Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Teconologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sobre Existência de Soluções para Equações Diferenciais Ordinárias envolvendo Operadores não-lineares via Métodos de Shooting e Ponto Fixo

por

Sheyla Silva Marinho †

sob orientação do

Prof. Dr. Marco Aurelio Soares Souto

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes\REUNI

Sobre Existência de Soluções para Equações Diferenciais Ordinárias envolvendo Operadores não-lineares via Métodos do Shooting e Ponto Fixo

por

Sheyla Silva Marinho

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Pedro Eduardo Ubilla López

Prof. Dr. Francisco Julio Sobreira de Araújo Corrêa

Prof. Dr. Marco Aurelio Soares Souto
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Março/2010

Resumo

Considerando equações diferencias ordinárias equivalentes ao problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u), & \Omega = B_1(0) \\ u = 0, & \partial B_1(0) \end{cases}$$

onde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função contínua assumindo condições adequadas para cada caso estudado.

Mostramos resultados de existência, multiplicidade e unicidade de soluções radialmente simétricas não-negativas não triviais para estas edo's. Para tanto, usamos os métodos de *shooting*, *blow-up*, e Teoria do Grau de Leray-Schauder.

Palavras chave: Operador p-Laplaciano, Método de *shooting*, Estimativa *a priori* via *blow-up*, Relação de Energia, Equações assintoticamente homogêneas.

Abstract

Whereas ordinary differential equations equivalent to the problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u), & \Omega = B_1(0) \\ u = 0, & \partial B_1(0) \end{cases}$$

where $f : \Omega \to \mathbb{R}$ is a continuous function assuming appropriate conditions for each case.

We will show results of existence, multiplicity and uniqueness, for nonnegative and nontrivial solutions for these edo's. For this we use the method of *shooting*, *blow-up* and the theory of the Leray-Schauder degree.

Keywords: p-Laplacian Operator, *Shooting* Method, *a priori* estimate via *blow-up*, Energy Relations, Asymptotically Homogeneous Equations.

Agradecimentos

A Deus, por tudo. Não existe palavra no dicionário seja suficientemente capaz de descrever o quão grata sou a Deus. É Ele quem me consede, por sua misericórdia, todas as coisas que tenho conquistado até este dia. Por isso a Ele seja dada toda honra, glória e louvor por que é digno!

Aos meus pais Elias e Edileuza Marinho por todo apoio, incentivo e amor, por serem meu referencial de vida. Amo muito vocês!

Aos meus irmãos Débora, Cinara, Elias Júnior, pelas palavras amigas, pela brincadeiras, pela torcida. Desejo que voces também conquistem grandes coisas, boas coisas, que Deus seja o centro da vida de vocês, pois, quando se coloca Deus no controle Ele se encarrega do resto.

À minha querida vó Júlia, pelas orações, pelo amor, pelo cuidado. Eu simplesmente amo muito a senhora.

À minha grande amiga Aucilene Saraiva, por acreditar em mim, por se preocupar comigo, por me apoiar em tudo, pelas brigas que por algumas vezes tivemos mas, a vida é assim mesmo, nem tudo são flores. Muito Obrigada pela sua amizade! Amo você.

Ao meu grande amigo Álvaro Felix, pelas conversas, pelas brigas que devem ter sido muitas mas, que serviram pra solidificar nossa amizade. Desejo tudo de bom pra você.

Aos meus amigos e professores Cássio André e Hugo Diniz, vocês fazem parte dessa minha conquista. Que Deus guarde a vocês e suas famílias e abençoe em tudo. Muito obrigada por tudo.

Aos meus amigos da UFPa em Santarém Aucilene, Marcilene, Hildinha, Reullyanne, Álvaro, Suzan, Piletti, Geise, Luiz, Jerônimo, Simone, Iranice, Queila e Josicley. Aos meus amigos do SISE, Lúcio, Leandro, Rodolfo e Jeconias.

Aos professores do curso de Licenciatura Plena em Matemática da UFPa, campus

de Santarém, por todo conhecimento adquirido através de vocês.

Aos meus amigos do curso de mestrado, Leidmar, José Eder, Geizane, Jéssyca, Josiluiz, Jackson, Luciano, Natan, Sabrina, Désio, Denílson, Cladio, Anaxuel, Igor (Tonhaum), Hildênio e Kelmem. Em especial a Leidmar que foi responsável por muitos sorrisos meus e de Geizane, você é uma grande amiga. Obrigada pelas convesas, pelos conselhos ,enfim, pela companhia. Ao José Eder que se tornou um grande amigo, obrigada pela atenção, pelos conselhos, pela amizade. Você é um grande homem e espero que conquiste grandes coisas. Ao Luciano, esse comediante que fez um discipulo e por isso provou do próprio remédio (rss). Obrigada pela sua amizade, que se depender de mim durará a vida toda. Luciano você é dez. Todo sucesso pra você e sua família

As amigas Clarissa e Faetusa pela amizade, pelo apoio, por me receberem em sua casa quando precisei. Valeu mesmo!

À querida amiga Haline, por todo carinho com que me tratou desde que nos conhecemos, pela amizade que fizemos ao logo do tempo em que você esteve nesta cidade. Obrigada.

Ao meu grande pequeno amigo Rodrigo (Malarigo). Bem, sem palavras pra agradecer. Só Deus pode recompensar tudo que você fez por mim porque eu não tenho como compensar as muitas madrugadas que vc passou estudando comigo desde os tempos de graduação até o mestrado, por em nenhum momento me negar auxilio, pela amizade, pelos conselhos, enfim por tudo. Amo você como se fosse meu irmão e desejo que você seja muito feliz e conquiste todos os seus sonhos. Deus te Abençoe.

A todos os professores do DME em especial aos professores Daniel Cordeiro, Bráulio Maia, Henrique Fernandes, Julio Sobreira, Claudianor Alves, Marco Aurelio, Angelo Roncalli, Aparecido Jesuíno, por todo conhecimento adquirido.

Aos professores Daniel Cordeiro, por fazer a minha turma sofrer muito e por isso estudar muito, e Claudianor Alves, pelo professor que ele é, pela pessoa que é, pelo exemplo que dá.

Aos professores Pedro Ubilla e Julio Sobreira que se dispuseram a fazer parte desta conquista compondo juntamente com o Professor Marco a banca avaliadora deste trabalho.

Ao professor Marco Aurério, por estar sempre disposto a me ajudar desde que cheguei neste departamento, por aceitar ser meu orientador, por me aguentar por todo

o tempo que levamos para concluir o trabalho, pelos momentos de descontração, e pela amizade fizemos, porque o senhor é mais que um professor, mais que orientador, o senhor é um grande amigo. Muito Obrigado por tudo e me desculpe se em algumas, quase todas, as vezes eu passei dos limites.

À todos os funcionários do DME em especial a D. Salete, essa excelente pessoa, sempre disposta a ajudar, atenciosa, enfim ao meu ver perfeita no seu trabalho, tenho certeza que sua falta será notada quando sair sua aposentadoria, mas a sra. merece seu descanso, a D. Argentina, D. Severina (D. Dú), Suenia, Shirley, Seu Davi, Rafael, e Renato.

À CAPES/REUNI e INCTMat pelo apoio financeiro.

Por fim e nem por isso menos importante ao Rawlilson, essa pessoa espetacular, que me aguenta em todos os momentos. Obrigada por toda ajuda que me deu, principalmente na reta final do trabalho, se não fosse por você eu não teria ido a São Carlos e provavelmente teria muitos problemas para finalizar o trabalho. Obrigada pela atenção, paciência, generosidade, carinho, cuidado, por me proporcionar momentos de muita alegria. Que Deus te abençoe, te ajude em tudo, te guarde, te fortaleça. Confie NEle, deposite toda suas ansiedade NEle porque Ele tem cuidado de você. TE AMO.

Dedicatória

Aos meus pais e irmãos.

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho, estudamos a existência, unicidade e multiplicidade de soluções positivas de problemas que envolvem o operador p-Laplaciano em domínios limitados. Quando o operador for assintoticamente homogêneo, estudaremos a existência de soluções radialmente simétricas.

O p-laplaciano surge na modelagem de vários problemas físicos dentre os quais podemos citar fluidos não newtonianos [20], [11].

Temos como objetivo estudar a existência, multiplicidade e unicidade de soluções positivas para problemas do tipo

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u), & B_1(0) \\ u = 0, & \partial B_1(0) \end{cases}$$

onde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e assume condições apropriadas considerando equações diferenciais ordinárias equivalentes.

O trabalho esta dividido em três capítulos e dois apêndices.

Baseado em Ubilla [27], no primeiro capítulo estudamos resultados sobre existência e multiplicidade de soluções para o problema

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} -(a(|u'(t)|^p)|u'|^{p-2}u')' = f(u) \ \text{ em } \ I = (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

onde $p > 1$, $f \in C(\mathbb{R})$ e $a \in C(\mathbb{R}^+)$, sob as seguintes condições:

(a_1) $a(|s|^p)|s|^{p-2}s \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $(a(|s|^p)|s|^{p-2}s)' > 0,$ para todo $s \neq 0$;

(a_2) Existem constantes $c > 0$ e $1 < q \leq p$, tais que $\lim\limits_{s \to 0^+} s^{p-q}a(s^p) = c$;

(a_3) Existe uma constante $b > 0$ tal que $\lim\limits_{s \to +\infty} a(s) = b$;

(f_1) f é uma função ímpar;

(f_2) Existem constantes $\mu \in (0, 1/p)$ e $s_0 \geq 0$ tais que

$$\mu s f(s) \geq F(s) > 0, \quad \text{para todo } |s| \geq s_0,$$

onde $F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau$.

O resultado que garante a existência e multiplicidade de soluções para (P) é o

Teorema 0.1 *Suponha que f satisfaz (f_1) e (f_2). Então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $k \geq k_0$, existem no máximo, duas soluções fracas não trivias do problema (P), de classe C^1 em $\overline{I}$, isto é,*

$$\{-u_k, u_k\}, \quad k \geq k_0,$$

tal que u_k tem exatamente $k-1$ zeros em I.

A demonstração é feita usando relações de energia e o método de *shooting*. Tal método é descrito no Lema 1.2 a partir da relação de energia associada ao problema auxiliar

$$(\mathrm{P}_\alpha) \qquad \begin{cases} -(a(|u'|^p)|u'|^{p-2}u')' = f(u) \text{ em } (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Um caso especial de operador diferencial no problema (P) que sera estudado no capítulo 2 é dado pelo chamado p-Laplaciano 1-dimensional que surge quando consideramos $a(t) = 1$ para todo t, ou seja,

$$\Delta_p u = (|u'|^{p-2}u')'.$$

São vários o resultados sobre existência e multiplicidade de soluções para p-Laplaciano 1-dimensional, como se vê em [19], [21] e [9].

No segundo capítulo, conforme o trabalho de Sánches & Ubilla [25], estudamos um caso particular de (P) quando $a(t) = 1$, sob condições que possibilitam mostrar a existência e unicidade de soluções para o problema de autovalor

$$(\mathrm{P}_\lambda) \qquad \begin{cases} -(|u|^{p-2}u')' = \lambda f(u) \;\text{ em }\; I = (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro real, $p > 1$ e $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Além disso, são estabelecidas condições de multiplicidade de soluções não-negativas.

Como (P_λ) é um caso particular do problema dado no capítulo 1, chegamos aos resultados propostos usando as técnicas adquiridas lá com algumas alterações nas hipóteses sobre a função f, a saber,

$(f_1) f(0) \leq 0$ e f se anula no máximo uma vez em $(0, +\infty)$;

(f_2) $\displaystyle\lim_{s\to 0^+} \frac{f(s)}{s} = d$ onde $d \in [-\infty, +\infty)$;

(f_3) $\displaystyle\lim_{s\to \infty} \frac{f(s)}{s} = \infty$ (condição superlinear);

(f_4) Existem constantes $\alpha > 0$ e $s_0 \geq 0$ e um número $t_0 \in [0, 1)$ tal que

$$F(ts) \leq t^\alpha F(s), \text{ para } s > s_0 \text{ e } t \in (t_0, 1),$$

onde a função F é definida por $F(s) = \int_0^s f(t)dt$, com $s \geq 0$;

(f_5) $G(s) = pF(s) - sf(s)$ é decrescente em $(\ell_f, +\infty)$ e $\displaystyle\min_{0\leq s\leq \ell_f} G(s) = G(\ell_f)$. No caso em que f muda de sinal, definimos a constante $C \in (0, +\infty]$ por

$$C = \int_0^{\ell_F} (-F(t))^{\frac{1}{p}} dt.$$

As condições (f_1), (f_2) e (f_3) serão de grande importância para garantirmos existência de soluções positivas. A condição (f_4) é uma propriedade pseudo-homogênea local e a condição (f_5) será essencial para garantirmos unicidade de solução. A hipótese (f_2) também é importante para obter resultados de unicidade, já que nesta hipótese temos a condição de $d \in [-\infty, +\infty)$. Comprovamos este fato observando que se $d = +\infty$, é possível mostrar que o problema

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} -(|v|^{p-2}v')' = \mu v^q + v^p \text{ em } (0,1), \\ v(0) = v(1) = 0, \end{cases}$$

onde $0 \leq q < p - 1$ e $\lambda > 0$, tem exatamente duas soluções para λ pequeno (veja [24], Teorema 1, (c)). Sanchéz & Ubilla obtiveram, em [24], um resultado de multiplicidade exato, para o problema (A) com $\mu > 0$. Os autores mostraram a existência de um único $\mu^* > 0$ tal que para $\mu > \mu^*$, não há soluções positivas para (A), exatamente duas soluções positivas quando $0 < \mu < \mu^*$ e exatamente uma solução positiva para $\mu = \mu^*$, além de estudarem o comportamento assintótico de $||v_\mu||_\infty$ para μ suficientemente pequeno. Tal problema também foi proposto por Ambosetti [2] quando $p = 2$.

Os resultados apresentados aqui podem ser usados para obter unicidade de soluções positivas, bem como multiplicidade de soluções não-negativas para o problema (A), quando é considerado o caso em que $\mu < 0$. Assim fica completo o estudo iniciado [24].

Problemas em que se considera $f(0) < 0$ são chamados *semipositone* e foram trabalhados pela primeira vez por Castro, A. & Shivaji, R.em [5]. Outros trabalhos envolvendo problemas semipositone podem ser encontrados em [6].

Em 2001 Gadam & Iaia [12] estudaram o problema (P_λ) no intervalo $[-1, 1]$, considerando $p = 2$ e a não-linearidade $f \in C^2$ sendo uma função côncavo-convexa, com $f(0) < 0$, superlinear para $+\infty$ e tendo um único ponto de inflexão. Neste caso, quando $\lambda > 0$, eles mostraram um resultado de multiplicidade exato para soluções. Os resultados deste trabalho são obtidos através da análise da mudança dos sinais de $f''(t)$ e $(\frac{f(t)}{t})'$.

Os principais resultados do capítulo são:

Teorema 0.2 *Suponha que as condições* $(f_1) - (f_5)$ *são satisfeitas.*

(i) Sejam $0 < d < +\infty$ *e* $\lambda_0 = \lambda_1/d$. *Então:*

1. *para* $0 < \lambda < \lambda_0$, *o problema* $(P)_\lambda$ *admite uma única solução positiva;*
2. *para todo* $\lambda \geq \lambda_0$, *o problema* $(P)_\lambda$ *não tem solução positiva.*

(ii) Se $-\infty < d \leq 0$, *então, para cada* $\lambda > 0$, *o problema* (P_λ) *admite uma única solução positiva.*

Teorema 0.3 *Suponha* (f_2), *com* $d = -\infty$. *Além disso, assuma que a condição* (f_1), $(f_3) - (f_5)$ *são satisfeitas.*

(i) Quando $C < +\infty$, *a constante* $\lambda^* = (2C)^p((p-1)/p)$ *é tal que:*

1. *para* $0 < \lambda \leq \lambda^*$, *o problema* $(P)_\lambda$ *admite uma única solução não-negativa, a qual é positiva;*
2. *para todo* $\lambda > \lambda^*$, *o problema* $(P)_\lambda$ *tem infinitas soluções não-negativas, embora nenhuma solução positiva;*

(ii) Quando $C = \infty$, *para cada* $\lambda > 0$, *o problema* (P_λ) *tem uma única solução não negativa, a qual é positiva.*

Baseado García-Huidobro, Manásevich & Ubilla [13], no Capítulo 3 buscamos justificar a existência de soluções positivas radialmente simétricas para o problema (D)

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} -(\operatorname{div}(V(|\nabla u|)\nabla u) = f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0, \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Para tanto, trabalhamos com o problema equivalente

$$
(\mathrm{D}_r) \qquad \begin{cases} -(r^{n-1}\phi(u'))' = r^{n-1}f(u) \ \text{ em } \ (0,R), \\ u'(0) = 0 = u(R) \ \text{ em } \ \partial\Omega, \end{cases}
$$

onde $r = |x|$, $x \in \mathbb{R}^N$, e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um homeomorfismo crescente ímpar, dado por $\phi(s) = sV(s)$, onde $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função dada em (D). Consideramos ainda que ϕ e f são funções assintoticamente homogêneas (AH) e que vale a condição

$$
\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{\phi(s)} = +\infty.
$$

Sendo assim, pedimos que ϕ seja $(p-1)$-AH, i.e.,

$$
\lim_{s\to+\infty} \frac{\phi(\sigma s)}{\phi(s)} = \sigma^{p-1}, \ \text{para todo } \sigma \in \mathbb{R}^+, \ p > 1,
$$

e f seja δ-AH, ou seja,

$$
\lim_{s\to+\infty} \frac{f(\sigma s)}{f(s)} = \sigma^{\delta}, \ \text{para todo } \sigma \in \mathbb{R}^+, \ \delta > 0,
$$

e, neste sentido, o operador correspondente é dito um operador assintoticamente homogêneo. Mostramos, então, sob essas condições e $sf(s) \geq 0$, para $s \geq 0$, que existe uma solução positiva para (D_r). Tal fato é justificado pelo

Teorema 0.4 *Suponha que ϕ é um homeomorfismo ímpar crescente de $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, satisfazendo $sf(s) \geq 0$ e é crescente para $s \geq s_0$. Assuma também que ϕ e f satisfazem a condição superlinear (3.1) e que existam p, com $1 < p < N$, e $\delta > 0$ tal que*

(i) $\lim_{s\to+\infty} \frac{\phi(\sigma s)}{\phi(s)} = \sigma^{p-1}$ *para todo* $\sigma \in \mathbb{R}^+$

(ii) $\lim_{s\to+\infty} \frac{f(\sigma s)}{f(s)} = \sigma^{\delta}$ *para todo* $\sigma \in \mathbb{R}^+$

(iii) $\lim_{s\to 0} \frac{\phi(s)}{f(s)} = +\infty$ *e* $\liminf_{s\to+\infty} \frac{\phi(\sigma s)}{\phi(s)} > 0$ *para todo* $\sigma \in \mathbb{R}^+$

(iv) $\delta < \frac{N(p-1)+p}{N-p}$

Então o problema (D_r) tem uma solução positiva.

Para concluirmos que o resultado dado acima é válido usamos estimativas *a priori*, *blow-up* e teoria do grau de Leray-Schauder.

No caso homogêneo, i.e., quando $\phi(s) = |s|^{p-2}s$, $p > 1$, o uso de técnicas de *blow up* permitem transformar a questão da limitação *a priori* das soluções positivas de alguns problemas superlineares em um problema de não existência de solução positiva em $\mathbb{R}^N$, para uma certa equação limite. Esta equação limite tem o mesmo operador que a equação original, devido à homogeneidade. Veja [18] para o caso de uma equação escalar e $p = 2$, e [7] para o caso de uma sistema de p, q-Laplacianos. Veja também [22] para resultados relacionados.

Um pergunta natural que surge é saber se este método pode ser estendido para cobrir a situação radial colocada pelo problema (D_r). A resposta para esta questão é positiva restringindo-se as funções ϕ e f à classe das funções assintoticamente homogêneas, o que foi fortemente motivado pelos trabalhos [15], [16], [17] e [27].

No Apêndice A enunciamos alguns resultados usados no trabalho, mostramos a relação entrea as funções gamma e beta usada na demosntração da proposição 2.4, no capítulo 2, além alguns resultados sobre teoria do grau de Leray-Schauder e por fim um estudo que será de extrema importância não demonstração do lema 3.1, no capítulo 3.

No Apêndice B, estudamos os autovalores do p-laplaciano em dimensão um, cuja forma geral é

$$\lambda_k = (k\pi_p)^p = k^p(p-1)\left[2\int_0^1 \frac{ds}{(1-s^p)^{1/p}}\right]^p.$$

Capítulo 1

O método de *shooting* no estudo de existência e multiplicidade de resultados.

Neste capítulo, baseando-nos em Ubilla em [27], estudaremos as *relações de energia* juntamente com método de *shooting*, para obter resultados de existência e multiplicidade para o problema de Dirichlet:

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} -(a(|u'(t)|^p)|u'|^{p-2}u')' = f(u) \ \text{ em } \ I = (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

onde $p > 1$, $f \in C(\mathbb{R})$ e $a \in C(\mathbb{R}^+)$ são funções que satisfazem algumas propriedades.

Um caso especial do operador dado em (P) é o p-Laplaciano em dimensão 1, obtido quando consideramos $a(t) \equiv 1$, ou seja,

$$\Delta_p u = (|u'|^{p-2}u')'.$$

Existem resultados gerais de multiplicidade de soluções para o p-laplaciano unidimensional usando *relações de energia*, como vemos em [19], [21], [9].

1.1 O método de *shooting* e a *relação de energia*

Nesta seção apresentamos um resultado que descreve o método de *shooting*, a partir da *relação de energia* associada ao problema (P_α), que será estabelecido a seguir.

O método consiste em variar o parâmetro α até atingir a condição $u(1) = 0$ e será usado para encontrar as soluções de (P).

Vejamos a definição de uma solução fraca para o problema (P).

Por uma solução fraca de (P), entendemos ser uma função $u \in W_0^{1,p}(I)$, que satisfaz $a(|u'|^p)|u'|^{p-2}u' \in L^q(I)$, com $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$ e tal que, dada $v \in W_0^{1,p}(I)$,

$$\int_0^1 a(|u'|^p)|u'|^{p-2}u'v'dt = \int_0^1 f(u)vdt.$$

Sobre as funções $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ temos as seguintes condições:

(a_1) $a(|s|^p)|s|^{p-2}s \in C^1(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $(a(|s|^p)|s|^{p-2}s)' > 0$, para todo $s \neq 0$;

(a_2) Existem constantes $c > 0$ e $1 < q \leq p$ tais que $\lim\limits_{s \to 0^+} s^{p-q}a(s^p) = c$;

(a_3) Existe uma constante $b > 0$ tal que $\lim\limits_{s \to +\infty} a(s) = b$;

(f_1) f é uma função ímpar;

(f_2) Existem constantes $\mu \in (0, 1/p)$ e $s_0 \geq 0$ tais que

$$\mu s f(s) \geq F(s) > 0, \quad \text{para todo } |s| \geq s_0,$$

onde $F(s) = \int_0^s f(\tau)d\tau$.

As condições (a_1), (a_2) e (a_3) são satisfeitas para $a(t) \equiv 1$ e $a(t) = t^r + d$, onde $r = \frac{p-q}{p} > 0$ e d>0 é uma constante. A condição (f_2) é chamada condição de Ambrosetti-Robinowitz.

A seguir, enunciamos o principal resultado deste capítulo, o qual justifica a existência e multiplicidade de soluções para o problema (P).

Teorema 1.1 *Suponha que f satisfaz (f_1) e (f_2). Então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $k \geq k_0$, existem pelo menos duas soluções fracas não triviais do problema (P), de classe C^1 em $\overline{I}$, isto é,*

$$\{-u_k, u_k\}, \quad k \geq k_0,$$

tal que u_k tem exatamente $k - 1$ zeros em I.

Observação 1.1 *Se no Teorema 1.1 assumirmos que $1 < q \leq 2$, prova-se que soluções fracas do problema (P) são soluções clássicas.*

A verificação desta observação será feita na demonstração da Proposição 1.2.

A Relação de Energia

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e considere o problema

$$(\mathrm{P}_\alpha) \qquad \begin{cases} -(a(|u'|^p)|u'|^{p-2}u')' = f(u) \text{ em } (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Defina

$$\varphi(s) := a(|s|^p)|s|^{p-2}s, \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}$$

e observe que, pela hipótese (a_1),

- φ é crescente para $s \neq 0$;
- Existe φ^{-1}, a inversa de φ.

Seja $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\Phi(s) = \int_0^s \varphi^{-1}(z)dz.$$

Note que, como

$$\frac{d}{ds}[\Phi \circ \varphi(s)] = \Phi'(\varphi(s))\frac{d}{ds}\varphi(s) = \varphi^{-1}(\varphi(s))\frac{d}{ds}\varphi(s) = s\frac{d}{ds}\varphi(s),$$

então, $\Phi \circ \varphi(s)$ é crescente para $s > 0$ e decrescente para $s < 0$.

Suponha que $u \in C^2(\overline{I})$ seja uma solução de (P_α). Então

$$\frac{d}{dt}[\Phi \circ \varphi(u'(t))] = \frac{d}{dt}[\varphi(u'(t))]u'(t), \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Multiplicando a equação em (P_α) por $u'(t)$, obtemos

$$-\frac{d}{dt}[\varphi(u'(t))]u'(t) = f(u(t))u'(t),$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}[\Phi \circ \varphi(u'(t))] = -\frac{d}{dt}F(u(t))$$

e, dessa forma, a *relação de energia* associada a (P_α) é dada por

$$\Phi \circ \varphi(u'(t)) + F(u(t)) = C, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Fazendo $t = 0$, obtemos $C = \Phi \circ \varphi(\alpha)$. Portanto,

$$\Phi \circ \varphi(u'(t)) + F(u(t)) = \Phi \circ \varphi(\alpha) \quad \text{para todo} \quad t\mathbb{R}. \tag{1.1}$$

No que segue, faremos um estudo no sentido de dar condições que nos permitam dizer quando existe e é única a solução de um dado problema proveniente da relação de energia associada a (P_α).

Observe que

$$\Phi \circ \varphi(s) = H(s) \ \forall s \in \mathbb{R}$$

onde $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$H(s) = a(|s|^p)|s|^p - \frac{1}{p}A(|s|^p),$$

com $A(t) = \int_0^t a(s)ds$.

De fato, reescrevendo H como

$$H(s) = a(|s|^p)|s|^{p-2}s^2 - \frac{1}{p}A(|s|^p)$$

temos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}H(s) &= s\frac{d}{ds}(a(|s|^p)|s|^{p-2}s) + a(|s|^p)|s|^{p-2}s - \frac{1}{p}a(|s|^p)p|s|^{p-2}s \\ &= \frac{d}{ds}(a(|s|^p)|s|^{p-2}s)s \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{d}{ds}H(s) = s\frac{d}{ds}(\varphi(s)). \tag{1.2}$$

Como

$$\frac{d}{ds}[\Phi \circ \varphi(s)] = s\frac{d}{ds}(\varphi(s)),$$

temos

$$\Phi \circ \varphi(s) = H(s) + C.$$

Fazendo $s = 0$, temos $C = 0$, donde segue a igualdade. Por esta razão reescrevemos (1.1) como

$$H(u'(t)) + F(u(t)) = H(\alpha). \tag{1.3}$$

Sendo, por 1.2, H uma função crescente para $s > 0$ e por (f_2), $\lim_{s\to+\infty} F(s) = +\infty$, para cada $\alpha > 0$ denotamos por $\ell_0(\alpha)$ o primeiro zero positivo da função que associa a cada s o valor $H(\alpha) - F(s)$.

Além disso, por (a_3),

$$H(s) \to +\infty, \quad \text{quando} \quad s \to +\infty.$$

Logo devemos ter

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \ell_0(\alpha) = +\infty. \tag{1.4}$$

Lembrando que, para $s > 0$, a função contínua H tem derivada positiva e contínua, concluímos que Existe H^{-1} contínua definida em $(0, +\infty)$

Mais ainda, como H é injetiva, $H^{-1}(0) = 0$ e

$$[H^{-1}(\tau)]' = \frac{1}{H'(H^{-1}(\tau))} = \frac{1}{H^{-1}(\tau)\varphi'(H^{-1}(\tau))}.$$

tem-se $H^{-1} \in C^1(0, +\infty)$.

A partir da relação de energia em 1.3 vamos propor um outro problema e estudar a existência e unicidade de solução para o mesmo.

Seja ω, com $\omega' > 0, \forall t \in I$ uma solução de (P_α). Da *relação de energia*, temos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \omega'(t) = H^{-1}(H(\alpha) - F(\omega(t))) \text{ em } I \\ \omega(0) = 0 \\ \omega \in C^1(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{1.5}$$

Como estamos trabalhando com α fixo, escreveremos $\ell_0(\alpha) = \ell_0$.

Sendo F uma função par, segue que a função $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $T(s) = H^{-1}(H(\alpha) - F(s))$ também é par. Então, para $-\ell_0 < s < \ell_0$,

$$F(s) < F(\ell_0)$$

e, como $F(\ell_0) = H(\alpha)$,

$$T(s) > 0, \qquad \forall \quad s \in (-\ell_0, \ell_0).$$

Assim, fica bem definida a função

$$\begin{array}{rcl} J : (-\ell_0, \ell_0) & \to & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \displaystyle\int_0^s \frac{dz}{T(z)}. \end{array}$$

A função J goza das seguintes propriedades:

- J é uma função contínua;
- $J'(s) = \frac{1}{T(s)} > 0,$ para todo $s \in (-\ell_0, \ell_0)$;

- J é uma função ímpar.

Supondo que $f(\ell_0) > 0$, a condição (a_2) nos diz que

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{H(s)}{s^q} < +\infty. \tag{1.6}$$

De fato,

$$\frac{H(s)}{s^q} = \frac{a(|s|^p)|s|^p - \frac{1}{p}A(|s|^p)}{s^q}$$

logo, segue da regra de L'Hôpital que

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{H(s)}{s^q} = c - \frac{1}{q}c.$$

Com isso, está bem definido $\theta(\alpha) = J(\ell_0(\alpha))$. Daqui em diante para simplificar a notação e já que α foi fixado anteriormente escreveremosθ em vez de $\theta(\alpha)$.

Com efeito,

$$\int_0^{\ell_0} \frac{dz}{T(z)} = \int_0^{\ell_0} \left[\frac{(\ell_0 - z)^{1/q}}{T(z)} \frac{1}{(\ell_0 - z)^{1/q}} \right] dz,$$

onde $q > 1$, então, basta mostrar a existência do limite

$$\lim_{s\to \ell_0^-} \frac{(\ell_0 - z)^{1/q}}{T(z)}, \tag{1.7}$$

já que $\displaystyle\int_0^{\ell_0} \frac{dz}{(\ell_0 - z)^{1/q}}$ converge para todo $q > 1$.

Justifiquemos a existência de (1.7)

Como $F(\ell_0) = H(\alpha)$ segue que

$$\lim_{s\to \ell_0^-} \frac{H(\alpha) - F(s)}{(\ell_0 - s)} = f(\ell_0),$$

isto é,

$$\lim_{s\to \ell_0^-} \frac{H(T(s))}{(l_0 - s)} = f(\ell_0)$$

e

$$\frac{\ell_0 - s}{[T(s)]^q} = \frac{\ell_0 - s}{H(T(s))} \frac{H(T(s))}{[T(s)]^q}.$$

donde o limite (1.7) existe.

Note que, supondo que existe uma solução para o problema (1.5), esta deve satisfazer a relação de energia (1.3) e, consequentemente, o problema (P_α). Desse modo, assumiremos que esta solução existe.

Seja u_0 uma solução para o problema (1.5). Então

$$\frac{u_0'(t)}{T(u_0(t))} = 1, \quad u_0(t) \in (-\ell_0, \ell_0), \forall t \in I.$$

Logo, das propriedades da função J,

$$1 = J'(u_0(t))u_0'(t) = (J \circ u_0)'(t),$$

donde

$$(J \circ u_0)(t) = t,$$

por conseguinte, $u_0(t) = J^{-1}(t)$ é a solução de (1.5) em $[-\theta, \theta]$, a qual, pelo Teorema de existência e Unicidade, é única, já que T é localmente lipschitziana para s próximo de 0.

Além disso, $\theta = J(\ell_0)$ e $-\theta = J(-\ell_0)$, logo

$$u_0(\theta) = \ell_0, \qquad u_0(-\theta) = -\ell_0$$

e

$$u_0'(\theta) = u_0'(-\theta) = 0.$$

Queremos agora estender a solução encontrada para $[\theta, 3\theta]$. Para isso, considere a função $v_0(t) = u_0(2\theta - t)$ em $[\theta, 3\theta]$. Assim,

- $v_0'(t) = -u_0'(2\theta - t) < 0$
- $v_0(0) = u_0(0)$

portanto, v_0 satisfaz o problema

$$\begin{cases} -v'(t) = H^{-1}(H(\alpha) - F(v(t))) \\ v(2\theta) = 0 \\ v \in C^1(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Como $H(-v_0) = H(v_0)$, temos que a função $u : (0,1) \to \mathbb{R}$, dada por

$$u(t) = \begin{cases} u_0(t), & \text{se } -\theta \leq t \leq \theta \\ v_0(t), & \text{se } \theta \leq t \leq 3\theta \end{cases}$$

é solução do problema

$$\begin{cases} H(u'(t)) = H(\alpha) - F(u(t)) \ \text{ em } \ (0,1), \\ u(2k\theta) = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots, \\ u \in C^1(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Consequentemente, u é solução do problema (P_α).

No caso em que $u'(0) = -\alpha$, consideramos a solução $\gamma : (0,1) \to \mathbb{R}$, definida por

$$\gamma(t) = u(-t),$$

onde

$$\gamma(0) = u(0) \quad \text{e} \quad \gamma'(0) = -u'(0) = -(-\alpha) > 0$$

e assim, recaímos no caso já estudado.

Além disso, como f é ímpar, se u é solução de (P_α), então $-u$ também o é. Diante do estudo feito, temos justificado o seguinte lema:

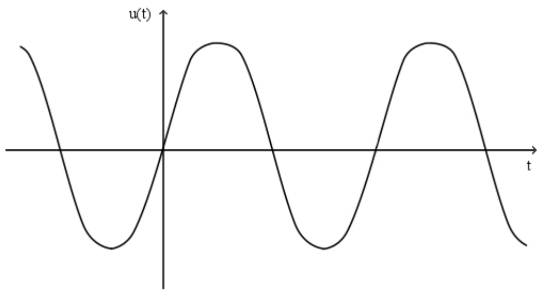

Figura 1.1: gráfico da função u.

Lema 1.1 *Suponha que f seja ímpar. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $f(\ell_0) > 0$. Então, o problema (P_α) possui exatamente duas soluções $\{-u, u\}$ tais que*

$$u(2k\theta(\alpha)) = 0, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.8}$$

onde $\theta(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\ell_0(\alpha)} \frac{ds}{T(s)}$.

Até agora mostramos a existência de solução para o problema (P_α), entretanto o que na verdade desejamos, é mostrar a existência de soluções para o problema (P). Para tanto, no que segue, apresentamos uma proposição que relaciona soluções do problema (P_α) com soluções do problema (P).

Proposição 1.2 *Suponha que f satisfaz (f_1).*

(i) Seja $\alpha \neq 0$, $f(\ell_0) > 0$ e u a solução de (P_α) satisfazendo (1.5) com $u(1) = 0$. Então u é uma solução fraca do problema (P);

(ii) Suponha que $sf(s) > 0$, para todo $t \neq 0$. Se u é solução fraca não trivial do problema (P), então u é solução do problema (P_α).

Demonstração:

Sejam $\alpha > 0$ e u solução do problema (P_α), logo $u \in C^1(\mathbb{R})$. Pelo Lema 1.1 existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$2k\theta = 1$$

e

$$u(0) = u(2\theta) = \cdots = u(2k\theta) = 0$$

$$u'(\theta) = u'(3\theta) = \cdots = u'((2k-1)\theta).$$

Vimos que $H^{-1} \in C^1(0, +\infty)$ e a função que associa a cada $s \in \mathbb{R}$ o número real $H(\alpha) - F(s)$ é de classe $C^1(\mathbb{R})$. Com isso, de

$$\begin{aligned} u'(t) &= T(u(t)) \\ &= H^{-1}(H(\alpha) - F(u(t))) \end{aligned}$$

concluímos que $u' \in C^1(0, \theta)$, e consequentemente

$$u \in C^2((2i-1)\theta, (2i+1)\theta), \qquad 1 \leq i \leq k-1$$

e

$$u \in C^2(((0, \theta); \mathbb{R}) \cap C^2(((2k-1)\theta), 1)).$$

Seja $v \in W_0^{1,p}(I)$ e defina

$$\omega(t) := a(|u'(t)|^p)|u'(t)|^{p-2}u'(t), \ \forall t \in (0, 1).$$

Como

- $\int_0^\theta (\omega v)' dt = 0;$
- $\displaystyle\int_{(2i-1)\theta}^{(2i+1)\theta} (\omega v)' dt = 0;$

- $\displaystyle\int_{(2k+1)\theta}^{1} (\omega v)' dt = 0.$

pois, $\omega(\theta) = \cdots = \omega((2i+1)\theta) = 0$, $\forall\ 1 \leq i \leq k-1$, $v(0) = v(1) = 0$ e u é solução fraca de (P) em cada um dos intervalos

$$(0,\theta),\ ((2i-1)\theta,(2i+1)\theta),\ \forall 1 \leq i \leq k-1,\ \text{e}\ ((2k-1)\theta),1).$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \omega v' dt &= \int_0^\theta \omega v' dt + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{(2i-1)\theta}^{(2i+1)\theta} \omega v' dt + \int_{(2k-1)\theta}^{1} \omega v' dt \\
&= \int_0^\theta f(u) v dt + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{(2i-1)\theta}^{(2i+1)\theta} f(u) v dt + \int_{(2k-1)\theta}^{1} f(u) v dt \\
&= \int_0^1 f(u) v dt
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^1 a(|u'(t)|)|u'(t)|^{p-2}u'(t)v'(t)dt = \int_0^1 f(u(t))v(t)dt.$$

Mostrando o item *(i)*.

Notemos que se u é solução fraca de (P), então dada $v \in W_0^{1,p}$

$$\left|\int_0^1 a(|u'|^p)|u'|^{p-2}u'v'dt\right| = \left|\int_0^1 f(u)vdt\right|.$$

Pela desigualdade de Holder

$$\left|\int_0^1 a(|u'|^p)|u'|^{p-2}u'v'dt\right| \leq ||f(u)||_q||v||_p \leq C||v||_p.$$

Pelo Teorema A.2 segue que $a(|u'|^p)|u'|^{p-2}u' \in W^{1,p}$, e, pelo Teorema A.1, $a(|u'|^p)|u'|^{p-2}u' \in C(\overline{I})$ e, portanto, $u \in C^1(\overline{I})$.

Considere $\alpha = u'(0)$ com $\alpha \neq 0$, e suponha que $\alpha > 0$. Seja $b > 0$, tal que

$$u(t) > 0 \qquad \text{em} \quad (0,b) \qquad \text{e} \qquad u(0) = u(b) = 0.$$

Por hipótese, $sf(s) > 0$, para todo $s \neq 0$, daí,

$$-(a(|u'(t)|)|u'(t)|^{p-2}u'(t))' = f(u(t)) > 0 \qquad \text{em} \quad (0,b).$$

Então,

$$(a(|u'(t)|)|u'(t)|^{p-2}u'(t))' < 0 \tag{1.9}$$

Sabendo que, por (a_1), a função

$$\varphi(s) = a(|s|^p)|s|^{p-2}s,\ \forall s \in \mathbb{R}$$

é crescente em $(0, b)$, por (1.9)

$$\varphi \circ u' \quad \text{é decrescente em} \quad (0, b),$$

donde u' é decrescente em $(0, b)$.

Pela relação de energia, fazendo $t = 0$ e $t = b$, obtemos

$$H(u'(0)) = H(u'(b))$$

e, assim, sendo H uma função par, temos

$$-u'(0) = u'(b).$$

Desse modo, pelo Teorema do Valor Intermediário obtemos que u' possui um único zero em $(0, b)$. Ainda pela relação de energia,

$$H(u'(t)) + F(u(t)) = H(u'(0)) \quad \text{em} \quad (0, b)$$

resulta que u é solução da EDO

$$u'(t) = T(u(t)) \quad \text{em} \quad [0, t_0) \quad \text{e} \quad u(0) = 0$$

onde t_0 é o zero de u'.

Pelo Teorema de Existência e Unicidade de solução para EDOs, segue que $t_0 = \theta$. Além disso, pelo estudo feito anteriormente concluímos que

$$u'(t) = T(u(t)) \quad \text{em} \quad [\theta, b] \;\; b = 2\theta \text{ e } u(\theta) = \ell_0$$

logo $u(t) = u_\alpha(t)$, onde u_α é a solução do problema P_α.

■

1.2 Aplicação do Método de Shooting

Nesta seção, enunciamos dois lemas muito úteis na demonstração do Teorema 1.1 e, por fim, demonstraremos o teorema citado.

Na demonstração do Lema a seguir, escreveremos: $T(s) = T(\alpha, s)$ *e voltaremos a notação* $\theta(\alpha)$.

Lema 1.2 *Assuma as hipóteses do Teorema 1.1 e seja* $\theta(\alpha)$ *como na Seção* 1.1. *Então*

$$\lim_{\alpha\to\infty}\theta(\alpha)=0.$$

Demonstração:

Dado $\alpha > 0$, temos

$$\theta(\alpha)=J(\ell_0)=\int_0^{\ell_0}\frac{dz}{T(\alpha,z)}$$

Fazendo a mudança de variável $z=s\ell_0$, obtemos

$$\theta(\alpha)=J(\ell_0)=\int_0^{1}\frac{\ell_0 ds}{T(\alpha,s\ell_0)}. \tag{1.10}$$

Das hipóteses (a_1), (a_2) e (a_3), temos:

1) $\lim\limits_{s\to 0^+}\frac{H(s)}{s^q}=\frac{(q-1)c}{q}=:\rho$.

Logo, fixado $\varepsilon_0 >$, existe $\eta_0>0$ tal que, para $0<s<\eta_0$,

$$H(s)\le(\rho+\varepsilon_0)s^q$$

e, por conseguinte, fazendo

$$z=(\rho+\varepsilon_0)s^q,$$

e usando o fato de H^{-1} ser crescente, uma vez que H o é, temos

$$H^{-1}(z)\ge c_1z^{1/q},\ \ 0<z<\omega_1,$$

onde, $c_1=\left(\frac{1}{\rho+\varepsilon_0}\right)^{1/q}>0,\ \ \omega_1=\eta_0(\rho+\varepsilon_0)>0.$

2) $\lim\limits_{s\to\infty}\frac{H(s)}{s^p}\le\frac{(p-1)b}{p}=:\rho_1$.

Então, fixado $\varepsilon_1>0$, existe $\eta_1>0$ tal que para $s>\eta_1$,

$$H(s)\le(\rho_1+\varepsilon_1)s^p$$

e daí repetindo o que foi feito acima, existe $\omega_2>0$

$$H^{-1}(z)\ge c_2z^{1/p}\ \ z>\omega_2,\ \ c_2=(\rho_1+\varepsilon_1)^{-1/p}>0.$$

Assumindo, sem perda de generalidade, que $\omega_1<\omega_2$, como as funções H^{-1}, $s^{1/p}$ e $s^{1/q}$ são funções contínuas, existe $\omega_0\in[\omega_1,\omega_2]$ tal que

$$\begin{cases} H^{-1}(z)\ge c_1z^{1/q} & 0\le z\le\omega_0\\ H^{-1}(z)\ge c_2z^{1/p} & z\ge\omega_0. \end{cases} \tag{1.11}$$

Do Teorema do Valor Médio, para $s \in [1/2, 1]$

$$F(\ell_0) - F(s\ell_0) = f(\beta\ell_0)\ell_0(1-s) \quad \text{para} \quad \beta \in (1/2, 1)$$

$$H(\alpha) - F(s\ell_0) = f(\beta\ell_0)\ell_0(1-s) \quad \text{para} \quad \beta \in (1/2, 1). \tag{1.12}$$

Como existem constantes $\mu \in (0, 1/p)$ e $s_0 \geq 0$ tais que

$$sf(s) - \frac{F(s)}{\mu} > 0, \quad s \geq s_0, \tag{1.13}$$

ou seja

$$\frac{d}{dt}\left[s^{-1/\mu}F(s)\right], \quad s \geq s_0,$$

tem-se que, a função $s^{-1/\mu}F(s)$ é crescente para $s \geq s_0$, logo

$$s^{-1/\mu}F(s) \geq s_0^{-1/\mu}F(s_0) = C, \quad s \geq s_0,$$

donde, dividindo por μ em ambos os lados,

$$\frac{F(s)}{\mu} \geq C_1 s^{1/\mu}, \quad s \geq s_0. \tag{1.14}$$

Por (1.12) e (1.13), para α suficientemente grande e $\beta \in (1/2, 1)$, uma vez que tem-se 1.4,

$$\begin{aligned} H(\alpha) - F(s\ell_0) &= \frac{1}{\beta} f(\beta\ell_0)\beta\ell_0(1-s) \\ &\geq \frac{1}{\beta}\frac{F(\beta\ell_0)}{\mu}(1-s). \end{aligned}$$

De 1.14,

$$H(\alpha) - F(s\ell_0) \geq C_2(\beta\ell_0)^{1/\mu}(1-s).$$

Então existe α_0 suficientemente grande tal que, para cada $(\alpha, s) \in [\alpha_0, +\infty) \times [1/2, 1]$, temos

$$\begin{aligned} H(\alpha) - F(s\ell_0) &\geq C_2\beta^{1/\mu}\ell_0^{1/\mu}(1-s) \\ &> C_2(1/2)^{1/\mu}\ell_0^{1/\mu}(1-s) \end{aligned}$$

e assim,

$$\frac{T(\alpha, s\ell_0)}{\ell_o} > \frac{H^{-1}(C_3\ell_0^{1/\mu}(1-s))}{\ell_0}. \tag{1.15}$$

Defina os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} M(\omega_0) &= \{(\alpha, s) \in [\alpha_0, +\infty) \times [1/2, 1]; \quad C_3\ell_0^{1/\mu}(1-s)) \leq \omega_0\} \\ N(\omega_0) &= \{(\alpha, s) \in [\alpha_0, +\infty) \times [1/2, 1]; \quad C_3\ell_0^{1/\mu}(1-s)) \geq \omega_0\}. \end{aligned}$$

Portanto, de 1.11 e 1.15,

$$\begin{aligned} \frac{T(\alpha, s\ell_0)}{\ell_0} &> \frac{c_1(C_3\ell_0^{1/\mu}(1-s)))^{1/q}}{\ell_0}, \quad (\alpha, s) \in M(\omega_0) \\ &> C_4\ell_0^{\frac{1}{\mu q}-1}(1-s)^{1/q}, \quad (\alpha, s) \in M(\omega_0) \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\frac{T(\alpha, s\ell_0)}{\ell_0} > C_5\ell_0^{\frac{1}{\mu p}-1}(1-s)^{1/p}, \quad (\alpha, s) \in N(\omega_0).$$

Logo, tomando se necessário α_0 maior, existe κ_1 tal que

$$\frac{T(\alpha, s\ell_0)}{\ell_0} > \kappa_1\ell_0^{\frac{1}{\mu p}-1}(1-s)^{1/q}, \quad \forall(\alpha, s) \in [\alpha_0, +\infty) \times [1/2, 1]. \tag{1.16}$$

Lembrando que F é crescente no infinito, quando α é suficientemente grande, para $s \in [0, 1/2]$

$$F(\ell_0) - F(s\ell_0) \geq F(\ell_0) - F\left(\frac{1}{2}\ell_0\right) = f(\beta\ell_0)\ell_0\left(1 - \frac{1}{2}\right) \tag{1.17}$$

onde $\beta \in (1/2, 1)$.

De (1.12) e (1.17)

$$\begin{aligned} H(\alpha) - F(s\ell_0) &\geq \frac{1}{2\beta}f(\beta\ell_0)\beta\ell_0 > \frac{1}{2\beta}\beta^{1/\mu}\ell_0^{1/\mu} \\ &> C_6\ell_0^{1/\mu}. \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{T(\alpha, s\ell_0)}{\ell_0} > \frac{H^{-1}(C_6\ell_0^{1/\mu})}{\ell_0}.$$

Donde, finalmente, obtemos que existem $\kappa_2 > 0$ e α_1 suficientemente grande tais que

$$\frac{T(\alpha, s\ell_0)}{\ell_0} > \kappa_2\ell_0^{\frac{1}{\mu p}-1}, \quad \forall(\alpha, s) \in [\alpha_1, +\infty) \times [0, 1/2] \tag{1.18}$$

Portanto, por (1.16) e (1.18) e considerando $\overline{\alpha} = \max\{\alpha_0, \alpha_1\}$, para $\alpha > \overline{\alpha}$

$$\theta(\alpha) < \frac{1}{\kappa_2\ell_0^{\frac{1}{\mu p}-1}} + \frac{1}{\kappa_1\ell_0^{\frac{1}{\mu p}-1}}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{ds}{(1-s)^{1/q}}.$$

Sabe-se que

- $\lim_{\alpha \to +\infty} \ell_0(\alpha) = +\infty$;
- $\mu < \frac{1}{p}$, consequentemente $\frac{1}{\mu p} - 1 > 1$;
- $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{ds}{(1-s)^{1/q}}$ converge.

Logo,

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \theta(\alpha) = 0.$$

■

Seja s_0 como na condição (f_2) e defina

$$\begin{aligned} M_0 &= \max_{s \in [0, s_0]} F(s) \\ \beta_0 &= H^{-1}(M_0). \end{aligned}$$

Lema 1.3 *Assuma as hipóteses do Teorema 1.1. Então, existe* $\alpha_0 \geq \beta_0$*, tal que*

$$\theta \in C([\alpha_0, +\infty))$$

Demonstração:

Seja s_0 como na condição (f_2). Sabendo que F é crescente para $s > s_0$ e que $\ell_0(\alpha)$ é o primeiro zero positivo da função

$$s \to H(\alpha) - F(s),$$

observamos, pelas figuras 1.3 e 1.2, que, para $\alpha < \beta_0$, a função ℓ_0 pode assumir pontos de descontinuidade. Assim, existe $\alpha_0 \geq \beta_0$, tal que ℓ_0 é contínua para $\alpha > \alpha_0$. Consequentemente só podemos estudar a continuidade de θ em $[\alpha_0, +\infty)$ já que, por definição,

$$\theta(\alpha) = \int_0^{\ell_0(\alpha)} \frac{dz}{H^{-1}(H(\alpha) - F(z))}$$

ou equivalentemente,

$$\theta(\alpha) = \ell_0(\alpha) \int_0^1 \frac{ds}{H^{-1}(H(\alpha) - F(s\ell_0(\alpha)))}. \tag{1.19}$$

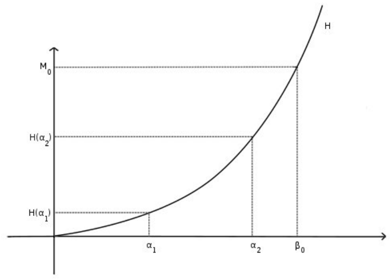

Figura 1.2: gráfico da função H.

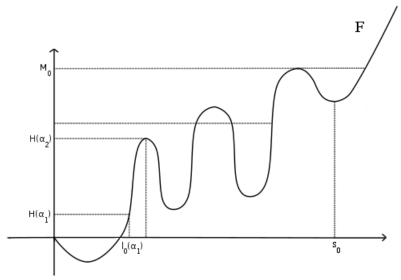

Figura 1.3: gráfico da função F.

Desse modo, a continuidade de θ depende da continuidade da integral em (1.19).

Defina

$$S_\alpha(s) = \frac{1}{H^{-1}(H(\alpha) - F(s\ell_0(\alpha)))}$$

que é contínua em $0 < s < 1$. Portanto, se $\alpha \to \alpha_* \geq \beta_0$,

$$S_\alpha(s) \to S_{\alpha_*}(s)$$

para cada $0 < s < 1$. Além disso, para $q > 1$,

$$S_\alpha(s) = \frac{(1-s)^{1/q}}{H^{-1}(H(\alpha) - F(s\ell_0(\alpha)))} \frac{1}{(1-s)^{1/q}}.$$

Note que, pela regra de L'Hôpital,

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 1^-} \frac{H(\alpha) - F(s\ell_0(\alpha))}{1-s} &= \lim_{s\to 1^-} \ell_0(\alpha) f(s\ell_0(\alpha)) \\ &= \ell_0(\alpha) f(\ell_0(\alpha)) > 0 \end{aligned}$$

e

$$\frac{(1-s)}{T(\alpha, s\ell_0(\alpha))^q} = \frac{(1-s)}{H(T(\alpha, s\ell_0(\alpha)))} \frac{H(T(\alpha, s\ell_0(\alpha)))}{T(\alpha, s\ell_0(\alpha))^q}.$$

Logo, por (1.6)

$$\lim_{s\to 1^-}\frac{(1-s)^{1/q}}{T(\alpha, s\ell_0(\alpha))} < +\infty,$$

portanto

$$|S_\alpha(s)| \leq M\frac{1}{|1-s|^{1/q}}.$$

Assim, segue do teorema da convergência dominada de Lebesque que

$$\int_0^1 S_\alpha(s)ds \to \int_0^1 S_{\alpha_*}(s)ds,$$

i.e.,

$$\theta(\alpha) \to \theta(\alpha_*),$$

ou ainda,

$$\theta \in C([\alpha_0, +\infty)).$$

■

Agora estamos prontos para provar o principal resultado deste capítulo.

Demonstração do Teorema 1.1:

Fixe $\alpha_0 > 0$ como no Lema 1.1. Sabe-se que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{2k_0} < \theta(\alpha_0).$$

Logo, para $k \geq k_0$ fixado,

$$0 < \frac{1}{2k} < \theta(\alpha_0).$$

Como $\theta \in C([\alpha_0, +\infty))$ e vale o Lema 1.2, do Teorema do Valor Intermediário existe $\alpha > \alpha_0$ tal que

$$f(\ell_0(\alpha)) > 0 \quad \text{e} \quad \theta(\alpha) = \frac{1}{2k}$$

ou seja,

$$2k\theta(\alpha) = 1. \tag{1.20}$$

Do Lema 1.1, o problema (P_α) tem duas soluções $\{-u, u\}$ tais que

$$u(2j\theta) = 0, \quad j = 0, \pm 1. \pm 2 \ldots$$

Então, para $j = k$ e por (1.20),

$$u(0) = u(2\theta) = \cdots = u(2(k-1)\theta) = u(2k\theta) = u(1) = 0. \tag{1.21}$$

Pelo item (i) da Proposição 1.2, segue que u é uma solução fraca de (P) e por (1.21), esta solução possui $k-1$ zeros em $(0, 1)$.

■

Observação 1.2 *Seja $k \in \mathbb{N}$ e $\theta(\alpha)$ a função associada ao problema (P_α). Se assumirmos que existe um único $\alpha_k \in \mathbb{R}$, tal que tal que $2k\theta(\alpha_k) = 1$. Logo do Lema 1.1 e da Proposição 1.2, existe um único par de soluções fracas $\{-u, u\}$ do Problema (P) tal que u possui exatamente $k-1$ zeros em $(0,1)$. Dessa forma quando supomos que $\theta(\alpha)$ é uma função estritamente decrescente, então o Teorema 2.1 garante que as soluções obtidas pela relação de energia são as únicas soluções fracas do Problema (P).*

Neste capítulo, trabalhamos com o método de *shooting* para encontrar soluções para o problema (P). Fazendo uso dos conhecimentos adquiridos nesse capítulo estudaremos a existência e unicidade de soluções para o Problema (P_λ) dado no próximo capítulo.

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Soluções positivas via Método de Shooting

Neste capítulo, diferentemente do capítulo anterior vamos estudar a existência e unicidade de soluções positivas para o problema de autovalor (P_λ) estabelecido mais tarde.

Além disso trabalharemos com não-linearidades superlineares no ∞, estudando seus efeitos proximo do zero, donde obteremos resultados de unicidade para soluções positivas conforme o Teorema 2.1 e resultados de multiplicidade para soluções não-negativas, conforme o Teorema 2.2. Para tanto usaremos o método de *shooting* visto anteriormente, conforme os estudos de Sanchez & Ubilla em [25], veja também [27], [24], [1] e [14]. Os teoremas citados são os principais resultados deste capítulo e serão enunciados logo mais.

Vale a pena ressaltar que o método de shooting será usado quando fizermos uma análise da função tempo θ, dada no Capítulo 1, a qual passaremos a denotar por T, contudo aqui tratamos o caso em que $a(t) \equiv 1$ para todo t.

Comecemos com a definição

Dada uma função contínua $z : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ *com um número finito de zeros, denotaremos por* $\ell_z = \max\limits_{t \geq 0}\{t;\ z(t) = 0\}$.

Considere o problema:

$$(\mathrm{P}_\lambda) \qquad \begin{cases} -(|u|^{p-2}u')' = \lambda f(u) \ \text{ em } \ I = (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro, $p > 1$ e $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Estabeleceremos algumas condições sobre a função f

(f_1) $f(0) \leq 0$ e f se anula no máximo uma vez em $(0, +\infty)$;

(f_2) $\lim\limits_{s\to 0^+} \dfrac{f(s)}{s^{p-1}} = d \quad$ onde $\quad d \in [-\infty, +\infty)$

(f_3) $\lim\limits_{s\to \infty} \dfrac{f(s)}{s^{p-1}} = \infty$ (condição superlinear)

(f_4) Existem constantes $\beta > 0$ e $s_0 \geq 0$ e um número $t_0 \in [0, 1)$ tal que

$$F(ts) \leq t^\beta F(s) \quad \text{para} \quad s > s_0 \quad \text{e} \quad t \in (t_0, 1),$$

onde a função F é a primitiva de f, definida por $F(s) = \int_0^s f(t)dt$, com $s \geq 0$;

(f_5) $G(s) = pF(s) - sf(s)$ é decrescente em $(\ell_f, +\infty)$ e $\min\limits_{0\leq s\leq \ell_f} G(s) = G(\ell_f)$. No caso em que f mudar de sinal, definimos a constante $C \in (0, +\infty]$ por

$$C = \int_0^{\ell_F} (-F(t))^{\frac{1}{p}} dt.$$

Aqui, λ_1 denota o primeiro autovalor do p-Laplaciano.

Alguns comentários a respeito das hipóteses dadas.

As condições (f_1), (f_2) e (f_3) serão de grande importância para garantirmos existência de soluções positivas. A condição (f_4) é uma propriedade pseudo-homogênea local, e a condição (f_5) será essencial para garantirmos unicidade, pois ela nos permitirá provar que a função tempo é monótona. A hipótese (f_2) também é importante para obter resultados de unicidade precisos já que nesta hipótese temos a condição de $d \in [-\infty, +\infty)$.

Vejamos agora os resultados que provaremos no final deste capítulo e que garantem a existência e unicidade de solução para o problema (P_λ)

Teorema 2.1 *Suponha que as condições $(f_1) - (f_5)$ são satisfeitas.*

(i) Seja $0 < d < +\infty$, e seja $\lambda_0 = \lambda_1/d$, onde λ_1 é o primeiro autovalor do p-laplaciano. Então:

1. *para $0 < \lambda < \lambda_0$ o problema $(P)_\lambda$ admite uma única solução positiva;*
2. *para todo $\lambda \geq \lambda_0$ o problema $(P)_\lambda$ não tem solução positiva;*

(ii) Se $-\infty < d < 0$, então para cada $\lambda > 0$ o problema $(P)_\lambda$ admite uma única solução positiva.

Teorema 2.2 *Suponha (f_2) com $d = -\infty$. Além disso, assuma que a condição (f_1) bem como as condições $(f_3) - (f_5)$ são satisfeitas.*

(i) Quando $C < +\infty$, a constante $\lambda^* = (2C)^p((p-1)/p)$ é tal que:

1. *para $0 < \lambda \leq \lambda^*$ o problema $(P)_\lambda$ admite uma única solução não negativa, a qual é positiva;*
2. *para todo $\lambda > \lambda^*$ o problema $(P)_\lambda$ tem infinitas soluções não negativas, embora nenhuma solução positiva;*

(ii) Quando $C = \infty$, para cada $\lambda > 0$ o problema $(P)_\lambda$ tem uma única solução não negativa, a qual é positiva.

Na próxima seção faremos um estudo que nos permitirá provar os Teoremas 2.1 e 2.2.

2.1 Análise da Função Tempo

Nesta seção relembraremos a alguns fatos estudados no Capítulo 1 a respeito do método de *shooting* e mostraremos resultados fundamentais para a prova dos nossos resultados principais.

Como aqui estamos considerando $a \equiv 1$, a função H vista no capítulo anterior, agora está definida como $H(s) = \frac{p-1}{p}|s|^p$.

Passaremos a denotar a função θ estudada no Capítulo 1 por T, além disso, denotaremos por

$$R(\lambda, s, \alpha) = \frac{p-1}{p}\alpha^p - \lambda F(s). \tag{2.1}$$

e $\ell_0(\lambda, \alpha) = \ell_0$.

Para que não haja confusão continuaremos denotando por ℓ_0 o zero de R de acordo com o que foi feito no Capítulo 1

Definimos os seguintes conjuntos:

$$A = \{u \in C^1[0,1] :\ u \text{ é positiva em } (0,1),\ u(0) = u(1) = 0 \text{ e } u'(0) = -u'(1) > 0\}$$

e

$$B = \{u \in C^1[0,1] : \ u \text{ é positiva em } (0,1),\ u(0) = u(1) = 0 = u'(0) = -u'(1) = 0\}$$

Voltando a parte (ii) da Proposição 1.2 dada no Capítulo 1, observamos que, ao final deste capítulo as soluções obtidas para $0 < \lambda < \lambda_0$ no Teorema 2.1 e as obtidas para $0 < \lambda < \lambda^*$ no Teorema 2.2, pertencem ao conjunto A. Agora a solução obtida para $\lambda = \lambda^*$ na parte (a) do Teorema 2.2 pertence ao conjunto B. Observe também que soluções positivas são simétricas em volta de seus máximos.

Como no Capítulo 1, consideramos a equação diferencial ordinária

$$(P)_{\alpha,\lambda} \begin{cases} -(|u|^{p-2}u')' = \lambda f(u) \\ u(0) = 0,\ u'(1) = \alpha \geq 0. \end{cases}$$

A esta equação temos associada a função tempo

$$T(\lambda,\alpha) = \int_0^{\ell_0} (\alpha^p - \lambda p^* F(t))^{-1} dt \quad \text{com} \quad \alpha \in D \tag{2.2}$$

onde $D = \{\alpha \geq 0 :\ 0 < \ell_0 < +\infty \text{ e } f(\ell_0) > 0\}$, e $p^* = \dfrac{p}{p-1}$.
Observamos pelo Lema 1.1 do capítulo 1, que T está bem definida.

Para justificarmos nossos resultados principais precisaremos essencialmente do Teorema 2.3 e da próxima proposição que enunciaremos, contudo para chegarmos no enunciado desta proposição e consequentemente em sua prova precisamos de algumas informações a respeito das funções

$$\alpha \ \rightarrow \ \ell_0(\alpha,\lambda) \tag{2.3}$$

$$\lambda \ \rightarrow \ \ell_0(\alpha,\lambda) \tag{2.4}$$

Com relação a função (2.3)

Dado $\alpha \neq 0$, sabemos que $\ell_0 = \ell_0(\alpha,\lambda)$ é o primeiro zero positivo da função R logo

$$\alpha^p - \frac{p}{p-1}\lambda F(\ell_0) = 0 \tag{2.5}$$

derivando a igualdade em relação a α obtemos

$$(p-1)\alpha^{p-1} = \lambda f(\ell_0)\frac{\partial \ell_0}{\partial \alpha}(\lambda,\alpha)$$

$$\frac{\partial \ell_0}{\partial \alpha}(\lambda,\alpha) = \frac{(p-1)\alpha^{p-1}}{\lambda f(\ell_0)} > 0. \tag{2.6}$$

Além disso $\dfrac{\partial R}{\partial s} = -\lambda f(s) \neq 0$ e Sendo f uma função contínua em $[0,+\infty)$ tem-se que $\dfrac{\partial R}{\partial s}$ é contínua em $[0,+\infty)$, logo $R \in C^1([0,+\infty))$ e do teorema da função implícita segue que $\ell_0(\lambda,\cdot) \in C^1((0,+\infty))$.

Vamos analisar o que ocorre com a função (2.3) quando fazemos $\alpha \to 0^+$ e $\alpha \to +\infty$.

Fazendo $\alpha \to 0^+$ em (2.5), obtemos

$$\frac{p}{p-1}\lambda F(\lim_{\alpha\to 0^+} \ell_0) = 0.$$

Como $F(s) \to 0$ quando $s \to 0$,

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \ell_0 = \ell_F.$$

Por outro lado quando $\alpha \to +\infty$ em (2.5), obtemos

$$\frac{p}{p-1}\lambda F(\lim_{\alpha\to +\infty} \ell_0) = +\infty.$$

Com relação a função (2.4)

Quando fixamos $\alpha > 0$ e consideramos $f(0) \leq 0$ observamos que reescrevendo (2.5) como

$$\frac{\alpha^p}{\lambda} = p^* F(\ell_0(\lambda,\alpha)) \tag{2.7}$$

e derivando com relação a λ

$$-\frac{\alpha^p}{\lambda^2} = p^* f(\ell_0(\lambda,\alpha))\frac{\partial \ell_0}{\partial \lambda}((\lambda,\alpha))$$

donde

$$\frac{\partial \ell_0}{\partial \lambda}((\lambda,\alpha)) = -\frac{\alpha^p}{\lambda^2 p^* f(\ell_0(\lambda,\alpha))}$$

Observe que para $\alpha > 0$,

$$\ell_f < \ell_F < \ell_0(\lambda,\alpha),$$

Logo, $f(\ell_0(\lambda,\alpha)) > 0$. Portanto

$$\frac{\partial \ell_0}{\partial \lambda}((\lambda,\alpha)) < 0 \quad \text{para cada} \quad \lambda \in (0.\lambda^*] \quad \text{e} \quad \alpha > 0.$$

Ainda mais, passando ao limite em (2.10) quando $\lambda \to 0^+$

$$p^* F(\lim_{\lambda\to 0^+} \ell_0(\lambda,\alpha)) = +\infty$$

donde segue que $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \ell_0(\lambda, \alpha) = +\infty$.
Observamos ainda que para $\alpha = 0$ e $\lambda = \lambda^*$ em (2.2)

$$\lambda^* p^* F(\ell_0(\lambda^*, 0)) = 0$$

donde $\ell_0(\lambda^*, 0) = \ell_F$.

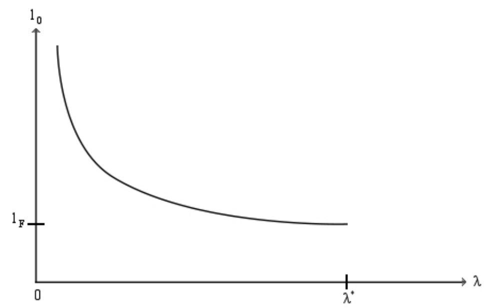

Figura 2.1: comportamento assintótico de $||u_\lambda||_\infty$ para λ pequeno.

Agora faremos algumas considerações necessárias para as demonstrações que seguem.

Fazendo a mudança de variável $t = s\ell_0$, de (2.2) obtemos

$$T(\alpha, \lambda) = \int_0^1 \frac{\ell_0 ds}{(\alpha^p - \lambda p^* F(s\ell_0))^{1/p}} \tag{2.8}$$

Observamos então que fixado $\lambda > 0$ passando ao limite quando $\alpha \to 0^+$

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \to 0^+} T(\alpha, \lambda) &= \lim_{\alpha \to 0^+} \int_0^{\ell_0} (\alpha^p - \lambda p^* F(s))^{-1/p} ds \\
T(0, \lambda) &= \lim_{\alpha \to 0^+} \ell_0 \int_0^1 (-\lambda p^* F(s\ell_0))^{-1/p} ds \\
T(0, \lambda) &= \ell_F \int_0^1 (-\lambda p^* F(s\ell_F))^{-1/p} ds \\
T(0, \lambda) &= \int_0^{\ell_F} (-\lambda p^* F(s\ell_F))^{-1/p} ds
\end{aligned}$$

Dessa forma, quando $0 < C < +\infty$ definimos

$$T(\lambda) = T(0, \lambda) = C \left(\frac{p-1}{p} \right)^{1/p} \lambda^{-1/p}, \tag{2.9}$$

além disso note que se $T(\lambda) = \frac{1}{2}$, então $\lambda = \lambda^*$.

Se $-\infty < d < 0$, pela condição (f_2), dado $\varepsilon > 0$ para $s > 0$ estiver próximo de zero, temos

$$f(s) > (d-\varepsilon)s^{p-1},$$

logo

$$\begin{aligned}
\int_0^s f(t)dt &> (d-\epsilon)\int_0^s t^{p-1}dt \\
F(s) &> (d-\varepsilon)\frac{s^p}{p} \\
\frac{1}{(-F(s))^{1/p}} &> \frac{p^{1/p}}{(d-\varepsilon)s} \\
\int_0^{\ell_F} \frac{ds}{(-F(s))^{1/p}} &> \frac{p^{1/p}}{(d-\varepsilon)}\int_0^{\ell_F} \frac{1}{s}ds
\end{aligned}$$

Desde que

$$\int_0^s \frac{1}{t}dt$$

diverge, segue que

$$C = \int_0^{\ell_F} \frac{ds}{(-F(s))^{1/p}} = +\infty. \tag{2.10}$$

Observamos ainda que, pela condição (f_3), $F(s) \to +\infty$ quando $s \to +\infty$, portanto,

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \ell_0 = +\infty. \tag{2.11}$$

Ainda por (f_3), dado $M > 0$, existe $n > 0$ tal que

$$f(s) > Ms^{p-1} \quad s > n.$$

Note que

$$\int_0^s f(t)dt + \int_s^n f(t)dt > M\left(\int_0^s t^{p-1}dt + \int_s^n f(t)dt\right).$$

Então, para $s > n$

$$|F(s)| > |F(n)| + M\frac{s^p}{p} - M\frac{n^p}{p}$$

$$\frac{|F(s)|}{s^p} > \frac{|F(n)|}{s^p} + \frac{M}{p} - M\frac{n^p}{ps^p} \tag{2.12}$$

Dado $\varepsilon > 0$, escolha M suficientemente grande tal que $\varepsilon < \frac{2p}{M}$. Para este M existe n tal que vale (2.8). Assim,

$$\frac{s^p}{|F(s)|} < \frac{1}{\frac{|F(n)|}{s^p} + \frac{M}{p} - M\frac{n^p}{ps^p}} < \frac{2p}{M} < \varepsilon$$

ou seja

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{s^p}{|F(s)|} = 0. \tag{2.13}$$

Vejamos agora, um teorema importante na conclusão dos resultados principais do capítulo.

Teorema 2.3 *Suponha que $f \in C(\mathbb{R}^+)$ e que $p > 1$. Então:*

(i) O problema $(P)_{\alpha,\lambda}$ possui uma solução $u \in B$ se, e somente se, $0 \in D$ e $T(\lambda, 0) = 1/2$. Neste caso a solução é única e $||u||_\infty = \ell_0(\lambda, 0)$.

(ii) O problema $(P)_{\alpha,\lambda}$ possui uma solução $u \in A$ satisfazendo $u'(0) = \alpha$ se, e somente se, $\alpha \in D \cap (0, +\infty)$ e $T(\lambda, \alpha) = 1/2$. Neste caso a solução é única e $||u||_\infty = \ell_0(\lambda, \alpha)$.

Demonstração:

Observamos que a segunda parte do Teorema 2.3 já foi justificada na prova do item (ii) da Proposição 1.2 do Capítulo 1.

Note que se constante C é finita, definimos

$$J(s) = \int_0^s (-\lambda p^* F(s))^{-1/p} ds \quad \text{em} \quad 0 < s < \ell_F$$

e

$$T(0, \lambda) = \int_0^{\ell_F} (-\lambda p^* F(s))^{-1/p} ds$$

fica bem definido. Assim obtemos que

$$u(t) = J^{-1}(t) \quad 0 \le t \le T(0, \lambda)$$

é a única solução positiva da EDO

$$u'(t) = (-\lambda p^* F(u(t)) \quad u(0) = u'(0) = 0$$

além disso, pela prova da Proposição 1.2, $u'(1) = 0$. Consequentemente u é a única solução positiva do Problema $(P)_{0,\lambda}$ conforme vimos no capitulo 1. Notemos que neste caso $u \in B$.

Portanto, fica justificado ainda com base no capítulo 1 a primeira parte do Teorema 2.3.

■

Finalmente depois de feitas alguma considerações sobre as funções (2.3) e (2.4), vamos ao enunciado da proposição que mencionamos anteriormente.

Proposição 2.4 *Para cada $\lambda > 0$ temos*

(i) $\lim_{\alpha \to \infty} T(\alpha, \lambda) = 0$;

(ii) $\lim_{\alpha \to 0} T(\alpha, \lambda,) = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda d}\right)^{1/p}$ *para* $0 < d < +\infty$;

(iii) A função $\alpha \to T(\alpha, \lambda)$ *é estritamente decrescente em* $(0, +\infty)$.

Demonstração:

Prova do item *(i)*

Seja $\alpha > 0$. Por definição ℓ_0 satisfaz

$$\alpha^p - \lambda p^* F(s\ell_0) = 0 \tag{2.14}$$

De (2.11)

$$\begin{aligned} T(\alpha, \lambda) &= \ell_0 \int_0^1 \frac{ds}{(\alpha^p - \lambda p^* F(s\ell_0))^{1/p}} \\ T(\alpha, \lambda) &= \ell_0 \int_0^1 \frac{ds}{(\lambda p^* F(s) - \lambda p^* F(s\ell_0))^{1/p}} \end{aligned}$$

$$T(\alpha, \lambda) = \ell_0 (\lambda p^*)^{-1/p} \int_0^1 \frac{ds}{(F(s) - F(s\ell_0))^{1/p}} \tag{2.15}$$

Note que (2.15) pode ser reescrito como

$$T(\alpha, \lambda) = \ell_0 (\lambda p^*)^{-1/p} \left[\frac{F(\ell_0)}{F(\ell_0)}\right]^{1/p} \int_0^1 \frac{ds}{(\alpha^p - \lambda p^* F(s\ell_0))^{1/p}}$$

$\Rightarrow$

$$T(\alpha, \lambda) = (\lambda p^*)^{-1/p} \left[\frac{(\ell_0)^p}{F(\ell_0)}\right]^{1/p} \int_0^1 \left(1 - \frac{F(s\ell_0)}{F(\ell_0)}\right)^{-1/p} ds.$$

A condição (f_4) implica em

$$\int_{t_0}^1 \left(1 - \frac{F(ts)}{F(s)}\right)^{-1/p} dt \leq \int_{t_0}^1 (1 - t^\alpha)^{-1/p} dt, \quad \text{para} \quad s > s_0 \quad \text{e} \quad t_0 \in [0, 1)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(1-\frac{F(ts)}{F(s)}\right)^{-1/p} dt &= \int_0^{t_0} \left(1-\frac{F(ts)}{F(s)}\right)^{-1/p} dt + \int_{t_0}^1 \left(1-\frac{F(ts)}{F(s)}\right)^{-1/p} dt \\
\int_0^1 \left(1-\frac{F(ts)}{F(s)}\right)^{-1/p} dt &\leq \int_0^{t_0} \left(1-\frac{F(ts)}{F(s)}\right)^{-1/p} dt + \int_{t_0}^1 (1-t^\alpha)^{-1/p} dt
\end{aligned}$$

Pela relação entre as funções Beta e Gama (ver Apêndice A, seção A.2) concluímos que

$$\int_0^1 (1-t^\alpha)^{-1/p} dt = \frac{1}{\alpha} \frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})\Gamma((p-1)/p)}{\Gamma((p(\alpha+1)-\alpha)/p\alpha)} = C_2 < +\infty$$

Portanto,

$$\int_0^1 \left(1-\frac{F(ts)}{F(s)}\right)^{-1/p} dt \leq C_1 + C_2$$

Por (2.7) e (2.9), temos

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to\infty} T(\alpha,\lambda) &= \lim_{\alpha\to\infty} (\lambda p^*)^{-1/p} \left[\frac{(\ell_0)^p}{F(\ell_0)}\right]^{1/p} \int_0^1 \left(1-\frac{F(t\ell_0)}{F(\ell_0)}\right)^{-1/p} dt) \\
&= \lim_{s\to\infty} (\lambda p^*)^{-1/p} \left[\frac{(s)^p}{F(s)}\right]^{1/p} \int_0^1 \left(1-\frac{F(ts)}{F(s)}\right)^{-1/p} dt) \\
&\leq \lim_{s\to\infty} (\lambda p^*)^{-1/p} \left[\frac{(s)^p}{F(s)}\right]^{1/p} .C_3 \qquad \text{com} \quad C_3 = C_1 + C_2 \\
&= (\lambda p^*)^{-1/p}.0.C_3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

para cada $\lambda > 0$, e assim fica provado o item (i).

■

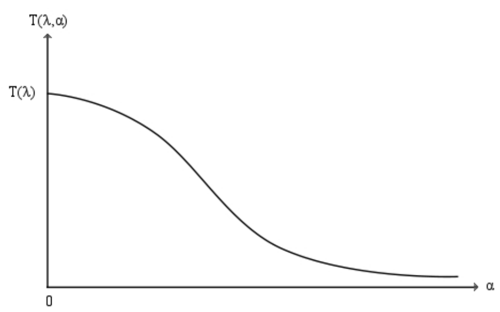

Figura 2.2: função tempo para cada $\alpha > 0$ e $0 < C < +\infty$.

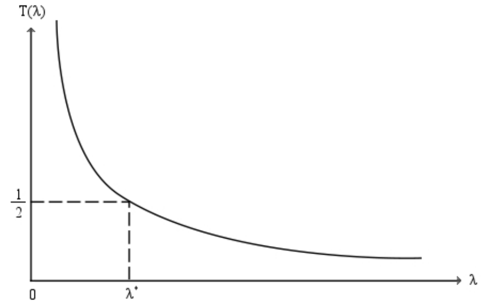

Figura 2.3: função tempo para $\alpha = 0$ e $0 < C < +\infty$.

Prova do item *(ii)*

Quando $0 < d < +\infty$, temos $C < +\infty$.

Desde que $\alpha^p = \lambda p^* F(\ell_0)$, de (2.8)

$$T(\alpha, \lambda) = \int_0^1 \frac{\ell_0 ds}{(\lambda p^* F(\ell_0) - \lambda p^* F(s\ell_0))^{1/p}}$$

Analisando o integrando, notamos que

$$\frac{\lambda p^* F(\ell_0) - \lambda p^* F(s\ell_0)}{\ell_0^p} = \lambda p^* \frac{F(\ell_0) - F(s\ell_0)}{\ell_0}$$

e

$$\frac{F(\ell_0) - F(s\ell_0)}{\ell_0} = \int_s^1 \frac{f(t\ell_0)}{\ell_0^{p-1}} dt.$$

e como $0 < d < +\infty$, $\ell_0 \to 0^+$ quando $\alpha \to 0^+$

Observando que

$$\frac{f(s\ell_0)}{\ell_0^{p-1}} = \frac{f(s\ell_0)}{(s\ell_0)^{p-1}} s^{p-1},$$

por (f_2)

$$\lim_{\ell_0 \to 0^+} \frac{f(s\ell_0)}{\ell_0^{p-1}} = ds^{p-1}$$

uniformemente para $0 \leq s \leq 1$.

Assim,

$$\lim_{\ell_0 \to 0^+} \frac{F(\ell_0) - F(s\ell_0)}{\ell_0^p} = d \int_s^1 t^{p-1} dt = \frac{d}{p}(1 - s^p)$$

Logo,

$$\lim_{\ell_0 \to 0^+} \frac{\ell_0}{F(\ell_0) - F(s\ell_0)^{1/p}} = \left(\frac{p}{d}\right)^{1/p} \frac{1}{(1 - s^p)^{1/p}}$$

Além disso, dado $\varepsilon > 0$, para $s \in (0,1)$

$$0 < (d-\varepsilon) < \frac{f(s\ell_0^p)}{(s\ell_0)^{p-1}} s^{p-1} < (d+\varepsilon).$$

Consequentemente

$$\left|\frac{F(\ell_0) - F(s\ell_0)}{\ell_0^p}\right| \leq \int_s^1 \frac{f(t\ell_0)}{\ell_0^{p-1}} dt < \int_s^1 (d+\varepsilon) dt$$

$$\left|\frac{F(\ell_0) - F(s\ell_0)}{\ell_0^p}\right| < (d+\varepsilon)$$

Assim,

$$\left|\frac{\ell_0}{F(\ell_0) - F(s\ell_0)^{1/p}}\right| < \frac{1}{(d+\varepsilon)^{1/p}}$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to 0^+} T(\alpha,\lambda) &= \lim_{\alpha\to 0^+} (\lambda p^*)^{-1/p} \int_0^1 \frac{\ell_0}{F(\ell_0) - F(s\ell_0)^{1/p}} \\
&= (\lambda p^*)^{-1/p} \left(\frac{p}{d}\right)^{1/p} \int_0^1 \frac{1}{(1-s^p)^{1/p}} ds \\
&= \frac{1}{(\lambda d)^{1/p}} (p-1)^{1/p} \int_0^1 \frac{1}{(1-s^p)^{1/p}} ds
\end{aligned}$$

Temos por (B.4), (apêndice B)

$$\lambda_k = k^p (p-1)^{1/p} \left[2\int_0^1 \frac{1}{(1-s^p)^{1/p}} ds\right]^p$$

Portanto

$$\lim_{\alpha\to 0^+} T(\alpha,\lambda) = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda d}\right)^{1/p}$$

■

Prova do item *(iii)*

Observe que:

$$T(\alpha,\lambda) = (\lambda p^*)^{-1/p} \ell_0 \int_0^1 (F(\ell_0) - F(t\ell_0))^{-1/p} dt.$$

Derivando em relação a α

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \alpha}(\lambda,\alpha) &= (\lambda p^*)^{-1/p} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\ell_0 \int_0^1 (F(\ell_0) - F(s\ell_0))^{-1/p} ds\right) \\
&= (\lambda p^*)^{-1/p} \frac{\partial}{\partial \alpha}\ell_0 \left(\int_0^1 \frac{ds}{(F(\ell_0) - F(s\ell_0))^{1/p}} + \int_0^1 -\frac{\ell_0(f(\ell_0) - sf(s\ell_0))}{p(F(\ell) - F(s\ell_0))^{(p+1)/p)}} ds\right) \\
&= (\lambda p^*)^{-1/p} \frac{\partial}{\partial \alpha}\ell_0 \int_0^1 -\frac{\ell_0(f(\ell_0) - sf(s\ell_0))}{p(F(\ell) - F(s\ell_0))^{(p+2)/p)}} ds \\
\frac{\partial T}{\partial \alpha}(\lambda,\alpha) &= (\lambda p^*)^{-1/p} \frac{\partial \ell_0}{\partial \alpha} \int_0^1 \frac{G(\ell_0) - G(s\ell_0)}{[p(F(\ell_0) - F(s\ell_0))]^{(p-1)/p}} dt
\end{aligned}$$

Por (2.5)

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\ell_0(\alpha,\lambda) > 0$$

para cada $\lambda > 0$ e cada $\alpha > 0$. Além disso G é estritamente decrescente em $(\ell_0, +\infty)$, (condição (f_5)) e $F(\ell_0) > F(s\ell_0)$ para $s \in (0,1)$.

Logo

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha}(\lambda,\alpha) < 0 \quad \text{em} \quad (0,+\infty)$$

Mostrando, portando, o item (iii).

■

Nesse momento, quando já temos todos os resultados necessários para justificarmos os principais resultados do capítulo, passemos então as suas demonstrações

Demonstração do Teorema 2.1:

(a) Sejam $0 < d < +\infty$ e $\lambda_0 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda d}$.

Note que

se $0 < \lambda < \lambda_0$, então

$$\frac{\lambda_1}{\lambda d} > 1 \tag{2.16}$$

se $\lambda > \lambda_0$, então

$$\frac{\lambda_1}{\lambda d} < 1 \tag{2.17}$$

se $\lambda = \lambda_0$, então

$$\frac{\lambda_1}{\lambda d} = 1 \tag{2.18}$$

Do item (ii) da Proposição 2.4

$$\lim_{\alpha \to 0} T(\alpha, \lambda,) = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda d}\right)^{1/p}$$

Se ocorrer (2.16), resulta que

$$\lim_{\alpha \to 0} T(\alpha, \lambda,) > \frac{1}{2}$$

como $\alpha \to T(\alpha,\lambda)$ é contínua e decrescente em $(0,+\infty)$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe único $\alpha \in (0,+\infty)$ tal que

$$T(\alpha,\lambda) = \frac{1}{2} \tag{2.19}$$

é satisfeita.

Lembrando que neste caso $u'(0) = \alpha > 0$, segue do Teorema 2.3 que o Problema $(P)_\lambda$ admite única solução $u \in A$.

No caso em que vale (2.17) não existe $\alpha \in (0, +\infty)$ tal que (2.19) é satisfeita. Portanto, não existe solução positiva para $(P)_\lambda$ quando $\lambda > \lambda_0$.

No caso em que vale (2.18), temos

$$T(0, \lambda_0) = \frac{1}{2}$$

Suponha que exista uma solução $u > 0$ de $(P)_{\lambda_0}$, com $u'(0) = 0$. Neste caso, e pelo que foi estudado no Capítulo 1 u deve satisfazer a relação de energia (1.1) para $\alpha = 0$, isto é

$$|u'(t)|^p + \lambda p^* F(u(t)) = 0,$$

então

$$|u'(t)|^p = -\lambda p^* F(u(t))$$

Desde que para $0 < d < +\infty$, $F(s) \geq 0$, para todo s, segue que

$$|u'(t)|^p \leq 0 \quad \forall\, t \in (0, 1),$$

donde

$$u'(t) = 0 \quad \forall\, t \in (0, 1)$$

logo, $u \equiv 0$.

Portanto $(P)_{\lambda_0}$ não tem solução positiva.

(b) Seja $-\infty < d < 0$, por (2.13) $C = +\infty$, consequentemente por (2.12), $\lim \alpha \to 0^+ T(\alpha, \lambda) = T(\lambda) = +\infty$. Portanto, o problema $(P)_\lambda$ tem uma única solução positiva para cada $\lambda > 0$.

$\blacksquare$

Observação 2.1 *Notemos que, pela parte (a) do Teorema 2.2 e pelas condições sobre função* $\lambda \to \ell_0(\alpha, \lambda)$, *obtemos uma generalização da parte 1 do Teorema 1 em [12] quando não se tem a hipótese de regularidade sobre a função* f.

Demonstração do Teorema 2.2:

Primeiramente notemos que para $0 < \lambda \leq \lambda^*$ as soluções não-negativas são positivas.

De fato, pois caso contrário existiria uma solução não-negativa u do problema $(P)_{\overline{\lambda}}$ que não é positiva em (0,1) para $0 < \overline{\lambda} \leq \lambda^*$. Ou seja, existiria um intervalo $[a, b] \subset (0, 1)$ tal que $u > 0$, $u(a) = u(b) = 0$ e $u'(a) = 0$. Assim u é solução do problema

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \overline{\lambda} f(u) & \text{em} \quad (a, b) \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

Além disso, como $u \in C^1([0, 1])$, temos que $u'(a) = u'(b) = 0$.

Considerando $v(t) = u(s)$, onde $s = (1 - t)a + tb$, $t \in [0, 1]$ então v é uma solução positiva do problema

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}(|\dot{v}|^{p-2}\dot{v}) = \overline{\lambda}(b - a)^p f(v) & \text{em} \quad (0, 1) \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases}$$

onde $\dot{}$ denota $\frac{d}{dt}$.
Com efeito, se $v(t) = u(s)$, então

$$\dot{v}(t) = (b - a)u'(s)$$

logo,

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}(|\dot{v}(t)|^{p-2}\dot{v}(t)) &= -(b - a)\frac{d}{ds}(|u'(s)|^{p-2}u'(s))\frac{ds}{dt} \\ &= -(b - a)^{p-1}(|u'(s)|^{p-2}u'(s))'(b - a) \\ &= -(b - a)^p(|u'(s)|^{p-2}u'(s))'(b - a) \\ &= \bar{\lambda}(b - a)^p f(u(s)) \end{aligned}$$

Portanto

$$-\frac{d}{dt}(|\dot{v}(t)|^{p-2}\dot{v}(t)) = \lambda^* f(v(t)))$$

com $v'(a) = v'(b) = 0$ e $\lambda^* = \overline{\lambda}(b - a)^p < \overline{\lambda}$, o que é absurdo.

Por (2.12) temos que a função $\lambda \to T(\lambda)$ é decrescente em $(0, +\infty)$, além disso já observamos anteriormente que λ^* é o único número positivo tal que $T(\lambda^*) = \frac{1}{2}$. Assim, para $0 < \lambda < \lambda^*$

$$\frac{1}{2} = T(\lambda^*) < T(\lambda)$$

Sabendo que a função $\alpha \to T(\alpha,\lambda)$ é estritamente decrescente em $(0,+\infty)$ e que $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} T(\alpha,\lambda) = 0$.
Temos que existe um único $\alpha \in (0,+\infty)$ tal que

$$T(\alpha,\lambda) = \frac{1}{2}$$

Portanto, pelo Teorema 2.3, o problema $(P)_\lambda$ tem uma única solução positiva $u \in A$. É claro que no caso em que $\lambda^* = \lambda$, $\alpha = 0$ é o único α tal que

$$T(\alpha,\lambda^*) = \frac{1}{2}.$$

Assim, a solução $u \in B$.

Se $\lambda > \lambda^*$, então

$$T(\alpha,\lambda) \leq \sup_{\alpha\geq 0} T(\alpha,\lambda) = T(\lambda) < T(\lambda^*) = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a equação escalar $T(\alpha,\lambda) = \frac{1}{2}$ não tem solução positiva na variável α. Portanto, o problema $(P)_\lambda$ não tem solução positiva.

Afirmamos que, para $\lambda > \lambda^*$, existem infinitas soluções não - negativas para o problema $(P)_\lambda$. Com efeito, seja $u \in B$ a única solução associada a λ^*. Para cada a e b tais que $0 < a < b < 1$, seja v definida por

$$v(t) = \begin{cases} u((t-a)/(b-a)) & \text{se} \;\; t \in [a,b], \\ 0 & \text{se} \;\; t \in [0,a) \cup (b,1]. \end{cases}$$

Temos

$$\dot{v}(t) = \frac{1}{(b-a)} u'(s), \quad \text{para} \;\; s = \frac{t-a}{b-a},$$

logo

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}(|\dot{v}(t)|^{p-2}\dot{v}(t)) &= -\frac{1}{(b-a)^{p-1}} \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(b-a)}|u'(s)|^{p-2}u'(s)\right)\frac{ds}{dt} \\ &= -\frac{1}{(b-a)^{p-1}}(|u'(s)|^{p-2}u'(s))'\frac{1}{(b-a)} \\ &= -\frac{1}{(b-a)^p}\lambda^* f(u(s)) \end{aligned}$$

donde segue

$$-\frac{d}{dt}(|\dot{v}(t)|^{p-2}\dot{v}(t)) = -\frac{1}{(b-a)^p}\lambda^* f(v(t))$$

com $v(0) = v(b) = 0$.

Assim v é solução do problema $(P)_\lambda$, com $\lambda = \lambda^*(b-a)^{-p}$ e fica justificado a parte(2) do item (i).

O item (ii) segue de um argumento similar ao feito na prova do item (ii) do Teorema 2.1.

$\blacksquare$

Capítulo 3

Estimativas *a priori* de um problema envolvendo funções assintoticamente homogêneas via método blow-up

Neste capítulo, baseado em [13], estudaremos a existência de soluções positivas radialmente simétricas para o problema.

$$
\text{(D)} \qquad \begin{cases} -(\text{div}(V(|\nabla u|)\nabla u) = f(u) \ \text{ em } \ \Omega \\ u = 0, \quad \partial\Omega. \end{cases}
$$

onde $\Omega = B(0, R) \subset \mathbb{R}^N$, $R > 0$, é a bola de raio R e a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua.

Observaremos que, por meio de uma mudança de variáveis no problema (D), para certas funções $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma solução radial positiva de (D) satisfaz o problema de Dirichlet não-linear

$$
(\text{D}_r) \qquad \begin{cases} -(r^{n-1}\phi(u'))' = r^{n-1}f(u) \ \text{ em } \ (0, R), \\ u'(0) = 0 = u(R) \ \text{ em } \ \partial\Omega, \end{cases}
$$

onde $r = |x|$, $x \in \mathbb{R}^N$ e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um homeomorfismo crescente ímpar, dado por $\phi(s) = sV(s)$. Além disso as funções ϕ e f pertencem a uma classe funções chamada *assintoticamente homogênea*, a qual que descreveremos mais tarde, e

$$
\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{\phi(s)} = +\infty. \tag{3.1}
$$

Neste sentido, nosso objetivo é mostrar a existência de solução positiva para o problema (D_r) quando a função ϕ for da forma $\phi(s) = |s|^{p-2}s$. A existência será provada usando teoria do grau.(cf. Apêndice A, seção A.3)

Por uma solução do problema (D_r) entendemos ser uma função $u \in C^1[0, R]$ com $\phi(u') \in C^1[0, R]$ tal que (D_r) é satisfeito.

Na demonstração do Lema 3.1, que será enunciado em momento oportuno, perceberemos que, para o caso homogêneo, i.e., quando $\phi(s) = |s|^{p-2}s$, $p > 1$, usando uma técnica blow-up é possível mostrar que a não existência de soluções positivas de um certo problema não-linear, o qual é uma equação limite, implica na limitação *a priori* das soluções positivas de (D_r).

Devido a homogeneidade, o lado esquerdo desta equação limite coincide com o da equação original.
Veja [18], para o caso escalar e $p = 2$, [7] para o caso de sistemas $p, q-$Laplacianos e [22] para resultados gerais.

Mostramos no que segue a equivalência entre os problemas (D) e (D_r).

Considere a função $V(s) = |s|^{p-2}$ e façamos em (D) a seguinte mudança de variáveis

$$r = |x|.$$

Seja u uma solução radial positiva de (D), então $u(x) = u(r)$ e calculamos

$$\nabla u(x) = \Big(u'(r)\frac{x_1}{r}, \cdots, u'(r)\frac{x_N}{r}\Big) = u'(r)\frac{x}{r}.$$

Assim,

$$|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x) = |u'(r)|^{p-2}u'(r)\frac{x}{r}.$$

Calculemos

$$\mathrm{div}(|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)).$$

Observe que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{x_i}{r}|u'(r)|^{p-2}u'(r)\Big) = \frac{d}{dr}(|u'(r)|^{p-2}u'(r))\frac{x_i^2}{r^2} + \frac{1}{r}|u'(r)|^{p-2}u'(r) - \frac{x_i^2}{r^3}|u'(r)|^{p-2}u'(r)$$

obtemos

$$\mathrm{div}(|\nabla u(r)|^{p-2}\nabla u(r)) = \frac{N}{r}|u'(r)|^{p-2}u'(r) + \frac{d}{dr}(|u'(r)|^{p-2}u'(r)) - \frac{1}{r}|u'(r)|^{p-2}u'(r).$$

Por (D) temos

$$\begin{aligned}
-f(u) &= \frac{N-1}{r}|u'(r)|^{p-2}u'(r) + \frac{d}{dr}(|u'(r)|^{p-2}u'(r)) \\
-r^{N-1}f(u) &= (N-1)r^{N-2}|u'(r)|^{p-2}u'(r) + r^{N-1}\frac{d}{dr}(|u'(r)|^{p-2}u'(r)) \\
-r^{N-1}f(u) &= \frac{d}{dr}(-r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r))
\end{aligned}$$

Portanto

$$-(r^{N-1}u'(r)|^{p-2}u'(r))' = r^{N-1}f(u) \text{ em } (0,R).$$

Já que $u = 0$ em $\partial\Omega$, quando $r = R$ teremos $u(R) = 0$. Sabendo que $u(x) = u(-x)$´, pois u é radialmente simétrica e $u \in C^1[0,R]$, concluímos que $u'(0) = 0$, mostrando assim que se u é uma solução radial positiva de (D), então u é uma solução positiva de (D_r).

3.1 Preliminares

- **Funções Assintoticamente Homogêneas e Operadores Assintoticamente Homogêneos**

Definição 3.1 *Seja $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ uma função mensurável que satisfaz*

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{h(\sigma s)}{h(s)} = \sigma^q, \ \forall \sigma \in \mathbb{R}_+ \tag{3.2}$$

Então dizemos que h é assintóticamente homogênea com índice q, ou h é q-AH ou ainda h é AH de índice q.

Neste sentido, se a função $\phi(s) = sV(s)$ é $(p-1)$-AH, dizemos que o operador correspondente em (D_r) ou (D) é um operador assintoticamente homogêneo. Assim, com esta notação, pedimos que ϕ seja um homeomorfismo ímpar $(p-1)$-AH em $\mathbb{R}$ para algum $p > 1$ e que a função contínua real f seja δ-AH para algum $\delta > 0$, ou seja,

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\phi(\sigma s)}{\phi(s)} = \sigma^{p-1}, \ \ \forall\, \sigma \in \mathbb{R}_+ \tag{3.3}$$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(\sigma s)}{f(s)} = \sigma^{\delta}, \ \ \forall\, \sigma \in \mathbb{R}_+ \tag{3.4}$$

Mesmo sem a condição de motonicidade de ϕ , (3.3) e (3.4) são muito usadas em probabilidade aplicada em um contexto diferente do exposto aqui como se vê em [23], [26] e suas referências.

- **Definições e observações.**

Considere as funções $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\Phi_* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\Phi(s) = \int_0^s \phi(t)dt; \quad \Phi_*(s) = \int_0^s \phi^{-1}(t)dt$$

respectivamente.

Proposição 3.2 *(i) Se $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um homeomorfismo ímpar crescente e $(p-1)$- AH, então*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\phi^{-1}(\sigma s)}{\phi^{-1}(s)} = |\sigma|^{p^*-2}\sigma \;\; \textit{para todo} \;\; \sigma \in \mathbb{R}_+, \; p^* = \frac{p}{p-1}.$$

(ii) Suponha que $\chi,\ \psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ são $(p-1)$ - AH e $(q-1)$ - AH respectivamente, com χ crescente no infinito, $\psi(s), \chi(s) \to +\infty$ quando $s \to +\infty$, então

$$\chi \circ \psi \text{ é } (r-1) - AH,$$

onde $r = (p-1)(q-1)+1$.

Demonstração:

Note que basta demonstrar para $\sigma < 1$, pois se $\sigma > 1$, então $\sigma^{-1} < 1$, daí segue de modo análogo ao caso $\sigma < 1$.

Seja $0 < \sigma < 1$ e fixe (x_n) tal que $x_n \to \infty$. Sejam $t_n = \phi^{-1}(x_n)$ e $s_n = \phi^{-1}(\sigma x_n)$ e observe que

$$x_n = \phi(t_n) > \sigma x_n = \phi(s_n).$$

Como ϕ é crescente, $t_n > s_n$ ou seja $\{\frac{\phi^{-1}(\sigma x_n)}{\phi^{-1}(x_n)}\}$ é um sequência limitada que possui uma subsequência convergente

$$\frac{\phi^{-1}(\sigma x_n)}{\phi(x_n)} \to L \in [0,1].$$

Vamos mostrar que $L = (\sigma)^{\frac{1}{p-1}}$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que

$$(L-\varepsilon) < \frac{\phi^{-1}(\sigma x_n)}{\phi^{-1}(x_n)} < (L+\varepsilon)$$

$$(L-\varepsilon)t_n < \phi^{-1}(\sigma x_n) < (L+\varepsilon)t_n.$$

Como ϕ é crescente temos

$$\phi((L-\varepsilon)t_n) < \sigma x_n < \phi((L+\varepsilon)t_n) \;\; \text{para todo } n \geq n_0,$$

logo

$$\frac{\phi((L-\varepsilon)t_n)}{\phi(t_n)} < \sigma < \frac{\phi((L+\varepsilon)t_n)}{\phi(t_n)}.$$

Passando ao limite

$$(L-\varepsilon)^{p-1} < \sigma < (L+\varepsilon) \ \text{ para todo } \ \varepsilon > 0,$$

portanto, $L = \sigma^{\frac{1}{p-1}}$.

Caso $\sigma < 0$, faça

$$\frac{\phi^{-1}(\sigma s)}{\phi^{-1}(s)} = -\frac{\phi^{-1}(-\sigma s)}{\phi^{-1}(s)} \to -(-\sigma)^{\frac{1}{p-1}} = |\sigma|^{p^*-2}\sigma.$$

Portanto,

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\phi^{-1}(\sigma s)}{\phi^{-1}(s)} = |\sigma|^{p^*-2}\sigma \ \text{ para todo } \ \sigma \in \mathbb{R}_+.$$

mostrando o item (i)

Sejam $\sigma \in (0,1)$ e $\varepsilon > 0$. Fixe $s_0 > 0$ tal que para todo $s \geq s_0$

$$-\varepsilon + \sigma^{p-1} < \frac{\psi(\sigma s)}{\psi(s)} < \varepsilon + \sigma^{p-1}.$$

Como χ é crescente no infinito , para s grande

$$\frac{\chi((\sigma^{p-1}-\varepsilon)\psi(s))}{\chi(\psi(s))} < \frac{\chi(\psi(\sigma s))}{\chi(\psi(s))} < \frac{\chi((\sigma^{p-1}+\varepsilon)\psi(s))}{\chi(\psi(s))}$$

Passando ao limite

$$(\sigma^{p-1}-\varepsilon)^{q-1} \leq \liminf_{s\to\infty} \frac{\chi(\psi(\sigma s))}{\chi(\psi(s))} \limsup_{s\to\infty} \leq (\sigma^{p-1}+\varepsilon)^{q-1}$$

para todo $\varepsilon > 0$, logo

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\chi(\psi(\sigma s))}{\chi(\psi(s))} = \sigma^{(r-1)}.$$

mostrando o item (ii).

■

Visto que ϕ é um homeomorfismo ímpar crescente e vale a Proposição 3.2 temos

- Φ_* é par,crescente e p^*-AH

Defina a função $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ por

$$H(s) = s\phi(s) - \Phi(s)$$

e observe que

$$H(s) = \Phi_*(\phi(s)), \tag{3.5}$$

já que, $H'(s) = (\Phi_*(\phi(s)))'$. Além disso,

1) H é uma função par

2) H é monótona

e como Φ_* é $p*$-AH e ϕ é $(p-1)$-AH, pela Proposição 3.2, concluímos que

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{H(\sigma s)}{H(s)} = \sigma^p \tag{3.6}$$

ou seja,

3) H é p -AH.

Diante do que foi posto até o momento e com mais algumas observações verificaremos que a condição (3.1) implica

$$\delta \geq p - 1.$$

Defina $F(s) = \int_0^s f(t)dt$. Note que por (3.3) temos para $s > 0$ e $\sigma \in (0, 1]$

$$\frac{\Phi(\sigma s)}{s\phi(s)} = \int_0^\sigma s\frac{\phi(t)}{s\phi(s)}dt$$

e fazendo a mudança de variáveis $t = xs$, obtemos

$$\frac{\Phi(\sigma s)}{s\phi(s)} = \int_0^\sigma \frac{\phi(xs)}{\phi(s)}dx.$$

Lembrando que ϕ é crescente, para cada $x \in [0, 1]$

$$\frac{\phi(xs)}{\phi(s)} < 1$$

por esta razão segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{\Phi(\sigma s)}{s\phi(s)} = \int_0^\sigma x^{p-1}dx = \frac{\sigma^p}{p}.$$

Em particular para $\sigma = 1$

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{\Phi(\sigma s)}{s\phi(s)} = \frac{1}{p}. \tag{3.7}$$

De modo análogo, por (3.4), obtemos

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{F(s)}{sf(s)}=\frac{1}{\delta+1} \tag{3.8}$$

Pelo limite em (3.8), dado $\varepsilon>0$, existe $s_0>0$ tal que para todo $s\geq s_0$ temos a seguinte inequação diferencial

$$(\delta+1)-\epsilon<\frac{sF'(s)}{F(s)}<(\delta+1)+\epsilon$$

donde

$$(\delta+1-\varepsilon)\int_{s_0}^{s}\frac{1}{t}dt<\int_{s_0}^{s}\frac{F'(t)}{F(t)}dt<(\delta+1+\varepsilon)\int_{s_0}^{s}\frac{1}{t}dt$$
$$(\delta+1-\varepsilon)\ln\left(\frac{s}{s_0}\right)<\ln\left(\frac{F(s)}{F(s_0)}\right)<(\delta+1+\epsilon)\ln\left(\frac{s}{s_0}\right)$$
$$\ln\left(\frac{s}{s_0}\right)^{\delta+1-\varepsilon}<\ln\left(\frac{F(s)}{F(s_0)}\right)<\ln\left(\frac{s}{s_0}\right)^{\delta+1+\varepsilon}.$$

Sendo ln crescente, temos

$$F(s_0)\left(\frac{s}{s_0}\right)^{\delta+1-\varepsilon}<F(s)<F(s_0)\left(\frac{s}{s_0}\right)^{\delta+1+\varepsilon}.$$

Derivando com respeito a s

$$A_1s^{\delta-\varepsilon}<f(s)<A_2s^{\delta+\varepsilon},\quad \text{para todo }\ s\geq s_0 \tag{3.9}$$

onde $A_1=\frac{F(s_0)(\delta+1-\varepsilon)}{s_0^{\delta+1-\varepsilon}}$ e $A_2=\frac{F(s_0)(\delta+1+\varepsilon)}{s_0^{\delta+1+\varepsilon}}$.

Da mesma forma, podemos mostrar que

$$A_3s^{p-1-\varepsilon}\leq\phi(s)\leq A_4s^{p-1+\varepsilon},\quad \text{para todo }\ s\geq s_0 \tag{3.10}$$

para $A_3=\frac{\Phi(s_0)(p-\varepsilon)}{s_0^{p-\varepsilon}}$ e $A_4=\frac{\Phi(s_0)(p+\varepsilon)}{s_0^{p+\varepsilon}}$.
Então (3.1), (3.9) e (3.9) implicam em

$$\delta\geq p-1.$$

Para cada $s\in\mathbb{R}$ considere a equação:

$$H(z)=F(s). \tag{3.11}$$

Sabendo que F é crescente para $s > 0$ e $F(s) \to +\infty$ quando $s \to +\infty$ notamos que para cada $s > 0$, a equação (3.11) tem única solução, a qual denotaremos por $z(s)$. Podemos então definir a função $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$, onde $\mathbb{R}^+ := (0, +\infty)$ por

$$g(s) = \frac{z(s)}{s} \tag{3.12}$$

Com respeito a função g temos a

Proposição 3.3 *Se vale (3.1), então $g(s) \to +\infty$ quando $s \to +\infty$*

Demonstração:

Se para $s > 0$, $z(s)$ é o único zero de (3.11) e $z(s) = sg(s)$, segue que

$$H(sg(s)) = F(s)$$

Supondo por contradição que exista uma sequência $\{s_n\}$ tal que $s_n \to +\infty$ e $g(s_n) \leq M$, então por (3.6)

$$\frac{F(s_n)}{H(s_n)} \leq \frac{H(s_n M)}{H(s_n)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(s_n)}{H(s_n)} \leq M^p. \tag{3.13}$$

Por outro lado, sendo $H(s) = s\phi(s) - \Phi(s)$

$$\frac{F(s)}{H(s)} = \frac{F(s)}{s\phi(s) - \Phi(s)} = \frac{F(s)}{\Phi(s)} \frac{\Phi(s)}{s\phi(s)} - 1$$

por (3.7) e por (3.1)

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{F(s)}{H(s)} = +\infty$$

o que contraria (3.13). Portanto temos o resultado desejado.

■

3.2 Existência de Soluções Positivas.

Nesta seção mostraremos que o problema

$$(\mathrm{D}_r) \qquad \begin{cases} -(r^{n-1}\phi(u'))' = r^{n-1}f(u) & \text{em } (0, R) \\ u'(0) = 0 = u(R), \quad \partial\Omega & \end{cases}$$

tem solução positiva assumindo que o homeomorfismo ϕ satisfaz (3.3) e a não linearidade f satisfaz (3.4), $sf(s) \geq 0$ para $s \geq 0$ e (3.1). Tal existência é garantida pelo Teorema 3.4, resultado principal deste capítulo, o qual é enunciado a seguir.

Teorema 3.4 *Suponha que ϕ é um homeomorfismo ímpar crescente de $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, satisfazendo $sf(s) \geq 0$ e é crescente para $s \geq s_0$. Assuma também que ϕ e f satisfazem a condição superlinear (3.1) e que existam p, com $1 < p < N$, e $\delta > 0$ tal que*

(i) $\lim\limits_{s \to +\infty} \frac{\phi(\sigma s)}{\phi(s)} = \sigma^{p-1}$ *para todo* $\sigma \in \mathbb{R}^+$

(ii) $\lim\limits_{s \to +\infty} \frac{f(\sigma s)}{f(s)} = \sigma^{\delta}$ *para todo* $\sigma \in \mathbb{R}^+$

(iii) $\lim\limits_{s \to 0} \frac{\phi(s)}{f(s)} = +\infty$ *e* $\liminf\limits_{s \to +\infty} \frac{\phi(\sigma s)}{\phi(s)} > 0$ *para todo* $\sigma \in \mathbb{R}^+$

(iv) $\delta < \frac{N(p-1)+p}{N-p}$

Então o problema (D_r) tem uma solução positiva.

Para demonstrar o Teorema 3.4, seguiremos três passos envolvendo estimativas *a-priori* e técnicas *blow-up*. Nos dois primeiros passos justificamos que, se u é um ponto fixo do operador completamente contínuo T, então, u é limitada a priori. No terceiro e último passo provamos o Teorema 3.4 usando teoria do grau.

Considere o seguinte problema

$$(A) \qquad \begin{cases} -(r^{n-1}\phi(u'))' = r^{n-1}f(|u|) & \text{em } (0,R) \\ u'(0) = 0 = u(R) \end{cases}$$

Note que se $u(r)$ é uma solução não trivial de (A), então $u'(r) < 0$, para todo $r \in (0,R)$ e como $u(R) = 0$ segue que $u(r) > 0$, para todo $r \in (0,R)$. Mostrando que $u(r)$ é uma solução positiva do problema (D_r).

1º Passo - Formulação Abstrata do Problema

Sejam K o subespaço fechado de $C([0,R])$ definido por

$$K = \{u \in C([0,R]); u(R) = 0\}$$

onde K é um espaço de Banach com a norma $||\cdot|| := ||\cdot||_\infty$ e $T_0 : K \to K$ um operador definido por

$$T_0(u(r)) = \int_r^R \phi^{-1}\left[\frac{1}{s^{N-1}}\int_0^s \xi^{N-1} f(|u(\xi)|)d\xi\right] ds \tag{3.14}$$

Se u for um ponto fixo de T_0, então

$$u(r) = \int_r^R \phi^{-1}\left[\frac{1}{s^{N-1}}\int_0^s \xi^{N-1} f(|u(\xi)|)d\xi\right] ds.$$

Derivando com respeito a r, obtemos

$$\begin{aligned} u'(r) &= -\phi^{-1}\left[\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r \xi^{N-1} f(|u(\xi)|)d\xi\right] \\ -r^{N-1}\phi(u'(r)) &= \int_0^r \xi^{N-1} f(|u(\xi)|)d\xi. \end{aligned}$$

Derivando novamente com respeito a r

$$-(r^{N-1}\phi(u'(r)))' = r^{N-1} f(|u(r)|).$$

Além disso, $u(R) = 0$ e $\lim_{r\to 0} u'(r) = 0$.
De fato, sendo $f(|u(\xi)|) < C$

$$\begin{aligned} |u'(r)| &\leq \phi^{-1}\left[\frac{C}{r^{N-1}}\int_0^r \xi^{N-1} d\xi\right] \\ &= \phi^{-1}\left[\frac{Cr}{N}\right] \end{aligned}$$

logo, $\lim_{r\to 0} |u'(r)| = 0$.
Desta forma, concluímos que u é solução de (A) se e somente se é ponto fixo de T_0.

Diante do estudo feito para encontrar soluções positivas para (D_r), vamos trabalhar no sentido de estudar situações que nos permitam encontrar pontos fixos de T_0. Para tanto, definimos o operador $T : K \times \mathbb{R}_+ \to K$ por

$$T(u,\tau) = \int_r^R \phi^{-1}\left[\frac{1}{s^{N-1}}\int_0^s \xi^{N-1}(f(|u(\xi)|) + \tau)\right] ds. \tag{3.15}$$

Note que T leva conjuntos limitados de $K \times \mathbb{R}_+$ em conjuntos limitados de K, e que $T_0(u) = T(u, 0)$.

O próximo resultado nos fornece uma propriedade importante do operador T.

Proposição 3.5 *O operador T é completamente contínuo.*

Demonstração:

Sejam $\{(u_n, \tau_n)\}$ uma sequência em $K \times \mathbb{R}_+$, i.e.

$$||u_n|| + \tau_n \leq C_1 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

e o conjunto

$$v_n = T(u_n, \tau_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vamos mostrar que $\{v_n\}$ tem uma subsequência convergente. Por (3.15)

$$v_n'(r) = \phi^{-1}\left[-\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r \xi^{N-1}(f(|u_n(\xi)| + \tau_n)d\xi\right]$$

logo, $v_n' \in C^1([0,R])$. Além disso, $|u_n(r)| + \tau_n \leq ||u_n|| + \tau_n < C_1$

$$\begin{aligned} v_n'(r) &= \frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r \xi^{N-1}(f(|u_n(\xi)| + \tau_n)d\xi \\ |v_n'(r)| &\leq \left|\phi^{-1}\left(\frac{CR}{N}\right)\right| \end{aligned}$$

onde $C > 0$. Portanto (v_n') é limitada e consequentemente (v_n) é equicontínua e uniformemente limitada.

Pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, (v_n) possui uma subsequência convergente, portanto T é compacto.

Mostremos agora que T é contínuo.

Seja $\{(u_n, \tau_n)\}$ uma sequência em $K \times \mathbb{R}_+$ convergindo para $(u, \tau) \in K \times \mathbb{R}_+$.

$$v_n(r) = \int_r^R h_n(s)ds \;\; n \in \mathbb{N}$$

onde $h_n(s) = \phi^{-1}\left[-\frac{1}{s^{N-1}}\int_0^s \xi^{N-1}(f(|u_n(\xi)|) + \tau_n d\xi\right]$.

Temos que (h_n) é limitada e para cada $s \in [0,R]$

$$\lim_{n\to+\infty} h_n(s) = h(s)$$

onde $h(s) = \phi^{-1}\left[-\frac{1}{s^{N-1}}\int_0^s \xi^{N-1}(f(|u(\xi)| + \tau)d\xi\right]$.

Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$||h_n - h||_{L^1(0,R)} \to 0 \quad \text{quando } n \to +\infty$$

onde $||\cdot||_{L^1(0,R)}$ denota a norma no espaço de Banach $L^1(0,R)$.

Como
$$v_n(r) = \int_r^R h_n(s)ds \leq \int_0^R h_n(s)ds,$$
definindo $v(r) := \int_r^R h(s)ds$ e note que $v \in K$, então
$$\begin{aligned} |v_n(r) - v(r)| &= \left| \int_r^R (h_n(s) - h(s))ds \right| \\ &\leq \int_0^R |h_n(s) - h(s)|ds \end{aligned}$$
donde segue
$$||v_n - v|| \leq ||h_n - h||_{L^1(0,R)}$$
Portanto $||v_n - v|| \to 0$ quando $n \to +\infty$, logo
$$T(u_n, \tau_n) \to T(u, \tau) \quad \text{quando} \;\; n \to +\infty$$
Mostrando que T é contínuo.
Sendo T um operador contínuo e compacto, então T é uma operador completamente contínuo.

■

2º Passo - Limitação a-priori. Nesta etapa da demonstração, mostraremos que soluções $(u, \tau) \in K \times \mathbb{R}_+$ da equação
$$T(u, \tau) = u \tag{3.16}$$
são limitadas a-priori. Para concluir isso usaremos técnicas de blow-up.

Proposição 3.6 *Suponha que existe uma sequência* $\{(u_n, \tau_n)\}$ *de soluções de (3.16) tal que*
$$||u_n|| + \tau_n \to +\infty, \quad \textit{quando } n \to +\infty.$$
Então

(i) $||u_n|| \to +\infty$, *quando* $n \to +\infty$;

(ii) $\dfrac{\tau_n}{f(||u_n||)} \to 0.$

Demonstração:

Temos que para cada $n \in \mathbb{N}$, o par $\{u_n, \tau_n\}$ satisfaz

$$u(r) = \int_r^R \phi^{-1}\left[\frac{1}{s^{N-1}}\int_0^s \xi^{N-1} f(|u(\xi)|)d\xi\right] ds.$$

Observando que $f(|u_n|) \geq 0$ (hipótese do Teorema 3.4) concluímos que $f(|u_n|)+\tau_n \geq \tau_n$. e sendo ϕ^{-1} crescente e $||u_n|| = u_n(0)$ obtemos que

$$\begin{aligned} u_n(0) &\geq \int_r^R \phi^{-1}\left[\frac{1}{s^{N-1}}\int_0^s \xi^{N-1} f(|u(\xi)|)d\xi\right] ds \\ &= \int_r^R \phi^{-1}\left[\frac{s}{N}\tau_n\right] ds \\ &= \int_{R/2}^R \phi^{-1}\left[\frac{s}{N}\tau_n\right] ds \\ &= \int_{R/2}^R \phi^{-1}\left[\frac{R/2\tau_n}{N}\right] ds \\ &= \frac{R}{2}\phi^{-1}\left[\frac{R\tau_n}{2N}\right] \end{aligned}$$

assim,

$$||u_n|| \geq \frac{R}{2}\phi^{-1}\left[\frac{R\tau_n}{2N}\right] \tag{3.17}$$

fazendo $n \to +\infty$, então $\tau_n \to +\infty$ e com isso

$$\phi^{-1}\left(\frac{R\tau_n}{2N}\right) \to +\infty,$$

pois ϕ^{-1} é crescente. Consequentemente, vale (i).

De (3.17), para n suficientemente grande,

$$\begin{aligned} \phi^{-1}\left(\frac{R\tau_n}{2N}\right) &\leq \frac{2}{R}||u_n|| \\ \frac{R\tau_n}{2N} &\leq \phi\left(\frac{2}{R}||u_n||\right) \\ \frac{R}{2N}\frac{\tau_n}{f(||u_n||)} &\leq \frac{\phi\left(\frac{2}{R}||u_n||\right)}{f(||u_n||)}. \end{aligned}$$

Desde que

$$\frac{\phi\left(\frac{2}{R}||u_n||\right)}{f(||u_n||)} = \frac{\phi\left(\frac{2}{R}||u_n||\right)}{\phi(||u_n||)}\frac{\phi(||u_n||)}{f(||u_n||)}$$

ϕ é (p-1)-AH e vale (3.1), segue

$$\frac{R}{2N}\lim_{n\to+\infty}\frac{\tau_n}{f(||u_n||)} \leq \left(\frac{2}{R}\right)^{p-1}\lim_{n\to+\infty}\frac{\phi(||u_n||)}{f(||u_n||)}.$$

Então

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\tau_n}{f(||u_n||)} \leq N\left(\frac{2}{R}\right)^p \cdot 0,$$

e, portanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\tau_n}{f(||u_n||)} = 0.$$

■

O lema dado a seguir garante que as soluções de (3.16) são limitadas a-priori.

Lema 3.1 *Se $(u,\tau) \in K \times \mathbb{R}_+$ é uma solução de (3.16), então existe uma constante $C > 0$, independente de u e τ, tal que*

$$||u|| + \tau \leq C. \tag{3.18}$$

Demonstração:

Supondo, por contradição, que exista uma sequência $\{(u_n,\tau_n)\}$ em $K \times \mathbb{R}_+$, tal que (u_n,τ_n) satisfaz (3.16) e

$$||u_n|| + \tau_n \to +\infty, \quad \text{quando } n \to +\infty$$

e denotando $t_n := ||u_n||$ e $z_n := z(t_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, onde a função z esta definida em (3.12).

Considere a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} y = \dfrac{z_n}{t_n} r \\ \omega_n(y) = \dfrac{u_n(r)}{t_n} \end{cases}$$

Note que

$$\frac{dy}{dr} = \frac{z_n}{t_n}$$

e denotando $\dot{\omega}_n(y) = \frac{d}{dy}\omega_n(y)$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_n(y) &= \frac{d}{dy}\left[\frac{u_n(r)}{t_n}\right] \\ &= \frac{1}{t_n}\frac{d}{dy}u_n(r) \\ &= \frac{1}{t_n}u_n'(r)\frac{dr}{dy} \\ &= \frac{1}{t_n}u_n'(r)\frac{t_n}{z_n} \\ &= \frac{1}{z_n}u_n'(r) \end{aligned}$$

logo,

$$z_n\dot{\omega}_n(y) = u_n'(r). \tag{3.19}$$

Temos que $u_n = T(u_n, \tau_n)$ ou seja

$$u_n(r) = \int_r^R \phi^{-1}\left[\frac{1}{s^{N-1}}\int_0^s \xi^{N-1}(f(|u_n(\xi)|) + \tau_n)d\xi\right] ds$$

derivando a igualdade em relação a r

$$u_n'(r) = -\phi^{-1}\left[\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r \xi^{N-1}(f(|u_n(\xi)|) + \tau_n)d\xi\right]$$

De (3.19)

$$\begin{aligned}
z_n\dot{\omega}_n(y) &= -\phi^{-1}\left[\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r \xi^{N-1}(f(|u_n(\xi)|) + \tau_n)d\xi\right] \\
-\phi(z_n\dot{\omega}_n(y)) &= \frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r \xi^{N-1}(f(|u_n(\xi)|) + \tau_n)d\xi \\
-y^{N-1}\phi(z_n\dot{\omega}_n(y)) &= \frac{z_n^{N-1}}{t_n^{N-1}}\int_0^r \xi^{N-1}(f(|u_n(\xi)|) + \tau_n)d\xi \\
-\frac{d}{dy}(y^{N-1}\phi(z_n\dot{\omega}_n(y))) &= \frac{z_n^{N-1}}{t_n^{N-1}}\frac{d}{dy}\left[\int_0^r \xi^{N-1}(f(|u_n(\xi)|) + \tau_n)d\xi\right] \\
&= \frac{z_n^{N-1}}{t_n^{N-1}}r^{N-1}(f(|u_n(r)|) + \tau_n)\frac{t_n}{z_n} \\
&= y^{N-1}(f(|u_n(r)|) + \tau_n)\frac{t_n}{z_n}
\end{aligned}$$

Assim,

$$-\frac{d}{dy}(y^{N-1}\phi(z_n\dot{\omega}_n(y)))z_n = t_n y^{N-1}(f(t_n\omega_n(y)) + \iota_n) \tag{3.20}$$

De $u_n'(0) = u_n(R) = 0$, resulta que

$$\omega_n(0) = 1, \qquad \dot{\omega}_n(0) = \frac{u'(r)}{z_n} = 0 \qquad e \qquad \omega_n(Rz_n/t_n) = 0 \tag{3.21}$$

Note que $g(t_n) = \frac{z_n}{t_n}$ e das Proposições 3.3 e 3.6 segue

$$\frac{z_n}{t_n} \to +\infty, \quad \text{quando } n \to +\infty.$$

Seja $M_0 > 0$ uma constante e suponha que $Rg(t_n) > M_0,$ para todo $n,$ passando a uma subsequência se necessário. Considere $y \in [0, M_0]$.

Voltando a equação (3.20) e dividindo-a por y^{N-1}

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dy}(y^{N-1}\phi(z_n\dot{\omega}_n(y)))z_n &= t_n y^{N-1}(f(|u_n(\xi)|) + \tau_n) \\
-\frac{(N-1)}{y}\phi(z_n\dot{\omega}_n(y))z_n - z_n\phi'(z_n\dot{\omega}_n(y))z_n\ddot{\omega}_n(y) &= t_n(f(|u_n(\xi)|) + \iota_n)
\end{aligned}$$

multiplicando por $\dot{\omega}_n(y)$

$$\begin{aligned} z_n\dot{\omega}_n(y)z_n\phi'(z_n\dot{\omega}_n(y))z_n\ddot{\omega}_n(y) + t_n(f(|u_n(\xi)|) + \iota_n)\dot{\omega}_n(y) &= -\frac{(N-1)}{y}\phi(z_n\dot{\omega}_n(y))z_n\dot{\omega(y)} \\ \frac{d}{dy}\left[H(z_n\dot{\omega}_n(y)) + F(t_n\omega_n(y)) + t_n\iota_n\omega_n(y)\right] &= -\frac{(N-1)}{y}\phi(z_n\dot{\omega}_n(y))z_n\dot{\omega(y)} \end{aligned}$$

Como $\phi(z_n\dot{\omega}_n(y)) < 0$ e $\dot{\omega}_n(y) < 0$ temos

$$\frac{d}{dy}\left[H(z_n\dot{\omega}_n(y)) + F(t_n\omega_n(y)) + t_n\tau_n\omega_n(y)\right] \leq 0 \tag{3.22}$$

Integrando (3.22) em $(0, y)$, encontramos

$$H(z_n\dot{\omega}_n(y)) + F(t_n\omega_n(y)) + t_n\tau_n\omega_n(y) - H(z_n\dot{\omega}_n(0)) - F(t_n\omega_n(0)) - t_n\tau_n\omega_n(0) \leq 0$$

e por (3.21)

$$H(z_n\dot{\omega}_n(0)) = 0, \qquad F(t_n\omega_n(0)) = F(t_n) \qquad e \qquad t_n\tau_n\omega_n(0) = t_n\iota_n$$

Logo

$$H(z_n\dot{\omega}_n(y)) + F(t_n\omega_n(y)) + t_n\tau_n\omega_n(y) \leq F(t_n) + t_n\tau_n$$

e como $F(t_n\omega_n(y)) > 0$ e $t_n\tau_n\omega_n(y) > 0$ concluímos que,

$$\begin{aligned} H(z_n\dot{\omega}_n(y)) &\leq F(t_n)\left[1 + \frac{\tau_n t_n}{F(t_n)}\right] \\ &= H(z_n)\left[1 + \frac{\tau_n}{f(t_n)}\frac{t_n f(t_n)}{F(t_n)}\right] \end{aligned}$$

Por (3.8) e pela parte (ii) da Proposição 3.6, para n suficientemente grande, existe $c > 0$ tal que

$$1 + \frac{\tau_n}{F(t_n)}\frac{t_n f(t_n)}{F(t_n)} \leq c$$

daí,

$$H(z_n|\dot{\omega}_n(y)|) \leq cH(z_n)$$

. Sabendo que existe H^{-1}, pois H é monótona, tem-se

$$|\dot{\omega}_n(y)| \leq \frac{H^{-1}(cH(z_n))}{H^{-1}(H(z_n))}. \tag{3.23}$$

Da Proposição 3.2 e de (3.6)

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{H^{-1}(cH(s))}{H^{-1}(H(s))} = c^{1/p}$$

Assim para $n > n_0$, $\{\frac{H^{-1}(cH(z_n))}{H^{-1}(H(z_n))}\}$ é limitada, ou seja, existe $c_1 > 0$ tal que

$$|\dot{\omega}_n(y)| \leq c_1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \quad \text{e para todo } y \in [0, M_0]$$

Logo a sequência $\{\omega_n\}$ é equicontínua, pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Desde que essa sequência também é uniformemente limitada, pois $|\omega_n| = 1,$ para todo n e todo $y \in [0.M_0]$, segue do Teorema de Arzelá-Ascoli que $\{\omega_n\}$ possui uma subsequência limitada que ainda denotaremos por $\{\omega_n\}$.

Digamos que

$$\omega_n \to \omega \quad \text{em } C([0, M_0]) \text{ quando } n \to +\infty$$

Integrando (3.20) em $[0, y] \subset [0, M_0]$, temos

$$\begin{aligned} -y^{N-1}\phi(z_n\dot{\omega}_n(y))z_n &= t_n \int_0^y \xi^{N-1}(f(t_n\omega_n(y)) + \tau_n)d\xi \\ -\phi(z_n\dot{\omega}_n(y)) &= \frac{t_n}{z_n}\frac{1}{y^{N-1}} \int_0^y \xi^{N-1}(f(t_n\omega_n(y)) + \tau_n)d\xi \\ -\phi(z_n\dot{\omega}_n(y)) &= \frac{t_n}{z_n}f(t_n)\frac{1}{y^{N-1}} \int_0^y \xi^{N-1}\left(\frac{f(t_n\omega_n(y))}{f(t_n)} + \frac{\tau_n}{f(t_n)}\right)d\xi. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$-\phi(z_n\dot{\omega}_n(y)) = \frac{t_n}{z_n}f(t_n)h_n(y) \tag{3.24}$$

onde

$$h_n(y) = \frac{1}{y^{N-1}} \int_0^y \xi^{N-1}\left(\frac{f(t_n\omega_n(y))}{f(t_n)} + \frac{\tau_n}{f(t_n)}\right)d\xi. \tag{3.25}$$

Afirmação 3.7 *$\{h_n(y)\}$ é uma sequência convergente para cada $y \in [0, M_0]$.*

Por hipótese f é crescente a partir de um certo s_*, ou seja,

$$f(s_1) > f(s_2) \text{ para } s_1 > s_2 > s_*.$$

Então, para $s \geq s_1 > 0$, temos que existe $s_0 > 0$ tal que

$$\frac{f(\sigma s)}{f(s)} \leq 1, \text{ para todo } s \geq s_0 \text{ e para todo } \sigma \in [0, 1]. \tag{3.26}$$

De fato, existe um único $s_0 \geq s_1$, tal que

$$f(s_0) = \max_{s\in[0,s_1]} f(s) := M.$$

Seja $\sigma \in (0,1)$ e considere o termo $\frac{f(\sigma s)}{f(s)}$ para $s \geq s_0$.

Se $\sigma s \geq s_0$, então $f(\sigma s) \leq f(s)$ e assim vale (3.26).

Se $\sigma s < s_0$, então

$$f(\sigma s) \leq M = f(s_0) \leq f(s)$$

e novamente (3.26) é satisfeita.

Observando que $\omega_n(y)) \in (0,1]$ para todo $y \in [0, M_0]$, de (3.26) temos

$$\frac{f(t_n\omega_n(y))}{f(t_n)} \leq 1 \tag{3.27}$$

desde que n seja grande. Em particular isto implica que $\{h_n(y)\}$ é uma sequência limitada.

Mostraremos que para cada $y_0 \in [0, M_0]$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(t_n\omega_n(y_0))}{f(t_n)} = (\omega(y_0))^\delta. \tag{3.28}$$

Sabemos que $\omega_n(y_0) \to \omega(y_0)$, quando $n \to +\infty$. Se $\omega(y_0) > 0$, então para n grande $t_n\omega(y_0) > s_0$. Como f é crescente para s grande, a parte (ii) do Teorema 3.4 implica que dado $\varepsilon > 0$,

$$\frac{f(t_n(\omega(y_0) - \varepsilon))}{f(t_n)} < \frac{f(t_n\omega_n(y_0))}{f(t_n)} < \frac{f(t_n(\omega(y_0) + \varepsilon)}{f(t_n)}$$

$$(\omega(y_0) - \varepsilon))^\delta \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{f(t_n\omega_n(y_0))}{f(t_n)} \leq (\omega(y_0) + \varepsilon))^\delta$$

donde segue (3.28).

Se $\omega(y_0) = 0$, temos que separar em dois casos a saber, $(t_n\omega_n(y_0))$ é limitada ou não é limitada.

Mostraremos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(t_n\omega_n(y_0))}{f(t_n)} = 0 \tag{3.29}$$

para o caso em que$(t_n\omega_n(s))$ não é limitada, pois se a sequência for limitada não há o que fazer.

Supondo por contradição que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{f(t_n\omega_n(y_0))}{f(t_n)} = \mu_0 > 0$$

Note por (3.27) que $\mu_0 \leq 1$. Existe uma subsequência $\{n_k\}$ de inteiros positivos tal que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{f(t_{n_k}\omega_{n_k}(y_0))}{f(t_{n_k})} = \mu_0$$

com $\{t_{n_k}\omega_{n_k}(y_0)\}$ ilimitada. Assim, passando a subsequência se necessário, podemos supor que $t_{n_k}\omega_{n_k}(y_0) > s_0$. Agora de desde que $\omega_{n_k}(y_0) \to 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 = k_0(\varepsilon, \mu_0)$ tal que

$$t_{n_k}\omega_{n_k}(y_0)) \leq t_{n_k}\varepsilon\mu_0 \text{ para todo } k > k_0.$$

Logo,

$$f(t_{n_k}\omega_{n_k}(y_0)) \leq f(t_{n_k}\varepsilon\mu_0),$$

pois $t_{n_k}\omega_{n_k}(y_0) > s_0$. Assim

$$\frac{f(t_{n_k}\omega_{n_k}(y_0))}{f(t_{n_k})} \leq \frac{f(t_{n_k}\varepsilon\mu_0}{f(t_{n_k})} \tag{3.30}$$

Entretanto

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{f(t_{n_k}\varepsilon\mu_0)}{f(t_{n_k})} = (\varepsilon\mu_0)^\delta \leq \varepsilon^\delta$$

já que f é δ-AH.

Fazendo $k \to +\infty$ em (3.30) concluímos que

$$\mu_0 \leq \varepsilon^\delta$$

o que é uma contradição. Portanto (3.29) vale.

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesque em (3.25)

$$h_n(y) \to h(y) = \frac{1}{y^{N-1}} \int_0^y s^{N-1}\omega^\delta(s)ds$$

para cada $y \in [0, M_0]$. Por (3.24), para $y \in [0, M_0]$

$$\begin{aligned} -\phi(z_n\dot{\omega}_n(y)) &= \frac{t_n}{z_n} f(t_n)h_n(y) \\ -z_n\dot{\omega}_n(y) &= \phi^{-1}(\frac{t_n}{z_n} f(t_n)h_n(y)) \end{aligned}$$

Então,

$$-\dot{\omega}_n(y) = \frac{\phi^{-1}\alpha_n(y)\phi(z_n)}{\phi^{-1}(\phi(z_n))} \quad \text{para } y \in [0, M_0] \tag{3.31}$$

onde $\alpha_n(y) = \dfrac{t_n f(t_n)}{z_n\phi(z_n)} h_n(y) = \dfrac{t_n f(t_n)}{F(t_n)} \dfrac{H(z_n)}{z_n\phi(z_n)} h_n(y)$.

Segue de (3.8) e

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{H(z_n)}{z_n\phi(z_n)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{z_n\phi(z_n)-\Phi(z_n)}{z_n\phi(z_n)}=1-\frac{1}{p}$$

que

$$\frac{t_nf(t_n)}{F(t_n)}\frac{H(z_n)}{z_n\phi(z_n)}\to(\delta+1)\left(1-\frac{1}{p}\right):=\beta$$

logo, para cada $y\in[0,M_0]$

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha_n(y)=\beta h(y). \tag{3.32}$$

Integrando (3.31) de 0 a $y\in(0,M_0]$, obtemos

$$1-\omega_n(y)=\int_0^y\frac{\phi^{-1}\alpha_n(s)\phi(z_n)}{\phi^{-1(\phi(z_n))}}ds. \tag{3.33}$$

Usando (3.32) e a proposição 3.2

$$\frac{\phi^{-1}\alpha_n(s)\phi(z_n)}{\phi^{-1(\phi(z_n))}}\to(\beta h(y))^{p^*-1}$$

do Teorema da Convergência Dominada de Lebesque

$$1-\omega(y)=\int_0^y(\beta h(s))^{p^*-1}ds.$$

Diferenciando a última igualdade em relação a y, temos

$$-\dot\omega(y)=\beta^{p^*-1}[h(s)]^{p^*-1},$$

elevando a potência $(p-1)$ temos

$$-|\dot\omega(y)|^{p-2}\dot\omega(y)=\frac{\beta}{y^{N-1}}\int_0^y s^{N-1}\omega^{\delta}(s)ds$$

Assim, ω é uma solução não-negativa não trivial em $[0,M_0]$ para o problema de valor inicial

$$\begin{cases}-\frac{d}{dy}(y^{n-1}|\dot\omega(y)|^{p-2}\dot\omega(y))=\beta y^{N-1}\omega^{\delta}(y)\\ \omega'(0)=0,\ \omega(0)=1\end{cases} \tag{3.34}$$

Afirmamos que ω pode ser estendida para $(0,+\infty)$. Com efeito, basta repetir o argumento feito, no intervalo $[0,M_*]$, $M_*>M_0$, para a sequência convergente (ω_n). Assim obtemos a função $\hat\omega$, limite de (ω_n), solução de (3.34)

$$\omega(y)=\hat\omega(y)\text{ para todo }y\in[0,M_0].$$

Continuando com este processo, e usando a diagonal, formamos uma sequência convergente em $\mathbb{R}_+$ para a solução $\tilde{\omega}$ de (3.34). Além disso argumentando como em [7], pode ser mostrado que ω é de fato uma solução positiva de classe $C^2(0,+\infty)$ de (3.34).

Por hipótese, $\delta < \frac{N(p-1)+p}{N-p}$ o que contradiz o caso em $\delta > p-1$ como pode ser visto na seção A.4, Teorema A.9. onde mostramos que problemas como (3.34) não possuem solução positiva de acordo com [7]. O caso em que $\delta = p-1$, mostramos na seção A.4, Teorema A.10 que toda solução de (3.34) com $\beta > 0$ muda de sinal em $(0,+\infty)$ baseado em [10] o que é contradição. Assim fica justificado o Lema.

■

3º Passo - Demonstração do Teorema 3.4

Do Lema 3.1, se (u,τ) é solução de

$$T(u,\tau) = u$$

então $||u|| < C$ e $0 < \tau < C$, onde C é uma constante positiva.
Assim se $B(0,R_1) \subset K$ denota a bola de centro 0 com raio $R_1 > C$, temos

$$u \neq T(u,\tau)$$

algum $(u,\tau) \in \partial B(0,R_1) \times [0,R_1]$. Portanto, se I denota a identidade em K, o grau de Leray-Schauder do operador

$$I - T(\cdot,\tau) : \overline{B(0,R_1)} \to K$$

está bem definido para todo $\tau \in [0,R_1]$.

Pela propriedades do grau de Leray-Shauder como $0 \neq (I - T(\cdot,\tau))(\partial B(0,R_1)$, para todo $\tau \in [0,R_1]$ concluímos que

$$d(I - T(\cdot,R_1), B(0,\tau), 0) = \ const.$$

Note que

$$d(I - T(\cdot,R_1), B(0,R_1), 0) = 0,$$

logo

$$d(I - T(\cdot,\tau), B(0,R_1), 0) = 0, \ \ \forall\, \tau \in [0,R_1]. \tag{3.35}$$

Assim de (3.35) e do fato de $T(u,0) = T_0(u)$

$$d(I - T_0, B(0,R_1), 0) = 0 \tag{3.36}$$

Agora, defina o operador $S : [0,1] \times K \to K$,

$$S(\lambda, u) = \int_r^R \phi^{-1}\left[\frac{\lambda}{s^{N-1}}\int_0^s \xi^{N-1} f(|u_n(\xi)|)d\xi\right] ds.$$

Então, como no primeiro passo, mostra-se que S é completamente contínuo. Além disso, note que $S(\cdot, 1) = T_0$

Afirmação 3.8 *Existe um $\varepsilon > 0$ tal que a equação*

$$u = S(\lambda, u) \tag{3.37}$$

não tem solução (λ, u) com $u \in \partial B(0,\varepsilon)$ e $\lambda \in [0,1]$.

Suponhamos, por contradição, que existem sequências $\{u_n\}$ e $\{\lambda_n\}$ com $||u_n|| = \varepsilon_n \to 0$ quando $n \to +\infty$ e $\lambda_n \in [0,1]$ tal que (u_n, λ_n) satisfaz

$$u_n(r) = \int_r^R \phi^{-1}\left[\frac{\lambda_n}{s^{N-1}}\int_0^s \xi^{N-1}(f(|u_n(\xi)|)d\xi\right] ds$$

Pela primeira parte de (iii) segue que para t pequeno $f(t) < \mu\phi(t)$, qualquer que seja $\mu > 0$ e pequeno. Logo $f(||u_n||) < \phi(||u_n||)$ para n grande. Logo

$$\begin{aligned}
||u_n|| &\leq \int_r^R \phi^{-1}\left[\frac{\lambda_n}{s^{N-1}}\int_0^s \xi^{N-1}(f(||u_n||)d\xi\right] ds \\
&< \int_0^R \phi^{-1}\left[\frac{1}{s^{N-1}}\int_0^s \xi^{N-1}\mu\phi(||u_n||)d\xi\right] ds \\
&= \int_0^R \phi^{-1}\left[\frac{1}{s^{N-1}}\frac{s^N}{N}\mu\phi(||u_n||)\right] ds \\
&\leq \int_0^R \phi^{-1}\left[\frac{\mu s}{N}\phi(||u_n||)\right] ds \\
&\leq \int_0^R \phi^{-1}\left[\frac{\mu R}{N}\phi(||u_n||)\right] ds \\
&= \phi^{-1}\left[\frac{\mu R}{N}\phi(\varepsilon_n)\right] R
\end{aligned}$$

Assim,

$$\varepsilon_n \leq \phi^{-1}\left[\frac{\mu R}{N}\phi(\varepsilon_n)\right] R.$$

Desse modo, temos

$$\phi(\frac{\varepsilon_n}{R}) = \phi(\varepsilon_n)\mu\frac{R}{N}.$$

Se $R \leq 1$, então $\varepsilon_n \leq \dfrac{\varepsilon_n}{R}$, o que implica

$$\phi(\varepsilon_n) \leq \phi(\frac{\varepsilon_n}{R}).$$

Consequentemente,

$$\phi(\varepsilon_n) \leq \frac{\mu}{N}\phi(\varepsilon_n)$$

o que é um absurdo. Por outro lado, se $R > 1$, então

$$\frac{\phi(\frac{1}{R}\varepsilon_n)}{\phi(\varepsilon_n)} \leq \frac{\mu}{N}R$$

o que contradiz a segunda parte de (iii). Portanto a afirmação é verdadeira.

Desde que $I - S(\lambda, \cdot)$ define uma homotopia entre I e $I - T_0$ segue da afirmação e das propriedades do grau de Leray-Schauder que para $\varepsilon > 0$ pequeno,

$$d(I - S(\lambda, \cdot), B(0, \varepsilon), 0) = \text{constante para todo } \lambda \in [0, 1].$$

Assim

$$d(I - T_0, B(0, \varepsilon), 0) = d(I, B(0, \varepsilon), 0) = 1$$

e então por (3.36) e (3.37) a propriedade de exercisão do grau de Leray-Schauder devemos ter

$$d(I - T_0, B(0, R_1) \setminus \overline{B(0, \varepsilon)}, 0) = -1 \neq 0$$

e por esta razão existe $u \in B(0, R_1) \setminus \overline{B(0, \varepsilon)}$ tal que

$$u = T_0(u)$$

e isto conclui a prova do teorema.

■

Apêndice A

A.1 Resultados Gerais

Os teoremas enunciados nesta seção têm suas demonstrações em [4].

Teorema A.1 *Seja $u \in W^{1,p}(I)$, então existe uma função $\overline{u} \in C(\overline{I})$ tal que*

$$u = \overline{u} \qquad \textit{quase sempre em} \quad I$$

e

$$\overline{u}(x) - \overline{u}(y) = \int_x^y u'(t)dt \qquad \forall x, y \in \overline{I}.$$

Demonstração: veja [4], p. 123.

Teorema A.2 *Seja $u \in L^p(I)$ com $1 < p \leq +\infty$. As propriedades são equivalentes*

(i) $u \in W^{1,p}(I)$

(ii) Existe uma constante C tal que, para toda $\varphi \in C_0^\infty$

$$\left| \int_0^1 u\varphi' dt \right| = C||\varphi||_q.$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;

Demonstração: veja [4], p. 124.

Teorema A.3 ***(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)***
Seja (f_n) uma sequência de funções em L^1 que converge em quase todo ponto para um função mensurável f. Se existir um função integrável g tal que

$$|f_n| \leq g, \quad \textit{para todo} \ \ n \in \mathbb{N}.$$

então, f é integrável e

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Demonstração: [3], p. 44.

A.2 Relação entre as funções Beta e Gama

Definição A.4 *A integral*

$$\int_0^{+\infty} t^{n-1} \exp^{-t} dt$$

é, por definição, a função Gama Γ, avaliada no ponto $\Gamma(t)$, para $t > 0$.

Definição A.5 *A integral*

$$B(m,n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1} dt \tag{A.1}$$

define a função Beta no ponto (m,n), onde m,n são números reais positivos.

Observamos que entre as funções Beta e Gama existe a seguinte relação:

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

De fato, por definição, temos

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} t^{m-1} \exp^{-t} dt \int_0^{+\infty} t^{n-1} \exp^{-t} dt \tag{A.2}$$

fazendo a mudança de variáveis $t = x^2$, obtemos

$$\Gamma(m) = 2 \int_0^{+\infty} x^{2m-1} e^{-x^2} dx,$$

logo por (B.2)

$$\begin{aligned}
\Gamma(m)\Gamma(n) &= 4 \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} x^{2m-1} e^{-x^2} y^{2n-1} e^{-y^2} dy \right) dx \\
&= 4 \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} x^{2m-1} y^{2n-1} dy \right) dx.
\end{aligned}$$

Agora, fazendo a mudança de variáveis $x = rcos\theta$, $y = rsen\theta$, com $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 < r < +\infty$. Temos

$$\begin{aligned}
\Gamma(m)\Gamma(n) &= 4\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\pi/2} e^{-r^2}(rcos\theta)^{2m-1}(rsen\theta)^{2n-1}d\theta\right)dr \\
&= 4\int_0^{+\infty} e^{-r^2}r^{2(m+n-1)}dr\int_0^{\pi/2} cos^{2m-1}\theta sen^{2n-1}\theta d\theta \\
&= 2\Gamma(m+n)\int_0^{\pi/2} cos^{2m-1}\theta sen^{2n-1}\theta d\theta.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = 2\int_0^{\pi/2} cos^{2m-1}\theta sen^{2n-1}\theta d\theta,$$

Por outro lado, fazendo a mudança $t = sen^2\theta$ em (B.1), obtemos

$$\begin{aligned}
B(m,n) &= 2\int_0^{\pi/2} sen^{2m-2}\theta(1-sen^2\theta)^{n-1}sen\theta cos\theta d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2} sen^{2m-1}\theta cos^{2n-1}\theta d\theta.
\end{aligned}$$

Donde

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

Pelo que vimos acima, observamos que fazendo a mudança $t^{\alpha} = x$ na integral (A.1) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-t^{\alpha})^{-1/p}dt &= \frac{1}{\alpha}\int_0^1 x^{\frac{1}{\alpha}-1}(1-x)^{\frac{p-1}{p}-1}dx \\
&= \frac{1}{\alpha}B(\frac{1}{\alpha},\frac{p-1}{p})
\end{aligned}$$

Contudo,

$$B(\frac{1}{\alpha},\frac{p-1}{p}) = \frac{1}{\alpha}\frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})\Gamma((p-1)/p)}{\Gamma((p(\alpha+1)-\alpha)/p\alpha)} = C < +\infty$$

pois $\Gamma(n)$ é convergente.

A.3 Alguns resultados sobre a Teoria do Grau de Leray-Schauder

Esta seção foi baseada em Deimling [8].

Observação A.1 *$K(Y)$ é o conjunto dos operadores $T : Y \to Y$ tais que T é compacto.*
I denota a aplicação identidade $I(x) = x$.

Definição A.6 *Seja X um espaço de Banach real, $\Omega \subset X$ aberto e limitado, $F \in K(\Omega)$ e $y \notin (I - F)(\partial\Omega)$. Com a tripla adimissível, $(I - F, \Omega, y)$ definimos uma função d, assumindo valores inteiros, satisfazendo*
(d1) $d(I, \Omega, y) = 1$, onde $I(x) = x$, para todo $y \in \Omega$;
(d2) (Excisão) Se Ω_1, Ω_2, são abertos em Ω tais que

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \ \text{ e } y \notin (I - F)(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)),$$

então

$$d(I - F, \Omega, y) = d(I - F, \Omega_1, y) + d(I - F, \Omega_2, y);$$

(d3) (Invariância por homotopia) Seja $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \to X$ compacta e $y : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ contínua com

$$y(t) \notin (I - H(t, \cdot))(\partial\Omega) \ \text{ em } t \in [0,1],$$

então $d(I - H(t, \cdot), \Omega, y(t))$ é constante para todo $t \in [0,1]$.

A aplicação d é chamada grau de Leray-Schauder.

Neste trabalho usamos os seguintes resultados:

Teorema A.7 *Baseado em (d1)-(d3), o grau de Leray-Schauder tem as seguintes propriedades:*
(d4) Se $d(I - F, \Omega, y) \neq 0$ então $f^{-1}(y) \neq \emptyset$;
(d5) $d(I - G, \Omega, y) = d(I - F, \Omega, y)$ para $G \in K(\overline{\Omega}) \cap B(F, r)$ e $d(I - F, \Omega, \cdot)$ é constante em $B(F, r)$, onde $r = dist(y, (I - F)(\partial\Omega))$. Ainda mais $d(I - F, \Omega, \cdot)$ é constante em cada componente conexa de $X \setminus (I - F)(\partial\Omega)$;
(d6) $d(I - G, \Omega, y) = d(I - F, \Omega, y)$ sempre que $G |_{\partial\Omega} = F |_{\partial\Omega}$;
(d7) $d(I - F, \Omega, y) = d(I - F, \Omega_1, y)$ para todo subconjunto aberto Ω_1 de Ω tal que $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$.

A.4 Resultados de não-existência de solução positiva para o problema (3.34) com $\delta \geq p-1$.

As demonstrações dessa seção são devidas a [7] e [10].

Se u for solução de

$$-(r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r))' = \beta r^{N-1}u^{\delta}(r) \ \text{ em } [r_0, +\infty), \tag{A.3}$$

então $u \geq 0$.

Considere a função

$$M_\alpha(r) = ru'(r) + \alpha u(r) \tag{A.4}$$

onde $r \geq 0$ e $\alpha = \frac{N-p}{p-1}$.

Note que quando integramos (A.3) de $[r_0, r]$, obtemos

$$-r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r) \geq 0,$$

então $u'(r) \leq 0$, para todo $r \geq r_0$. Além disso, se para algum $s > r \geq r_0$, $u'(s) = 0$, ao integrarmos (A.3) de r a s, temos

$$-r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r) \leq -s^{N-1}|u'(s)|^{p-2}u'(s).$$

Logo

$$-r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r) \leq 0 \ \text{ para } \ r \in [r_0, s].$$

Portanto,

$$u'(r) = 0 \ \text{ para } \ r \in [r_0, s].$$

Desse modo, concluímos que u é constante em $[r_0, +\infty)$ no caso em que M_α é constante e não negativa já que α é não negativo, ou existe $r_1 \geq r_0$ tal que $u'(r) < 0$ para $r > r_1$, $u'(r) = 0$ e $u(r) = u(r_0) > 0$ para $r_0 \leq r \leq r_1$. Assim, sem perda de generalidade podemos assumir que $u(r_0) > 0$, $u'(r_0) \leq 0$ e $u'(r) < 0$ para $r > r_0$. Então é claro que $u(r) > 0$ para $r > r_0$.

Derivando $M_\alpha(r)$ em relação a r

$$M'_\alpha(r) = ru''(r) + \frac{N-1}{p-1}u'(r),$$

ou seja,

$$M'_\alpha(r) = ru''(r) + \alpha u'(r).$$

Calculando a derivada em A.3 temos

$$\begin{aligned} -(N-1)r^{N-2}|u'(r)|^{p-2}u'(r) - (p-1)r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u''(r) &\geq 0 \\ -r^{N-2}|u'(r)|^{p-2}[(N-1)u'(r) + (p-1)ru''(r)] &\geq 0 \end{aligned}$$

dividindo ambos os membros da última desigualdade pelo número positivo $(p-1)$

$$-r^{N-2}|u'(r)|^{p-2}[\alpha u'(r) + ru''(r)] \geq 0$$

donde $M_\alpha(r)$ é não crescente.

Afirmação A.8 *$M_\alpha(r)$ é não negativa.*

De fato, suponha por absurdo que exista $r_1 > 0$ tal que $M_\alpha(r_1) < 0$. Como $M_\alpha(r)$ é não crescente

$$ru'(r) + \alpha u(r) \leq M_\alpha(r_1),$$

para $r > r_1$, i.e.,

$$u'(r) + \alpha r^{-1}u(r) \leq r^{-1}M_\alpha(r_1) \ \text{ para } \ r > r_1.$$

Lembrando que u é não negativa e integrando a desigualdade em $[r_1, r]$, obtemos

$$u(r) - u(r_1) \leq M_\alpha(r_1)\ln(\frac{r}{r_1}).$$

Assim fazendo $r \to +\infty$, teremos $u(r) \to -\infty$ o que é absurdo, pois $u > 0$, logo

$$M_\alpha(r) = ru'(r) + \alpha u(r) \geq 0.$$

Agora considere o problema equivalente a (A.3)

$$(1)\left\{ \ -\text{div } |\nabla u|^{p-2}\nabla u = \beta|u|^{\delta-1}u \ \text{ em } \ \Omega = B_R(0) \right.$$

onde $\beta > 0$.Temos o seguinte resultado

Teorema A.9 *O problema* (1) *não tem solução radial positiva não-trivial de classe* $C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$.

Demonstração:

Suponha por contradição que existe u solução radial positiva não-trivial da equação (1), então u satisfaz

$$-(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = r^{N-1}\beta u^\delta(r), \quad r = |x| > 0 \tag{A.5}$$

$$u'(0) = 0. \tag{A.6}$$

e note que $u' \leq 0$.

Integrando (A.5) em (r,t) obtemos

$$t^{N-1}|u'(t)|^{p-1} + r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r) = \int_r^t s^{N-1}\beta u^\delta(s)ds. \tag{A.7}$$

Desde que $tu'(t) + \alpha u(t) \geq 0$ segue que a função $r^\alpha u(r)$ é não decrescente, ou seja,

$$r^\alpha u(r) \leq s^\alpha u(s) \quad s > r$$

assim,

$$\begin{aligned} s^{N-1}u^\delta(s) &= u^\delta(s)s^{\gamma+\delta\alpha}s^{-\gamma-\delta\alpha}s^{N-1} \\ &= (s^\alpha u(s))^\delta s^\gamma s^{N-1-\delta\alpha-\gamma} \\ &\geq r^{\delta\alpha}u^\delta(r)r^\gamma s^{N-1-\delta\alpha-\gamma} \end{aligned}$$

Substituindo a última desigualdade em (A.7)

$$\begin{aligned} t^{N-1}|u'(t)|^{p-1} + r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r) &\geq \beta r^{\gamma+\delta\alpha}u^\delta(r)\int_r^t s^{N-1-\delta\alpha-\gamma}ds \\ t^{N-1}|u'(t)|^{p-1} &= \beta r^{\gamma+\delta\alpha}u^\delta(r)\frac{(t^{N-\delta\alpha-\gamma} - r^{N-\delta\alpha-\gamma})}{N-\delta\alpha-\gamma} + r^{N-1}|u'(r)|^{p-1} \\ t^{N-1}|u'(t)|^{p-1} &\geq \frac{\beta r^{\gamma+\delta\alpha}u^\delta(r)}{N-\delta\alpha-\gamma}(t^{N-\delta\alpha-\gamma} - r^{N-\delta\alpha-\gamma}). \end{aligned}$$

Ainda por $tu'(t) + \alpha u(t) \geq 0$ por $u'(r) \leq 0$

$$\alpha u(r) \geq \alpha u(t) \geq -tu'(t)$$

ou seja,

$$\frac{\alpha}{t}u(r) \geq |u'(t)|$$

logo,

$$\begin{aligned} |u'(t)|^{p-1} &\geq \frac{\beta r^{\gamma+\delta\alpha}u^\delta(r)}{N-\delta\alpha-\gamma}t^{-N+1}(t^{N-\delta\alpha-\gamma} - r^{N-\delta\alpha-\gamma}) \\ \left(\frac{\alpha}{t}\right)^{p-1} u(r)^{p-1} &\geq \frac{\beta r^{\gamma+\delta\alpha}u^\delta(r)}{N-\delta\alpha-\gamma}t^{-N+1}(t^{N-\delta\alpha-\gamma} - r^{N-\delta\alpha-\gamma}) \\ \alpha^{p-1}u(r)^{p-1} &\geq \frac{\beta r^{\gamma+\delta\alpha}u^\delta(r)}{N-\delta\alpha-\gamma}t^{p-N}(t^{N-\delta\alpha-\gamma} - r^{N-\delta\alpha-\gamma}) \\ \alpha^{p-1} &\geq \frac{\beta r^{\gamma+\delta\alpha}u(r)^{\delta-p+1}}{N-\delta\alpha-\gamma}t^{p-N}(t^{N-\delta\alpha-\gamma} - r^{N-\delta\alpha-\gamma}). \end{aligned}$$

Assim
$$\frac{\beta r^{\gamma+\delta\alpha}u(r)^{\delta-p+1}t^{p-N}}{N-\delta\alpha-\gamma}(t^{N-\delta\alpha-\gamma}-r^{N-\delta\alpha-\gamma})\leq C_1. \tag{A.8}$$
Note que
$$N-\delta\alpha-\gamma=\frac{(N-p)(p-1-\delta)}{p(p-1)}<0.$$
Ao considerarmos $t=2r$ em (A.8) obtemos
$$\begin{aligned}
C_1 &\geq \frac{\beta u(r)^{\delta-p+1}}{N-\delta\alpha-\gamma}2^{p-N}r^{p-N+\delta\alpha+\gamma}((2r)^{N-\delta\alpha-\gamma}-r^{N-\delta\alpha-\gamma})\\
&= \frac{b\beta)u(r)^{\delta-p+1}}{N-\delta\alpha-\gamma}2^{p-N}r^{p-N+\delta\alpha+\gamma}(2^{N-\delta\alpha-\gamma}-1)r^{N-\delta\alpha-\gamma}\\
&= \frac{\beta u(r)^{\delta-p+1}}{N-\delta\alpha-\gamma}2^{p-N}r^{p}(2^{N-\delta\alpha}-1)\\
&= \beta u(r)^{\delta-p+1}r^p\frac{2^{p-N}}{-(N-\delta\alpha-\gamma)}(1-2^{N-\delta\alpha-\gamma})
\end{aligned}$$
donde
$$\beta u(r)^{\delta-p+1}r^p(1-2^{N-\delta\alpha-\gamma})\leq C_2$$
e portanto para $r\geq r_0>0$
$$u(r)\leq C_3\frac{1}{r^{\frac{p}{\delta-p+1}}} \tag{A.9}$$
Multiplicando a equação (A.5) por ru' e integrando por partes em $(0,R)$ o lado esquerdo da igualdade
$$\int_0^R -(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')'su'(s)ds=$$
$$\begin{aligned}
&= -R^N|u'(R)|^p+\int_0^R s^{N-1}|u'(s)|^p ds+\int_0^R s^N|u'(s)|^{p-1}u''(s)ds\\
&= -R^N|u'(R)|^p+\int_0^R s^{N-1}|u'(s)|^p ds+\frac{R^N}{p}|u'(R)|^p-\frac{N}{P}\int_0^R s^{N-1}|u'(s)|^p ds\\
&= \frac{(1-p)}{p}R^N|u'(R)|^p-\frac{(N-p)}{p}\int_0^R s^{N-1}|u'(s)|^p ds.
\end{aligned}$$
Portanto
$$\int_0^R \beta s^N u^\delta(s)u'(s)ds=\frac{(1-p)}{p}R^N|u'(R)|^p-\frac{(N-p)}{p}\int_0^R s^{N-1}|u'(s)|^p ds \tag{A.10}$$
Mas
$$\int_0^R \beta r^N u^\delta(r)u'(r)dr=$$
$$\frac{\beta R^N}{\delta+1}u^{\delta+1}(R)-\frac{\beta}{\delta+1}\int_0^R[Nr^{N-1}u(r)^{\delta+1}-\gamma r^{N-1}u(r)^{\delta+1}+-\gamma r^{N-1}u(r)^{\delta+1}]dr$$

logo,

$$\int_0^R \beta r^N u^\delta(r)u'(r)dr = \frac{\beta R^N}{\delta+1}u^{\delta+1}(R) - \frac{\beta(N-\gamma)}{\delta+1}\int_0^R r^{N-1}u^{\delta+1}(r)dr$$
$$- \frac{\beta}{\delta+1}\int_0^R \gamma r^{\gamma-1}r^{N-\gamma}u^{\delta+1}(r)dr$$

ou seja,

$$\int_0^R \beta r^N u^\delta(r)u'(r)dr = \frac{\beta R^N}{\delta+1}u^{\delta+1}(R) - \frac{\beta(N-\gamma)}{\delta+1}\int_0^R r^{N-1}u^{\delta+1}(r)dr$$
$$- \frac{\beta}{\delta+1}\int_0^R (r^\gamma)' r^{N-\gamma}u^{\delta+1}(r)dr \quad (A.11)$$

Observando que
$$\frac{N-p}{p} = \frac{N-\gamma}{\delta+1}$$
por (A.10) e (A.11) obtemos

$$\frac{\beta}{\delta+1}\int_0^R (r^\gamma)' r^{N-\gamma}u^{\delta+1}(r)dr = \frac{\beta R^N}{\delta+1}u^{\delta+1}(R) + \frac{(p-1)}{p}R^N|u'(R)|^p$$
$$+ \frac{N-p}{p}\left[\int_0^R r^{N-1}|u'(r)|^p dr - \int_0^R r^{N-1}\beta u^{\delta+1}(r)dr\right] \quad (A.12)$$

Multiplicando (A.5) por u e integrando por partes em $(0, R)$ temos,

$$\int_0^R r^{N-1}|u'(r)|^p dr - \int_0^R r^{N-1}\beta u^{\delta+1}(r)dr = R^{N-1}|u'(R)|^{p-2}u'(R)u(R). \quad (A.13)$$

Substituindo (A.13) em (A.12) e multiplicando a igualdade por p

$$\frac{\beta p}{\delta+1}\int_0^R (r^\gamma)' r^{N-\gamma}u^{\delta+1}(r)dr = \frac{\beta p}{\delta+1}R^N u^{\delta+1}(R) + (p-1)R^N|u'(R)|^p$$
$$+ (N-p)R^{N-1}|u'(R)|^{p-2}u'(R)u(R) \quad (A.14)$$

Sendo u positiva e,

$$\int_0^R (r^\gamma)' r^{N-\gamma}u^{\delta+1}(r)dr \geq M_1 R^{N-\gamma}\int_0^R (r^\gamma)' dr,$$

segue que o lado esquerdo da igualdade (A.14) é positivao e maior que uma constante M para R grande, já que de $\delta < \frac{N(p-1)+p}{N-p}$ segue que $\gamma > 0$.

Por outro lado, de (A.9),

$$\frac{\beta p}{\delta+1}R^N u^{\delta+1}(R) \leq \frac{\beta p}{\delta+1}R^N C_4 \frac{1}{R^{\frac{p(\delta+1)}{\delta-p+1}}} = C\frac{1}{R^{\frac{p(\delta+1)}{\delta-p+1}-N}}$$

portanto,

$$\frac{\beta p}{\delta+1}R^N u^{\delta+1}(R) \leq C\left[\frac{1}{R^\gamma}\right]^{\frac{p}{\delta-p+1}}$$

logo para R grande $\frac{p}{\delta+1}R^N b(R)u^{\delta+1}(R)$ fica próximo de zero. Além disso, percebemos que

$$(p-1)R^N|u'(R)|^p + (N-p)R^{N-1}|u'(R)|^{p-2}u'(R)u(R) =$$
$$(p-1)R^{N-1}|u'(R)|^{p-2}u'(R)[Ru'(R) + \frac{N-p}{p-1}u(R)] \leq 0.$$

Consequentemente o lado esquerdo da igualdade (A.14) não pode ser maior que uma constante M para R grande. Portando o problema (1) não possui solução radial positiva não trivial.

$\blacksquare$

Teorema A.10 *Considere o seguinte problema*

$$\begin{cases} -(r^{N-1}|u'|^{p-2}u)' = r^{N-1}|u|^{p-2}u & \text{em } r > 0 \\ u'(0) = 0, \; u(0) = 1. \end{cases}$$

Se ϕ é uma solução do problema dado, então ϕ é oscilatória, isto é, dado $r > 0$, existe um $\tau > r$ tal que $\phi(\tau) = 0$.

Demonstração:

Suponhamos por contradição, que ϕ não seja oscilatória, isto é, para algum $r_0 > 0$ ϕ não se anula em $[r_0, \infty)$. Defina

$$w(r) = r^{N-1}\left|\frac{\phi'(r)}{\phi(r)}\right|^{p-2}\frac{\phi'(r)}{\phi(r)} \quad r \in [r_0, +\infty).$$

Derivando w em relação a r temos

$$w'(r) = -r^{N-1} - (p-1)\frac{\phi'(r)}{\phi(r)}w(r)$$

e note que

$$\frac{\phi'(r)}{\phi(r)}w(r) = r^{N-1}\left|\frac{\phi'(r)}{\phi(r)}\right|^p = \frac{|w(r)|^{p'}}{r^{p'(N-1)}}r^{N-1} = \frac{|w(r)|^{p'}}{r^{(p'-1)(N-1)}}.$$

Logo w satisfaz

$$w'(r) + (p-1)\frac{|w(r)|^{p'}}{r^{p'(N-1)}}r^{N-1} + r^{N-1} = 0 \;\; r \in [r_0, +\infty). \tag{A.15}$$

Integrando (A.15) de r_0 a $t > r_0$

$$w(t) + (p-1)\int_{r_0}^{t} \frac{|w(r)|^{p'}}{r^{(p'-1)(N-1)}}dr = -\frac{t^N}{N} + \frac{{r_0}^N}{N} + w(r_0). \tag{A.16}$$

Em particular, observamos que

$$|w(t)| = -w(t) \geq Ct^N \tag{A.17}$$

para $C > 0$ e t grande.

Defina

$$k(t) = \int_{r_0}^{t} \frac{|w(r)|^{p'}}{r^{(p'-1)(N-1)}}dr. \tag{A.18}$$

De (A.17) e (A.18) segue que

$$k(t) \geq \tilde{c}t^{p'-N} \tag{A.19}$$

para t grande e algum $\tilde{c} > 0$.

Por outro lado de (A.16) obtemos

$$|w(t)| = -w(t) = \frac{t^N}{N} - \frac{{r_0}^N}{N} - w(r_0) + (p-1)k(t)$$

assim,

$$(p-1)k(t) \leq |w(t)|$$

e como $k'(t) = \frac{|w(r)|^{p'}}{r^{(p'-1)(N-1)}}$,

$$(p-1)^{p'}k(t) \leq t^{(p'-1)(N-1)}k'(t), \quad \text{para } t \text{ grande.}$$

ou ainda

$$\frac{1}{t^{(p'-1)(N-1)}} \leq \frac{k'(t)}{(p-1^{p'}k(t))}.$$

Integrando a última desigualdade de t a $s > t$ temos

$$B\left(\frac{1}{k(t)^{p'-1}} - \frac{1}{k(s)^{p'-1}}\right) \geq \frac{1}{t^{(p'-1)(N-1)-1}} - \frac{1}{s^{(p'-1)(N-1)-1}} \tag{A.20}$$

para algum $B > 0$ e $t,\ s$ grandes.

Fazendo $s \to +\infty$ em (A.20) e notando que $k(s) \to +\infty$, concluímos que

$$k(t) \leq A^{1/(p'-1)t^{N-1-1/(p'-1).}}$$

o que contraria (A.19).

■

Apêndice B

Autovalores do p-Laplaciano

Usaremos o método de *shooting* estudado no Capítulo 1 para determinar os autovalores do p-laplaciano em dimensão 1. Para tanto consideremos o seguinte problema de autovalor para o p-laplaciano.

$$(P)\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda|u|^{p-2}u \quad \text{em } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

Os autovalores de (P), são os números reais λ, tais que (P) tem solução não nula e a solução associada são chamadas autofunções de (P). Por um cálculo simples, observamos que (P) só terá solução não-trivial quando $\lambda > 0$. De fato, Seja u uma solução não trivial de (P), então multiplicando a equação em (P) por u

$$-(|u'|^{p-2}u')'u = \lambda|u|^{p-2}uu$$

$$-(|u'|^{p-2}u')'u = \lambda|u|^{p}$$

Integrando por partes de 0 a 1

$$-\int_0^1 (|u'|^{p-2}u')'u = \int_0^1 |u'|^p.$$

Por outro lado

$$-\int_0^1 (|u'|^{p-2}u')'u = \lambda\int_0^1 |u|^p$$

Implicando em

$$\lambda = \frac{\int_0^1 |u'|^p}{\int_0^1 |u|^p} > 0$$

mostrando que os autovalores de (P) são positivos para soluções não-triviais. Agora partiremos para os cálculos que nos permitirão definir os autovalores de (P) e respectivamente suas autofunções (soluções) associadas.

Como utilizaremos o método de *shooting*, considere a função do Capítulo 1 dada por

$$f(s) = \lambda |s|^{p-2} s, \tag{B.1}$$

logo

$$F(s) = \int_0^s f(t)dt = \frac{\lambda |s|^p}{p}.$$

Considerando em $(P)_1$ a função $(B.3)$, notamos que f satisfaz a propriedades (f_1) e (f_2) dadas no Capítulo 1, assim concluímos que as únicas soluções do problema

$$(P) \begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda |u|^{p-2} u \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = \alpha \neq 0 \end{cases}$$

são $\{-u, u\}$, onde $u(2k\theta(\alpha,\lambda)) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$. (cf. proposição 1.2) Além disso tínhamos que

$$\theta(\alpha,\lambda) = \int_0^{\ell_0} (\alpha^p - \lambda p^* F(s))^{-1/p} ds$$

e neste caso, para $s \in (0, \ell_0)$

$$\theta(\alpha,\lambda) = \int_0^{\ell_0} \frac{ds}{(\alpha^p - \lambda \frac{p^*}{p} s^p)^{1/p}}$$

e

$$\ell_0(\alpha,\lambda) = \alpha \left(\frac{p-1}{\lambda}\right)^{1/p},$$

já que $\ell_0(\alpha,\lambda)$ é o primeiro zero positivo da função R dada em (2.1).

Observando que $\frac{p^*}{p} = \frac{1}{p-1}$, por (2.12) temos

$$\begin{aligned} \theta(\alpha,\lambda) &= \int_0^1 \frac{\ell_0 ds}{(\alpha^p - \frac{\lambda}{p-1}(s\ell_0))^{1/p}} \\ &= \int_0^1 \frac{\alpha \left(\frac{p-1}{\lambda}\right)^{1/p} ds}{(\alpha^p - \frac{\lambda}{p-1}(\alpha^p s^p \left(\frac{p-1}{\lambda}\right)^p)^{1/p}} \\ &= \alpha \left(\frac{p-1}{\lambda}\right)^{1/p} \int_0^1 \frac{ds}{(\alpha^p - \alpha^p s^p)^{1/p}}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\theta(\alpha,\lambda) = \left(\frac{p-1}{\lambda}\right)^{1/p} \int_0^1 \frac{ds}{(1-s^p)^{1/p}}.$$

Como queremos soluções que satisfaçam $u(0) = u(1) = 0$, pelo Teorema 2.1, existe $\alpha_\lambda \in (0,+\infty)$ tal que

$$\theta(\alpha_\lambda,\lambda) = \frac{1}{2k},$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$. Dessa forma

$$\left(\frac{p-1}{\lambda}\right)^{1/p} \int_0^1 \frac{ds}{(1-s^p)^{1/p}} = \frac{1}{2k}.$$

Assim os autovalores para os quais (P) tem solução são da forma

$$\lambda = \left(2k(p-1)^{1/p} \int_0^1 \frac{ds}{(1-s^p)^{1/p}}\right)^{1/p}.$$

Contudo, quando $p = 2$, fazendo na integral acima a substituição trigonométrica

$$s = cos(\theta), \qquad 0 < \theta < \pi/2$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/2}^0 \frac{-sen(\theta)}{\sqrt{1-cos(\theta)}} d\theta &= \int_0^{\pi/2} \frac{sen(\theta)}{\sqrt{sen^2(\theta)}} d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} d\theta \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

o que nos motiva a definir, quando $p > 2$,

$$\frac{\pi_p}{2} := (p-1)^{1/p} \int_0^1 \frac{ds}{(1-s^p)^{1/p}}.$$

Nestes termos

$$\lambda^{1/p} = k\pi_p \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\lambda_k = (k\pi_p)^p = k^p(p-1)\left[2\int_0^1 \frac{ds}{(1-s^p)^{1/p}}\right]^p \tag{B.2}$$

denota o k-ésimo autovalor do p-laplaciano. Fazendo um paralelo às soluções do problema de autovalor do laplaciano definimos as autofunções do p-laplaciano como

$$u_k(t) = Csen_p(k\pi_p t),$$

onde $C \neq 0$ é uma constante real arbitrária.

Bibliografia

[1] Addou, I., Benmezaï, A., *Boundary value problems for the one dimensional p-Laplacian with even super-linear nonlinearity*, Electron. J. DiIerential Equations 9, 1–29, (1999).

[2] Ambrosetti, A., Bézis, H. e Cerami, G., *Combined efects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. 122 (2), 519–543, (1994).

[3] Bartle, R.G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley, 1995.

[4] Brezis, H., *Fonctionnellye Analyse*, Dunod, Paris, 1999.

[5] Castro, A. & Shivaji, R., *Nonnegative solutions for a class of nonpositone problems*, Proc. Roy. Soc. Edin., 108(A), 291-302, (1988).

[6] Castro, A., Maya, C., Shivaji, R., *Nonlinear eigenvalue problems with semipositone structure*

[7] Clément, P., Manásevich, R., Mitidieri, E., *Positive solutions for a quasilinear system via blow up*, Comm. in P.D.E., 18, 2071-2106, (1993)

[8] Deimling, K., *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1980.

[9] Del Pino, M., Manásevich, R., *Multiple solutions for the p-Laplacian under global nonresonance*, Proc. Amer. Math. Soc. 112, No. 1 (1991).

[10] Del Pino, M., Manásevich, R., *Global bifurcation from the eigenvalues of the p-Laplacian*, J. of Diff. Eqns., 226-251, 92(1991).

[11] Diaz, J., Thelin, F. de *On a nonlinear parabolic arising in some models related to turbulent flows*, SIAM J. Math. Anal. 25(4) (1994).

[12] Gadam, S. e Iaia, J., *Exact multiplicity of positive solutions in semipositone problems with concave-convexe type nonlinearities*, E. J. Qual, Theory Differential Equations, 4, 1-9, (2001) Comm. Math. Phys., 68, 209-243 (1979)

[13] García-Huidobro, M., Manásevich, R., Ubilla, P., *Existence of positive solutions for some dirichlet problems with an asymptotically homogeneous Operator* Electronic. J. DiIerential Equations, 10, 1-22 (1995).

[14] García-Huidobro, M., Ubilla, P., *Multiplicity of solutions for a class of nonlinear second order equations*, Nonlinear Anal. TMA 28, (9) 1509–1520, (1997).

[15] García-Huidobro, M., Manásevich, R., and Zanolin, F., *Strongly nonlinear second-order ODE's with unilateral conditions, J. Differential and Integral Equations*, 6(1993), 1057-1078.

[16] García-Huidobro, M., Manásevich, R., and Zanolin, F., *A Fredholm-like result for strongly nonlinear second order ODE's, J. Differential Equations*, 114(1994), 132-167.

[17] García-Huidobro, M., Manásevich, R., and Zanolin, F., *On a pseudo Fučik spectrum for strongly nonlinear second order ODE's and an existence result*, J. Comput. Appl. Math., 52(1994) 219-239.

[18] Gidas, B., Spruck, J., *A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic Equations*, Comm. in P.D.E., 883-901, 6(1981).

[19] Guedda, M., Veron, L.,*Bifurcation phenomena associate to the p-Laplace operator*, Trans. Amer. Math. Soc. 419-431, 310(1998).

[20] Nikos, E., Mastoraskis, N. E., *On the Solution of p-Laplacian for non-newtonian fluid flow*,WSEAS, 238-245, 2009.

[21] Otani, M., *On certain second order ordinary differential equations associated with Sobolev-Poincaré-type equalities*, Nonlinear Anal. 1255-1270, 8(1984).

[22] Peletier, L.A. Van der Vorst, R.C.A.M., *Existence and non-existence of positive solutions on non-linear elliptic systems and the biharmonic equation*, J. Differential and Integral Equations, 5(1992), 747-767.

[23] Resnick, S. I., *Extreme values, regular variations and point processes*, Applied Probability Series, Springer-Verlag, 1987.

[24] Sánchez, J. & Ubilla, P., *One-dimensional elliptic equation with concave and convex nonlinearities,*, Electon. J. Differential Equations., 50, 1-9 (2000).

[25] Sánchez, J. & Ubilla, P., *Uniqueness results for the one-dimensional m-Laplacian considering superlinear nonlinearities*, Nonlinear Analysis, 54, 927 – 938 (2003).

[26] Seneta, E., *Regularly varying functions*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 508(1976).

[27] Ubilla, P., *Multiplicity results for the 1-dimensional generalized p- Laplacian*, Journal of Mathematical Analysis and Apllications, 190, 611-623 (1995).