Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência de Atrator Global para uma Equação de Evolução com Convolução

por

Rodrigo Toledo Teixeira Câmara †

sob orientação dos

Profs. Dr. Aparecido Jesuíno de Souza
Dr. Severino Horácio da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

Existência de Atrator Global para uma Equação de Evolução com Convolução

por Rodrigo Toledo Teixeira Câmara

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Aprovada por:

Prof. Dr. Jocirei Dias Ferreira

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra

Prof. Dr. Aparecido Jesuíno de Souza
Orientador

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Novembro/2011

Resumo

Neste trabalho consideramos uma equação de evolução não local com convolução e provamos a existência de um atrator global para o fluxo gerado por esta equação. Além disso, mostramos que o funcional energia associado a esta equação satisfaz a propriedade de Lyapunov de decrescer ao longo de soluções. Mostramos também a existência de equilíbrios não triviais e estudamos a instabilidade destes equilíbrios.

Palavras chave: Problema de Cauchy; Atrator global; Funcional energia.

Abstract

In this work, we consider a non local evolution equation with convolution and we prove the existence of a global attractor for the flow generated by that equation. Futhermore, we show that the energy functional associated with this equation satisfies the Lyapunov's property of decreasing under the solutions. We also show the existence of non trivial equilibria and study its instability.

Key words: Cauchy problem; Global attractor; Energy functional.

Agradecimentos

- Tenho inicialmente que agradecer aos professores Ângelo, Aparecido, Brandão, Bráulio, Claudianor, Daniel, Henrique e Horácio pelas excelentes aulas.

- Humildemente agradeço novamente aos orientadores Aparecido e Horácio pela excepcional dedicação e paciência,

- O apoio financeiro do CNPq.

- Gentilmente lembro os colegas Ailton, Antônio Igor, Joelson e Itailma, companheiros de teto e estudo.

- Aos meus pais agradeço com carinho pelo apoio inabalável.

- Meus agradecimentos também aos funcionários da UFCG, peças importantes deste trabalho,

- E finalmente à Carol, pelo norte.

Dedicatória

A.C.

" Without pain, without sacrifice, we would have nothing. Like the first monkey shot into space.".

Tyler Durden

Lista de Figuras

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho consideramos a equação de evolução não local

$$\frac{\partial m(x,t)}{\partial t} = -m(x,t) + \tanh(\beta(J * m)(x,t)), \tag{1}$$

onde $m(x,t)$ é uma função real sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, β é uma constante não-negativa, $J \in C^1(\mathbb{R})$ é uma função par não-negativa com suporte no intervalo $[-1,1]$ e integral igual a 1. O símbolo $*$ denota o produto convolução, isto é,

$$(J * m)(x) = \int_{\mathbb{R}} J(x-y)m(y)dy. \tag{2}$$

A equação (1) é usada no estudo de sistemas de *spins* com dinâmica de Glauber e interações de Kac, onde ela surge como limite contínuo de modelos probabilísticos, (veja [3], [11], [12], [14], [15], [16] e [18]).

Os objetivos deste trabalho consistem em:

- mostrar a existência de um atrator global para o fluxo gerado por (1). Para isso, seguimos [3], usamos resultados clássicos de [4] e [20] e o Teorema de Imersão Compacta de Sobolev.

- mostrar existência de soluções de equilíbrios não triviais. Para tanto usamos um funcional energia, o qual satisfaz a propriedade de Lyapunov de decrescer ao longo de soluções de (1) e o princípio da Invariância de La Salle. Nesta etapa, seguimos os artigos de pesquisa [3] e [15].

Esta dissertação está organizada como segue: no Capítulo 1 apresentamos alguns conceitos e resultados preliminares. No Capítulo 2 estudamos algumas propriedades da equação de evolução (1), formulamos este problema com condições periódicas e mostramos a existência de um atrator global. No Capítulo 3 exibimos um funcional energia e estudamos suas propriedades, para com elas mostrarmos a existência de equilíbrios não-triviais. Além disso, mostramos que estes equilíbrios não-triviais são instáveis.

Finalmente, no Apêndice, exibimos alguns resultados clássicos que de alguma forma foram necessários neste trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, consideramos algumas definições e resultados clássicos da literatura os quais são usados para fundamentar este trabalho, entre esses podemos citar as noções de conjuntos absorventes e atratores para um semigrupo e os teoremas sobre existência e unicidade de solução de equações diferenciais ordinárias em espaços de Banach.

1.1 Teorema de Existência e Unicidade em Espaços de Banach

Nesta seção, seguimos os resultados de [4] e [11], os quais são repetidos aqui para deixar o texto mais didático.

Considere, em um espaço de Banach X, a equação diferencial

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1.1}$$

sendo

$$\begin{aligned} f\colon I \times X &\to X \\ (t, x) &\mapsto f(t, x), \end{aligned}$$

onde f é uma função contínua, $I \subset \mathbb{R}$ e $\dot{x}$ denota a derivada de x com relação a variável t.

Uma função continuamente diferenciável $\phi : I \subset \mathbb{R} \to X$ é dita solução de (1.1) no intervalo I se:

(i) o gráfico de ϕ em I, isto é, $\{(t, \phi(t)); t \in I\}$ está contido no domínio de f;

(ii) $\dfrac{d}{dt}\phi(t) = f(t, \phi(t))$ para todo $t \in I$.

O problema de Cauchy para (1.1) com condições iniciais (t_0, x_0) é denotado por

$$\dot{x} = f(t, x), \;\; x(t_0) = x_0, \quad (t_0, x_0) \in I \times X \tag{1.2}$$

Lema 1.1 *O problema (1.2) é equivalente à equação integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{1.3}$$

Prova. De fato, integrando de t_0 a t ambos os lados de (1.2), temos

$$\int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Daí, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Portanto,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Reciprocamente, derivando (1.3) temos

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}x(t_0) + \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Logo,

$$\dot{x} = f(t, x(t)), \;\; x(t_0) = x_0.$$

■

Quando $X = \mathbb{R}^n$, temos o clássico Teorema de Picard que garante existência e unicidade para (1.2). Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.1 *Seja $\Omega = I_a \times B_b$, onde $I_a = \{t; |t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{x; ||x - x_0|| \leq b\}$. Suponha $f : \Omega :\to \mathbb{R}^n$ contínua e lipschitziana na segunda variável. Se $|f| \leq M$ em Ω com $M \in \mathbb{R}_+$, então existe uma e somente uma solução de (1.2) em I_α, onde, $\alpha = \min\{a, b/M\}$.*

Prova. Veja [19]. ∎

No que segue, discutiremos um resultado que generaliza o Teorema de Picard.

Teorema 1.2 (Existência Local) *Sejam X um espaço de Banach, $\delta > 0$ e $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$. Suponha que numa vizinhança do ponto (t_0, x_0) a função*

$$\begin{array}{rcl} f\colon [t_0-\delta, t_0+\delta] \times X & \to & X \\ (t,x) & \mapsto & f(t,x), \end{array}$$

é contínua em t e satisfaça a condição de Lipschitz na segunda variável, isto é, existe $M \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant M\|x-y\|, \ \forall t \in [t_0-\delta, t_0+\delta], \ \forall x, y \in X. \tag{1.4}$$

Então existe uma vizinhança de t_0 tal que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.5}$$

tem uma única solução.

Prova. Seguimos nesta demonstração a idéia dada por Daleckiĭ e Kreĭn em [4]. Como f é contínua em t, fixado $\eta > 0$ e $x \in X$ tal que $||x - x_0|| < \eta$, então dado $\xi > 0$ existe $\varepsilon > 0$, tal que

$$\|f(t,x) - f(t_0,x)\| \leq \xi \tag{1.6}$$

sempre que $|t - t_0| \leq \varepsilon$. Usando a hipótese de f ser Lipschitz na segunda variável, temos

$$\|f(t,x) - f(t,x_0)\| \leqslant M\|x - x_0\| \leq M\eta. \tag{1.7}$$

Note que, pela norma da soma

$$\|(t,x) - (t_0,x_0)\| = \|(t-t_0, x-x_0)\| = |t-t_0| + \|x-x_0\| \leq \varepsilon + \eta. \tag{1.8}$$

Usando (1.6) e (1.7), obtemos

$$\begin{aligned} \|f(t,x) - f(t_0,x_0)\| &= \|f(t,x) - f(t,x_0) + f(t,x_0) - f(t_0,x_0)\| \\ &\leq \|f(t,x) - f(t,x_0)\| + \|f(t,x_0) - f(t_0,x_0)\| \\ &\leq M\eta + \xi. \end{aligned}$$

Portanto, fazendo $\tau = M\eta + \xi$, segue que

$$\|f(t,x) - f(t_0,x_0)\| \leq \tau,$$

sempre que

$$\|(t,x)-(t_0,x_0)\| \leq \varepsilon + \eta,$$

isto é, f é contínua numa vizinhança de (t_0,x_0), por conseguinte f é limitada nesta vizinhança (veja [9] Teorema 2 p.225). Logo, existe $M_1 > 0$ tal que

$$\|f(t,x)\| \leq M_1 < \infty. \tag{1.9}$$

Agora, seja $\alpha = \min\left(\varepsilon, \frac{\eta}{M_1}\right)$ e denote por $C_\alpha(X)$ espaço de Banach das funções contínuas x que são definidas para $|t-t_0| \leq \alpha$ assumindo valores em X, ou seja,

$$\begin{array}{rcl} x : [t_0-\alpha, t_0+\alpha] & \rightarrow & X \\ t & \mapsto & x(t) \end{array}$$

com norma

$$|\!|\!| x |\!|\!| = \sup_{|t-t_0|\leq\alpha} \|x(t)\|. \tag{1.10}$$

Seja

$$\mathbf{B}_\eta = \{x \in C_\alpha(X) : |\!|\!| x - x_0 |\!|\!| \leq \eta\}.$$

Seja T um operador sobre $\mathbf{B}_\eta$ dado por

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\,(s, x(s))ds.$$

Note que $T(\mathbf{B}_\eta) \subset \mathbf{B}_\eta$. De fato, dado $x \in \mathbf{B}_\eta$ temos que

$$\|(Tx)(t) - x_0\| \;\; \leq \;\; \alpha M_1. \tag{1.11}$$

De (1.10) e (1.24) temos

$$\begin{array}{rcl} |\!|\!| Tx - x_0 |\!|\!| & = & \displaystyle\sup_{|t-t_0|\leq\alpha} \|(Tx)(t) - x_0\| \\ & \leq & \alpha M_1. \end{array}$$

Logo,

$$|\!|\!| Tx - x_0 |\!|\!| \leq \frac{\eta}{M_1} M_1 = \eta.$$

Portanto,

$$T : \mathbf{B}_\eta \subset X \rightarrow \mathbf{B}_\eta.$$

Para simplificar a notação, vamos supor que $t \geq t_0$. Para $t \leq t_0$ a demonstração é análoga.

Para x_1 e x_2 em $\mathbf{B}_\eta$, da hipótese de f ser Lipschitz, temos

$$\begin{aligned}
\|(Tx_2)(t) - (Tx_1)(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s))\| ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} M\|x_2(s) - x_1(s)\| ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} M\|\!|x_2 - x_1|\!\| ds.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|Tx_2(t) - Tx_1(t)\| \leq M(t - t_0)\|\!|x_2 - x_1|\!\|. \tag{1.12}$$

Estimando agora a composição $\|(T^2x_2)(t) - (T^2x_1)(t)\|$ e usando (1.12) obtemos

$$\begin{aligned}
\|T(Tx_2)(t) - T(Tx_1)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} [f(s, Tx_2(s)) - f(s, Tx_1(s))] ds \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, Tx_2(s)) - f(s, Tx_1(s))\| ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} M\|(Tx_2)(s) - (Tx_1)(s)\| ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} MM(s - t_0)\|\!|x_2 - x_1|\!\| ds \\
&= M^2\|\!|x_2 - x_1|\!\| \int_{t_0}^{t} (s - t_0) ds \\
&\leq M^2 \frac{(t - t_0)^2}{2!} \|\!|x_2 - x_1|\!\|.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\|(T^2x_2)(t) - (T^2x_1)(t)\| \leq M^2 \frac{(t - t_0)^2}{2!} \|\!|x_2 - x_1|\!\|.$$

Seguindo este procedimento, para a n-ésima composição, teremos

$$\|(T^nx_2)(t) - (T^nx_1)(t)\| \leq \frac{1}{n!} M^n (t - t_0)^n \|\!|x_2 - x_1|\!\|.$$

Portanto,

$$\|\!|(T^nx_2) - (T^nx_1)|\!\| \leq \frac{(M\alpha)^n}{n!} \|\!|x_2 - x_1|\!\|.$$

Como, para n suficientemente grande, $0 < \frac{(M\alpha)^n}{n!} < 1$, pois $n!$ cresce mais rapidamente do que $(M\alpha)^n$, segue que o operador T possui um único ponto fixo, isto é, existe um único $x \in \mathbf{B}_\eta$ tal que $(Tx)(t) = x(t)$. Logo,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds \quad \text{e} \quad x(t_0) = x_0.$$

Portanto, pelo Lema 1.1 segue que $x(t)$ satisfaz (1.2). ■

Observação 1.1 *O Teorema* 1.2 *afirma somente a existência de soluções em uma certa vizinhança do ponto* t_0*, mas, tendo construído uma solução no intervalo* $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$*, podemos tentar estender um pouco mais adiante. É óbvio que podemos continuar tal procedimento indefinidamente se, por exemplo, as condições (*1.4*) e (*1.9*) são satisfeitas para todo* t *e* $x \in X$ *com mesmas constantes* M *e* M_1*. Em particular se as condições (*1.4*) e (*1.9*) estão satisfeitas para todo* $t \in [\alpha, \infty)$*,* $\|x - x_0\| \leq \eta$*, para algum* $\alpha \in \mathbb{R}$*, e a solução* x *de (*1.1*) é tal que* $\|x(t) - x_0\| \leq \eta_0 < \eta$*, então podemos estender indefinidamente quando* $t \to \infty$*.*

Se impormos exigências de caráter global sobre f, podemos conseguir soluções globais sem hipótese prévia no seu comportamento (veja [4]).

Teorema 1.3 (Existência Global) *Suponha que exista um domínio* $[a, b] \times X$ *em que a função* f *é contínua em* t *e satisfaz a condição de Lipschitz na segunda variável. Então para todo* $(t_0, x_0) \in [a, b] \times X$*, o problema de Cauchy (*1.5*) possui uma única solução* $\phi : [a, b] \to X$ *tal que* $x = \phi(t)$ *.*

Prova. A prova é análoga à prova do Teorema 1.2. Basta notar que:

(i) a hipótese do teorema implica na limitação de f em $[a, b] \times S$, onde S é um subconjunto compacto arbitrário de X, e que

(ii) o papel de $\mathbf{B}_\eta$ é feito pelo espaço $C(X)$, das funções contínuas $x : [a, b] \to X$ munido da norma

$$|||x||| = \sup_{t \in [a,b]} \|x(t)\|.$$

Portanto, segue-se o resultado. ■

Observação 1.2 *Note que se a equação (1.1) for autônoma, ou seja,* f *não depende explicitamente de* t*, então* f *é contínua em* t *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *e, portanto, os Teoremas 1.2 e 1.3 se aplicam. Em particular, se* f *é globalmente Lipschitz, temos que existe uma única solução global do problema de Cauchy (1.5),(veja [2]).*

Para o caso particular de sistemas autônomos, temos o clássico resultado, devido a Cauchy, Lipschitz e Picard, dado abaixo:

Teorema 1.4 (Cauchy, Lipschitz, Picard) *Sejam* X *um espaço de Banach e* $F : X \to X$ *uma aplicação tal que*

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall\, x, y \in X \quad (L \in \mathbb{R}_+).$$

Então, para todo $x_0 \in X$, existe $x \in C^1([0,\infty), X)$ tal que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.13}$$

Prova. Pelo Lema 1.1, resolver (1.13) é equivalente a achar $x \in C^1([0,\infty), X)$ tal que

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F(x(s))ds. \tag{1.14}$$

Defina,

$$\mathbf{E} = \{x \in C^1([0,\infty), X) : \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|x(t)\| < \infty\},$$

para alguma constante $k > 0$, a ser fixada posteriormente.

Afirmação 1: $\mathbf{E}$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|x\|_{\mathbf{E}} = \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|x(t)\|, \quad k > 0.$$

De fato, seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbf{E}$. Dado $\varepsilon > 0$, $\quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_m - x_n\|_{\mathbf{E}} = \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|x_m(t) - x_n(t)\| < \varepsilon, \quad \text{para} \quad m, n > n_0. \tag{1.15}$$

Daí,

$$e^{-kt}\|x_m(t) - x_n(t)\| < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad m, n > n_0, \quad t \geq 0. \tag{1.16}$$

Para cada $t \in [0,\infty)$, fixado, segue de (1.16) que a sequência $(x_1(t), x_2(t), \ldots)$ é de Cauchy em X. Assim, existe $x^t \in X$ tal que

$$x_n(t) \to x^t \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Defina

$$x : [0,\infty) \to X,$$

tal que

$$x(t) = x^t = \lim_{n\to\infty} x_n(t), \quad \forall\, t \geq 0.$$

Observe que $x \in \mathbf{E}$ e $x_n \to x$ em $\mathbf{E}$. De fato, começamos notando que, como x_n é uma sequência de Cauchy em $\mathbf{E}$, x_n é limitada em $\mathbf{E}$. De fato, fixando $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq n_0$ então

$$\|x_m - x_n\|_{\mathbf{E}} < 1,$$

ou seja, se $n \geq n_0$ então

$$\|x_{n_0} - x_n\|_{\mathbf{E}} < 1,$$

o que mostra que a sequência é limitada por $\max\{\|x_0\|_{\mathbf{E}}, ..., \|x_{n_0-1}\|_{\mathbf{E}}, \|x_{n_0}\|_{\mathbf{E}} + 1\}$. Daí, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|x_n\|_{\mathbf{E}} &= \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|x_n(t)\| \\ &\leq c. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela definição de supremo, temos

$$\begin{aligned} e^{-kt}\|x_n(t)\| &\leq \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|x_n(t)\| \\ &= \|x_n\|_{\mathbf{E}}. \end{aligned}$$

Daí,

$$e^{-kt}\|x_n(t)\| \leq c,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$ e $k > 0$ fixo. Passando ao limite nesta última desigualdade, quando $n \to \infty$, obtemos

$$e^{-kt}\|x(t)\| \leq c.$$

Donde,

$$\|x\|_E = \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|x(t)\| \leq c,$$

portanto, $x \in \mathbf{E}$ Para concluírmos a afirmação é suficiente verificarmos que

$$x_n \to x, \quad \text{uniformemente em} \quad [0, \infty).$$

Para isso, note que, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_m(t) - x_n(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.17}$$

para todo $m, n \geq n_0$ e qualquer $t \in [0, \infty)$. Então, fazendo $m \to \infty$ em (1.17) concluímos que, para $n > n_0$

$$\|x(t) - x_n(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

para todo $t \in [0, \infty)$, ou seja $x_n \to x$ uniformemente em $[0, \infty)$.

Além disso, para todo $x \in \mathbf{E}$, a função

$$(\Phi x)(t) = x_0 + \int_0^t F(x(s))ds,$$

pertence a $\mathbf{E}$. De fato,

(i) a continuidade de Φ segue do fato de termos uma soma de funções contínuas.

(ii) Mostraremos que $\|\Phi(x)\|_{\mathbf{E}} < \infty$. Com efeito,

$$\begin{aligned}\|\Phi(x)\|_{\mathbf{E}} &= \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|\left(\Phi x\right)(t)\| \\ &= \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\left\| x_0 + \int_0^t F(x(s))ds\right\|.\end{aligned}$$

Daí,

$$\|\Phi(x)\|_{\mathbf{E}} \leq \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|x_0\| + \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\left\|\int_0^t F(x(s))ds\right\|.$$

A primeira parcela do lado direito desta última desigualdade claramente é finita. Para mostrarmos a finitude da segunda parcela, começamos observando que,

$$\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\left\|\int_0^t F(x(s))ds\right\| \leq \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\int_0^t \|F(x(s))\|ds.$$

Mas, usando a desigualdade triangular, temos

$$\int_0^t \|F(x(s)) - F(0) + F(0)\|ds \leq \int_0^t \|F(x(s)) - F(0)\|ds + \int_0^t \|F(0)\|ds,$$

e usando a propriedade de F ser lipschitziana (com constante de Lipschitz L) no primeiro termo após a desigualdade, temos

$$\int_0^t \|F(x(s)\|ds \leq \int_0^t L\|x(s)\|ds + \int_0^t \|F(0)\|ds.$$

Como $\|F(0)\|$ não depende de s, segue que

$$\int_0^t \|F(x(s)\|ds \leq \int_0^t L\|x(s)\|ds + \|F(0)\|t.$$

Multiplicamos a expressão acima pelo número positivo e^{-kt} (onde k será determinado posteriormente) obtemos,

$$e^{-kt}\int_0^t \|F(x(s))\|ds \leq \int_0^t e^{-kt}L\|x(s)\|ds + e^{-kt}\|F(0)\|t.$$

Daí

$$e^{-kt}\int_0^t \|F(x(s))\|ds \leq \int_0^t Le^{-kt}e^{ks}e^{-ks}\|x(s)\|ds + e^{-kt}\|F(0)\|t. \tag{1.18}$$

Considere o conjunto

$$G = \{e^{-kt}\|F(0)\|t; \quad t \geq 0\}.$$

Este conjunto é limitado superiormente por $\frac{\|F(0)\|}{ke}$. Com efeito, considere a função $g : [0, \infty) \to X$ definida como

$$g(t) = e^{-kt}\|F(0)\|t.$$

Derivando com relação a t, temos,

$$g'(t) = \frac{\|F(0)\| - \|F(0)\|tk}{e^{kt}},$$

o que implica que g tem um máximo local em $t = \frac{1}{k}$. Como a função g está definida em um domínio conexo, é contínua, $g'(t) > 0$, $\forall t < \frac{1}{k}$ e $g'(t) < 0$, $\forall t > \frac{1}{k}$, segue que este máximo é global, implicando que G é um conjunto limitado superiormente. Portanto $\sup G = m$ existe e é finito.

Daí, aplicando o sup em ambos os lados de (1.18) temos

$$\begin{aligned}
\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\int_0^t \|F(x(s))\|ds &\leq \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\int_0^t Le^{-kt}e^{ks}e^{-ks}\|x(s)\|ds + m. \\
&= L\|x\|_{\mathbf{E}}\int_0^t e^{-kt}e^{ks}ds + m \\
&= L\|x\|_{\mathbf{E}}e^{-kt}\int_0^t e^{ks}ds + m \\
&= L\|x\|_{\mathbf{E}}e^{-kt}\left[\frac{1}{k}e^{ks}\Big|_0^t\right] + m \\
&= L\|x\|_{\mathbf{E}}e^{-kt}\left[\frac{e^{kt}}{k} - \frac{1}{k}\right] + m \\
&= L\|x\|_{\mathbf{E}}\left[\frac{1}{k} - \frac{e^{-kt}}{k}\right] + m.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\int_0^t \|F(x(s))\|ds \leq L\|x\|_{\mathbf{E}}\frac{1}{k} + m < \infty.$$

Afirmação: Se escolhermos $k > L$, Φ é uma contração.

De fato,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x(s)) - \Phi(y(s))\| &= \left\|\int_0^t [F(x(s)) - F(y(s))]ds\right\| \\
&\leq \int_0^t \|F(x(s)) - F(y(s))\|ds \\
&\leq \int_0^t L\|x(s) - y(s)\|ds.
\end{aligned}$$

Daí, multiplicando ambos os lados por e^{-kt} e procedendo como em (ii), obtemos

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_{\mathbf{E}} \leq \frac{L}{k}\|x - y\|_{\mathbf{E}}.$$

Portanto, se $k > L$, Φ é uma contração, logo possui um único ponto fixo x, o qual satisfaz (1.14) e consequentemente satisfaz (1.13).

Unicidade: Sejam x e $\bar{x}$, duas soluções de (1.13). Sendo

$$\varphi(t) = \|x(t) - \bar{x}(t)\|,$$

temos, por (1.14),

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \|x(t) - \bar{x}(t)\| \\ &\leq \int_0^t \|F(x(s)) - F(\bar{x}(s))\| ds \\ &\leq L\int_0^t \|x(s) - \bar{x}(s)\| ds \\ &= L\int_0^t \varphi(s) ds. \end{aligned}$$

Logo,

$$\varphi(t) \leq L\int_0^t \varphi(s) ds, \quad \forall, t \geq 0.$$

Portanto, pelo Lema de Grönwall (ver Apêndice A.1), $\varphi \equiv 0$. ∎

1.2 Semigrupos e Conjuntos Invariantes

Consideramos nesta seção a dinâmica de um sistema cujo estado é descrito por um elemento $u = u(t)$ de um espaço de Banach X. O estado do sistema dinâmico é descrito por uma família de operadores $S(t), t \geq 0$, de X em X que possui as propriedades usuais de um semigrupo, isto é,

$$\begin{aligned} S(t+s) &= S(t)S(s) \qquad \forall s, t \geq 0, \\ S(0) &= I, \end{aligned} \tag{1.19}$$

sendo I o operador identidade sobre X. Se u_0 é o estado do sistema dinâmico no instante "zero"então $u(s) = S(s)u_0$ é o estado do sistema no instante s e $S(t)u(s)$ é o estado do sistema no instante $t + s$.

Assumimos também que $S(t)$ é um operador não linear contínuo de X em si próprio $\forall t \geq 0$. Os operadores $S(t)$ podem ou não serem injetivos. A injetividade de $S(t)$ é equivalente a *unicidade "para trás"* do sistema dinâmico. Quando $S(t), t > 0$ é injetiva, denotamos por $S(-t)$ sua inversa que leva $S(t)X$ em X. Obtemos assim uma família de operadores $S(t), t \in \mathbb{R}$ que satisfazem a propriedade (1.19) nos seus domínios de definição, $\forall s, t \in \mathbb{R}$.

Para $u_0 \in X$, definimos uma *órbita* iniciando em u_0 como o conjunto

$$\bigcup_{t \geq 0} S(t)u_0.$$

Analogamente, *quando existir*, definimos uma órbita terminando em u_0 como o conjunto

$$\bigcup_{t \leq 0} \{u(t)\},$$

onde u é uma aplicação de $(-\infty, 0]$ em X tal que $u(0) = u_0$ e $u(t+s) = S(t)u(s), \forall s, t$ tais que $s \leq 0, s+t \leq 0$ e $t \geq 0$ (ou equivalentemente $u(t) \in S(-t)^{-1}u_0, \forall t \geq 0$). Estas órbitas são também chamadas respectivamente de *órbitas positivas* e *negativas* por u_0. Uma *órbita completa* por u_0 é a união das órbitas positiva e negativa por u_0. Para $u_0 \in X$, definimos o conjunto ω-limite de $u_0 \in X$ como

$$\omega(u_0) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)u_0}.$$

No caso de um conjunto $A \subset X$, definimos o conjunto ω-limite de A como

$$\omega(A) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)A}.$$

Analogamente, o conjunto α-limite de um ponto $u_0 \in X$ é definido como

$$\alpha(u_0) = \bigcap_{s \leq 0} \overline{\bigcup_{t \leq s} S(-t)^{-1}u_0}.$$

No caso de um conjunto $A \subset X$, definimos o conjunto α-limite de A como

$$\alpha(A) = \bigcap_{s \leq 0} \overline{\bigcup_{t \leq s} S(-t)^{-1}A}.$$

Observação 1.3 *O conjunto ω-limite de um conjunto $A \subset X$ pode ser caracterizado da seguinte forma: dado $\varphi \in X$, $\varphi \in \omega(A)$ se, e só se, existe uma sequência $\varphi_n \in A$ e uma sequência $t_n \to \infty$ tal que*

$$S(t_n)\varphi_n \to \varphi, \qquad \textit{quando } n \to \infty. \tag{1.20}$$

De fato, tome $\varphi \in \omega(A)$. *Daí*

$$\varphi \in \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)A}.$$

Como $\varphi \in \overline{\bigcup_{t\geq 0} S(t)A}$, *existe uma sequência* (a_n) *em* $\bigcup_{t\geq 0} S(t)A$ *tal que*

$$a_n \to \varphi \text{ quando } n \to \infty, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Como $a_n \to \varphi$, *temos que existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n \geq n_0$ *então*

$$||a_n - \varphi||_X < 1$$

Como $a_{n_0} \in \bigcup_{t\geq 0} S(t)A$, *temos que existe* $t_0 \geq 0$ *e* $\varphi_0 \in A$ *tal que*

$$a_{n_0} = S(t_0)\varphi_0.$$

Defina

$$x_0 = a_{n_0}.$$

Como $\varphi \in \overline{\bigcup_{t\geq 1} S(t)A}$, *existe uma sequência* (b_n) *em* $\bigcup_{t\geq 1} S(t)A$ *tal que*

$$b_n \to \varphi.$$

Então existe $n_1 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n \geq n_1$ *então*

$$||b_n - \varphi||_X < \frac{1}{1+1}.$$

Como $b_{n_1} \in \bigcup_{t\geq 1} S(t)A$, *existe* $t_1 \geq 1$ *e* $\varphi_1 \in A$ *tal que* $b_{n_1} = S(t_1)\varphi_1$. *Defina* $x_1 = b_{n_1}$.

Repetindo estes passos, construimos uma sequência (x_n) *com* $x_n = S(t_n)\varphi_n$, $t_n \geq n$, $\varphi_n \in A$, *tal que para qualquer* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n \geq n_0$ *temos*

$$||x_n - \varphi||_X < \frac{1}{1+n} < \varepsilon,$$

ou seja, existe uma sequência (φ_n) *em* A *e* $t_n \to \infty$ *tal que* $S(t_n)\varphi_n \to \varphi$.

Reciprocamente, se $S(t_n)\varphi_n \to \varphi$,$n \to \infty$, *podemos construir uma subsequência de* t_n *(a qual continuaremos denotando por* t_n*) tal que* $t_n \geq n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e*

$$\varphi \in \overline{\{S(t_n)\varphi_n, \ n \geq 0\}}.$$

Como qualquer subsequência de $S(t_n)\varphi_n$ *também converge para* φ, *temos que*

$$\varphi \in \overline{\{S(t_n)\varphi_n, \ n \geq s\}} \tag{1.21}$$

para qualquer $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Vemos claramente que o conjunto em (1.21) é subconjunto de*

$$\overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)A}$$

para qualquer $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Daí

$$\varphi \in \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)A},$$

mostrando a recíproca. Similarmente, $\varphi \in \alpha(A)$ se, e só se, existe uma sequência ψ_n que converge para φ em X e uma sequência $t_n \to -\infty$ quando $n \to \infty$ tal que

$$\varphi = S(t_n)\psi_n \in A, \qquad \text{quando } n \to \infty$$

Definição 1.5 *Um ponto* fixo, estacionário *ou* de equilíbrio *do semigrupo S(t) é um ponto $u_0 \in X$ tal que*

$$S(t)u_0 = u_0, \qquad \forall t \geq 0.$$

Definição 1.6 *Dizemos que um conjunto $A \subset X$ é* positivamente invariante *sob o semigrupo $S(t)$ se*

$$S(t)A \subset A, \qquad \forall t \geq 0.$$

Analogamente, o conjunto $A \subset X$ é negativamente invariante *se*

$$S(t)A \supset A, \qquad \forall t \geq 0.$$

Definição 1.7 *Um conjunto $A \subset X$ é um conjunto invariante sob o semigrupo $S(t)$ se A é positivamente e negativamente invariante sob $S(t)$, ou seja,*

$$S(t)A = A, \qquad \forall t \geq 0. \tag{1.22}$$

Observação 1.4 *Quando os operadores $S(t)$ são injetivos, a relação (1.22) implica que $S(-t)$ é bem definido para t>0 e*

$$S(t)A = A, \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.23}$$

Definição 1.8 *Um subconjunto Y de um espaço métrico X é dito um* conjunto relativamente compacto *se seu fecho é compacto.*

Lema 1.2 *Assuma que para algum subconjunto $A \subset X, A \neq \emptyset$, e para algum $t_0 > 0$, o conjunto $\bigcup_{t \geq t_0} S(t)A$ é relativamente compacto em X. Então $\omega(A)$ é não vazio, compacto e invariante. De maneira similar, se os conjuntos $S(t)^{-1}A, t \geq 0$, são não vazios e, se para algum $t_0 > 0, \bigcup_{t \geq t_0} S(t)^{-1}A$ for relativamente compacto, então $\alpha(A)$ é não vazio, compacto e invariante.*

Prova. Como A é não vazio, segue que $\bigcup_{t \geq s} S(t)A$ é não vazio para qualquer $s \geq 0$. Portanto, os conjuntos $\overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)A}$ são compactos não vazios que decrescem quando s cresce. Daí, como a interseção de compactos é um compacto, segue que $\omega(A)$ é um compacto não vazio (o fato de ser não vazio segue do Teorema 12 de [10]). Daí, pela caracterização dada na Observação 1.3, temos que $S(t)\omega(A) = \omega(A), \forall t > 0$. De fato, se $\psi \in S(t)\omega(A)$, então $\psi = S(t)\varphi, \varphi \in \omega(A)$, e por $S(t)$ ser um operador contínuo de X em X, por (1.19) e pelas sequências φ_n e t_n dadas como na Observação 1.3, temos

$$S(t)S(t_n)\varphi_n = S(t+t_n)\varphi_n \to S(t)\varphi = \psi$$

o que mostra que $\psi \in \omega(A)$. Reciprocamente, se $\varphi \in \omega(A)$, tomamos novamente as sequências φ_n, t_n e observamos que o conjunto dos pontos da sequência $\{S(t_n - t)\varphi_n\}$ é relativamente compacta (isto é, seu fecho é compacto) em X. Portanto existe uma subsequência $t_{n_i} \to \infty$ e $\psi \in X$ tal que

$$S(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \to \psi, \text{ quando } t \to \infty.$$

Assim, segue da caracterização dada na Observação 1.3 que $\psi \in \omega(A)$, e por $S(t)$ ser contínua e por (1.19) segue que

$$S(t_{n_i})\varphi_{n_i} = S(t)S(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \to S(t)\psi = \varphi, \text{ quando } n_i \to \infty.$$

portanto $\varphi \in S(t)\omega(A)$. A demonstração é análoga para $\alpha(A)$. ■

1.3 Conjuntos Absorventes e Atratores

Definição 1.9 *Um conjunto não vazio $A \subset X$ é dito* atrator *sob o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ se*

(i) A é um conjunto invariante sob $S(t)$;

(ii) A possui uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ tal que, para todo $u_0 \in \mathcal{U}$, $S(t)u_0$ tende para A quando $t \to \infty$, ou seja,

$$d(S(t)u_0, A) \to 0 \qquad , \textit{quando } t \to \infty. \tag{1.24}$$

Se A é um atrator, a maior vizinhança aberta $\mathcal{U}$ que satisfaz (ii) é chamada de *bacia de atração de A*. Dizemos que A atrai uniformemente um conjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ se

$$d(S(t)\mathcal{B}, A) \to 0 \qquad , \text{ quando } t \to \infty,$$

onde $d(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ é a *semidistância entre dois conjuntos*[1], definida por

$$d(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1) = \sup_{x \in \mathcal{B}_0} \inf_{y \in \mathcal{B}_1} d(x, y).$$

Para simplificar a notação, diremos apenas que A *atrai* $\mathcal{B}$.

Definição 1.10 *Dizemos que $A \subset X$ é o* atrator global sob o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *quando A é o maior (no sentido de inclusão de conjuntos) atrator compacto que atrai os conjuntos limitados de X.*

Para mostrar a existência de atratores globais, usaremos a noção de conjuntos absorventes dada abaixo.

Definição 1.11 *Seja $\mathcal{B} \subset X$ e $\mathcal{U}$ um conjunto aberto de X contendo $\mathcal{B}$. Dizemos que $\mathcal{B}$ é* absorvente *em $\mathcal{U}$ se a órbita de qualquer subconjunto limitado de $\mathcal{U}$ entra em $\mathcal{B}$ após algum tempo (que depende de $\mathcal{B}$), ou seja,*

$$\forall \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{U}, \mathcal{B}_0 \text{ limitado, } \exists\ t_1(\mathcal{B}_0) \text{ tal que } S(t)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}, \forall t \geq t_1(\mathcal{B}_0) \tag{1.25}$$

Quando $\mathcal{B}$ é um conjunto absorvente em $\mathcal{U}$ dizemos que $\mathcal{B}$ absorve *os limitados de $\mathcal{U}$.*

Observação 1.5 *É fácil ver que a existência de um atrator global A sob $S(t)$ implica a existência de um absorvente. Basta notar que, como A atrai qualquer limitado, temos que após um certo tempo, a órbita estará contida numa vizinhança aberta de A. Esta vizinhança aberta será o conjunto absorvente deste sistema. A recíproca será verdadeira se considerarmos pelo menos uma das duas seguintes hipóteses:*

(H1) Os operadores $S(t)$ são *uniformemente compactos* para t grande, isto é, para todo conjunto limitado $\mathcal{B}$ existe t_0 tal que

$$\bigcup_{t \geq t_0} S(t)\mathcal{B}$$

é relativamente compacto em X.

(H2) X é um espaço de Banach e, para todo t, $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ satisfaz, para todo conjunto limitado $C \subset X$,

$$r_c(t) = \sup_{\varphi \in C} ||S_2(t)\varphi||_X \to 0 \qquad t \to \infty,$$

onde os operadores $S_1(\cdot)$ são uniformemente compactos para t grande.

Antes de demonstrar a recíproca citada na Observação 1.5 precisamos dos seguintes lemas:

[1]Cabe notar que o caso em que $\mathcal{B}_0$ ou $\mathcal{B}_1$ é um ponto, a definição de semidistância entre dois conjuntos recai para a definição da distância usual de ponto a conjunto. Para simplificar a notação denotaremos a distância usual de ponto a conjunto também por $d(\cdot, \cdot)$

Lema 1.3 *Suponhamos válida a hipótese (H2). Se* (φ_n) *é limitada e* $t_n \to \infty$*, então* $S_2(t_n)\varphi_n \to 0$ *e* $S_1(t_n)\varphi_n$ *é convergente se, e somente se,* $S(t_n)\varphi_n$ *converge (e terá limites iguais).*

Prova. Pela hipótese (H2), $||S_2(t_n)\varphi_n||_X$ é uma sequência limitada superiormente pela sequência real $r_C(t_n)$ (pois (φ_n) é limitada, portanto, contida em um limitado C) que converge para 0 e limitada inferiormente pela sequência constante 0. Sobre a segunda parte do lema, observe que, pelas propriedades de somas de sequências reais, como

$$S(t_n)\varphi_n = S_1(t_n)\varphi_n + S_2(t_n)\varphi_n,$$

temos daí que $S(t_n)\varphi_n$ converge se, e somente se, $S_1(t_n)\varphi_n$ converge (e convergem para o mesmo valor), completando a demonstração do lema. ■

Lema 1.4 *Se o semigrupo* $S(t)_{t\geq 0}$ *satisfaz (H1) ou (H2), então, para qualquer conjunto limitado não vazio* $\mathcal{B}_0$ *de* X*,* $\omega(\mathcal{B}_0)$ *é não vazio, compacto e invariante.*

Prova. Se a hipótese (H1) for verificada, este lema segue direto do Lema 1.2. Suponha agora que apenas a hipótese (H2) seja verificada. Usando o Lema 1.3 e a Observação 1.3, temos que $\omega(\mathcal{B}_0)$ é igual ao conjunto

$$\omega_1(\mathcal{B}_0) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S_1(t)\mathcal{B}_0},$$

pois dado $\varphi \in \omega(\mathcal{B}_0)$, temos pela Observação 1.3 que existe uma sequência $\varphi_n \in \mathcal{B}_0$ e uma sequência t_n tal que $t_n \to \infty$ e

$$S(t_n)\varphi_n \to \varphi \text{ quando } t \to \infty.$$

Devido ao Lema 1.3, $S_1(t_n)\varphi_n$ também vai convergir para φ. Note que a caracterização dada na Observação 1.3 também pode ser aplicada para caracterizar os elementos de $\omega_1(\mathcal{B}_0)$. Daí $\varphi \in \omega_1(\mathcal{B}_0)$, provando $\omega(\mathcal{B}_0) \subset \omega_1(\mathcal{B}_0)$. A inclusão contrária é análoga.

Note que os conjuntos dados por $\overline{\bigcup_{t\geq s} S_1(t)\mathcal{B}_0}$ são não vazios, fechados e diminuem (no sentido de inclusão) quando s cresce. Além disso, pela hipótese (H2), temos que $\overline{\bigcup_{t\geq t_0} S_1(t)\mathcal{B}_0}$ é compacto para um t_0 suficientemente grande. Daí $\omega(\mathcal{B}_0)$ é não vazio e compacto.

Mostraremos agora que $\omega(\mathcal{B}_0)$ é invariante, isto é, $S(t)\omega(\mathcal{B}) = \omega(\mathcal{B})$. Primeiramente, tome $\psi \in S(t)\omega(\mathcal{B})$ dada por $\psi = S(t)\varphi$, $\varphi \in \omega(\mathcal{B})$. Pela Observação 1.3, existem sequências φ_n e t_n tais que, usando as propriedades de semigrupos e de limite de sequência,

$$S(t)S(t_n)\varphi_n = S(t+t_n)\varphi_n \to S(t)\varphi = \psi.$$

Daí, existem sequências $t+t_n \to \infty$ e $\varphi_n \in \mathcal{B}$ que satisfazem a caracterização dada na Observação 1.3 para ψ, ou seja, $\psi \in \omega(\mathcal{B})$, mostrando que $S(t)\omega(\mathcal{B}) \subset \omega(\mathcal{B})$. Tome agora $\varphi \in \omega(\mathcal{B})$. Tome as sequências t_n e φ_n da Observação 1.3. Para $t_n - t \geq 0$, a sequência é da forma

$$S(t_n - t)\varphi_n = S_1(t_n - t)\varphi_n + S_2(t_n - t)\varphi_n.$$

Pela hipótese, como o conjunto dos pontos da sequência $S_1(t - t_n)\varphi_n$ é relativamente compacto, existirá uma subsequência convergente,

$$S_1(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \to \psi \text{ quando } n_i \to \infty.$$

Como $S_2(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \to 0$ (pois é uma subsequência da sequência $S_2(t_n - t)\varphi_n$ que converge para 0), temos que

$$S(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \to \psi \text{ quando } n_i \to \infty.$$

Daí, pela caracterização dada na Observação 1.3, $\psi \in \omega(\mathcal{B}_0)$ e

$$S(t)\psi = \lim_{n_i \to \infty} S(t)S(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} = \varphi \in S(t)\omega(\mathcal{B}_0).$$

concluindo que

$$S(t)\omega(\mathcal{B}) = \omega(\mathcal{B}).$$

ou seja, $\omega(\mathcal{B})$ é invariante. ∎

Lema 1.5 *Seja $\mathcal{U}$ um conjunto aberto, convexo e conexo e seja $K \subset \mathcal{U}$ um conjunto invariante compacto que atrai compactos sob o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Então K é conexo.*

Antes de demonstrar este lema, precisamos da seguinte definição:

Definição 1.12 *Seja C um subconjunto de X. A* casca convexa *de C, denotada por $convC$, é o menor conjunto convexo que contém C.*

Prova do Lema 1.5. O fecho da casca convexa de K, $\overline{convK} = \mathcal{B}$, é compacta (veja [1], Teorema 5.35, p.185), conexa e está contida em $\mathcal{U}$, portanto K atrai $\mathcal{B}$. Suponha por absurdo que K não seja conexo. Daí existe uma cisão não trivial de K, isto é, existem A_1 e A_2 tais que $A_1 \cap K \neq \emptyset$, $A_2 \cap K \neq \emptyset$, $K \subset A_1 \cup A_2$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Como $K \subset \mathcal{B}$ e K é invariante, temos que

$$K = S(t)K \subset S(t)\mathcal{B}.$$

Daí $A_1 \cap S(t)\mathcal{B} \neq \emptyset$ e $A_2 \cap S(t)\mathcal{B} \neq \emptyset$. Como $\mathcal{B}$ é conexo e a imagem de aplicações contínuas de domínios conexos é também conexa, segue que $S(t)\mathcal{B}$ é conexa. Daí $A_1 \cup A_2$ não cobre $S(t)\mathcal{B}$, portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in S(n)\mathcal{B}$ tal que $x_n \notin A_1 \cup A_2$. Se a hipótese (H1) for válida, esta sequência será relativamente compacta. Por outro lado, se somente a hipótese (H2) for válida, escrevemos x_n como $x_n = S_1(n)y_n + S_2(n)y_n$. Pela hipótese (H2) e pelo Lema 1.3, a sequência $S_1(n)y_n$ será relativamente compacta e $S_2(n)y_n \to 0$, implicando que x_n é uma sequência relativamente compacta. Como K atrai o conjunto dos pontos de x_n, vai existir uma subsequência de x_n que converge para um ponto $x \in K$. Este ponto x não pertence a $A_1 \cup A_2$, contradizendo a hipótese.

■

Estamos finalmente prontos para mostrar quando que a existência de um conjunto absorvente implica a existência de um atrator.

Teorema 1.13 *Suponha que X seja um espaço métrico, que os operadores $S(t)$ (semi-grupo) dados satisfaçam a hipótese (H1) ou a hipótese (H2) e suponha que existam um conjunto aberto $\mathcal{U}$ e um subconjunto limitado $\mathcal{B}$ de $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{B}$ absorve $\mathcal{U}$. Então o conjunto $A = \omega(\mathcal{B})$ é o atrator compacto maximal que atrai os conjuntos limitados de $\mathcal{U}$. Mais ainda, se X é um espaço de Banach e $\mathcal{U}$ é convexo e conexo, então A também será conexo.*

Prova. Suponhamos inicialmente que a hipótese (H1) se verifica. Como $\bigcup_{t \geq t_0} S(t)\mathcal{B}$ é relativamente compacto, temos pelo Lema 1.2 que $\omega(\mathcal{B})$ é não vazio, compacto e invariante. Suponha, por contradição, que A não seja um atrator, ou seja, que para algum limitado $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{U}$, $S(t)\mathcal{B}_0$ não se aproxime de A, ou seja,

$$d(S(t)\mathcal{B}_0, A) \nrightarrow 0 \text{ quando } t \to \infty.$$

Daí existe um $\delta > 0$ e uma sequência $t_n \to \infty$ tal que

$$d(S(t_n)\mathcal{B}_0, A) \geq \delta > 0, \qquad \forall n.$$

Daí, para cada $n \in \mathbb{N}$ existirá um $b_n \in \mathcal{B}_0$ tal que

$$d(S(t_n)b_n, A) \geq \frac{\delta}{2} > 0.$$

Como $\mathcal{B}$ é absorvente, $S(t_n)\mathcal{B}_0$ estará contido em $\mathcal{B}$ para n suficientemente grande. Portanto, $S(t_n)b_n$ estará contido em $\mathcal{B}$ para todo $t_n \geq t_{n_0}$, para algum t_{n_0}. Pela hipótese (H1), a sequência $S(t_n)b_n$ é relativamente compacta. Daí existe uma subsequência convergente tal que

$$\beta = \lim_{n_i \to \infty} S(t_{n_i})b_{n_i} = \lim_{n_i \to \infty} S(t_{n_i} - t_{n_0})S(t_{n_0})b_{n_i}.$$

Como $S(t_{n_0})b_n \in \mathcal{B}$, segue que $\beta \in \omega(\mathcal{B}) = A$, ou seja,

$$d(S(t_{n_i})b_{n_i}, A) \to 0,$$

o que contradiz a hipótese de A não ser atrator. Mostraremos agora que A é maximal. Seja A' um atrator limitado tal que $A' \subset \mathcal{U}$. Daí, como A' é invariante e $\mathcal{B}$ é um conjunto absorvente, temos que para um t suficientemente grande, $A' = S(t)A' \subset \mathcal{B}$. Daí $A' = \omega(A') \subset \omega(\mathcal{B}) = A$, mostrando que $A' \subset A$, ou seja, A é maximal. A conexidade de A segue do Lema 1.5, concluindo a demonstração para o caso de supormos a hipótese (H1).

Suponha agora que apenas a hipótese (H2) se verifica. Pelo Lema 1.4, $\omega(\mathcal{B}) = A$ é não vazio, compacto e invariante. Mostraremos que A é um atrator. Suponhamos então, por absurdo, que A não seja atrator, ou seja, que para algum limitado $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{U}$, $d(S(t)\mathcal{B}_0, A) \not\to 0$ quando $t \to \infty$. Daí existe um $\delta > 0$ e uma sequência $t_n \to \infty$ tal que

$$d(S(t_n)\mathcal{B}_0, A) \geq \delta > 0, \qquad \forall n.$$

Dai, para cada $n \in \mathbb{N}$ existirá um $b_n \in \mathcal{B}_0$ tal que

$$d(S(t_n)b_n, A) \geq \frac{\delta}{2} > 0.$$

Como $\mathcal{B}$ é absorvente, $S(t_n)\mathcal{B}_0$ estará contido em $\mathcal{B}$ a partir de um t_n. Portanto, $S(t_n)b_n$ estará contido em $\mathcal{B}$ a partir de um n_0 suficientemente grande. Pela hipótese (H2), a sequência $S_1(t_n)b_n$ é relativamente compacta. Daí, pelo Lema 1.3, $S(t_n)b_n$ é uma sequência relativamente compacta, portanto existe uma subsequência convergente tal que

$$\beta = \lim_{n_i \to \infty} S(t_{n_i})b_n = \lim_{n \to \infty} S(t_{n_i} - t_{n_0})S(t_{n_0})b_{n_0}.$$

Como $S(t_{n_0})b_{n_0} \in \mathcal{B}$, segue que $\beta \in \omega(\mathcal{B}) = A$, ou seja,

$$d(S(t_{n_i})b_{n_i}, A) \to 0,$$

contradizendo a hipótese, mostrando que $A = \omega(\mathcal{B})$ é, de fato, um atrator. Os resultados sobre a conexidade que faltam para concluir este teorema seguem do Lema 1.5. ■

Definição 1.14 *Seja X um espaço de Banach, $S(t)$ um semigrupo em X e $V : X \to \mathbb{R}$ uma aplicação contínua. A função V é dita* função de Lyapunov *se*

(i) V é limitada inferiormente

(ii) $V(x) \to \infty$ quando $||x||_X \to \infty$

(iii) $V(S(t)x)$ é não crescente em t para cada $x \in X$

(iv) Se x é tal que $V(S(t)x) = V(x), \quad \forall t \geq 0$, então x é um ponto de equilíbrio deste fluxo.

1.4 Convolução de Funções

Nesta seção definimos o produto convolução de funções e estudamos algumas de suas propriedades.

Definição 1.15 *Dadas duas funções reais com valores reais f e g, definimos o produto convolução entre f e g pela expressão*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy,$$

para os pontos x tais que a integral exista, isto é, a função $y \in \mathbb{R} \mapsto f(x-y)g(y)$ seja integrável.

Proposição 1.16 *O produto convolução satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $f * g = g * f$;

(ii) $f * (g + h) = f * g + f * h$;

(iii) $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Prova. Para verificarmos (i), fazemos a mudança de variável $z = x - y$ e obtemos

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(z)g(x-z)dz \\ &= (g * f)(x).\end{aligned}$$

No caso da propriedade (ii) temos,

$$\begin{aligned}[f * (g+h)](x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)[(g+h)(y)]dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)[g(y)+h(y)]dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy + \int_{\mathbb{R}} f(x-y)h(y)dy \\ &= (f*g)(x) + (f*h)(x).\end{aligned}$$

Finalmente, usando (i) e o Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned}[(f*g)*h](x) &= \int_{\mathbb{R}} (f*g)(x-y)h(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(z)g(x-y-z)dz\, h(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(z)\left(\int_{\mathbb{R}} g(x-z-y)h(y)dy\right)dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(z)(g*h)(x-z)dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} (g*h)(x-z)f(z)dz \\ &= [(g*h)*f](x) \\ &= [f*(g*h)](x).\end{aligned}$$

o que justifica (iii). ∎

Teorema 1.17 *(Veja [5], p.242.) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $D_x g$ for limitada, então $f * g \in C^1(\mathbb{R})$ e $D_x(f*g) = f*(D_x g)$.*

Prova. Defina

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-y)f(y)dy.$$

Daí, pela regra de Leibniz (veja Apêndice A.1), temos

$$\varphi'(x) = \int_{\mathbb{R}} g_x(x-y)f(y)dy. \tag{1.26}$$

Note que a integral em (1.26) converge uniformemente em $-\infty < x < +\infty$, pois g_x é limitada e $f \in L^1$. Portanto,

$$\begin{aligned} D_x(f * g)(x) &= \varphi'(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g_x(x-y)f(y)dy \\ &= [(D_x g) * f](x) \\ &= [f * (D_x g)](x). \end{aligned}$$

■

Combinando o Teorema 1.17 com a Proposição 1.16 é imediato o seguinte resultado:

Corolário 1.18 *Sejam f, g duas funções de classe $C^1(\mathbb{R})$ com $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ com $D_x f$ e $D_x g$ limitadas. Então*

$$D_x(f * g) = (D_x f) * g = (D_x g) * f.$$

Teorema 1.19 (Desigualdade de Young Generalizada) *Sejam $X = \mathbb{R}^n$, $C > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$. Suponha g uma função contínua em $X \times X$ tal que*

$$\sup_{x \in X} \int_X |g(x,y)|dy \leq C, \quad \sup_{y \in X} |g(x,y)|dx \leq C.$$

Se $f \in L^p(X)$, a função Tf definida por

$$(Tf)(x) = \int_X g(x,y)f(y)dy$$

está bem definida q.t.p., $Tf \in L^p(X)$ e $\|Tf\|_p \leq C\|f\|_p$.

Prova. Suponha $1 < p < \infty$ e seja q o expoente conjugado de p, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} |(Tf)(x)| &\leq \left[\int_X |g(x,y)|dy\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_X |g(x,y)||f(y)|^p dy\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C^{\frac{1}{q}} \left[\int_X |g(x,y)||f(y)|^p dy\right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Elevando ambos os lados a potência p, integrando e usando Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} \int_X |(Tf)(x)|^p dx &\leq C^{\frac{p}{q}} \int_X \int_X |g(x,y)||f(y)|^p dy dx \\ &\leq C^{\frac{p}{q}+1} \int_X |f(y)|^p dy. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\|Tf\|_p &\leq C^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\|f\|_p\\ &= C\|f\|_p.\end{aligned}$$

Esta estimativa implica, em particular, que a integral definida em $(Tf)(x)$ converge absolutamente q.t.p., de modo que o teorema está provado para o caso $1 < p < \infty$. O caso $p = 1$ é similar, porém é mais fácil e requer somente a hipótese $\int_X |g(x,y)|dx \leq C$, e o caso $p = \infty$, somente a hipótese $\int_X |g(x,y)|dy \leq C$. ■

Teorema 1.20 (Desigualdade de Young) *(Veja [5], p.241.) Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^p(\mathbb{R})$, então $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ e*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p.$$

Prova. Basta aplicar o Teorema 1.19 com $g(x,y) = f(x-y)$. ■

Capítulo 2

Existência de Atrator Global para uma Equação de Evolução Não Local

Neste capítulo, seguindo [3], mostramos que a equação (2.1) descrita abaixo gera um fluxo C^1 no espaço $L^2(S^1)$, o qual admite existência de um atrator global.

2.1 Formulação do Problema com condições periódicas

Considere a equação

$$\frac{\partial m}{\partial t}(x,t) = -m(x,t) + \tanh(\beta J * m(x,t)) \tag{2.1}$$

onde $m(x,t)$ é uma função definida em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, onde $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\beta > 1$, $J \in C^1(\mathbb{R})$ é uma função par, não negativa, com integral igual a 1, cujo suporte está contido no intervalo $[-1, 1]$. Recorde que o símbolo $*$ denota a *convolução na reta*, dada por

$$(J * m)(x) = \int_{\mathbb{R}} J(x-y)m(y)dy.$$

Observação 2.1 *Se $\beta \leq 1$, a equação tem um único equilíbrio, o qual é globalmente estável. Portanto, neste caso atrator é trivial, (veja [12] e [14]). Se $\beta > 1$, é fácil ver que a equação (2.1) tem três equilíbrios constantes, que são 0 e $\pm m_\beta$, onde m_β é a solução positiva da equação*

$$m_\beta = \tanh(\beta m_\beta) \tag{2.2}$$

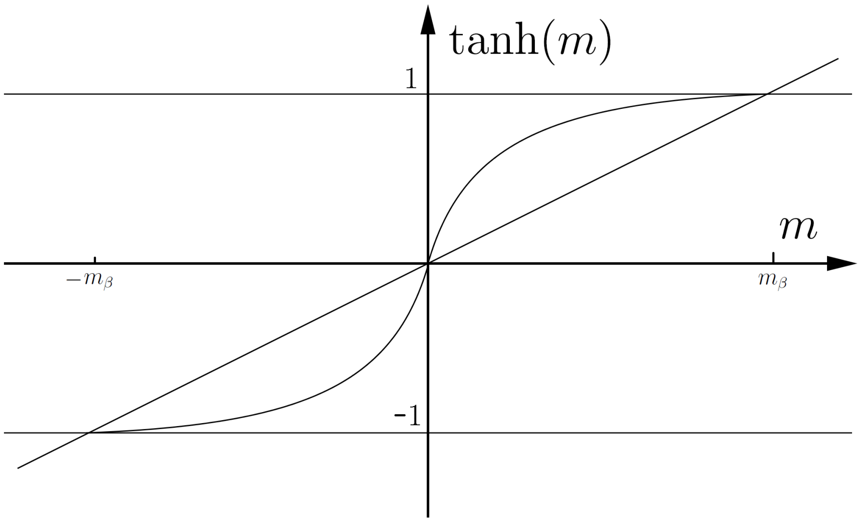

Figura 2.1: Equilíbrios constantes.

O problema de Cauchy para equação (2.1) está bem posto no espaço das funções contínuas e limitadas, $C_b(\mathbb{R})$, com a norma do sup, pois a função definida pelo lado direito de (2.1) é globalmente lipschitz. Então, neste espaço, esta equação gera um fluxo $T(t)$, dado por $(T(t)u)(x) = u(x,t)$, onde $u(x,t)$ é dado pela fórmula de variação das constantes por

$$u(x,t) = e^{-t}u(x,0) + \int_0^t e^{-(t-s)} \tanh(\beta(J * u)(x,s))ds.$$

Observação 2.2 *O espaço das funções 2τ-periódicas na primeira variável é invariante sob o fluxo $T(t)$ gerado por (2.1).*

De fato, seja $u(x,t)$ uma solução de (2.1) com condição inicial $u(\cdot,0) \in \mathcal{P}_{2\tau}$. Defina $V(x,t) = u(x+2\tau,t)$. Observe primeiro que

$$\begin{aligned}(J * u)(w+2\tau) &= \int_{\mathbb{R}} u(w+2\tau-y)J(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} V(w-y)J(y)dy \\ &= (J * V)(w). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Daí, usando a equação (2.1), segue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}V(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}u(x+2\tau,t) \\ &= -u(x+2\tau,t) + \tanh(\beta(J * u)(x+2\tau,t)) \\ &= -V(x,t) + \tanh(\beta(J * V)(x,t)).\end{aligned}$$

Além disso,

$$V(x,0) = u(x+2\tau,0) = u(x,0).$$

Portanto, pelo Teorema de Existência e Unicidade (veja Teorema 1.2), temos que $V = u$, mostrando que $\mathcal{P}_{2\tau}$ é invariante sob T.

Se $\tau > 1$ é um número positivo dado, definimos J^τ como a extensão 2τ-periódica da restrição de J em $[-\tau,\tau]$.

Lema 2.1 *Se $u \in \mathcal{P}_{2\tau}$ então*

$$(J * u)(x) = \int_{-\tau}^{\tau} J^\tau(x-y)u(y)dy.$$

Prova. Seja $u \in \mathcal{P}_{2\tau}$. Temos

$$(J * u)(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}} J(x-y)u(y)dy.$$

Como o suporte de J está contido em $[-1,1]$,

$$\begin{aligned}(J * u)(x) &= \int_{x-\tau}^{x+\tau} J(x-y)u(y)dy \\ &= \int_{x-\tau}^{x+\tau} J^\tau(x-y)u(y)dy.\end{aligned}$$

Como u e J^τ são 2τ periódicas,

$$(J * u)(x) \;=\; \int_{-\tau}^{\tau} J^\tau(x-y)u(y)dy.$$

■

Do Lema 2.1, temos que a equação (2.1), restrita a $\mathcal{P}_{2\tau}, \tau > 1$, pode ser escrita como

$$\frac{\partial m}{\partial t}(x,t) = -m(x,t) + \tanh\Big(\beta\int_{-\tau}^{\tau} J^\tau(x-y)m(y)dy\Big). \tag{2.4}$$

Seja $u \in \mathcal{P}_{2\tau}$. Defina agora as funções $\varphi : [-\tau,\tau) \to S^1$ como

$$\varphi(x) = e^{i\frac{\pi}{\tau}x}$$

e $v : S^1 \to \mathbb{R}$ como

$$v(\varphi(x)) = u(x).$$

Em particular, escrevemos $\tilde{J}(\varphi(x)) = J^\tau(x)$. Daí temos o seguinte resultado

Proposição 2.1 *Uma função $u = u(x,t)$ é solução 2τ-periódica da equação (2.1) se, e somente se, $v(w,t) = u(\varphi^{-1}(w),t)$ é solução em S^1 de*

$$\frac{\partial m}{\partial t}(w,t) = -m(w,t) + \tanh\Big(\beta \tilde{J} * m(w,t)\Big), \tag{2.5}$$

onde $*$ denota convolução em S^1*, dada por*

$$(\tilde{J} * m)(w) = \int_{S^1} \tilde{J}(wz^{-1})m(z)dz$$

com $dz = \frac{\tau}{\pi}d\theta$, onde $d\theta$ denota a integração com respeito ao comprimento de arco.

Prova. Observe que se $\varphi(x) = w$, temos que

$$(J * u)(x) = (\tilde{J} * v)(w).$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} (\tilde{J} * v)(w) &= \int_{S^1} \tilde{J}(w \cdot z^{-1})v(z)dz && (2.6)\\ &= \int_{\varphi([-\tau,\tau])} \tilde{J}(w \cdot z^{-1})v(z)dz, && (2.7) \end{aligned}$$

onde $z = \varphi(y)$, $w = \varphi(x)$ e $dz = \frac{\tau}{\pi}d\theta$.

Pelo Teorema de Mudança de Variáveis, temos

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\tau}{\pi}d\theta \\ &= \frac{\tau}{\pi}|\varphi'(y)|dy \\ &= \frac{\tau}{\pi}|i\frac{\pi}{\tau}e^{i\frac{\pi}{\tau}y}|dy \\ &= \frac{\tau}{\pi}\cdot\frac{\pi}{\tau}|e^{i\frac{\pi}{\tau}y}|dy \\ &= dy. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} (\tilde{J} * v)(w) &= \int_{S^1} \tilde{J}(w \cdot z^{-1})v(z)dz \\ &= \int_{\varphi([-\tau,\tau])} \tilde{J}(\varphi(x)\frac{1}{\varphi(y)})v(\varphi(y))dy \\ &= \int_{S^1} \tilde{J}(e^{i\frac{\pi}{\tau}(x-y)})v(\varphi(y))dy \\ &= \int_{S^1} \tilde{J}(\varphi(x-y))v(\varphi(y))dy \\ &= \int_{\tau}^{\tau} J^{\tau}(x-y)u(y)dy \\ &= (J * u)(x). \end{aligned}$$

Daí, se $u = u(x,t)$ é uma solução 2τ-periódica de (2.1), considere $v(w,t) = u(\varphi^{-1}(w),t)$. Note que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}v(w,t) &= \frac{\partial}{\partial t}u(\varphi^{-1}(w),t)\\ &= -u(\varphi^{-1}(w),t)+\tanh(\beta J * u(\varphi^{-1}(w),t))\\ &= -v(w,t)+\tanh(\beta\tilde{J} * v(w,t)),\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

Observação 2.3 *É fácil verificar que*

$$\int_{S^1}\tilde{J}(w)dw = 1.$$

Nota: Para simplificar a notação, de agora em diante usaremos também J para representar $\tilde{J}$.

Proposição 2.2 *A função $F : L^2(S^1) \to L^2(S^1)$ definida pelo lado direito da equação (2.5), isto é,*

$$F(u) = -u + \tanh(\beta J * u)$$

é globalmente Lipschitz em $L^2(S^1)$.

Prova. Usando a desigualdade triangular e a propriedade de que a tangente hiperbólica é lipschitziana (com constante de Lipschitz $M = 1$), temos

$$\begin{aligned}||F(u)-F(v)||_{L^2} &= ||(-u+\tanh(\beta J * u)) - (-v+\tanh(\beta J * v))||_{L^2}\\ &\leq ||u-v||_{L^2} + ||\beta(J * u) - \beta(J * v)||_{L^2}.\end{aligned}$$

Pela linearidade da convolução,

$$||F(u)-F(v)||_{L^2} = ||u-v||_{L^2} + \beta||J * (u-v)||_{L^2}. \tag{2.8}$$

Pela desigualdade de Young e pelo fato que a integral de J é 1, temos que

$$\begin{aligned}||J * (u-v)||_{L^2} &\leq ||J||_{L^1}||u-v||_{L^2}\\ &= ||u-v||_{L^2}.\end{aligned}$$

Portanto, de (2.8), temos que

$$||F(u) - F(v)||_{L^2} \leq (1+\beta)||u-v||_{L^2},$$

mostrando que F é globalmente lipschitziana. ■

Observação 2.4 *Segue da Proposição 2.2 e do Teorema 1.4 que o problema de Cauchy para (2.5) está bem posto com soluções globalmente definidas.*

Proposição 2.3 *A função F definida pelo lado direito de (2.5) é diferenciável segundo Fréchet.*

Prova. Dado $u \in L^2(S^1)$, mostraremos que $DF(u)v$ (derivada de Gâteaux) existe para qualquer $v \in L^2(S^1)$ e

$$DF(u)v = -v + \operatorname{sech}^2(\beta J * u)(\beta J * v).$$

Tome $u, v \in L^2(S^1)$ quaisquer. Defina $g(u) = \beta J * u$. Observe que

$$\begin{aligned} Dg(u)v &= \lim_{t\to 0} \frac{\beta J * (u+vt) - \beta J * u}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\beta J * u + t\beta J * v - \beta J * u}{t}, \end{aligned}$$

Portanto,

$$Dg(u)v = \beta J * v. \tag{2.9}$$

Calculando

$$\begin{aligned} DF(u)v &= \lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \Big[\frac{-u - tv + u}{t} + \frac{\tanh(\beta J * (u+tv)) - \tanh(\beta J * u)}{t}\Big]. \end{aligned}$$

Daí

$$DF(u)v = -v + \lim_{t\to 0} \frac{\tanh(g(u+vt)) - \tanh(g(u))}{t} \tag{2.10}$$

Temos portanto de (2.9) que

$$\begin{aligned} DF(u)v &= -v + D\tanh(g(u))v \\ &= -v + D\tanh(g(u))Dg(u)v \\ &= -v + D\tanh(g(u))\beta J * v. \end{aligned}$$

Como v foi tomado arbitrariamente em $L^2(S^1)$, temos que F é diferenciável a Gâteaux e sua diferencial no ponto $u \in L^2(S^1)$ é dada por

$$\begin{aligned} DF(u) &: L^2(S^1) \to L^2(S^1) \\ DF(u)v &= -v + \operatorname{sech}^2(\beta J * u)\beta J * v. \end{aligned}$$

Observe que devido a linearidade da convolução, para cada $u \in L^2(S^1)$, temos que $DF(u)$ é um operador linear. Mais ainda,

$$||DF(u)v||_{L^2} \leq ||v||_{L^2} + ||\operatorname{sech}^2(\beta(J * u)\beta(J * v)||_{L^2} \tag{2.11}$$

Mas

$$\begin{aligned} |(J * v)(w)| &\leq \int_{S^1} |J(w \cdot z^{-1})v(z)|dz \\ &\leq \int_{S^1} ||J||_\infty |v(z)|dz. \end{aligned}$$

Daí, usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$|(J * v)(w)| \leq ||J||_\infty \sqrt{2\tau}||v||_{L^2}. \tag{2.12}$$

Além disso,

$$\int_{S^1} |\operatorname{sech}^2(\beta(J * u)(w))|^2 dw \leq \int_{S^1} dw = 2\tau. \tag{2.13}$$

Logo, usando (2.12) e (2.13), segue que

$$\begin{aligned} ||\operatorname{sech}^2(\beta(J * u)\beta(J * v)||_{L^2}^2 &= \int_{S^1} |\operatorname{sech}^2(\beta(J * u)(w))|^2 \beta^2 |(J * v)(w)|^2 dw \\ &\leq \int_{S^1} |\operatorname{sech}^2(\beta(J * u)(w))|^2 \beta^2 2\tau ||J||_\infty^2 ||v||_{L^2}^2 dw \\ &= \beta^2 ||J||_\infty^2 2\tau ||v||_{L^2}^2 \int_{S^1} |\operatorname{sech}^2(\beta(J * u)(w))|^2 dw \\ &\leq \beta^2 ||J||_\infty^2 (2\tau)^2 ||v||_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Daí,

$$||\operatorname{sech}^2(\beta(J * u)\beta(J * v)||_{L^2} \leq \beta ||J||_\infty (2\tau) ||v||_{L^2}.$$

Portanto, voltando a (2.11),

$$||DF(u)v||_{L^2} \leq (1 + \beta ||J||_\infty 2\tau)||v||_{L^2},$$

ou seja, DF é um operador linear limitado.

Além disso, o operador

$$\begin{aligned} DF : L^2 &\rightarrow \mathcal{L}(L^2(S^1), L^2(S^1)) \\ u &\rightarrow DF((u) \end{aligned}$$

é contínuo. De fato, tome u_1 e u_2 em $L^2(S^1)$ e $v \in L^2(S^1)$ arbitrário. Temos inicialmente que

$$||DF(u_1)v - DF(u_2)v||_{L^2} = ||[\operatorname{sech}^2(\beta(J * u_1)) - \operatorname{sech}^2(\beta(J * u_2))](\beta J * v)||_{L^2}.$$

Fixando u_1 e fazendo $u_2 \rightarrow u_1$ em $L^2(S^1)$ temos, de (2.12), que $(\beta J * u_1)$ está em uma bola de $L^\infty(S^1)$ centrada em 0. Daí, como a função $sech^2$ é lipschitziana (com constante de Lipschitz igual a 2), temos que

$$|\operatorname{sech}^2(\beta(J * u_1))(w) - \operatorname{sech}^2(\beta(J * u_2))(w)| \leq 2\beta|J * (u_1 - u_2)(w)|, \ \forall\ w \in S^1.$$

Desta desigualdade e de (2.12) temos

$$\begin{aligned} ||DF(u_1)v - DF(u_2)v||_{L^2} &= \Big(\int_{S^1} |\operatorname{sech}^2(\beta(J * u_1))(w) - \\ &\quad - \operatorname{sech}^2(\beta(J * u_2))(w)|^2\beta^2|(J * v)(w)|^2 dw\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \Big(\int_{S^1} 4\beta^2|J * (u_1 - u_2)(w)|^2\beta^2|(J * v)(w)|^2 dw\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\beta^2 2\tau\sqrt{2\tau}||J||_\infty^2||u_1 - u_2||_{L^2}||v||_{L^2}. \end{aligned}$$

Daí, quando $u_2 \rightarrow u_1$ em $L^2(S^1)$, temos que $||DF(u_1)v - DF(u_2)v||_{L^2} \rightarrow 0$, mostrando que DF é um operador contínuo. Pelo Proposição A.10 a demonstração está concluída. ■

Observação 2.5 *Segue da Proposição 2.3 que a equação (2.5) gera um fluxo C^1 no espaço de fase $L^2(S^1)$.*

2.2 Existência de Atrator Global

Esta seção tem como objetivo mostrar a existência de conjunto compacto e invariante maximal para o fluxo $T(t)$ gerado pela equação (2.5), o qual atrai conjuntos limitados de $L^2(S^1)$.

Lema 2.2.1 *Para* $0 < \varepsilon < 1$*, a bola de raio* $\frac{\sqrt{2\tau}}{1-\varepsilon}$ *é um conjunto absorvente sob o fluxo* $T(t)$ *gerado pela equação (2.5).*

Prova. Seja $u(z,t)$ a solução de (2.5) com condição inicial $u(z,0)$. Então, pela fórmula da variação de constantes,

$$u(z,t) = e^{-t}u(z,0) + \int_0^t e^{-(t-s)}\tanh(\beta(J*u)(z,s))ds.$$

Observe que

$$\frac{d}{dt}\int_{S^1}|u(z,t)|^2dz = -2\Big(\int_{S^1}u^2(z,t)dz - \int_{S^1}u(z,t)\tanh(\beta(J*u)(z,t))dz\Big). \tag{2.14}$$

De fato,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{S^1}|u(z,t)|^2dz &= \frac{d}{dt}\int_{S^1}u^2(z,t)dz\\ &= \int_{S^1}\frac{d}{dt}u^2(z,t)dz.\end{aligned}$$

Pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dt}\int_{S^1}|u(z,t)|^2dz = \int_{S^1}2u(z,t)\frac{\partial}{\partial t}u(z,t)dz.$$

Como $u(z,t)$ é solução de (2.5), segue

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{S^1}|u(z,t)|^2dz &= \int_{S^1}2u(z,t)[-u(z,t)+\tanh(\beta(J*u)(z,t)]dz.\\ &= -2\int_{S^1}u^2(z,t)dz + 2\int_{S^1}u(z,t)\tanh(\beta(J*u)(z,t))dz,\end{aligned}$$

mostrando a equação (2.14). Pela desigualdade de Hölder, temos a seguinte estimativa sobre o segundo termo da direita de (2.14)

$$\int_{S^1}u(z,t)\tanh(\beta(J*u)(z,t))dz \;\leq\; ||u(\cdot,t)||_{L^2}\Big(\int_{S^1}(\tanh(\beta(J*u)(z,t))dz)\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Usando o fato de $|\tanh(z)| \leq 1\ \forall z \in S^1$, temos

$$\int_{S^1}u(z,t)\tanh(\beta(J*u)(z,t))dz \;\leq\; ||u(\cdot,t)||_{L^2}\sqrt{2\tau}$$

Portanto, de (2.14),

$$\frac{d}{dt}\int_{S^1}|u(z,t)|^2dz \leq -2||u(\cdot,t)||^2_{L^2}\Big(1 - \frac{\sqrt{2\tau}}{||u(\cdot,t)||_{L^2}}\Big). \tag{2.15}$$

Então, para $||u(\cdot,t)||_{L^2} \geq \frac{\sqrt{2\tau}}{1-\varepsilon}$ segue que

$$\frac{||u(\cdot,t)||_{L^2}}{\sqrt{2\tau}} \geq \frac{1}{1-\varepsilon},$$

ou seja,

$$\frac{\sqrt{2\tau}}{||u(\cdot,t)||_{L^2}} \leq 1-\varepsilon.$$

Portanto, de (2.15), resulta

$$\frac{d}{dt}\int_{S^1} |u(z,t)|^2 dz \leq -2\varepsilon ||u(\cdot,t)||_{L^2}^2,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}||u(\cdot,t)||_{L^2}^2 \leq -2\varepsilon ||u(\cdot,t)||_{L^2}^2.$$

Integrando de 0 a t, obtemos

$$||u(\cdot,t)||_{L^2}^2 \leq e^{-\varepsilon t}||u(\cdot,0)||_{L^2}^2. \tag{2.16}$$

Daí, quando $t \to \infty$, teremos que $||u(\cdot,t)||_{L^2} \to 0$, ou seja, a órbita de qualquer ponto fora da bola de centro 0 e raio $\frac{\sqrt{2\tau}}{1-\varepsilon}$ entrará nesta bola a partir de um t suficientemente grande, mostrando que esta bola é um conjunto absorvente para este fluxo $T(t)$, sendo que a norma de u tende a zero com taxa exponencial. ■

Teorema 2.4 *O fluxo $T(t)$ gerado pela equação (2.5) possui atrator global e este atrator está contido na bola de raio $\sqrt{2\tau}$.*

Prova. Seja $u(w,t)$ solução de (2.5) com solução inicial $u(w,0)$. Pela fórmula de variação das constantes, temos que

$$u(w,t) = \int_0^t e^{s-t}\tanh(\beta(J*u)(w,s))ds + e^{-t}u(w,0). \tag{2.17}$$

Podemos então reescrever o fluxo $T(t)u(w)$ como

$$T(t)u(w) = T_1(t)u(w) + T_2(t)u(w),$$

onde $T_1(t)u(w) = \int_0^t e^{s-t}\tanh(\beta(J*u)(w,s))ds$ e $T_2(t)u(w) = e^{-t}u(w,0)$. Nosso objetivo é mostrar que $T_1(t)u(w) \to 0$ quando $t \to \infty$ e $T_2(t)u(w)$ é uniformemente compacto, para com isto mostrar, usando o Teorema 1.13, que existe um atrator para este fluxo.

Suponha que $u(\cdot,0) \in C$, onde C é uma bola de raio R em $L^2(S^1)$ centrado na origem (portanto, um conjunto limitado que é atraído pelo absorvente encontrado na proposição anterior). Por causa disso, de 2.16, quando $t \to \infty$, temos que

$$||T_2(t)u||_{L^2} \to 0 \text{ uniformemente em } u.$$

Vamos mostrar agora que $T_1(t)$ é uniformemente compacto usando o Teorema de Imersão de Sobolev (veja Apêndice A.4). Para isso, precisaremos mostrar que $T_1(t)u \in W^{1,2}(S^1)$.

Por (2.16), temos que $||u(\cdot,t)||_{L^2} \leq K$ para $t \geq 0$, onde $K = \max\{R, \frac{\sqrt{2\tau}}{1-\varepsilon}\}$. Portanto, para $t \geq 0$, derivando em relação a w em ambos os lados, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w} T_1(t)u(w) &= \int_0^t e^{s-t} \frac{\partial}{\partial w} \tanh(\beta(J*u)(w,s))ds \\
&= \beta \int_0^t e^{s-t} \operatorname{sech}^2(\beta J * u(w,s))(J' * u)(w,s)ds.
\end{aligned}$$

Portanto, como $\operatorname{sech}^2(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial}{\partial w} T_1(t)u(w)\right| &\leq \beta \int_0^t e^{s-t} |J' * u(w,s)| ds \\
&\leq \beta \int_0^t e^{s-t} \int_{S^1} |J'(w \cdot z^{-1}) u(w,s)| dz ds.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Young,

$$\left|\frac{\partial}{\partial w} T_1(t)u(w)\right| \leq \beta \int_0^t e^{s-t} ||J'||_{L^1} \; ||u(\cdot,s)||_{L^2} ds.$$

Como $||J'||_{L^1}$ é uma constante e $||u(\cdot,s)||_{L^2}$ é limitado por K,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial}{\partial w} T_1(t)u(w)\right| &\leq \beta K ||J'|| \int_0^t e^{s-t} ds \\
&\leq \beta K ||J'||.
\end{aligned}$$

Segue daí que $|\frac{\partial}{\partial w} T_1(t)u(w)|$ é limitada por uma constante que não depende de t ou de u. Portanto $T_1(t)u \in W^{1,2}(S^1)$. Pelo Teorema de Imersão de Sobolev (veja Apêndice A.4), $\bigcup_{t \geq 0} T_1(t)C$ é relativamente compacto. Daí, pelo Teorema 1.13, para este fluxo existe atrator global, o qual é dado pelo conjunto ω-limite de $B(0, \sqrt{2\tau})$. ■

Teorema 2.5 *O atrator global A é limitado em $C^k(S^1)$ para cada inteiro $k \geq 0$.*

Prova. Seja $u(w,t)$ uma solução de (2.5) com condição inicial $u(w,t_0)$ contida no atrator A. Pelo método da variação de constantes,

$$u(w,t) = e^{-(t-t_0)}u((x,t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{s-t}\tanh(\beta(J*u)(w,s))ds.$$

Como A está contido na bola de raio $\sqrt{2\tau}$, segue que $u(w,t_0)$ é limitado por $\sqrt{2\tau}$ para qualquer t_0 escolhido. Daí se fizermos $t_0 \to -\infty$, teremos

$$u(w,t) = 0 + \int_{-\infty}^{t} e^{s-t}\tanh(\beta(J*u)(w,s))ds. \tag{2.18}$$

Aplicando o módulo em ambos os lados,

$$|u(w,t)| = |\int_{-\infty}^{t} e^{s-t}\tanh(\beta(J*u)(w,s))ds|. \tag{2.19}$$

Como $|\tanh(x)| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, segue que

$$\begin{aligned} |u(w,t)| &< \int_{-\infty}^{t} e^{s-t}ds \\ &< 1, \end{aligned}$$

mostrando que $u(\cdot,t)$ é limitado em $C^0(S^1)$.

Derivando agora (2.18) em relação a w, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w}u(w,t) &= \int_{\infty}^{t} e^{s-t}\frac{\partial}{\partial w}\tanh(\beta(J*u)(w,s))ds| \\ &= \beta\int_{-\infty}^{t} e^{s-t}\operatorname{sech}^2(\beta J*u(w,s))(J'*u)(w,s)ds. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} |\frac{\partial}{\partial w}u(w,t)| &\leq \beta\int_{-\infty}^{t} e^{s-t}|\operatorname{sech}^2(\beta J*u(w,s))(J'*u)(w,s)ds| \\ &\leq \sqrt{2\tau}\beta\int_{\infty}^{t} e^{s-t}||J'||ds \\ &\leq \sqrt{2\tau}\beta||J'||, \end{aligned}$$

mostrando que $u(\cdot,t)$ é limitada em $C^1(S^1)$. Diferenciando (2.18) mais uma vez em relação a w, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial w^2}u(w,t) &= \int_{-\infty}^{t} e^{s-t}\Big\{2\beta^2\operatorname{sech}(\beta J*u(w,s))\operatorname{sech}\tanh(\beta J*u(w,s))(J'*u(w,s))^2 + \\ &\quad \beta\operatorname{sech}^2(\beta J*u(w,s))(J'*u'(w,s))\Big\}ds. \end{aligned}$$

Note que neste passo foi decidido escrever $(J' * u)'$ como $J' * u'$. Pelas regras de derivação de convolução de funções vistas no Capítulo 1, vale $(f * g)' = (f' * g) = (f * g')$ quando estas funções estão bem definidas. No entanto, sobre a função J, por hipótese, é garantido apenas a derivada de primeira ordem.

Aplicando o módulo e usando que as funções *sech* e *tanh* tem módulo menor do que 1, temos

$$\begin{aligned}
|\frac{\partial^2}{\partial w^2} u(w,t)| &\leq \beta \int_{-\infty}^{t} e^{s-t} \Big(2\beta (J' * u(w,s))^2 + J' * u'(w,s) \Big) ds \\
&\leq \beta \int_{-\infty}^{t} e^{s-t} 2\beta ||J'||^2 ||u(\cdot,s)||^2 ds + \int_{-\infty}^{t} e^{s-t} ||J'|| \; ||u'(\cdot,s)|| ds.
\end{aligned}$$

Como pelos passos anteriores $||u'(\cdot,s)||$ é limitada (por $\sqrt{2\tau}\beta||J'||$) e $||u(\cdot,s)||$ é limitada (por 1), temos

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial w^2} u(w,t) \right| \leq \beta^2 2\tau ||J'||^2 + \beta\sqrt{2\tau}||J'||,$$

mostrando que $u(\cdot,t)$ é limitada em $C^2(S^1)$. Da mesma forma, a derivada de u de ordem k será limitada por uma expressão que depende apenas das derivadas de ordem menores que k (que são finitas) e das constantes $||J||$ e $||J'||$, mostrando que $u(\cdot,t)$ é limitada em $C^k(S^1)$ para todo k inteiro. ■

Capítulo 3

Existência de Soluções de Equilíbrios não Triviais

Neste Capítulo, baseado em [3] e [15], exibimos um funcional energia, que decresce ao longo das órbitas de (2.5), e usamos este funcional para aplicar o Princípio da Invariância de La Salle na demonstração de existência de soluções de equilíbrios não triviais. Além disso, verificamos que esses equilíbrios não triviais são instáveis.

3.1 Existência de um funcional energia

Em [12], para mostrar a existência de soluções de equilíbrio não triviais no espaço das funções contínuas limitadas em $\mathbb{R}$ é usado o funcional $\tilde{\mathcal{F}}$, dado por

$$\tilde{\mathcal{F}}(m) = \int_{\mathbb{R}} [f(m(x)) - f(m_\beta)]dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} J(x-y)[m(x)-m(y)]^2 dxdy, \tag{3.1}$$

onde $f(m)$ é dado por

$$f(m) = -\frac{1}{2}m^2 - \beta^{-1}i(m) \tag{3.2}$$

e $i(m)$ é dado por

$$i(m) = -\frac{1+m}{2}\log(\frac{1+m}{2}) - \frac{1-m}{2}\log(\frac{1-m}{2}). \tag{3.3}$$

De acordo com [12], este funcional, no espaço das funções contínuas e limitadas sobre $\mathbb{R}$, só está bem definido se $m(x)$ está próximo de $\pm m_\beta$ "numa vizinhança"de $\pm\infty$.

No entanto, em nosso contexto, podemos considerar o funcional similar dado abaixo, o qual está bem definido em todo espaço de fase $L^2(S^1)$.

$$\mathcal{F}(u) = \int_{S^1} [f(u(w) - f(m_\beta)]dw + \frac{1}{4}\int_{S^1}\int_{S^1} J(w\cdot z^{-1})[u(w) - u(w)]^2 dwdz \qquad (3.4)$$

Para verificarmos que o funcional dado em (3.4) tem a propriedade de Lyapunov de decrescer ao longo das órbitas de (2.5), usaremos um resultado de comparação que será demonstrado mais abaixo.

Definição 3.1 *Uma função $v(w,t)$ é uma* subsolução *do problema de Cauchy (2.5) com condição inicial $u(\cdot,0)$ se $v(w,0) \leq u(w,0)$ q.t.p. $\forall w \in S^1$, v é continuamente diferenciável em relação a t e satisfaz*

$$\frac{\partial v}{\partial t}(w,t) \leq -v(w,t) + \tanh(\beta(J * v(w,t)) \text{ q.t.p.}. \qquad (3.5)$$

Analogamente, $V(w,t)$ é super solução se cumprir as propriedades de regularidade acima, satisfizer (3.5) com a desigualdade contrária e $V(w,0) \geq u(w,0)$ q.t.p. $\forall\ w \in S^1$.

Teorema 3.2 (Teorema da Comparação) *Suponha $v(w,t)$ uma subsolução do problema de Cauchy (2.5) com condição inicial $u(\cdot,0)$ e $V(w,t)$ uma supersolução do mesmo problema com a mesma condição inicial. Então a solução $u(\cdot,t)$ do problema (2.5) com condição inicial $u(\cdot,0)$ satisfaz*

$$v(w,t) \leq u(w,t) \leq V(w,t) \text{ q.t.p.}.$$

Prova. Para algum $T > 0$, defina o operador G em $L^\infty(S^1 \times [0,T])$ como

$$G(f)(w,t) = e^{-t}f(w,0) + \int_0^t e^{-(t-s)}\tanh(\beta(J * f(w,s)))ds$$

Daí

$$G(f)(w,0) = f(w,0).$$

Como a função *tanh* é crescente, segue que G é monotônica crescente, pois dados $f_1 \leq f_2$ q.t.p. em $(L^\infty \times [0,T])$, temos

$$\begin{aligned} G(f_1)(w,t) &= e^{-t}f_1(w,0) + \int_0^t e^{-(t-s)}\tanh(\beta\int_{S^1} J(w\cdot z^{-1})f_1(w)dz)ds \\ &\leq e^{-t}f_2(w,0) + \int_0^t e^{-(t-s)}\tanh(\beta\int_{S^1} J(w\cdot z^{-1})f_2(w)dz)ds \\ &= G(f_2)(w,t). \end{aligned}$$

Como $|\tanh(x)| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, segue que

$$\begin{aligned} |G(f)(w,t)| &\leq e^{-t}|f(w,0)| + \int_0^t e^{-(t-s)}|\tanh(\beta(J*f)(w,s))|ds \\ &\leq e^{-t}|f(w,0)| + \int_0^t e^{-(t-s)}ds. \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} ||G(f)||_\infty &\leq e^{-t}||f||_\infty + \int_0^t e^{-(t-s)}ds \\ &\leq ||f||_\infty + 1. \end{aligned}$$

Então G é uma função de $L^\infty(S^1 \times [0,T])$ em $L^\infty(S^1 \times [0,T])$.

Vamos mostrar agora que se $\beta T < 1$ então G é uma contração. De fato, lembrando que *tanh* é uma função lipschitziana com constante de Lipschitz igual a 1, temos que

$$\begin{aligned} |G(f_1)(w,t) - G(f_2)(w,t)| &= |\int_0^t e^{-(t-s)}[\tanh(\beta(J*f_1)(w,s)) \\ &\quad - \tanh(\beta(J*f_2)(w,s))]ds| \\ &\leq \int_0^t e^{-(t-s)}\beta|(J*f_1)(w,s) - (J*f_2)(w,s)|ds \\ &\leq \int_0^t e^{-(t-s)}\beta(J*|f_1 - f_2|)(w,s)ds \\ &\leq \int_0^t e^{-(t-s)}\beta J*||f_1 - f_2||_\infty ds \\ &\leq \beta||f_1 - f_2||_\infty \int_0^t e^{-(t-s)}ds. \end{aligned}$$

Como $t \leq T$, segue que

$$|G(f_1)(w,t) - G(f_2)(w,t)| \leq \beta T||f_1 - f_2||_\infty, \text{ para quase todo ponto em } S^1 \times [0,T].$$

Daí

$$||G(f_1) - G(f_2)||_\infty \leq ||f_1 - f_2||_\infty.$$

Logo G é uma contração.

Se $u(w,t)$ é solução de (2.5) com $u^0 = u(w,0)$, então pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach temos

$$u = \lim_{n\to\infty} G^n(u^0).$$

Idem para a solução $\tilde{u}$ com $\tilde{u}(w,0) = \tilde{u}^0$. Se $\tilde{u}^0 \leq u^0$ quase todo ponto, por G ser monotônica, segue que,

$$G^n(\tilde{u}) \leq G^n(u^0)$$

para quase todo ponto de S^1. Se v é subsolução,

$$\frac{\partial}{\partial t}v(w,t) \quad \leq \quad \tanh(\beta(J*v)(w,t)) - v(w,t).$$

Daí

$$\frac{\partial}{\partial t}v(w,t) + v(w,t) \quad \leq \quad \tanh(\beta(J*v)(w,t)) \text{ q.t.p..}$$

Multiplicando por e^t em ambos os lados e integrando de 0 a t temos que

$$\int_0^t (e^s v(w,s))\frac{d}{ds} \quad \leq \quad \int_0^t e^t \tanh(\beta((J*v)(w,t)))ds.$$

Calculando a integral, temos

$$e^t v(w,t) - v(w,0) \quad \leq \quad \int_0^t e^s \tanh(\beta((J*v)(w,s)))ds. \tag{3.6}$$

Somando $v(w,0)$ e em seguida multiplicando e^{-t} em ambos os lados em (3.6), temos que

$$v(w,t) \quad \leq \quad e^{-t}v(w,0) + \int_0^t e^{-(t-s)}g(\beta((J*v)(w,s))),$$

o que implica

$$v(w,t) \quad \leq \quad G(v)(w,t) \text{ q.t.p..}$$

Como G é monotônica,

$$v(w,t) \leq G^n(v)(w,t).$$

Fazendo $z = \lim_{n\to\infty} G^n(v)(w,t)$,

$$v(w,t) \leq \lim_{n\to\infty} G^n(v) \text{ q.t.p..}$$

Como G é contínua,

$$G(z) = G(\lim_{n\to\infty} G^n(v)) = \lim_{n\to\infty} G^{n+1}(v) = z.$$

Logo, pelo Teorema do Ponto Fixo, z é um ponto fixo de G. Daí, z é solução de (2.5) em $S^1 \times [0,T]$ com condição inicial $z(\cdot,0) = v(\cdot,0)$. Portanto, se $z(\cdot,0) \leq u(\cdot,0)$ q.t.p. então

$$v \leq z \leq u \text{ q.t.p. em } S^1 \times [0,T].$$

Analogamente, para a supersolução V,

$$u \leq z \leq V \text{ q.t.p. em } S^1 \times [0,T].$$

Portanto,

$$v(w,t) \leq u(w,t) \leq V(w,t), \text{ q.t.p. em } S^1 \times [0,T].$$

Repetindo exatamente os mesmo argumentos para o intervalo $[T, 2T]$, temos que o resultado é válido para $S^1 \times [0, 2T]$. Por iteração, temos que o resultado é válido para $S^1 \times \mathbb{R}$, concluindo a demonstração. ∎

Observação 3.1 *O conjunto $\{u \in L^2(S^1); ||u||_\infty \leq 1\}$ é invariante sob o semigrupo $T(t)$.*

De fato, seja $u(\cdot,t)$ a solução de (2.5) com condição inicial $u(\cdot,0)$ em $\{u \in L^2(S^1); ||u||_\infty \leq 1\}$. Então pela fórmula de variação das constantes

$$u(w,t) = e^{-t}u(w,0) + \int_0^t e^{-(t-s)} \tanh(\beta(J*u)(w,s))ds.$$

Daí

$$\begin{aligned} |u(w,t)| &\leq e^{-t}|u(w,0)| + \int_0^t e^{-(t-s)}|\tanh(\beta(J*u)(w,s))|ds \\ &\leq e^{-t}|u(w,0)| + \int_0^t e^{-(t-s)}ds. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t)\|_\infty &\leq e^{-t}\|u(\cdot,0)\|_\infty + \int_0^t e^{-(t-s)} \\ &\leq e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-s)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Teorema 3.3 *Seja $u(\cdot,t)$ solução de (2.5) com $||u(\cdot,t)||_\infty \leq 1$ e F o funcional definido em 3.4. Então $F(u(\cdot,t))$ é diferenciável em relação a t, para $t > 0$, e*

$$\frac{d}{dt}F(u(\cdot,t)) = -I(u(\cdot,t)) \leq 0,$$

onde, para qualquer $u \in L^2(S^1)$ com $||u||_\infty \leq 1$,

$$I(u(\cdot)) = \int_{S^1}[(J*u)(w) - \beta^{-1}\tanh^{-1}(u(w))][\tanh(\beta(J*u(w)) - u(w)]dw. \tag{3.7}$$

Além disso, o integrando de (3.7) é uma função não negativa e, u é um ponto crítico de F se, e só se, u é um ponto de equilíbrio de (2.5).

Prova. Assuma primeiramente que dado $t > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $||u(\cdot, s)||_\infty \leq 1 - \varepsilon$ para $s \in \Delta$, onde Δ é intervalo fechado que contém t. Para $s \in \Delta$, defina $\phi(w, s) = (f(u(w, s)) - f(m_\beta)) + \int_{S^1} \frac{1}{4} J(wz^{-1})(u(w, s) - u(z, s))^2 dz$ e observe que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial s}(w, s) &= \frac{\partial f}{\partial s}(u(w, s))\frac{\partial u}{\partial s}(w, s) + \frac{\partial}{\partial s}\int_{S^1} \frac{1}{4} J(wz^{-1})(u(w, s) - u(z, s))^2 dz \\
&= [-u(w, s) + \beta^{-1}\tanh^{-1}(u(w, s))]\frac{\partial}{\partial s}u(w, s) \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{S^1} J(w \cdot z^{-1})[u(w, s) - u(z, s)][\frac{\partial u(w, s)}{\partial s} - \frac{\partial u(z, s)}{\partial s}]dz.
\end{aligned}$$

Daí $\frac{\partial \phi}{\partial s}(w, s)$ é quase sempre contínua e limitada e

$$sup_{s \in \Delta}||\frac{\partial \phi}{\partial s}(\cdot, s)||_{L^1} < \infty$$

ou seja, a integral é finita. Portanto, podemos então derivar sob o sinal de integração, obtendo

$$\frac{d}{ds}F(u(\cdot, s)) = \int_{S^1} \frac{\partial}{\partial s}\phi(\cdot, s)dw$$

Como

$$\begin{aligned}
&\int_{S^1}\int_{S^1} J(w \cdot z^{-1})[u(w, s) - u(z, s)] \cdot [\frac{\partial u}{\partial s}(w, s) - \frac{\partial u}{\partial s}(z, s)]dwdz = \\
=\ &\int_{S^1}\int_{S^1} J(w \cdot z^{-1})u(w, s)\frac{\partial u}{\partial s}(w, s)dwdz \\
&-\int_{S^1}\int_{S^1} J(w \cdot z^{-1})u(w, s)\frac{\partial u}{\partial s}(z, s)dwdz \\
&-\int_{S^1}\int_{S^1} J(w \cdot z^{-1})u(z, s)\frac{\partial u}{\partial s}(w, s)dwdz \\
&+\int_{S^1}\int_{S^1} J(w \cdot z^{-1})u(z, s)\frac{\partial u}{\partial s}(z, s)dwdz \\
=\ &2\int_{S^1}\int_{S^1} J(w \cdot z^{-1})u(w, s)\frac{\partial u}{\partial s}(w, s)dwdz \\
&-2\int_{S^1}\int_{S^1} J(w \cdot z^{-1})u(z, s)\frac{\partial u}{\partial s}(w, s)dwdz
\end{aligned}$$

e

$$\int_{S^1} J(w \cdot z^{-1})dz = 1,$$

segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}F(u(\cdot,s)) &= \int_{S^1}[-u(w,s)+\beta^{-1}\tanh^{-1}(u(w,s))]\frac{\partial u}{\partial s}(w,s)dw \\
&\quad + \int_{S^1}(\int_{S^1} J(w\cdot z^{-1})dz)u(w,s)\frac{\partial u}{\partial s}(w,s)dw \\
&\quad - \int_{S^1}(\int_{S^1} J(w\cdot z^{-1}u(z,s)dz)\frac{\partial u}{\partial s}(w,s)dw \\
&= \int_{S^1}[-(J*u)(w,s)+\beta^{-1}\tanh^{-1}(u(w,s))] \\
&\quad .[-u(w,s)+\tanh(\beta(J*u(w,s)+h))]dw \\
&= -I(u(\cdot,s).
\end{aligned}$$

Isto prova o teorema se $||u(\cdot,s)||_\infty \leq 1-\varepsilon$ para $s \in \Delta$. Mostraremos agora que

$$||u(\cdot,t)||_\infty \leq 1-\varepsilon, \qquad \forall t > 0.$$

Seja $\lambda(w,t)$ solução de (2.5) com $\lambda(w,0) = 1$ para qualquer $w \in S^1$. Então $\lambda(w,t) = \lambda(t)$, onde

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\lambda(t) + \tanh(\beta(\lambda(t))).$$

Como $|\tanh(x)| \leq 1$ para todo x real, temos que

$$\frac{d\lambda}{dt}(t) + \lambda(t) \quad < \quad 1.$$

Multiplicando por e^t em ambos os lados temos

$$e^t(\frac{d\lambda}{dt}(t) + \lambda(t)) \quad < \quad e^t.$$

Pela regra do produto e o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_0^t \frac{d}{dt}(\lambda(s)e^s)ds \quad < \quad \int_0^t e^s ds.$$

Calculando as integrais, temos

$$\lambda(t)e^t - \lambda(0) \quad < \quad e^t - 1,$$

o que nos leva a concluir que

$$\lambda(t) \quad < \quad 1 \qquad \text{para } t > 0.$$

Como $u(w,0) \leq 1$, segue pelo Teorema 3.2 (Teorema da Comparação) que

$$u(w,t) \leq \lambda(t) < 1 \text{ para quase todo } w \in S^1 \text{ e } t > 0.$$

Repetindo o mesmo argumento para $u(w,0) \geq -1$, temos

$$u(w,t) \geq -\lambda(t) > -1$$

e daí

$$||u(\cdot,t)||_\infty < \lambda(t) < 1, \qquad \forall t > 0.$$

Para concluir a demonstração, basta mostrar que u é ponto crítico de F se, e somente se, u é ponto de equilíbrio de (2.5). Para isso, seja $u(w,t)$ ponto crítico de F. Então $I(u(\cdot,t)) = 0$, ou seja

$$[(J*u)(w,t) - \beta^{-1}\tanh^{-1}(u(w,t))][\tanh(\beta(J*u)(w,t)) - u(w,t)] = 0 \ q.t.p., \quad (3.8)$$

segue de 3.8 que $u(\cdot,t)$ não depende de t e satisfaz

$$\tanh(\beta(J*u)(w)) - u(w) = 0, \quad (3.9)$$

logo $u(w)$ é ponto de equilíbrio de (2.5).

Suponha agora que u é uma solução de equilíbrio de (2.5). Então

$$[(J*u)(w) - \beta^{-1}\tanh^{-1}(u(w))] = 0. \quad (3.10)$$

Daí

$$[(J*u)(w) - \beta^{-1}\tanh^{-1}(u(w))][\tanh(\beta(J*u)(w)) - u(w)] = 0, \quad (3.11)$$

ou seja,

$$I(u(\cdot)) = 0. \quad (3.12)$$

Portanto u é ponto crítico de F. ■

3.2 Existência de equilíbrios não triviais

Considere, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, o conjunto

$$A_n = \{v \in L^2(S^1); v(\varphi(\frac{\mathcal{T}}{n} + y)) = -v(\varphi(y))\}. \quad (3.13)$$

Note que $A_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, pois a solução nula pertence a A_n para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposição 3.4 *Os subespaços A_n são positivamente invariantes sob $T(t)$.*

Prova. De fato, tomando $v \in A_n$ e $t \in \mathbb{R}^+$, basta mostrar que

$$T(t)v(\varphi(\frac{\tau}{n}+y)) = -T(t)v(\varphi(y)).$$

Observe que

$$\begin{aligned} T(t)v(\varphi(\frac{\tau}{n}+y)) &= e^{-t}v(\varphi(\frac{\tau}{n}+y),0) + \int_0^t e^{s-t}\tanh\{\beta(J*v)(\varphi(\frac{\tau}{n}+y),s)\}ds \\ &= -e^{-t}v(\varphi(y),0) + \int_0^t e^{s-t}\tanh\{\beta(J*-v)(\varphi(y),s)\}ds \\ &= -e^{-t}v(\varphi(y),0) + \int_0^t e^{s-t}\tanh\{-\beta(J*v)(\varphi(y),s)\}ds. \end{aligned}$$

Usando o fato da função *tanh* ser ímpar, temos

$$\begin{aligned} T(t)v(\varphi(\frac{\tau}{n}+y)) &= -e^{-(t-0)}v(\varphi(y),0) + \int_0^t e^{s-t} - \tanh\{\beta(J*v)(\varphi(y),s)\}ds \\ &= -T(t)v(\varphi(y)), \end{aligned}$$

mostrando que A_n é positivamente invariante. ■

Finalmente estamos prontos para mostrar a existência de equilíbrios não triviais de (2.5) no conjunto A_n.

Teorema 3.5 *Dado $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $\tau(n_0)$ tal que se $\tau \geq \tau(n_0)$ então a equação (2.5) possui uma solução estacionária não trivial em A_n para todo $n \leq n_0$.*

Prova. Considere a função l definida em A_n por $l(\varphi(x)) = m_\beta$ para $0 \leq x < \frac{\tau}{n}$ e $l(x,t)$ uma solução de (2.1) com condição inicial $l(\cdot,0) = l$. Para $\tau > n$, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(l) &= \int_{-\tau}^{\tau}[f(l(\varphi(x))) - f(m_\beta)]dx \\ &+\frac{1}{4}\int_{-\tau}^{\tau}\int_{-\tau}^{\tau} J^\tau(x-y)(l(\varphi(x)) - l(\varphi(y)))^2dydx. \end{aligned}$$

Note que $l \circ \varphi : [-\tau,\tau] \to \mathbb{R}$ só assume dois valores: $-m_\beta$ e $+m_\beta$. Com efeito, tome $x \in (\frac{\tau}{n}, \frac{2\tau}{n}]$. Existe $y \in [0, \frac{\tau}{n})$ tal que $x = \frac{\tau}{n} + y$. Daí, pela definição de φ e de l,

$$l(\varphi(x)) = l(\varphi(\frac{\tau}{n}+y)) = -l(\varphi(y)) = -m_\beta.$$

Repetindo este raciocínio, temos que a função $l \circ \varphi$ pode ser representada pelo gráfico da Figura 3.1, considerando, para fim de ilustração, $n = 4$.

Observe agora que f é par. Com efeito,

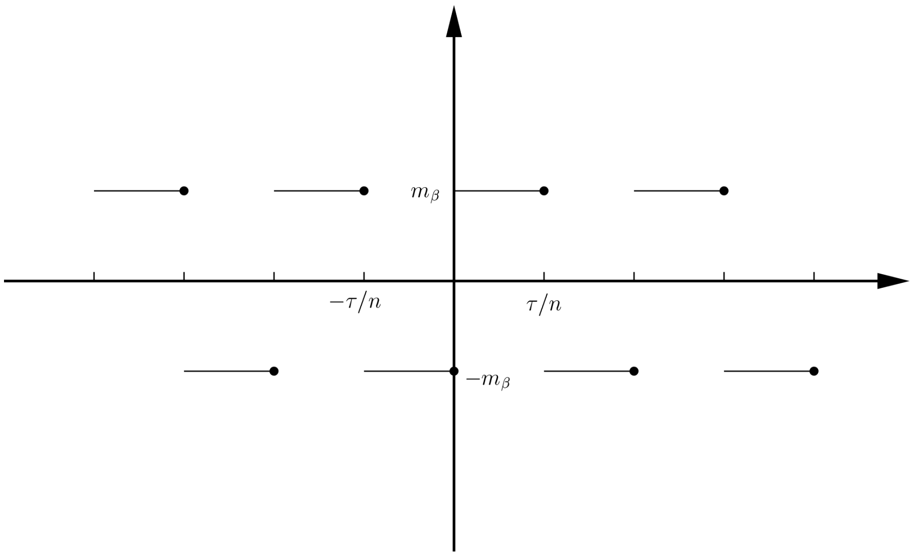

Figura 3.1: Gráfico de uma condição inicial periódica

$$\begin{aligned} i(-a) &= -\frac{1-a}{2}log(\frac{1-a}{2}) - \frac{1+a}{2}log(\frac{1+a}{2}) \\ &= i(a), \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} f(-a) &= -\frac{1}{2}(-a)^2 - \beta^{-1}i(-a) \\ &= -\frac{1}{2}a^2 - \beta^{-1}i(a) \\ &= f(a). \end{aligned}$$

Daí

$$\int_{-\tau}^{\tau}[f(l(\varphi(x))) - f(m_\beta)]dx = 0.$$

Então

$$\mathcal{F}(l) = \frac{1}{4}\int_{-\tau}^{\tau}\int_{-\tau}^{\tau} J^\tau(x-y)(l(\varphi(x)) - l(\varphi(y)))^2 dxdy. \tag{3.14}$$

O gráfico da Figura 3.2 representa no plano xy a interseção da região do suporte de J^τ (valores de x, y tais que $x - y < 1$ e $x - y > 1$) com a região onde $l(x) \neq l(y)$, ou seja, estes triângulos representam onde o integrando contribui para o cálculo da integral de $\mathcal{F}(l)$. Cabe ressaltar que apesar do que este gráfico possa sugerir, tanto J^τ quanto $l \circ \varphi$ são funções reais. Os triângulos dos cantos vêm da periodicidade de J^τ.

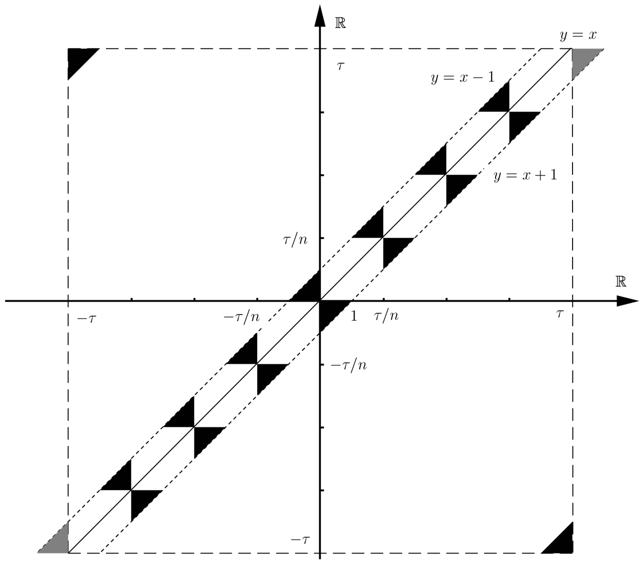

Figura 3.2: Região onde o funcional energia não se anula

Observe que

$$\begin{cases} l(\varphi(x)) - l(\varphi(y)) = 2m_\beta & \text{se } x \text{ e } y \text{ estão no triângulo,} \\ l(\varphi(x)) - l(\varphi(y)) = 0 & \text{se } x \text{ e } y \text{ não estão no triângulo.} \end{cases}$$

Destas considerações, chegamos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(l) &= \frac{1}{4}\int_{-\tau}^{\tau}\int_{-\tau}^{\tau} J^\tau(x-y)(l(\varphi(x)) - l(\varphi(y)))^2 dxdy \\ &= \frac{1}{4}\sum_{j=-n}^{n-1}\int_{j\frac{\tau}{n}}^{j\frac{\tau}{n}+1}\int_{x-1}^{j\frac{\tau}{n}} J^\tau(x-y)4m_\beta^2 dydx \\ &\quad +\frac{1}{4}\sum_{j=-(n-1)}^{n}\int_{j\frac{\tau}{n}-1}^{j\frac{\tau}{n}}\int_{x-1}^{j\frac{\tau}{n}} J^\tau(x-y)4m_\beta^2 dydx, \end{aligned}$$

onde a segunda linha da fórmula acima representa a área dos triângulos que estão logo acima da diagonal e do triângulo do canto inferior direito, e a terceira linha representa a área dos triângulos logo abaixo da diagonal e do triângulo do canto superior esquerdo. Note que como $4m_\beta$ pode ser retirado dos integrandos, por não depender de x ou y, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(l) &= \frac{1}{4}\sum_{j=-n}^{n-1} 4m_\beta^2 \int_{j\frac{\tau}{n}}^{j\frac{\tau}{n}+1}\int_{x-1}^{j\frac{\tau}{n}} J^\tau(x-y)dydx \\ &+\frac{1}{4}\sum_{j=-(n-1)}^{n} 4m_\beta^2 \int_{j\frac{\tau}{n}-1}^{j\frac{\tau}{n}}\int_{x-1}^{j\frac{\tau}{n}} J^\tau(x-y)dydx \\ &= \frac{4m_\beta^2}{4}\sum_{j=-n}^{n-1} \int_{j\frac{\tau}{n}}^{j\frac{\tau}{n}+1}\int_{x-1}^{j\frac{\tau}{n}} J^\tau(x-y)dydx \\ &+\frac{4m_\beta^2}{4}\sum_{j=-(n-1)}^{n} \int_{j\frac{\tau}{n}-1}^{j\frac{\tau}{n}}\int_{x-1}^{j\frac{\tau}{n}} J^\tau(x-y)dydx.\end{aligned}$$

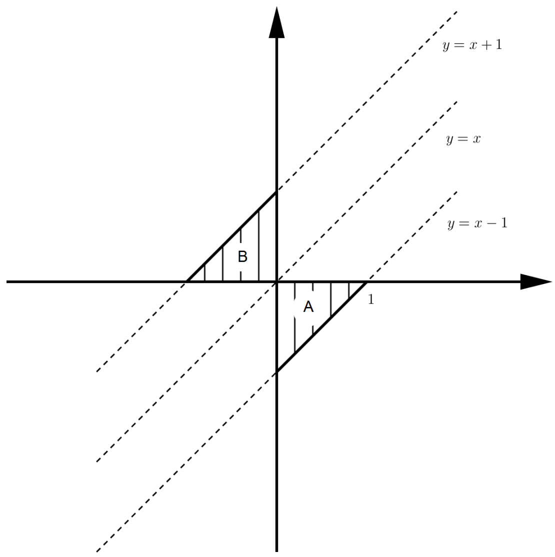

Figura 3.3: Parte da região onde o funcional energia não se anula

Note agora que as integrais duplas de J^τ sobre cada triângulo logo abaixo da diagonal são iguais pois, dado (a, b) pertencente ao triângulo A existe um único par $(\overline{a}, \overline{b})$ no triângulo vizinho tal que $J^\tau(a-b) = J^\tau(\overline{a}, \overline{b})$. A saber, $(\overline{a}, \overline{b}) = (a + \frac{\tau}{n}, b + \frac{\tau}{n})$, pois,

$$J^\tau(a-b) = J^\tau\Big((a+\frac{\tau}{n}) - (b+\frac{\tau}{n})\Big).$$

Basta agora repetir este argumento para todos os triângulos logo abaixo da diagonal. Analogamente, as integrais duplas de J^τ sobre cada triângulo logo acima da diagonal são iguais entre si. Daí

$$\mathcal{F}(l) = 2nm_\beta^2 \int_0^1\int_{x-1}^0 J^\tau(x-y)dydx + 2nm_\beta^2\int_{-1}^0\int_0^{x+1} J^\tau(x-y)dydx.$$

Note agora que as duas integrais acima são iguais, pois, novamente, como J^τ é uma função par, dado (a,b) em A, existe um único $(\overline{a},\overline{b})$ em B tal que $J^\tau(a,b) = J^\tau(\overline{a},\overline{b})$. A saber, $((\overline{a},\overline{b}) = (-a,-b)$, pois,

$$J^\tau(a-b) = J^\tau(-a+b) = J^\tau((-a)-(-b)).$$

Portanto, os valores das integrais duplas de J^τ sobre cada triângulo são iguais.

Por último, observe o paralelogramo C formado pelas retas $y = x$, $y = x-1$, $x = 1$ e $x = 0$, representado na Figura 3.4.

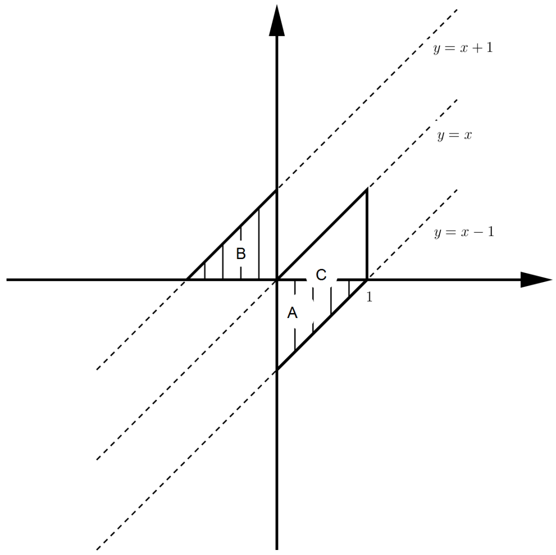

Figura 3.4: Estudo dos valores do funcional energia.

Como J é uma função positiva, a integral sobre a região A é menor ou igual à integral sobre a região C, pois $A \subset C$.

Como a integral sobre A é igual à integral sobre B, segue que a integral sobre B é também menor ou igual à integral sobre C. Daí

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(l) &= 2nm_\beta^2 \int_0^1 \int_{x-1}^0 J^\tau(x-y)dydx + 2nm_\beta^2 \int_{-1}^0 \int_0^{x+1} J^\tau(x-y)dydx \\
&\leq 4nm_\beta^2 \int_0^1 \int_{x-1}^x J^\tau(x-y)dydx \\
&= 4nm_\beta^2 \int_0^1 \int_{-1}^0 J^\tau(z)dzdx.
\end{aligned}$$

Como J^τ tem integral igual a 1 em $[-1,1]$ e é par,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(l) &= 4nm_\beta^2\int_0^1 \tfrac{1}{2}dx \\ &= 2nm_\beta^2. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Por outro lado, para a função constante nula de $L^2(S^1)$, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(0) &= \int_{-\tau}^{\tau}(f(0)-f(m_\beta))dx + \frac{1}{4}\int_{-\tau}^{\tau}\int_{-\tau}^{\tau} J^\tau(x-y)(0(\varphi(x))-0(\varphi(y)))dydx \\ &= 2\tau(f(0)-f(m_\beta)).\end{aligned}$$

Portanto, como τ é livre, podemos tomá-lo grande o suficiente de forma que $\frac{\tau}{n} > \frac{m_\beta^2}{(f(0)-f(m_\beta))}$. Daí, temos que $\mathcal{F}(0) > 2n.m_\beta^2 \geq \mathcal{F}(l)$ e o conjunto ω-limite de l não contém 0 (solução estacionária nula). Observe que, pelo Teorema 3.3, $\mathcal{F}$ é uma função de Lyapunov, ou seja, é não crescente ao longo das órbitas.

Pelo Teorema 1.13, existe um atrator global compacto. Isso implica a pré-compacidade das órbitas de $T(t)$. Daí, pelo Princípio da Invariância de La Salle (veja Apêndice A.9), segue que $l(x,t) \to M$, onde M é o conjunto invariante maximal em $E = \{u \in L^2(S^1); I(u) = 0\}$. Observe que se $I(u) = 0$ então u é uma solução de equilíbrio de (2.5). ■

3.3 Instabilidade das soluções de Equilíbrios

Vamos agora mostrar que as soluções em A_n são instáveis. Para isso, vamos precisar usar o Teorema de Krein-Rutman, que pode ser encontrado no Apêndice desta dissertação e nas referências [4] e [8]. No Apêndice teremos também os conceitos sobre cone necessários para este teorema.

Proposição 3.6 *Seja $E = \mathcal{C}(S^1)$ o espaço das funções reais contínuas em S^1 com a norma do sup, K o cone das funções positivas e T o operador em E definido como*

$$T(u)(w) = \theta(w)\int_{S^1} J(w\cdot z^{-1})u(z)dz,$$

onde θ é uma função estritamente positiva contínua em S^1. Então T é estritamente positiva.

Prova. Observe que como o suporte da função J original estava contida em $[-1,1]$, segue que

$$\operatorname{supp}\tilde{J} \subset \{e^{i\frac{\pi}{\tau}\theta}, -1 \leq \theta \leq 1\},$$

ou seja, está contida no círculo S^1 e tem comprimento de até $2\frac{\pi}{\tau}$. Cabe lembrar que J possui integral igual a 1, implicando que $\operatorname{supp}\tilde{J}$ terá comprimento maior que 0. Para simplificar, voltaremos a chamar $\tilde{J}$ de J de agora em diante. Para $u \in K - \{0\}$, definimos

$$M_j = \{w \in S^1; T^j(u)(w) > 0\}.$$

Como u é positiva, $M_0 \neq \emptyset$.

Construiremos o supremo de J em torno de algum ponto $z \in M_0$. Para isso, tome todos os $w \in S^1$ tais que $w \cdot z^{-1} \in \operatorname{supp} J$. Daí, para os valores de w neste arco, temos que

$$Tu(w) = \theta(w) \int_{S^1} J(w \cdot z^{-1}) u(z) dz > 0,$$

pois $w \cdot z^{-1} \in \operatorname{supp} J$ e u e θ são estritamente positivas por hipótese. Concluimos daí que este arco (de comprimento maior que 0) está contido em M_1.

Construiremos agora o $\operatorname{supp} J$ em torno dos pontos de extremidade deste arco, tomando os $w \in S^1$ tais que $w \cdot z^{-1} \in \operatorname{supp} J$. Daí

$$T(T(u(w))) = \theta(w) \int_{S^1} J(w \cdot z^{-1}) T(u(z)) dz > 0.$$

Logo, M_2 possui estes novos arcos de comprimento maior que o dobro do comprimento do arco de M_1. Repetindo estes passos um número finito de vezes, temos que para n suficientemente grande teremos um arco de comprimento maior que 2π dentro de M_n, ou seja, $M_n = S^1$. Daí $T^n > 0$. Isso implica que T é um operador estritamente positivo. ■

Podemos então finalmente mostrar a instabilidade das soluções em A_n.

Proposição 3.7 *As soluções em A_n obtidas no Teorema 3.5 são instáveis.*

Prova. Seja $m(x)$ um equilíbrio não trivial em A_n dado pelo Teorema 3.5. Linearizando a equação (2.5) temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= DF(m)v = -v + \operatorname{sech}^2(\beta J * m)\beta J * v \\ &= -v + (1 - \tanh^2(\beta J * m))\beta J * v. \end{aligned}$$

Como m é um equilíbrio, segue que $m = \tanh(\beta J * m)$. Daí

$$\frac{\partial v}{\partial t} = DF(m)v = -v + (1 - m^2)\beta J * v.$$

Pelos cálculos vistos na demonstração do Teorema 2.5, se $u(w,t)$ é solução de (2.5), então $|u(w,t)| < 1$. Daí

$$m^2 < 1^2,$$

o que implica

$$0 < (1 - m^2).$$

Faça $\theta = (1 - m^2)$. Daí, pela Proposição 3.6, segue que T definido por $Tv = \theta\beta J * v$ é estritamente positivo como operador de $\mathcal{C}(S^1)$.

Vamos mostrar agora que T é um operador compacto. Primeiro defina a aplicação

$$\begin{aligned} S : L^2(S^1) &\rightarrow L^2(S^1) \\ v &\rightarrow J * v. \end{aligned}$$

Seja v um elemento da bola de raio $k > 0$ e centro 0. Então, usando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} ||S(v)||_{L^2} &= ||J * v||_{L^2} \\ &\leq ||J||_{L^1}||v||_{L^2} \\ &\leq ||J||_{L^1}k. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} |\frac{\partial}{\partial w}S(v)(w)| &= |\frac{\partial}{\partial w}(J * v)(w)| \\ &= |(J' * v)(w)| \\ &\leq \int_{S^1} |J'(w \cdot z^{-1})||v(z)dz| \\ &\leq ||J||_\infty \int_{S^1} v(z)dz. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} |\frac{\partial}{\partial w}S(v)(w)| &\leq ||J'||_{L^2}||v||_{L^2} \\ &\leq k||J'||_{L^2}. \end{aligned}$$

Daí $S(v)$ é limitado na norma de $W^{1,2}(S^1)$. Logo, do Teorema de Imersão de Sobolev (veja Apêndice A.4), S é um operador compacto. Como m é um equilíbrio, temos que $DF(m') = 0$, ou seja,

$$(1 - m^2)\beta J * m' = m'.$$

Daí,

$$\begin{aligned} T(m') &= (1 - m^2)\beta J * m' \\ &= m'. \end{aligned}$$

Portanto T tem um autovetor associado ao autovalor 1. Segue pelo Teorema de Krein-Rutman que T possui um autovetor com autovalor maior que 1. Daí,

$$DF(m) = -I + T$$

possui um autovalor maior que 0, o que mostra que m é instável. ■

Apêndice A

Resultados Clássicos

Lema A.1 (Grönwall) *Sejam $u : I \to \mathbb{R}$ e $v : I \to \mathbb{R}$ funções contínuas não negativas definidas num intervalo $I = [a, b]$ com $a < b < \infty$ tais que para $\alpha \geq 0$ tenhamos*

$$u(t) \leq \alpha + \int_0^t v(s)u(s)ds, \quad t \in [a, b].$$

Então

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_0^t v(s)ds}.$$

Em particular, se $\alpha = 0$ então $u \equiv 0$.

Prova. Veja [6]. ■

Teorema A.1 (Regra de Leibniz) *Dado $U \subset \mathbb{R}^n$, aberto, seja $f : U \times [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função com as seguintes propriedades:*

(i) Para todo $x \in U$, a função $t \to f(x, t)$ é integrável em $a \leq t \leq b$.

(ii) A i-ésima derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)$ existe para cada $(x, t) \in U \times [a, b]$ e a função $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \times [a, b] \to \mathbb{R}$, assim definida, é contínua.

Então a função $\varphi : U \to \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x) = \int_a^b f(x, t)dt$, possui i-ésima derivada parcial em cada ponto $x \in U$, sendo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)dt.$$

Em suma: pode-se derivar sob sinal da integral, desde que o integrando resultante seja uma função contínua.

Prova. Veja [10], página 144. ■

Definição A.2 *Diremos que o espaço normado $(X, ||\cdot||_X)$ está imerso continuamente em $(Y, ||\cdot||_Y)$ quando*

(i) *X é um subespaço vetorial de Y*

(ii) *A aplicação identidade é contínua, isto é, existe $M > 0$ tal que*

$$||i(x)||_Y \leq M||x||_X \quad \forall x \in X \tag{A.1}$$

Esta imersão é denotada por $(X, ||\cdot||_X) \hookrightarrow_{cont} (Y, ||\cdot||_Y)$ ou simplesmente $(X, ||\cdot||_X) \hookrightarrow (Y, ||\cdot||_Y)$.

Definição A.3 *Uma imersão de $(X, ||\cdot||_X)$ em $(Y, ||\cdot||_Y)$ é dita compacta se*

(i) *X é subespaço de Y*

(ii) *A aplicação identidade é um operador compacto.*

Esta imersão é denotada por $(X, ||\cdot||_X) \hookrightarrow_{comp} (Y, ||\cdot||_Y)$ ou simplesmente $(X, ||\cdot||_X) \hookrightarrow (Y, ||\cdot||_Y)$

Teorema A.4 (Teorema de Imersão de Sobolev) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado regular, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < +\infty$. Então para qualquer $j \in \mathbb{N}$, as imersões abaixo são contínuas*

(i) *Se $m < \frac{N}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $p \leq q \leq \frac{Np}{N-mp}$;*

(ii) *Se $m = \frac{N}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $p \leq q < \infty$;*

(iii) *Se $m > \frac{N}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\Omega)$;*

(iv) *Se $m - 1 < \frac{N}{p} < m$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < m - \frac{N}{p}$.*

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ for um domínio, desta vez, limitado, $j \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ e $1 \leq p < \infty$, então as seguintes imersões são compactas

(i) *Se $m < \frac{N}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,q}$, $1 \leq q \leq \frac{Np}{N-mp}$;*

(ii) *Se $m = \frac{N}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,q}$, $1 \leq q < \infty$;*

(iii) *Se $m > \frac{N}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\Omega)$;*

(iv) *Se $m - 1 < \frac{N}{p} < m$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\overline{\Omega})$ com $0 < \alpha < m - \frac{N}{p}$.*

Corolário A.5 *Nas mesmas hipóteses da segunda parte do Teorema anterior,*

(i) *Se $p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_{cont} L^q(\Omega)$ para $1 \leq q \leq \frac{Np}{N-mp}$*

(ii) Se Ω é limitada e $p < N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_{comp} L^q(\Omega), 1 \leq q < \frac{Np}{N-p}$

As demonstrações deste teorema e corolário podem ser encontradas em [13].

Definição A.6 *Seja E um espaço de Banach. Um subconjunto K fechado e convexo de E é dito* cone *se $t.K \subset K \quad \forall t \geq 0$ e $K \cap (-K) = \{0\}$. Dizemos que o cone é reprodutor se para qualquer $x \in E$ existirem $u, v \in K$ tal que $x = u - v$.*

No cone podemos definir a noção de ordenação.

Definição A.7 *Dizemos que $x \leq y$ se, e somente se, $y - x \in K$. Um operador linear A em E é dito* positivo *se $AK \subset K$. A é dito* fortemente positivo *se for positivo e para todo $x \in K - \{0\}$ existir um inteiro $m \geq 1$ tal que $A^m(x) \in intK$. Se $e \in K - \{0\}$, dizemos que A é* e-positivo *se para todo $x \in K - \{0\}$ existirem um inteiro $m \geq 1$ e reais $\alpha, \beta > 0$ tais que*

$$\alpha e \leq A^m x \leq \beta e.$$

Teorema A.8 (Krein-Rutman) *Seja E um espaço de Banach, K um cone reprodutor em E, e A um operador positivo compacto em E com um ponto diferente de 0 em seu espectro. Então A tem um autovalor positivo ρ que não é menor (em módulo) que qualquer autovalor associado a algum outro autovetor associado em K. Mais ainda, se A é e-positivo então ρ é simples.*

Prova. Veja [4] e [8]. ■

Teorema A.9 (Princípio de Invariância de La Salle) *Seja V uma função de Lyapunov num espaço métrico completo C e defina $E = \{x \in C; \dot{V}(x) = 0\}$ e M o invariante maximal em E. Se $\{S(t)x_0, t \geq 0\}$ estiver contido num compacto de C então $S(t)x_0 \to M$ quando $t \to \infty$*

Prova. Veja [7], página 92. ■

Proposição A.10 *Sejam X e Y espaços lineares normados, $F : X \to Y$ uma aplicação e suponha que a derivada de Gâteaux de F, $DF : X \to \mathcal{L}(X, Y)$ existe e é contínua em $x \in X$. Então a derivada de Frechet de F existe e é contínua em x.*

Prova. Veja [17]. ■

Bibliografia

[1] Aliprantis, C. D. e Border, K. C., *Infinite Dimensional Analysis, A Hitchhiker's Guide*, Springer, 3ªed., New York, 2007.

[2] Aragão, G. S., *Equações Diferenciais Ordinárias em Espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo, (2006).

[3] Barros, S. R. M., Pereira, A. L., Possani, C., Adilson, S., *Spatially Periodic Equilibria for a non Local Evolution Equation.* Discrete and Continuous Dynamical Systems **9** N. 4, (2003), 937-948.

[4] Daleckiĭ, J.L. e Kreĭn, M.G., *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space (Translations of Mathematical Monographs v.43),* American Mathematical Society, Providence, Rhodes Island, 1970.

[5] Folland, G.B., *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications.* Jonh Wiley, 2ª Ed., New York, 1999.

[6] Hale, J. K., *Asymptotic behavior of dissipative Systems.* American Surveys and Monographs, N. 25, 1988.

[7] Henry, D., *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations.* Lecture Notes in Mathmatics, N. 840, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1981.

[8] Krasnosel'skii, M. A., *Positive Solutions of Operator Equations*, P. Noordhoff Ltd, Groningen, 1964.

[9] Lima, E.L.,*Curso de Análise* vol.1, 12ªed., Rio de Janeiro, IMPA(Projeto Euclides), 2007.

[10] Lima, E.L.,*Curso de Análise* vol.2, 9ªed., Rio de Janeiro, IMPA(Projeto Euclides), 2006.

[11] Macêdo, H. J.,*Existência de Soluções de Equilíbrios tipo Instanton para uma Equação de Evolução com Convolução*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, (2011).

[12] de Masi, A., Orlandi, E., Presutti, E., Triolo, L.,*Glauber evolution with Kac potencials: I Mesocopic and macroscopic limits, interface dynamics*, Nonlinearity **7**, (1994), 633-696.

[13] Medeiros, L. A. J. e Miranda, M. M., *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos).* Rio de Janeiro, Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM, 2000

[14] Pereira, A. L., *Global attractor and nonhomogeneous equilibria for a non local evolution equation in an unbounded domain*, Journal of Differential Equations **226** (2006), 352-372.

[15] Pereira, A. L. e Silva, S. H., *Existence of global attractors and gradient property for a class of non local evolution equations*, São Paulo, Journal of Mathematical Sciences **2** N. 1. (2008), 1-20.

[16] Pereira, A. L. e Silva, S. H., *Continuity of global attractors for a class of non local evolution equations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **26** N. 3. (2010), 1073-1100.

[17] Rall, L. B, *Nonlinear Functional Analysis and Applications.* New York, Academic Press, 1971.

[18] da Silva, S. H., *Existência e continuidade de atrator global para uma equação de evolução com convolução*, PhD Thesis, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, Brasil, (2007).

[19] Sotomayor, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias.* Rio de Janeiro, IMPA (Projeto Euclides), 1979.

[20] Temam, R., *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics.* Springer Verlag, New York, 1988.