pontos críticos do funcional $\Upsilon_\lambda : \mathcal{H}_\lambda \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Upsilon_\lambda(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}(\lambda V(x) + Z(x))u^2 - \frac{\beta}{q+1}u_+^{q+1} - \frac{1}{2^*}u_+^{2^*}\,\mathrm{d}x\,,$$

para todo $u \in \mathcal{H}_\lambda$, onde

$$\mathcal{H}_\lambda = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\,;\, \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))u^2 \mathrm{d}x < \infty\}\,.$$

O principal resultado deste capítulo é o

Teorema 2.1 *Sob as hipóteses* $(V1), (V2), (V3'), (Z1)$ *e* $(Z2')$, *para cada conjunto não-vazio* $J \subseteq \{1, 2, 3\}$, *existem constantes* $\beta^* > 0$ *e* $\lambda^* = \lambda^*(\beta^*)$ *tais que, para todo* $\beta \geq \beta^*$ *e* $\lambda \geq \lambda^*$, *o problema* (P_λ) *possui uma família de soluções positivas com a seguinte propriedade: para qualquer sequência* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *com* $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$, *existe uma subsequência* $(\lambda_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ *tal que* $u_{\lambda_{n_l}} \to u$ *em* $H^1(\mathbb{R}^N)$, *onde a função limite* $u \in H_0^1(\Omega_J)$ *é identicamente nula em* $\mathbb{R}^N \setminus \bigcup\limits_{j\in J} \Omega_j$ *e, para todo* $j \in J$, *a restrição* $u\big|_{\Omega_j} \in H_0^1(\Omega_j)$ *é solução de energia mínima do problema*

$$\begin{array}{rcl} -\Delta u + Z(x)u & = & \beta u^q + u^{2^*-1} \ \ em\ \Omega_j, \\ u & > & 0 \ \ em\ \Omega_j, \\ u & = & 0 \ \ em\ \partial\Omega_j\,. \end{array} \tag{2.1}$$

Para garantir a multiplicidade de soluções de (P_λ) neste capítulo, temos o seguinte corolário, que é uma consequência imediata do Teorema 2.1.

Corolário 2.2 *Sob as condições do Teorema 2.1, existem* $\beta^* > 0$ *e* $\lambda^* = \lambda^*(\beta^*)$ *tais que, para* $\beta \geq \beta^*$ *e* $\lambda \geq \lambda^*$, *o problema* (P_λ) *tem pelo menos* $2^3 - 1 = 7$ *soluções positivas.*

Destacamos que a maioria dos resultados aqui apresentados foram baseados no artigo de Alves, de Morais Filho & Souto [6]. Caso haja exceções, serão dadas as devidas referências.

2.1 Resultados Preliminares

Neste capítulo, trabalharemos no espaço $(\mathcal{H}_\lambda, ||.||_\lambda)$ definido por

$$\mathcal{H}_\lambda = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))u^2 < \infty\right\}\,,$$

e

$$||u||_\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))\,u^2, \quad \forall\, u \in \mathcal{H}_\lambda\,,$$

para cada $\lambda > 0$.

Dado um conjunto aberto $\Theta \subseteq \mathbb{R}^N$, também definimos, para cada $\lambda > 0$, o espaço $(\mathcal{H}_\lambda(\Theta), ||.||_{\lambda,\Theta})$, onde

$$\mathcal{H}_\lambda(\Theta) = \left\{ u \in H^1(\Theta); \int_\Theta (\lambda V(x) + Z(x))u^2 < \infty \right\}$$

e a norma é

$$||u||^2_{\lambda,\Theta} = \int_\Theta |\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))\, u^2, \quad \forall\, u \in \mathcal{H}_\lambda(\Theta)\,.$$

Se $\lambda \geq 1$, então, tendo em vista $(V3')$, o espaço $(\mathcal{H}_\lambda(\Theta), ||.||_{\mathcal{H}_{\lambda,\Theta}})$ é um espaço de Hilbert, com produto interno

$$\begin{array}{rcl} <.,.>_\lambda : \mathcal{H}_\lambda(\Theta) \times \mathcal{H}_\lambda(\Theta) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & <u,v>_\lambda = \displaystyle\int_\Theta \nabla u \nabla v + (\lambda V(x) + Z(x))uv\,, \end{array}$$

satisfazendo a imersão

$$\mathcal{H}_\lambda(\Theta) \hookrightarrow H^1(\Theta)$$

com constante de imersão $C = (\min\{1, M_0\})^{1/2}$. Consequentemente, temos

$$||u||^2_{\lambda,\Theta} \geq M_0 |u|^2_{2,\Theta}\,, \quad \forall\, u \in \mathcal{H}_\lambda(\Theta)\,.$$

A partir da desigualdade acima, temos a seguinte versão do Corolário 1.6 do Capítulo 1.

Lema 2.3 *Para todo $\delta_0 \in (0,1)$, existe $\nu_0 \in (0,1)$ tal que, para qualquer $\Theta \subset \mathbb{R}^N$ aberto,*

$$\delta_0 ||u||^2_{\lambda,\Theta} \leq ||u||^2_{\lambda,\Theta} - \nu_0 |u|^2_{2,\Theta}\,, \quad \forall\, u \in \mathcal{H}_\lambda(\Theta)\ \lambda \geq \lambda_1\,.$$

Neste momento, fixemos $\delta_0 \in (0,1)$ de modo que

$$2\nu_0 < M_0\,, \tag{2.2}$$

onde M_0 é a constante dada em $(V3')$.

A demonstração deste lema segue os mesmos passos da prova do corolário citado e, por isso, não a faremos.

Tendo em vista o crescimento crítico na não-linearidade do problema em questão, o próximo lema, que é uma versão do Teorema A.15, será de extrema importância nos nossos estudos.

Lema 2.4 *Se $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo*

$$\begin{aligned} v_n &\rightharpoonup v \quad em \quad L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \\ |v_n|^{2^*} &\overset{*}{\rightharpoonup} \nu \quad em \quad M(\mathbb{R}^N) \\ |\nabla v_n|^2 &\overset{*}{\rightharpoonup} \mu \quad em \quad M(\mathbb{R}^N) \end{aligned}$$

onde ν e μ são medidas finitas não-negativas em $\mathbb{R}^N$, então existem um conjunto I, no máximo enumerável, famílias $\{x_i\}_{i\in I}$ de pontos distintos em $\mathbb{R}^N$ e $\{\nu_i\}_{i\in I}$ em $(0,\infty)$ tais que

$$\nu = |v|^{2^*} + \sum_{i\in I} \nu_i \delta_{x_i}\,,$$

com

$$\sum_{i\in I} \nu_i^{\frac{2}{2^*}} < \infty\,,$$

e

$$\mu(\{x_i\}) \geq S\nu_i^{\frac{2}{2^*}}\,, \quad \forall\, i \in I\,,$$

onde δ_x é a massa de Dirac em x e S é a melhor constante de Sobolev para a imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$.

2.2 Funcional Modificado e a Condição de Palais-Smale

Definamos a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$h(s) = \begin{cases} \beta s^q + s^{2^*-1}, & s \geq 0, \\ 0, & s < 0. \end{cases}$$

e fixemos uma constante positiva[1] a tal que

$$\frac{h(a)}{a} = \nu_0\,,$$

onde ν_0 é a constante dada em (2.2).

Consideremos também as funções $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned} f(s) &= \begin{cases} \min\{\nu_0 s, h(s)\}, & s \geq 0, \\ 0, & s < 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \nu_0 s, & s \geq a, \\ h(s), & 0 \leq s \leq a, \\ 0, & s < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

[1]Tal constante existe em virtude do Teorema do Valor Intermediário, já que a função que associa a cada $x > 0$ o valor $h(x)/x$ e se anula caso contrário, é contínua e $0 = \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x} < \nu_0 < \beta + 1 = h(1)/1$.

e

$$F(s)=\int_0^s f(r)\mathrm{d}r=\begin{cases} H(a)+\frac{1}{2}\nu_0(s^2-a^2), & s\geq a,\\ H(s), & 0\leq s\leq a,\\ 0, & s<0,\end{cases}$$

onde

$$H(s)=\int_0^s h(r)\mathrm{d}r\,.$$

No que segue, suporemos, sem perda de generalidade, que $J=\{1,2\}$. Dessa forma, ponhamos

$$\Omega_J=\Omega_1\cup\Omega_2 \quad \text{e} \quad \Omega'_J=\Omega'_1\cup\Omega'_2\,.$$

e

$$\chi_J(x)=\begin{cases} 1, & x\in\Omega'_J,\\ 0, & x\notin\Omega'_J,\end{cases}$$

e definamos as funções $g,G:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por

$$g(x,s)=\chi_J(s)h(s)+(1-\chi_J(x))f(s)$$

e

$$G(x,s)=\int_0^s g(x,r)\mathrm{d}r=\chi_J(x)H(s)+(1-\chi_J(x))F(s).$$

Agora consideremos o funcional $\Phi_\lambda:\mathcal{H}_\lambda\to\mathbb{R}$ dado por

$$\Phi_\lambda(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2+(\lambda V(x)+Z(x))u^2-\int_{\mathbb{R}^N}G(x,u)\,.$$

Sob as condições $(V1)-(V3')$, $(Z1)-(22')$ e pelas definições de g e G, o funcional Φ_λ é de classe $C^1(\mathcal{H}_\lambda,\mathbb{R})$ e seus pontos críticos são soluções não-negativas do problema

$$-\Delta u+(\lambda V(x)+Z(x))u=g(x,u) \qquad \text{em } \mathbb{R}^N. \tag{2.3}$$

Note que, pela definição da função g, um ponto crítico de Φ_λ é uma solução de (P_λ) se, e somente se, $u(x)\leq a$ em $\mathbb{R}^N\backslash\Omega'_J$.

A partir de agora, mostraremos alguns resultados que nos darão informações importantes relacionadas ao funcional Φ_λ e à condição de Palais-Smale[2].

Primeiramente, observemos que, pelas definições de h e f, podemos assumir, sem perda de generalidade, que qualquer sequência $(PS)_c$ de Φ_λ é não-negativa.

[2]Ver Apêndice A, Seção A.3

De fato, seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_\lambda$ uma sequência $(PS)_c$ de Φ_λ, isto é,

$$\Phi_\lambda(u_n) \to c \quad \text{e} \quad \Phi_\lambda(u_n) \to 0 \ \text{ em } \mathcal{H}'_\lambda \,. \tag{2.4}$$

Suponhamos, passando a uma subsequência se necessário, que

$$||u_{n-}||_\lambda > 0\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,$$

pois, caso contrário, não há o que fazer.

Então, tendo em vista as definições de h e f e usando que $u_n = u_{n+} + u_{n-}$ com $\operatorname{supp}(u_{n+}) \cap \operatorname{supp}(u_{n-}) = \emptyset$,

$$\begin{aligned}
\Phi'_\lambda(u_n)(u_{n-}) &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla(u_{n-}) + (\lambda V(x) + Z(x))u_n(u_{n-}) - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)(u_{n-}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_{n-})|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))(u_{n-})^2 - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,(u_{n+}))(u_{n-}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_{n-})|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))(u_{n-})^2 \\
&= ||u_{n-}||_\lambda^2\,.
\end{aligned}$$

Assim,

$$||u_{n-}||_\lambda^2 = \Phi'_\lambda(u_n)(u_{n-}) \le ||\Phi'_\lambda(u_n)||_\lambda^*||u_{n-}||_\lambda\,,$$

onde $||.||_\lambda^*$ denota a norma de $\mathcal{H}'_\lambda$, e daí, por (2.4)

$$||u_{n-}||_\lambda \le ||\Phi'_\lambda(u_n)||_\lambda^* \to 0\,. \tag{2.5}$$

Para concluirmos, resta mostrar que $(u_{n+})_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência $(PS)_c$ de Φ_λ.

Sendo assim, basta observarmos que, usando novamente as propriedades de u_{n+} e u_{n-},

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(u_n) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u_n^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u_n) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_{n+})|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))(u_{n+})^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u_{n+}) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_{n-})|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))(u_{n-})^2 \\
&= \Phi_\lambda(u_{n+}) + \frac{1}{2}||u_{n-}||_\lambda^2\,.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Logo, por (2.4) e (2.5),

$$\Phi_\lambda(u_{n+}) = \Phi_\lambda(u_n) - \frac{1}{2}||u_{n-}||_\lambda^2 \to c \tag{2.7}$$

Além disso, por (2.6),

$$\Phi'_\lambda(u_n)v = \Phi'_\lambda(u_{n+})v + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_{n-})\nabla v + (\lambda V(x) + Z(x))(u_{n-})v\,, \quad \forall\, v \in \mathcal{H}_\lambda\,.$$

Consequentemente, para toda $v \in \mathcal{H}_\lambda$ com $||v||_\lambda \leq 1$,

$$\begin{aligned} |\Phi'_\lambda(u_{n+})v| &= |\Phi'_\lambda(u_n)v - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_{n-})\nabla v + (\lambda V(x) + Z(x))(u_{n-})v| \\ &\leq |\Phi'_\lambda(u_n)v| + |\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_{n-})\nabla v + (\lambda V(x) + Z(x))(u_{n-})v| \\ &\leq ||\Phi'_\lambda(u_n)||^*_\lambda ||v||_\lambda + |< u_{n-}, v >| \\ &\leq ||\Phi'_\lambda(u_n)||^*_\lambda + ||u_{n-}||_\lambda\,, \end{aligned}$$

donde

$$||\Phi'_\lambda(u_{n+})||^*_\lambda \leq ||\Phi'_\lambda(u_n)||^*_\lambda + ||u_{n-}||_\lambda$$

e passando ao limite $n \to \infty$ obtemos

$$\Phi'_\lambda(u_{n+}) \to 0 \quad \text{em } \mathcal{H}_\lambda\,.$$

Portanto, pelo limite acima e por (2.7), $(u_{n+})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência $(PS)_c$ de Φ_λ, como queríamos mostrar.

O próximo lema é uma versão do Lema 1.7 do capítulo anterior e garante, como caso particular, que toda sequência $(PS)_c$ de Φ_λ é limitada.

Lema 2.5 *Suponha que as sequências $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}$ e $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [\lambda_1, \infty)$ satisfaçam*

$$\Phi_{\lambda_n}(u_n) \to c, \tag{2.8}$$

$$||\Phi'_{\lambda_n}(u_n)||^*_{\lambda_n} \to 0\,, \tag{2.9}$$

onde $c \in \mathbb{R}$ e

$$||f||^*_\lambda = \sup_{\varphi\in\mathcal{H}\,,\, ||\varphi||_\lambda\leq 1} |f(\varphi)|\,, \quad \textit{para } \ f \in \mathcal{H}'\,.$$

Então existe uma constante $M = M(c)$, que independe das sequências tomadas, tal que

$$0 \leq \liminf ||u_n||^2_{\lambda_n} \leq \limsup ||u_n||^2_{\lambda_n} \leq M.$$

Em particular, se a sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é constante com $\lambda_n = \lambda \geq \lambda_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}$ é uma sequência limitada e $(PS)_c$ de Φ_λ, isto é, satisfaz

$$\Phi_\lambda(u_n) \to c, \tag{2.10}$$

$$\Phi'_\lambda(u_n) \to 0 \quad \textit{em } \ \mathcal{H}'\,. \tag{2.11}$$

Demonstração:

Para demonstrarmos esse lema, basta notar que valem as estimativas

$$H(s) - \frac{1}{q+1}h(s)s \leq 0\,, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}\,,$$

e

$$F(s) - \frac{1}{q+1}f(s)s \leq \nu_0 s^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\,, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}\,,$$

e repetir os mesmos argumentos empregados na prova do Lema 1.7 do Capítulo 1.

■

Para enunciarmos o resultado a seguir, precisamos fixar algumas notações.

Dado $j \in \{1,2,3\}$, seja o funcional $I_j : H_0^1(\Omega_j) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_j(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_j} |\nabla u|^2 + Z(x)u^2 - \frac{\beta}{q+1}\int_{\Omega_j} u_+^{q+1} - \frac{1}{2^*}\int_{\Omega_j} u_+^{2^*}\,. \tag{2.12}$$

Vale destacar que os pontos críticos de I_j são soluções fracas positivas do problema

$$\begin{aligned} -\Delta u + Z(x)u &= \beta u^q + u^{2^*-1} \quad \text{em } \Omega_j, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega_j \end{aligned} \tag{2.13}$$

e que este tem a geometria do Passo da Montanha, donde fica bem definido o nível minimax do Teorema do Passo da Montanha (Teorema A.6),

$$c_j = \inf_{\gamma\in\Gamma_j}\max_{t\in[0,1]} I_j(\gamma(t))\,, \tag{2.14}$$

onde $\Gamma_j = \{\gamma \in C([0,1], H_0^1(\Omega_j))\,;\, \gamma(0) = 0\,,\, I_j(\gamma(1)) < 0\}$.

A técnica que foi aplicada por Alves, de Morais Filho & Souto para provar o Teorema 2.1, inclui a comparação entre níveis de energia do funcional associado ao problema (P_λ) com níveis de energia de funcionais relacionados a problemas auxiliares referentes ao problema (P_λ), assim como o estudo do comportamento de algumas sequências $(PS)_c$.

Neste sentido, vejamos o seguinte lema.

Lema 2.6 *Existe $\beta^* > 0$ tal que, para todo $\beta > \beta^*$, temos*

$$c_j \in \left(0, \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\frac{S^{\frac{N}{2}}}{4}\right)\,, \quad \forall\, j \in \{1,2,3\}\,,$$

onde S é a melhor constante de Sobolev para a imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração:

Seja $j \in \{1,2,3\}$ qualquer.

Fixemos então uma função não-negativa $\varphi_j \in H_0^1(\Omega_j)\backslash\{0\}$ e consideremos a aplicação $\sigma_j : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\sigma_j(t) = I_j(t\varphi_j) = \frac{t^2}{2}\int_{\Omega_j} |\nabla\varphi|^2 + Z(x)\varphi^2 - t^{q+1}\frac{\beta}{q+1}\int_{\Omega_j}\varphi^{q+1} - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_{\Omega_j}\varphi^{2^*}.$$

É fácil ver que σ_j é contínua, $\sigma_j(0) = 0$, $\sigma_j(t) > 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno, já que $\sigma_j'(t) > 0$ para t próximo de 0, e $\lim_{t\to\infty}\sigma_j(t) = -\infty$. Sendo assim, existe $t_{\beta,j} \in (0,\infty)$ tal que

$$I_j(t_{\beta,j}\varphi_j) = \max_{t\geq 0} I_j(t\varphi_j)$$

e, por conseguinte,

$$0 = \sigma_j'(t_{\beta,j}) = t\int_{\Omega_j}|\nabla\varphi_j|^2 + Z(x)\varphi_j^2 - t^q\beta\int_{\Omega_j}\varphi_j^{q+1} - t^{2^*-1}\int_{\Omega_j}\varphi_j^{2^*}. \tag{2.15}$$

Além disso, como c_j é o nível minimax de I_j, temos

$$c_j \leq I_j(t_{\beta,j}\varphi_j). \tag{2.16}$$

Note que, por (2.15),

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_j}|\nabla\varphi_j|^2 + Z(x)\varphi_j^2 &= \beta t_{\beta,j}^{q-1}\int_{\Omega_j}\varphi_j^{q+1} + t_{\beta,j}^{2^*-2}\int_{\Omega_j}\varphi_j^{2^*}\\ &\geq \beta t_{\beta,j}^{q-1}\int_{\Omega_j}\varphi_j^{q+1}\end{aligned}$$

e daí

$$t_{\beta,j} \leq \left(\frac{\displaystyle\int_{\Omega_j}|\nabla\varphi_j|^2 + Z(x)\varphi_j^2}{\displaystyle\beta\int_{\Omega_j}\varphi_j^{q+1}}\right)^{\frac{1}{q-1}},$$

o que implica em

$$\lim_{\beta\to\infty} t_{\beta,j} = 0\,.$$

Usando o limite anterior, temos, pela continuidade de I_j,

$$\lim_{\beta\to\infty} I_j(t_{\beta,j}\varphi_j) = 0$$

donde, por (2.16) e pela definição de limite, segue que existe $\beta_j^* > 0$ tal que

$$c_j < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\frac{S^{\frac{N}{2}}}{4}\,, \quad \forall\,\beta \geq \beta^*\,. \tag{2.17}$$

Portanto, como $j \in \{1,2,3\}$ é arbitrário, para cada $j \in \{1,2,3\}$ existe $\beta_j^* > 0$ satisfazendo (2.17). Sendo assim, para concluirmos a demonstração, basta tomar

$$\beta^* = \max_{1 \leq j \leq 3} \beta_j^* \,.$$

■

Uma consequência imediata do lema anterior é o

Corolário 2.7 *Para β suficientemente grande, tem-se*

$$\sum_{1 \leq j \leq 3} c_j \in \left(0, \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) S^{\frac{N}{2}}\right) \,.$$

Essa informação é muito importante para os nosso estudos, como mostra a

Proposição 2.8 *Para cada $\lambda \geq 1$ e $c \in \left(0, \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) S^{\frac{N}{2}}\right)$, qualquer sequência $(PS)_c$ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_\lambda$ do funcional Φ_λ possui uma subsequência convergente em $\mathcal{H}_\lambda$.*

Demonstração:

Sejam $\lambda \geq 1$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_\lambda$ uma sequência $(PS)_c$ de Φ_λ não-negativa[3].

Pelo Lema 2.5 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma é limitada em $\mathcal{H}_\lambda$ e, consequentemente, em $H^1(\mathbb{R}^N)$, já que $\mathcal{H}_\lambda \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$. Dessa forma, existe $K > 0$ satisfazendo

$$K \geq \max_{n \in \mathbb{N}} \{ ||u_n||_\lambda \,,\, |u_n|_2^2 \,,\, |\nabla u_n|_2^2 \} \,. \tag{2.18}$$

Daí, sendo $\mathcal{H}_\lambda$ um espaço reflexivo, já que é de Hilbert, podemos assumir que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } \mathcal{H}_\lambda \text{ e } H^1(\mathbb{R}^N) \,. \tag{2.19}$$

para alguma $u \in \mathcal{H}_\lambda$. Mais ainda, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, temos também

$$u_n \to u \quad \text{em } L^r_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N) \,,\; r \in [1, 2^*) \,, \tag{2.20}$$

e, por conseguinte,

$$u_n(x) \to u(x) \quad \text{quase sempre em } \mathbb{R}^N. \tag{2.21}$$

Note que se mostrarmos a convergência

$$||u_n||_\lambda \to ||u||_\lambda, \quad \text{quando } n \to \infty, \tag{2.22}$$

[3]Podemos tomá-la dessa forma devido à observação feita anteriormente, página 64.

então termina a demonstração. De fato, supondo já mostrada a convergência acima, como $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathcal{H}_\lambda$ que é um espaço uniformemente convexo (pois é de Hilbert), segue que

$$u_n \to u \quad \text{em } \mathcal{H}_\lambda\,.$$

Vejamos agora que, como

$$||u_n||_\lambda - ||u||_\lambda = \Phi_\lambda'(u_n)u_n - \Phi_\lambda'(u)u + \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u_n - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)u\,,$$

então nosso objetivo passa a ser a verificação das convergências

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_\lambda'(u_n)u_n = \Phi_\lambda'(u)u \tag{2.23}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u_n = \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)u\,. \tag{2.24}$$

A demonstração destas igualdades é um tanto longa e, por isso, a dividiremos em 5 partes.

1^o *Parte: O limite fraco u é ponto crítico do funcional Φ_λ ou, equivalentemente, vale o limite (2.23).*

Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso[4] em $\mathcal{H}_\lambda$, basta mostrar que

$$\Phi_\lambda'(u)\varphi = 0\,, \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)\,. \tag{2.25}$$

Daí, nosso objetivo é mostrar que, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ vale o limite

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla\varphi + (\lambda V(x) + Z(x))u_n\varphi - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)\varphi =&\\ = \ \Phi_\lambda'(u_n)\varphi \ \longrightarrow \ \Phi_\lambda'(u)\varphi \ =&\\ = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla\varphi + (\lambda V(x) + Z(x))u_n\varphi - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)\varphi\,,&\end{aligned} \tag{2.26}$$

pois, já que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é $(PS)_c$, temos

$$\Phi_\lambda'(u_n)\varphi \to 0\,, \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)\,,$$

e pela unicidade do limite teremos (2.25).

---
[4]Ver Apêndice A, Lema A.9

Sendo assim, mostremos (2.26).

Fixemos $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ arbitrariamente.

Pela natureza de φ, a aplicação

$$w \in H^1(\mathbb{R}^N) \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla \varphi + (\lambda V(x) + Z(x)) w\varphi$$

define um funcional linear e contínuo em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Logo, como $u_n \rightharpoonup u$ em neste espaço,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \varphi + (\lambda V(x) + Z(x)) u_n\varphi \to \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi + (\lambda V(x) + Z(x)) u\varphi \,. \tag{2.27}$$

Além disso, por (2.20), temos também

$$\int_{\Omega'_J} h(u_n)\varphi = \beta \int_{\Omega'_J} u_n^q \varphi + \int_{\Omega'_J} u_n^{2^*-1}\varphi \longrightarrow \beta \int_{\Omega'_J} u^q\varphi + \int_{\Omega'_J} u^{2^*-1}\varphi = \int_{\Omega'_J} h(u)\varphi \,. \tag{2.28}$$

Mais ainda, a convergência

$$\int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega'_J} f(u_n)\varphi \to \int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega'_J} f(u)\varphi \tag{2.29}$$

segue do fato de $u_n \to u$ em $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ e de, pelo Teorema A.3, a função $\tilde{f} : V \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde V é um compacto com $V \supset (\operatorname{supp}\varphi \cap \mathbb{R}^N\backslash\Omega'_J)$, dada por

$$\tilde{f}(x,s) = f(s)\varphi(x)\,, \quad \forall\,(x,s) \in V \times \mathbb{R}\,,$$

definir uma aplicação de Nemytskii $N_{\tilde{f}} : L^1(\mathbb{R}^N) \to L^1(\mathbb{R}^N)$ contínua, já que $\tilde{f}$ é uma função de Carathéodory satisfazendo, pela definição de f,

$$|\tilde{f}(x,s)| \leq |\varphi|_\infty |f(s)| \leq |\varphi|_\infty \nu_0 |s|\,, \quad \forall\,(x,s) \in V \times \mathbb{R}\,.$$

Portanto, (2.26) segue de (2.27), (2.28) e (2.29), e assim concluímos a 1^o parte.

As próximas etapas têm por objetivo mostrar o limite (2.24).

2^o *Parte: Dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $R > 0$ *tal que*

$$\int_{B_R(x)} |\nabla u_n|^2 + (\lambda V(x) + Z(x)) u_n^2 \leq \varepsilon\,, \tag{2.30}$$

para todo n *suficientemente grande.*

Fixemos uma função $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ satisfazendo

$$\zeta\big|_{B_R(0)^c} \equiv 1\,, \quad \zeta\big|_{B_{\frac{R}{2}}(0)} \equiv 0 \quad \text{e} \quad |\nabla\zeta(x)| \leq \frac{3}{R}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^N\,,$$

onde $R>0$ é, sem perda de generalidade, tal que

$$B_{R/2}(0) \supset \Omega'_J\,.$$

Como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência $(PS)_c$, por (2.18) temos

$$|\Phi'(u_n)(\zeta u_n)| \leq ||\Phi'(u_n)||_\lambda^*\,||\zeta u_n||_\lambda \leq K||\Phi'(u_n)||_\lambda^* \to 0\,. \tag{2.31}$$

Por outro lado, pela forma como ζ foi tomada, temos

$$\begin{aligned} \Phi'_\lambda(u_n)(\zeta u_n) &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla(\zeta u_n) + (\lambda V(x)+Z(x))u_n(\zeta u_n) - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)(\zeta u_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \zeta(|\nabla u_n|^2 + (\lambda V(x)+Z(x))u_n^2) + u_n\nabla u_n \nabla\zeta - \int_{\mathbb{R}^N} \zeta f(u_n)u_n\,, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \zeta(|\nabla u_n|^2 + (\lambda V(x)+Z(x))u_n^2) &= \Phi'_\lambda(u_n)(\zeta u_n) - \int_{\mathbb{R}^N} u_n\nabla u_n\nabla\zeta + \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \zeta f(u_n)u_n\,. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Agora, usando a desigualdade de Hölder e tendo em vista (2.18) e a natureza de ζ,

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}^N} u_n\nabla u_n\nabla\zeta &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u_n||\nabla u_n\nabla\zeta| \\ &\leq |u_n|_2^2|\nabla u_n\nabla\zeta|_2^2 \\ &\leq \frac{3K^2}{R}\,. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Além disso, pela definição de f e por $(V3')$, temos

$$\begin{aligned} f(v)v &\leq \nu_0 v^2 \leq \frac{\nu_0}{M_0}(\lambda V(x)+Z(x))v^2 \\ &\leq \frac{\nu_0}{M_0}(|\nabla v|^2 + (\lambda V(x)+Z(x))v^2)\,, \quad \forall\, v\in\mathcal{H}_\lambda\,, \end{aligned}$$

onde $\nu_0/M_0<1$, pela maneira como ν_0 foi escolhida, (2.2). Consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \zeta f(u_n)u_n \leq \frac{\nu_0}{M_0}\int_{\mathbb{R}^N} \zeta(|\nabla u_n|^2 + (\lambda V(x)+Z(x))u_n^2)\,, \ \ \forall\, n\in\mathbb{N}\,.$$

Mais ainda, usando (2.33) e a última estimativa em (2.32), obtemos

$$\left(1-\frac{\nu_0}{M_0}\right)\int_{\mathbb{R}^N} \zeta(|\nabla u_n|^2 + (\lambda V(x)+Z(x))u_n^2) \leq \Phi'_\lambda(u_n)(\zeta u_n) + \frac{3K^2}{R}$$

donde, pelas características de ζ,

$$\int_{B_R(0)^c} |\nabla u_n|^2 + (\lambda V(x)+Z(x))u_n^2 \leq \alpha\Phi'_\lambda(u_n)(\zeta u_n) + \frac{3K^2\alpha}{R}$$

onde $\alpha = \left(1 - \frac{\nu_0}{M_0}\right)^{-1}$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, por (2.31) temos

$$\alpha\Phi'_\lambda(u_n)(\zeta u_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \text{para } n \text{ suficientemente grande,}$$

e tomando R de modo que

$$\frac{3K^2}{R} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

segue a conclusão desta parte.

3º Parte: A sequência $(\nu_i)_{i\in I}$ obtida de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pelo Lema 2.4 satisfaz

$$\nu_i = 0\,, \quad \forall\, i \in I\,.$$

Primeiramente, observemos que estamos sob as hipóteses do Lema 2.4.

De fato, claramente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência que converge fraco em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, uma vez que é fracamente convergente em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ continuamente. Além disso, como o espaço[5] $(M(\mathbb{R}^N), ||.||_M)$, onde a norma $||.||_M$ é dada por

$$||\sigma||_M = |\sigma|(\mathbb{R}^N)\,, \quad \forall\, \sigma \in M(\mathbb{R}^N)\,,$$

é separável e é o dual de $(C_0(\mathbb{R}^N), |.|_\infty)$, então, pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, basta mostrar que as sequências $(\,|u_n|^{2^*}\,)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\,|\nabla u_n|^2\,)_{n\in\mathbb{N}}$ são limitadas em $M(\mathbb{R}^N)$ para concluirmos que estas são, a menos de subsequência, fracamente convergentes. Mas isso é imediato, uma vez que

$$||\,|u_n|^{2^*}\,||_M = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} = |u_n|_{2^*}^{2^*}$$

e

$$||\,|\nabla u_n|^2\,||_M = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 = |\nabla u_n|_2^2$$

e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e, consequentemente, em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$.

Agora vamos à demonstração desta parte.

Para começar, afirmamos que o conjunto de índices L é finito.

De fato, como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é $(PS)_c$, temos, para cada $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$o_n(1) := \Phi'_\lambda(u_n)\varphi \to 0\,,$$

[5]ver Apêndice A, Seção A.6

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi|\nabla u_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(\lambda V(x) + Z(x))u_n^2 + \int_{\mathbb{R}^N} u_n \nabla u_n \nabla \varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi g(x, u_n)u_n + o_n(1)\,. \tag{2.34}$$

Fixemos então $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ tal que

$$\eta\big|_{B(0,1)} \equiv 1\,,\ \ \eta\big|_{B(0,2)^c} \equiv 0\,,\ \ \text{e}\ \ |\nabla\eta|_\infty \leq 3\,,\ \ \text{com}\ \ \operatorname{supp}\nabla\eta \subset B(0,2)\,.$$

Agora tomemos arbitrariamente $\varepsilon > 0$ e $x_j \in \{x_i\}_{i\in I}$, onde $(x_i)_{i\in I}$ é a sequência de pontos disjuntos dada no Lema 2.4, e consideremos a função $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ dada por

$$\eta_\varepsilon(x) = \eta\left(\frac{x - x_j}{\varepsilon}\right)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N\,.$$

É fácil ver que a função acima satisfaz

$$\eta_\varepsilon\big|_{B_\varepsilon(x_j)} \equiv 1\,,\ \ \eta_\varepsilon\big|_{B_{2\varepsilon}(x_j)^c} \equiv 0\,,\ \ \text{e}\ \ |\nabla\eta_\varepsilon|_\infty \leq \frac{3}{\varepsilon}\,,\ \ \text{com}\ \ \operatorname{supp}\nabla\eta_\varepsilon \subset B_{2\varepsilon}(x_j)\,. \tag{2.35}$$

Assim, fazendo $\eta_\varepsilon \equiv \varphi$ em 2.34 e denotando a bola $B_{2\varepsilon}(x_j)$ por B, temos

$$\int_B \eta_\varepsilon|\nabla u_n|^2 + \int_B \eta_\varepsilon(\lambda V(x) + Z(x))u_n^2 \int_B u_n \nabla u_n \nabla \eta_\varepsilon = \int_B \eta_\varepsilon g(x, u_n)u_n + o_n(1)\,. \tag{2.36}$$

Agora observe que

$$\int_B \eta_\varepsilon(\lambda V(x) + Z(x))u_n^2 \geq 0\,,$$

já que todas as funções do integrando são não-negativas, pela definição de g segue que

$$g(x,s)s \leq h(s)s = \beta s^{q+1} + s^{2^*}\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N\,,\ \forall\, s \in \mathbb{R}\,,$$

e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e Hölder, (2.35) e (2.18),

$$\begin{aligned} -\int_B u_n \nabla u_n \nabla \eta_\varepsilon \ &\leq\ \int_B u_n|\nabla u_n||\nabla\eta_\varepsilon| \leq \frac{3}{\varepsilon}\int_B u_n|\nabla u_n| \\ &\leq\ \frac{3}{\varepsilon}|u_n|_{2,B}|\nabla u_n|_{2,B} \leq \frac{3K^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon}|u_n|_{2,B}\,. \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos reescrever (2.36) como

$$\int_B \eta_\varepsilon|\nabla u_n|^2 \leq \frac{3K^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon}|u_n|_{2,B}\beta\int_B \eta_\varepsilon u_n^{q+1} + \int_B \eta_\varepsilon u_n^{2^*} + o_n(1)$$

donde obtemos, aplicando o limite $n \to \infty$ e usando o Lema 2.4 juntamente com (2.19),

$$\int_B \eta_\varepsilon \mathrm{d}\mu \leq \frac{3K^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon}|u|_{2,B}\beta\int_B \eta_\varepsilon u^{q+1} + \int_B \eta_\varepsilon \mathrm{d}\nu\,.$$

Mais ainda, como $\frac{1}{2^*}+\frac{1}{N}=\frac{1}{2}$, usando a desigualdade de Hölder e lembrando que $B=B_{2\varepsilon}(x_j)$,

$$|u|_{2,B}\leq|B_{2\varepsilon}(x_j)|^{\frac{1}{N}}|u|_{2^*,B}=((2\varepsilon)^N\omega_N)^{\frac{1}{N}}|u|_{2^*,B}=2\varepsilon\omega_N^{\frac{1}{N}}|u|_{2^*,B}\,,$$

onde ω_N denota o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$. Então

$$\int_B\eta_\varepsilon\mathrm{d}\mu\leq(6K^{\frac{1}{2}}\omega_N^{\frac{1}{N}})|u|_{2^*,B}+\beta\int_B\eta_\varepsilon u^{q+1}+\int_B\eta_\varepsilon\mathrm{d}\nu\,. \tag{2.37}$$

Agora, como a função $l\equiv1$ pertence aos espaços $L^1(B,\nu)$, $L^1(B,\mu)$ e $L^1(B)$,

$$|\eta_\varepsilon(x)|\leq l(x)\,,\quad\forall\,x\in B,$$

e

$$\eta_\varepsilon(x)\to\chi_{\{x_j\}}(x)\quad\text{quase sempre em }\ B\,,\quad\text{quando }\ \varepsilon\to0\,,$$

onde $\chi_{\{x_j\}}$ é a função característica do ponto x_j, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue devemos ter

$$\int_B\eta_\varepsilon\mathrm{d}\nu\to\nu(\{x_j\})=\nu_j\,,\quad\int_B\eta_\varepsilon\mathrm{d}\mu\to\mu(\{x_j\})\,,\quad\int_B\eta_\varepsilon u^{q+1}\to0\,,\quad\text{quando }\ \varepsilon\to0\,.$$

Portanto, tomando o limite $\varepsilon\to0$ em (2.37) segue que

$$\mu(\{x_j\})\leq6K^{\frac{1}{2}}\omega_N^{\frac{1}{N}}\cdot0+\beta\cdot0+\nu_j\,,$$

isto é,

$$\mu(\{x_j\})\leq\nu_j\,. \tag{2.38}$$

Por fim, como o Lema 2.4 também nos dá

$$\mu(\{x_i\})\geq S\nu_i^{\frac{2}{2^*}}\,,\ \forall\,i\in I\,, \tag{2.39}$$

se $\nu_j>0$, então segue de (2.38) que

$$\nu_j\geq S^{\frac{N}{2}}\,, \tag{2.40}$$

donde concluímos que existe apenas uma quantidade finita de ν_i não-nulos, pois de outra forma teríamos

$$\sum_{i=1}^{\infty}S\nu_i^{\frac{2}{2^*}}=\infty\,,$$

o que contraria o Lema 2.4.

A seguir, mostremos que

$$\nu_i = 0\,, \quad \forall i \in I\,.$$

Usando mais uma vez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência $(PS)_c$, temos

$$\Phi_\lambda(u_n) - \frac{1}{q+1}\Phi'_\lambda(u_n)u_n = c + o_n(1)\,,$$

e usando que, por (2.2),

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\lambda V(x) + Z(x))u_n^2 + \int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{q+1}g(x,u_n)u_n - G(x,u_n) \geq$$
$$\geq \left(M_0 - \nu_0\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\right)\int_{\mathbb{R}^N}u_n^2 \geq (M_0 - \nu_0)\int_{\mathbb{R}^N}u_n^2 \geq 0\,.$$

obtemos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2 \leq c + o_n(1)$$

e, consequentemente, fazendo $n \to \infty$,

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\mu(\{x_i\}) \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{d}\mu \leq c\,, \quad \forall\, i \in I\,. \tag{2.41}$$

Agora, se existe $j \in I$ tal que $\nu_i > 0$, então, pela desigualdade acima, (2.39) e (2.40), devemos ter

$$c \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\mu(\{x_j\}) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)S\nu_j^{\frac{2}{2^*}} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)S^{\frac{N}{2}}\,,$$

o que contraria a forma como tomamos a constante c no enunciado. Logo

$$\nu_i = 0\,, \quad \forall\, i \in I\,,$$

como queríamos mostrar.

4^o *Parte:* $u_n \to u$ *em* $L^{2^*}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Pelo Lema 2.4 e pela parte anterior temos

$$|u_n|^{2^*} \overset{*}{\rightharpoonup} |u|^{2^*} \ \text{ em } M(\mathbb{R}^N). \tag{2.42}$$

Tomemos $V \subset \mathbb{R}^N$ um compacto arbitrário.

Para verificarmos o resultado desta parte, devemos mostrar que $u_n \to u$ em $L^{2^*}(V)$, o que faremos com o auxílio do Teorema de Brezis-Lieb (Teorema A.4) e usando a convergência (2.42).

Fixemos então uma função $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ tal que $\varphi\big|_V \equiv 1$.

Por (2.21), claramente

$$\varphi^{\frac{1}{2^*}}(x)u_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi^{\frac{1}{2^*}}(x)u(x) \quad \text{quase sempre em } \mathbb{R}^N$$

e

$$|\varphi^{\frac{1}{2^*}}u_n|_{2^*} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi u_n^{2^*}\right) \leq |u_n|_{2^*}\,,$$

donde a sequência $(\varphi^{2^*}u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Dessa forma, podemos usar o Teorema de Brezis-Lieb (Teorema A.4) e concluir que

$$|\varphi^{\frac{1}{2^*}}u_n|_{2^*}^{2^*} - |\varphi^{\frac{1}{2^*}}u_n - \varphi^{\frac{1}{2^*}}u|_{2^*}^{2^*} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} |\varphi^{\frac{1}{2^*}}u|_{2^*}^{2^*}\,.$$

Além disso, de (2.42) obtemos

$$|\varphi^{\frac{1}{2^*}}u_n|_{2^*}^{2^*} = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi u_n^{2^*} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi u^{2^*}\,,$$

o que nos dá, pela unicidade do limite,

$$|\varphi^{\frac{1}{2^*}}u_n - \varphi^{\frac{1}{2^*}}u|_{2^*}^{2^*} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

e, por conseguinte,

$$\int_V |u_n - u|^{2^*} \leq \int_V \varphi|u_n - u|^{2^*} = |\varphi^{\frac{1}{2^*}}u_n - \varphi^{\frac{1}{2^*}}u|_{2^*}^{2^*} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

isto é, $u_n \to u$ em $L^{2^*}(V)$. Assim, como $V \subset \mathbb{R}^N$ é arbitrário, temos a conclusão desta parte.

5^o *Parte:* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u_n \to \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)u$ *quando* $n \to \infty$ *e conclusão.*

Finalmente mostremos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u_n = \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)u\,. \tag{2.43}$$

Para isso, mostraremos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} h(u_n)u_n = \int_{\mathbb{R}^N} h(u)u \tag{2.44}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u\,. \tag{2.45}$$

O limite (2.44) segue de (2.20) e da parte anterior, de maneira semelhante à feita em (2.28) fazendo $\varphi \equiv u_n$.

Mostraremos a convergência (2.45) com o auxílio da parte 2.

Fixemos $\varepsilon > 0$ qualquer.

Pela 2^o parte, existe $R > 0$ satisfazendo (2.30).

Note que, pela definição de f,

$$\max_{s\in\mathbb{R}} |f'(s)| \leq h'(a) + \nu_0 := \nu_1\,,$$

onde $a > 0$ é a constante que foi fixada no início desta seção. Além disso, como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathcal{H}_\lambda$, existe $K_1 > 0$ tal que

$$|u|_2 + |u_n|_2 \leq K_1\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} f(u_n)u_n - f(u)u\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} |f(u_n)u_n - f(u_n)u| + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} |f(u_n)u - f(u)u| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} \nu_0|u_n|\,|u_n - u| + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} \nu_1|u|\,|u_n - u| \\
&\leq \nu_1\left(|u_n|_2|u_n - u|_2 + |u|_2|u_n - u|_2\right) \\
&\leq \nu_1 K_1 |u_n - u|_2\,. \qquad (2.46)
\end{aligned}$$

Agora, notemos que

$$\begin{aligned}
|u_n - u|_2 &= |u_n - u|_{2,B_R(0)} + |u_n - u|_{2,B_R(0)^c} \\
&\leq |u_n - u|_{2,B_R(0)} + \frac{1}{M_0^{1/2}}||u_n - u||_{\lambda,B_R(0)^c} \\
&\leq |u_n - u|_{2,B_R(0)} + \frac{1}{M_0^{1/2}}\left(||u_n||_{\lambda,B_R(0)^c} + ||u||_{\lambda,B_R(0)^c}\right)\,.
\end{aligned}$$

Mais ainda, levando em conta que $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathcal{H}_\lambda$ e a forma como $R > 0$ foi obtido, temos

$$||u||_{\lambda,B_R(0)^c} \leq \liminf ||u_n||_{\lambda,B_R(0)^c} \leq \varepsilon\,.$$

Logo

$$|u_n - u|_2 = |u_n - u|_{2,B_R(0)} + \frac{2}{M_0^{1/2}}\varepsilon\,.$$

Portanto, tendo em vista (2.46), segue da igualdade acima que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} f(u_n)u_n - f(u)u\right| \leq K_1\nu_1|u_n - u|_{2,B_R(0)} + \frac{2K_1\nu_1}{M_0^{1/2}}\varepsilon\,,$$

donde, tomando o limite superior e usando (2.20),

$$\limsup \left| \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_J} f(u_n)u_n - f(u)u \right| \leq \frac{2K_1\nu_1}{M_0^{1/2}}\varepsilon \,.$$

Assim, como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, devemos ter

$$0 \leq \liminf \left| \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_J} f(u_n)u_n - f(u)u \right| \leq \limsup \left| \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_J} f(u_n)u_n - f(u)u \right| = 0 \,,$$

e daí concluímos que vale (2.45) e, consequentemente, a conclusão do teorema, pelo que foi colocado no início da demonstração.

■

Uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é dita $(PS)_{\infty,c}$ quando

$$u_n \in \mathcal{H}_{\lambda_n}\,, \quad \lim_{n\to\infty} \Phi_{\lambda_n}(u_n) = c \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} ||\Phi'_{\lambda_n}(u_n)||^*_{\lambda_n} = 0\,,$$

onde a sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty\,.$$

A seguir, mostraremos a proposição que traz os resultados referentes às sequências $(PS)_{\infty,c}$ presentes no artigo de Alves, de Morais Filho & Souto [6], a qual é uma versão da Proposição 1.9 do Capítulo 1.

Proposição 2.9 *Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência $(PS)_{\infty,c}$ com nível c pertencente ao intervalo $\left(0, \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) S^{\frac{N}{2}}\right)$. Então, a menos de subsequência,*

$$u_n \rightharpoonup u \;\; em \;\; H^1(\mathbb{R}^N)\,,$$

para alguma $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Mais ainda:

(i) $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_J$ e $u\big|_{\Omega_j}$ é uma solução não-negativa de

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u + Z(x)u & = & \beta u|u|^{q-1} + u|u|^{2^*-1} & em\ \Omega_j \\ u & = & 0 & em\ \partial\Omega_j \end{array}, \qquad (P_j)$$

para $j = 1, 2$.

(ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para u em um sentido forte:

$$||u_n - u||_{\lambda_n} \to 0$$
$$u_n \to u \quad em\ H^1(\mathbb{R}^N)$$

(iii) a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também satisfaz:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n V(x) u_n^2 \to 0 \tag{2.47}$$

$$||u_n||^2_{\lambda_n,\mathbb{R}^N\backslash\Omega_J} \to 0 \tag{2.48}$$

$$||u_n||^2_{\lambda_n,\Omega'_j} \to \int_{\Omega_j} |\nabla u|^2 + Z(x)u^2\,,\ j=1,2\,, \tag{2.49}$$

Demonstração:

Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência $(PS)_{\infty,c}$ com $c \in \left(0, \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) S^{\frac{N}{2}}\right)$.

Pelo Lema 2.5, a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e daí, a menos de subsequência, podemos assumir que

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ H^1(\mathbb{R}^N)\,,$$

para alguma $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov,

$$u_n \to u \ \text{ em } \ L^r_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)\,,\ \forall\, r \in [1, 2^*)\,, \tag{2.50}$$

donde

$$u_n(x) \to u(x)\,, \qquad \text{quase sempre em } \ \mathbb{R}^N$$

e, consequentemente, a função u é não-negativa.

Para mostrarmos (i), basta adaptar os argumentos da Proposição 1.9 (i) do capítulo anterior.

Agora vejamos (ii).

Notemos que

$$\begin{aligned} ||u_n - u||^2_{\lambda_n} - \int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega'_J} (f(u_n) - f(u))(u_n - u) &= \Phi'_{\lambda_n}(u_n)(u_n - u) - \Phi'_{\lambda_n}(u)(u_n - u) + \\ &\quad + \int_{\Omega'_J} (h(u_n) - h(u))(u_n - u)\,. \end{aligned}$$

Assim, se mostrarmos que

$$\lim_{n\to\infty} \Phi'_{\lambda_n}(u_n)(u_n - u) = \lim_{n\to\infty} \Phi'_{\lambda_n}(u)(u_n - u) = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega'_J} (h(u_n) - h(u))(u_n - u) = 0\,. \tag{2.51}$$

então (ii) está demonstrada. Com efeito, pela definição de f e lembrando que $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N\backslash\Omega_J$, temos

$$f(u_n(x)) - f(u(x)) = f(u_n(x)) - f(0) = f(u_n(x))$$

e

$$f(u_n(x)-u(x)) = f(u_n(x)-0) = f(u_n(x))\,,$$

para todo $x \notin \Omega'_J$. Daí

$$\int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega'_J}(f(u_n)-f(u))(u_n-u) = \int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega'_J}(f(u_n-u))(u_n-u) \leq \nu_0|u_n-u|_2^2\,,$$

ou seja, pelo Lema 2.3,

$$\begin{aligned}
\delta_0||u_n-u||^2_{\lambda_n} &\leq ||u_n-u||^2_{\lambda_n} - \nu_0|u_n-u|^2_2 \\
&\leq ||u_n-u||^2_{\lambda_n} \int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega'_J}(f(u_n)-f(u))(u_n-u) \\
&= \Phi'_{\lambda_n}(u_n)(u_n-u) - \Phi'_{\lambda_n}(u)(u_n-u) + \\
&\quad + \int_{\Omega'_J}(h(u_n)-h(u))(u_n-u)\,.
\end{aligned}$$

Portanto, fazendo $n\to\infty$ e usando (2.51)

$$||u_n-u||^2 \leq ||u_n-u||^2_{\lambda_n} \to 0\,.$$

Dessa forma, mostremos (2.51).

O limite

$$\lim_{n\to\infty}\Phi'_{\lambda_n}(u_n)(u_n-u) = 0$$

segue imediatamente do fato de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser $(PS)_{c,\infty}$ e limitada.

Para concluirmos que

$$\int_{\Omega'_J}(h(u_n)-h(u))(u_n-u) = 0 \tag{2.52}$$

primeiramente note que

$$\int_{\Omega'_J}(h(u_n)-h(u))(u_n-u) = \beta\int_{\Omega'_J}(u_n^q-u^q)(u_n-u) + \int_{\Omega'_J}(u_n^{2^*-1}-u^{2^*-1})(u_n-u)\,.$$

Afirmamos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega'_J}(u_n^q-u^q)(u_n-u) = 0\,. \tag{2.53}$$

De fato, como

$$\frac{1}{\frac{q+1}{q}}+\frac{1}{q} = 1\,,\quad u_n^q \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega'_J) \quad \text{e} \quad |u_n^q|_{\frac{q+1}{q},\Omega'_J} = |u_n|^q_{q+1,\Omega'_J}\,,\ \forall\, n\in\mathbb{N}\,,$$

então, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega'_J} (u_n^q - u^q)(u_n - u) &\leq |u_n^q - u^q|_{\frac{q+1}{q},\Omega'_J} |u_n - u|_{q+1,\Omega'_J}^q \\ &\leq \left(|u_n|_{q+1,\Omega'_J}^q + |u|_{q+1,\Omega'_J}^q \right) |u_n - u|_{q+1,\Omega'_J}^q\end{aligned}$$

Assim, como $u_n \to u$ em $L^q(\Omega'_J)$ e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^{q+1}(\Omega'_J)$, pois também temos $u_n \to u$ em $L^{q+1}(\Omega'_J)$, fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima, obtemos (2.53). De modo análogo,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega'_J} (u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1})(u_n - u) = 0\,.$$

Portanto vale o limite (2.52).

Por fim, para verificar que

$$\lim_{n\to\infty} \Phi'_{\lambda_n}(u)(u_n - u) = 0\,,$$

basta observar que

$$\Phi'_{\lambda_n}(u)(u_n - u) = \int_{\Omega'_J} \nabla u \nabla (u_n - u) + Z(x)u(u_n - u) - \int_{\Omega'_J} h(u)(u_n - u)$$

e valem

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega'_J} h(u)(u_n - u) = 0\,,$$

por um argumento análogo ao feito para concluir (2.53), e

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega'_J} \nabla u \nabla (u_n - u) + Z(x)u(u_n - u) = 0\,,$$

já que $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e a aplicação

$$v \in H^1(\mathbb{R}^N) \longmapsto \int_{\Omega'_J} \nabla u \nabla v + Z(x)uv$$

define um funcional linear e contínuo em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Sendo assim, vale (2.51) e pelo que foi colocado inicialmente, temos (ii).

Finalmente, vejamos (iii).

Sobre (2.47), por $(V3')$ e como $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} V = \emptyset$ e, para n suficientemente grande, $\lambda_n \leq 2(\lambda_n - 1)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n V(x) u_n^2 &= \frac{\lambda_n}{\lambda_n - 1} \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda_n - 1) V(x) u_n^2 \\
&\leq 2 \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda_n - 1) V(x)(u_n - u)^2 + (V(x) + Z(x))(u_n - u)^2 + \\
&\quad +2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla (u_n - u)|^2 \\
&\leq 2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla (u_n - u)|^2 + (\lambda_n V(x) + Z(x))(u_n - u)^2 \\
&= 2||u_n - u||_{\lambda_n}^2
\end{aligned}$$

e passando ao limite $n \to \infty$ obtemos, por (2.47), o resultado desejado.

Em relação a (2.48), note que, usando um argumento análogo ao empregado acima,

$$\begin{aligned}
||u_n||^2_{\lambda_n, \mathbb{R}^N \backslash \Omega_J} &= ||u_n - u||^2_{\lambda_n, \mathbb{R}^N \backslash \Omega_J} \\
&\leq ||u_n - u||^2_{\lambda_n} \to 0 \,, \quad \text{quando} \ \ n \to \infty \,.
\end{aligned}$$

Para finalizar, segue de (2.47) que

$$\left| ||u_n||^2_{\lambda_n, \Omega'_j} - ||u_n||^2_{\lambda_n, \Omega'_j} \right| \to 0 \,, \quad \text{quando} \ \ n \to \infty \,.$$

e como

$$||u||^2_{\lambda_n, \Omega'_j} = \int_{\Omega_j} |\nabla u|^2 + Z(x) u^2$$

concluímos que vale (2.49)

■

Como mencionamos anteriormente, um ponto crítico de Φ_λ é uma solução de (P_λ) se, e somente se, $u(x) \leq a$ em $\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J$, onde a é a constante fixada no início desta seção. Neste sentido, vejamos a

Proposição 2.10 *Seja $\{u_\lambda\}_{\lambda \geq 1}$ uma família de soluções positivas de (2.3) satisfazendo*

$$\sup_{\lambda \geq 1} \{\Phi_\lambda(u_\lambda)\} < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1} \right) S^{\frac{N}{2}} \,.$$

Então existe $\lambda^* \geq 1$ tal que

$$|u_\lambda|_{\infty, \mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J} \leq a \,, \quad \forall \, \lambda \geq \lambda^* \,,$$

isto é, u_λ é solução positiva do problema original (P_λ) para $\lambda \geq \lambda^*$.

Demonstração:

Seja $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência com $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$. Para simplificar a notação, façamos $u_{\lambda_n} = u_n$.

Pelo Lema 2.5, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada de soluções positivas de (2.3) e, pela Proposição 2.6, a menos de subsequência,

$$u_n \to u \quad \text{em } H^1(\mathbb{R}^N)\,,$$

onde u é o limite fraco de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Nossa intenção é usar a Proposição A.17 e, em seguida, após modificarmos o problema (2.3), aplicar o Corolário A.20 para concluirmos a estimativa desejada. Dito isto, devemos mostrar que a função g que aparece no problema (2.3) satisfaz a desigualdade (A.24) da Proposição A.17.

De fato, temos a seguinte estimativa: se $1 < a < b$, $\alpha \geq 0$ e $0 < \gamma \leq 1$, então

$$\alpha s^a \leq \gamma s + \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{b-1}{a-1}} s^b\,, \quad \forall\, s \geq 0\,.$$

Logo g satisfaz (A.24), pois

$$g(x,s) = \chi_J(x)h(s) + (1-\chi_J(x))f(s) \leq h(s) + \nu_0 s = \nu_0 s + \beta s^q + s^{2^*-1}$$

e como $1 < q < 2^* - 1$, $\beta > 0$ e $0 < \nu_0 < 1$,

$$g(x,s) \leq \nu_0 s + \nu_0 s + \left(\frac{\beta}{\nu_0}\right)^{\frac{2^*-2}{q-1}} s^{2^*-1} + s^{2^*-1}\,, \quad \forall\, s \geq 0\,,$$

ou seja,

$$g(x,u_n) \leq 2\nu_0 u_n + \left(1 + \left(\frac{\beta}{\nu_0}\right)^{\frac{2^*-2}{q-1}}\right) u_n^{2^*-1} = (2\nu_0 + a_n(x))u_n\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,,$$

onde $a_n(x) = \overline{C}u_n^{2^*-2}$, com $\overline{C} = \left(1 + \left(\frac{\beta}{\nu_0}\right)^{\frac{2^*-2}{q-1}}\right) u_n^{2^*-1}$, está em $L^{\frac{N}{2}(\mathbb{R}^N)}$, para todo n, já que $(2^*-2)\frac{N}{2} = 2^*$ e $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Então, pela Proposição A.17, fixado $r > 2^*$,

$$|u_n|_r \leq C_r ||u_n||\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,$$

donde segue que a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^r(\mathbb{R}^N)$, uma vez que o é em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Agora, reescrevamos o problema (2.3) como

$$-\Delta u_n + (\lambda_n V(x) + Z(x) - 2\nu_0)u_n = \tilde{g}(x, u_n)\,, \quad \text{em } \mathbb{R}^N\,,$$

onde

$$\tilde{g}(x, u_n) = g(x, u_n) - 2\nu_0 u_n \leq a_n(x)u_n\,,$$

e $a_n = \overline{C}u_n^{2^*-2} \in L^{\frac{r}{2^*-2}}(\mathbb{R}^N)$, com $\frac{r}{2^*-2} > \frac{2^*}{2^*-2} = \frac{N}{2}$. Dessa forma, o Corolário A.20 assegura que existe $K_0 > 0$ tal que

$$|u_n|_\infty \leq K_0\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Deste ponto em diante, a prova é análoga à da Proposição 1.10, partes 2, 3 e 4, do capítulo anterior.

■

2.3 Argumentos do tipo Minimax para o funcional Φ_λ

Para cada $\lambda \geq 1$ e $j \in \{1, 2\}$, seja o funcional $\Phi_{\lambda,j} : H^1(\Omega'_j) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi_{\lambda,j}(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega'_j} |\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u^2 - \frac{\beta}{q+1}\int_{\Omega'_j} u_+^{q+1} - \frac{1}{2^*}\int_{\Omega'_j} u_+^{2^*}\,,\ \forall\, u \in H^1(\Omega'_j)\,, \tag{2.54}$$

cujos pontos críticos são soluções fracas positivas do problema

$$\begin{aligned} -\Delta u + (\lambda V(x) + Z(x))u &= \beta u^q + u^{2^*-1} \ \text{ em } \Omega'_j\,, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0 \ \text{ em } \partial\Omega'_j\,. \end{aligned} \tag{2.55}$$

É fácil verificar que o funcional $\Phi_{\lambda,j}$ tem a Geometria do Passo da Montanha. Dessa forma, o nível minimax associado ao funcional $\Phi_{\lambda,j}$ dado por

$$c_{\lambda,j} = \inf_{\gamma \in \Gamma_{\lambda,j}} \max_{t \in [0,1]} \Phi_{\lambda,j}(\gamma(t))\,,$$

onde $\Gamma_{\lambda,j} = \{\gamma \in C([0,1], H^1(\Omega'_j))\,;\, \gamma(0) = 0\,,\, \Phi_{\lambda,j}(\gamma(1)) < 0\}$, está bem definido.

Uma vez que $\beta > 0$ é pequeno, baseando-se em Garcia Azorero & Peral Alonso [22] e Alves & El Hamidi [5], pode-se mostrar, para cada $j \in \{1, 2\}$, a existência de duas funções não negativas $w_j \in H_0^1(\Omega_j)$ e $w_{\lambda,j} \in H^1(\Omega'_j)$, soluções dos problemas (2.13) e (2.55), respectivamente, isto é, w_j satisfaz

$$I_j(w_j) = c_j \quad \text{e} \quad I'_j(w_j) = 0\,,$$

onde I_j foi definido em (2.12), e $w_{\lambda,j}$, por sua vez,

$$\Phi_{\lambda,j}(w_{\lambda,j}) = c_{\lambda,j} \quad \text{e} \quad \Phi'_{\lambda,j}(w_{\lambda,j}) = 0\,.$$

Agora tomemos $R > 1$ tal que

$$I_j\left(\frac{1}{R}w_j\right) < \frac{c_j}{2}\,, \quad \forall\, j \in \{1,2\}\,,$$

com c_j definido em (2.14), e

$$I_j\left(Rw_j\right) \leq 0\,, \quad \forall\, j \in \{1,2\}\,.$$

Pela natureza de w_j e pela forma como R foi tomado, a igualdade

$$\max_{s\in[1/R^2,1]} I_j(sRw_j) = I_j(w_j) = c_j\,, \quad \forall\, j \in \{1,2\} \tag{2.56}$$

é consequência do Lema A.7, uma vez que

$$c_j = I_j(w_j) \leq \max_{s\in[1/R^2,1]} I_j(sRw_j) \leq \max_{s\geq 0} I_j(sRw_j) = I_j(w_j) = c_j\,.$$

Consideremos a aplicação $\gamma_0 : [1/R^2,1]^2 \equiv [1/R^2,1]\times[1/R^2,1] \to H^1(\Omega'_J)$ dada por

$$\gamma_0(s_1,s_2)(x) = s_1Rw_1(x) + s_2Rw_2(x)\,, \quad \forall\,(s_1,s_2) \in [1/R^2,1]^2\,,$$

e, então, definamos o conjunto

$$\Gamma_J = \{\gamma \in C([1/R^2,1]^2, H^1(\Omega'_J)\backslash\{0\})\,;\, \gamma(s) = \gamma_0(s)\,, \forall\, s \in \partial\left([1/R^2,1]^2\right)\}$$

e

$$b_{\lambda,J} = \inf_{\gamma\in\Gamma_J}\max_{s\in[1/R^2,1]^2} \Phi_\lambda(\gamma(s))\,.$$

Note que $\gamma_0 \in \Gamma_J \neq \emptyset$ e que o valor $b_{\lambda,J}$ está bem definido.

Antes de apresentarmos o próximo resultado, que relaciona os valores $c_J := c_1+c_2$, $c_{\lambda,1}+c_{\lambda,2}$ e $b_{\lambda,J}$, vejamos o seguinte lema.

Lema 2.11 *Para cada $\gamma \in \Gamma_J$, existe $s_\gamma \in [1/R^2, 1]^2$ tal que*

$$\Phi'_{\lambda,j}(\gamma(s_\gamma))(\gamma(s_\gamma)) = 0\,, \quad \forall\, j \in \{1, 2\}\,.$$

Demonstração:

Seja $\gamma \in \Gamma_J$ qualquer. Definamos a aplicação $\tilde{\gamma} : [1/R^2, 1]^2 \to \mathbb{R}^2$ por

$$\tilde{\gamma}(s) = \left(\Phi'_{\lambda,1}(\gamma(s))(\gamma(s))\,,\, \Phi'_{\lambda,2}(\gamma(s))(\gamma(s))\right)\,.$$

Se mostrarmos que existe $s \in [1/R^2, 1]^2$ tal que $\tilde{\gamma}(s) = (0, 0)$, terminamos. Para isso, assim como no Lema 1.12 do capítulo anterior, usaremos os resultados de Teoria do Grau Topológico presentes no apêndice para concluirmos a existência de tal s. Dessa forma, mostremos primeiramente que $(0, 0) \notin \tilde{\gamma}(\partial([1/R^2, 1]^2))$. Com efeito, se $s \in \partial([1/R^2, 1]^2)$, então $\gamma(s) = \gamma_0(s)$ e assim

$$\Phi'_{\lambda,j}(\gamma_0(s))(\gamma_0(s)) = I'_j(s_j R w_j)(s_j R w_j)\,, \quad j = 1, 2\,.$$

Afirmamos que

$$I'_j(s_j R w_j)(s_j R w_j) = 0 \quad \text{se, e só se,} \quad s_j = \frac{1}{R}\,, \quad \forall j \in \{1, 2\}\,. \tag{2.57}$$

De fato, fixemos $j \in \{1, 2\}$ arbitrariamente. A princípio notemos que, pelas características de w_j, temos

$$||w_j||^2_{\lambda,\Omega_j} - \beta|w_j|^{q+1}_{q+1,\Omega_j} - |w_j|^{2^*}_{2^*,\Omega_j} = I'_j(w_j)(w_j) = 0\,.$$

Por outro lado, se $I'_j(s_j R w_j)(s_j R w_j) = 0$, então, usando a igualdade acima,

$$\begin{aligned}
0 &= (s_j R)^{-2} I'_j(s_j R w_j)(s_j R w_j) \\
&= ||w_j||^2_{\lambda,\Omega_j} - \beta(s_j R)^{q-1}|w_j|^{q+1}_{q+1,\Omega_j} - (s_j R)^{2^*-1}|w_j|^{2^*}_{2^*,\Omega_j} \\
&= (1 - (s_j R)^{q-1})\beta|w_j|^{q+1}_{q+1,\Omega_j} + (1 - (s_j R)^{2^*-1})|w_j|^{2^*}_{2^*,\Omega_j}\,,
\end{aligned}$$

e, consequentemente, $s_j = 1/R$, uma vez que $2^* - 2 > q - 1 > 0$, ou seja, as funções $t \mapsto t^{q-1}$ e $t \mapsto t^{2^*-2}$, para $t \geq 0$, são crescentes. Portanto, como j é arbitrário, segue a afirmação e, por conseguinte, que $(0, 0) \notin \tilde{\gamma}(\partial([1/R^2, 1]^2))$, já que o ponto $(1/R, 1/R)$ não pertence a $\partial([1/R^2, 1]^2)$.

Consideremos agora a função $f : [1/R^2, 1]^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(s) = (f_1(s), f_2(s))\,,$$

onde, para $j = 1, 2$,

$$\begin{aligned} f_j(s) &= I_j'(s_jRw_j)(s_jRw_j) \\ &= s_j^2R^2||w_j||^2_{\lambda,\Omega_j} - \beta s_j^{q+1}R^{q+1}|w_j|^{q+1}_{q+1,\Omega_j} - s_j^{2^*}R^{2^*}|w_j|^{2^*}_{2^*,\Omega_j}\,. \end{aligned}$$

Claramente $f \equiv \tilde{\gamma}$ em $\partial([1/R^2, 1])$. Então, pelo Teorema A.21,

$$d(\tilde{\gamma}, (1/R^2, 1)^2, (0,0)) = d(f, (1/R^2, 1)^2, (0,0))\,. \tag{2.58}$$

Mais ainda, por (2.57), $f(s) = 0$ se, e somente se, $s = (1/R, 1/R)$. Além disso, é fácil ver que f é diferenciável e $f'(1/R, 1/R) = (a_{ij})_{i,j=1,2}$, onde

$$a_{ij} = \begin{cases} 2R||w_i||^2_{\lambda,\Omega_i} - \beta(q+1)R|w_i|^{q+1}_{q+1,\Omega_i} - 2^*R|w_i|^{2^*}_{2^*,\Omega_i}\,, & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Assim, como

$$\begin{aligned} a_{ii} &= 2R\left(||w_i||^2_{\lambda,\Omega_i} - \beta|w_i|^{q+1}_{q+1,\Omega_i} - |w_i|^{2^*}_{2^*,\Omega_i}\right) - \\ &\quad - \left(\beta(q-1)R|w_i|^{q+1}_{q+1,\Omega_i} + (2^*-2)R|w_i|^{2^*}_{2^*,\Omega_i}\right) \\ &= -\left(\beta(q-1)R|w_i|^{q+1}_{q+1,\Omega_i} + (2^*-2)R|w_i|^{2^*}_{2^*,\Omega_i}\right) \\ &< 0\,, \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, $f'(1/R, 1/R)$ é uma transformação linear inversível com

$$\text{sinal}(\det f'(1/R, 1/R)) = 1\,,$$

donde, pelos Teoremas A.22 e A.23,

$$d(f, (1/R^2, 1)^2, (0,0)) = d(f'(1/R, 1/R), B_1(0), (0,0)) = 1\,.$$

Portanto, tendo em vista a igualdade acima e (2.58),

$$d(\tilde{\gamma}, (1/R^2, 1)^2, (0,0)) = 1\,,$$

e, consequentemente, existe $s_\gamma \in (1/R^2, 1)^2$ satisfazendo a conclusão do lema.

■

Proposição 2.12 *Com as notações acima, temos:*

(i) $c_{\lambda,1} + c_{\lambda,2} \leq b_{\lambda,J} \leq c_J$, *para todo* $\lambda \geq 1$;

(ii) $\Phi_\lambda(\gamma(s)) < c_J$, *para todo* $\lambda \geq 1$, $\gamma \in \Gamma_J$ *e* $s \in \partial([1/R^2, 1]^2)$.

Demonstração:

Primeiramente vejamos (i).

Fixemos $\lambda \geq 1$ e $\gamma \in \Gamma_J$ quaisquer.

Para a desigualdade $c_{\lambda,1} + c_{\lambda,2} \leq b_{\lambda,J}$, observemos que, pelo Lema 2.11, existe $s_\gamma \in [1/R^2, 1]^2$ tal que

$$\Phi'_{\lambda,j}(\gamma(s_\lambda)) = 0\,, \quad j = 1, 2\,,$$

donde $\gamma(s_\gamma)$ pertence à variedade Nehari $N_j = \{u \in H^1(\Omega'_j)\,;\, \Phi'_{\lambda,j}(u)(u) = 0\}$, para $j = 1, 2$. Então, pelo Teorema A.8,

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(\gamma(s_\gamma)) &= \left(\Phi_\lambda(\gamma(s_\gamma)) - \sum_{j=1,2} \Phi_{\lambda,\Omega'_j}(\gamma(s_\gamma))\right) + \sum_{j=1,2} \Phi_{\lambda,\Omega'_j}(\gamma(s_\gamma)) \\
&\geq \left(\Phi_\lambda(\gamma(s_\gamma)) - \sum_{j=1,2} \Phi_{\lambda,\Omega'_j}(\gamma(s_\gamma))\right) + \sum_{j=1,2} \inf_{v \in N_j} \Phi_{\lambda,\Omega'_j}(v) \\
&= \left(\Phi_\lambda(\gamma(s_\gamma)) - \sum_{j=1,2} \Phi_{\lambda,\Omega'_j}(\gamma(s_\gamma))\right) + \sum_{j=1,2} c_{\lambda,j}\,.
\end{aligned}$$

Agora vejamos que

$$\Phi_\lambda(\gamma(s_\gamma)) - \sum_{j=1,2} \Phi_{\lambda,\Omega'_j}(\gamma(s_\gamma)) \geq 0\,.$$

De fato, notemos que, pela definição da função F,

$$F(s) \leq \frac{1}{2}\nu_0 s^2\,, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}\,.$$

Assim, usando o Lema 2.3 e as definições de Φ_λ e $\Phi_{\lambda,j}$,

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(\gamma(s_\gamma)) - \sum_{j=1,2} \Phi_{\lambda,\Omega'_j}(\gamma(s_\gamma)) &= \frac{1}{2}||\gamma(s_\gamma)||^2_{\lambda,\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} F(\gamma(s_\gamma)) \\
&\geq \frac{1}{2}||\gamma(s_\gamma)||^2_{\lambda,\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} - \frac{1}{2}\nu_0|\gamma(s_\gamma)|^2_{2,\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} \\
&\geq \frac{\delta_0}{2}||\gamma(s_\gamma)||^2_{\lambda,\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_J} \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Dessa forma, pelo que foi feito até aqui, temos

$$\max_{s\in[1/R^2,1]^2} \Phi_\lambda(\gamma(s)) \geq c_{\lambda,1} + c_{\lambda,2}$$

e como $\gamma \in \Gamma_J$ é arbitrária, segue que $b_{\lambda,J} \geq c_{\lambda,1} + c_{\lambda,2}$.

Para a desigualdade $b_{\lambda,J} \leq c_J$, basta observar que γ_0 pertence ao conjunto Γ_J e então

$$\begin{aligned} b_{\lambda,J} &\leq \max_{s\in[1/R^2,1]^2} \Phi_\lambda(\gamma_0(s)) \\ &= \max_{s\in[1/R^2,1]^2} (I_1(s_1Rw_1) + I_2(s_2Rw_2)) \\ &= c_1 + c_2 = c_J\,, \end{aligned}$$

e assim concluímos (i).

Para o ítem (ii), tomemos $\lambda \geq 1$, $\gamma \in \Gamma_J$ e $s = (s_1, s_2) \in \partial([1/R^2, 1]^2)$ arbitrariamente. Então, pela definição de Γ_J,

$$\gamma(s) = \gamma_0(s) = \sum_{j=1,2} s_jRw_j\,,$$

donde

$$\Phi_\lambda(\gamma(s)) = \Phi_\lambda(\gamma_0(s)) = \sum_{j=1,2} I_j(s_jRw_j)\,.$$

Além disso, lembrando (2.56),

$$I_j(s_jRw_j) \leq c_j\,, \quad j = 1,2\,.$$

Mais ainda, como $s \in \partial([1/R^2, 1]^2)$, devemos ter s_1 ou s_2 em $\{1/R^2, 1\}$, digamos s_1. Consequentemente, pela forma como $R > 1$ foi fixado, $I_1(s_1Rw_1) \leq \frac{c_1}{2}$. Logo

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(\gamma(s)) &= I_1(s_1Rw_1) + I_2(s_2Rw_2) \\ &\leq \frac{c_1}{2} + c_2 \\ &< c_J\,, \end{aligned}$$

mostrando, assim, o ítem (ii)

■

Como consequência do resultado anterior, temos o

Corolário 2.13 *Com as notações acima, temos:*

(i) $\lim_{\lambda\to\infty} b_{\lambda,J} = c_J$ *;*

(ii) $b_{\lambda,J}$ *é um valor crítico de* Φ_λ *para* λ *suficientemente grande.*

Demonstração:

Vejamos o ítem (i).

Assim como no capítulo anterior, Lema 1.11 ítens (i) e (iv), temos

$$0 < c_{\lambda,j} \leq c_j \quad \text{e} \quad \lim_{\lambda \to \infty} c_{\lambda,j} = c_j \,.$$

Portanto, usando a primeira parte da proposição anterior, segue o resultado.

Com relação a (ii), usando a parte (i) e o Corolário 2.7, notemos primeiramente que, para λ suficientemente grande,

$$b_{\lambda,J} \in \left(0, \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) S^{\frac{N}{2}}\right) \quad \text{e} \quad b_{\lambda,J} > c_J - \frac{m}{2}\,, \tag{2.59}$$

onde $m := \dfrac{1}{2} \min\limits_{j=1,2} c_j$. Dessa forma, pela Proposição 2.8, o funcional Φ_λ satisfaz $(PS)_{b_{\lambda,J}}$.

Agora vejamos que $b_{\lambda,J}$ é um valor crítico. Para isso, usaremos o Lema da Deformação (Lema A.5).

Suponhamos por contradição que $b_{\lambda,J}$ não é um valor crítico para Φ_λ. Então, para $\overline{\varepsilon} = m/2$, o Lema da Deformação nos fornece $\varepsilon \in (0, m/2)$ e $\eta \in C([0,1] \times \mathcal{H}_\lambda, \mathcal{H}_\lambda)$ tais que

$$\eta(1,u) = u\,, \quad \forall\, u \in \mathcal{H}_\lambda \ \text{ tal que } \ \Phi_\lambda(u) \notin \left[\, b_{\lambda,J} - \frac{m}{2}\,,\, b_{\lambda,J} + \frac{m}{2}\,\right] \tag{2.60}$$

e

$$\eta(1, \Phi_\lambda^{b_{\lambda,J}+\varepsilon}) \subset \Phi_\lambda^{b_{\lambda,J}-\varepsilon}\,, \tag{2.61}$$

onde, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, Φ_λ^α denota o conjunto $\{u \in \mathcal{H}_\lambda\,;\, \Phi_\lambda(u) \leq \alpha\}$.

Pela definição de $b_{\lambda,J}$, existe $g \in \Gamma$ satisfazendo

$$\max_{s \in [1/R^2,1]^2} \Phi_\lambda(g(s)) \leq b_{\lambda,J} + \varepsilon\,. \tag{2.62}$$

Definamos então a aplicação $h : [1/R^2, 1]^2 \to \mathcal{H}_\lambda$ por

$$h(s) = \eta(1, g(s))\,, \ \ \forall\, s \in [1/R^2, 1]^2\,.$$

Afirmamos que $h \in \Gamma$. De fato, h é contínua por construção. Agora tomemos $s \in \partial([1/R^2,1]^2)$, digamos $s = (s_1, s_2)$, onde, sem perder a generalidade, $s_1 \in \{1/R^2, 1\}$.

Então, por (2.56) e (2.59), temos, caso $s_1 = 1/R^2$,

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(g(s)) &= \Phi_\lambda\left(\frac{1}{R}w_1 + s_2 R w_2\right) \\
&= I_1\left(\frac{1}{R}w_1\right) + I_2(s_2 R w_2) \\
&\leq \frac{c_1}{2} + c_2 = c_J - \frac{c_1}{2} \leq c_J - m \\
&< b_{\lambda,J} - \frac{m}{2}\,.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $s = (1, s_2)$, então

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(g(s)) &= \Phi_\lambda\left(R w_1 + s_2 R w_2\right) \\
&= I_1\left(R w_1\right) + I_2(s_2 R w_2) \\
&\leq c_2 < c_J - m \\
&< b_{\lambda,J} - \frac{m}{2}\,.
\end{aligned}$$

Assim sendo,

$$\Phi_\lambda(g(s)) \notin \left[\, b_{\lambda,J} - \frac{m}{2}\,,\, b_{\lambda,J} + \frac{m}{2}\,\right]\,,$$

para todo $s \in \partial([1/R^2, 1]^2)$, e daí, por (2.60),

$$h(s) = \eta(1, g(s)) = g(s) = \gamma_0(s)\,, \quad \forall\, s \in \partial([1/R^2, 1]^2)\,,$$

donde $h \in \Gamma$. Portanto

$$b_{\lambda,J} \leq \max_{s\in[1/R^2,1]^2} \Phi_\lambda(h(s))\,.$$

Porém, por (2.61) e (2.62), devemos ter também

$$\max_{s\in[1/R^2,1]^2} \Phi_\lambda(h(s)) \leq b_{\lambda,J} - \varepsilon\,,$$

o que é uma contradição. Logo $b_{\lambda,J}$ é um valor crítico de Φ_λ, para λ suficientemente grande.

■

2.4 Demonstração do Teorema 2.1

Para demonstrar o Teorema 2.1, precisamos encontrar uma solução não-negativa u_λ do problema (P_λ) para λ suficientemente grande, que se aproxime de uma solução de energia mínima do problema 2.1 em cada Ω_j, $j \in J$, e de zero em $\mathbb{R}^N \backslash \Omega_J$. Para isso, apresentaremos duas proposições que, juntamente com os resultados mostrados até aqui, garantem a validade do Teorema 2.1.

Sejam o número

$$M = 1 + \sum_{j \in J} \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)^{-1} c_j}\,,$$

e a bola fechada de centro em $0 \in \mathcal{H}_\lambda$ e raio $M+1$,

$$\overline{B}_{M+1}(0) = \{u \in \mathcal{H}_\lambda \,;\, ||u||_\lambda \leq M+1\}\,.$$

Dado $\mu > 0$, definamos também

$$D_\mu^\lambda = \Big\{u \in \overline{B}_{M+1}(0) \,;\, ||u||_{\lambda, \mathbb{R}^N \backslash \Omega'_J} \leq \mu\,,\, |\Phi_{\lambda,j}(u) - c_j| \leq \mu\,,\, \forall\, j \in J\Big\}\,.$$

Lembramos que $\Phi_\lambda^{c_J}$ denota o conjunto

$$\Phi_\lambda^{c_J} = \{u \in \mathcal{H}_\lambda \,;\, \Phi_\lambda(u) \leq c_J\}\,.$$

Notemos que

$$\omega = w_1 + w_2 \in D_\mu^\lambda \cap \Phi_\lambda^{c_J}\,,$$

para todo $\mu > 0$, e daí $D_\mu^\lambda \cap \Phi_\lambda^{c_J} \neq \emptyset$.

Antes de prosseguirmos, fixemos $\mu > 0$ tal que

$$\mu < \frac{1}{3} \min_{j=1,2} c_j\,.$$

Os resultados que mostraremos agora são versões, respectivamente, das Proposições 1.15 e 1.16 do capítulo anterior, e uma vez que suas demonstrações seguem os mesmos argumentos das primeiras, não as faremos.

Proposição 2.14 *Com $\mu > 0$ fixado acima, existem $\sigma_0 > 0$ e $\Lambda_* \geq 1$, independentes de λ, tais que*

$$||\Phi'_\lambda(u)||_\lambda^* \geq \sigma_0$$

para todo $u \in \left(D_{2\mu}^\lambda \backslash D_\mu^\lambda\right) \cap \Phi_\lambda^{c_J}$ e todo $\lambda \geq \Lambda_*$.

Proposição 2.15 *Sejam μ fixado anteriormente e $\Lambda_* \geq 1$ a constante dada pela Proposição 2.14. Então, para $\lambda \geq \Lambda_*$ existe uma solução positiva u_λ do problema (P_λ) com $u_\lambda \in D_\mu^\lambda \cap \Phi_\lambda^{c_J}$.*

Agora demonstraremos o resultado principal deste capítulo, o Teorema 2.1

Demonstração do Teorema 2.1:

Seja $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência arbitrária tal que $\lambda_n \geq \Lambda_*$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. Usando a Proposição 2.15, obtemos uma sequência $(u_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_{\lambda_n}$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_{\lambda_n} \in D_\mu^{\lambda_n} \cap \Phi_{\lambda_n}^{c_J}$ é uma solução não-negativa do problema (P_λ), com $\lambda = \lambda_n$.

Pela Proposição 2.9, podemos extrair uma subsequência, que também denotaremos por $(u_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $u_{\lambda_n} \to u \in H_0^1(\Omega_J)$ fortemente em $H^1(\mathbb{R}^N)$, onde o limite u é uma solução não-negativa de (P_j),

$$||u_{\lambda_n}||^2_{\lambda_n,\mathbb{R}^N\setminus\Omega_J'} \to 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{\lambda_n,j}(u_{\lambda_n}) = c_j\,, \tag{2.63}$$

para $j = 1, 2$, onde o último limite é obtido usando argumentos análogos aos explorados na Proposição 1.15 e que u_{λ_n} pertence ao conjunto $D_\mu^{\lambda_n}$, para todo n.

Observemos que as convergências acima não dependem da sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ escolhida inicialmente. Além disso, ainda como resultado da Proposição 2.9, temos $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N\setminus\Omega_J$ e, de (2.63), $u\big|_{\Omega_j}$ é solução de energia mínima de (P_j), para $j = 1, 2$, uma vez que

$$\Phi_{\lambda,j}(u) = \lim_{n\to\infty} \Phi_{\lambda,j}(u_{\lambda_n}) = c_j\,.$$

Portanto, fica provado o Teorema 2.1.

■

Apêndice A

A.1 Operadores de Nemytskii

Esta seção foi baseada no segundo capítulo de de Figueiredo [16].

Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 1$, e o conjunto

$$\mathcal{M}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}\,;\, u\,\text{é Lebesgue mensurável}\}.$$

Uma função $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada *função de Carathéodory* se:

(i) para cada $s \in \mathbb{R}$ fixo, a função $x \mapsto f(x, s)$ é Lebesgue mensurável em Ω;

(ii) para $x \in \Omega$ fixado (quase sempre), a função $s \mapsto f(x, s)$ é contínua.

Sobre as funções de Carathéodory, temos a seguinte propriedade:

Teorema A.1 *Seja f uma função de Carathéodory. Para todo $u \in \mathcal{M}(\Omega)$, a função $x \in \Omega \mapsto f(x, u(x)) \in \mathbb{R}$ é mensurável.*

Demonstração:

Fixemos arbitrariamente $u \in \mathcal{M}(\Omega)$ e seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções simples convergindo quase sempre para u (ver Lema A.2 a seguir).

Pela natureza de f, cada função $f(x, u_n(x))$ é Lebesgue mensurável e a sequência $(f(x, u_n(x)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge quase sempre para $f(x, u(x))$. Dessa forma, como o limite pontual de funções mensuráveis é uma função mensurável, segue o resultado.

$\blacksquare$

Lema A.2 *Se f é uma função não-negativa mensurável, então existe uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções mensuráveis tal que:*

(i) $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$, *para todo* $x \in \mathbb{R}^N, n \in \mathbb{N}$;

(ii) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$, *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$;

(iii) *Cada* φ_n *é uma função simples.*

Para uma demonstração do resultado anterior, ver Bartle [8], Lema 2.11.

Tendo em vista o teorema anterior, dada uma função de Carathéodory f, definimos o *Operador de Nemytskii* $N_f : \mathcal{M}(\Omega) \to \mathcal{M}(\Omega)$, que associa a cada função mensurável $u \in \mathcal{M}(\Omega)$ uma função $N_f(u)$, também mensurável, dada por

$$N_f(u)(x) = f(x, u(x)), \quad \forall\, x \in \Omega\,.$$

Dentre as várias propriedades interessantes que os operadores de Nemytskii possuem, neste trabalho usamos a seguinte:

Teorema A.3 *Seja f uma função de Carathéodory. Suponha que existam uma constante $c > 0$, uma função $b \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$, e $r > 0$ tais que*

$$|f(x,s)| \leq c|s|^r + b(x)\,, \quad \forall\,(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}\,. \tag{A.1}$$

Então:

(i) N_f *aplica* $L^{qr}(\Omega)$ *em* $L^q(\Omega)$;

(ii) N_f *é contínua e limitada (isto é, aplica conjuntos limitados em conjuntos limitados).*

Demonstração:

Mostremos que vale o ítem (a). De fato, seja $u \in L^{qr}(\Omega)$. Usando a desigualdade e Minkowski em (A.1) obtemos

$$|N_f(u)|_{q,\Omega} \leq c\,|(|u|^r)|_{q,\Omega} + |b|_{q,\Omega} = c|u|^r_{qr,\Omega} + |b|_{q,\Omega}\,,$$

donde segue o resultado e, também, a limitação de N_f.

Para mostrarmos o ítem (b), tomemos uma sequência qualquer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^{qr}(\Omega)$ que converge para alguma $u \in L^{qr}(\Omega)$ e concluamos que $N_f(u_n) \to N_f(u)$ em $L^q(\Omega)$.

Dada uma subsequência qualquer de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, existe uma subsequência desta (que continuaremos a denotar por $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) satisfazendo, para alguma $h \in L^{qr}(\Omega)$,

$$|u_n(x)| \leq h(x)\,, \quad \forall\, x \in \Omega\,,$$

e

$$u_n(x) \to u(x) \ \text{ quase sempre em } \Omega\,.$$

Assim, por (A.1) e pela natureza de f,

$$|N_f(u_n(x))| \leq (\, c|h(x)|^r + b(x)\,) \in L^q(\Omega)$$

e

$$N_f(u_n(x)) \to N_f(u(x)) \ \text{ quase sempre em } \Omega\,,$$

donde, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$N_f(u_n(x)) \to N_f(u(x)) \ \text{ em } L^q(\Omega)\,.$$

Acabamos de mostrar que toda subsequência de $(N_f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente, o que implica na convergência da própria sequência. Segue então o ítem (b) e a validade do teorema.

$\blacksquare$

A.2 O Teorema de Brezis-Lieb

Nesta seção enunciamos o principal teorema presente em Brezis & Lieb [14], onde encontra-se a demonstração.

Teorema A.4 (Brezis-Lieb) *Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Suponha que existam $f \in L^p(\Omega)$ tal que*

$$f_n \to f \ \textit{ quase sempre em } \mathbb{R}^N$$

e $C > 0$ tal que

$$|f_n|_{p,\Omega} \leq C\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Então temos

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ |f_n|^p_{p,\Omega} - |f_n - f|^p_{p,\Omega} \right\} = |f|^p_{p,\Omega}\,.$$

A.3 Teorema do Passo da Montanha

Nosso objetivo nesta seção, que foi baseada em Rabinowitz [27], é demonstrar uma versão do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz.

Comecemos por algumas definições.

Sejam $(E, ||.||_E)$ um espaço de Banach e um funcional $\Phi : E \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(E, \mathbb{R})$. Dizemos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ é uma *sequência de Palais-Smale no nível* $c \in \mathbb{R}$ ou, resumidamente, *sequência* $(PS)_c$ *do funcional* Φ, se satisfaz

$$\Phi(u_n) \to c$$

e

$$\Phi'(u_n) \to 0 \;\text{ em } E'.$$

Diz-se também que o funcional Φ satisfaz a *Condição Palais-Smale no nível* $c \in \mathbb{R}$ ou, simplesmente, *condição* $(PS)_c$, se qualquer sequência $(PS)_c$ de Φ admite uma subsequência convergente.

Vejamos agora uma definição que diz respeito à "geometria" do funcional Φ.

O funcional Φ tem a geometria do Passo da Montanha se satisfaz:

(i) $\Phi(0) = 0$;

(ii) Existem $\alpha, r > 0$ satisfazendo, para todo $u \in E$,

(1) $\Phi(u) \geq 0$, se $||u||_E \leq r$,

(2) $\Phi(u) \geq \alpha$, se $||u||_E = r$;

(iii) Existe $\varphi \in E$ tal que

$$||\varphi||_E > r \quad \text{e} \quad \Phi(\varphi) < 0\,.$$

Desse modo, se o funcional Φ tem a geometria do Passo da Montanha, o número

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \Phi(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E)\,;\, \gamma(0) = 0\,, \Phi(\gamma(1)) \leq 0\},$$

está bem definido. Este valor é chamado *nível minimax* do Teorema do Passo da Montanha associado ao funcional Φ.

Antes de enunciar e provar o resultado que intitula esta seção, vejamos um resultado que nos auxiliará na sua demonstração, uma versão simplificada do Lema da Deformação.

Lema A.5 (Lema da Deformação) *Sejam $(E, ||.||_E)$ um espaço de Banach, $c \in \mathbb{R}$ e $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição $(PS)_c$. Sejam também os conjuntos*

$$K = \{u \in E\,;\, \Phi(u) = c \text{ e } \Phi'(u) = 0\}$$

e, dado $s \in \mathbb{R}$,

$$A_s = \{u \in E\,;\, \Phi(u) \leq s\}\,.$$

Se c não é um valor crítico de Φ, isto é, se não existe $u \in E$ tal que $\Phi'(u) = 0$ com $\Phi(u) = c$, então, dado $\tilde{\varepsilon} > 0$, existem $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$ e $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tais que:

(i) $\eta(1, u) = u$, *se* $\Phi(u) \notin [c - \tilde{\varepsilon}, c + \tilde{\varepsilon}]$;

(ii) $\eta(1, A_{c+\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}$.

A demonstração do resultado acima encontra-se em Rabinowitz [27].

Teorema A.6 (Teorema do Passo da Montanha) *Sejam $(E, ||.||_E)$ um espaço de Banach e um funcional $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ com a geometria do Passo da Montanha e satisfazendo a condição de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$, onde*

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t))\,,$$

com

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E)\,;\, \gamma(0) = 0\,,\, \Phi(\gamma(1)) < 0\}\,.$$

Então c é um valor crítico de Φ.

Demonstração:

Como dito anteriormente, uma vez que Φ tem a geometria do Passo da Montanha, o nível minimax c está bem definido.

Seja $\gamma \in \Gamma$ qualquer. Então, pela definição do conjunto Γ, devemos ter

$$||\gamma(t)||_E = r, \text{ para algum } t \in [0,1].$$

Dessa forma, por (i),

$$\max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)) \geq \inf_{u \in E\,,\, ||u||_E = r} \Phi(u) \geq \alpha,$$

donde $c \geq \alpha$.

Suponhamos, por contradição, que c não é valor crítico de Φ. Então o Lema A.5 com $\tilde{\varepsilon} = \dfrac{\alpha}{2}$ nos fornece $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$ e $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ satisfazendo as propriedades 1 e 2 do lema anterior.

Tomemos $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)) \leq c + \varepsilon \tag{A.2}$$

e consideremos $\tilde{\gamma} : [0,1] \to E$ dada por

$$\tilde{\gamma} = \eta(1, \gamma(t))\,,\ \forall\, t \in [0,1].$$

Pela natureza de η e γ, temos $\tilde{\gamma} \in C([0,1], E)$. Além disso, como $\gamma(0) = 0$ e

$$\Phi(0) = 0 < \frac{\alpha}{2} \leq c - \tilde{\varepsilon}\,,$$

temos, pelo Lema A.5 (1),

$$\tilde{\gamma}(0) = \eta(1, \gamma(0)) = \gamma(0) = 0. \tag{A.3}$$

Analogamente, como $\Phi(\gamma(1)) < 0$, segue que

$$\tilde{\gamma}(1) = \eta(1, \gamma(1)) = \gamma(1)$$

e daí

$$\Phi(\tilde{\gamma}(1)) = \Phi(\gamma(1)) < 0\,. \tag{A.4}$$

Assim, de (A.3) e (A.4), $\tilde{\gamma} \in \Gamma$ e, pela definição de c,

$$c \leq \max_{t \in [0,1]} \Phi(\tilde{\gamma}(t))\,. \tag{A.5}$$

Por (A.2), $\gamma([0,1]) \subset A_{c+\varepsilon}$, donde, pelo Lema A.5 (2), $\tilde{\gamma}([0,1]) \subset A_{c-\varepsilon}$, isto é,

$$\max_{t \in [0,1]} \leq c - \varepsilon\,,$$

o que contradiz (A.5). Essa contradição é consequência de termos suposto que c não é valor crítico de Φ. Portanto, o teorema é válido.

$\blacksquare$

A.4 A Variedade Nehari

Nosso objetivo nesta seção é, baseando-nos em Willem [30], introduzir e demonstrar alguns resultados sobre a Variedade Nehari.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto limitado com fronteira suave, $(E, <,>_E)$ um espaço de Hilbert satisfazendo a imersão contínua

$$E \hookrightarrow H^1(\Omega)$$

e o funcional $\Phi : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\,||u||_E^2 - \frac{\beta}{q+1}\int_\Omega u_+^{q+1} - \frac{\alpha}{2^*}\int_\Omega u_+^{2^*}\,, \quad \forall\, u \in E\,,$$

onde $||.||_E$ é a norma de E induzida pelo produto interno, $\beta > 0$ e $\alpha \in \{0, 1\}$.

Uma condição necessária para que $u \in E$ seja um ponto crítico do funcional Φ é

$$\Phi'(u)u = 0\,.$$

Esta condição define a *Variedade Nehari*

$$N = \{u \in E\,;\, \Phi'(u)u = 0\,,\, u \neq 0\}\,.$$

Vale ressaltar que, para definirmos a Variedade Nehari, precisamos apenas supor que $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ e $\Phi'(0) = 0$. As propriedades desta variedade que veremos a seguir foram usadas sobre os funcionais $\Phi_{\lambda,\Omega'_j}, I_{\Omega_j}$ e $\Phi_{\lambda,j}, I_j$, presentes no primeiro e segundo capítulos, respectivamente. Este fato justifica as hipóteses adicionais sobre o espaço E, o conjunto Ω e a forma como tomamos o funcional Φ.

Lema A.7 *Para cada $u \in E$ não nulo, existe um único número $t_u > 0$ tal que $t_u u \in N$. Além disso,*

$$\Phi(t_u\, u) = \max_{t \geq 0} \Phi(tu)\,.$$

Demonstração:

Fixemos arbitrariamente $u \in E$, $u \neq 0$. Consideremos a função $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = \Phi(tu) = \frac{t^2}{2}\,||u||_E^2 - t^{q+1}\frac{\beta}{q+1}\int_\Omega u_+^{q+1} - t^{2^*}\frac{\alpha}{2^*}\int_\Omega u_+^{2^*}, \quad \forall\, t \geq 0. \tag{A.6}$$

Primeiramente mostremos que g possui um único ponto crítico.

Notemos que $g \in C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $g(0) = 0$, $g(t) > 0$, para $t > 0$ suficientemente pequeno, e $\lim\limits_{t \to \infty} g(t) = -\infty$. Sob estas circunstâncias, g possui ao menos um ponto crítico positivo, que denotaremos por t_u, satisfazendo

$$g(t_u) = \max_{t \geq 0} g(t),$$

isto é,

$$\Phi(t_u\, u) = \max_{t \geq 0} \Phi(tu).$$

Além disso, observemos que $t_0 > 0$ é ponto crítico de g se, e só se,

$$0 = g'(t_0) = t_0\, ||u||_E^2 - t_0^q \beta \int_\Omega u_+^{q+1} - t_0^{2^*-1} \alpha \int_\Omega u_+^{2^*},$$

o que equivale a

$$||u||_E^2 = t_0^{q-1} \beta \int_\Omega u_+^{q+1} + t_0^{2^*-2} \alpha \int_\Omega u_+^{2^*}.$$

Dessa forma, como a função à direita da igualdade acima é crescente, segue a unicidade do ponto crítico t_u. Por fim, de

$$tg(t) = \Phi'(tu)(tu), \quad \forall\, t \geq 0,$$

temos $t_u u \in N$. Portanto, como $u \in E$ fixado a princípio é arbitrário, segue o resultado para todo $u \in E$.

$\blacksquare$

Para finalizar, definamos

$$\begin{aligned} c_1 &:= \inf_{u \in N} \Phi(u), \\ c_2 &:= \inf_{0 \neq u \in E} \max_{t \geq 0} \Phi(tu), \\ c &:= \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)), \end{aligned}$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E)\,;\, \gamma(0) = 0, \Phi(\gamma(1)) < 0\},$$

e vejamos de que forma esses valores se relacionam.

Teorema A.8 *Com as notações acima, temos*

$$c_1 = c_2 = c > 0.$$

Demonstração:

Primeiramente notemos que, partir do lema anterior, $c_1 = c_2$.

Agora, como

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(tu) = -\infty, \quad \forall\, u \in E,$$

então existe $t_{u,\infty} > 0$ tal que $\Phi(t_{u,\infty}u) < 0$. Assim, a aplicação $\gamma_u : [0,1] \to E$ dada por

$$\gamma_u(t) = t(t_{u,\infty}u), \quad \forall\, t \geq 0,$$

pertence ao conjunto Γ. Logo, devemos ter $c \leq c_2$.

Por fim, observemos que a variedade N separa $E\backslash\{0\}$ em duas componentes, a saber,

$$N_+ := \{u \in E\,;\, \Phi'(u)u > 0\} \quad \text{e} \quad N_- := \{u \in E\,;\, \Phi'(u)u < 0\}.$$

Vejamos também que, como $E \hookrightarrow H^1(\Omega)$ continuamente, então $E \hookrightarrow L^t(\Omega)$ continuamente, para $t \in [1, 2^*]$, com constante de imersão $C_t = C(t)$. Dessa forma

$$\begin{aligned} \Phi'(u)u &\geq ||u||_E^2 - \beta\, C_{q+1}^{q+1}||u||_E^{q+1} - \alpha\, C_{2^*}^{2^*}||u||_E^{2^*} \\ &> 0 \end{aligned}$$

para $||u||_E$ suficientemente pequeno. Portanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$N_+ \supset \big(B(0)_\varepsilon\backslash\{0\}\big).$$

Além disso, usando as notações do lema anterior,

$$\Phi'(tu)u \geq 0, \quad \forall\, t \in [0, t_u],\ \forall\, u \in E\backslash\{0\}, \tag{A.7}$$

pois se existissem $u \in E$ e $\tilde{t} \in [0, t_u]$ tais que $\Phi'(\tilde{t}u)u < 0$, então a função g definida em (A.6) associada a u possuiria dois pontos críticos, o que não pode ocorrer. Um argumento análogo nos permite concluir que

$$t_u > 1, \quad \forall\, u \in N_+. \tag{A.8}$$

Assim,

$$\Phi(u) > 0, \quad \forall\, u \in N_+.$$

Com efeito, tomemos $u \in N_+$ arbitrariamente. Considerando novamente a função g definida em (A.6), temos, por (A.7),

$$g'(t) = \Phi'(tu)u \geq 0, \quad \forall\, t \in [0, t_u],$$

donde g é não-decrescente em $[0, t_u]$ e daí, por (A.8),

$$\Phi(u) = g(1) \geq 0.$$

Consequentemente,

$$\Phi(u) \geq 0, \quad \forall\, u \in N_+,$$

e, portanto, todo caminho $\gamma \in \Gamma$ deve interceptar N. Dessa forma, $c \geq c_1$, e o resultado está demonstrado.

■

A.5 Os Espaços $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}_\lambda$

Nesta seção demonstraremos o resultado que usamos nas Proposições 1.8 e 2.8, a saber, que $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}_\lambda$. Enunciaremos e provaremos o resultado apenas para o espaço $\mathcal{H}$, o qual consideraremos munido da norma

$$||u||_\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u^2, \quad \forall\, u \in \mathcal{H},$$

que também é norma do espaço $\mathcal{H}_\lambda$. Assim, a demonstração deste resultado para o espaço $\mathcal{H}_\lambda$ é inteiramente análoga.

Lema A.9 *O espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $\mathcal{H}$.*

Demonstração:

A prova será feita em duas partes. Primeiramente mostraremos que toda função de $\mathcal{H}$ pode ser aproximada por funções deste espaço com suporte compacto e, posteriormente, que toda função de $\mathcal{H}$ com suporte compacto é limite de funções de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

1^o *Parte: Toda função de $\mathcal{H}$ pode ser aproximada por funções deste espaço com suporte compacto.*

Fixemos $u \in \mathcal{H}$ de forma arbitrária e tomemos $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ satisfazendo

$$\varphi\big|_{B_1(0)} \equiv 1, \quad \varphi\big|_{B_2(0)^c} \equiv 0 \quad \text{e} \quad |\nabla\varphi(x)| \leq 3, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Consideremos a sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ dada por

$$\varphi_n(x) = \varphi\left(\frac{x}{n}\right), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Então

$$\varphi_n\big|_{B_1(0)} \equiv 1, \quad |\nabla\varphi_n(x)| \leq \frac{3}{n} \quad \text{e} \quad u\varphi_n \in \mathcal{H} \text{ tem suporte compacto}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Agora tomemos a sequência de funções de suporte compacto $(u\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$. Afirmamos que $u\varphi_n \to u$ em $\mathcal{H}$. De fato, basta observar que, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$(\lambda V(x) + Z(x))(u\varphi_n)^2 \to (\lambda V(x) + Z(x))u^2 \ \text{ em } \ L^1(\mathbb{R}^N)$$

e, para todo $1 \leq j \leq N$,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(u\varphi_n) = u\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_j} + \varphi_n\frac{\partial u}{\partial x_j} \to \frac{\partial u}{\partial x_j} \ \text{ em } \ L^2(\mathbb{R}^N),$$

ou seja,

$$\nabla(u\varphi_n) \to \nabla u \ \text{ em } \ (L^2(\mathbb{R}^N))^N,$$

donde segue a conclusão desta primeira parte, já que $u \in \mathcal{H}$ é qualquer.

2^o Parte: Toda função de $\mathcal{H}$ com suporte compacto é limite de funções de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Fixemos qualquer $u \in \mathcal{H}$ com suporte compacto e seja $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ uma sequência regularizante, isto é,

$$\operatorname{supp}\rho_n \subset B_{\frac{1}{n}}(0) \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n = 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Tomemos a sequência $(\rho_n * u) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ (vale lembrar que a convolução de funções de suporte compacto tem suporte compacto) e fixemos $R > 0$ tal que

$$\operatorname{supp}(\rho_n * u) \subset B_R(0), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Afirmamos que $\rho_n * u \to u$ em $\mathcal{H}$. Com efeito, notemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N}(\lambda V(x) + Z(x))(\rho_n * u - u)^2\right| \leq |\lambda V + Z|_{\infty, B_R(0)} \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\rho_n * u - u|^2 = 0,$$

pois $\rho_n * u \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e, a partir das propriedades da convolução,

$$\nabla(\rho_n * u) = \rho_n * \nabla u \to \nabla u \ \text{ em } L^2(\mathbb{R}^N).$$

Dessa forma, como $u \in \mathcal{H}$ de suporte compacto é arbitrária, vale a conclusão desta parte. Portanto, tendo em vista a primeira e a segunda parte, vale o resultado.

■

A.6 Segundo Lema de Concentração de Compacidade

Esta seção foi baseada em Lions [24] e Folland [21].

Nesta seção enunciaremos e demonstraremos, em parte, o Segundo Lema de Concentração de Compacidade devido a P.-L. Lions. Para isso, necessitaremos de algumas definições e resultados. Comecemos pelo espaço $C_0(\mathbb{R}^N)$ das funções contínuas que se anulam no infinito e pelo espaço $M(\mathbb{R}^N)$ das medidas de Radon com sinal em $\mathbb{R}^N$.

Seja $f \in C(\mathbb{R}^N)$. Diremos que f *se anula no infinito* se, para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N; |f(x)| \geq \varepsilon\}$ é compacto. Definamos, então, o conjunto

$$C_0(\mathbb{R}^N) = \{f \in C(\mathbb{R}^N); f \text{ se anula no infinito}\}.$$

Claramente temos $C_c(\mathbb{R}^N) \subset C_0(\mathbb{R}^N)$ e, munido da norma do supremo, $C_0(\mathbb{R}^N)$ é um espaço vetorial normado. Mais ainda, pode-se mostrar que $C_0(\mathbb{R}^N)$ é o fecho de $C_c(\mathbb{R}^N)$ com relação à norma do supremo (ver Folland [21], Teorema 4.35) e que este é um espaço separável, como consequência do (ver Lopes [25], Teorema 3.18)

Teorema A.10 *Seja $K \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto compacto. O espaço das funções contínuas sobre K, $C(K)$, é separável.*

Sejam μ uma medida de Borel em $\mathbb{R}^N$ e $A \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto na σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$. A medida μ é chamada *outer regular* em A se

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U); U \supset A, U \text{ aberto}\}$$

e *inner regular* em A se

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K); K \subset A, K \text{ compacto}\}.$$

Mais ainda, uma medida μ que é inner e outer regular nos conjuntos de Borel é chamada *regular*. Uma *medida de Radon* em $\mathbb{R}^N$ é uma medida de Borel que é finita em conjuntos compactos, outer regular em conjuntos de Borel e inner regular em conjuntos abertos. Uma medida μ é uma medida de Radon com sinal se suas variações positiva e negativa são medidas de Radon. Denotaremos por $M(\mathbb{R}^N)$ o espaço das medidas finitas de Radon com sinal em $\mathbb{R}^N$, o qual, munido da norma

$$||\mu||_M = |\mu|(\mathbb{R}^N), \quad \forall\, \mu \in M(\mathbb{R}^N),$$

onde $|\mu|$ é a variação total da medida μ, é um espaço vetorial normado.

Pode-se mostrar que (ver Folland [21], Teorema 7.8)

Teorema A.11 *Toda medida de Borel em $\mathbb{R}^N$ que é finita em conjuntos compactos é regular. Em particular, μ é uma medida de Radon.*

Os espaços $M(\mathbb{R}^N)$ e $C_0(\mathbb{R}^N)$ se relacionam da seguinte forma (ver Folland [21], Teorema 7.17):

Teorema A.12 *Seja $\mu \in M(\mathbb{R}^N)$ e considere o funcional $I_\mu : C_0(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por*

$$I_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^N} f \, \mathrm{d}\mu, \quad \forall\, f \in C_0(\mathbb{R}^N).$$

A aplicação $\mu \mapsto I_\mu$ é um isomorfismo isométrico de $M(\mathbb{R}^N)$ no espaço dual de $C_0(\mathbb{R}^N)$.

Em outras palavras, o espaço das medidas de Radon é o dual do espaço das funções contínuas que se anulam no infinito. Dessa forma, da separabilidade de $C_0(\mathbb{R}^N)$ e pelo teorema anterior, toda sequência limitada em $M(\mathbb{R}^N)$ possui uma subsequência que converge na topologia fraca-* (ver Brezis [12], Corolário III.26).

Vejamos agora duas definições auxiliares. Sejam μ e ν medidas em um mesmo espaço mensurável $(X, \mathcal{X})$. A medida μ é dita *absolutamente contínua em relação à medida* ν, se, para todo $E \in \mathcal{X}$ tal que $\nu(E) = 0$, tivermos $\mu(E) = 0$. Neste caso, escrevemos $\mu \ll \nu$. Dizemos também que μ e ν são *mutuamente singulares*, se existem conjuntos disjuntos A e B em $\mathcal{X}$ tais que $X = A \cup B$ e $\mu(A) = \nu(B) = 0$. Neste caso, escrevemos $\mu \perp \nu$.

Outro resultado que será usado adiante é o (ver Folland [21], Teorema 7.10)

Teorema A.13 (Lusin) *Sejam μ uma medida de Radon em $\mathbb{R}^N$ e $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função mensurável que se anula fora de um conjunto de medida finita. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe uma função $\phi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^N; f(x) \neq \phi(x)\}) < \varepsilon.$$

Mais ainda, se f é limitada, então ϕ satisfaz

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\phi(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x)|.$$

Por fim, vejamos o espaço $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Dados $N > 2$ e $1 < p < N$, $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é o fechamento do espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ com relação à norma $||.||_{D^{1,p}} : C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dada por

$$||\varphi||_{D^{1,p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Pode-se mostrar que, a menos de isometria, (ver Alves [3], Apêndice A.1)

$$D^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^N), 1 \leq i \leq N\}.$$

Além disso, $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach reflexivo e separável e valem as imersões $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ e $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^r_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, para $r \in [1, r^*)$, respectivamente, contínua e compacta. Desta última, segue que, usando um argumento de sequência diagonal, se $u_n \rightharpoonup u$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, então $u_n \to u$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$.

O próximo lema é fundamental para a demonstração do Segundo Lema de Concentração de Compacidade.

Lema A.14 *Sejam μ e ν medidas de Radon finitas não-negativas em $\mathbb{R}^N$ tais que, para alguma constante $C_0 \geq 0$,*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^q \, \mathrm{d}\nu\right)^{1/q} \leq C_0 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \tag{A.9}$$

onde $1 \leq p < q \leq +\infty$. Então existem um conjunto enumerável J (finito ou infinito), famílias $\{x_j\}_{j \in J}$ de pontos distintos em $\mathbb{R}^N$ e $\{\nu_j\}_{j \in J} \subset (0, \infty)$ tais que

$$\nu = \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j} \quad e \quad \mu \geq C_0^{-p} \sum_{j \in J} \nu_j^{p/q} \delta_{x_j}.$$

Em particular,

$$\sum_{j \in J} \nu_j^{p/q} < \infty.$$

Demonstração:

Primeiramente, notemos que, pelo Lema A.2 e o Teorema de Lusin (Teorema A.13), com o auxílio de uma sequência regularizante e convolução, mostra-se que a desigualdade (A.9) é válida para toda φ mensurável, limitada, positiva e que se anula fora de um conjunto de medida finita (vale ressaltar que as medidas ν e μ são finitas). Dessa forma, temos $\nu \ll \mu$, pois, dado um conjunto E na σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ tal que $\mu(E) = 0$, tomando $\varphi \equiv \chi_E$ em (A.9), obtemos

$$\nu(E) \leq {C_0}^q \mu(E)^{q/p} = 0. \tag{A.10}$$

Aplicando o Teorema de Decomposição de Medidas de Lebesgue (ver Bartle [8], Teorema 8.11) às medidas μ e ν, existem medidas α e β satisfazendo

$$\alpha \ll \nu \quad \text{e} \quad \beta \perp \nu$$

tais que

$$\mu = \alpha + \beta. \tag{A.11}$$

Além disso, de $\alpha \ll \nu$, pelo Teorema de Radon-Nikodým (ver Bartle [8], Teorema 8.9), existe uma função não-negativa $g \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}, \nu)$, única quase sempre, tal que

$$\alpha = g\nu,$$

donde podemos reescrever (A.11) como

$$\mu = g\nu + \beta. \tag{A.12}$$

Mais ainda, pelo fato de $g\nu \perp \beta$, temos, a partir da desigualdade (A.9),

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^q \, \mathrm{d}\nu\right)^{1/q} \leq C_0 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p g \, \mathrm{d}\nu\right)^{1/p}, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

e, claramente, $\mu \geq g\nu$. Dito isto, suporemos, sem perda de generalidade, que a medida β é identicamente nula. Suporemos também que

$$g(x) < +\infty, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N,$$

uma vez que $g \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}, \nu)$ e daí $\nu(\{x \in \mathbb{R}^N; g(x) = +\infty\}) = 0$.

Consideremos os conjuntos

$$G_k = \{x \in \mathbb{R}^N; k - 1 \leq g(x) < k\}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

e as medidas finitas não-negativas de Radon em $\mathbb{R}^N$

$$\nu_k = g^\theta \chi_{G_k} \nu, \quad \text{onde } \theta = q/(q-p). \tag{A.13}$$

Nosso objetivo é mostrar que, para cada $k \in \mathbb{N}$, as medidas ν_k são dadas por uma soma finita de massas de Dirac e, usando este fato, deduzir que as medidas $\chi_{G_k}\nu$, para todo $k \in \mathbb{N}$, também têm esta propriedade donde, tomando a série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \chi_{G_k}\nu$, concluir que ν admite a representação desejada.

Seja $k \in \mathbb{N}$ qualquer. Para mostrarmos a representação de ν_k, tomemos em (A.9) funções φ da forma

$$\varphi = g^{\theta/q} \chi_{G_k} \psi,$$

onde ψ é uma função arbitrária mensurável, limitada, não-negativa e que se anula fora de um conjunto de medida finita. Daí, como

$$\left(g^{\theta/q}\chi_{G_k}\right)^q \nu = g^{\theta}\chi_{G_k}\nu = \nu_k,$$

e

$$\begin{aligned}\left(g^{\theta/q}\chi_{G_k}\right)^p \mu &= g^{\theta p/q} g \chi_{G_k}\nu \\ &= g^{\frac{\theta p}{q}+1}\chi_{G_k}\nu \\ &= g^{\theta}\chi_{G_k}\nu = \nu_k,\end{aligned}$$

segue que, para toda ψ,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi|^q \, \mathrm{d}\nu_k\right)^{1/q} \leq C_0 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi|^p \, \mathrm{d}\nu_k\right)^{1/p},$$

donde concluímos que, tomando $\psi \equiv \chi_E$, para $E \in \mathcal{B}$ qualquer,

$$\nu_k(E) \leq C_0 \nu_k(E)^{q/p}, \quad \forall\, E \in \mathcal{B}.$$

Portanto, dado $E \in \mathcal{B}$, tem-se $\nu_k(E) = 0$ ou $\nu_k(E) \geq {C_0}^{-\theta q/p} =: \rho$. Assim, tendo em vista que, para $x \in \mathbb{R}^N$ arbitrário, valem as igualdades

$$\nu_k(\{x\}) = \nu_k\left(\bigcap_{\varepsilon \downarrow 0} B_\varepsilon(x)\right) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \nu_k(B_\varepsilon(x)),$$

devemos ter, para cada $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\nu_k(\{x\}) \geq \rho \quad \text{ou} \quad \text{existe } \varepsilon_x = \varepsilon(x) > 0 \text{ tal que } \nu_k(B_{\varepsilon_x}(x)) = 0.$$

Logo, como ν_k é uma medida finita, um conjunto finito de índices J_k e de pontos $S_k := \{x_j\}_{j \in J_k} \subset \mathbb{R}^N$ tais que

$$\nu_k(\{x_j\}) \geq \rho, \ \forall\, j \in J_k \quad \text{e} \quad \nu_k(B_{\varepsilon_x}(x)) = 0, \ \forall\, x \notin S_k, \tag{A.14}$$

isto é, temos a representação

$$\nu_k = \sum_{j \in J_k} \nu_j \delta_{x_j},$$

onde $\nu_j = \nu_k(\{x_j\})$, para $j \in J_k$. De fato, seja o conjunto $\mathcal{O} = \mathbb{R}^N \backslash S_k$. Dado um subconjunto compacto $K \subset \mathcal{O}$ arbitrário, $(B_{\varepsilon_x}(x))_{x \in K}$ é uma cobertura aberta para

K, donde, da compacidade de K, podemos extrair uma subcobertura finita formada por bolas cujos centros pertencem ao conjunto $\mathcal{O}$. Dessa forma, por (A.14), tem-se $\nu_k(K) = 0$ e, por ν_k ser uma medida de Radon, $\nu_k(\mathcal{O}) = 0$, já que K é arbitrário. Assim, fica mostrada a representação de ν_k. Mostremos agora que essa representação nos fornece a afirmação sobre ν.

Primeiramente, observemos que, se $x \in \mathbb{R}^N$ é tal que $\nu(\{x\}) > 0$, então $g(x) > 0$. De fato, se $\nu(\{x\}) > 0$, então, como $\nu \ll \mu$, devemos ter $\mu(\{x\}) > 0$. Mais ainda, por (A.12) e usando que $g\nu \perp \beta$,

$$0 < \mu(\{x\}) = g(x)\nu(\{x\}) + \beta(\{x\}) = g(x)\nu(\{x\}),$$

donde segue a conclusão. Dessa forma, temos, a partir da representação de ν_k,

$$\chi_{G_k}\nu = \sum_{j\in J_k} \frac{\nu_j}{(g(x_j))^\alpha}\delta_{x_j}.$$

Por fim, para concluirmos a representação de ν, basta notarmos que, pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \nu\chi_{G_k} = \nu,$$

donde

$$\nu = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{j\in J_k} \frac{\nu_j}{(g(x_j))^\alpha}\delta_{x_j}.$$

Agora, fazendo $\nu_j = \frac{\nu_j}{(g(x_j))^\alpha}$ e observando que a união $S := \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} S_k$ é disjunta, pois os conjuntos G_k são dois a dois disjuntos, e é enumerável (finito ou infinito), temos

$$\nu = \sum_{j\in J} \nu_j\delta_{x_j},$$

onde $J := \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} J_k$ é, sem perda de generalidade, uma união disjunta, isto é, ν é representada por uma soma, no máximo enumerável, de massas de Dirac. Mais ainda, a partir de (A.10),

$$\mu \geq C_0^{-p}\sum_{j\in J} \nu_j^{p/q}\delta_{x_j}.$$

■

Agora estamos prontos para enunciar e demonstrar o

Lema A.15 (Segundo Lema de Concentração de Compacidade) *Seja* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência limitada em* $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$*, com* $1 < p < N$*, tal que*

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \quad \text{em} \quad D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ |u_n|^{p^*} &\overset{*}{\rightharpoonup} \nu \quad \text{em} \quad M(\mathbb{R}^N) \\ |\nabla u_n|^p &\overset{*}{\rightharpoonup} \mu \quad \text{em} \quad M(\mathbb{R}^N) \end{aligned}$$

onde $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ν *e* μ *são medidas finitas não-negativas em* $\mathbb{R}^N$*. Então*

(i) Existem um conjunto finito J*, famílias* $\{x_j\}_{j\in J}$ *de pontos distintos em* $\mathbb{R}^N$ *e* $\{\nu_j\}_{j\in J}$ *em* $(0,\infty)$ *tais que*

$$\nu = |u|^{p^*} + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j} \, .$$

(ii) Além disso,

$$\mu \geq |\nabla u_n|^p + \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j}$$

para algum μ_j *satisfazendo*

$$\mu_j \geq S \nu_j^{p/q}, \quad \forall\, j \in J,$$

onde S *é a melhor constante para a imersão contínua* $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$*.*

(iii) Mais ainda, se $u \equiv 0$ *e* $\mu(\mathbb{R}^N) \leq S\left(\nu(\mathbb{R}^N)\right)^{p/q}$*, então* J *é unitário e*

$$\nu = \gamma \delta_{x_0} = (S\gamma^{p/q})^{-1} \mu \, ,$$

para alguns $x_0 \in \mathbb{R}^N$ *e* $\gamma \geq 0$*.*

Dem.:

Como dito a princípio, não demonstraremos a terceira parte do lema, uma vez que não a usaremos.

Primeiramente mostraremos o resultado para o caso em que o limite fraco da sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é identicamente nulo, isto é, $u \equiv 0$, através da aplicação do Lema A.14. Para isso, devemos mostrar que as medidas ν e μ satisfazem uma igualdade semelhante a (A.9), a saber,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{p^*} \, \mathrm{d}\nu\right)^{1/p^*} \leq S^{-1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}. \tag{A.15}$$

Sejam $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ arbitrária e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto compacto contendo o suporte de φ. Então $\varphi u_n \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e, da imersão contínua $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{p^*}|u_n|^{p^*}\,\mathrm{d}x\right)^{1/p^*} \leq S^{-1/p}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\varphi u_n)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}. \tag{A.16}$$

Observemos que, como $|u_n|^{p^*} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu$ por hipótese, então

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{p^*}|u_n|^{p^*}\,\mathrm{d}x\right)^{1/p^*} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{p^*}\,\mathrm{d}\nu\right)^{1/p^*}. \tag{A.17}$$

Além disso, pela Desigualdade Triangular,

$$\begin{aligned}\left|\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\varphi u_n)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} - \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi\nabla u_n|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\right| &= \Big||\nabla(\varphi u_n)|_{p,\Omega} - |\varphi\nabla u_n|_{p,\Omega}\Big| \\ &\leq |u_n\nabla\varphi|_{p,\Omega},\end{aligned} \tag{A.18}$$

e, da imersão compacta $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$,

$$\lim_{n\to\infty}|u_n\nabla\varphi|_{p,\Omega} \;\leq\; |\nabla\varphi|_{\infty,\Omega}\lim_{n\to\infty}|u_n|_{p,\Omega} \;=\; 0.$$

Portanto, passando ao limite $n \to \infty$ em (A.18), obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\varphi u_n)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}. \tag{A.19}$$

Assim, tendo em vista (A.17) e (A.19) e tomando o limite $n \to \infty$ em (A.16), obtemos (A.15). Dessa forma, se $u \equiv 0$, o resultado segue a partir do Lema A.14.

Suponhamos agora que o limite $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ não é identicamente nulo. Consideremos, então, a sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dada por $v_n = u_n - u$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então

$$v_n \rightharpoonup 0 \qquad \text{em} \qquad D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

e, além disso, como o espaço $M(\mathbb{R}^N)$ é um espaço separável e as sequências $(|v_n|^{p^*})_{n\in\mathbb{N}}$, $(|\nabla v_n|^p)_{n\in\mathbb{N}} \subset M(\mathbb{R}^N)$ são limitadas, podemos assumir, sem perda de generalidade, que existem $\nu_0, \mu_0 \in M(\mathbb{R}^N)$ não-negativas tais que

$$|v_n|^{p^*} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu_0 \;\text{ e }\; |\nabla v_n|^p \overset{*}{\rightharpoonup} \mu_0 \;\text{ em }\; M(\mathbb{R}^N).$$

Pelo teorema de Brézis-Lieb temos, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{p^*}|u_n|^{p^*}\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{p^*}|v_n|^{p^*}\,\mathrm{d}x\right) = \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{p^*}|u|^{p^*}\,\mathrm{d}x.$$

Temos também

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^{p^*}|u_n|^{p^*}\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^{p^*}|v_n|^{p^*}\,\mathrm{d}x\right)=\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^{p^*}\,\mathrm{d}\nu-\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^{p^*}\,\mathrm{d}\nu_0.$$

Logo, pela unicidade do limite,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^{p^*}|u|^{p^*}\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^{p^*}\,\mathrm{d}\nu-\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^{p^*}\,\mathrm{d}\nu_0,$$

donde obtemos

$$\nu=|u|^{p^*}+\nu_0$$

e, por conseguinte, a representação (i) de ν a partir da de ν_0.

Para concluir (ii), notemos que, por (A.16),

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^{p^*}|u_n|^{p^*}\,\mathrm{d}x\right)^{1/p^*}S^{1/p} &\le \left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(\varphi u_n)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^p|\nabla\varphi|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^p|\nabla u_n|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p},\end{aligned}$$

para toda $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então, passando ao limite $n\to\infty$ e usando a imersão $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ como anteriormente,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^{p^*}\,\mathrm{d}\nu\right)^{1/p^*}S^{1/p}\le\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p|\nabla\varphi|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p},\qquad\text{(A.20)}$$

para toda $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Seja $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo

$$\phi(0)=1,\quad 0\le\phi\le 1\quad\text{e}\quad\operatorname{supp}\phi\subset B_1(0).$$

Fixemos $\varepsilon>0$ e $j\in J$ quaisquer, onde J é o conjunto de índices da representação (i) de ν, e defina

$$\phi_\varepsilon^j(x)=\phi\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right),\quad\forall\,x\in\mathbb{R}^N.$$

Então, tomando $\varphi\equiv\phi_\varepsilon^j$ em (A.20) , obtemos

$$\begin{aligned}\nu_j^{1/p^*}S^{1/p} &\le \left(\int_{B_\varepsilon(x_j)}|\phi_\varepsilon^j|^{p^*}\,\mathrm{d}\nu\right)^{1/p^*}\\ &\le \mu(B_\varepsilon(x_j))^{1/p}+\left(\int_{B_\varepsilon(x_j)}\varepsilon^{-p}|u|^p\left|(\nabla\phi)\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)\right|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}.\end{aligned}\qquad\text{(A.21)}$$

Agora, pela desigualdade de Hölder,

$$\left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} |u|^p \left|(\nabla\phi)\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leq$$
$$\leq \left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} |u|^{p^*} \mathrm{d}x\right)^{1/p^*} \left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} \left|(\nabla\phi)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^N \mathrm{d}x\right)^{1/N},$$

pois $\frac{1}{p} = \frac{1}{p^*} + \frac{1}{n}$. Logo, podemos reescrever (A.21) como

$$\nu_j^{1/p^*} S^{1/p} \leq \mu(B_\varepsilon(x_j))^{1/p} + C\left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} |u|^{p^*} \mathrm{d}x\right)^{1/p^*}, \tag{A.22}$$

onde

$$C = \varepsilon^{-1}\left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} \left|(\nabla\phi)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^N \mathrm{d}x\right)^{1/N}.$$

Portanto, fazendo $\varepsilon \to 0$ em (A.22),

$$\mu(\{x_j\}) > 0 \qquad \text{e} \qquad \mu \geq S\nu_j^{p/p^*}\delta_{x_j}, \qquad \forall\, j \in J,$$

e daí, como as massas de Dirac são mutuamente singulares,

$$\mu \geq \sum_{j\in J} S\nu_j^{p/p^*}\delta_{x_j} := \mu_1.$$

Para finalizar, sejam $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ uma função não-negativa arbitrária e consideremos o funcional que associa a cada $v \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ o valor $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi|\nabla v|^p \,\mathrm{d}x$. Como este funcional é convexo e contínuo e $u_n \rightharpoonup u$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, temos (ver Brezis [12], Corolário 3.8),

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi|\nabla u|^p \,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \,\mathrm{d}\mu,$$

e, usando o Teorema de Lusin (Teorema A.13) como antes, concluímos que

$$\int_A \varphi|\nabla u|^p \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_A|\nabla u|^p \,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} \chi_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A), \quad \forall\, A \in \mathcal{B},$$

isto é, $\mu \geq |\nabla u|^p$. Dessa forma, como $|\nabla u|^p$ e μ_1 são medidas mutuamente singulares, a representação (ii) segue.

$\blacksquare$

A.7 Regularização de Soluções Fracas e Estimativa na norma $L^\infty(\mathbb{R}^N)$: Casos Subcrítico e Crítico

Nesta seção, baseada em Brezis & Kato [13], apresentamos os resultados que nos auxiliaram na demonstração das Proposições 1.10 e 2.10.

Primeiramente vejamos uma versão de um teorema devido a Agmon [1] presente em Aires [2].

Teorema A.16 *Sejam $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $1 < p < \infty$, e suponha que a função u seja uma solução fraca da equação*

$$-\Delta u = f \;\; em \;\; \mathbb{R}^N .$$

Então, $u \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, dados $\Omega \subset\subset \tilde{\Omega} \subset\subset \mathbb{R}^N$, temos a estimativa

$$||u||_{2,p,\Omega} \leq C \left(|f|_{p,\tilde{\Omega}} + |u|_{p,\tilde{\Omega}} \right) , \tag{A.23}$$

onde $C = C(|\Omega|, |\tilde{\Omega}|, p, N) > 0$.

Vale destacar uma propriedade importantíssima da constante C dada no teorema acima: ela é invariante por translações, uma vez que depende apenas da medida dos conjuntos Ω e $\tilde{\Omega}$. Sendo assim, se $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é uma translação, então podemos reescrever a desigualdade (A.23) como

$$||u||_{2,p,T(\Omega)} \leq C \left(|f|_{p,T(\tilde{\Omega})} + |u|_{p,T(\tilde{\Omega})} \right) .$$

Proposição A.17 *Sejam as funções $a \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$ e $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ com f satisfazendo a seguinte propriedade: para cada $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ não negativa, existe uma função $h \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$f(x, v(x)) \leq (h(x) + C_f)v(x), \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}^N , \tag{A.24}$$

onde $C_f = C(f) \in \mathbb{R}$ é uma constante positiva. Se $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca de

$$-\Delta v + a(x)v = f(x, v) \;\; em \;\; \mathbb{R}^N, \tag{A.25}$$

então $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $2 \leq p < \infty$. Mais ainda, existe uma constante $C_p > 0$ que só depende de p, C_f e h tal que

$$|v|_p \leq C_p||v||.$$

Além disso, se $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazem as hipóteses acima e $h_n \to h$ em $L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$, a sequência $C_{p,n} = C(p, C_f, h_n)$ é limitada.

Vejamos agora um resultado auxiliar.

Lema A.18 *Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *um conjunto qualquer,* $p_0 \geq 1$*, e* $u \in \mathcal{M}(\Omega)$ *tal que* $u \in L^p(\Omega)$*, para todo* $p \geq p_0$*. Se existe* $K > 0$ *tal que*

$$|u|_{p,\Omega} \leq K \quad \forall\, p \geq p_0\,,$$

então $u \in L^\infty(\Omega)$ *e*

$$|u|_{\infty,\Omega} \leq K\,.$$

Demonstração:

De fato, fixemos $\varepsilon > 0$ de forma arbitrária e consideremos o conjunto

$$E = \{x \in \Omega\,;\, |u(x)| \geq K + \varepsilon\}.$$

Mostraremos que a medida de Lebesgue de E é nula, donde seguirá a conclusão do lema.

Primeiramente, observemos que a medida de Lebesgue do conjunto E é finita. Com efeito, se fosse $|\Omega| = \infty$, então não teríamos, por exemplo, $u \in L^1(\Omega)$, o que contradiz a nossa hipótese. Portanto, devemos ter $|\Omega| < \infty$. Além disso, temos, para todo $p \geq p_0$,

$$(K + \varepsilon)^p |E| \leq \int_E |f|^p \leq |f|^p_{p,\Omega} \leq K^p\,,$$

isto é,

$$(K + \varepsilon)|E|^{\frac{1}{p}} \leq K\,.$$

Suponhamos, por contradição, que a medida de E é positiva. Aplicando o limite $p \to \infty$ na desigualdade acima, obtemos

$$(K + \varepsilon) = \lim_{p \to \infty} (K + \varepsilon)|E|^{\frac{1}{p}} \leq K\,,$$

o que é um absurdo. Logo E tem medida de Lebesgue nula e daí

$$|u|_{\infty,\Omega} \leq K\,.$$

■

A partir do último lema, podemos demonstrar o

Lema A.19 *Sejam as funções* $a \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$ *e* $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *satisfazendo:*

(H1) Existe $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$, com $q > 1$, tal que

$$|f(x,s)| \leq h(x)|s|\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N\,, \forall\, s \in \mathbb{R};$$

(H2) Existe uma constante $S_r > 0$ tal que

$$|u|_r^2 \leq S_r \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + a(x)u^2\,,$$

para toda $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^N} a(x)u^2 < \infty$, onde $r > \frac{2q}{q-1}$.

Então existe uma constante $C = C(q, r, |h|_q)$ tal que

$$|v|_\infty \leq C|v|_r\,,$$

para qualquer $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ solução fraca de (A.25). Além disso, se $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazem as hipóteses acima e $(|h_n|_q)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada, a sequência $C_n = C(q, r, |h_n|_q)$ é limitada.

Demonstração:

Seja $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ uma solução arbitrária do problema (A.25). Portanto, v satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla u + a(x)vu = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,v)u\,, \quad \forall\, u \in H^1(\mathbb{R}^N)\,. \tag{A.26}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha > 1$, consideremos os conjuntos

$$A_n = \{x \in \mathbb{R}^N\,;\, |v(x)|^{\alpha-1} \leq n\} \quad \text{e} \quad B_n = \mathbb{R}^N \backslash A_n\,,$$

e defina a sequência de funções $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$v_n = v|v|^{2(\alpha-1)} \text{ em } A_n \;\text{ e }\; v_n = n^2 v \text{ em } B_n\,.$$

Note que $v_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $|v_n(x)| \leq |v(x)|^{2\alpha-1}$ e

$$\nabla v_n = (2\alpha - 1)|v|^{2(\alpha-1)}\nabla v \text{ em } A_n \;\text{ e }\; \nabla v_n = n^2 \nabla v \text{ em } B_n\,.$$

Dessa forma, tomando $v_n \equiv u$ em (A.26),

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla v_n + a(x)vv_n = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,v)v_n\,,$$

donde

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla v_n = (2\alpha - 1)\int_{A_n} |v|^{2(\alpha-1)}|\nabla v|^2 \; + \; n^2 \int_{B_n} |\nabla v|^2\,. \tag{A.27}$$

Agora considere a sequência $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$w_n = v|v|^{\alpha-1} \text{ em } A_n \;\text{ e }\; w_n = nv \text{ em } B_n\,.$$

Observe que $w_n^2 = vv_n \leq |v|^{2\alpha}$, donde

$$0 \leq a(x)w_n^2 = a(x)vv_n \quad \text{em } \mathbb{R}^N\,, \tag{A.28}$$

e

$$\nabla w_n = \alpha|v|^{\alpha-1}\nabla v \text{ em } A_n \;\text{ e }\; \nabla w_n = n\nabla v \text{ em } B_n\,, \tag{A.29}$$

logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 = \alpha^2\int_{A_n} |v|^{2(\alpha-1)}|\nabla v|^2 \;+\; n^2\int_{B_n} |\nabla v|^2\,. \tag{A.30}$$

Por (A.27)-(A.30) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 + a(x)w_n^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v\nabla v_n + a(x)vv_n = (\alpha-1)^2\int_{A_n} |v|^{2(\alpha-1)}|\nabla v|^2\,. \tag{A.31}$$

Temos também, por (A.27) e (A.28),

$$(2\alpha-1)\int_{A_n} |v|^{2(\alpha-1)}|\nabla v|^2 \;\leq \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v\nabla v_n + a(x)vv_n\,. \tag{A.32}$$

Portanto, por (A.31) e (A.32),

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 + a(x)w_n^2 \leq \left[\frac{(\alpha+1)^2}{2\alpha-1} + 1\right]\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v\nabla v_n + a(x)vv_n\,,$$

donde temos, já que v é solução de (A.25) e $\alpha > 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 + a(x)w_n^2 \;&\leq\; \frac{\alpha^2}{2\alpha-1}\int_{\mathbb{R}^N} f(x,v)v_n \\
&\leq\; \alpha^2\int_{\mathbb{R}^N} f(x,v)v_n\,.
\end{aligned}$$

Por $(H2)$, $(H1)$ e pela definição de w_n, temos, usando a estimativa acima,

$$\begin{aligned}
\left[\int_{A_n} |w_n|^r\right]^{\frac{2}{r}} \;&\leq\; \left[\int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^r\right]^{\frac{2}{r}} \\
&\leq\; S_r\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 + a(x)w_n^2 \\
&\leq\; S_r\alpha^2\int_{\mathbb{R}^N} h(x)vv_n \\
&\leq\; S_r\alpha^2\int_{\mathbb{R}^N} h(x)w_n^2\,.
\end{aligned}$$

Para $q_1 = \frac{q}{q-1}$, segue que, pela desigualdade de Hölder,

$$\left[\int_{A_n} |w_n|^r\right]^{\frac{2}{r}} \leq S_r \alpha^2 |h|_q \left[\int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{2q_1}\right]^{\frac{1}{q_1}}$$

e consequentemente, pela definição de w_n,

$$\left[\int_{A_n} |v|^{r\alpha}\right]^{\frac{2}{r}} \leq S_r \alpha^2 |h|_q \left[\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2q_1\alpha}\right]^{\frac{1}{q_1}}.$$

Portanto, passando ao limite e usando o Teorema da Convergência Monótona,

$$|v|_{r\alpha}^{2\alpha} \leq S_r \alpha^2 |h|_q |v|_{2q_1\alpha}^{2\alpha},$$

isto é,

$$|v|_{r\alpha} \leq \alpha^{\frac{1}{\alpha}} (S_r |h|_q)^{\frac{1}{2\alpha}} |v|_{2q_1\alpha}. \tag{A.33}$$

A partir de agora, mostraremos, por um processo de indução e pela desigualdade de Hölder generalizada (mais precisamente, pela desigualdade de interpolação), que $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$, para todo $p \geq r$.

Seja $\eta = \frac{r}{2q_1} > 1$.

1^{o} : Fazendo $\alpha = \eta$ em (A.33), temos $r = 2q_1\alpha$ e

$$|v|_{r\eta} \leq \eta^{\frac{1}{\eta}} (S_r |h|_q)^{\frac{1}{2\eta}} |v|_r. \tag{A.34}$$

2^{o} : Fazendo $\alpha = \eta^2$ em (A.33), temos $r\eta = 2q_1\alpha$ e

$$|v|_{r\eta^2} \leq \eta^{\frac{2}{\eta^2}} (S_r |h|_q)^{\frac{1}{2\eta^2}} |v|_{r\eta}. \tag{A.35}$$

Das igualdades (A.34) e (A.35), segue que

$$|v|_{r\eta^2} \leq \eta^{\frac{1}{\eta}+\frac{2}{\eta^2}} (S_r |h|_q)^{\frac{1}{2}(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\eta^2})} |v|_r. \tag{A.36}$$

3^{o} : Fazendo $\alpha = \eta^3$ em (A.33), temos $r\eta^2 = 2q_1\alpha$ e

$$|v|_{r\eta^3} \leq \eta^{\frac{3}{\eta^3}} (S_r |h|_q)^{\frac{1}{2\eta^3}} |v|_{r\eta^2}. \tag{A.37}$$

Das igualdades (A.36) e (A.37), segue que

$$|v|_{r\eta^3} \leq \eta^{\frac{1}{\eta}+\frac{2}{\eta^2}+\frac{3}{\eta^3}} (S_r |h|_q)^{\frac{1}{2}(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\eta^2}+\frac{1}{\eta^3})} |v|_r. \tag{A.38}$$

k^{o} : Por um argumento de indução, fazendo $\alpha = \eta^k$ em (A.33), a k-ésima etapa nos dá

$$|v|_{r\eta^k} \leq \eta^{\frac{1}{\eta}+\frac{2}{\eta^2}+\frac{3}{\eta^3}+\ldots+\frac{k}{\eta^k}}(S_r|h|_q)^{\frac{1}{2}(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\eta^2}+\frac{1}{\eta^3}+\ldots+\frac{1}{\eta^k})}|v|_r\,. \tag{A.39}$$

$k+1^{\text{o}}$: Fazendo $\alpha = \eta^{k+1}$ em (A.33), temos $r\eta^k = 2q_1\alpha$ e

$$|v|_{r\eta^{k+1}} \leq \eta^{\frac{k+1}{(\eta^{k+1})}}(S_r|h|_q)^{\frac{1}{2\eta^{k+1}}}|v|_{r\eta^k}\,. \tag{A.40}$$

Das igualdades (A.39) e (A.40), segue que

$$|v|_{r\eta^{k+1}} \leq \eta^{\frac{1}{\eta}+\frac{2}{\eta^2}+\frac{3}{\eta^3}+\ldots+\frac{k+1}{(\eta^{k+1})}}(S_r|h|_q)^{\frac{1}{2}(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\eta^2}+\frac{1}{\eta^3}+\ldots+\frac{1}{\eta^{k+1}})}|v|_r\,. \tag{A.41}$$

Conclusão: Como as séries que aparecem em (A.41) são convergentes e valem

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{\eta^k} = \frac{\eta^2}{(\eta-1)^2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\eta^k} = \frac{1}{2(\eta-1)}\,,$$

segue de (A.41) e pela desigualdade de interpolação que

$$|v|_p \leq \eta^{\frac{1}{\eta-1}}(S_r|h|_q)^{\frac{1}{2(\eta-1)}}|v|_r\,,$$

para todo $p \geq r$. Segue o resultado para $C = \eta^{\frac{1}{\eta-1}}(S_r|h|_q)^{\frac{1}{2(\eta-1)}}$, pelo Lema A.18.

■

Como aplicações do Lema A.19, temos os seguintes resultados:

Corolário A.20 *Suponha que $N > 2$, $a \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$, $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ e que existe $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$, com $q > \frac{N}{2}$, tal que*

$$|f(x,s)| \leq h(x)|s|\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N\,, \forall\, s \in \mathbb{R}; \tag{A.42}$$

Então existe uma constante $C = C(q, |h|_q)$ tal que

$$|v|_\infty \leq C||v||\,,$$

para qualquer $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ solução fraca de (A.25). Além disso, se $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazem as hipóteses acima e $(|h_n|_q)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada, a sequência $C_n = C(q, |h_n|_q)$ é limitada.

Demonstração:

Usaremos o Lema A.19 com $r = 2^*$. Verifiquemos então suas hipóteses.

A hipótese $(H1)$ está claramente satisfeita.

Para a hipótese $(H2)$, basta observar que, pelo Teorema de Sobolev-Gagliardo-Niremberg,

$$|u|_{2^*} \leq \tilde{C}|\nabla u|_2\,, \quad \forall\, u \in H^1(\mathbb{R}^N)\,,$$

para alguma constante $\tilde{C} > 0$. Logo, como $a \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$,

$$|u|_{2^*} \leq \tilde{C} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + a(x)u^2\,,$$

para toda $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^N} a(x)u^2 < \infty$. Além disso, note também que

$$2^* = \frac{2N}{N-2} > \frac{2q}{q-1} \quad \text{se, e só se,} \quad q > \frac{N}{2}\,.$$

Portanto estamos dentro das hipóteses do Lema A.19 se tomarmos $r = 2^*$. Assim, existe $C = C(q, |h|_q, 2^*) > 0$ tal que, para toda $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ solução de (A.25),

$$|v|_\infty \leq C|v|_{2^*}\,,$$

donde segue a conclusão do lema por mais uma aplicação do Teorema de Sobolev-Gagliardo-Niremberg.

■

A.8 Alguns resultados da Teoria do Grau Topológico

Esta seção foi baseada em Deimling [18]

Seja E um espaço de Banach munido da norma $||.||_E$ e considere o conjunto

$$\Gamma = \{(f, \Omega, y)\,;\, \Omega \subset E \text{ aberto limitado, } f : \overline{\Omega} \to E \text{ contínua, } y \notin f(\partial\Omega)\}\,.$$

Um *grau topológico* em E é uma aplicação

$$d : \Gamma \to \mathbb{Z}$$

com as seguintes propriedades:

$(D1)$ $d(I, B_1(0), 0) = 1$, onde $I(x) = x$, para todo $x \in E$;

$(D2)$ (Excisão) Se Ω_1, Ω_2, Ω são abertos em E tais que

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \quad \Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \Omega \quad \text{e} \quad f(x) \neq y, \, \forall \, x \in \overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2),$$

então

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y)\,;$$

$(D3)$ (Invariância por homotopia) Se $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \to E$ e $y : [0,1] \to E$ são aplicações contínuas tais que

$$H(t,x) \neq y(t) \forall \, t \in [0,1]\,,$$

então $d(H(t,.), \Omega, y(t))$ é constante, para todo $t \in [0,1]$.

Pode-se mostrar que $E = \mathbb{R}^N$ está munido de um grau topológico. Neste trabalho, usamos os seguintes resultados:

Teorema A.21 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $y \in \mathbb{R}^N$. Se $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ são contínuas e satisfazem*

$$f(x) = g(x)\,, \; \forall \, x \in \partial\Omega,$$

então

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, y)\,.$$

Teorema A.22 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^N$ e $x_0 \in \Omega$ tal que $\{x_0\} = f^{-1}(\{y\})$. Se f é contínua e diferenciável em $x_0 \in \Omega$ e $f'(x_0) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é inversível, então*

$$d(f, \Omega, y) = d(f'(x_0), B_1(0), 0)\,.$$

Teorema A.23 *Se $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é uma aplicação linear inversível, então*

$$d(A, B_1(0), 0) = \text{sinal}(\det(A)) = (-1)^m\,,$$

onde m é a soma das multiplicidades de todos os autovalores negativos de A.

Bibliografia

[1] Agmon, S., *The L^p Approach to the Dirichlet Problem*, Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa 13 (1959), 405-448.

[2] Aires, J. E. F., *Existência, Regularidade e Decaimento Exponencial de Solução para Problemas Elípticos Semilineares em* $\mathbb{R}^N$, Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Campina Grande, 1998.

[3] Alves, C. O., *Existência de Solução Positiva de Equações Elípticas Não-Lineares Variacionais em* $\mathbb{R}^N$, Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, 1996.

[4] Alves, C. O., Carrião, P. C., & Miyagaki, O. H., *Nonlinear Pertubations of a Periodic Elliptic Problem with Critical Growth*, J. Math. Anal. Appl. 260 (2001), 133-146.

[5] Alves, C. O., & El Hamidi, A., *Nehari Manifold and Existence of Positive Solutions to a Class of Quasilinear Problems*, Nonlinear Analiysis - TAM 60 (2005), 611-624.

[6] Alves, C. O., de Morais Filho, D. C., & Souto, M. A. S., *Multiplicity of Positive Solutions of a Nonlinear Schrödinger Equation*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 52 (2009), 1-21.

[7] Alves, C. O., de Morais Filho, D. C., & Souto, M. A. S., *Radially Symmetric Solutions for a Class of Critical Exponent Elliptic Problems in* $\mathbb{R}^N$, Electronic Journal of Differential Equation, 1996 (1996), n° 07, 1-12.

[8] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley, 1995.

[9] Bartsch, T., Pankov, A., & Wang, Z. Q., *Nonlinear Schrödinger Equations with Steep Potencial Well*, Comm. Contemp. Math., 3 (2001), 549-569.

[10] Bartsch, T., & Wang, Z. Q., *Existence and Multiplicity Results for some Superlinear Elliptic Problems on* $\mathbb{R}^N$ *Positive Solutions for a Nonlinear Schrödinger equation*, Comm. P.D.E., 20 (1995), 1725-1741.

[11] Bartsch, T., & Wang, Z. Q., *Multiple Positive Solutions for a Nonlinear Schrödinger Equation*, Z. Angew. Math. Phys., 51 (2000), 366-384.

[12] Brezis, H., *Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications*, Dunod, Paris, 2005.

[13] Brezis, H. & Kato, T., *Remarks on the Schrödinger Operator with Regular Complex Potentials*, J. Math. Pures et Appl. 58 (1979), 137-151.

[14] Brezis, H., & Lieb, E., *A Relation between Pointwise Convergence of Functions and Convergence of Functionals*, Proc. Amer. Math. Soc., vol 88, nº 3 (1983), 486-490.

[15] Clapp, M. & Ding, Y., *Positive Solutions of a Schödinger Equation with Critical Nonlinearity*, Z. Angew. Math. Phys., 55 (2004), 592-605.

[16] de Figueiredo, D. G., *Lectures on the Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*, Springer-Verlag, 1989.

[17] de Figueiredo, D. G., & Ding, Y., *Solutions of a Nonlinear Schrödinger Equation*, Discrete Contin. Dun. System, 08 (2002), 563-584.

[18] Deimling, K., *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1980.

[19] Ding, Y. & Tanaka, K., *Multiplicity of Positive Solutions of a Nonlinear Schrödinger Equation*, Manuscripta Math., 112 (2003), 109-135.

[20] Diniz, H. A. C., *Sobre os Lemas de Concentração de Compacidade de P. L. Lions e Aplicações*, Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Campina Grande, 2002.

[21] Folland, G. B., *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications*, Wiley, 1999, 2ª ed.

[22] Garcia Azorero, J., & Peral Alonzo, I., *Multiplicity of Solutions for Elliptic Problems with Critical Exponent with a Nonsymmetric Term*, Trans. Amer. Math. Soc. 2 (1991), 877-895.

[23] Gui, C., *Existence of Multi-bump Solutions for a Nonlinear Schrödinger Equations via Variational Method*, Comm. P.D.E., 21 (1996), 787-820.

[24] Lions, P.-L., *The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variatons. The Limit Case, Part 1*, Revista Matemática Iberoamericana Vol. 1, nº 1 (1985), 145-201.

[25] Lopes, W. A., *O Teorema de Stone-Weierstrass e Aplicações*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2009.

[26] Miyagaki, O. H., *On a Class of Semilinear Elliptic Problems in* $\mathbb{R}^N$ *with Critical Growth*, Nonlinear Analysis - TAM 29 (1997), 773-781.

[27] Rabinowitz, P. H., *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, Amer. Math. Soc., 86 (1984).

[28] Séré, E., *Existence of Infinitely many Homoclinic Orbits in Hamiltonian Systems*, Math. Z. 209 (1992), 27-42.

[29] Souto, M. A. S., *A Priori Estimates and Existence of Positive Solutions of Nonlinear Cooperative Elliptic Systems*, Differential and Integral Equations, vol 8, nº 5 (1995), 1245-1258.

[30] Willem, M., *Minimax Theorems. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, Birkhäuser, 1996.