UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

UMA CONTRIBUIÇÃO AO ENSINO DE NÚMEROS IRRACIONAIS E DE INCOMENSURABILIDADE PARA O ENSINO MÉDIO

Ana Cláudia Guedes dos Santos

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Campina Grande - PB
Agosto/2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

S237c Santos, Ana Cláudia Guedes .

Uma contribuição ao ensino de números irracionais e de incomensurabilidade para o ensino médio / Ana Cláudia Guedes dos Santos.-Campina Grande, 2013.

147 f.:il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2013.

"Orientação: Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho."

Referências.

1. Segmentos Comensuráveis e Incomensuráveis. 2. Números Racionais e Irracionais. 3. Expressões Decimais. I. Morais Filho, Daniel Cordeiro de. II. Título.

CDU 511.14(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

UMA CONTRIBUIÇÃO AO ENSINO DE NÚMEROS IRRACIONAIS E DE INCOMENSURABILIDADE PARA O ENSINO MÉDIO

por

ANA CLÁUDIA GUEDES DOS SANTOS †

Trabalho Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Bolsista CAPES

UMA CONTRIBUIÇÃO AO ENSINO DE NÚMEROS IRRACIONAIS E DE INCOMENSURABILIDADE PARA O ENSINO MÉDIO

por

Ana Cláudia Guedes dos Santos

Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado por:

Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira - UFRN

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes - UFCG

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Agosto/2013

Dedicatória

A minha mãe, ao meu pai, a minha sogra, a minha filha, ao meu marido, aos meus irmãos e cunhadas, por serem a base da minha vida, pelo apoio, incentivo e paciência diante das minhas angústias e temores , dedico-lhes esta minha grande conquista.

Agradecimentos

A Deus por tornar possível a realização desse grande sonho de me tornar mestre.

Agradeço a minha sogra Geralda Lima e minha mãe Maria do Socorro, que todos os sábados se dedicavam a cuidar de minha filha Isabela, para que eu pudesse participar das aulas presenciais;

Ao meu orientador Daniel Cordeiro, pela paciência, ensinamentos e estímulo;

Ao meu marido Gleyson, pela paciência, compreensão e incentivo;

Aos meus colegas, pelo incetivo, ajuda e pelos momentos de descontração;

Agradeço à Escola Normal Estadual Pe Emídio Viana Correia pelo apoio e pela liberação parcial de minha carga horária semanal para que eu pudesse me dedicar ao PROFMAT.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa .

Resumo

Este trabalho tem como proposta pedagógica apresentar aos alunos o conceito de segmentos comensuráveis e de segmentos incomensuráveis, mostrando a importância desses conceitos para o estudo dos números racionais e irracionais. Veremos um processo de verificação da comensurabilidade de dois segmentos, doravante P.V.C.D.S, que é um processo geométrico de verificação de comensurabilidade de dois segmentos. A partir do P.V.C.D.S, apresentamos a demonstração clássica de que $\sqrt{2}$ é irracional, com uma abordagem geométrica, mostrando que o segmento do lado de um quadrado de medida 1 e o segmento de sua diagonal são incomensuráveis.

Ainda apresentamos um estudo sobre expressões decimais, no qual será apresentado um teorema que nos permite verificar se uma fração irredutível possui representação decimal finita ou infinita e periódica. Também apresentamos outro teorema que nos permite transformar expressões decimais finitas e infinitas e periódicas na sua forma de fração.

Por fim, apresentaremos algumas sugestões de atividades, que englobam todo conteúdo do presente TCC. Essas atividades foram aplicadas a uma turma de 1° ano do Ensino Médio de uma escola pública, e as respostas dos alunos estão anexadas ao trabalho.

Palavras Chaves: Segmentos comensuráveis e incomensuráveis. Números racionais e irracionais. Expressões decimais.

Abstract

This work have pedagogical proposed to introduce the concept of commensurable segments and incommensurable segments, showing the importance of these concepts for the study of rational and irrational numbers. We will stabelish a verification process to detect the mensurability of two segments, which is a geometric process. We present the classic demonstration that root of 2 is irrational with a geometric approach, showing that the segment of the side of a square measuring its diagonal are immeasurable.

We still will present a study on decimal expressions, and prove a theorem that allows to check that an irreducible fraction has decimal representation finite or infinite and periodic. We also present another theorem that allows us to turn decimal expressions finite or infinite and periodic on its fraction form.

Finally we present some suggestions for activities that include all content of the TCC. These activities have been applied to a class of 1st year of high school at a public school, and the students' answers are attached to the work.

Keywords: Commensurable segments and incommensurable segments. Rational numbers and irrational numbers. Decimal expressions.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Abreviaturas e Siglas

ABNT .... Associação Brasileira de Normas Técnicas
SBM .... Sociedade Brasileira de Matemática
UAMAT .... Unidade Acadêmica de Matemática
PNLEM .... Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$ .... Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$ .... Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$ .... Conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$ .... Conjunto dos números reais
$\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ .... Conjunto dos números irracionais

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O ensino de Matemática é visto como grande desafio por muitos professores. Muitos de nossos alunos ainda têm uma visão de estudar apenas para passar de ano e não para aprender. Eles não têm a curiosidade de verificarem se é possível reconstruir ou conferir algum conceito matemático já existente, ainda vivem a Matemática das regras.

Mas essa realidade talvez se dê pelo fato de alguns professores de Matemática utilizarem somente o livro didático como instrumento principal que orienta o seu trabalho durante a ministração de aulas, por desconhecerem ou sentirem-se inseguros de apresentarem alguns novos conceitos ou por não terem tempo de recorrer a novas pesquisas que melhorem e estimulem o sistema de ensino aprendizagem de Matemática para seus alunos. Muitos de nossos professores seguem apenas a sequência dos conteúdos apresentados pelo livro e as atividades de aprendizagem.

Diante dessa realidade, nesta proposta, tratamos dos conceitos de segmentos comensuráveis e de segmentos incomensuráveis, conceitos esses bastante ligados ao estudo de números racionais e ao estudo de números irracionais. Faremos uma abordagem geométrica, utilizando apenas régua e compasso, visando contribuir com a prática pedagógica do estudo dos conceitos de números racionais e irracionais utilizada hoje.

No nosso trabalho, também abordamos o estudo de expressões decimais, focando no estudo das expressões decimais finitas e das expressões decimais infinitas e periódicas, apresentando como transformar essas expressões decimais em um número racional. Também apresentamos uma forma de visualizar se uma fração irredutível possui representação decimal finita ou infinita e periódica, assuntos que passam desapercebidos em vários livros didáticos.

Cabe ressaltar a importância desta pesquisa que, por apresentar conceitos pouco presentes em sala de aula, pode, através dos resultados aqui apresentados, auxiliar na prática pedagógica que valorize o estudo dos segmentos comensuráveis e dos segmentos incomensuráveis, dando base e enriquecendo teoricamente o estudo dos números racionais e irracionais.

Desenvolvemos esta pesquisa voltada para a utilização dos segmentos comensuráveis e dos segmentos incomensuráveis para o estudo dos números racionais e dos números irracionais por alunos do 1º ano do Ensino Médio, durante o estudo do assunto *conjuntos numéricos.*

1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo geral:

- Contribuir para uma prática pedagógica em sala de aula, que possibilite aos alunos perceberem a importância dos segmentos comensuráveis e dos segmentos incomensuráveis e de suas aplicações nos conteúdos de números racionais e números irracionais;
- Estimular o estudo de expressões decimais finitas e expressões decimais infinitas e periódicas, no que se refere a transformação em sua forma de fração geratriz, para que se transforme em algo mais presente no Ensino Médio.

Como objetivos específicos, temos:

- Compreender o conceito de segmentos comensuráveis;
- Compreender o conceito de segmentos incomensuráveis;
- Compreender o conceito de números racionais, a partir do conceito de segmentos comensuráveis;
- Compreender o conceito de números irracionais, a partir do conceito de segmentos incomensuráveis;
- Compreender como é feita a representação decimal finita e a representação decimal infinita e periódica, de um número na forma fração;
- Apresentar uma fórmula para transformar expressões decimais finitas e infinitas e periódicas em números racionais;
- Estimular o uso de régua e compasso na sala de aula;
- Propor atividades que estimulem alunos e professores a usarem os conceitos de segmentos comensuráveis e de segmentos incomensuráveis para verificar se um número é racional ou irracional;
- Propor atividades que estimulem alunos a transformar expressões decimais finitas e infinitas e periódicas em números racionais;

1.2 Organização

Este TCC está organizado da seguinte forma: Além desta Introdução (Capítulo 1), o Capítulo 2 apresenta os conceitos de segmentos comensuráveis e de segmentos incomensuráveis, apresentando a ligação do conceito de números racionais ao conceito de segmentos comensuráveis, e a ligação do conceito de números irracionais ao conceito de segmentos incomensuráveis. O Capítulo 3 apresenta uma análise de dois livros textos do Ensino Médio, no tocante a números racionais, números irracionais e comensurabilidade. No Capítulo 4 apresentamos um estudo sobre expressão decimal finita e expressão decimal infinita e periódica, no qual exibiremos um teorema que nos possibilita verificar se uma fração possui representação decimal finita ou representação decimal infinita e periódica, sem realizar a divisão do numerador pelo denominador. Ainda no Capítulo 4, é apresentado um estudo sobre dízimas periódicas simples e compostas, no qual também apresentaremos um teorema que nos possibilita encontrar a fração geratriz dessas dízimas. No Capítulo 5 são apresentadas algumas sugestões de sequências didáticas, que contemplam questões referentes a todos os conteúdos do TCC e, ao final do capítulo, apresentamos as respostas das sequências didáticas. No Capítulo 6, apresentamos um relatório das sequências didáticas propostas, que foram aplicadas a uma turma de 1 ° ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública de ensino. Para terminar, temos as Referências Bibliográficas e os Apêndices A, B e C.

Capítulo 2

Segmentos comensuráveis e segmentos incomensuráveis

Neste capítulo, focaremos no estudo dos conceitos de segmentos comensuráveis e de segmentos incomensuráveis.

Poucos autores de livros de Matemática para o Ensino Médio abordam em suas coleções os conceitos de segmentos comensuráveis e de segmentos incomensuráveis. Conceitos esses bastante ligados ao estudo dos números racionais e dos números irracionais.

A partir dos conceitos de segmentos comensuráveis e de segmentos incomensuráveis, vamos apresentar o conceito de números racionais e o conceito de números irracionais, com uma abordagem geométrica.

Também apresentamos um breve histórico sobre o surgimento dos incomensuráveis, ou seja, o surgimento dos números irracionais.

2.1 Segmentos comensuráveis e números racionais

Definição 2.1 *Dados dois pontos distintos, A e B , numa reta horizontal, chamamos de **segmento de reta**, a parte da reta compreendida entre os pontos A e B, os quais chamamos de extremos. Denotamos um segmento de reta por AB e denotamos a medida do segmento de reta AB por $\overline{AB}$.*

Exemplos 2.1.1

1. Segmento de reta CD.

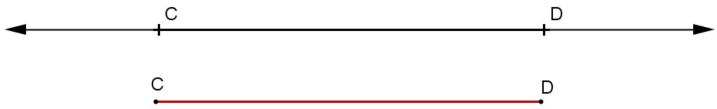


Figura 2.1: Segmento CD

2. Segmento de reta EF.

Figura 2.2: Segmento EF

Chamamos **segmento unitário**, ao segmento de reta de medida padrão u , que é utilizado para medir um segmento de reta AB qualquer. Por definição, o segmento u, possui medida igual a 1.

A medida do segmento unitário u pode diferir de pessoa para pessoa, dependendo de qual segmento escolheu como medida unitária, mas uma vez escolhido o segmento unitário, sua medida deve ser mantida.

Definição 2.2 *Dados dois segmentos AB e CD, dizemos que o segmento CD cabe um número inteiro de vezes no segmento AB se,* $\overline{AB} = n\overline{CD}$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.1.2: Dado um segmento qualquer AB. Utilizando o segmento unitário u, o qual chamaremos de CD, vamos verificar se o segmento unitário $u = CD$ cabe um número inteiro de vezes no segmento AB. Veja na Figura 2.3, a representação geométrica dos segmentos AB e $CD = u$.

Figura 2.3: Segmentos AB e CD

Com o auxílio de um compasso, com abertura medindo $\overline{CD}$, fixamos a ponta seca do compasso no ponto A e marcamos sobre o segmento AB segmentos de medida $\overline{CD}$, o número de vezes que ele couber por inteiro neste segmento. Vejamos a Figura 2.4:

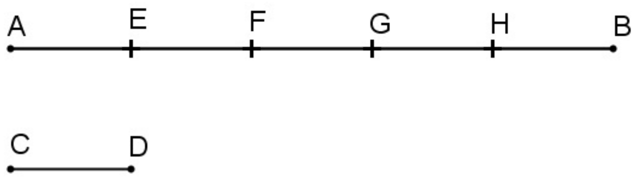


Figura 2.4: Medida do segmento AB

Observando a Figura 2.4, podemos ver que:
$\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HB} = \overline{CD} = \overline{u}$, logo $\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GH} + \overline{HB}$ assim, $\overline{AB} = \overline{u} + \overline{u} + \overline{u} + \overline{u} + \overline{u}$ e portanto $\overline{AB} = 5\overline{u}$

Veja que os 4 pontos interiores E, F, G e H dividem o segmento AB em 5 segmentos justapostos e congruentes, logo, a medida de AB é igual a soma das medidas dos 5 segmentos. Como todos os 5 segmentos medem 1, então podemos afirmar que 1 cabe 5 vezes no segmento AB, e portanto, a medida do segmento AB é igual 5.

Logo podemos concluir que os segmentos AB e CD possuem um segmento de medida comum aos dois segmentos, que é o segmento de medida unitária u, assim, como $\overline{AB} = \overline{5u}$ e $\overline{CD} = \overline{u}$, então, $\overline{AB} = 5\overline{CD}$.

Exemplo 2.1.3: Em alguns casos, pode ocorrer que um segmento de medida $CD = u$, não caiba um número inteiro n de vezes em AB . Vejamos, a seguir, um exemplo desse caso.

Observe a Figura 2.5 a representação das medidas dos segmentos AB e $CD = u$.

Figura 2.5: Segmentos AB e CD

Novamente, vamos verificar se o segmento $CD = u$, cabe um número inteiro de vezes no segmento AB, para isso, vamos proceder da mesma maneira que foi feita com o caso anterior. Veja a Figura 2.6.

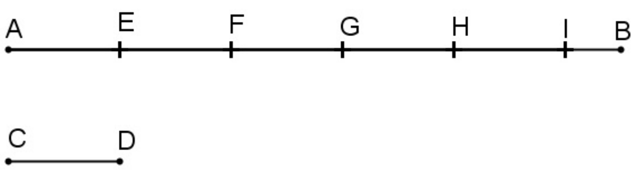


Figura 2.6: Medida do segmento AB

Podemos ver na Figura 2.6 , que o segmento unitário $CD = u$ não coube um número inteiro de vezes no segmento AB, pois sobrou o segmento IB. Para nosso propósito, vamos verificar se o segmento IB cabe um número inteiro de vezes no segmento $CD = u$.

Para isso, vamos proceder de forma análoga ao que foi feito com os segmentos AB e CD, agora, utilizando os segmentos IB e CD. Observe os segmentos CD e IB na Figura 2.7:

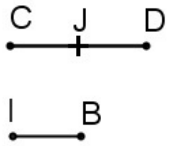


Figura 2.7: Segmentos IB e CD

Veja que: $\overline{CD} = \overline{CJ} + \overline{JD}$, como $\overline{CJ} = \overline{JD} = \overline{IB}$, logo $\overline{CD} = 2\overline{IB}$. Assim

$\overline{AB} = \overline{AI} + \overline{IB} = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GH} + \overline{HI} + \overline{IB}$

$\overline{AB} = \overline{u} + \overline{u} + \overline{u} + \overline{u} + \overline{u} + \overline{IB}$

$\overline{AB} = 5\overline{u} + \overline{IB} = 5.2(\overline{IB}) + \overline{IB} = 11(\overline{IB})$

Logo podemos concluir que os segmentos AB e CD possuem um segmento de medida comum aos dois segmentos, que é o segmento de medida $\overline{IB}$. Como $\overline{u} = 2\overline{IB}$ então $\overline{IB} = \dfrac{\overline{u}}{2} = \dfrac{1}{2}$ assim:

$$\overline{AB} = 11\overline{IB} = \frac{11}{2}$$

nos remetendo a ideia de fração.

Exemplo 2.1.4: Agora, veremos um caso em que a medida do segmento AB é menor do que a medida do segmento unitário u. Observe, na Figura 2.8, a representação das medidas desses segmentos.

Figura 2.8: Segmentos AB e u

Vamos verificar se o segmento AB, cabe um número inteiro de vezes no segmento unitário $CD = u$. Com o auxílio de um campasso, com abertura medindo $\overline{AB}$, fixe a ponta seca do compasso no ponto C, e marque sobre o segmento CD segmentos de medida $\overline{AB}$, o número de vezes que ele couber por inteiro no segmento CD.

Figura 2.9: Segmentos AB e u

Veja na Figura 2.9 que: $\overline{AB} = \overline{CE} = \overline{EF} = \overline{FG}$. Assim $\overline{CD} = 3\overline{AB} + \overline{GD}$, logo o segmento AB não coube um número inteiro de vezes no segmento CD. Para nosso propósito, vamos verificar se o segmento GD, que sobrou no segmento CD, cabe um número inteiro de vezes no segmento AB.

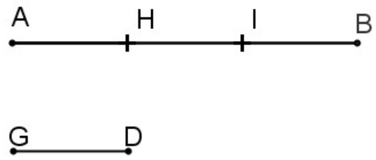


Figura 2.10: Segmentos AB e GD

Veja na Figura 2.10 que: $\overline{AH} = \overline{HI} = \overline{IB} = \overline{GD}$. Assim, $\overline{AB} = 3\overline{GD}$, e portanto $\overline{CD} = 3(3\overline{GD}) + \overline{GD} = 10\overline{GD}$, logo concluímos que os segmentos AB e CD possuem um terceiro segmento de medida comum, o segmento GD, que coube 3 vezes em AB e 10 vezes em $CD = u$.

Acabamos de ver que $\overline{CD} = 10\overline{GD}$, logo $\overline{GD} = \frac{\overline{CD}}{10}$. Como $\overline{CD} = u$, então $\overline{GD} = \frac{\overline{u}}{10} = \frac{1}{10}$. Vimos ainda que $\overline{AB} = 3\overline{GD}$, assim:

$$\overline{AB} = 3.\frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

O que vimos antes suscita a seguinte definição:

Definição 2.3 *Dizemos que os segmentos AB e CD são* ***comensuráveis*** *se existir um terceiro segmento, que cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD.*

Exemplo 2.1.5: Vamos relembrar alguns exemplos anteriomente já vistos:

1. Vimos anteriormente, no Exemplo 2.1.2, que dado um segmento qualquer AB e o segmento unitário $CD = u$ (Fig.2.3), podíamos verificar se o segmento unitário cabia um número inteiro de vezes no segmento AB. Após a marcação de segmentos, com medidas congruentes ao da medida do segmento unitário ($\overline{CD} = \overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} =$

$\overline{HB} = \overline{u}$), no segmento AB, pudemos concluir que o segmento $CD = u$ coube um número inteiro de vezes no segmento AB (Fig.2.4), com $\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GH} + \overline{HB} = 5\overline{u}$.

Como o segmento AB e o segmento CD possui um segmento de medida comum $\overline{u}$, então os segmentos AB e CD são comensuráveis, pois existe um segmento de medida $\overline{u}$ cabe n de vezes no segmento AB e uma vez no segmento CD.

2. Também foi apresentado no Exemplo 2.1.3, uma situação em que o segmento de medida $\overline{CD} = \overline{u}$ não coube um número inteiro n de vezes no segmento AB (Fig.2.5) onde encontrou-se a medida do segmento: $\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GH} + \overline{HI} + \overline{IB} = 5\overline{CD} + \overline{IB} = 5\overline{u} + \overline{IB} = 5\overline{u} + \overline{k}$

   Vimos que, para verificar se o segmento $IB = k$ cabia um número inteiro de vezes no segmento AB, verificamos inicialmente se ele cabia um número inteiro de vezes no segmento u (Fig.2.6) e pudemos constatar que o segmento IB coube um número inteiro de vezes no segmento u com ($\overline{u} = 2\overline{k}$), logo, $\overline{AB} = 5\overline{u} + \overline{k} = 5.2\overline{k} + \overline{k} = 11\overline{k}$

   Podemos concluir que os segmentos AB e u possuem uma medida de segmento comum $k = IB$, assim AB e u são comensuráveis, pois existe um terceiro segmento $k = IB$, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento u.

   Como $\overline{AB} = 11\overline{k}$ e $\overline{u} = 2\overline{k} \Rightarrow \overline{k} = \dfrac{\overline{u}}{2}$, então $\overline{AB} = 11.\dfrac{\overline{u}}{2} = \dfrac{11}{2}$, logo, AB possui como medida de seu segmento um número racional.

3. No Exemplo 2.1.4, vimos um caso em que a medida do segmento AB é menor do que a medida do segmento unitário $u = CD$ (Fig.2.8) e, vimos que o segmento AB, não coube um número inteiro de vezes no segmento u (Fig.2.9), onde encontrou-se a medida do segmento: $\overline{CD} = 3\overline{AB} + \overline{GD}$

   Vimos que, para verificar se o segmento GD cabia um número inteiro de vezes no segmento u, verificamos inicialmente se ele cabia um número inteiro de vezes no segmento AB (Fig.2.10) e pudemos constatar que o segmento DG coube um número inteiro de vezes no segmento AB com ($\overline{AB} = 3\overline{GD}$), logo, $\overline{u} = 3\overline{AB} + \overline{GD} = 3.3\overline{GD} + \overline{GD} = 10\overline{GD}$

   Podemos concluir que os segmentos AB e u possuem uma medida de segmento comum $\overline{GD}$, assim AB e u são comensuráveis, pois existe um terceiro segmento GD, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento u.

   Como $\overline{AB} = 3\overline{GD}$ e $\overline{u} = 10\overline{GD} \Rightarrow \overline{GD} = \dfrac{\overline{u}}{10}$, então $\overline{AB} = 3.\dfrac{\overline{u}}{10} = \dfrac{3}{10}$, logo, AB possui como medida de seu segmento um número racional.

4. Dados dois segmentos AB e CD de medidas respectivas: $AB = \sqrt{2}$ e $CD = 2\sqrt{2}$.

Vejamos a Figura 2.11, que representa as medidas desses segmentos:

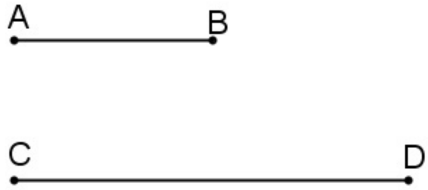


Figura 2.11: Medidas dos segmentos $AB = \sqrt{2}$ e $CD = 2\sqrt{2}$

Com o auxílio de um compasso com abertura AB, fixe a ponta seca do compasso no ponto C e marque sobre o segmento CD segmentos de medida AB o número inteiro de vezes que ele couber no segmento CD.

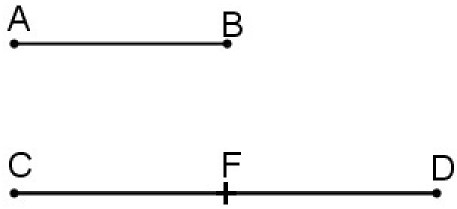


Figura 2.12: Medidas dos segmentos $AB = \sqrt{2}$ e $CD = 2\sqrt{2}$

Veja na Figura 2.12 que: $\overline{AB} = \overline{CF} = \overline{FD}$, portanto $\overline{CD} = 2\overline{AB}$, logo os segmentos AB e CD são comensuráveis, pois o segmento AB coube um número inteiro de vezes no segmento CD.

Observe que os segmentos $AB = \sqrt{2}$ e $CD = 2\sqrt{2}$, mesmo como medidas números irracionais eles são comensuráveis.

Pelos Exemplos 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 e 2.1.5 1, 2 e 3, podemos desconfiar que quando um segmento é comensurável com o segmento unitário, a medida do segmento é um numero racional.

Teorema 2.1 *A medida de um segmento é um número racional se, e somente se, ele é comensurável com o segmento unitário.*

Demonstração:

Inicialmente vamos mostrar que:

Se medida de um segmento é um número racional, então ele é comensurável com o segmento unitário.

HIPÓTESE: A medida de um segmento é um número racional.

TESE: O segmento é comensurável com o segmento unitário.

Seja AB um segmento de medida racional, logo $\overline{AB} = \dfrac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{N}$ e $q \neq 0$ e seja $CD = u$ o segmento unitário.

Com o auxílio de um par de esquadros e um compasso, divida o segmento u em q segmentos congruentes e justapostos, de medida igual ao segmento EF. Para isso, prossiga de acordo com o Lema A.6, que se encontra no Apêndice A.

Como $\overline{AB} = \frac{p}{q}$ e $\overline{u} = q\overline{EF}$, logo:

$$\overline{EF} = \frac{\overline{u}}{q}$$

assim temos que:

$$\overline{AB} = \frac{p\overline{EF}}{\overline{u}} = p\overline{EF}$$

Como o segmento EF coube um número inteiro p vezes no segmento AB e um número inteiro q vezes no segmento u, logo, os segmentos AB e u são comensuráveis.

Agora, vamos mostrar a recíproca ou seja, vamos mostrar que:

Se um segmento é comensurável com o segmento unitário, então sua medida é um número racional.

HIPÓTESE: O segmento é comensurável com o segmento unitário.

TESE: A medida do segmento é um número racional.

Suponha AB um segmento comensurável com o segmento unitário u , então existe um terceiro segmento, suponhamos CD que cabe um número inteiro p de vezes em AB e um número inteiro q de vezes em u. Assim $\overline{AB} = p\overline{CD}$ e $\overline{u} = q\overline{CD}$, donde:

$$\overline{CD} = \frac{\overline{u}}{q}$$

logo, temos que:

$$\overline{AB} = p\overline{CD} = p\frac{\overline{u}}{q} = \frac{p\overline{u}}{q}$$

portanto, AB é um segmento de medida racional.

□

Corolário 2.2 *Se um segmento não é comensurável com o segmento unitário, então sua medida é um número irracional.*

Demonstração: Segue diretamente do Teorema 3.1

Corolário 2.3 *A medida de um segmento é racional se, e somente se , o segmento é comensurável com algum segmento de medida racional.*

Demonstração:

Inicialmente vamos mostrar que:

Se medida de um segmento é um número racional, então o segmento é comensurável com algum segmento de medida racional.

HIPÓTESE: A medida de um segmento é um número racional.

TESE: O segmento é comensurável com algum segmento de medida racional.

Pelo Teorema 2.1, se a medida de um segmento é um número racional, então ele é comensurável com o segmento unitário, que por definição tem medida 1, que é um número racional.

Agora, vamos mostrar a recíproca ou seja, vamos mostrar que:

Se um segmento é comensurável com algum segmento de medida racional, então a medida de seu segmento é racional.

HIPÓTESE: o segmento é comensurável com algum segmento de medida racional.

TESE: a medida do segmento é racional.

Seja AB um segmento comensurável com o segmento CD de medida um número racional, logo: $\overline{CD} = \frac{m}{n}$ com $n,m \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$. Então existe um terceiro segmento, suponhamos EF, que cabe um número inteiro p de vezes no segmento AB e um número inteiro q de vezes no segmento CD.

Assim: $\overline{AB} = p\overline{EF}$ e $\overline{CD} = q\overline{EF}$. Veja que podemos escrever $\overline{EF} = \frac{\overline{CD}}{q}$.

Como $\overline{AB} = p\overline{EF}$ então $\overline{AB} = \frac{p}{q}\overline{CD}$, assim:

$$\overline{AB} = \frac{p}{q}.\frac{m}{n} = \frac{pm}{qn}$$

com $p,q,n,m \in \mathbb{N}$ e $nq \neq 0$. Portanto, AB é um segmento de medida racional.

$\square$

Definição 2.4 *Chamamos de múltiplo do segmento AB qualquer segmento com medida $n\overline{AB}$, para algum n natural.*

Corolário 2.4 *Se dois segmentos são comensuráveis, então os múltiplos desses segmentos também são comensuráveis.*

Demonstração:

HIPÓTESE: Dois segmentos são comensuráveis

TESE: Os múltiplos desses segmentos também são comensuráveis.

Sejam AB e CD segmentos comensuráveis, então existe um terceiro segmento, digamos EF, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD, logo, $\overline{AB} = n\overline{EF}$ e $\overline{CD} = m\overline{EF}$, com $m,n \in \mathbb{N}$.

Agora, tomando AB' e CD' múltiplos dos segmentos AB e CD respectivamente, temos: $\overline{AB}' = p\overline{AB}$ e $\overline{CD}' = q\overline{CD}$, para algum p e $q \in \mathbb{N}$

Como $\overline{AB} = n\overline{EF}$ e $\overline{CD} = m\overline{EF}$ então $\overline{AB}' = p\overline{AB} = pn\overline{EF}$ e $\overline{CD}' = q\overline{CD} = qn\overline{EF}$. Veja que o segmento EF cabe um número inteiro pn de vezes no segmento AB' e um número inteiro qm de vezes no segmento CD', assim os segmentos AB' e CD' são comensuráveis. Portanto, os múltiplos de segmentos comensuráveis também são comensuráveis.

$\square$

2.2 Segmentos incomensúraveis e números irracionais

Dois segmentos quaisquer são comensuráveis?

Isso era o que pensavam os matemáticos gregos que viviam na época de Euclides. Eles só admitiam como números os números naturais; olhavam para as frações $\frac{a}{b}$, não como números racionais, mas como uma razão entre dois números inteiros. Imaginavam números como medidas de segmentos.

Por muito tempo, se pensava que dois segmentos quaisquer eram sempre comensuráveis, ou seja, que sempre era possível encontrar um terceiro segmento, talvez muito pequeno, que caberia um número inteiro de vezes em um segmento e um número inteiro de vezes em outro segmento.

Por volta do século IV antes de Cristo, na cidade de Cronata, localizada no sul da Itália, havia uma seita filosófico-religiosa, os pitagóricos, que tinham como dogma de sua doutrina o lema "os números governam o mundo".

Foi a partir do principal Teorema dos pitagóricos, o famoso Teorema de Pitágoras, que descobriram que nem sempre dois segmentos são comensuráveis. Um dos pitagóricos verificou que o lado e a diagonal de um quadrado são incomensuráveis, ou seja, ele percebeu que não existe um terceiro segmento que possa ser tomado como unidade de medida para medir o lado e a diagonal de um quadrado. Acredita-se que essa descoberta tenha gerado uma enorme crise entre os próprios pitagóricos.

A crença de que os números poderiam medir tudo foi por "água abaixo",como também a definição pitagórica de proporção, que assumia como comensuráveis duas grandezas quaisquer. Essa definição de proporção ficou restrita apenas a grandezas comensuráveis, invalidando sua teoria geral de figuras semelhantes.

O texto acima foi baseado em informações encontradas em [2] e em [8].

Definição 2.5 *Dizemos que dois segmentos AB e CD são* ***incomensuráveis*** *se não for possível encontrar um terceiro segmento, que cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD.*

Exemplo 2.2.1: (Teorema) O segmento do lado e o segmento da diagonal de um quadrado qualquer são incomensuráveis.
Demonstração:

Vamos demonstrar, com uma abordagem geométrica, que o segmento que representa o lado do quadrado e o segmento que representa a diagonal do mesmo quadrado são incomensuráveis.

Seja $ABCD$ um quadrado:

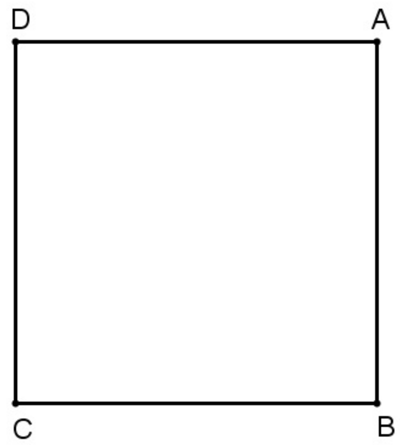


Figura 2.13: Quadrado $ABCD$

Trace a diagonal AC do quadrado $ABCD$.

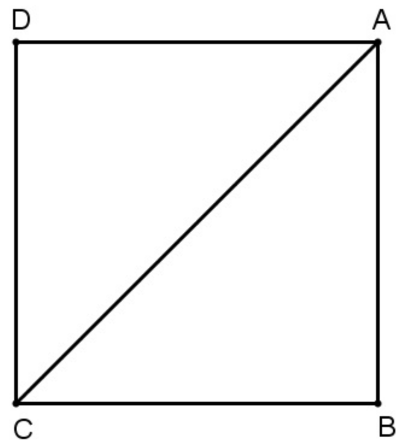


Figura 2.14: Diagonal e lado do quadrado $ABCD$

Suponha que exista um segmento f, que cabe um número inteiro n de vezes no lado AB do quadrado $ABCD$ e, também, um número inteiro m de vezes na diagonal AC. Assim, os segmentos $\overline{AB} = n\overline{f}$ e $\overline{AC} = m\overline{f}$ são comensuráveis.

Com o auxílio de um compasso, fixe a ponta seca do compasso no ponto C e abra-o até coincidir com o ponto D;

Trace um arco a partir do ponto D até coincidir com o ponto B. Veja Figura 2.15:

Marque o ponto B_1 na intersecção da diagonal AC com o arco BD, logo, $\overline{CB_1} = \overline{AB}$, pois $\overline{CB_1} = \overline{CD} = \overline{AB}$. Veja Figura 2.16.

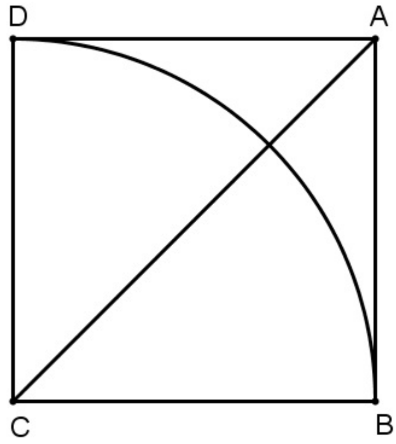


Figura 2.15: Arco BD

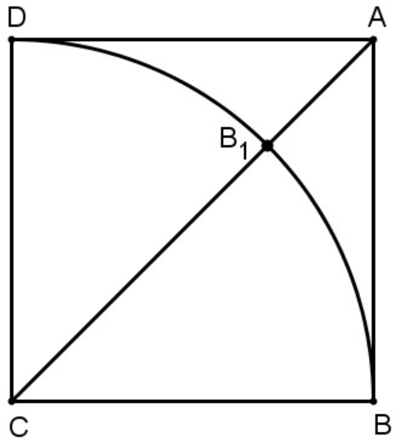


Figura 2.16: Segmento CB_1

Baixe um segmento B_1C_1 perpendicular ao lado AC por B_1 e encontrando AB no ponto C_1. Veja Figura 2.17.

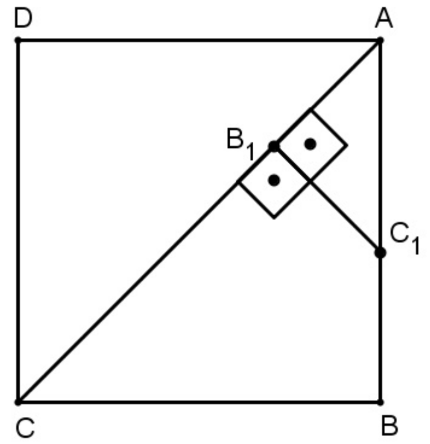


Figura 2.17: Segmentos AB_1, B_1C_1 e C_1B

Trace o segmento BB_1. Vamos mostrar que o triângulo C_1B_1B é isósceles, como $\overline{B_1C_1} = \overline{C_1B}$.

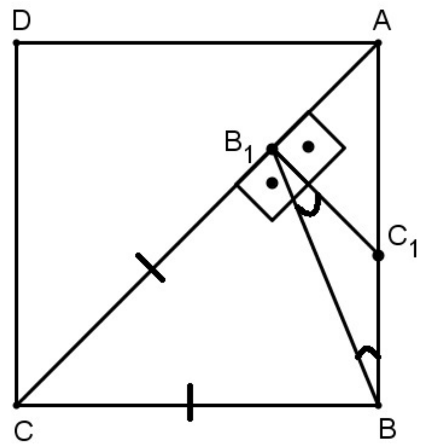


Figura 2.18: Segmentos AB_1, B_1C_1 e C_1B

Inicialmente, observe o triângulo BCB_1. Como $CB = CB_1$, então, o triângulo BCB_1 é isosceles, logo, $C\hat{B}_1B = C\hat{B}B_1$.

Como C_1B_1 é perpendicular a AC, então, $C\hat{B}_1C_1 = 90° = C\hat{B}A$. Veja que $C\hat{B}_1B + B\hat{B}_1C_1 = C\hat{B}B_1 + B_1\hat{B}C_1$, mas vimos que $C\hat{B}_1B = C\hat{B}B_1$, logo $B\hat{B}_1C_1 = B_1\hat{B}C_1$,assim o triângulo C_1B_1B é isósceles e, portanto:

$$\overline{B_1C_1} = \overline{C_1B} \tag{2.1}$$

Agora, vamos mostrar que:

$$\overline{AB_1} = \overline{B_1C_1} \tag{2.2}$$

Sabemos que as diagonais de um quadrado se intersectam ao meio no ponto E. Veja Figura 2.19:

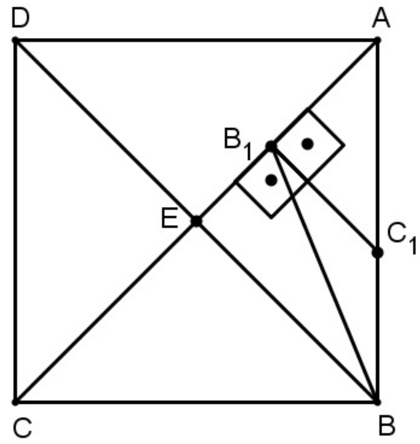


Figura 2.19: Intersecção das diagonais AC e BD

Como C_1B_1 é perpendicular a AC, então $A\hat{B_1}C_1 = 90°$ e, como AC é uma diagonal de um quadrado, então $B_1\hat{A}C_1 = 45°$, logo, $A\hat{C_1}B_1 = 45°$ e, portanto o triângulo AB_1C_1 é isósceles, assim: $\overline{B_1C_1} = \overline{B_1A}$ e $\overline{AE} = \overline{BE} = \overline{CE} = \overline{DE}$. Portanto, $\overline{AB_1} = \overline{B_1C_1} = \overline{C_1B}$, pelo que fizemos antes.

Agora, observe por (2.2) que: $\overline{AC_1} = \overline{AB} - \overline{BC_1} = \overline{AB} - \overline{AB_1} = \overline{AB} - (\overline{AC} - \overline{CB_1}) = \overline{AB} - \overline{AC} + \overline{CB_1} = \overline{AB} + \overline{CB_1} - \overline{AC} = 2\overline{AB} - \overline{AC}$, como AB e AC são comensuráveis por hipótese, então o segmento f cabe um número inteiro de vezes em $\overline{AC_1} = 2AB - AC$, logo, AC_1 e AB são comensuráveis.

Veja também por (2.1) que: $\overline{B_1C_1} = \overline{AB} - \overline{AC_1}$, como AC_1 e AB são comensuráveis, então o segmento f cabe um número inteiro de vezes em $\overline{B_1C_1} = \overline{AB} - \overline{AC_1}$, logo B_1C_1 e AB também são comensuráveis.

Portanto, como o segmento f coube um número inteiro vezes em AC_1, e um número inteiro de vezes em B_1C_1, então AC_1 e B_1C_1 são comensuráveis.

Mas, como AC_1 e B_1C_1 são diagonal e lado do quadrado ambas medidas são comprimentos menores do que os comprimentos da diagonal e do lado do quadrado original, se repetirmos esse processo n vezes, podemos obter um quadrado com lado C_nB_n e diagonal AC_n menores do que f, o que é um absurdo. Logo, não existe um segmento f, tal que o lado AB do quadrado $ABCD$ e a diagonal AC sejam comensuráveis. $\square$

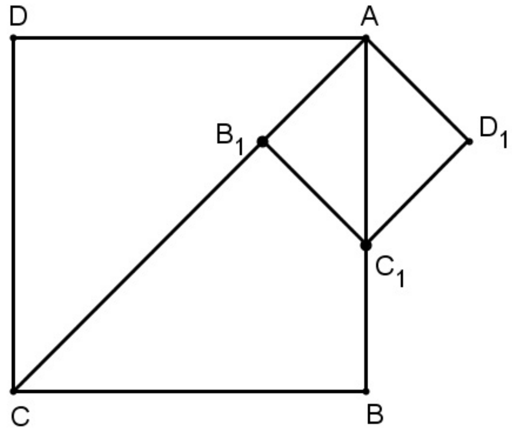


Figura 2.20: Quadrado $AB_1C_1D_1$

Supondo que o quadrado possuia medida de lado igual a 1. Por Pitágoras, a diagonal de um quadrado de lado 1 tem medida $\sqrt{2}$, logo, o segmento do lado de medida 1 e o segmento da diagonal de medida $\sqrt{2}$ são incomensuráveis, assim, pela Corolário 2.2, $\sqrt{2}$ é irracional.

A demonstração do teorema acima, foi baseada nas demonstrações encontradas em [2] e [4].

Exemplo 2.2.2: O segmento do comprimento e o segmento do diâmentro de um círculo são incomensuráveis.

Vamos usar o fato de que π é um número irracional, para mostrar que o segmento do comprimento e o segmento do diâmentro de um círculo são incomensuráveis.

Inicialmente seja C o segmento que representa o comprimento do círculo e d o segmento que representa o diâmetro do círculo.

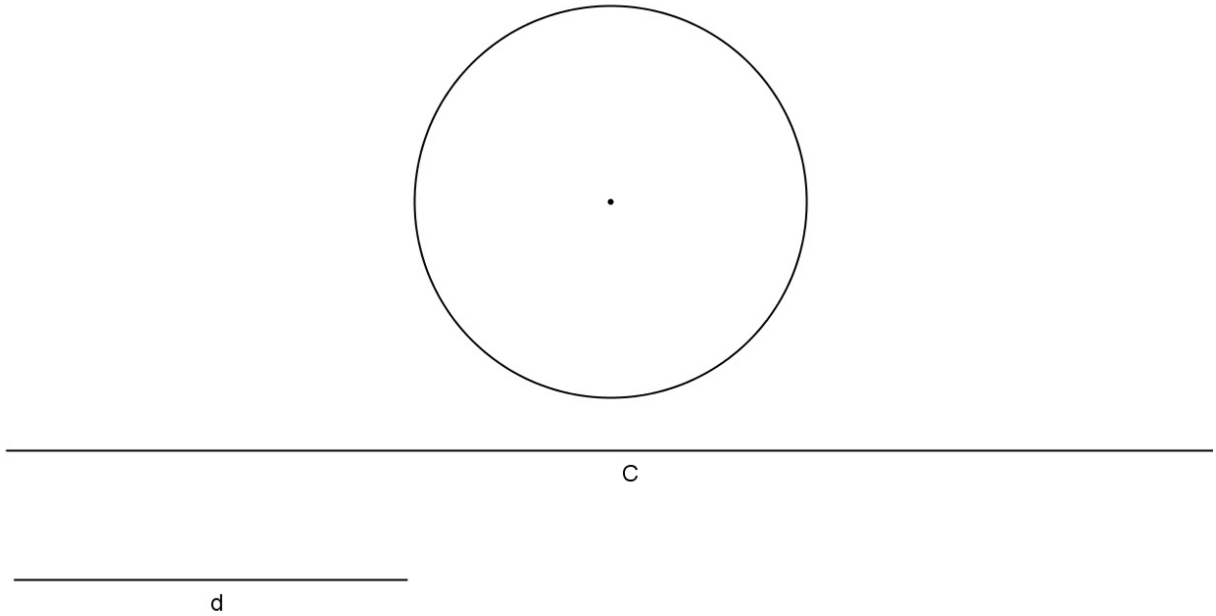


Figura 2.21: C o segmento do comprimento e d o segmento do diâmetro do círculo

Suponha por absurdo que o segmento C e o segmento d de um círculo sejam comensuráveis, ou seja: existe um segmento f que cabe um número inteiro de vezes em C e um número inteiro de vezes em d, ou seja: $\overline{C} = n\overline{f}$ e $\overline{d} = m\overline{f}$, logo

$$\frac{\overline{C}}{\overline{d}} = \frac{n\overline{f}}{m\overline{f}} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$$

O que é um absurdo, pois sabemos que: $\overline{C} = 2\pi r$ e $\overline{d} = 2r$, logo

$$\frac{\overline{C}}{\overline{d}} = \frac{2\pi r}{2r} = \pi \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$$

Portanto, o segmento do comprimento e o segmento do diâmentro de um círculo são incomensuráveis.

Corolário 2.5 *Um número irracional é um número que representa a medida de um segmento incomensurável com o segmento unitário. Logo, não é possível representá-lo por uma razão* $\frac{n}{m}$ *com* $n, m \in \mathbb{N}$ *e* $m \neq 0$.

O Corolário 2.5 acima é um corolário do Teorema 2.1.

2.3 Comensurabilidade e o processo de verificação da comensurabilidade de dois segmentos (P.V.C.D.S)

Para verificar a comensurabilidade de dois segmentos, ou seja, para verificar se dois segmentos possuem uma medida de segmento comum, vimos anteriormente nos exemplos

Exemplo 2.1.2, Exemplo 2.1.3 e Exemplo 2.1.3, que sempre devemos pegar o segmento menor com o auxílio de um compasso e sobrepô-lo ao segmento maior, o número de vezes que for possível.

Quando sobrava um pedaço de segmento no segmento maior, repetíamos os passos, agora com o segmento que sobrou e o segmento inicial menor. Esses passos eram repetidos até que pudéssemos encontrar um segmento que coubesse um números inteiro de vezes em um segmento e um número inteiro de vezes no outro segmento .

Esse procedimento, de procurar encontrar um segmento que caiba um números inteiro de vezes em um segmento e um número inteiro de vezes em outro segmento, é um processo de verificação da comensurabilidade de dois segmentos, que vamos chamar abreviadamente de (P.V.C.D.S).

Definição 2.6 *O* ***processo geométrico****, de verificar se dois segmentos são ou não comensuráveis, chamaremos de* ***processo de verificação da comensurabilidade de dois segmentos*** *ou abreviadamente* ***P.V. C. D. S.*** *e o descrevemos a seguir:*

Sejam AB e CD dois segmento quaisquer, os quais estão representados na Figura 2.22:

Figura 2.22: Segmentos AB e CD

Supondo que CD seja um segmento de medida menor, vamos verificar se o segmento CD cabe um número inteiro de vezes em AB. Para verificar se o segmento CD cabe um número inteiro de vezes em AB, vamos proceder de forma análoga a que fizemos com outros exemplos deste capítulo, ou seja, vamos repetir todo o processo de pegar o segmento menor e sobrepô-lo ao segmento maior.

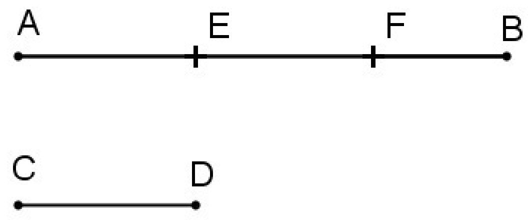


Figura 2.23: Segmentos AB e CD

Veja, na Figura 2.23 que $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{CD}$ e que $\overline{AB} = 2\overline{CD} + \overline{FB}$, logo, o segmento CD não cabe um número inteiro de vezes em AB. Para nosso propósito, vamos verificar se o segmento FB cabe um número inteiro de vezes em CD .

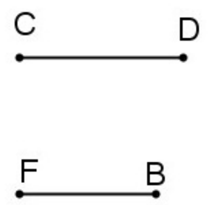


Figura 2.24: Segmentos CD e FB

Para verificar se o segmento FB cabe um número inteiro de vezes em CD, vamos proceder da mesma maneira que fizemos com os segmentos AB e CD.

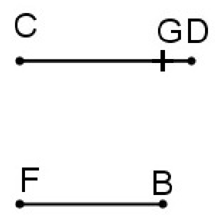


Figura 2.25: Segmentos CD e FB

Veja na Figura 2.25, que $\overline{CG} = \overline{FB}$ e que $CD = \overline{CG} + \overline{GD}$, logo o segmento FB não cabe um número inteiro de vezes em CD. Para nosso propósito, vamos verificar se o segmento GD cabe um número inteiro de vezes em FB .

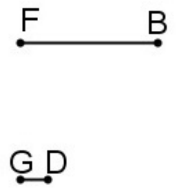


Figura 2.26: Segmentos GD e FB

Para verificar se o segmento GD cabe um número inteiro de vezes em FB, vamos proceder da mesma maneira que fizemos com os segmentos AB e CD.

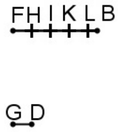


Figura 2.27: Segmentos GD e FB

Veja na Figura 2.27, que $\overline{GD} = \overline{FH} = \overline{HI} = \overline{IK} = \overline{KL}$ e que $\overline{FB} = 4\overline{GD} + \overline{LB}$, logo, o segmento GD não cabe um número inteiro de vezes no segmento FB.

Podemos desconfiar pelo Exemplo 2.1.1, Exemplo 2.1.2, Exemplo 2.1.3 e Exemplo 2.1.4, que, se continuarmos com esse processo ele para, e os segmentos AB e CD seriam comensuráveis, mas pode ocorrer de não encontrarmos um terceiro segmento que caiba um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD, e, portanto, os segmentos AB e CD seriam incomensuráveis.

O P.V.C.D.S tem um papel significativo no processo de descobrir se dois segmentos são ou não comensuráveis, veja:

Teorema 2.6 *O P.V.C.D.S para se, e somente se, os segmentos são comensuráveis.*

Demonstração:

Inicialmente vamos mostrar que:

Se o P.V.C.D.S finaliza, então os segmentos são comensuráveis.

HIPÓTESE: O P.V.C.D.S para;

TESE: Os segmentos são comensuráveis.

Sejam AA_0 e BB_0 dois segmentos tais que $BB_0 < AA_0$

Vamos considerar o P.V.C.D.S para verificar se os segmentos são comensuráveis.

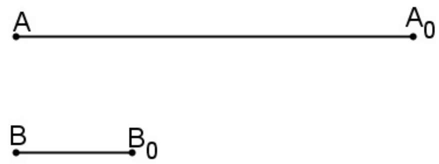


Figura 2.28: Segmentos AA_0 e BB_0

Vejamos a medida do segmento AA_0

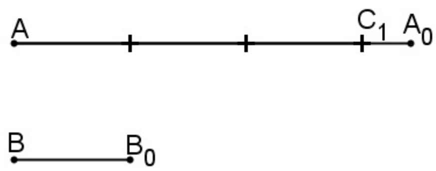


Figura 2.29: Segmentos AA_0 e BB_0

Observe, na Figura 2.29, que:

$$\overline{AA_0} = p_1\overline{BB_0} + \overline{C_1A_0} \tag{2.3}$$

Veja que o segmento BB_0 não cabe um número inteiro de vezes em AA_0.

Vamos verificar se o segmento C_1A_0 cabe um número inteiro de vezes no segmento BB_0.

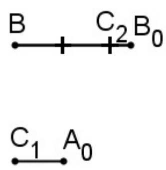


Figura 2.30: Segmentos C_1A_0 e BB_0

Observe, na Figura 2.30, que:

$$\overline{BB_0} = p_2\overline{C_1A_0} + \overline{C_2B_0} \tag{2.4}$$

Veja que o segmento C_1A_0 não cabe um número inteiro de vezes no segmento BB_0.

Vamos verificar se o segmento C_2B_0 cabe um número inteiro de vezes no segmento C_1A_0.

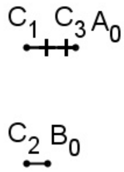


Figura 2.31: Segmentos C_2B_0 e C_1A_0

Observe, na Figura 2.31, que:

$$\overline{C_1A_0} = p_3\overline{C_2B_0} + \overline{C_3A_0} \tag{2.5}$$

Veja que o segmento C_2B_0 não cabe um número inteiro de vezes no segmento C_1A_0.

Vamos verificar se o segmento C_3A_0 cabe um número inteiro de vezes no segmento C_2B_0.

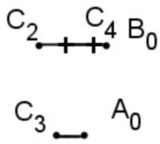


Figura 2.32: Segmentos C_3A_0 e C_2B_0 ampliados

Observe na Figura 2.32, que:

$$\overline{C_2B_0} = p_4\overline{C_3A_0} + \overline{C_4B_0} \tag{2.6}$$

Veja que o segmento C_3A_0 não cabe um número inteiro de vezes no segmento C_2B_0.

Vamos verificar se o segmento C_4B_0 cabe um número inteiro de vezes no segmento C_3A_0.

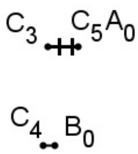


Figura 2.33: Segmentos C_4B_0 e C_3A_0 ampliados

Observe, na Figura 2.33, que:

$$\overline{C_3A_0} = p_5\overline{C_4B_0} + \overline{C_5A_0} \tag{2.7}$$

Veja que o segmento C_4B_0 não cabe um número inteiro de vezes no segmento C_3A_0.

Observe que, em geral, se continuarmos o processo:

$$\overline{C_{2n}B_0} = p_{2n+2}\overline{C_{2n+1}A_0} + \overline{C_{2n+2}B_0}$$

ou

$$\overline{C_{2n-1}A_0} = p_{2n+1}\overline{C_{2n}B_0} + \overline{C_{2n+1}A_0}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Supondo que em algum momento o processo para. Para nosso propósito, tomemos como exemplo que $C_5A_0 = 0$, ou seja, que o P.V.C.D.S para, então:

$$\overline{C_3A_0} = p_5\overline{C_4B_0} \tag{2.8}$$

Agora, vamos fazer as devidas substituições:

Substituindo (2.8) em (2.6):

$$\overline{C_2B_0} = p_4[p_5(\overline{C_4B_0})] + \overline{C_4B_0} = (p_4p_5+1)\overline{C_4B_0} \tag{2.9}$$

Substituindo (2.9) e (2.8) em (2.5):

$$\overline{C_1A_0} = p_3(p_4p_5+1)\overline{C_4B_0} + p_5\overline{C_4B_0} =$$

$$(p_3p_4p_5+p_3+p_5)\overline{C_4B_0} \tag{2.10}$$

Substituindo (2.10) e (2.9) em (2.4):

$$\overline{BB_0} = p_2[(p_3p_4p_5+p_3+p_5)\overline{C_4B_0}] + (p_4p_5+1)\overline{C_4B_0} =$$

$$(p_2p_3p_4p_5+p_2p_3+p_2p_5+p_4p_5+1)\overline{C_4B_0} \tag{2.11}$$

Substituindo (2.11) e (2.10) em (2.3):

$$\overline{AA_0} = p_1[(p_2p_3p_4p_5+p_2p_3+p_2p_5+p_4p_5+1)\overline{C_4B_0}] + (p_3p_4p_5+p_3+p_5)\overline{C_4B_0} =$$

$$(p_1p_2p_3p_4p_5+p_1p_2p_3+p_1p_2p_5+p_1p_4p_5+p_1p_3p_4p_5+p_1+p_3+p_5)\overline{C_4B_0} \tag{2.12}$$

Por (2.11) e (2.12), vemos que os segmentos BB_0 e AA_0 possuem uma medida de segmento comum C_4B_0, portanto, os segmentos BB_0 e AA_0 são comensuráveis. O caso geral segue do mesmo jeito.

Agora, vamos mostrar que:

Se os segmentos são comensuráveis, então o P.V.C.D.S para.

HIPÓTESE: Os segmentos são comensuráveis.

TESE: O P.V.C.D.S para.

Sejam A_1B_1 e A_2B_2 segmentos comensuráveis, então existe um terceiro segmento, suponha EF, o qual cabe um número inteiro n de vezes em A_1B_1 e um número inteiro m de vezes em A_2B_2, de tal modo que as medidas dos segmentos : $\overline{A_1B_1} = n\overline{EF}$ e $\overline{A_2B_2} = m\overline{EF}$.

Suponha $\overline{A_1B_1} \geq \overline{A_2B_2}$. Veja a representação de suas medidas na Figura 2.34:

Figura 2.34: Segmentos A_1B_1 e A_2B_2

Utilizaremos o P.V.C.D.S para os segmentos A_1B_1 e A_2B_2, veja Figura 2.35:

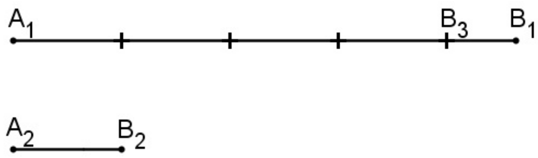


Figura 2.35: Segmentos A_1B_1 e A_2B_2

Observe que:

$$\overline{A_1B_1} = p_1(\overline{A_2B_2}) + \overline{B_3B_1} = p_1(\underbrace{m\overline{EF}}_{\overline{A_2B_2}}) + \underbrace{r_1\overline{EF}}_{\overline{B_3B_1}} \tag{2.13}$$

logo

$$\overline{A_1B_1} = (p_1m + r_1)\overline{EF} \tag{2.14}$$

com $0 \leq r_1 < m$, com $p_1, m, r_1 \in \mathbb{N}$.

Veja que se $r_1 = 0$, então $A_1B_1 = p_1m(\overline{EF})$ e $A_2B_2 = m\overline{EF}$ e com isso cobrimos todo o segmento A_1B_1 com sobreposição do segmento A_2B_2 . Como o segmento EF cabe um número inteiro de vezes em A_1B_1 e um número inteiro de vezes em A_2B_2, portanto, o P.V.C.D.S para.

Se $r_1 > 0$, então o segmento A_2B_2 não cabe um número inteiro de vezes em A_1B_1, logo, devemos testar se o segmento B_3B_1 cabe um número inteiro de vezes em A_2B_2. Veja Figura 2.36:

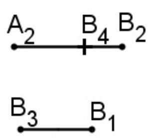


Figura 2.36: Segmentos A_2B_2 e B_3B_1

Veja que:

$$\overline{A_2B_2} = p_2(\underbrace{r_1\overline{EF}}_{\overline{B_3B_1}}) + \underbrace{r_2\overline{EF}}_{\overline{B_4B_2}} \tag{2.15}$$

logo

$$\overline{A_2B_2} = (p_2r_1 + r_2)\overline{EF} \tag{2.16}$$

com $0 \leq r_2 < r_1$, com $p_2, r_2 \in \mathbb{N}$.

Substituindo (2.16) em (2.13), obtemos:

$$\overline{A_1B_1} = p_1(p_2r_1 + r_2)\overline{EF} + r_1\overline{EF} \tag{2.17}$$

logo

$$\overline{A_1B_1} = (p_1p_2r_1 + p_1r_2 + r1)\overline{EF} \tag{2.18}$$

com $0 \leq r_2 < r_1$, $p_1, p_2, r_1, r_2 \in \mathbb{N}$.

Se $r_2 = 0$, então $\overline{A_1B_1} = (p_1p_2r_1 + r_1)\overline{EF}$ e $\overline{A_2B_2} = p_2r_1\overline{EF}$, logo, encontramos um segmento EF que cabe um número inteiro de vezes no segmento A_1B_1 e um número inteiro de vezes no segmento A_2B_2 e, portanto, o P.V.C.D.S para.

Se $r_2 > 0$, então o segmento B_3B_1, não cabe um número inteiro de vezes em A_2B_2, logo, devemos testar se o segmento $r_2\overline{EF} = \overline{B_4B_2}$ cabe um número inteiro de vezes em B_3B_1. Veja Figura 2.36:

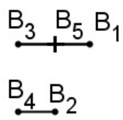


Figura 2.37: Segmentos B_3B_1 e B_4B_2

Observe que:

$$B_3B_1 = p_3(r_2\overline{EF}) + \underbrace{r_3\overline{EF}}_{B_5B_1} \tag{2.19}$$

com $0 \leq r_3 < r_2$, com $r_3, r_2 \in \mathbb{N}$.

Substituindo (2.19) em (2.15), obtemos:

$$\overline{A_2B_2} = p_2(p_3(r_2\overline{EF}) + r_3EF) + r_2\overline{EF} \tag{2.20}$$

logo

$$\overline{A_2B_2} = (p_2p_3r_2 + p_2r_3 + r_2)\overline{EF} \tag{2.21}$$

Agora, substituindo (2.21) em (2.13) obtemos:

$$\overline{A_1B_1} = p_1(p_2p_3r_2 + p_2r_3 + r_2)\overline{EF}) + r_1\overline{EF} \tag{2.22}$$

logo

$$\overline{A_1B_1} = (p_1p_2p_3r_2 + p_1p_2r_3 + p_1r_2 + r_1)\overline{EF} \tag{2.23}$$

com $0 \leq r_3 < r_2$.

Se $r_3 = 0$, então $\overline{A_1B_1} = (p_1p_2p_3r_2 + p_1r_2 + r_1)\overline{EF}$ e $\overline{A_2B_2} = (p_2p_3r_2 + r_2)\overline{EF}$, logo encontramos um segmento $\overline{EF}$ que cabe um número inteiro de vezes no segmento A_1B_1 e um número inteiro de vezes no segmento A_2B_2 e, portanto, o P.V.S.D.C para.

Se $r_3 > 0$, então o segmento B_4B_2 não cabe um número interio de vezes em B_3B_1, logo, devemos testar se o segmento B_5B_1 cabe um número inteiro de vezes em B_4B_2 .

Veja que, se continuarmos esse processo, encontraremos uma sequência $0 \leq r_n < ... < r_3 < r_2 < r_1$, como estamos trabalhando com uma sequência de números naturais decrescentes, em algum momento encontraremos algum $r_n = 0$, com $n \in \mathbb{N}$. Logo, se dois segmentos são comensuráveis, em algum momento, encontraremos um segmento que cabe um número inteiro de vezes no segmento A_1B_1 e um número inteiro de vezes no segmento A_2B_2 e portanto, o P.V.C.D.S para.

$\square$

Capítulo 3

Análise de livros textos quanto a números racionais, irracionais e comensurabilidade

Alguns professores de Matemática utilizam o livro didático como instrumento principal que orienta o seu trabalho durante a ministração de suas aulas. Muitos deles seguem à risca a sequência dos conteúdos apresentados pelo livro, as atividades de aprendizagem, e muitas vezes retiram do próprio livro didático questões para a avaliação dos alunos.

Após a leitura da obra "Exames de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio", do autor Elon Lages Lima, et all, [1], na qual é apresentada a análise, realizada por oito matemáticos, de doze coleções de livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio, podemos perceber que muitos livros didáticos de Matemática apresentam muitos erros conceituais, atividades erradas e, muitas vezes, deixam passar despercebidos alguns conteúdos.

Pensando na importância do livro didático como componente do cotidiano escolar no Ensino Médio, acreditamos que uma análise pormenorizada de um livro didático pode contribuir muito para o processo de ensino e aprendizagem. Nessa perspectiva, damos uma pequena contribuição apresentando uma análise de dois livros didáticos de Matemática do Ensino Médio (indicados por Livro 1 e Livro 2) referente à apresentação dos assuntos sobre conjunto dos números racionais e conjunto dos números irracionais.

Os livros didáticos que serão analisados são livros pertencentes as coleções que foram disponibilizadas pelo MEC no ano de 2011 pelo programa PNLEM (Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio), para que os professores da rede pública de ensino escolhessem qual seriam utilizados durante o período de 2012 até 2014.

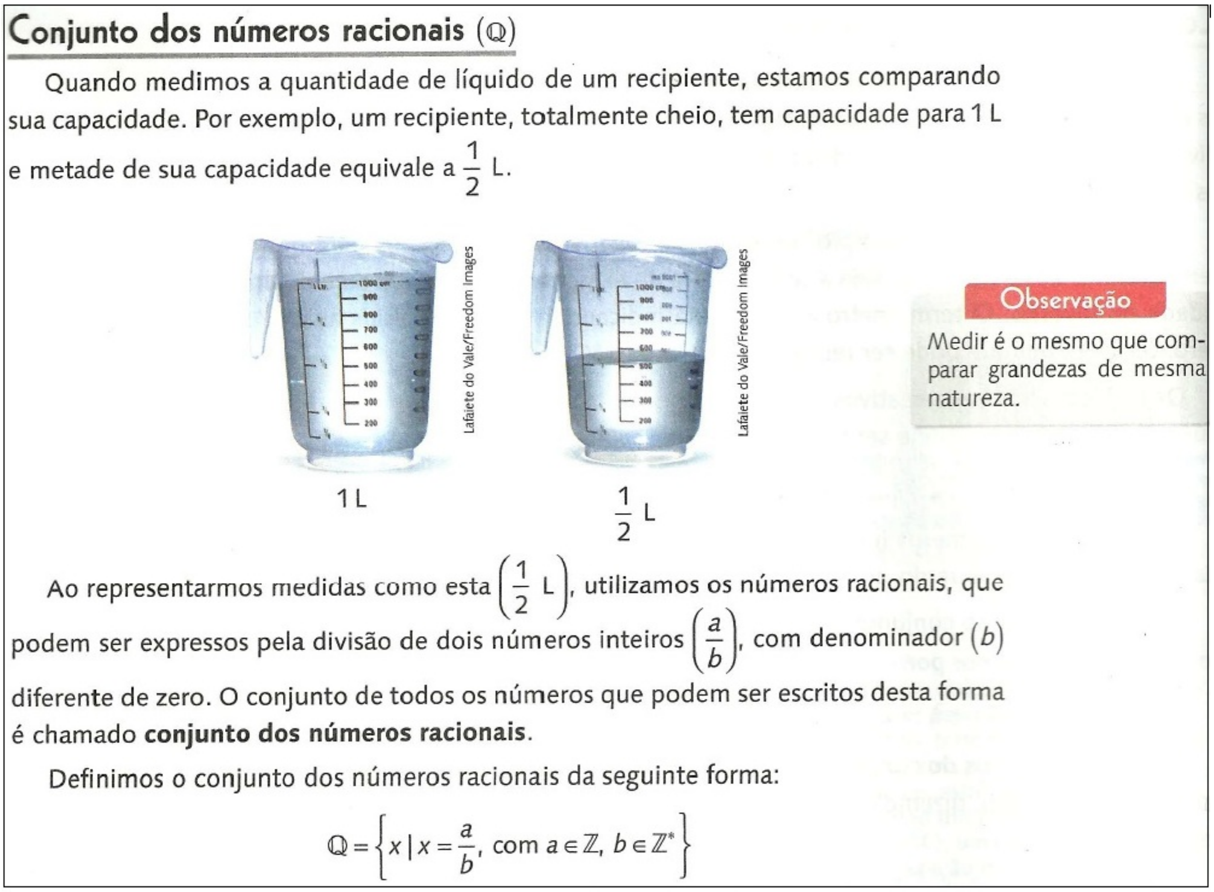
Nessa análise, estamos destacando pontos positivos e negativos dos capítulos sobre o conceito do conjunto dos números racionais e do conjunto dos números irracionais, destacando:

- Clareza na exposição dos assuntos;
- Conexão entre os temas tratados;
- Conceitualização;
- Adequação dos exemplos e exercícios;
- Adequação de gráficos e desenhos.

3.1 Análise do Livro 1

3.1.1 Números racionais

Iniciar um assunto matemático a partir de uma situação problema é um hábito usado por muitos autores de livro didático de matemática. Essa iniciativa foi tomanda pelo autor do Livro 1 para apresentar o conceito de números racionais. O Livro 1 inicia este assunto comparando a quantidade de líquido de dois recipientes iguais, com capacidade de $1l$, cada recipiente, veja Figura 3.1. Ao comparar o recipiente cheio de líquido com o outro contendo metade de sua capacidade $\frac{1}{2}l$, o objetivo do Livro 1 é ligar o conceito de fração ao conceito de números racionais, o que facilita a compreensão do conceito de números racionais pelos alunos, pois a definição de fração já é do conhecimento deles.



Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$)

Quando medimos a quantidade de líquido de um recipiente, estamos comparando sua capacidade. Por exemplo, um recipiente, totalmente cheio, tem capacidade para 1 L e metade de sua capacidade equivale a $\frac{1}{2}$ L.

Observação

Medir é o mesmo que comparar grandezas de mesma natureza.

Ao representarmos medidas como esta $\left(\frac{1}{2}\text{ L}\right)$, utilizamos os números racionais, que podem ser expressos pela divisão de dois números inteiros $\left(\frac{a}{b}\right)$, com denominador (b) diferente de zero. O conjunto de todos os números que podem ser escritos desta forma é chamado **conjunto dos números racionais**.

Definimos o conjunto dos números racionais da seguinte forma:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b},\ \text{com } a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Figura 3.1: Conjunto dos números racionais, Livro 1

Veja que o Livro 1, ao mostrar através da Figura 3.1 que a quantidade de líquido contido no segundo recipiente representa metade da quantidade de líquido contido no primeiro recipiente, faz uso da definição de fração. Utilizando esse exemplo prático, o livro facilita para que os alunos entendam o conceito de número racional, e percebam que a todo tempo estão vivenciando esse conceito no seu dia a dia.

Só após o Livro 1 mostrar um exemplo prático da utilização dos números racionais é que ele exibe a definção de números racionais como todo número que pode ser expresso como a divisão de dois inteiros $\frac{a}{b}$ com denominador $b \neq 0$. Essa iniciativa, de introduzir um assunto matemático a partir de situações do cotidiano dos alunos, facilita a compreensão dos mesmos, por isso, deveria ser usual entre os livros de matemática.

3.1.2 Números irracionais

Antes de iniciar o conjunto dos números irracionais, o Livro 1, relembra a definição de números racionais e apresenta um breve histórico de como os gregos perceberam que nem todas as medidas de segmentos poderiam ser expressos como a divisão de dois inteiros (Figura 3.2). É apresentado como exemplo que $\sqrt{2}$ é uma medida de segmento que não pode ser expresso como a divisão de dois inteiros. Veja que, só após exibir esse exemplo, o livro define números irracionais como os números que não podem ser expressos pela divisão de dois inteiros. Dessa maneira, o aluno visualiza melhor a definição de número irracional.

Conjunto dos números irracionais

Vimos que os números racionais são aqueles que podem ser expressos pela divisão de dois números inteiros. Os matemáticos gregos da Antiguidade descobriram, em seus estudos, a existência de segmentos cujas medidas não podiam ser representadas por números racionais. Eles verificaram então que $\sqrt{2}$ era a medida de um desses segmentos.

Os números que não podem ser expressos pela divisão de dois números inteiros, ou seja, na forma $\frac{a}{b}$ com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$, são chamados **números irracionais**. Quando esses números são indicados na forma decimal, apresentam infinitas casas decimais e **não periódicas**. Alguns exemplos de números irracionais são:

- $\sqrt{2} = 1{,}41421356...$
- $\sqrt{3} = 1{,}73205080...$
- $e = 2{,}71828182...$ (número neperiano)
- $\pi = 3{,}14159265...$ (número pi)

Durante algum tempo, a $\sqrt{2}$ foi o único irracional conhecido. Posteriormente, outros matemáticos mostraram que os números como $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$ e π eram também irracionais.

Figura 3.2: Conjunto dos números irracionais, Livro 1

Observe, na Figura 3.2, a frase: "Durante algum tempo, a $\sqrt{2}$ foi o único irracional conhecido"está errada, pois, não se sabe se foi $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{5}$, vide em [2, Seção 3.5, p.107]. O que deve ser colocado é que: "Durante algum tempo, a $\sqrt{2}$ parece ter sido o único número irracional conhecido". No mais, as afirmações históricas devem ser acompanhadas de referências bibliográficas de onde essas afirmações foram tiradas, o que o Livro 1 não fez. Veja, ainda nessa frase, que a falta da palavra *número* antes da palavra irracional faz com que o adjetivo irracional usado para o número $\sqrt{2}$ tome um sentido de algo infundado, algo absurdo, algo que não é dotado de raciocínio.

3.1.3 Segmentos comensuráveis

O livro ainda apresenta a definição de segmentos incomensuráveis (Figura 3.3). A definição apresentada de segmentos incomensuráveis está errada, pois a definição deve ser usada para dois segmentos que são dito incomensuráveis, quando não podemos encontrar um terceiro segmento que caiba um número inteiro de vezes em um segmento e um número inteiro de vezes no outro segmento. Na verdade, o livro tenta ligar conceito de números irracionais ao conceito de segmentos incomensuráveis, mas como podemos ver não consegue, pois apresenta o conceito de segmentos incomensuráveis errado. No capítulo anterior, abordamos com detalhes o conceito de segmentos comensuráveis e segmentos incomensuráveis e apresentamos o conceito de número irracional, a partir do conceito de segmentos incomensuráveis.

> Utilizando o teorema de Pitágoras, podemos representar geometricamente segmentos com medidas $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ etc. Esses segmentos não podem ser medidos com um número racional, isto é, são **incomensuráveis.** **Professor(a):** Explique aos alunos que grandeza comensurável é aquela cuja medida, em relação a uma unidade escolhida convenientemente, é um número racional.

Figura 3.3: Segmentos incomensuráveis, Livro 1

Ainda observando a Figura 3.3, veja que se seguirmos a sequência de segmentos com medidas expostas na figura teremos $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots \sqrt{8}, \ldots$ entre outros. Como os segmentos de medidas $\sqrt{2}$ e $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ posuem um terceiro segmento $\sqrt{2}$ que cabe uma vez em $\sqrt{2}$ e duas vezes em $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, então os segmentos $\sqrt{2}$ e $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ são comensuráveis, contradizendo a afirmação de que esses segmentos são incomensuráveis.

Note que, se o Livro 1 comparasse as medidas dos segmentos descritos na Figura 3.3 ao segmento unitário, então cada segmento seria incomensurável com o segmento unitário, pois não seria possível encontrar um segmento que coubesse um número inteiro de vezes no segmento unitário e um número inteiro de vezes no segmento de medida $\sqrt{n}$ com $n \in \mathbb{N}$, onde n não é um quadrado perfeito.

Após tentar definir segmentos incomensuráveis, o Livro 1 não exibe nenhuma aplicação desse conceito para verificar que segmentos de medidas irracionais são segmentos incomensuráveis com a unidade, tornando assim a apresentação da definição inútil ao capítulo. O autor poderia expor o exemplo do quadrado de lado 1. Sabemos, pelo Teorema de Pitágoras, que a diagonal desse quadrado mede $\sqrt{2}$, assim, poderia tentar medir o segmento da diagonal do quadrado com o segmento do lado do quadrado. Dessa forma, mostraria que não existem segmentos que caibam um número inteiro de vezes no segmento que representa o lado e um número inteiro de vezes no segmento que representa a diagonal, logo concluiria que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos incomensuráveis. No Exemplo 2.2.1 do capítulo 2, mostramos que a diagonal e o lado de um quadrado são segmentos incomensuráveis.

Na Figura 3.4, a seguir, o Livro 1 mostra como marcar na reta os segmentos de medidas $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ utilizando um quadrado de lado 1 a partir do Teorema de Pitágoras. Muitos livros de matemática apenas exibem as medidas desses segmentos na reta, sem fazer nenhuma demostração para garantir que essas medidas estão marcadas no lugar correto. O livro poderia exibir a demonstração de que $\sqrt{2}$ é um número irracional, que é fácil de ser feita e também é muito educativo, pois apresenta aos alunos uma ferramenta muito importante da matemática, que é a demonstração.

Observe no desenho ao lado a representação dessas medidas.

O segmento d_1 representa a diagonal de um quadrado com lados medindo 1.

$$(d_1)^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d_1 = \sqrt{2}$$

Já o segmento d_2 representa a diagonal de um retângulo com lados medindo $\sqrt{2}$ e 1.

$$(d_2)^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 \Rightarrow (d_2)^2 = 2 + 1 \Rightarrow d_2 = \sqrt{3}$$

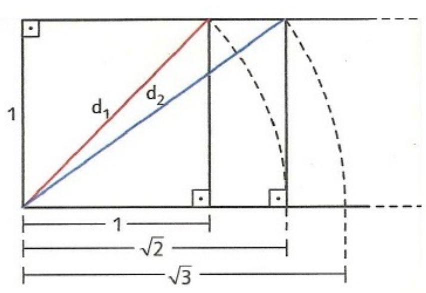


Figura 3.4: Como marcar $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ na reta numérica, Livro 1

3.1.4 Conceitualização

Como pudemos ver na Figura 3.3, o Livro 1 apresenta o conceito de segmentos incomensuráveis errado, o que configura uma grave falha, pois é um assunto pouco encontrado em livros de matemática do Ensino Médio, e talvez essa seja a única oportunidade dos alunos terem contato com esse conceito, havendo a possibilidade dos alunos levarem consigo um conceito errado para o resto de suas vidas.

3.1.5 Conexão entre os temas tratados

Vimos, na Figura 3.2, que o Livro 1 faz a conexão entre o conceito de números racionais e irracionais de uma forma simples. Veja que, antes de iniciar o conceito de números irracionais, o Livro 1 relembra o conceito de números racionais, faz um breve histórico de como foi descoberto que $\sqrt{2}$ não pode ser escrito como a divisão de dois inteiros, só depois define números irracionais como aqueles que não podem ser expressos como a divisão de dois inteiros. Veja que essa iniciativa do Livro 1 é muito boa, pois, ao fazer toda essa conexão entre o conceito de números racionais e irracionais, o Livro 1 prepara o aluno para compreender melhor o conceito de números irracionais.

3.1.6 Clareza na exposição dos assuntos

Ao expor os assuntos, o Livro 1 apresenta de forma clara e simples o conceitos de números racionais e número irracionais. Vimos, na Figura 3.1, que ele usa uma situação do cotidiano para poder expor o conceito de números racionais, facilitando assim a compreensão do aluno.

O Livro 1 faz a ligação do conceito de números irracionais ao conceito de números racionais de forma clara e também muito simples, sem cometer um hábito de muitos autores de livros de matemática, de definir números irracional como aquele número que não é racional.

O Livro 1 só deixou a desejar na exibição da definição de segmentos incomensuráveis (Figuar 3.3), que foi apresentado errado, como vimos anteriormente. Observe que ele não deixou claro ao afirmar que "utilizando o teorema de Pitágoras, podemos representar geometricamente segmentos com medidas $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ etc"que esses segmentos $\sqrt{n}$, com $n \in \mathbb{N}$ onde n não é um quadrado perfeito, são segmentos de medidas irracionais.

Na Figura 3.4, o Livro 1, ao mostrar como marcar os segmentos de medidas $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, não deixa claro que este método de marcação é realizado na reta numérica para marcar todos segmentos de medidas irracionais $\sqrt{n}$, com $n \in \mathbb{N}$ onde n não é um quadrado perfeito.

3.1.7 Adequação de desenhos

O Livro 1 apresenta poucos desenhos, veja Figura 3.1 e Figura 3.4, já apresentadas anteriormente.

Veja ainda na Figura 3.5 a seguir, que ao representar alguns números racionais na reta numérica, o Livro 1 dá um zoom na parte da reta compreendida entre 2 e 3, para mostrar alguns números racionais, entre os algarismos 2 e 3. Essa iniciativa foi muito boa, pois mostra aos alunos que entre dois números inteiros, existem números racionais.

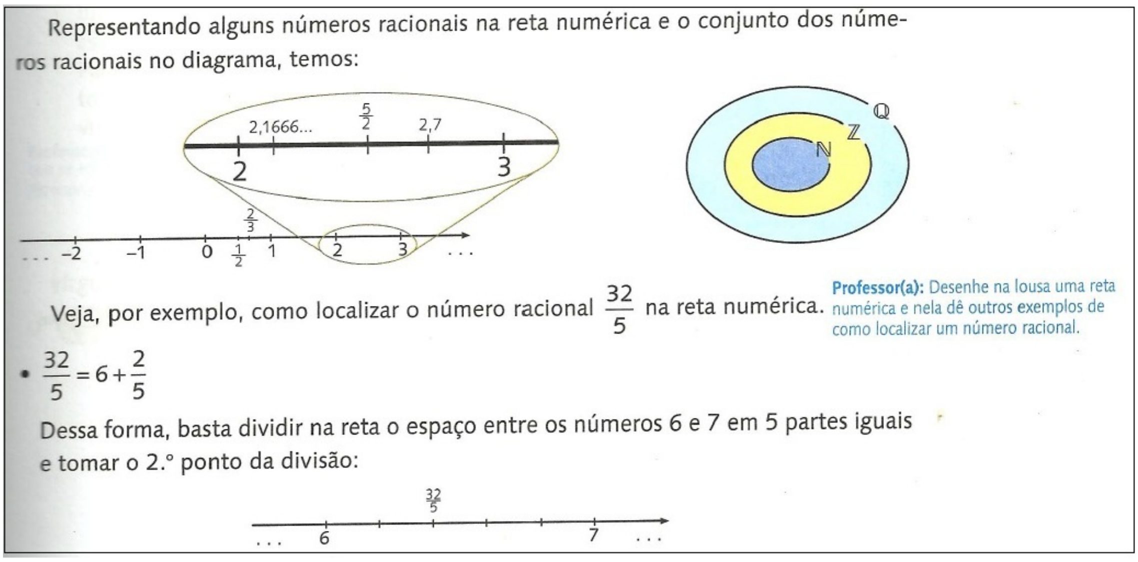


Figura 3.5: Representação de alguns números racionais na reta numérica, Livro 1

No geral, o Livro 1 apresenta poucas figuras, algumas adequadas ao conteúdo, como no caso da Figura 3.1 e Figura 3.4, e outras inadequadas, como o caso da reta numérica apresentada na Figura 3.5. Neste caso, da Figura 3.5 o Livro 1 poderia aumentar a reta numerica para mostrar mais números racionais, sem a necessidade de dar zoom em um pedaço da reta, deixando assim um pouco desapercebido alguns números racionais, como no caso dos números racionais $\dfrac{2}{3}$ e $\dfrac{1}{2}$, o que pode levar os alunos a pensarem que esses números não são racionais.

3.1.8 Adequação dos exemplos e exercícios

O livro apresenta poucos exercícios referentes ao conjunto dos números racionais e ao conjunto dos números irracioniais. Vejamos alguns exercícios:

Veja a Figura 3.6 abaixo, esse exercício é a continuação do exemplo apresentado na Figura 3.4, visto que já foi apresentado ao aluno como se obter geometricamente segmentos de medida $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, os alunos são capazes de representar os demais segmentos exigidos nos exercícios.

48 Utilizando procedimento semelhante ao apresentado na página **30**, junte-se a um colega e obtenham, geometricamente, segmentos com medidas $\sqrt{5}$ e $\sqrt{6}$.

Figura 3.6: Exercício, Livro 1

Veja que a Figura 3.7 apresenta um exercício muito interessante, bem diferente de muitos livros que apresentam exercícios que são meras cópias dos exemplos exibidos no próprio livro.

49 Escreva na forma fracionária dois números racionais entre: **Professor(a):** Veja possíveis respostas no *Caderno de respostas.*

a) $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ b) $-\sqrt{3}$ e $-\sqrt{2}$ c) $\sqrt{10}$ e $\sqrt{11}$

Figura 3.7: Exercício, Livro 1

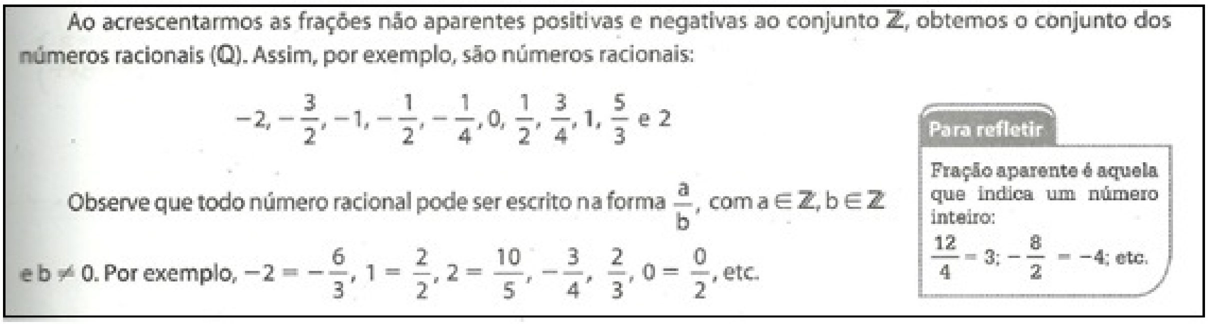
Observe que o objetivo do exercício da Figura 3.7 é mostrar aos alunos que entre dois irracionais, existem infinitos números racionais. A medida que cada aluno diz os dois racionais encontrados por ele, os outros alunos vão percebendo que existem outros números além dos que eles encontraram entre os racionais de cada item.

Em resumo, os exercícios são adequados, pois, como podemos ver, os exemplos dão todo embasamento para que os alunos possam resolver os exercícios.

3.2 Análise do Livro 2

3.2.1 Números racionais

O Livro 2 apresenta uma revisão do estudo dos números racionais na sua forma de fração e, a partir de alguns exemplos. Ele tenta mostrar que todo número inteiro pode ser escrito como uma fração, como podemos ver na Figura 3.8, buscando esclarecer que todo número inteiro também é um número racional. Essa maneira que o Livro 2 utilizou é muito educativa, pois leva o aluno a perceber a inclusão do conjunto dos números inteiros no conjunto dos números racionais.



Ao acrescentarmos as frações não aparentes positivas e negativas ao conjunto $\mathbb{Z}$, obtemos o conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$). Assim, por exemplo, são números racionais:

$$-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{3} \text{ e } 2$$

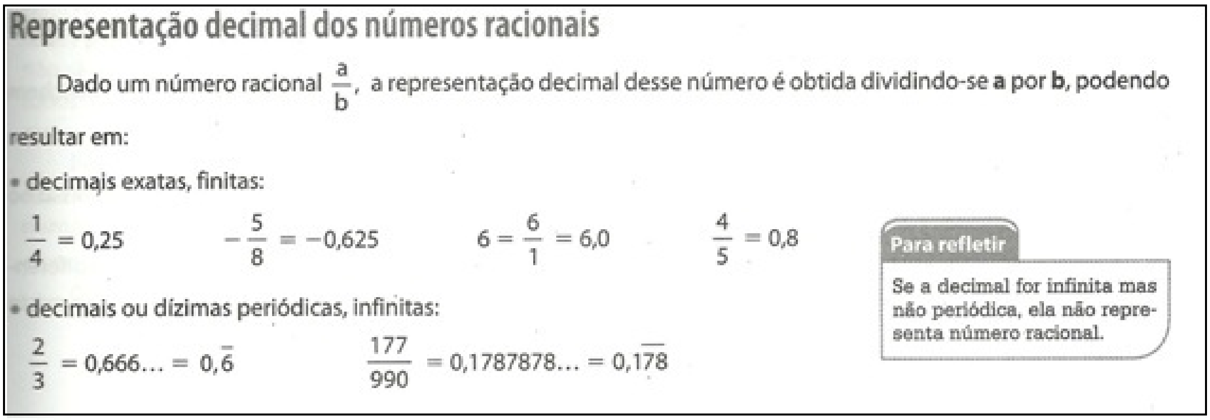
Observe que todo número racional pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Por exemplo, $-2 = -\frac{6}{3}$, $1 = \frac{2}{2}$, $2 = \frac{10}{5}$, $-\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $0 = \frac{0}{2}$, etc.

Para refletir

Fração aparente é aquela que indica um número inteiro: $\frac{12}{4} = 3$; $-\frac{8}{2} = -4$; etc.

Figura 3.8: Conjunto dos números racionais, Livro 2

No livro, é dito que um número racional pode ser representado por uma expressão decimal finita e infinita e periódica, apresenta alguns exemplos, mas não há nenhuma justificativa de validade desses resultados, como podemos ver na Figura 3.9 a seguir. Seria tão simples dar um exemplo de divisão continuada do numerador a pelo denominador b, lembrando que só existem a restos possíveis, e daí explicar a periodicidade.



Representação decimal dos números racionais

Dado um número racional $\frac{a}{b}$, a representação decimal desse número é obtida dividindo-se **a** por **b**, podendo resultar em:

- decimais exatas, finitas:

$\frac{1}{4} = 0{,}25$ $\quad -\frac{5}{8} = -0{,}625$ $\quad 6 = \frac{6}{1} = 6{,}0$ $\quad \frac{4}{5} = 0{,}8$

- decimais ou dízimas periódicas, infinitas:

$\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots = 0{,}\overline{6}$ $\quad \frac{177}{990} = 0{,}1787878\ldots = 0{,}1\overline{78}$

Para refletir

Se a decimal for infinita mas não periódica, ela não representa número racional.

Figura 3.9: Representação decimal dos números racionais, Livro 2

Vejamos, a seguir, um exemplo de divisão continuada que mostra como obter a representação decimal de um número racional:

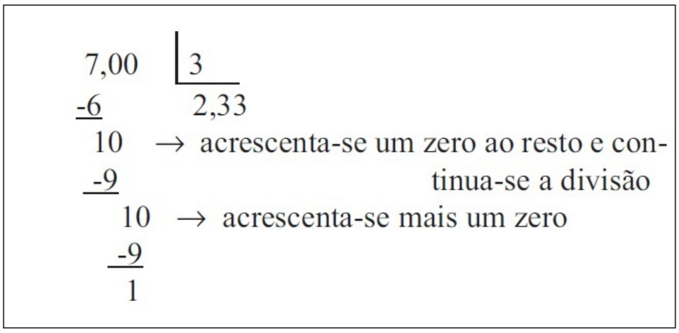


Figura 3.10: Expressão decimal, vide em [8]

Na Figura 3.10, percebe-se que na divisão continuada sempre sobra resto 1, acrescentando zero ao resto, passa a ser 10, que dividido por 3 dará 3 e restará novamente o 1, portanto, a fração decimal resultante será a dízima periódica 2,333...

No Capítulo 3, iremos tratar de expressões decimais finitas e infinitas e periódicas, no qual apresentaremos um teorema que nos mostra uma forma de visualizar se uma fração na sua forma irredutível representa um expressão decimal finita ou infinita periódica.

A Figura 3.11, apresenta alguns exemplos de transformação de expressões decimais finitas e infinitas e periódicas em números racionais. Poucos livros de matemática exibem essa passagem de decimal (finito ou infinito e periódico) para fração, porém o Livro 2 apenas exibe os cálculos de como se obter a fração geratriz do número decimal e não explica passo a passo o que deve ser feito até obter o número decimal em forma de fração.

Determinação da fração geratriz do decimal

Da mesma forma que um número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um decimal exato ou periódico, este também podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, que recebe o nome de *fração geratriz do decimal.*

Por exemplo, vamos escrever a fração geratriz de cada decimal:

- 0,75

$$0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} \rightarrow \text{fração geratriz}$$

- 0,222...

$$x = 0{,}222\ldots$$
$$10x = 2{,}222\ldots$$
$$10x = 2 + 0{,}222\ldots$$
$$10x = 2 + x$$
$$9x = 2$$
$$x = \frac{2}{9} \rightarrow \text{fração geratriz}$$

- 0,414141...

$$N = 0{,}414141\ldots$$
$$100N = 41{,}4141\ldots$$
$$100N = 41 + 0{,}4141\ldots$$
$$100N = 41 + N$$
$$99N = 41$$
$$N = \frac{41}{99} \rightarrow \text{fração geratriz}$$

- $0{,}1\overline{78}$

$$N = 0{,}1787878\ldots$$
$$10N = 1{,}787878\ldots$$
$$10N = 1 + 0{,}787878\ldots \left(0{,}787878\ldots = \frac{78}{99}\text{. Verifique.}\right)$$
$$10N = 1 + \frac{78}{99}$$
$$990N = 99 + 78$$
$$N = \frac{177}{990} \rightarrow \text{fração geratriz}$$

Figura 3.11: Representação da fração geratriz do decimal, Livro 2

É importante que seja comentado passo a passo o que está sendo realizado com o número decimal para obtenção de sua geratriz para que os alunos percebam o processo.

Vejamos como deveria ser feito:

- Veja que $0,75$ é um número decimal exato com dois dígitos após a vírgula, logo, escrevemos 75 no denominador e 100 no numerador, onde

$$0,75 = \frac{75}{100} = \frac{75:25}{100:25} = \frac{3}{4}$$

- Veja que $0,222...$ é um número dízima periódica. Inicialmente, nomeamos a dízima periódica de $x = 0,222...$ Multiplicamos os dois lados da igualdade por 10, pois o período da dízima é composto por um algarismo, ou seja pelo algarismo 2. Em seguida, efetuamos os cálculos e encontramos a fração geratriz:

$$10x = 2,222..$$

$$10x = 2 + 0,222...$$

$$10x = 2 + x$$

$$10x - x = 2$$
$$9x = 2$$
$$x = \frac{2}{9}$$

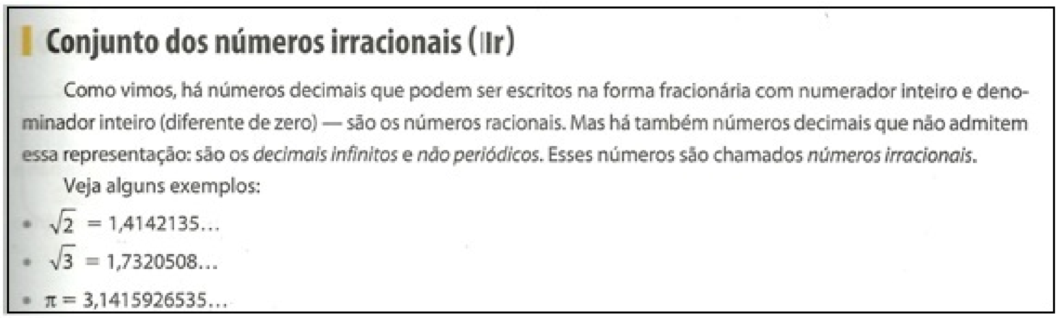
- Veja que $0,414141...$ é uma dízima periódica. Inicialmente, nomeamos a dízima periódica de $x = 0,414141...$ Multiplicamos os dois lados da igualdade por 100, pois o período da dízima é composto por dois algarismo, ou seja, pelos algarismos 4 e 1. Em seguida, efetuamos os cálculos e encontramos a fração geratriz

$$100x = 41,414141...$$
$$100x = 41 + 0,414141...$$
$$100x = 41 + x$$
$$100x - x = 41$$
$$99x = 41$$
$$x = \frac{41}{99}$$

No capítulo 4, veremos como transformar um número decimal (finito ou infinito periódico) em fração.

3.2.2 Conexão entre os temas tratados

Para apresentar os números irracionais (veja Figura 3.12), o Livro 2 relembra que foi visto que existem números decimais que podem ser expressos em sua forma fracionária, os quais são chamados de racionais. Também comenta que existem alguns números decimais que não admitem essa representação, e que esses números são os decimais infinitos e não periódicos, para então concluir que esses números são chamados de números irracionais.


Conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I}$r)

Como vimos, há números decimais que podem ser escritos na forma fracionária com numerador inteiro e denominador inteiro (diferente de zero) — são os números racionais. Mas há também números decimais que não admitem essa representação: são os *decimais infinitos* e *não periódicos*. Esses números são chamados *números irracionais*.

Veja alguns exemplos:

- $\sqrt{2} = 1,4142135...$
- $\sqrt{3} = 1,7320508...$
- $\pi = 3,1415926535...$

Figura 3.12: Conjunto dos números irracionais, Livro 2

Essa iniciativa do Livro 2 é muito boa, pois faz toda uma ligação entre os temas tratados, que é o conceito de números irracionais aos números racionais, tentando fazer o aluno compreender, de forma simples, que para um número ser irracional ele não pode ser escrito como a divisão de dois inteiros, sem dizer diretamente que: "um número é irracional, quando não é racional", como a maioria dos livros de matemática o fazem.

3.2.3 Conceitualização

Vimos que o Livro 2 apresenta o conceito de números racionais e de números irracionais de forma simples e clara, interligando os temas, não apresenta nenhum erro conceitual no assunto assunto estudado.

O Livro 2 deixa a desejar apenas no erro cometido na frase "Determinação da fração geratriz do decimal", veja que da forma que está escrita parece que qualquer número decimal pode ser escrito na forma de uma fração, inclusive os decimais infinitos e não periódicos, ou seja, os irracionais, portanto, a frase deveria ser: "Determinação da fração geratriz de um número decimal finito ou decimal infinito e periódico", da Figura 3.11.

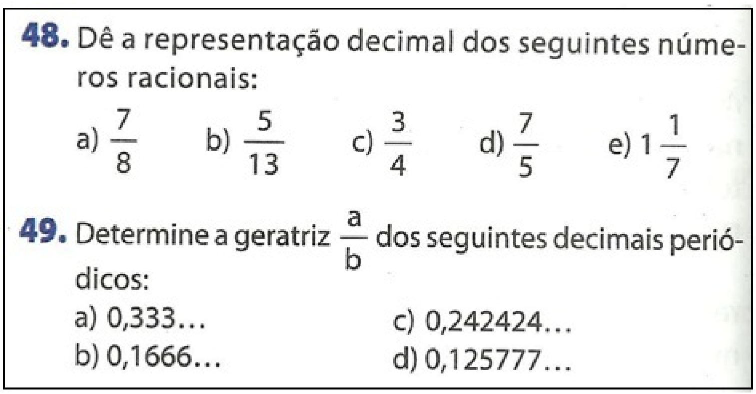
3.2.4 Clareza na exposição dos assuntos

O livro apresenta de forma clara os conteúdos sempre tentando fazer a ligação entre os temas tratados. Vimos também que, no geral,o Livro 2 apresenta conceituação correta, cometendo erro na primeira frase da Figura 3.11, como já havia comentado antes.

3.2.5 Adequação dos exemplos e exercícios

Para abordar os conteúdos os exercícios específicos a esses assuntos são poucos, e os mesmos são réplicas dos exemplos apresentados pelo Livro 2. Nesse caso, esses exercícios parecidos com os exemplos, faz com que o aluno treine como são realizados os cálculos, o que é bom pois, dá aos alunos a oportunidade de aprenderem como encontrar a representação decimal de um número racional e como transformar um decimal em número racional, assuntos esses que passam desapercebidos em muitos livros didáticos.

Veja figura 3.13:



48. Dê a representação decimal dos seguintes números racionais:

a) $\frac{7}{8}$ b) $\frac{5}{13}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{7}{5}$ e) $1\frac{1}{7}$

49. Determine a geratriz $\frac{a}{b}$ dos seguintes decimais periódicos:

a) 0,333... c) 0,242424...
b) 0,1666... d) 0,125777...

Figura 3.13: Exercícios, Livro 2

Veja que o exercício 48 da Figura 3.13 é uma réplica dos exemplos utilizados na representação decimal dos números racionais (Figura 3.9).

Já o exercício 49 Figura 3.13 é muito semelhante aos exemplos da determinação da fração geratriz de um número decimal (Figura 3.11).

Em resumo, os exercícios são repetições de exemplos já vistos no próprio Livro 2, percebemos que não houve preocupação do autor em verificar se os alunos conseguiam aplicar esse aprendizado em questões mais bem elaboradas.

3.2.6 Adequação de desenhos

Em relação a apresentação de figuras, percebemos que são poucas, pelo menos no que diz respeito aos assuntos de números racionais e irracionais. As únicas figuras que aparecem são as de representação de números racionais na reta númerica (Figura 3.14) e a de inclusão dos conjuntos numéricos (Figura 2.15).

Essa figuras não forma suficientes para abordar todo o assunto, pois o Livro 2 perdeu a oportunidade de apresentar figuras exibindo alguns números irracionais na reta numérica, ele deveria também mostrar como marcar alguns desses números na reta numérica, para mostrar aos alunos que entre dois números racionais quaiquer, existem números irracionais.

Como podemos observar na Figura 3.12, o Livro 2 apenas exibe alguns exemplos de números irracionais, e não apresenta esses números na reta númerica, o que não é bom, pois, dessa forma o aluno não tem a oportunidade de ver a posição desses números na reta numérica, assim, eles não percebem que entre dois números racionais, existem números irracionais. Uma maneira de marcar números irracionais na reta numerica foi exibida pelo Livro 1 na Figura 3.4.

Veja Figura 3.14 a seguir, a maneira que o Livro 2 marcou os algarismo $\frac{5}{8}$ e $\frac{3}{4}$ ficou desorganizado, atrapalhando um pouco a visualização desses números racionais na reta. Observe que no desenho foram marcados muitos pontos, que não foram exibidos nenhum números racional entre eles, como é $-5, -4, 2, 3, 4$ e 5, o Livro 2 poderia tirar alguns desses pontos e aumentar um pouco mais os espaços entre os números inteiros, assim possibilitando a marcação $\frac{5}{8}$ e $\frac{3}{4}$ na própria reta, que é a maneira mais apropriada.

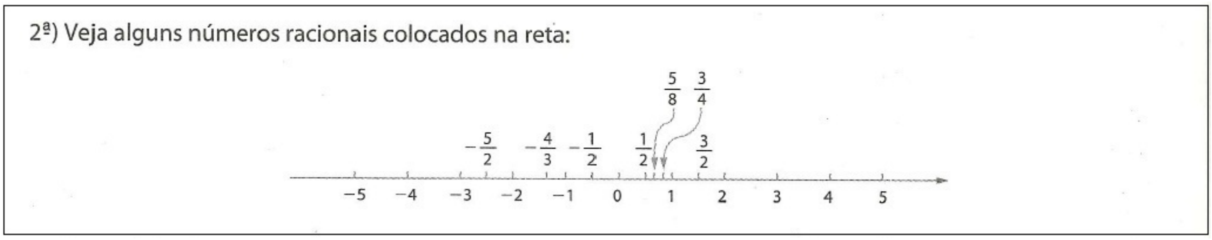


Figura 3.14: Números racionais na reta numérica, Livro 2

Agora, observando a Figura 3.15, a representação de inclusão de conjuntos numéricos, percebemos que o Livro 2 exibe essa inclusão no gráfico de Venn, destacando cada conjunto por uma cor diferente.

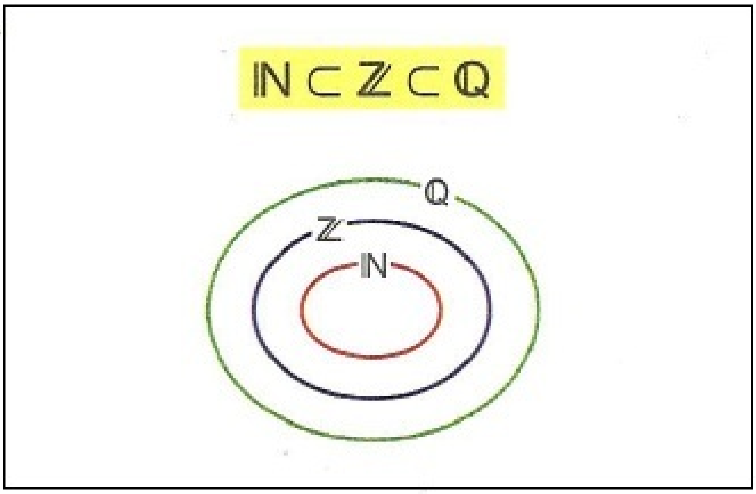


Figura 3.15: Inclusão de conjuntos numéricos, Livro 2

Essa forma de destacar os conjuntos por cores diferentes chama mais a atenção do aluno, facilitando a percepção de inclusão de conjutos. Veja ainda que, antes do Livro 2 mostrar a inclusão de conjuntos no diagrama, mostrou essa inclusão utilizando a simbologia matemática, o que é ponto positivo para o livro, pois dá a oportunidade dos alunos de se familiarizarem com os símbolos matemáticos.

Capítulo 4

Expressões decimais

A racionalidade ou irracionalidadede de um número pode ser detecta por sua expressão decimal. Portanto, vamos estudar um pouco as expressões decimais.

Neste capítulo, abordamos o estudo de expressões decimais, focando no estudo das expressões decimais finitas e das expressões decimais infinitas e periódicas.

Apresentamos uma forma imediata de determinar se uma fração representa um expressão decimal finita ou infinita e periódica, sem a necessidade de fazer cálculos.

Também apresentamos uma fórmula para transformar expressões decimais finitas e infinitas periódicas, em um número racional.

4.1 Expressão decimal finita e infinita e periódica

Definição 4.1 *Uma **expressão decimal** é um símbolo da forma*

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$$

onde a_0 é um número inteiro e $a_1, a_2, ..., a_n$ são dígitos , isto é, números inteiros tais que $0 \leq a_n \leq 9$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se um dígito a_n, chamado de n-ésimo dígito da expressão decimal de α. O número natural a_0 é chamado parte inteira de α (vide [5]).

Definição 4.2 *Chamamos de **expressão decimal finita** a um símbolo da forma*

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$$

com $a_{n+1} = a_{n+2} = ... = 0$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Representaremos, uma expressão decimal finita pelo símbolo

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 ... a_n$$

Observe que podemos representar uma expressão decimal finita da seguinte forma

$$\alpha = a_0,a_1a_2...a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n}$$

que é um número racional, com o denominador sendo uma potência de 10, logo, podemos afirmar que α é uma fração decimal (vide [5]).

Exemplos 4.1.1:

$a)$ $\alpha = 4,23657 = 4 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{7}{10^5} = \frac{423657}{100000}$

$b)$ $\alpha = 12,471 = 12 + \frac{4}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{1}{10^3} = \frac{12471}{1000}$

Definição 4.3 *Chamamos de* ***expressão decimal infinita e periódica*** *a um símbolo da forma*

$$\alpha = a_0,a_1a_2...a_na_{n+1}a_{n+2}...a_{n+m}a_{n+1}a_{n+2}...a_{n+m}a_{n+1}a_{n+2}...a_{n+m}...$$

que apresenta, a partir de certo ponto, alguns dígitos $a_{n+1}a_{n+2}...a_{n+m}$, se repetindo indefinidamente na mesma ordem.

Mais adiante, mostraremos como transformar expressão decimal infinita e periódica em números racionais.

Exemplos 4.1.2:

$a)$ $\alpha = 3,484848...$

$b)$ $\alpha = 51,123253253...$

Sabemos que as frações possuem uma representação decimal finita ou infinita e periódica(vide [8]).

Pela Definição 4.2, para uma fração possuir uma representação decimal finita, seu denominador deve ser representado por uma potência de 10. Pois

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n} = \frac{a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + ... + a_n}{10^n}$$

Da aritmética, sabemos que as potências de 10, quando decompostas em fatores primos, possuem somente o algarismo 2 e o algarismo 5 como fatores primos. Portanto, para uma fração possuir uma representação decimal finita, seu denominador deve ser do tipo 2^n5^n, com $n \in \mathbb{N}$.

O Teorema 4.1 a seguir, mostra como verificar se uma fração irredutível possui representação decimal finita, sem fazer a divisão do numerador pelo denominador, apenas decompondo o denominador em fatores primos e, o transformando na sua forma de potência.

Teorema 4.1 *Uma fração é irredutível (de denominador $b = 2^n5^m$), com $n,m \in \mathbb{N}$ se, somente se, possui representação decimal finita se, somente se seu denominadpr é da forma $b = 2^n5^m$).*

Demonstração: Inicialmente, vamos mostrar que:

Se uma fração é irredutível de denominador $b = 2^n 5^m$, com $n, m \in \mathbb{N}$, então ela possui representação decimal finita.

HIPÓTESE: Fração irredutível de denominador $b = 2^n 5^m$, com $n, m \in \mathbb{N}$

TESE: A fração possui representação decimal finita.

Dada uma fração irredutível $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{N}$ e $b \neq 0$.

Vejamos todos os casos possíveis:

1° caso: Se $b = 2^n$,com $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^n} = \frac{a5^n}{2^n 5^n} = \frac{a5^n}{10^n}$$

2° caso: Se $b = 5^m$, com $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{5^m} = \frac{a2^m}{2^m 5^m} = \frac{a2^m}{10^m}$$

3 ° caso: Se $b = 2^n 5^m$, com $m, n \in \mathbb{N}$

- se $n = m$, então $b = 2^n 5^n$, logo:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^n 5^n} = \frac{a}{10^n}$$

- $n < m$, então:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^n 5^m} = \frac{a2^{m-n}}{2^n 5^m 2^{m-n}} = \frac{a2^{m-n}}{5^m 2^{m-n+n}} = \frac{a2^{m-n}}{5^m 2^m} = \frac{a2^{m-n}}{10^m}$$

- $n > m$, então:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^n 5^m} = \frac{a5^{n-m}}{2^n 5^m 5^{n-m}} = \frac{a5^{n-m}}{5^{m+n-m} 2^n} = \frac{a5^{n-m}}{5^n 2^n} = \frac{a5^{n-m}}{10^n}$$

Observe que em cada um dos casos acima, obtemos frações com denominadores como potências de 10. Logo, se o denominador for do tipo $b = 2^n 5^m$, com $n, m \in \mathbb{N}$, a fração possui representação decimal finita.

Agora, vamos mostrar, que:

Se uma fração possui representação decimal finita, então a fração é irredutível com denominador $b = 2^n 5^m$, com $n, m \in \mathbb{N}$.

HIPÓTESE: A fração possui representação decimal finita;

TESE: A fração é irredutível de denominador $b = 2^n 5^m$,com $n, m \in \mathbb{N}$.

Seja $\alpha = a_0, a_1 a_2 ... a_n$ a representação decimal finita de uma fração qualquer. Pela Definição 4.2, podemos reescrever uma expressão decimal finita da seguinte forma

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n} =$$

$$\frac{a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + ... + a_n}{10^n} = \frac{a}{10^n} = \frac{a}{2^n 5^n}$$

que é um número racional, onde $a = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + ... + a_n$. Veja que o denominador é uma potência de 10, logo podemos afirmar que $\dfrac{a}{2^n 5^n}$ é uma fração irredutível com denominador $b = 2^n 5^m$ com $n, m \in \mathbb{N}$.

$\square$

A demonstração que acabamos de ver foi baseada numa demonstração encontrada em [8].

Pelo Teorema 4.1, é possível afirmar que toda fração irredutível com denominador $b \neq 2^n 5^m$, com $n, m \in \mathbb{N}$, possui representação decimal infinita e periódica.

Exemplos 4.1.3: Frações com representação decimal finita.

$a)\ \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2^2} = 0,25$

$b)\ \dfrac{3}{2} = 1,5$

$c)\ \dfrac{1}{5} = 0,2$

$d)\ \dfrac{3}{25} = \dfrac{3}{5^2} = 0,12$

$e)\ \dfrac{3}{10} = \dfrac{3}{2.5} = 0,3$

$f)\ \dfrac{3}{20} = \dfrac{3}{2^2 5} = 0,15$

$i)\ \dfrac{11}{50} = \dfrac{11}{2.5^2} = 0,22$

$g)\ \dfrac{13}{200} = \dfrac{13}{2^3 5^2} = 0,065$

Exemplos 4.1.4: Frações com representação decimal infinita e periódica.

$a)\ \dfrac{7}{12} = \dfrac{7}{2^2 3} = 0,58333...$

$b)\ \dfrac{3}{35} = \dfrac{3}{7.5} = 0,857172857142...$

$c)\ \dfrac{3}{35} = \dfrac{3}{7.5} = 0,857172857142...$

$d)\ \dfrac{7}{300} = \dfrac{7}{2^2.3.5^2} = 0,0233...$

Observe que os Exemplos 4.1.3 são frações com denominadores do tipo $b = 2^n 5^m$, com $n, m \in \mathbb{N}$ e vimos que chegamos a uma representação decimal finita. Já nos Exemplos 4.1.4 as frações possuem denominadores $b \neq 2^n 5^m$, com $n, m \in \mathbb{N}$ chegando a uma representação infinita e periódica.

4.2 Dízimas periódicas simples e compostas

Definição 4.4 *Dizemos que um número é uma dízima periódica e simples quando sua expressão decimal for* $\alpha = 0, a_1a_2a_3...a_n...$, *com* $n \in \mathbb{N}$, *em que o período* $a_1a_2a_3...a_n$ *se repete indefinidamente na mesma ordem. Ou seja, o período aparece imediatamente após a vírgula (vide [5]).*

Observe que quando falamos em dízima nos referimos apenas aos dígitos após a vígula.
Exemplos 4.2.1: Os exemplos abaixo são dízimas periódicas simples, com períodos $7, 29$ e 512 respectivamente.

$a)0,777...$
$b)0,2929...$
$c)0,512512...$

Definição 4.5 *Dizemos que uma dízima é periódica composta quando sua expressão decimal* $\alpha = 0, a_1a_2a_3...a_n...$, *com* $n \in \mathbb{N}$, *apresenta um ou mais dígitos após a vírgula que não se repetem, seguidos de uma parte periódica. Ou seja, existe um ou mais algarismos entre a vírgula e o período, que não fazem parte da composição do período (vide [5]).*

Exemplos 4.2.2: Veja que as dízimas abaixo representam dízimas periódicas compostas com períodos 2, 43 e 631 respectivamente.

$a)0,7222...$
$b)0,584343...$
$c)0,152631631...$

4.3 Fração geratriz

Teorema 4.2 *Toda dízima periódica representa um número racional, ou seja, é possível encontrar a fração que dá origem à dízima. A essa fração damos o nome de fração geratriz.*

Demonstração: Segue diretamente da demonstração do Teorema 4.3 e na Observação 4.1 a seguir.
Exemplos 4.3.1: Vejamos como encontrar o número racional, que representa a dízima periódica.

Vamos encontrar o número racional que representa as dízimas periódicas dos dois primeiros exemplos da Definição 4.4.

$a)0,77777... = \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + ...$ onde se percebe que temos uma soma infinita de termos de uma progressão geométrica (ver Observação A.1 de $A.7$ no Apêndice A).

Observe que $a_1 = \frac{7}{10}$ e $q = \frac{1}{10}$, assim:

$$0,77777... = \frac{7}{10}.\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{7}{10}.\frac{10}{10-1} = \frac{7}{9}$$

$b)0,292929... = \frac{29}{10^2} + \frac{29}{10^4} + \frac{29}{10^6} + ...$ onde se percebe, a partir do segundo termo, que temos uma soma infinita de termos de uma progressão geométrica (ver Observação A.1 de $A.7$ no Apêndice A), com $a_1 = \frac{29}{10^2}$ e $q = \frac{1}{10^2}$, assim:

$$0,292929... = \frac{29}{10^2}.\frac{1}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{29}{10^2}.\frac{10^2}{10^2-1} = \frac{29}{99}$$

A geratriz de uma dízima periódica simples é uma fração cujo numerador é o período e o denominador é o número formado por tantos noves quantos são os algarismos do período (vide [5]).

Exemplos 4.3.2: Agora, vamos calcular o número racional, que representa as dízimas periódicas dos dois primeiros exemplos da Definição 4.5.

$a)0,7222... = \frac{7}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^3} + ...$ onde se percebe, que a partir do segundo termo, temos uma soma infinita de termos de uma progressão geométrica (ver Observação A.1 de $A.7$ no Apêndice A), com $a_1 = \frac{2}{10^2}$ e $q = \frac{1}{10}$, assim:

$$0,72222222... = \frac{7}{10} + \frac{2}{10^2}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{7}{10} + \frac{2}{10^2}.\frac{10}{9} = \frac{7}{10} + \frac{2}{90} =$$

$$\frac{7.9+2}{90} = \frac{7(10-1)+2}{90} = \frac{70+2-7}{90} = \frac{72-7}{90}$$

Isto é

$$0,72222222... = \frac{72-7}{90}$$

Ou, finalmente:

$$0,72222222... = \frac{65}{90}$$

$b)0,58434343... = \frac{58}{10^2} + \frac{43}{10^4} + \frac{43}{10^6} + ...$ onde se percebe que a partir do segundo termo, temos uma soma infinita de termos de uma progressão geométrica (ver Observação A.1 de $A.7$ no Apêndice A), com $a_1 = \frac{43}{10^4}$ e $q = \frac{1}{10^2}$ assim:

$$0,58434343... = \frac{58}{10^2} + \frac{43}{10^4}.\frac{1}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{58}{10^2} + \frac{43}{10^4}.\frac{10^2}{10^2-1} =$$

$$\frac{58}{10^2} + \frac{43}{9900} = \frac{58(99)+43}{9900} = \frac{58(100-1)+43}{9900} = \frac{5800+43-58}{9900}$$

Isto é,

$$0,58434343... = \frac{5843-58}{9900}$$

Ou finalmente

$$0,58434343... = \frac{5785}{9900}$$

A geratriz de uma dízima periódica composta é a fração cujo numerador é igual à parte não periódica seguida de um período menos a parte não periódica e cujo denominador é formado por tantos noves quantos são os algarismos do período, seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não periódica(vide [5]).

Teorema 4.3 *(Transformação de dízimas periódicas em frações) A dízima periódica*

$$0,a_1a_2...a_mb_1b_2...b_n...$$

é um número racional que pode ser escrito como:

$$\frac{a_1a_2...a_mb_1b_2...b_n - a_1a_2...a_m}{\underbrace{99...9}_{n-vezes}\underbrace{00...0}_{m-vezes}}$$

Onde o denominador da fração é um número com n noves e m zeros. Com $a_1a_2...a_m$ a parte não periódica e $b_1b_2...b_n$ o período.

Demonstração: Seja $0,a_1a_2...a_mb_1b_2...b_n...$ uma dízima periódica, onde $0,a_1a_2...a_m$ é a parte não periódica e $b_1b_2...b_n$ o período com $n,m \in \mathbb{N}$. Vamos calcular o número racional que representa essa dízima.

Veja que podemos reescrever a dízima periódica da seguinte maneira:

$$0,a_1a_2...a_mb_1b_2...b_n... = \frac{a_1a_2...a_m}{10^m} + \frac{b_1b_2...b_n}{10^{m+n}} + \frac{b_1b_2...b_n}{10^{m+2n}} + ...$$

onde se percebe que a partir do segundo termo, temos uma soma infinita de termos de uma progressão geométrica com $a_1 = \frac{b_1b_2...b_n}{10^{m+n}}$ e $q = \frac{1}{10^n} < 1$. Pela Observação A.1 de A.7, que se encontra no apêndice A, o $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a_1}{(1-q)}$. Observe ainda que n representa a quantidade de algarismos que o período possui.

$$0,a_1a_2...a_mb_1b_2...b_n... = \frac{a_1a_2...a_m}{10^m} + \frac{b_1b_2...b_n}{10^{m+n}}.\frac{1}{1-\frac{1}{10^n}} = \frac{a_1a_2...a_m}{10^m} + \frac{b_1b_2...b_n}{10^{m+n}}.\frac{10^n}{10^n-1} =$$

$$\frac{a_1a_2...a_m}{10^m} + \frac{b_1b_2...b_n}{10^m.(10^n-1)} = \frac{a_1a_2...a_m.(10^n-1)+2+b_1b_2...b_n}{10^m.(10^n-1)} =$$

$$\frac{a_1a_2...a_m.10^n - a_1a_2...a_m + b_1b_2...b_n}{10^m.(10^n-1)} =$$

$$\frac{a_1a_2...a_mb_1b_2...b_n - a_1a_2...a_m}{10^m.(10^n-1)}$$

Mas como $(10^n-1) = 1\underbrace{00...0}_{n-zeros}-1 = \underbrace{99...9}_{n-noves}$, então:

$$0,a_1a_2...a_mb_1b_2...b_n... = \frac{a_1a_2...a_mb_1b_2...b_n - a_1a_2...a_m}{10^m.(10^n-1)} =$$

$$\frac{a_1a_2...a_mb_1b_2...b_n - a_1a_2...a_m}{10^m.\underbrace{99...9}_{n-noves}} =$$

$$\frac{a_1a_2...a_mb_1b_2...b_n - a_1a_2...a_m}{1\underbrace{00...0}_{m-zeros}.\underbrace{99...9}_{n-noves}} =$$

$$\frac{a_1a_2...a_mb_1b_2...b_n - a_1a_2...a_m}{\underbrace{99...9}_{n-noves}\underbrace{00...0}_{m-zeros}}$$

Onde o denominador da fração é um número com n noves e m zeros, sendo n o números de algarismos do período e m o número de algarismos da parte não periódicas. □

Observação 4.1 *Quando a expressão for uma dízima periódica simples* $0,b_1b_2...b_nb_1b_2...b_n...$, *com* $n \in \mathbb{N}$*, onde* $b_1b_2...b_n$ *é o período, conclui-se do Teorema 4.2, que número racional que representa essa dízima é igual a*

$$\frac{b_1b_2...b_n}{9...9}$$

Onde o denominador é um número composto por n noves.

O Teorema 4.3 e a Observação 4.1 podem ser encontrados em [4].

Exemplos 4.3.3: Vejamos alguns exemplos, onde são aplicados o Teorema 4.3 e a Observação 4.1:

$a)0,555...$

Observe que a expressão decimal representa uma dízima periódica simples, logo, pela Observação 4.1 acima, temos que:

$$0,555... = \frac{5}{9}$$

$b)0,3535...$

Observe que a expressão decimal representa uma dízima periódica simples, logo pela Observação 4.1 acima, temos que:

$$0,3535... = \frac{35}{99}$$

$c)0,253636...$

Observe a expressão decimal representa uma dízima periódica composta, onde 25 é a parte não periódica e 36 é o período, logo, pelo Teorema 4.3, temos:

$$0,253636... = \frac{2536-25}{9900}$$

$d)0,56388...$

Observe a expressão decimal representa uma dízima periódica composta, onde 563 é a parte não periódica e 8 é o período, logo, pelo Teorema 4.3, temos:

$$0,56388... = \frac{5638-563}{9000}$$

Capítulo 5

Sequências Didáticas

Neste capítulo, estamos propondo algumas atividades relacionadas ao estudo de segmentos comensuráveis e segmentos incomensuráveis e suas aplicações nos conteúdos de números racionais e números irracionais. Também apresentaremos algumas atividades referentes às expressões decimais finitas e às expressões decimais infinitas e periódicas.

5.1 Sequência Didática 1

Disciplina: Matemática

Série: Esta atividade deverá ser desenvolvida preferencialmente com turmas do 1° ano do Ensino Médio.

Duração: O tempo previsto para a aplicação das atividades é de 2 horas/aulas.

Conteúdo: Segmentos comensuráveis.

Desenvolvimento: Estas atividades serão desenvolvidas na sala de aula, com a utilização de régua não graduada, um par de esquadros e compasso.

Pré-Requisitos: O aluno deve saber manusear compasso e esquadros. Antes de desenvolver esses atividades, devemos apresentar aos alunos como dividir um segmento qualquer, em *n* partes iguais. Uma maneira de dividir segmentos em n partes iguais, está apresentada no apêndice A, em A.6

Objetivos:

I. Levar os alunos a compreederem o conceito de segmentos comensuráveis;

II. Fazer os alunos compreenderem que qualquer segmento de medida racional, é comensurável com o segmento unitário;

III. Mostrar que segmentos de medidas irracionais podem ser segmentos comensuráveis com outros segmentos;

IV. Levar os alunos a compreenderem que se dois segmentos são comensuráveis seus múltiplos também são.

Atividades

1. Dados dois segmentos, AB e $CD = u$, vamos verificar se esses dois segmentos possuem uma medida de segmento comum, utilizando apenas uma régua não graduada e um compasso. Os dois segmentos ,AB e CD, estão representados na Figura 5.1:

Figura 5.1: Segmentos AB e CD

Siga os passos a seguir:

- Inicialmente, coloque a ponta seca do compasso no ponto C e abra-o até o ponto D.
- Depois, fixe a ponta seca do compasso no ponto A, com abertura medindo $\overline{CD}$ e marque um ponto E sobre o segmento AB (Veja que $\overline{AE}$=$\overline{CD}$).
- Repita o passo anterior, o número de vezes que forem possíveis marcar segmentos de medida $\overline{CD}$ sobre o segmento AB.

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB?

(b) Dado o segmento EF (Figura 5.2), verifique se ele cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD.

Figura 5.2: Segmentos AB, CD e EF

2. Seguindo os mesmos passos propostos na questão anterior, vamos verificar se o segmento AB e o segmento CD possuem uma medida de segmento comum. Veja, na Figura 5.3, a representação dos segmentos AB e CD .

Figura 5.3: Segmentos AB e CD

   (a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB?
      - No item "a"acima, verificou-se que após marcar segmentos de medida $\overline{CD}$ sobre o segmento AB, sobra um segmento de medida $\overline{f}$ no segmento AB.

   (b) O segmento f coube um número inteiro de vezes no segmento CD? E no segmento AB?

   (c) O segmento AB e o segmento CD possuem uma medida de segmento comum?

3. Verifique se o segmento AB de medida $\sqrt{2}$ cabe um número inteiro de vezes no segmento CD de medida $2\sqrt{2}$. Os segmentos AB e CD estão representados na Figura 5.4:

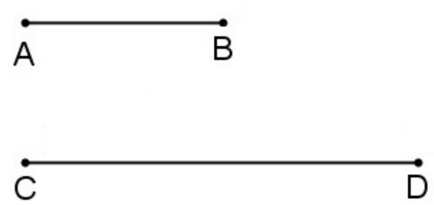


Figura 5.4: Segmentos AB e CD

a)O segmento de medida $\sqrt{2}$ coube um número inteiro de vezes no segmento de medida $2\sqrt{2}$?

b)O segmento AB e o segmento CD possuem uma medida de segmento comum?

c)Sem fazer cálculos, nem utilizar o P.V.C.D.S, você consegue justifiqcar que o segmento de medida $n\sqrt{2}$, com $n \in \mathbb{N}$ e o segmento $\sqrt{2}$ são comensuráveis?

Observação: As atividades acima são variações de uma mesma ideia, que é apresentar ao aluno o conceito de segmentos comensuráveis, fazendo com que os alunos enxerguem o conceito sem que o mesmo tenha sido apresentado previamente, e posteriormente possam aplicar esse conceito no estudo de números racionais .

4. Considere o segmento de reta AB de medida u, representado na Figura 5.5:

Figura 5.5: Segmento AB=u

Veja o processo para obter o ponto C da semirreta AB, tal que $AC = \frac{5u}{3}$.
1°. Divida o segmento u em três partes iguais a $\frac{u}{3}$, com o auxílio de uma par de esquadros e um compasso.
2°. A partir de A medem-se, sobre a semirreta AB, cinco partes iguais a $\dfrac{u}{3}$, obtendo-se assim o ponto C.
Utilizando o mesmo processo, obtenha, se possível, os pontos D, E e F tal que $\overline{AD} = \dfrac{8\overline{u}}{5}$, $\overline{AE} = 2\overline{u}$ e $\overline{AF} = \dfrac{3\overline{u}}{4}$.
Após marcar esses pontos na reta, responda as perguntas a seguir:

a) Os segmentos AB e AC são comensuráveis? Justifique.

b) Os segmentos AB e AE são comensuráveis? Justifique.

c) Os segmentos AE e AF são comensuráveis? Justifique.

d) Agora, utilizando o mesmo processo, justifique como marcar um ponto X qualquer, tal que $AX = \dfrac{nu}{m}$, com $m, n \in \mathbb{N}$.

5.2 Sequência Didática 2

Disciplina: Matemática

Série: Esta atividade deverá ser desenvolvida preferencialmente com turmas do 1° ano do Ensino Médio.

Duração: O tempo previsto para a aplicação das atividades é de 1 hora/aulas.

Conteúdo: Segmentos incomensuráveis.

Desenvolvimento: Esta atividade será desenvolvida na sala de aula, com a utilização de régua não graduada e um compasso.

Pré-Requisitos: O aluno deve saber como manusear um compasso .

Objetivos:

I. Convencer os alunos que o segmento que representa o comprimento do círculo e o segmento que representa seu diâmetro são incomensuráveis.

II. Levar os alunos a concluirem, que segmentos incomensuráveis com o segmento unitário possuem medida irracional.

Atividade

1. Dado um círculo $C = 2\pi r$ de diâmetro $AB = 2r$, representa na Figura 5.6:

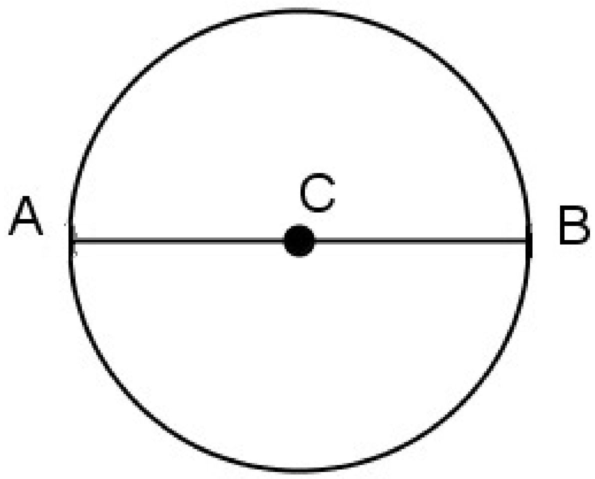


Figura 5.6: Círculo de centro C

Abrindo o círculo no ponto A, obteremos o segmento AA_1, que representa seu comprimento. Veja Figura 5.7, o segmento AA_1 que representa o comprimento do círculo e o segmento AB que representa diâmetro.

Figura 5.7: Comprimento AA_1 e diamentro AB

Verifique se os segmentos AA_1 e AB, representados na figura acima, são incomensuráveis.

Observação: Professor, repita os passos anteriores, agora, utilizando um círculo de diâmetro medindo 1, para mostrar aos alunos que o segmento que representa o comprimento do círculo $C = \pi$ e o segmento unitário que representa o diâmetro do círculo $d = 1$ são incomensuráveis. Assim levar os alunos a concluirem que segmentos incomensuráveis com o segmento unitário, possuem medida irracional.

5.3 Sequência Didática 3

Disciplina: Matemática

Série: Esta atividade deverá ser desenvolvida preferencialmente com turmas do 1° ano do Ensino Médio.

Duração: O tempo previsto para a aplicação das atividades é de 2 horas/aulas.

Conteúdos: Números decimais finitos e números decimais infinitos e periódicos.

Desenvolvimento: Estas atividades serão desenvolvidas na sala de aula. Antes de desenvolver está atividade, deveremos apresentar aos alunos o Teorema 4.1, o Teorema 4.2 e a Observação 4.1, que se encontram no Capítulo 4.

Pré-Requisitos: Ter conhecimento sobre: decomposição de um números em fatores primos, mínimo multiplo comum e as quatro operações com frações.

Objetivos:

I. Verificar se o alunos compreenderam que para uma fração possuir representação decimal finita seu denominador deve ser do tipo 2^n e 5^m,com n,m $\in\mathbb{N}$

II. Verificar se os alunos compreenderam que quando o denominador $b \neq 2^n 5^m$, com n,m$\in\mathbb{N}$, possui representação decimal infinita e periódica.

Atividades

1. Sem realizar cálculos, verifique se as frações irredutíveis abaixo possuem representação decimal finita ou infinita e periódica, apenas trabalhando com o denominador.

   a)$\dfrac{73}{8}$

   b)$\dfrac{49}{6}$

   c)$\dfrac{782}{125}$

   d)$\dfrac{8753}{500}$

   e)$\dfrac{843}{14}$

2. Calcule as operações entre as dízimas periódicas abaixo:

   a) 0,777... + 0,24333...

   b)0,252525... $\times$ 0,2333...

   c)0,42743743... $\div$ 0,2525...

   d)0,4526363...- 0,7454545....

3. Mostre que:

   0,111... + 0,222... + 0,333... + 0,999... = 0,111... + 0,222... + 0,333... + 1

Justifique como você obteve o resultado.

5.4 Respostas

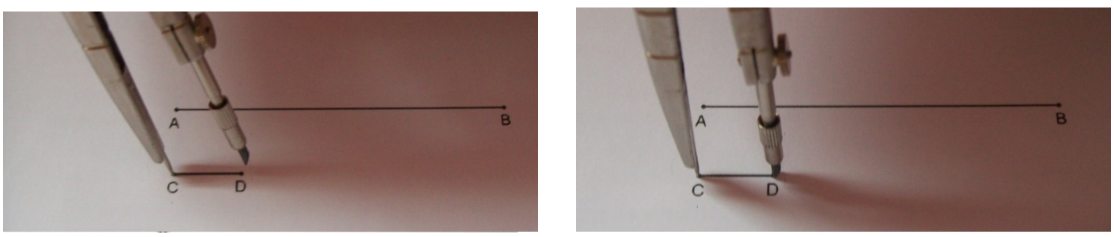
Nesta seção, apresentaremos as respostas às atividades propostas nas sequências didáticas 1, 2 e 3.

Sequência didática 1: Respostas

Atividade 1

Seguindo os passos propostos na questão:

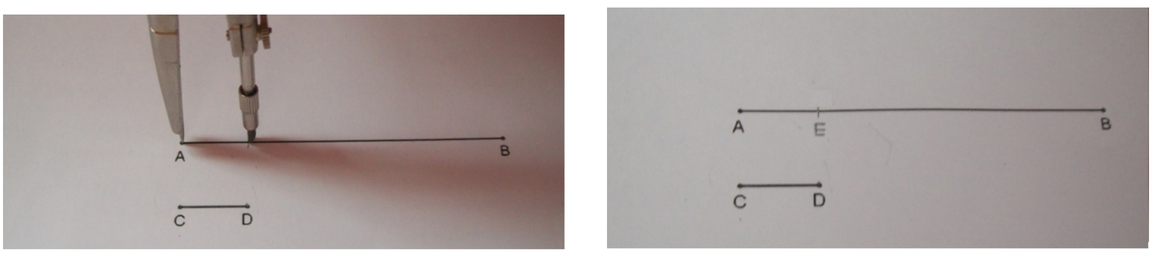
- Inicialmente coloque a ponta seca do compasso no ponto C (Figura 5.8 (a)) e abra-o até o ponto D(Figura 5.8 (b) .



(a) (b)

Figura 5.8: (a) ponta seca do compasso no ponto C e (b) compasso com abertura CD.

- Depois, fixe a ponta seca do compasso no ponto A (Figura 5.9 (a)), com abertura medindo $\overline{CD}$ e marque um ponto E (Figura 5.9 (b)) sobre o segmento AB (Veja que $\overline{AE}$=$\overline{CD}$).



(a) (b)

Figura 5.9: (a) ponta seca do compasso no ponto A e (b) segmento AE.

- Repita o passo anterior, o número de vezes que forem possíveis marcar segmentos de medida $\overline{CD}$ sobre o segmento AB.

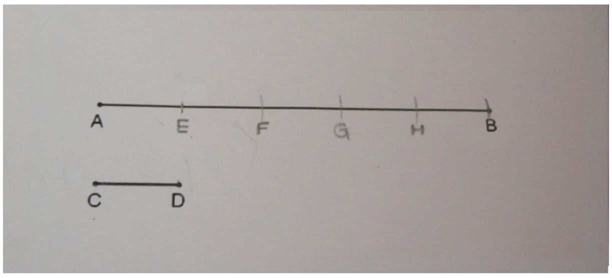


Figura 5.10: Segmento AB

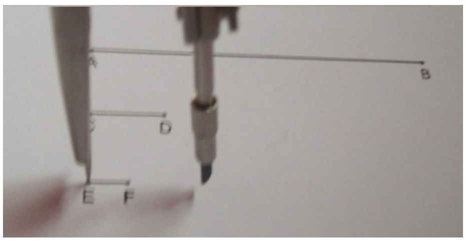
(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB?

Sabemos que $\overline{AE} = \overline{CD}$, como vimos na Figura 5.9(b). Para marcar os demais pontos no segmento AB, a abertura do compasso deve ser mantida, portanto, $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HB} = \overline{CD}$. Observando a Figura 5.10 acima, podemos ver que o segmento CD coube 5 vezes no segmento AB, pois $\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GH} + \overline{HB} = 5\overline{CD}$.

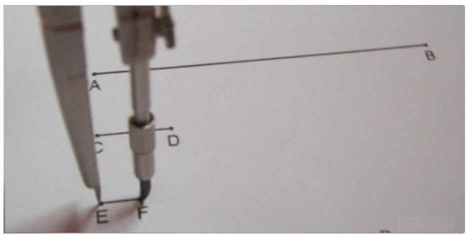
Portanto, o segmento CD cabe um número inteiro de vezes no semento AB

(b) Dado o segmento EF , verifique se ele cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD.

Seguindo os mesmos passos realizados inicialmente com os segmentos, AB e CD, agora utilizando os segmentos EF e CD (Ver Figuras 5.11 (a) e (b)).



(a)



(b)

Figura 5.11: (a) Ponta seca do compasso no ponto E e (b) Compasso com abertura EF.

Fixando a ponta seca do compassso no C e, marcando sobre o segmento CD, pontos com o auxílio do compasso com abertura medindo $\overline{EF}$, o número de vezes que forem possíveis.

Podemos ver na Figura 5.12 na página seguinte, que o segmento EF cabe 2 vezes no segmento CD.

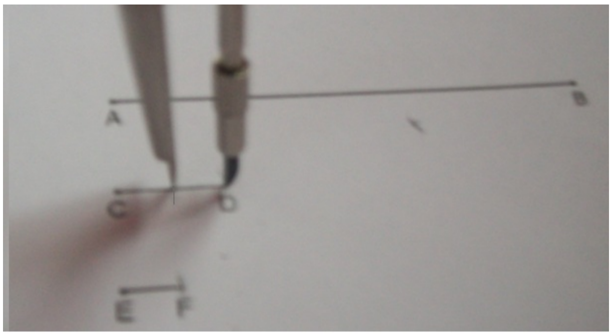


Figura 5.12: Segmentos EF e CD

Vimos que o segmento CD cabe 5 vezes no segmento AB, como $\overline{CD} = 2\overline{EF}$ então, $\overline{AB} = 5(2\overline{EF}) = 10\overline{EF}$, portanto, o segmento EF cabe 10 vezes no segmento AB.

Caso prefira verificar se o segmento EF, cabe um número inteiro de vezes no segmento AB, geometricamente, basta seguir os passo realizados na atividade 1, agora, utilizando os segmentos EF e AB (Veja Figura 5.13).

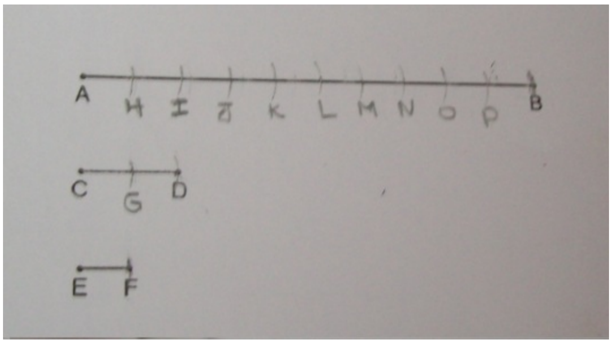
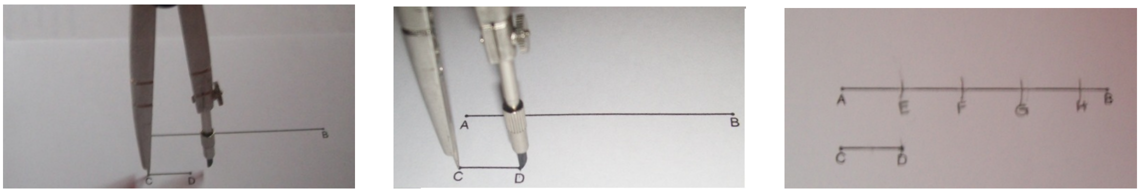


Figura 5.13: Segmento $AB = 10EF$, segmento $CD = 2EF$ e segmento EF

Portanto, o segmento EF cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD.

Atividade 2

Seguindo os mesmos passos propostos na atividade 1, vamos verificar se o segmento AB e o segmento CD, possuem uma medida de segmento comum. Veja na Figura 14 (a), (b) e (c) na página seguinte, os passos realizados com os segmentos AB e CD.



(a) (b) (c)

Figura 5.14: (a) Ponta seca do compasso no ponto C, (b) Compasso com abertura CD e (c) Pontos marcados sobre o segmento AB.

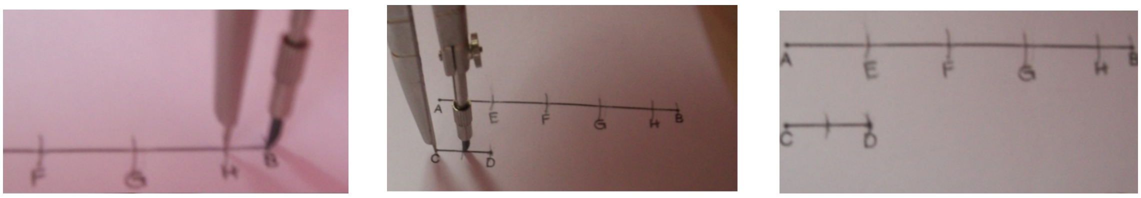
(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB?

Observe na Figura 5.14 (c), que após marcar com o compasso segmentos de medida $\overline{CD}$ sobre o segmento AB, podemos ver que: $\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GH} + \overline{HB}$, com $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{CD}$, logo $\overline{AB} = 4\overline{CD} + \overline{HB}$, portanto, o segmento CD não coube um número inteiro de vezes no segmento AB, pois, sobrou o segmento HB no segmento AB.

- No item (a) acima, verificou-se que após marcar segmentos de medida $\overline{CD}$ sobre o segmento AB, sobra um segmento de medida $\overline{HB}$ no segmento AB.

(b) O segmento HB coube um número inteiro de vezes no segmento CD? E no segmento AB?

Para responder a essa questão devemos repetir todos os passos propostos na atividade 1, agora, utilizando os segmentos HB e CD. Veja os passos na figura 15 (a), (b) e (c).



(a) (b) (c)

Figura 5.15: (a) Compasso com abertura HB, (b) Marcação de segmentos de medida $\overline{HB}$ no segmento CD e (c) Pontos marcados sobre o segmento CD.

Veja na Figura 15 (c) acima, que o segmento $\overline{CD} = 2\overline{HB}$ e como $\overline{AB} = 4\overline{CD} + \overline{HB}$ então $\overline{AB} = 4\overline{CD} + \overline{HB} = 4(2\overline{HD}) + \overline{HD} = 9\overline{HD}$.

Observação: Caso ache melhor, repita todos os passos propostoas na atividade 1, com os segmentos HB e AB, para mostrar que: $\overline{AB} = 9\overline{HD}$.

(c) O segmento AB e o segmento CD, possuem uma medida de segmento comum?

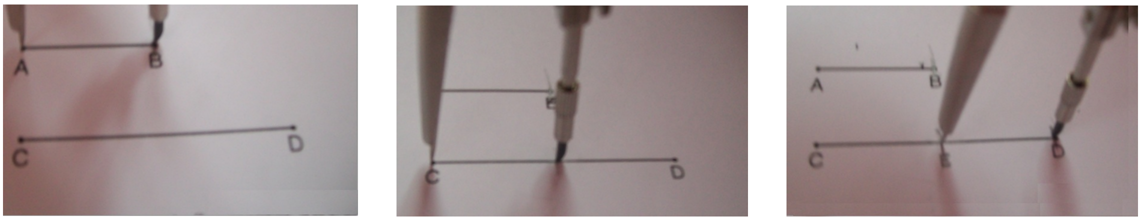
Vimos no item (b) que $\overline{CD} = 2\overline{HB}$ e que $\overline{AB} = 9\overline{HD}$, logo, podemos concluir que o segmento AB e o segmento CD tem uma medida de segmento comum $\overline{HB}$.

Observe que o segmento HB cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD, logo, os segmentos AB e CD, são comensuráveis.

Atividade 3

a)O segmento de medida $\sqrt{2}$ coube um número inteiro de vezes no segmento de medida $2\sqrt{2}$?

Para responder a essa questão, devemos repetir os passos propostos na atividade 1. Veja na Figura 5.16 (a), (b) e (c) abaixo, os passos realizados com os segmentos de medida $\sqrt{2}$ e de medida $2\sqrt{2}$.



(a) (b) (c)

Figura 5.16: (a) Compasso com abertura AB, (b) Marcação de segmentos de medida $\overline{AB}$ no segmento CD e (c) Pontos marcados sobre o segmento CD.

Observando a Figura 5.16 (c), podemos ver que o segmento $AB = \sqrt{2}$ coube duas vezes no segmento $CD = 2\sqrt{2}$.

b)O segmento AB e o segmento CD, possuem uma medida de segmento comum?

No item (b) vimos que $\overline{CD} = 2\overline{AB}$, logo, o segmento AB cabe um vez nele mesmo e cabe duas vezes no segmento CD. Portanto, os segmentos ,CD e AB, possuem o segmento AB de medida $\sqrt{2}$ em comum.

Como o segmento AB cabe uma vez nele mesmo e duas vezes no segmento CD, então os segmentos, AB e CD, são ditos comensuráveis.

c)Sem fazer cálculos, nem utilizar o P.V.C.D.S, você consegue justifiqcar que o segmento de medida $n\sqrt{2}$, com $n \in \mathbb{N}$ e o segmento $\sqrt{2}$ são comensuráveis?

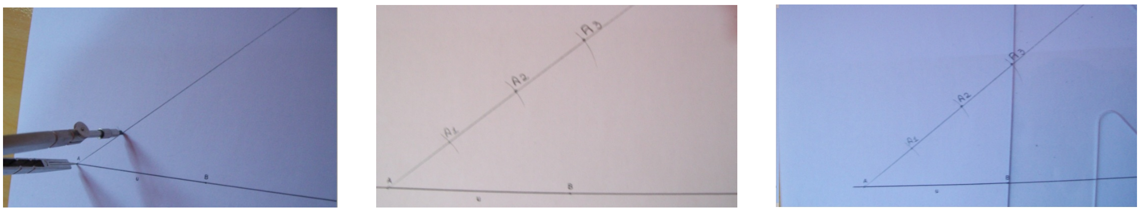
Como o segmento de medida $\sqrt{2}$ cabe n vezes no segmento de medida $n\sqrt{2}$ e uma vez no segmento de medida $\sqrt{2}$. Portanto, o segmento de medida $n\sqrt{2}$ e o segmento $\sqrt{2}$ são comensuráveis.

Atividade 4

Seguindo os passoa propostos na atividade.

- Vamos obter o ponto C da semirreta AB, tal que $\overline{AC} = \dfrac{5\overline{u}}{3}$.

  Inicialmente vamos dividir o segmento u em três partes iguais a $\dfrac{u}{3}$, com o auxílio de uma par de esquadros e um compasso. Esse processo de dividir um segmento em n partes iguais, deverá ser apresentado anteriormente aos alunos. Uma forma de dividir segmentos em n partes iguais, está apresentada no apêndice A, em A.6.



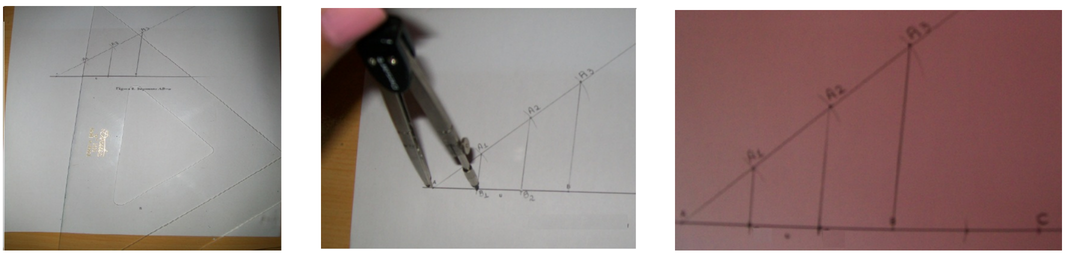
(a) (b) (c)

Figura 5.17: (a)Semirreta de origem A , (b)Marcação de três segmentos na semirreta de origem A e (c) Segmento A_3B.

Veja na Figura 5.17 (a), que após traçar uma semirreta de origem no ponto A, fixa-se a ponta seca do compasso no ponto A e com abertura qualquer traça um ponto na semirreta.

Na Figura 5.17 (b), podemos ver que com o compasso mantendo a mesma abertura que marcou o primeiro ponto (A_1), foram marcados mais dois pontos A_2 e A_3.

Com o auxílio de um dos esquadros, ligue o ponto A_3 ao ponto B Figura 5.17 (c).



(a) (b) (c)

Figura 5.18: (a) Segmentos paralelos ao segmento A_3B, (b)Marcação do segmento de medida $\overline{AB_1}$ na reta AB e (c) Ponto C marcado sobre a reta AB.

Trace segmentos paralelos ao segmento A_3B como auxílio do par de esquadros, passando pelos pontos, A_2 e A_1(Figura 5.18(a)), interceptando a semirreta AB. Veja que desse modo, acabamos de dividir o segmento AB em três partes iguais, ou seja, dividimos AB em três segmento iguais de medida $\dfrac{\overline{u}}{3}$.

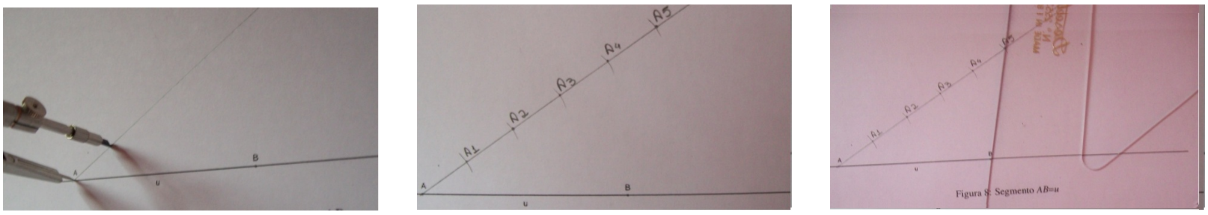
Fixe a ponta seca do compasso no ponta A e abra-o até coincidir com o ponto B_1 (Figura 5.18(b)), obeserve que a abertura do compasso mede $\dfrac{u}{3}$.

Vimos que por construção $\overline{AB_1} = \overline{B_1B_2} = \overline{B_2B} = \dfrac{\overline{u}}{3}$. Como já temos três pontos marcados, basta agora marcar apenas mais dois pontos, obtendo assim o ponto C, logo,$\overline{AC} = \dfrac{5\overline{u}}{3}$.

Utilizando o mesmo processo, vamos obter os pontos D, E e F tal que $\overline{AD} = \dfrac{8\overline{u}}{5}$, $\overline{AE} = 2\overline{u}$ e $\overline{AF} = \dfrac{3\overline{u}}{4}$.

- Vamos seguir os mesmos passos para obter o ponto D da semirreta AB, tal que $\overline{AD} = \dfrac{8\overline{u}}{5}$.

  Inicialmente vamos dividir o segmento u em cinco partes iguais a $\frac{u}{5}$, com o auxílio de uma par de esquadros e um compasso. Veja na Figura 5.19 (a), que após traçar uma



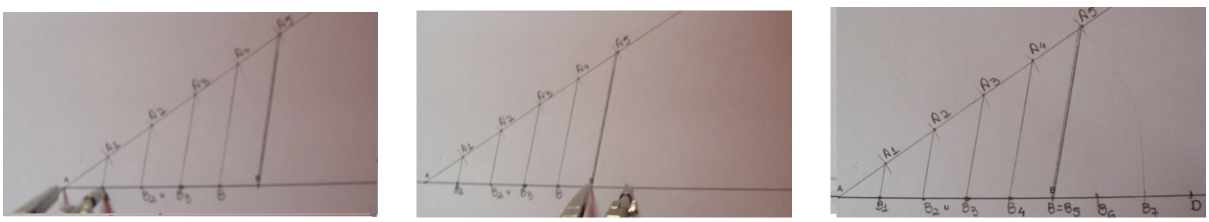
(a) (b) (c)

Figura 5.19: (a) Semirreta de origem A, (b) Marcação de segmentos cinco segmentos na semirreta de origem A e (c) Segmento A_5B.

  semirreta de origem no ponto A, fixa-se a ponta seca do compasso no ponto A e com abertura qualquer traça um ponto na semirreta.

  Na Figura 5.19 (b), podemos ver que com o compasso mantendo a mesma abertura que marcou o primeiro ponto (A_1), foram marcados mais quatro pontos A_2, A_3, A_4 e A_5.

  Com o auxílio de um dos esquadros, ligue o ponto A_5 ao ponto B Figura 5.19 (c).



(a) (b) (c)

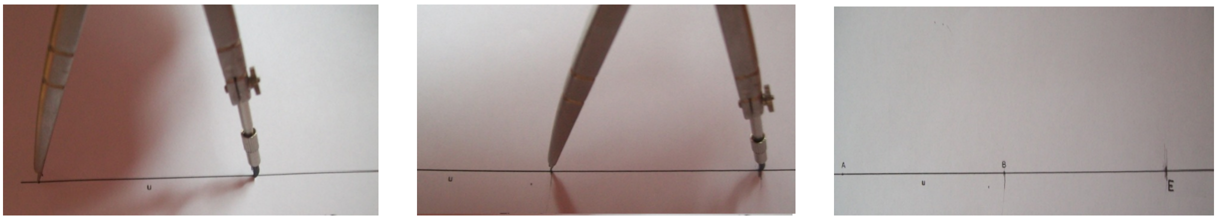
Figura 5.20: (a) Segmentos paralelos ao segmento A_5B, (b)Marcação do segmento de medida $\overline{AB_1}$ na reta AB e (c) Ponto D marcado sobre a reta AB.

  Trace segmentos paralelos ao segmento A_5B como auxílio do par de esquadros, passando pelos pontos A_2, A_3, A_4 e A_5 (Figura 5.20(a)), interceptando a semirreta AB, nos pontos B_4, B_3, B_2 e B_1. Veja, desse modo acabamos de dividir o segmento AB em cinco partes iguais, ou seja, dividimos o segmento AB em cinco segmentos iguais de medida $\frac{\overline{u}}{5}$.

Fixe a ponta seca do compasso no ponta A e abra-o até coincidir com o ponto B_1 (Figura 5.20(b)), obeserve que a abertura do compasso mede $\frac{\overline{u}}{5}$.

Vimos que por construção $\overline{AB_1} = \overline{B_1B_2} = \overline{B_2B_3} = \overline{B_3B_4} = \overline{B_4B} = \dfrac{\overline{u}}{5}$. Como já temos cinco pontos marcados na semirreta AB, basta agora marcar apenas mais três pontos com o compasso com abertura AB_1, obtendo assim o ponto D, logo, $\overline{AD} = \dfrac{8\overline{u}}{5}$.

- Agora, vamos marcar o ponto E na reta AB, tal que $\overline{AE} = 2\overline{u}$.



(a) (b) (c)

Figura 5.21: (a) Compasso com abertura AB, (b)Marcação de segmentos de medida $\overline{AB}$ no reta AB (c) Ponto E marcado sobre a reta AB.

Como $\overline{AE} = 2\overline{u}$ então, vamos utilizar apenas o campasso. Fixe a ponta seca do compasso no ponto A e abra-o até coincidir com o ponto B (Figura 5.21 (a)), logo, a abertura do compasso mede $\overline{u}$.

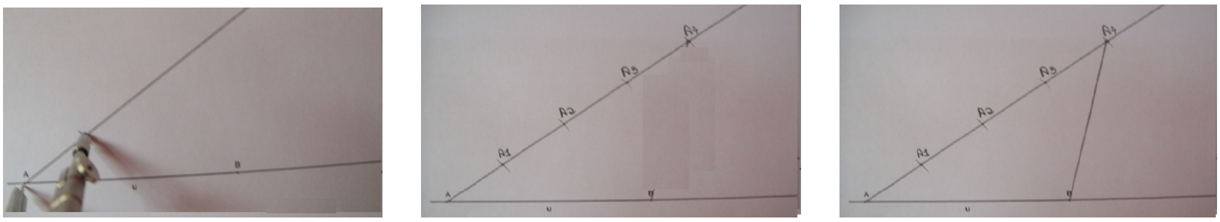
Agora, fixe a ponta seca do compasso no ponto B (Figura 21.1 (b)) e marque outro ponto sobre a reta AB, obtendo assim o ponto E. Observe que $\overline{AE} = 2\overline{u}$

- Agora, vamos marcar o ponto F na reta AB, tal que $\overline{AF} = \dfrac{3\overline{u}}{4}$.

Inicialmente, vamos dividir o segmento u em quatro partes iguais a $\dfrac{u}{4}$, com o auxílio de uma par de esquadros e um compasso.

Veja na Figura 5.22 (a), que após traçar uma semirreta de origem no ponto A, fixa-se a ponta seca do compasso no ponto A e com abertura qualquer trace um ponto na semirreta.

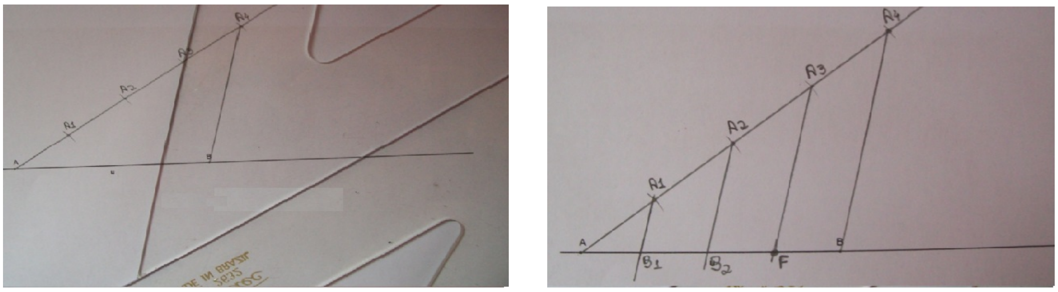
Na Figura 5.22 (b), podemos ver que com o compasso mantendo a mesma abertura que marcou o primeiro ponto (A_1), foram marcados mais três pontos A_2, A_3 e A_4 .



(a) (b) (c)

Figura 5.22: (a) Compasso com abertura AA_1 qualquer, (b) Marcação de segmentos de medida $\overline{AA_1}$ na reta AB e (c) Segmento A_4B.

Com o auxílio de um dos esquadros, ligue o ponto A_4 ao ponto B, Figura 5.22 (c).



(a) (b)

Figura 5.23: (a) Segmentos paralelos ao segmento A_4B e (b) Marcação do ponto F na semirreta AB.

Trace segmento paralelos ao segmento A_4B como auxílio do par de esquadros, passando pelos pontos A_2, A_3 e A_4 (Figura 5.23(a)), interceptando a semirreta AB, nos pontos B_3, B_2 e B_1. Desse modo acabamos de dividir o segmento AB em quatro partes iguais, ou seja, dividimos AB em quatro segmento iguais de medida $\frac{\overline{u}}{4}$.

Fixe a ponta seca do compasso no ponta A e abra-o até coincidir com o ponto B_1 (Figura 5.23(b)), obeserve que a abertura do compasso mede $\frac{\overline{u}}{4}$.

Vimos por construção que $\overline{AB_1} = \overline{B_1B_2} = \overline{B_2B_3} = \overline{B_3B} = \dfrac{\overline{u}}{4}$. Como já temos quatro pontos marcados na semirreta AB, basta agora marcar o ponto F no ponto B_3, logo, $\overline{AF} = \dfrac{3\overline{u}}{4}$.

Após marcados os pontos C, D, E e F na reta, vamos responder as perguntas a seguir:

a) Os segmentos AB e AC são comensuráveis? Justifique.

Sim, pois temos um terceiro segmento $\dfrac{u}{3}$ que cabe três vezes no segmento AB e cinco vezes no AC.

b) Os segmentos AB e AE são comensuráveis? Justifique.

Sim, pois temos um terceiro segmento $\dfrac{u}{5}$ que cabe cinco vezes no segmento AB e oito vezes no AC.

c) Os segmentos AE e AF são comensuráveis? Justifique.

Sim, pois temos um terceiro segmento u que cabe um vez no segmento AB e duas vezes no AC.

d) Agora, utilizando o mesmo processo, justifique como marcar um ponto X qualquer, tal que $\overline{AX} = \dfrac{n\overline{u}}{m}$, com $m, n \in \mathbb{N}$.

Inicilmente, dividimos o segmento AB em n partes iguais de medida $\dfrac{\overline{u}}{n}$ (Uma forma de dividir segmentos em n partes iguais, está apresentada no apêndice A, em A.6).

Depois, marcamos m pontos na reta AB, com um compasso mantendo uma abertura de medida $\frac{\overline{u}}{n}$.

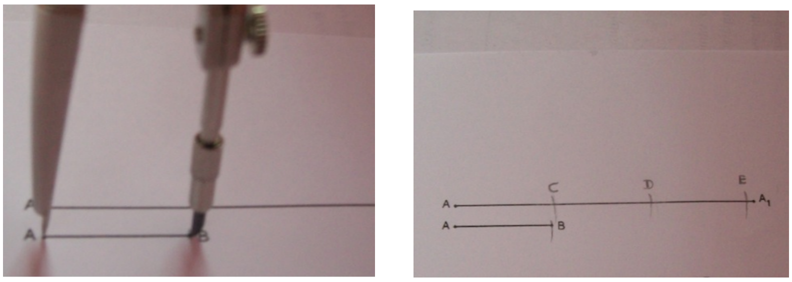
Após marcar os m pontos, basta chamar o ponto B_m de X, ou seja, $B_m = X$

Sequência didática 2: Resposta

Atividade 1

Seguindo os mesmos passos propostos na Atividade 1 da Sequência didática 1.

- Inicialmente coloque a ponta seca do compasso no ponto A e abra-o até o ponto B (Figura 5.24 (a) .



(a) (b)

Figura 5.24: (a) Compasso com abertura AB (b) Segmentos medindo $\overline{AB}$, sobre o segmento AA_1.

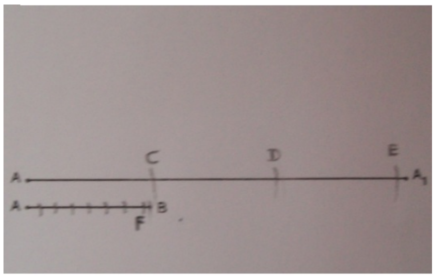
- Depois, fixe a ponta seca do compasso no ponto A do segmento AA_1, com abertura medindo $\overline{AB}$ e marque sobre o segmento AA_1 segmentos de medida AB (Figura 5.24 (b)) sobre o segmento AB.

  Observe que o segmento AB não coube um número inteiro de vezes no segmento AA_1, pois, $\overline{AA_1} = \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA_1}$, com $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{AB}$ e $\overline{EA_1} < \overline{AB}$.

  Devemos verificar se o segmento EA_1 cabe um número inteiro de vezes no segmento AB.

- Repita o passo anterior, o número de vezes que forem possíveis marcar segmentos de medida $\overline{EA_1}$, sobre o segmento AB.

(a)



(b)

Figura 5.25: (a) Compasso com abertura medindo EA_1e (b) Segmentos medindo $\overline{EA_1}$, sobre o segmento AB.

Observe que o segmento EA_1 não cabe um número inteiro de vezes no segmento AB(Figura 5.25 (b)), pois, $\overline{AB} = 7\overline{EA_1} + \overline{FB}$, com $\overline{FB} < \overline{EA_1}$.

Agora, devemos verificar se o segmento FB cabe um número inteiro de vezes no segmento EA_1.

Veja, que se continuarmos esse processo de pegar o segmento que sobrou e sobrepor ao segmento menor anterior a ele, podemos desconfiar pelo Exemplo 3.2.2 do Capítulo 3, que o processo nunca vai parar, pois, vimos que o segmento do comprimento e o segmento do diâmentro de um círculo são incomensuráveis.

Sequência didática 3: Respostas

Atividade 1

(a)$\dfrac{73}{8}$

Decompondo o numerador em fatores primos obtemos $8 = 2^3$. Pelo Teorema 4.1, como o denominador é da forma 2^n5^m com $n = 3$ e $m = 0 \in \mathbb{N}$, então, a fração irredutível $\dfrac{843}{14}$ possui representação decimal finita.

(b)$\dfrac{49}{6}$

Decompondo o numerador em fatores primos obtemos $6 = 2.3$. PeloTeorema 4.1, como o denominador é diferente de 2^n5^m com $n,m \in \mathbb{N}$, então, a fração irredutível $\dfrac{49}{6}$ não possui representação decimal finita, portanto, possui representação decimal infinita e periódica.

(c)$\dfrac{782}{125}$

Decompondo o numerador em fatores primos obtemos $125 = 5^3$. Pelo Teorema 4.1, como o denominador é da forma 2^n5^m com $n = 0$ e $m = 3 \in \mathbb{N}$, então, a fração irredutível $\dfrac{782}{125}$ possui representação decimal finita.

(d)$\dfrac{8753}{500}$

Decompondo o numerador em fatores primos obtemos $500 = 2^4.5^3$. Pelo Teorema 4.1, como o denominador é da forma 2^n5^m com $n = 4$ e $m = 3 \in \mathbb{N}$, então, a fração irredutível $\frac{8753}{500}$ possui representação decimal finita.

e)$\dfrac{843}{14}$

Decompondo o numerador em fatores primos obtemos $14 = 2.7$. Pelo Teorema 4.1, como o denominador é diferente de 2^n5^m com $n,m \in \mathbb{N}$, então a fração irredutível $\dfrac{843}{14}$ não possui representação decimal finita, portanto possui representação decimal infinitaa e periódica.

Atividade 2

a) 0,777... + 0,24333...

Aplicando a Obs. 4.1 e o Teorema 4.3, respectivamente e, posteriormente resolvendo a operação de adição entre as frações, obtemos:

$$0,777... + 0,24333... = \frac{7}{9} + \frac{243-24}{900} = \frac{700}{900} + \frac{219}{900} = \frac{700+219}{900} = \frac{919}{900}$$

b)0,252525... $\times$ 0,2333...

Aplicando a Observação 4.1 e o Teorema 4.3, respectivamente e, posteriormente resolvendo a operação de multiplicação entre as frações, obtemos:

$$0,252525... \times 0,2333... = \frac{25}{99} \times \frac{23-2}{90} = \frac{25}{99} \times \frac{21}{90} = \frac{525}{8910}$$

c)0,42743743... $\div$ 0,2525...

Aplicando o Teorema 4.3 e a Observação 4.1, respectivamente e, posteriormente resolvendo a operação de divisão entre as frações, obtemos:

$$0,42743743... \div 0,2525... = \frac{42743-42}{99900} \div \frac{25}{99} = \frac{42701}{99900} \div \frac{25}{99} = \frac{42701}{99900} \times \frac{99}{25} = \frac{4128399}{2497500}$$

d)0,4526363...- 0,7454545...

Aplicando o Teorema 4.3 e resolvendo a operação de subtração entre as frações, obtemos:

$$0,7454545... - 0,4526363... = \frac{745-7}{990} - \frac{45263-452}{99000} = \frac{738}{990} - \frac{44811}{99000} = \frac{73800}{99000} - \frac{44811}{99000} =$$
$$\frac{73800-44811}{99000} = \frac{28989}{99000}$$

Atividade 3

Pela Observação 4.1, temos:

$$0,111... + 0,222... + 0,333... + 0,999... = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{9}{9}$$
$$= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} + 1 = 0,111... + 0,222... + 0,333... + 1$$

Veja que o objetivo desta atividade é fazer os alunos perceberem que $0,999... = 1$.

5.5 Folha de atividades

Nesta seção, vamos apresentar as atividades que foram aplicadas a uma turma de 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública. Estas atividades, foram retiradas das sequências didáticas propostas no TCC.

1. Dados dois segmentos AB e $CD = u$, vamos verificar se esses dois segmentos possuem uma medida de segmento comum, utilizando apenas uma régua não graduada e um compasso. Os dois segmentos, AB e CD, estão representados na Figura 5.26.

Figura 5.26: Segmentos AB e CD

Siga os passos a seguir:

- Com um compasso, vamos medir o segmento menor CD. Inicialmente, coloque a ponta fixa do compasso no ponto C e abra-o até o ponto D.
- Depois, fixe o compasso no ponto A, com abertura medindo $\overline{CD}$ e marque um ponto E sobre o segmento AB (Veja que $\overline{AE}$=$\overline{CD}$).
- Repita o passo anterior, o número de vezes que forem possíveis marcar segmentos de medida $\overline{CD}$ sobre o segmento AB.

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB?

(b) Dado o segmento EF (Figura 5.27), verifique se ele cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD.

Figura 5.27: Segmentos AB, CD e EF

2. Seguindo os mesmos passos propostos na questão anterior, verifique se os segmentos AB e CD, possuem uma medida de segmento comum. Veja na Figura 5.28, a representação dos segmentos AB e CD.

Figura 5.28: Segmentos AB e CD

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB?

- Seguindo os mesmos passos propostos na questão 1, verifique se o segmento HB que sobrou no segmento AB, cabe um número inteiro de vezes no segmento CD.

(b) O segmento HB coube um número inteiro de vezes no segmento CD? e no segmento AB?

(c) O que podemos afirmar em relação segmento AB e CD?

3. Verifique se o segmento AB de medida $\sqrt{2}$ cabe um número inteiro de vezes no segmento CD de medida $2\sqrt{2}$. Os segmentos AB e CD estão representados na Figura 5.29:

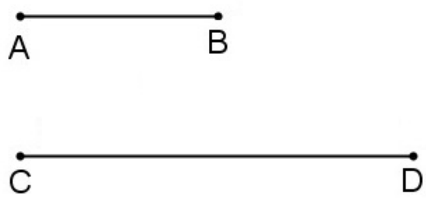


Figura 5.29: Segmentos AB e CD

a)O segmento de medida $\sqrt{2}$ coube um número inteiro de vezes no segmento de medida $2\sqrt{2}$?

b)O que podemos concluir em relação aos segmentos AB e CD de medidas respectivas, $\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$?

Definição 5.1 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são* ***comensuráveis****, se existir um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

4. Dado um círculo $C = 2\pi r$ de diâmetro $AB = 2r$, representa na Figura 5.30 .

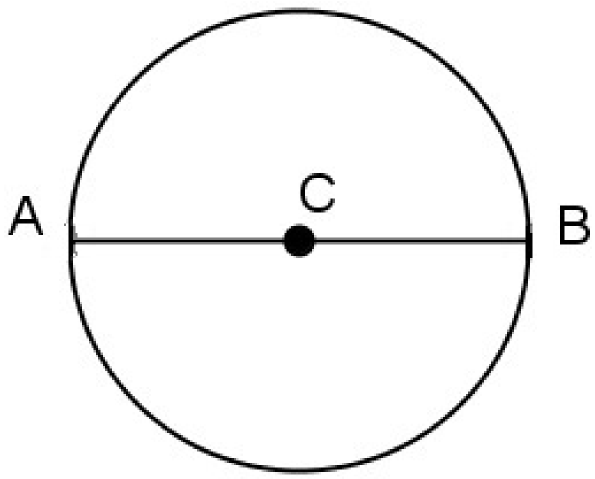


Figura 5.30: Círculo de centro C

Cortando o círculo no ponto A, obteremos o segmento AA_1, que representa seu comprimento. Veja Figura 5.31, o segmento AA_1 que representa o comprimento do círculo e o segmento AB que representa diâmetro .

Figura 5.31: Comprimento AA_1 e diamentro AB

Verifique se os segmentos AA_1 e AB, representados na figura acima, são comensuráveis.

Definição 5.2 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são **incomensuráveis**, quando não for possível encontrar um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

5. Sem realizar cálculos, verifique se as frações irredutíveis abaixo possuem representação decimal finita ou infinita e periódica, apenas trabalhando com o denominador.
a)$\frac{73}{8}$

b) $\dfrac{49}{6}$

c) $\dfrac{782}{125}$

d) $\dfrac{8753}{500}$

e) $\frac{843}{14}$

6. Calcule as operações entre as dízimas periódicas abaixo:

   a) 0,777... + 0,24333...

   b)0,252525... $\times$ 0,2333...

   c)0,42743743... $\div$ 0,2525...

   d)0,7454545... - 0,4526363...

Capítulo 6

Relatório das atividades aplicadas

Neste capítulo, apresentaremos um relatório referente às atividades aplicadas a 13 alunos de uma turma de 1 ° ano do ensino médio, de uma escola da rede pública.

As atividades aplicadas foram retiradas das sequências didáticas que propomos no nosso trabalho, e as respostas dos alunos encontram-se nos Apêndice B, C e D.

6.1 As dificuldades

A primeira dificuldade que encontramos foi o fato de não estar trabalhando com turmas de 1 ° ano do ensino médio, então tive que pedir a um colega de trabalho que me cedesse uma turma de 1 ° ano, para que eu pudesse aplicar as atividades. Como a turma não era minha, tivemos pouco tempo para aplicar as atividades, para ser mais precisa, tivemos apenas 7 aulas para aplicação das atividades, por isso, não apliquei todas as sequências propostas no trabalho, como o prazo foi curto e, como não conheciamos o desempenho da turma, tivemos que escolher algumas das atividades presentes nas sequências didáticas.

A segunda dificuldade encontrada para a aplicação das atividades foi a falta de material didático disponíveis na escola: como o compasso e régua. Para não prejudicar o andamento das atividades, disponibilizei com recursos próprios, réguas e compassos para todos os alunos da turma.

Ao iniciar a aplicação das atividades, percebemos que a maior parte dos alunos não sabia manusear um compasso. Dois alunos, para nossa surpresa, afirmaram que não tinham visto esse material pedagógico. Então, tive que deixar para aplicar as atividades em outra aula, e ensinar os alunos a manusearem um compasso, gastando, assim ,um tempo maior do que o previsto para aplicação das atividades.

Antes de aplicar as atividades referentes a expressões numéricas, tive que fazer uma revisão sobre: decomposição de um número inteiro em fatores primos, operações com frações e uma revisão sobre como calcular o mínimo múltiplo comum de dois números, pois a maioria dos alunos não lembrava como realizar esses cálculos, o que me fez perder muito tempo.

6.2 Fatores positivos

Durante a aplicação das atividades, percebi uma grande participação dos alunos, principalmente daqueles que segundo os próprios alunos da turma, que normalmente não interagem nas aulas.

Também percebi uma grande interação entre alunos. Aqueles alunos que manuseavam melhor o compasso, ajudavam o colega que tinha mais dificuldade com esse material pedagógico.

6.3 Fatores negativos

Alguns alunos não conseguiram realizar a atividade 5 por completo, por sentirem dificuldades em decompor números inteiros em fatores primos;

Muitos dos alunos se recusaram a completar a atividade 6, pois apresentaram grande dificuldade em calcular o mínimo múltiplo comum e também em calcular operações envolvendo frações;

Percebi que essas dificuldades são comuns entre nossos alunos e é algo que devemos tentar contornar, realizando revisões sobre decomposição de números inteiros em fatores primos, calcular mínimo múltiplo comum e calcular operações envolvendo frações.

6.4 As atividades

Atividade 1

Na a realização da atividade 1, esperava-se que os alunos conseguissem sobrepor o segmento de medida $\overline{CD}$ (com o auxilio de um compasso), a quantidade de vezes que fosse possível, sobre o segmento AB.

Percebi que alguns alunos não conseguiam fazer a abertura do compasso com a mesma medida do segmento CD, visto que a maioria não sabia como utilizá-lo. Então, precisei intervir, mostrando a alguns alunos como fazer a abertura do compasso com a medida do segmento CD, para poder obter meu objetivo, que era fazer com que os alunos conseguissem verificar que o segmento CD cabe um número inteiro de vezes no segmento AB).

Posteriormente, esperava-se que os alunos conseguissem sobrepor o segmento de medida $\overline{EF}$, a quantidade de vezes que fossem possível, sobre o segmento AB e sobre o segmento CD. Esse segundo momento da atividade foi mais simples, pois os alunos já tinham feito esse processo anteriormente com os segmentos AB e CD.

Os dados estatísticos relativos a aplicação da atividade 1 são apresetados na Tabela 6.1:

Conseguiram responder por completo	69,23%
Conseguiram responder parcialmente	30,77 %
Não conseguiram responder	0 %

Tabela 6.1: Atividade 1

Atividade 2

Na a realização da atividade 2, esperava-se que os alunos conseguissem sobrepor o segmento *CD*, a quantidade de vezes que fossem possível, sobre o segmento *AB*, e percebessem que um pedaço do segmento *AB* sobraria, ou seja, que o segmento *CD*,não caberia um número inteiro de vezes no segmento *AB*.

Quando os alunos marcaram o segmento *CD* sobre o segmento *AB* e perceberam que houve um pedaço de segmento que sobrou, eles conseguiram marcar esse segmento que sobrou, o qual chamaram de segmento *HB* no segmento *CD*.

Um aluno percebeu que como o segmento *HB* coube um número inteiro de vezes no segmento *CD*, ele afirmou em voz alta na sala, que o segmento *HB* também caberia um número inteiro de vezes em *AB*, pois o segmento *AB* era composto por segmentos de medida *CD* e do próprio segmento *HB*, portanto, muitos colegas pegaram "carona"na resposta dele.

Os dados estatísticos relativos a aplicação da atividade 2

Conseguiram responder por completo	61,53%
Conseguiram responder parcialmente	23,07 %
Não conseguiram responder	15,40 %

Tabela 6.2: Atividade 2

Atividade 3

A atividade 3 foi mais fácil de ser realizada, pois os alunos já estavam mais familiarizados com o compasso.

Essa atividade teve o objetivo de mostrar aos alunos que um segmento de medida racional, também pode estar contido um número inteiro de vezes em outro segmento de medida também racional.

Após a realização das atividades 1, 2 e 3, defini o conceito de segmentos comensuráveis, o qual já estava impresso na folha das atividades que os alunos estavam trabalhando. Percebi que os alunos compreenderam bem o conceito, pois ao responderem as atividades, eles perceberam como é realizado o processo para verificar se dois segmentos são comensuráveis.

Os dados estatísticos relativos a aplicação da atividade 3

Conseguiram responder por completo	69,23%
Conseguiram responder parcialmente	23,07 %
Não conseguiram responder	7,7 %

Tabela 6.3: Atividade 3

Atividade 4

Na realização da atividade 4, quando os alunos ao perceberem que o segmento AB não coube um número inteiro de vezes no segmento AA_1, eles logo mediram o pedaço de segmento que sobrou no segmento AA_1 e foram verificar se ela cabia um número inteiro de vezes no segmento AB.

Quando os alunos perceberam que esse segmento que sobrou do segmento AA_1 não coube um número inteiro de vezes no segmento AB ficaram confusos, pois, esperavam que esse segmento que sobrou coubesse um número inteiro de vezes no segmento AB, alguns pensaram que tinham medido o segmento AB errado, e queriam medir tudo novamente.

Foi aí que pedi para turma que medissem com o compasso o segmento que sobrou do segmento AB e o colocasse sobre o segmento que sobrou do segmento AA_1. Quando perceberam que um segmento não servia para medir o outro, afirmaram que os segmentos AB e AA_1 não eram comensuráveis.

Após os alunos perceberem que os segmentos AB e AA_1 não eram comensuráveis, expliquei a eles que quando dois segmentos não são comensuráveis, então, esses segmento são chamados segmentos incomensuráveis.

Veja abaixo os dados estatísticos relativos a aplicação da atividade 4

Conseguiram responder por completo	76,93%
Conseguiram responder parcialmente	15,38%
Não conseguiram responder	7,69%

Tabela 6.4: Atividade 4

Atividade 5

Na realização da atividade 5, esperava-se que os alunos conseguissem verificar se uma fração irredutível possui representação decimal finita ou infinita e periódica, sem realizar a divisão do numerador pelo denominador, apenas fatorando o denominador.

Antes de aplicar essa atividade, precisei apresentar aos alunos o Teorema 4.2, que se encontra no Capítulo 4. Alguns alunos entenderam imediatamente como se faz para verificar se uma fração irredutível possui representação decimal finita ou infinita e periódica, os que não entenderam, deve-se ao fato de não terem aprendido no ensino fundamental como fatorar um número inteiro.

Veja abaixo os dados estatísticos relativos a aplicação da atividade 5

Conseguiram responder por completo	53,84%
Conseguiram responder parcialmente	38,46 %
Não conseguiram responder	7,7%

Tabela 6.5: Atividade 5

Atividade 6

Na realização da atividade 6, esperava-se que os alunos conseguissem transformar dízimas periíodicas simples e dízimas periódicas compostas na sua forma de fração e posteriormente realizassem algumas operações entre as frações.

Antes de aplicar essa atividade, precisei apresentar aos alunos o Teorema 4.3 e a Observação.4.1, que se encontram no Capítulo 4. Alguns alunos acharam complicado e não resolveram as atividades, outros conseguiram transformar dízimas periódicas simples e dízimas periódicas compostas na sua forma de fração, mas não conseguiram realizar as operações com as frações. Poucos alunos conseguiram realizar a atividade por completo.

Veja abaixo os dados estatísticos relativos a aplicação da atividade 6

Conseguiram responder por completo	53,84%
Conseguiram responder parcialmente	15,38 %
Não conseguiram responder	30,78%

Tabela 6.6: Atividade 6

Observa-se que ao se resolver o problema de forma analíticamente (atividade 5 e atividade 6) o desempenho dos alunos piorou, comparados com o resultados ao se resolver os problemas geometricamente.

Capítulo 7

Conclusão

Com o estudo de segmentos comensuráveis e segmentos incomensuráveis, que está dedicada maior parte de nosso estudo, vimos o quanto eles podem nos ajudar no estudo do conceito de números racionais e principalmente no conceito de números irracionais, afim de que alunos e professores possam verificar a importância dos conceitos de segmentos comensuráveis e segmentos incomensuráveis.

Hoje em dia, a metodologia utilizada por muitos professores dificilmente enfatizará a importância dos segmentos comensuráveis e segmentos incomensuráveis para o estudo do conceito de números racionais e irracionais. Acabam por ensinar os conteúdos dando importância apenas à aplicação de regras, sem no entanto, verificá-las.

No que se refere ao estudo de transformação de dízimas periódicas simples e dízimas periódicas na sua forma de fração, muitos professores apenas afirmam durante a ministração de suas aulas, que esses números podem ser escritos na forma de fração , mas não apresenta a seus alunos como fazer essa transformação. Essa metodologia deve ser repensada, nós como professores de matemática, devemos deixar de dar importâcia à aplicação de regras, e passarmos a mostrar aos nosso alunos como chegar a um resultado esperado.

Antes de trabalharmos os conceitos de segmentos comensuráveis e de segmentos incomensuráveis, é importante ensinar os aluno a utilizarem o compasso para o estudos de segmentos comensuráveis e segmentos incomensuráveis. também é importante que o aluno conheça os conceitos básicos de fatoração de um número, assim, poder usá-lo de forma correta no estudo de transformação de dízimas periódicas simples e dízimas periódicas na sua forma de fração. Por isso, é adequado que o estudo dos mesmos seja somente a partir do 1° ano do Ensino Médio, de preferência junto com o estudo dos conceito de números racionais e irracionais.

Pretendemos que este TCC possa contribuir para que o ensino aprendizagem de segmentos comensuráveis, segmentos incomensuráveis, dentro do conceito de números racionais e irracionais e também pretendemos que o ensino aprendizagem de expressões decimais finitas e infinitas e periódicas, no que se refere a transformação em sua forma de fração, se transforme em algo mais presente no Ensino Médio. Também esperamos que este trabalho seja útil, que incentive professores do Ensino Médio para se aprimorarem nesse estudo, e que possam levar esses conhecimentos para a sala de aula.

Referências Bibliográficas

[1] LIMA, Elon Lages .*]. Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio.* IMPA/SBM–Rio de Janeiro, 2011.

[2] HOWARD, Eves. *Introdução à História da Matemática; tradução Hygino H. Domingues.* , Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

[3] WAGNER, E. *Construções Geométricas*. Com a colaboração de José Paulo Q. Carneiro. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[4] FIGUEIREDO, Djairo Guedes. *Análise 1* 2ª ed. – . Rio de Janeiro: LTC,1996.

[5] LIMA, Elon Lages .*A matemática do Ensino Médio, vol. 1* IMPA/SBM–Rio de Janeiro, 2003.

[6] LIMA, Elon Lages .*A matemática do Ensino Médio, vol. 2* IMPA/SBM–Rio de Janeiro, 2003.

[7] HEFEZ, Abramo .*Elementos de Aritméica* 2ª ed – . IMPA/SBM–Rio de Janeiro, 2011.

[8] http://sites.unifra.br/Portals/36/tecnologicas/2001/numeros.pdf)

Apêndice A

Algumas Definições e Teoremas

Neste Apêndice estão apresentadas algumas definições e teoremas, que dão embasamento para a demonstração de alguns teoremas apresentados no TCC.

A.1 Princípio da boa ordenação

Todo subconjunto não vazio de números naturais possui um menor elemento.[7]

Demonstração:

Seja S um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$, então existe $a \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in S$, $a \leq n$. Inicialmente vamos mostrar a unicidade desse menor elemento.

Suponha que existam a e a' menores elementos de S, então $a \leq a'$ e $a' \leq a$, o que implica que $a = a'$. Logo, se um subconjunto possui um menor elemento, esse elemento é único.

Agora, vamos mostrar que todo subconjunto não vazio de números naturais possui um menor elemento. Essa demonstração será realizada por redução ao absurdo.

Tome S um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ e, suponha por absurdo que S não possui um menor elemento, devo mostrar que $S \neq \varnothing$, contradizendo a hipótese.

Agora tome X outro conjunto formado por números naturais, tais que cada elemento $n \in X$ não pertença a S, ou seja, X é um conjunto complementar de S. Devo mostrar que $X = \mathbb{N}$. Essa demonstração será feita por indução.

Seja $0 \leq n$ para todo $n \in X$, logo, $0 \in X$ e $0 \notin S$, pois, caso contrário, seria menor elemento de S, o que seria uma contradição. Para todo $n \in X$, temos $n \notin S$.

Vamos mostrar que para $n+1 \in X$, também seja válido.

De fato, se $n+1 \in S$, então $n+1$ seria o seu menor elemento, contradizendo a hipótese, portanto, $n+1 \in X$, assim por indução finita, segue que $X = \mathbb{N}$, o que nos leva a concluir que $S = \varnothing$.

$\square$

A.2 Definição 1

(Divisibilidade) Dados dois números $a, b \in \mathbb{N}$, com $b \neq 0$. Dizemos que b divide a, escrevemos $b \mid a$, quando existir $p \in \mathbb{N}$, tal que $a = bq$. Isto equivale a afirmar: que b é divisor de a, ou que a é múltiplo de b.[7]

A.3 Definição 2

Dados dois números $a, b \in \mathbb{N}$, com a e $b \neq 0$. Dizemos que o número natural não nulo d é divisor comum de a e b, se $d \mid a$ e $d \mid b$.[7]

A.4 Definição 3

Diremos que d é máximo divisor comum (mdc) de a e b, se ele possuir as seguintes propriedades:

d é divisor comum de a e b;

d é divisível por todo divisor comum de a e b.

O mdc, quando existir, será denotado por (a,b) ou (b,a), já que $(a,b) = (b,a)$.[7]

A.5 Algoritmo de Euclides

Sejam a e b dois números naturais com $0 < a < b$, então existem dois únicos números naturais q e r tais que $b = aq + r$, com $r < a$[7].

Demonstração:

Dados $a, b \in \mathbb{N}$, com $a \leq b$.

Se $a = 1$, $a = b$ ou $a \mid b$, então $(a,b) = a$.

Agora, supondo que $1 < a < b$ e que a não divida b, ou seja $a \nmid b$. Pela divisão euclidiana, podemos escrever $b = a.q_1 + r_1$, com $r_1 < a$.

Se r_1 divide a, então:$r_1 = (a, r_1) = (a, aq - b) = (a,b)$, e termina o algoritmo.

Se r_1 não divide a, então: $a = r_1 q_2 + r_2$ com $r_2 < r_1$. Veja que para este caso temos duas possibilidades, ou seja:

Se r_2 divide r_1, então: $r_2 = (r_2, r_1) = (r_1, a - r_1 q_2) = (r_1, a) = (b - aq_1, a) = (b,a) = (a,b)$, e termina o algoritmo.

Se r_2 não divide r_1, então: $r_1 = r_2 q_3 + r_3$ com $r_3 < r_2$. Observe que este procedimento não pode continuar infinitamente, pois se ele continuasse, teríamos uma sequência de números naturais $a > r_1 > r_2 > r_3 > ... > r_n$, que não possui um menor elemento, o que não é possível pela propriedade da boa ordem. Logo, para algum $n \in \mathbb{N}$, teremos r_n dividindo um r_{n+1}, o que implicará $r_n = (a,b)$. $\square$

A.6 LEMA: Como dividir um segmento em n partes iguais

Demonstração: Para dividir um segmento qualquer em n partes iguais, vamos utilizar apenas um par de esquadros e um compasso.

Vamos dividir um segmento AB qualquer (Figura A.1) em n partes iguais.

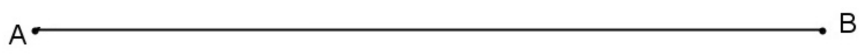


Figura A.1: Segmento AB

Para isso, tracemos uma semirreta qualquer AX, formando um ângulo menor do que 90^o com o segmento AB(Figura A.2 abaixo). Sobre semirreta AX marcaremos, com o auxílio de um compasso, n segmentoscongruentes de tamanho qualquer.

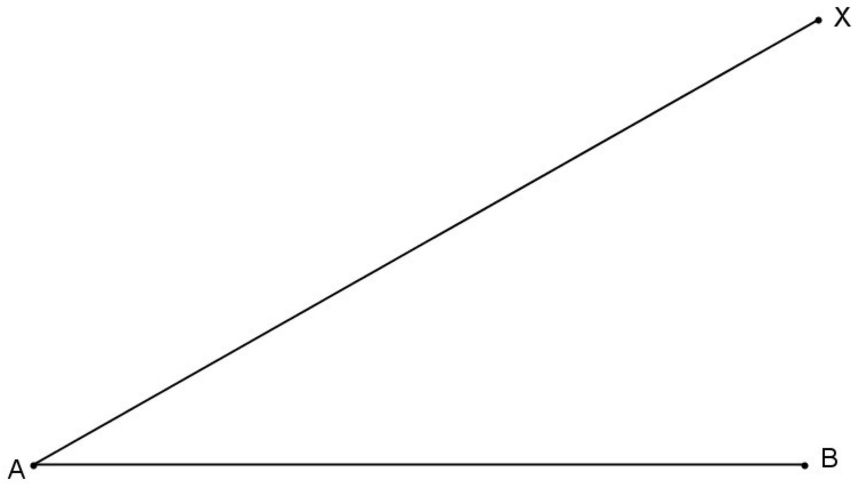


Figura A.2: Segmento AB e a semirreta AX

Para isso, fixe a ponta seca do compasso, no ponto A e com abertura qualquer trace o ponto A_1 na semirreta AX. Agora, fixe a ponta seca do compasso no ponto A_1 e, com a mesma abertura que traçou o segmento AA_1, trace o ponto A_2. Repita o mesmo processo até traçar o ponto A_n, dessa forma traçamos os segmentos iguais AA_1, A_1A_2 ,..., $A_{n-1}A_n$.

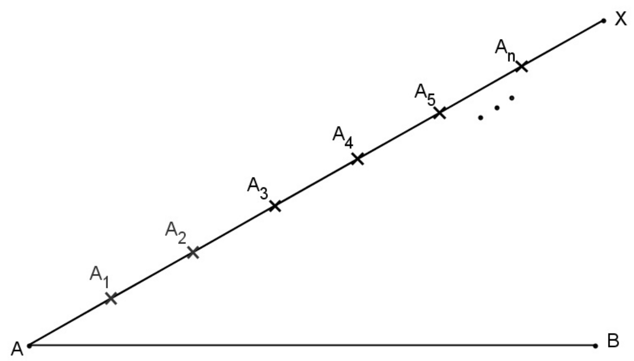


Figura A.3: n segmentos congruentes na semirreta AX

Agora, com o auxílio dos esquadros, ligue o ponto A_n ao ponto B, traçando assim o segmento A_nB.

Ainda com o auxílio dos esquadros, trace paralelas ao segmento A_nB, passando pelos demais pontos A_i, com $1 \leq i \leq n-1$.

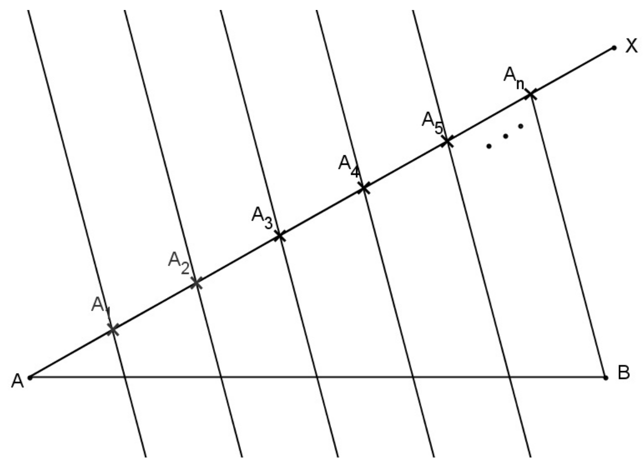


Figura A.4: Divisão do segmento AB em n segmentos iguais

A intersecção das retas paralelas com o segmento AB, determinará sobre o segmento AB os pontos $B_1, B_2, B_3, ..., B_{n-1}$, que dividirão o segmento AB em n partes. Veja Figura A.5:

Agora, vamos mostrar que essas n partes em que o segmento AB foi dividido são iguais.

Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando existe uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e de outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma (Figura A.5). Utilizamos a notação "$\sim$"para dizer que dois triângulos são semelhantes.

Veja que os triângulos AA_iB_i, com $1 \leq i \leq n-1$ e o triângulo AA_nB são semelhantes com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A$, $A_i \leftrightarrow A_n$ e $B_i \leftrightarrow B$, com $1 \leq i \leq n$ e com a correspondência de ângulos $\hat{A} \leftrightarrow \hat{A}, \hat{A_i} \leftrightarrow \hat{A_n}$ e $\hat{B_i} \leftrightarrow \hat{B}$, pois a reta A_nB é paralela a cada uma

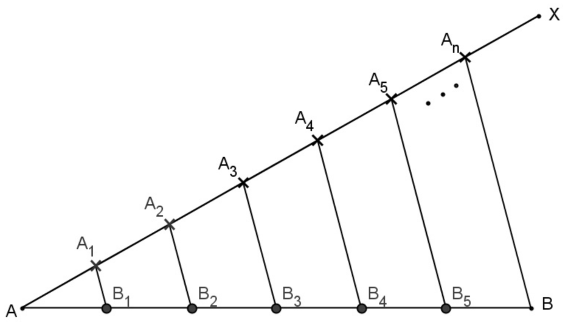


Figura A.5: Segmentos $AB_1 = B_1B_2 = ... = B_{n-1}B_n$

das retas A_iB_i .

Assim, existe k, tal que:

$$\frac{AB_i}{AB} = \frac{AA_i}{AA_n} = \frac{B_iA_i}{A_nB} = k$$

Vamos mostrar que $\overline{AB_1} = \overline{B_1B_2} = ... = \overline{B_{n-1}B}$, por indução finita $\forall n \in \mathbb{N}$.

Para nosso propósito, chame o ponto B_n de B, ou seja, $B = B_n$.

Para $n = 2$, veja que os triângulos $AA_1B_1 \sim AA_2P_2$, pela correspondência dos vértices $A \leftrightarrow A$, $A_1 \leftrightarrow A_2$ e $B_1 \leftrightarrow B_2$, daí segue que:

$$\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{AB_1}{AB_2}$$

Como $AA_2 = AA_1 + A_1A_2$ e $AB_2 = AB_1 + B_1B_2$ Segue que

$$\frac{AA_1}{AA_1 + A_1A_2} = \frac{AB_1}{AB_1 + B_1B_2}$$

Mas ainda, como $AA_1 = A_1A_2$ por construção, então:

$$\frac{AA_1}{2AA_1} = \frac{AB_1}{AB_1 + B_1B_2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{AB_1}{AB_1 + B_1B_2}$$

$$AB_1 + B_1B_2 = 2AB_1$$

Portanto,

$$AB_1 = B_1B_2$$

Agora, suponha que vale para $n-1$, ou seja:

$$AB_1 = B_1B_2 = ... = B_{n-2}B_{n-1} \tag{A.1}$$

Vamos mostra que vale $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, vamos mostrar que :

$$AB_1 = B_1B_2 = ... = B_{n-1}B_n$$

Como

$$\frac{AA_1}{AAn} = \frac{AB_1}{AB_n}$$

E sabendo que: $AA_n = AA_1 + A_1A_2 + ... + A_{n-1}A_n$ e que: $AB_n = AB_1 + B_1B_2 + ... + B_{n-1}B_n$, daí segue que

$$\frac{AA_1}{AA_1 + A_1A_2 + ... + A_{n-1}A_n} = \frac{AB_1}{AB_1 + B_1B_2 + ... + B_{n-1}B_n}$$

Mas ainda, como $AA_1 = A_1A_2 = ... = A_{n-1}A_n$ por construção, então:

$$\frac{AA_1}{nAA_1} = \frac{AB_1}{AB_1 + AB_1 + B_1B_2 + ... + B_{n-1}B_n}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{AB_1}{AB_1 + B_1B_2 + ... + B_{n-2}B_{n-1} + B_{n-1}B_n} \tag{A.2}$$

Por (A.1) temos:

$$AB_1 + B_1B_2 + ... + B_{n-2}B_{n-1} = (n-1)AB_1 \tag{A.3}$$

Substituindo (A.3) em (A.2), obtemos:

$$\frac{1}{n} = \frac{AB_1}{(n-1)AB_1 + B_{n-1}B_n} \tag{A.4}$$

de (A.4), obtemos:

$$nAB_1 = (n-1)AB_1 + B_{n-1}B_n \tag{A.5}$$

Subtraindo $(n-1)AB_1$ em ambos os lados de (A.5), obtemos:

$$nAB_1 - (n-1)AB_1 = B_{n-1}B_n$$

Portanto: $AB_1 = B_{n-1}B_n$

Assim, pelo princípio da indução finita $AB_1 = B_1B_2 = ... = B_{n-1}B_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$.

$\square$

A demonstração acima está baseada em uma demonstração que pode ser encontrada em [3]

A.7 Fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica

A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$ é

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

.

Demonstração:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n \tag{A.6}$$

Multiplicando ambos os lados de (A.6) pela razão da progressão geométrica q, obtemos:

$$qS_n = a_1q + a_2q + a_3q + ... + a_{n-1}q + a_nq$$

$$qS_n = a_2 + a_3 + ... + a_n + a_{n+1}$$

$$qS_n = S_n + a_{n+1} - a_1$$

$$qS_n - S_n = a_{n+1} - a_1 \tag{A.7}$$

Como termo geral da progressão geométrica é $a_n = a_1q^{n-1}$, então

$$a_{n+1} = a_1q^n \tag{A.8}$$

Substituindo (A.8) em (A.7), obtemos

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n$$

Isto é,

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

e, finalmente

$$S_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{(1-q)}$$

Demonstração baseada em uma demonstração encontrada em [6]

□

Observação A.1 *Nas progressões geométricas em que* $|q| < 1$*, a soma dos n primeiros termos tem um limite finito quando* $n \to \infty$*. Como nesse caso* $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ *temos*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a_1 \frac{(1-0)}{(1-q)},$$

isto é,

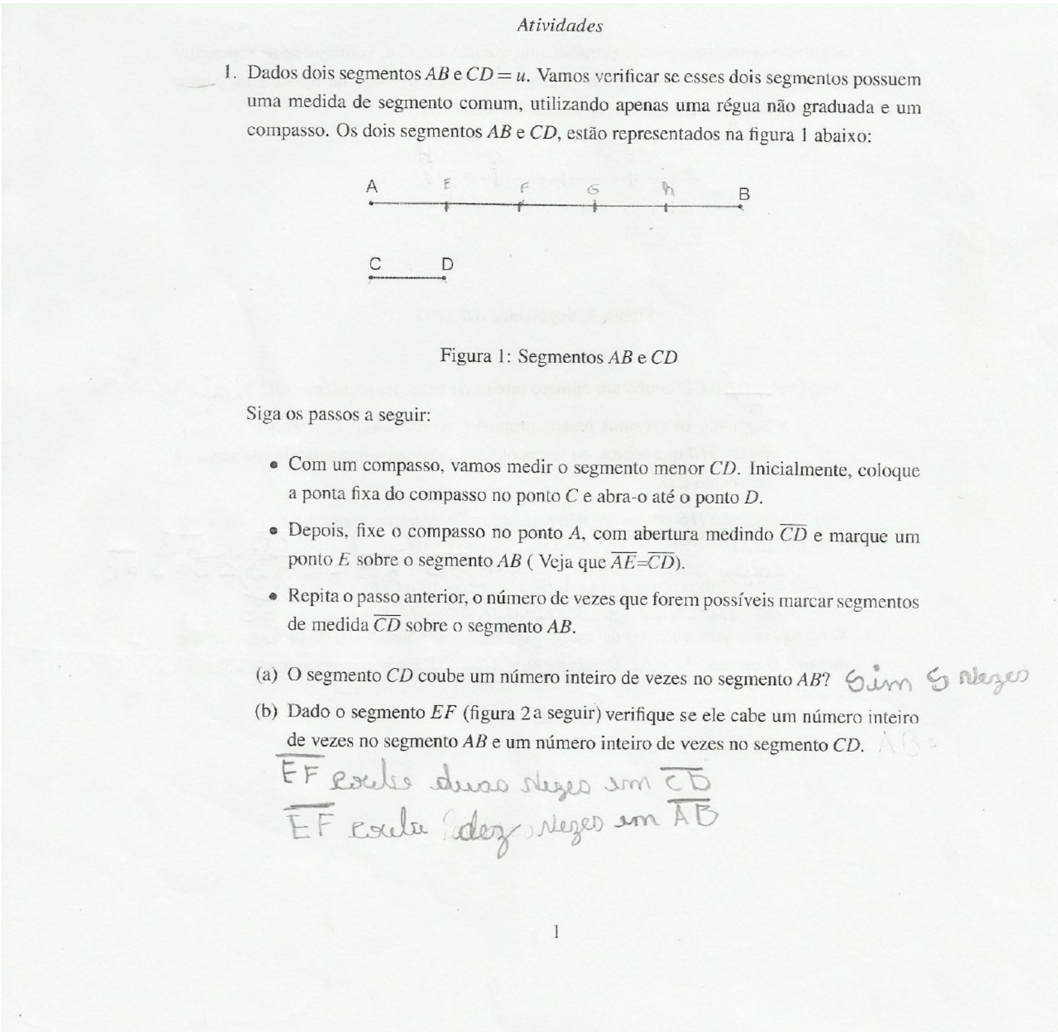
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{(1-q)}$$

Observação retirada de [6]

Apêndice B

Anexos 1

Neste Apêndice, vamos apresentar as respostas de 4 alunos as atividades aplicadas em sala de aula. Cada aluno será identificado por: Aluno 1, Aluno 2, Aluno 3 e Aluno 4.



Atividades

1. Dados dois segmentos AB e $CD = u$. Vamos verificar se esses dois segmentos possuem uma medida de segmento comum, utilizando apenas uma régua não graduada e um compasso. Os dois segmentos AB e CD, estão representados na figura 1 abaixo:

Figura 1: Segmentos AB e CD

Siga os passos a seguir:

- Com um compasso, vamos medir o segmento menor CD. Inicialmente, coloque a ponta fixa do compasso no ponto C e abra-o até o ponto D.
- Depois, fixe o compasso no ponto A, com abertura medindo $\overline{CD}$ e marque um ponto E sobre o segmento AB (Veja que $\overline{AE}=\overline{CD}$).
- Repita o passo anterior, o número de vezes que forem possíveis marcar segmentos de medida $\overline{CD}$ sobre o segmento AB.

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB? Sim 5 vezes

(b) Dado o segmento EF (figura 2 a seguir) verifique se ele cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD.

$\overline{EF}$ cabe duas vezes em $\overline{CD}$

$\overline{EF}$ cabe dez vezes em $\overline{AB}$

1

Figura B.1: Respostas das atividades do Aluno 1

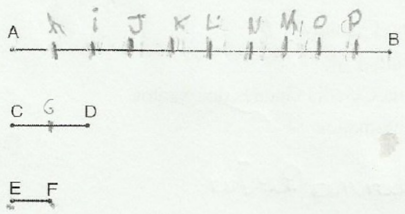


Figura 2: Segmentos AB, CD e EF

2. Seguindo os mesmos passos propostos na questão anterior, verifique se os segmentos AB e CD, possuem uma medida de segmento comum. Veja na figura 3 abaixo a representação dos segmentos AB e CD .

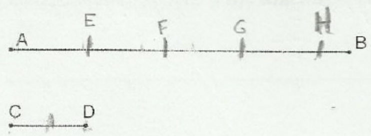


Figura 3: Segmentos AB e CD

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB? Não sobrou
HB

- seguindo os mesmos passos propostos na questão 1, verifique se o segmento HB que sobrou no segmento AB, cabe um número inteiro de vezes no segmento CD.

(b) O segmento HB coube um número inteiro de vezes no segmento CD? e no segmento AB? Sim HB coube duas vezes em $\overline{CD}$ e $\overline{HB}$ coube nove vezes em $\overline{AB}$. $\overline{AB} = 9\overline{HB}$, $\overline{CD} = 2\overline{HB}$

(c) O que podemos afirmar em relação segmento AB e CD?
eles possui o seguimento comum $\overline{HB}$

3. Verifique se o segmento AB de medida $\sqrt{2}$ cabe um número inteiro de vezes no segmento CD de medida $2\sqrt{2}$. Os segmentos AB e CD, estão representados na figura 4

2

Figura B.2: Respostas das atividades do Aluno 1

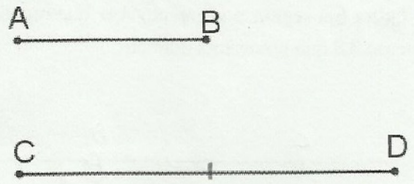


Figura 4: Segmentos AB e CD

a)O segmento de medida $\sqrt{2}$ coube um número inteiro de vezes no segmento de medida $2\sqrt{2}$? Sim duas vezes $\overline{CD} = 2\,\overline{AB}$

b)O que podemos concluir em relação aos segmentos AB e CD, de medidas respectivas, $\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$? Ele possui a medida $\overline{AB}$ em comum

Definição 0.1 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são* ***comensuráveis****, se existir um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

4. Dado um círculo $C = 2\pi r$ de diâmetro $AB = 2r$, representa na figura 5 abaixo:

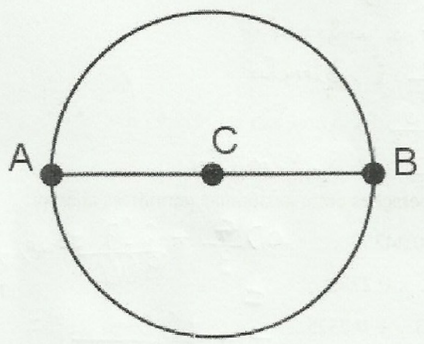
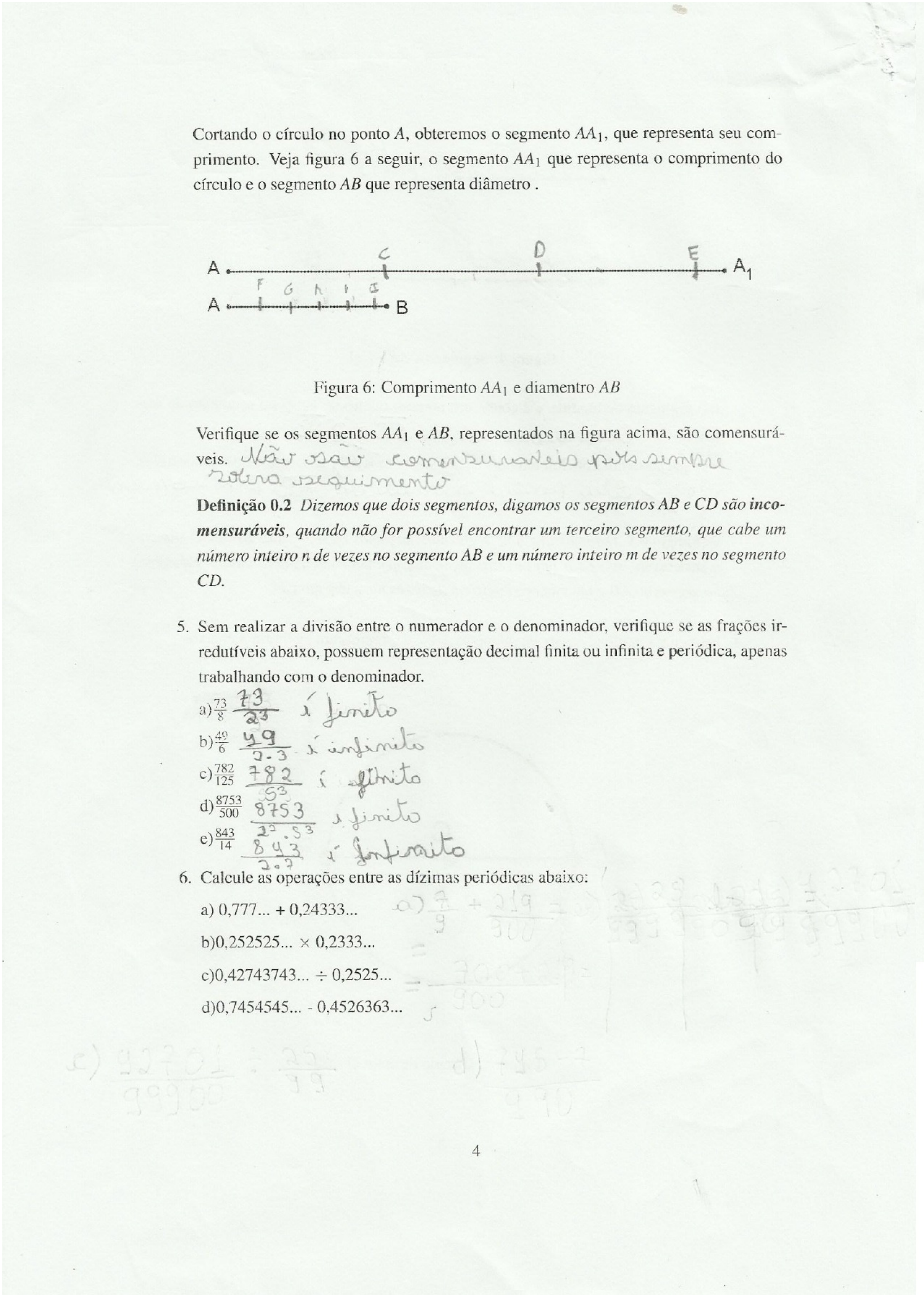


Figura 5: Círculo de centro C

3

Figura B.3: Respostas das atividades do Aluno 1



Cortando o círculo no ponto A, obteremos o segmento AA_1, que representa seu comprimento. Veja figura 6 a seguir, o segmento AA_1 que representa o comprimento do círculo e o segmento AB que representa diâmetro .

Figura 6: Comprimento AA_1 e diamentro AB

Verifique se os segmentos AA_1 e AB, representados na figura acima, são comensuráveis. Não são comensuraveis pois sempre sobra seguimento

Definição 0.2 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são* ***incomensuráveis****, quando não for possível encontrar um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

5. Sem realizar a divisão entre o numerador e o denominador, verifique se as frações irredutíveis abaixo, possuem representação decimal finita ou infinita e periódica, apenas trabalhando com o denominador.

a) $\frac{73}{8}$ $\frac{73}{2^3}$ é finito

b) $\frac{49}{6}$ $\frac{49}{2\cdot 3}$ é infinito

c) $\frac{782}{125}$ $\frac{782}{5^3}$ é finito

d) $\frac{8753}{500}$ $\frac{8753}{2^2\cdot 5^3}$ é finito

e) $\frac{843}{14}$ $\frac{843}{2\cdot 7}$ é infinito

6. Calcule as operações entre as dízimas periódicas abaixo:

a) 0,777... + 0,24333... a) $\frac{7}{9} + \frac{219}{900}$ $= \frac{700+219}{900}$

b)0,252525... × 0,2333...

c)0,42743743... ÷ 0,2525...

d)0,7454545... - 0,4526363...

c) $\frac{92701}{99900} \div \frac{25}{99}$ d) $\frac{745-7}{990}$

4

Figura B.4: Respostas das atividades do Aluno 1

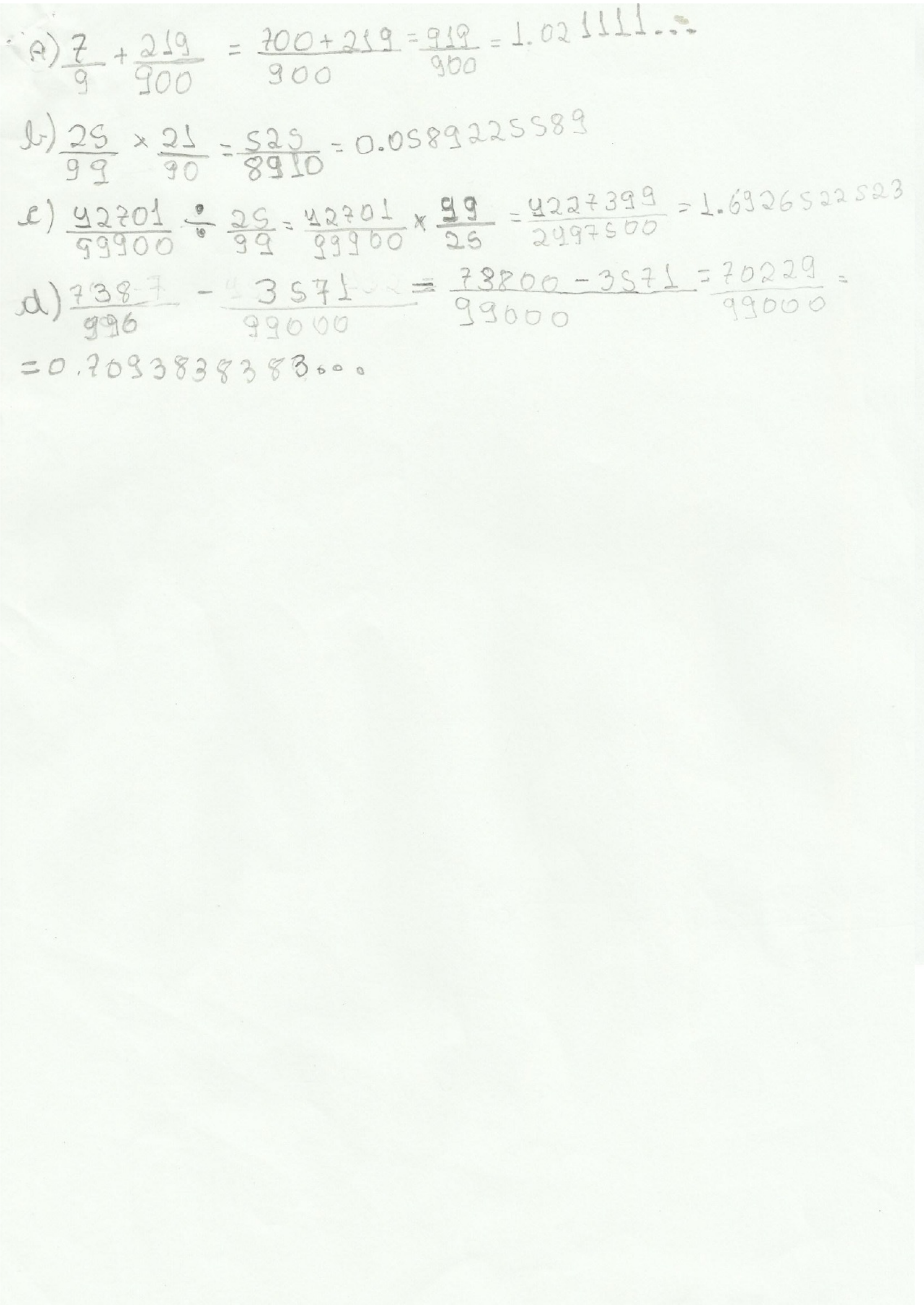
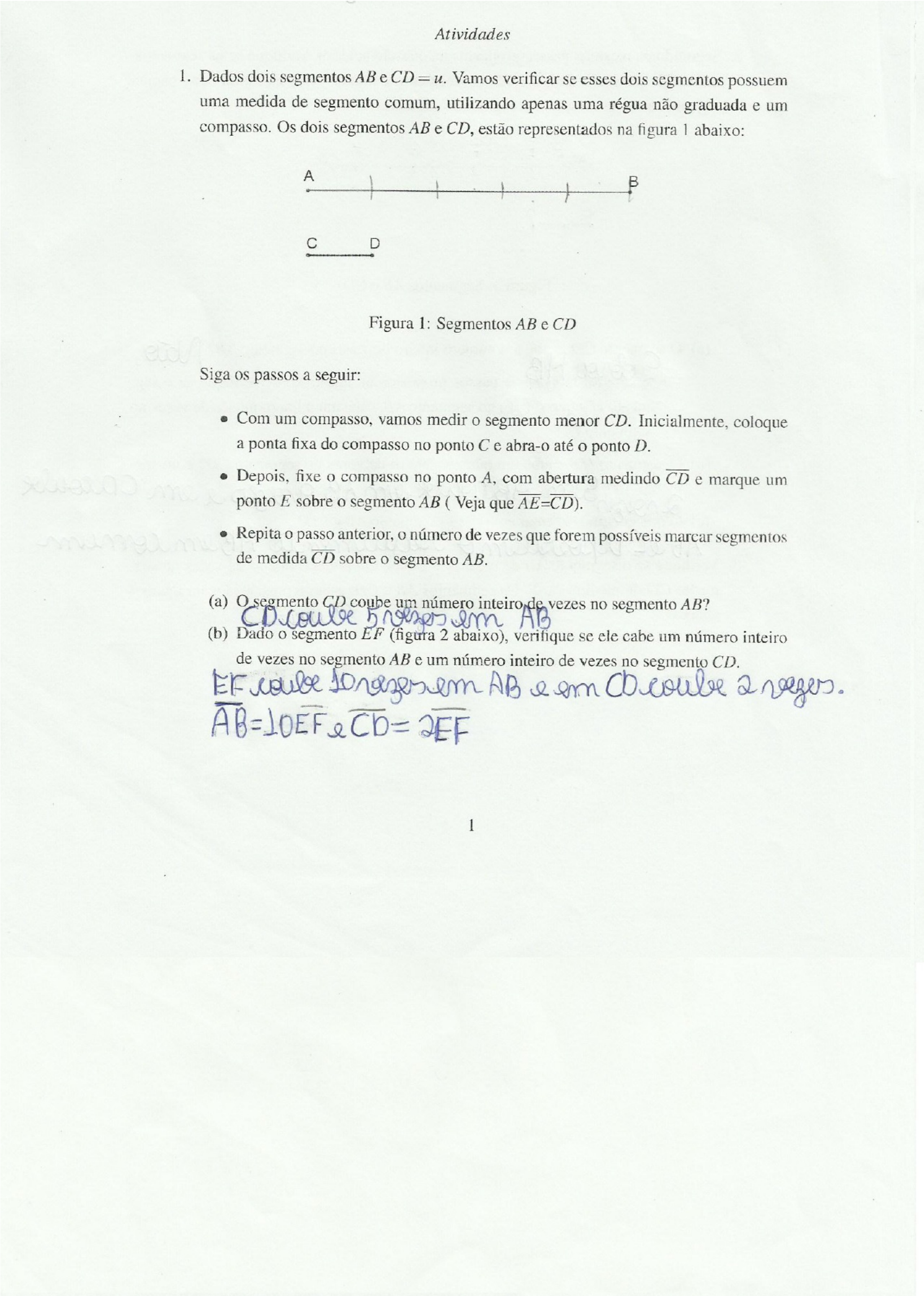


Figura B.5: Respostas das atividades do Aluno 1



Atividades

1. Dados dois segmentos AB e $CD = u$. Vamos verificar se esses dois segmentos possuem uma medida de segmento comum, utilizando apenas uma régua não graduada e um compasso. Os dois segmentos AB e CD, estão representados na figura 1 abaixo:

Figura 1: Segmentos AB e CD

Siga os passos a seguir:

- Com um compasso, vamos medir o segmento menor CD. Inicialmente, coloque a ponta fixa do compasso no ponto C e abra-o até o ponto D.
- Depois, fixe o compasso no ponto A, com abertura medindo $\overline{CD}$ e marque um ponto E sobre o segmento AB (Veja que $\overline{AE}$=$\overline{CD}$).
- Repita o passo anterior, o número de vezes que forem possíveis marcar segmentos de medida $\overline{CD}$ sobre o segmento AB.

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB?

CD coube 5 vezes em AB

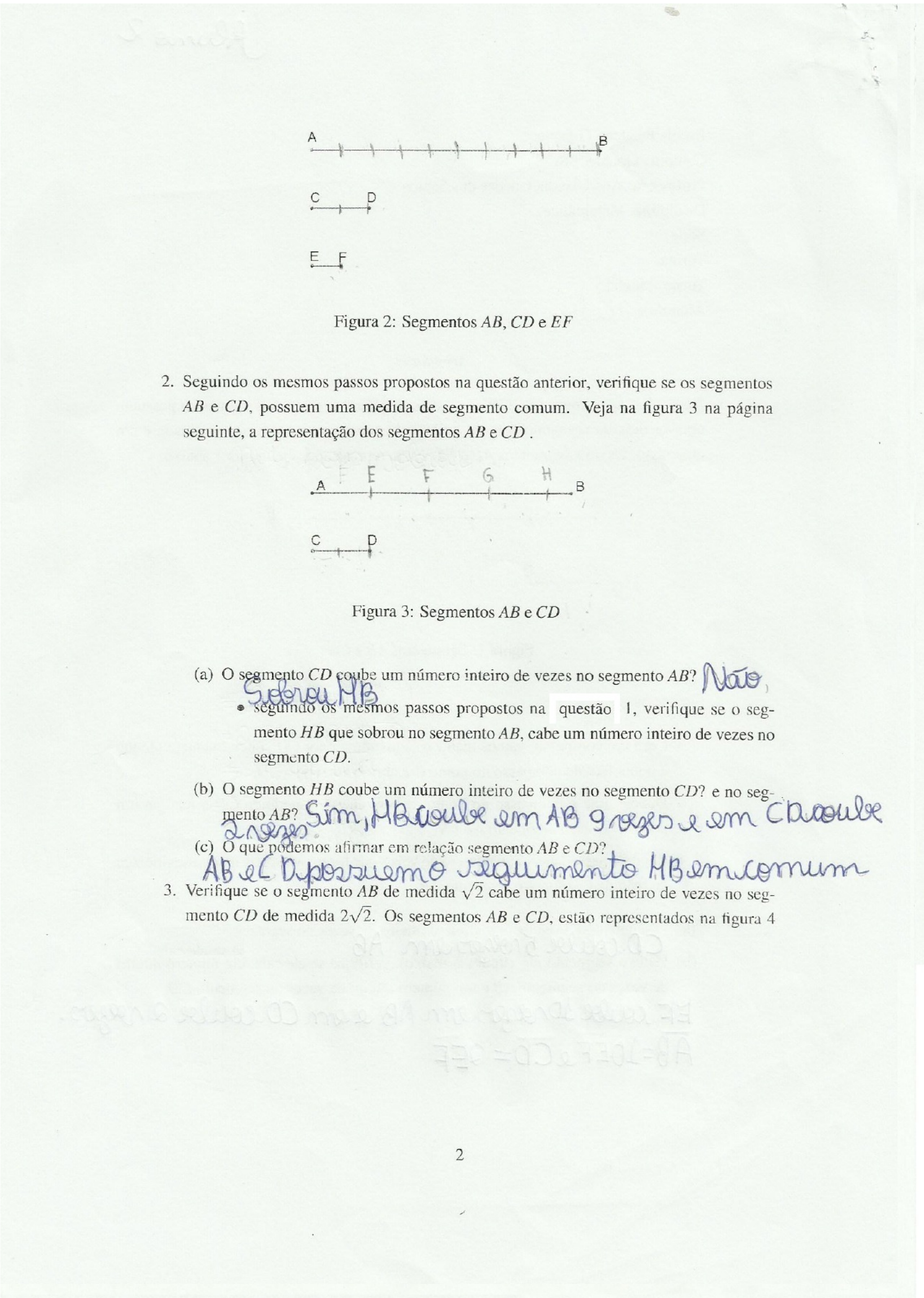
(b) Dado o segmento EF (figura 2 abaixo), verifique se ele cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD.

EF coube 10 vezes em AB e em CD coube 2 vezes.

$\overline{AB}=10\overline{EF}$ e $\overline{CD}= 2\overline{EF}$

1

Figura B.6: Respostas das atividades do Aluno 2


A B

C D

E F

Figura 2: Segmentos AB, CD e EF

2. Seguindo os mesmos passos propostos na questão anterior, verifique se os segmentos AB e CD, possuem uma medida de segmento comum. Veja na figura 3 na página seguinte, a representação dos segmentos AB e CD .

A E F G H B

C D

Figura 3: Segmentos AB e CD

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB? Não, Sobrou HB

- seguindo os mesmos passos propostos na questão 1, verifique se o segmento HB que sobrou no segmento AB, cabe um número inteiro de vezes no segmento CD.

(b) O segmento HB coube um número inteiro de vezes no segmento CD? e no segmento AB? Sim, HB coube em AB 9 vezes e em CD coube 2 vezes.

(c) O que podemos afirmar em relação segmento AB e CD?
AB e CD possuem o seguimento HB em comum

3. Verifique se o segmento AB de medida $\sqrt{2}$ cabe um número inteiro de vezes no segmento CD de medida $2\sqrt{2}$. Os segmentos AB e CD, estão representados na figura 4

2

Figura B.7: Respostas das atividades do Aluno 2

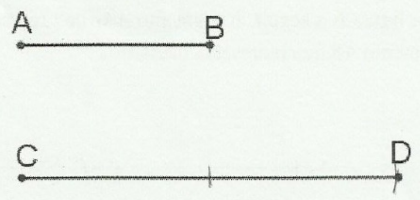


Figura 4: Segmentos AB e CD

a)O segmento de medida $\sqrt{2}$ coube um número inteiro de vezes no segmento de medida $2\sqrt{2}$?

b)O que podemos concluir em relação aos segmentos AB e CD, de medidas respectivas, $\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$?

Definição 0.1 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são **comensuráveis**, se existir um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

4. Dado um círculo $C = 2\pi r$ de diâmetro $AB = 2r$, representa na figura 5 abaixo:

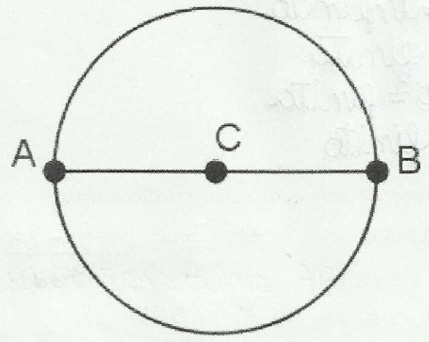
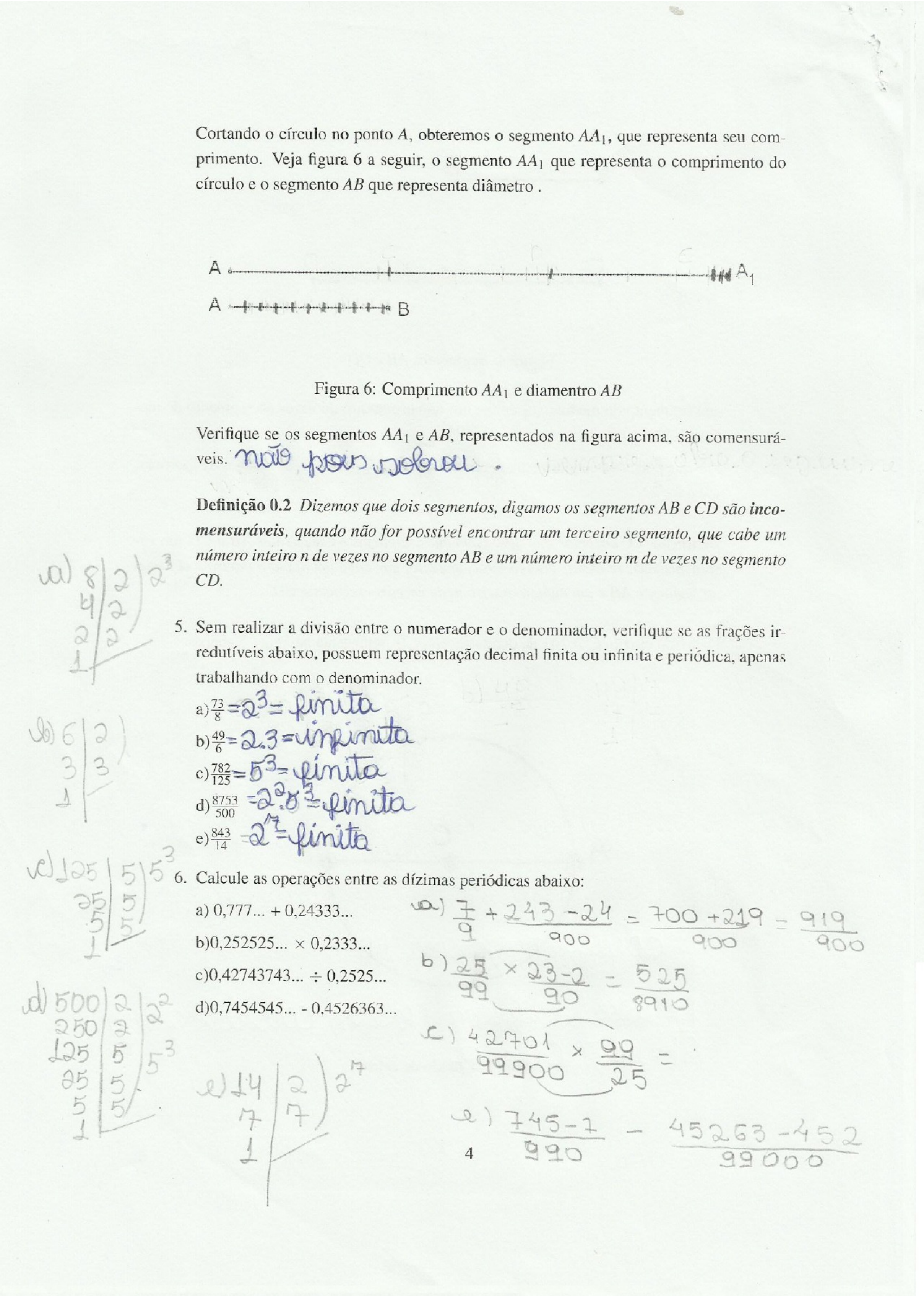


Figura 5: Círculo de centro C

3

Figura B.8: Respostas das atividades do Aluno 2



Cortando o círculo no ponto A, obteremos o segmento AA_1, que representa seu comprimento. Veja figura 6 a seguir, o segmento AA_1 que representa o comprimento do círculo e o segmento AB que representa diâmetro .

Figura 6: Comprimento AA_1 e diamentro AB

Verifique se os segmentos AA_1 e AB, representados na figura acima, são comensuráveis. não pois sobrou .

Definição 0.2 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são* ***incomensuráveis****, quando não for possível encontrar um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

5. Sem realizar a divisão entre o numerador e o denominador, verifique se as frações irredutíveis abaixo, possuem representação decimal finita ou infinita e periódica, apenas trabalhando com o denominador.

a) $\frac{73}{8} = 2^3 =$ finita

b) $\frac{49}{6} = 2.3 =$ infinita

c) $\frac{782}{125} = 5^3 =$ finita

d) $\frac{8753}{500} = 2^2.5^3 =$ finita

e) $\frac{843}{14} = 2^7 =$ finita

a) $8 | 2$, $4 | 2$, $2 | 2$, 1 — 2^3

b) $6 | 2$, $3 | 3$, 1

c) $125 | 5$, $25 | 5$, $5 | 5$, 1 — 5^3

d) $500 | 2$, $250 | 2$, $125 | 5$, $25 | 5$, $5 | 5$, 1 — 2^2, 5^3

e) $14 | 2$, $7 | 7$, 1 — 2^7

6. Calcule as operações entre as dízimas periódicas abaixo:

a) 0,777... + 0,24333...

b)0,252525... × 0,2333...

c)0,42743743... ÷ 0,2525...

d)0,7454545... - 0,4526363...

a) $\frac{7}{9} + \frac{243-24}{900} = \frac{700+219}{900} = \frac{919}{900}$

b) $\frac{25}{99} \times \frac{23-2}{90} = \frac{525}{8910}$

c) $\frac{42701}{99900} \times \frac{99}{25} =$

e) $\frac{745-7}{990} - \frac{45263-452}{99000}$

4

Figura B.9: Respostas das atividades do Aluno 2

Atividades

1. Dados dois segmentos AB e $CD = u$. Vamos verificar se esses dois segmentos possuem uma medida de segmento comum, utilizando apenas uma régua não graduada e um compasso. Os dois segmentos AB e CD, estão representados na figura 1 abaixo:

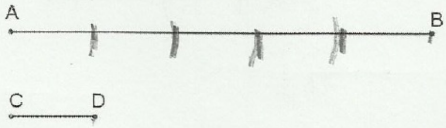


Figura 1: Segmentos AB e CD

Siga os passos a seguir:

- Com um compasso, vamos medir o segmento menor CD. Inicialmente, coloque a ponta fixa do compasso no ponto C e abra-o até o ponto D.
- Depois, fixe o compasso no ponto A, com abertura medindo $\overline{CD}$ e marque um ponto E sobre o segmento AB (Veja que $\overline{AE}$=$\overline{CD}$).
- Repita o passo anterior, o número de vezes que forem possíveis marcar segmentos de medida $\overline{CD}$ sobre o segmento AB.

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB? Sim

porque deu 5 vezes

(b) Dado o segmento EF (figura 2 abaixo), verifique se ele cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD.

Figura B.10: Respostas das atividades do Aluno 3

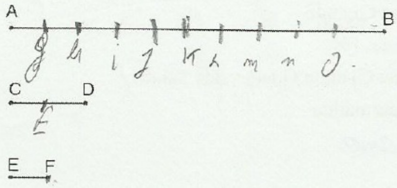


Figura 2: Segmentos AB, CD e EF

2. Seguindo os mesmos passos propostos na questão anterior, verifique se os segmentos AB e CD, possuem uma medida de segmento comum. Veja na figura 3 na página seguinte, a representação dos segmentos AB e CD .

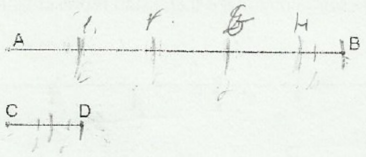


Figura 3: Segmentos AB e CD

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB? não, sobrou HB

- seguindo os mesmos passos propostos na questão 1, verifique se o segmento HB que sobrou no segmento AB, cabe um número inteiro de vezes no segmento CD.

(b) O segmento HB coube um número inteiro de vezes no segmento CD? e no segmento AB? Sim. AB = 9HB / CD = 2 HB.

(c) O que podemos afirmar em relação segmento AB e CD? eles tem a medida HB em comum

3. Verifique se o segmento AB de medida $\sqrt{2}$ cabe um número inteiro de vezes no segmento CD de medida $2\sqrt{2}$. Os segmentos AB e CD, estão representados na figura 4

2

Figura B.11: Respostas das atividades do Aluno 3

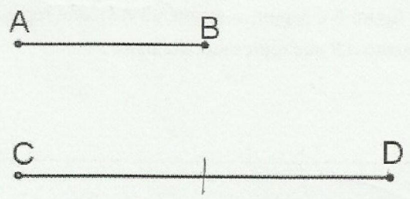


Figura 4: Segmentos AB e CD

a)O segmento de medida $\sqrt{2}$ coube um número inteiro de vezes no segmento de medida $2\sqrt{2}$? Não

b)O que podemos concluir em relação aos segmentos AB e CD, de medidas respectivas, $\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$? ele possuem a medida comum AB.

Definição 0.1 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são* ***comensuráveis****, se existir um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

4. Dado um círculo $C = 2\pi r$ de diâmetro $AB = 2r$, representa na figura 5 abaixo:

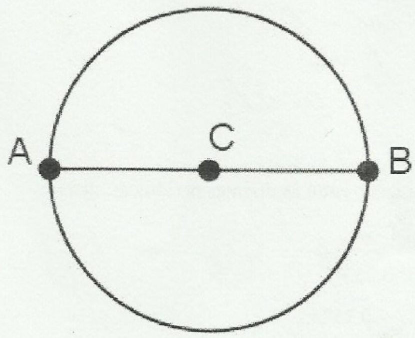


Figura 5: Círculo de centro C

3

Figura B.12: Respostas das atividades do Aluno 3

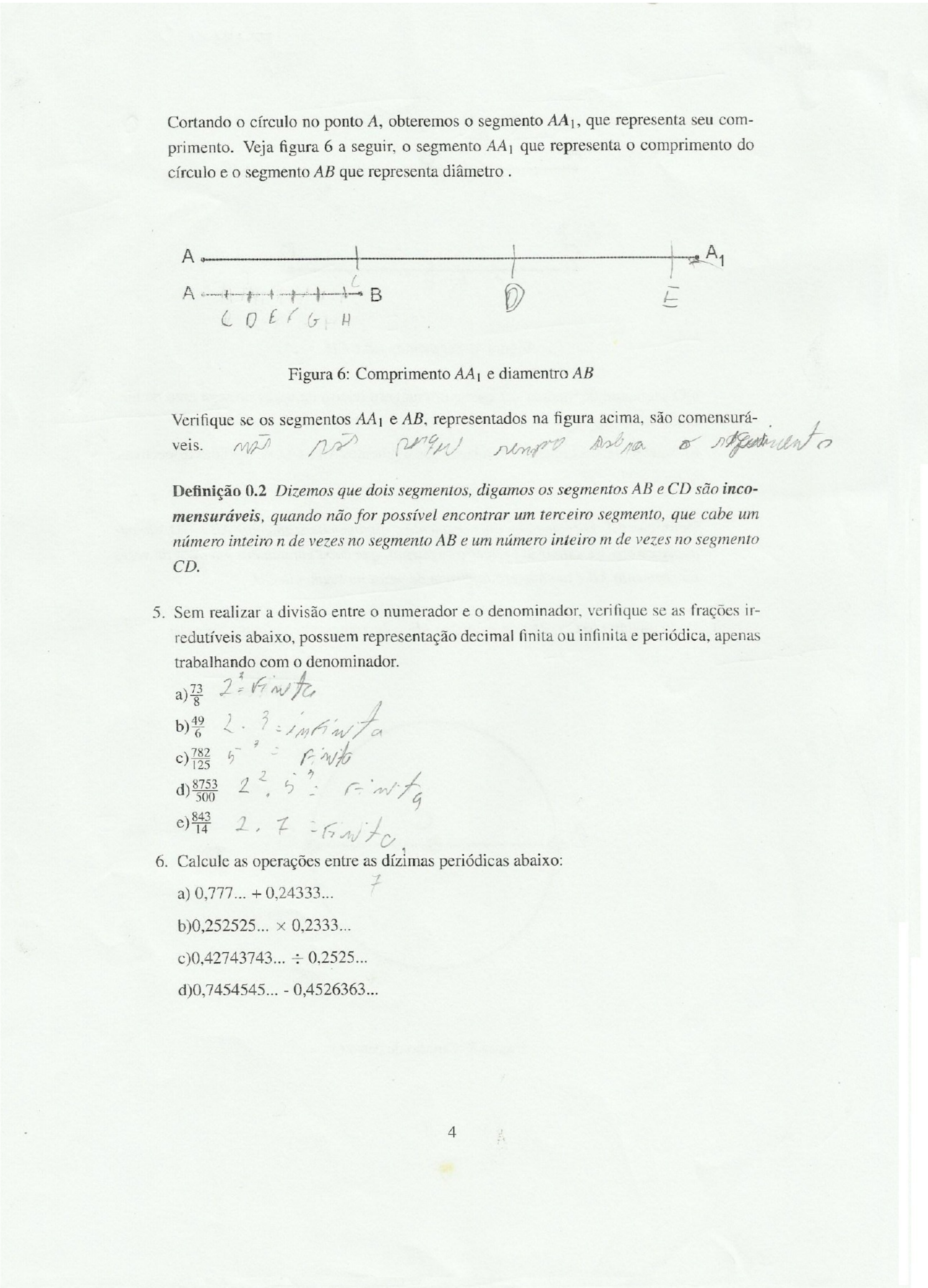

Cortando o círculo no ponto A, obteremos o segmento AA_1, que representa seu comprimento. Veja figura 6 a seguir, o segmento AA_1 que representa o comprimento do círculo e o segmento AB que representa diâmetro .

Figura 6: Comprimento AA_1 e diamentro AB

Verifique se os segmentos AA_1 e AB, representados na figura acima, são comensuráveis. não não porque sempre sobra o segmento

Definição 0.2 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são* ***incomensuráveis****, quando não for possível encontrar um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

5. Sem realizar a divisão entre o numerador e o denominador, verifique se as frações irredutíveis abaixo, possuem representação decimal finita ou infinita e periódica, apenas trabalhando com o denominador.

   a) $\frac{73}{8}$ 2^3 = finita

   b) $\frac{49}{6}$ $2 \cdot 3$ = infinita

   c) $\frac{782}{125}$ 5^3 = finito

   d) $\frac{8753}{500}$ $2^2 \cdot 5^3$ = finita

   e) $\frac{843}{14}$ $2 \cdot 7$ = finito

6. Calcule as operações entre as dízimas periódicas abaixo:

   a) 0,777... + 0,24333... 7

   b) 0,252525... × 0,2333...

   c) 0,42743743... ÷ 0,2525...

   d) 0,7454545... - 0,4526363...

4

Figura B.13: Respostas das atividades do Aluno 3

Atividades

1. Dados dois segmentos AB e $CD = u$. Vamos verificar se esses dois segmentos possuem uma medida de segmento comum, utilizando apenas uma régua não graduada e um compasso. Os dois segmentos AB e CD, estão representados na figura 1 abaixo:

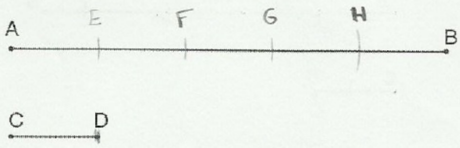


Figura 1: Segmentos AB e CD

Siga os passos a seguir:

- Com um compasso, vamos medir o segmento menor CD. Inicialmente, coloque a ponta fixa do compasso no ponto C e abra-o até o ponto D.
- Depois, fixe o compasso no ponto A, com abertura medindo $\overline{CD}$ e marque um ponto E sobre o segmento AB (Veja que $\overline{AE}$=$\overline{CD}$).
- Repita o passo anterior, o número de vezes que forem possíveis marcar segmentos de medida $\overline{CD}$ sobre o segmento AB.

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB? Coube cinco vezes em AB e CD coube duas vezes

(b) Dado o segmento EF (figura 2 abaixo), verifique se ele cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD.

EF Coube 1 vez nele mesmo

EF coube 10 vez em AB

EF coube 2 vez em CD

1

Figura B.14: Respostas das atividades do Aluno 4

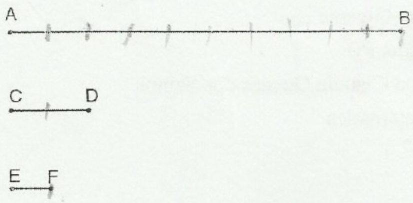


Figura 2: Segmentos AB, CD e EF

2. Seguindo os mesmos passos propostos na questão anterior, verifique se os segmentos AB e CD, possuem uma medida de segmento comum. Veja na figura 3 na página seguinte, a representação dos segmentos AB e CD .

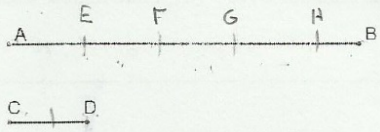


Figura 3: Segmentos AB e CD

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB?

não coube o HB

- seguindo os mesmos passos propostos na questão 1, verifique se o segmento HB que sobrou no segmento AB, cabe um número inteiro de vezes no segmento CD.

(b) O segmento HB coube um número inteiro de vezes no segmento CD? e no segmento AB?

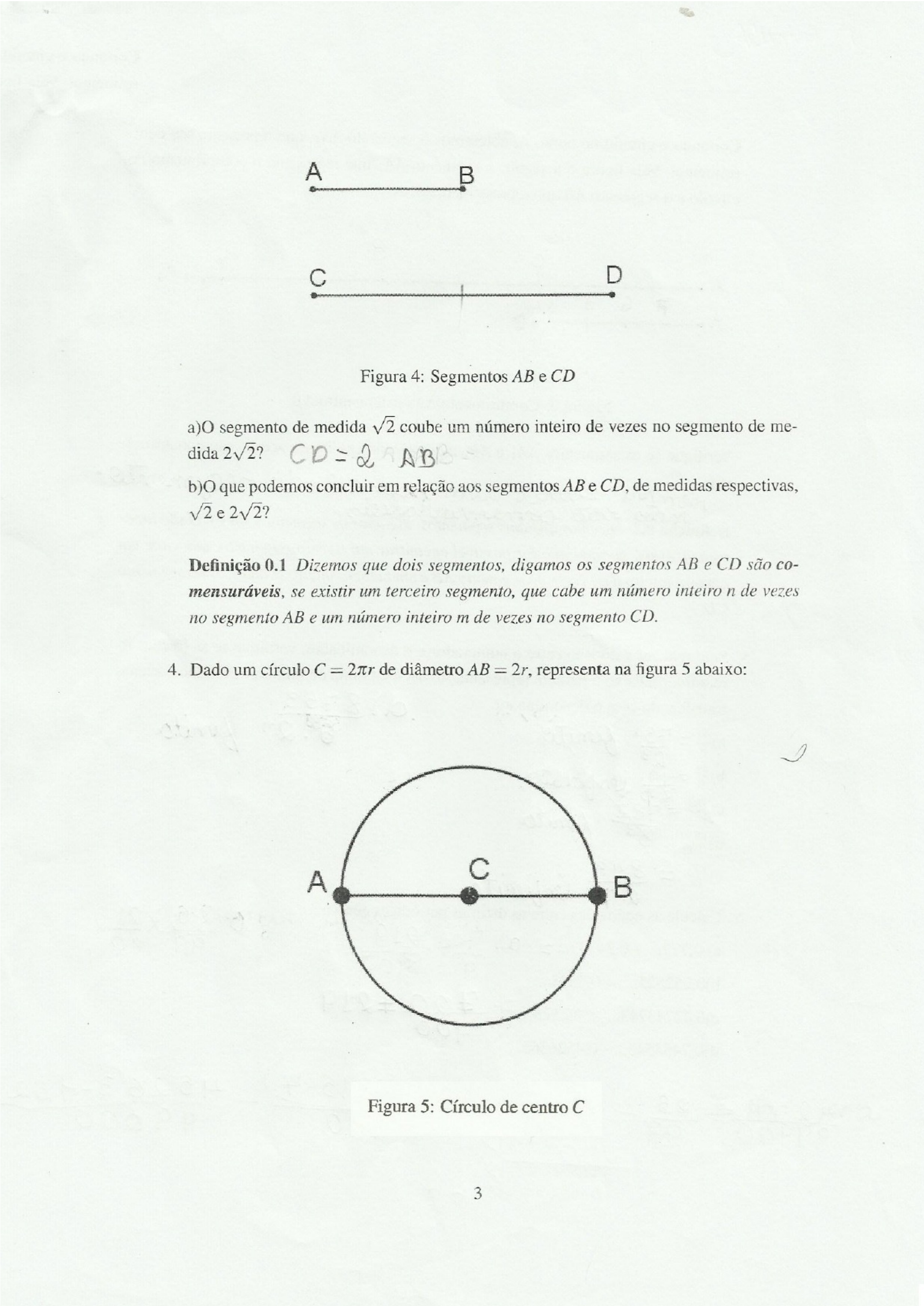
AB = 9 HB
CD = 2 HB

(c) O que podemos afirmar em relação segmento AB e CD?

ele possui o segmento comum HB

3. Verifique se o segmento AB de medida $\sqrt{2}$ cabe um número inteiro de vezes no segmento CD de medida $2\sqrt{2}$. Os segmentos AB e CD, estão representados na figura 4

Figura B.15: Respostas das atividades do Aluno 4



A B

C D

Figura 4: Segmentos AB e CD

a)O segmento de medida $\sqrt{2}$ coube um número inteiro de vezes no segmento de medida $2\sqrt{2}$? $CD = 2\ AB$

b)O que podemos concluir em relação aos segmentos AB e CD, de medidas respectivas, $\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$?

Definição 0.1 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são **comensuráveis**, se existir um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

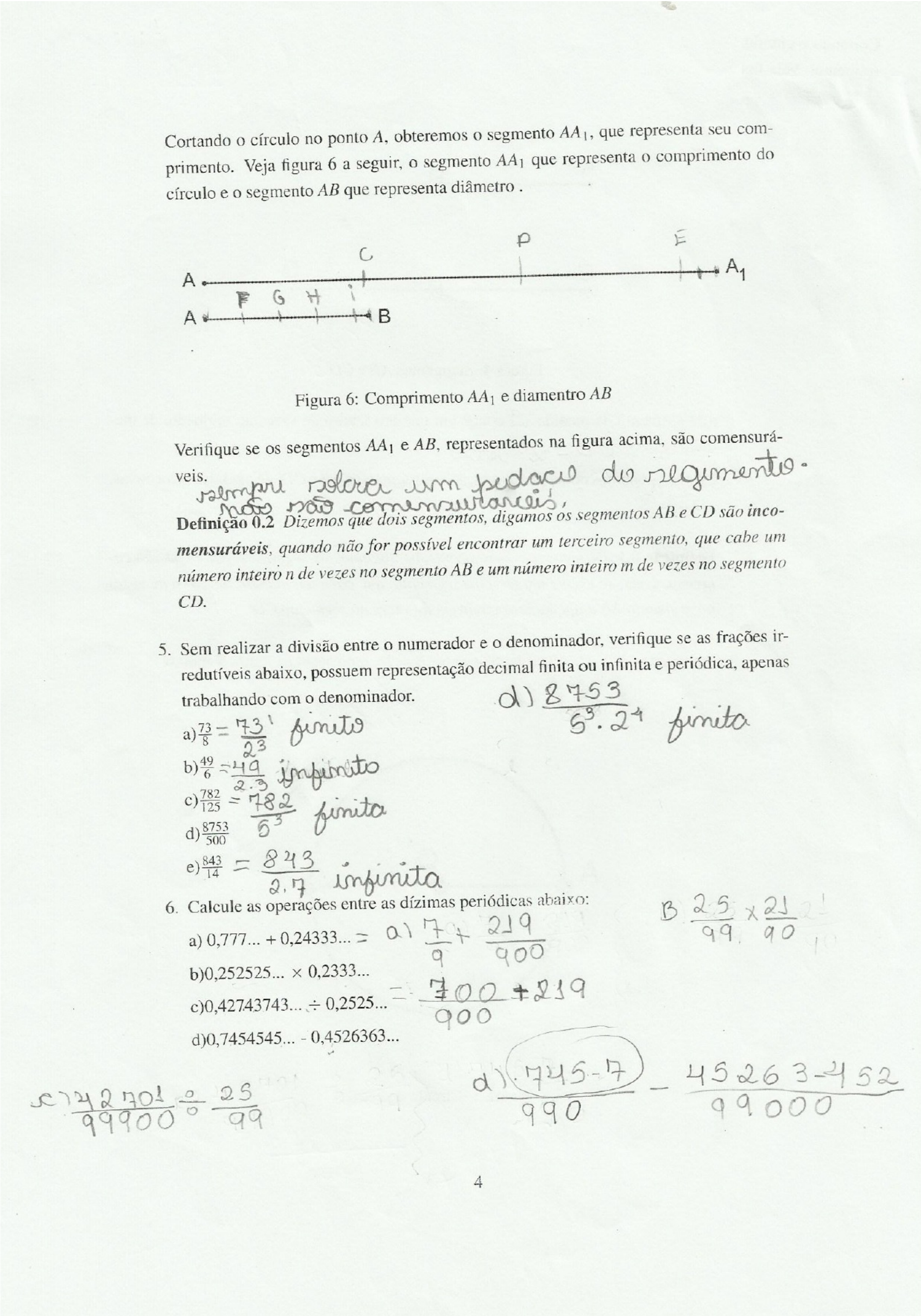
4. Dado um círculo $C = 2\pi r$ de diâmetro $AB = 2r$, representa na figura 5 abaixo:

A C B

Figura 5: Círculo de centro C

3

Figura B.16: Respostas das atividades do Aluno 4



Cortando o círculo no ponto A, obteremos o segmento AA_1, que representa seu comprimento. Veja figura 6 a seguir, o segmento AA_1 que representa o comprimento do círculo e o segmento AB que representa diâmetro .

Figura 6: Comprimento AA_1 e diamentro AB

Verifique se os segmentos AA_1 e AB, representados na figura acima, são comensuráveis.

sempre sobra um pedaço do segmento.
não são comensuráveis,

Definição 0.2 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são* ***incomensuráveis****, quando não for possível encontrar um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

5. Sem realizar a divisão entre o numerador e o denominador, verifique se as frações irredutíveis abaixo, possuem representação decimal finita ou infinita e periódica, apenas trabalhando com o denominador.

a) $\frac{73}{8} = \frac{73}{2^3}$ finito

b) $\frac{49}{6} = \frac{49}{2.3}$ infinito

c) $\frac{782}{125} = \frac{782}{5^3}$ finita

d) $\frac{8753}{500}$

e) $\frac{843}{14} = \frac{843}{2.7}$ infinita

d) $\frac{8753}{5^3.2^2}$ finita

6. Calcule as operações entre as dízimas periódicas abaixo:

a) 0,777... + 0,24333... = a) $\frac{7}{9} + \frac{219}{900}$

b)0,252525... × 0,2333...

c)0,42743743... ÷ 0,2525...

d)0,7454545... - 0,4526363...

$= \frac{700}{900} + 219$

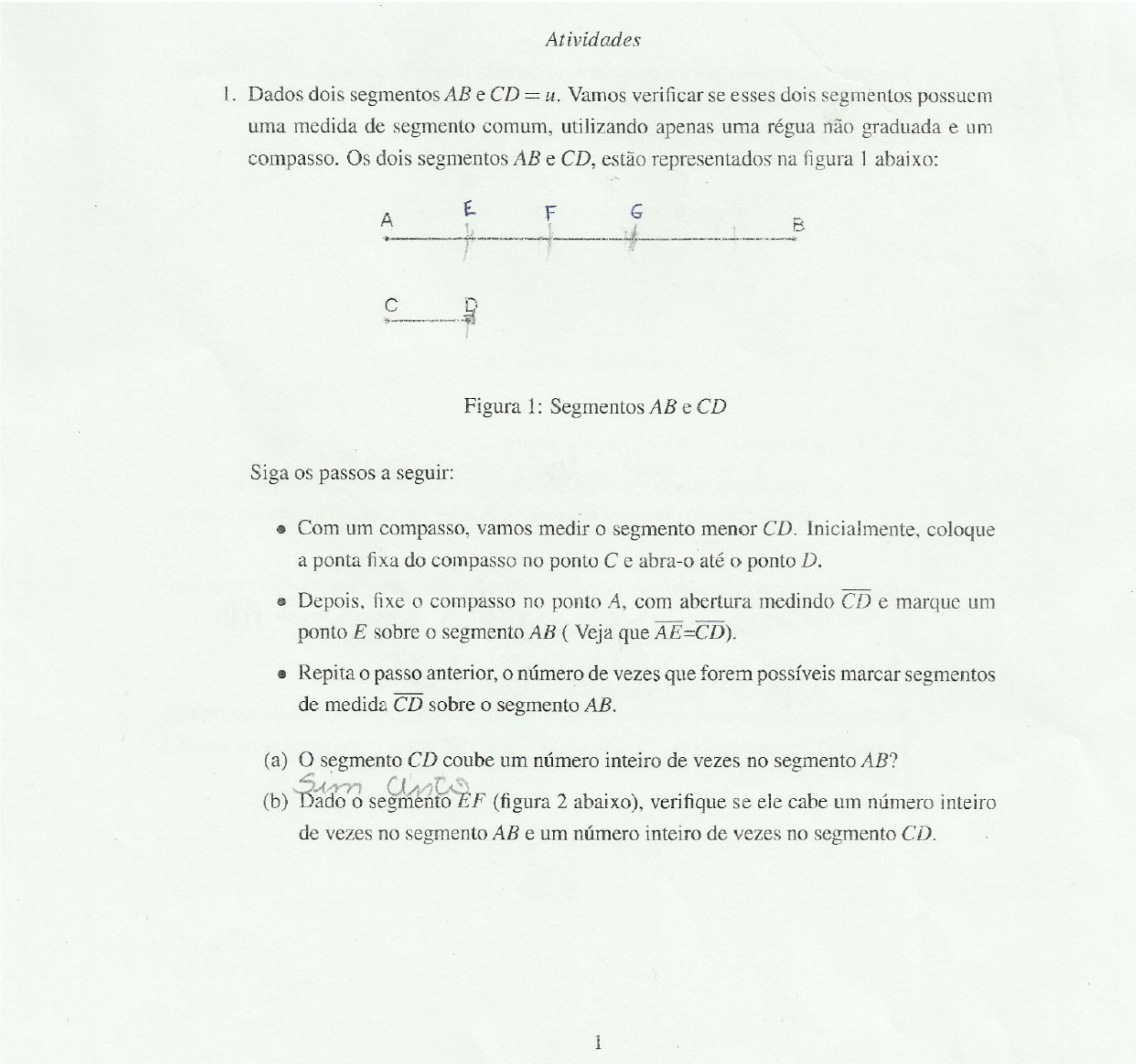
B $\frac{25}{99} \times \frac{21}{90}$

c) $\frac{42701}{99900} \div \frac{25}{99}$

d) $\frac{745-7}{990} - \frac{45263-452}{99000}$

4

Figura B.17: Respostas das atividades do Aluno 4



Atividades

1. Dados dois segmentos AB e $CD = u$. Vamos verificar se esses dois segmentos possuem uma medida de segmento comum, utilizando apenas uma régua não graduada e um compasso. Os dois segmentos AB e CD, estão representados na figura 1 abaixo:

A E F G B

C D

Figura 1: Segmentos AB e CD

Siga os passos a seguir:

- Com um compasso, vamos medir o segmento menor CD. Inicialmente, coloque a ponta fixa do compasso no ponto C e abra-o até o ponto D.
- Depois, fixe o compasso no ponto A, com abertura medindo $\overline{CD}$ e marque um ponto E sobre o segmento AB (Veja que $\overline{AE}$=$\overline{CD}$).
- Repita o passo anterior, o número de vezes que forem possíveis marcar segmentos de medida $\overline{CD}$ sobre o segmento AB.

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB?

Sim cinco

(b) Dado o segmento EF (figura 2 abaixo), verifique se ele cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD.

1

Figura B.18: Respostas das atividades do Aluno 5

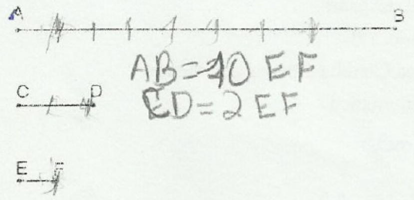


Figura 2: Segmentos AB, CD e EF

2. Seguindo os mesmos passos propostos na questão anterior, verifique se os segmentos AB e CD, possuem uma medida de segmento comum. Veja na figura 3 na página seguinte, a representação dos segmentos AB e CD.

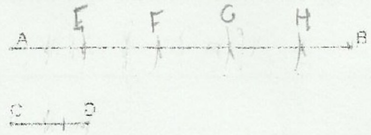


Figura 3: Segmentos AB e CD

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB?

Sim, coube duas vezes no CD

- seguindo os mesmos passos propostos na questão 1, verifique se o segmento HB que sobrou no segmento AB, cabe um número inteiro de vezes no segmento CD.

(b) O segmento HB coube um número inteiro de vezes no segmento CD? e no segmento AB? Sim, AB = 9 HB e CD = 2 HB

(c) O que podemos afirmar em relação segmento AB e CD?

Tem HB em comum

3. Verifique se o segmento AB de medida $\sqrt{2}$ cabe um número inteiro de vezes no segmento CD de medida $2\sqrt{2}$. Os segmentos AB e CD, estão representados na figura 4

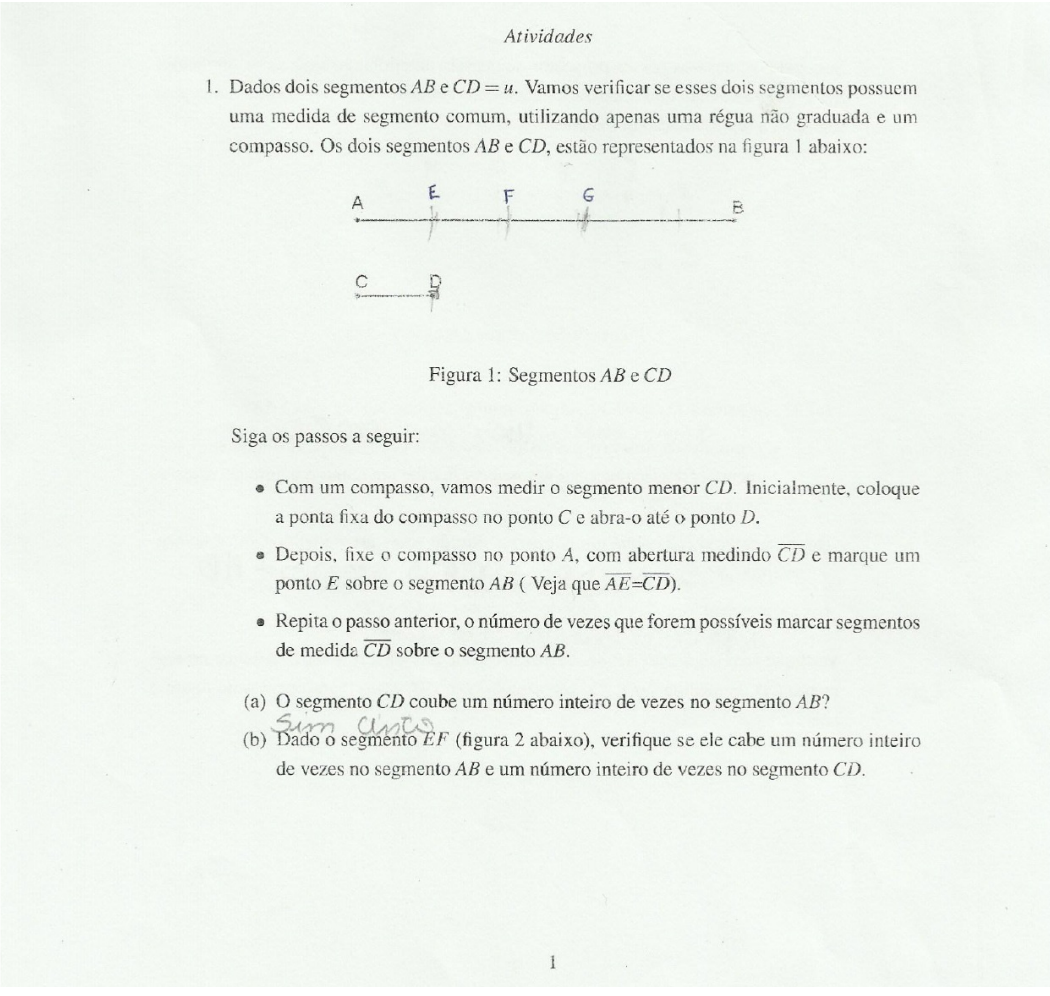
2

Figura B.19: Respostas das atividades do Aluno 5

Apêndice C

Anexos 2

Neste Apêndice, vamos apresentar as respostas de 5 alunos as atividades aplicadas em sala de aula. Cada aluno será identificado por: Aluno 5, Aluno 6, Aluno 7 , Aluno 8 e Aluno 9.



Atividades

1. Dados dois segmentos AB e $CD = u$. Vamos verificar se esses dois segmentos possuem uma medida de segmento comum, utilizando apenas uma régua não graduada e um compasso. Os dois segmentos AB e CD, estão representados na figura 1 abaixo:

A E F G B

C D

Figura 1: Segmentos AB e CD

Siga os passos a seguir:

- Com um compasso, vamos medir o segmento menor CD. Inicialmente, coloque a ponta fixa do compasso no ponto C e abra-o até o ponto D.
- Depois, fixe o compasso no ponto A, com abertura medindo $\overline{CD}$ e marque um ponto E sobre o segmento AB (Veja que $\overline{AE}$=$\overline{CD}$).
- Repita o passo anterior, o número de vezes que forem possíveis marcar segmentos de medida $\overline{CD}$ sobre o segmento AB.

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB?

Sim cinco

(b) Dado o segmento EF (figura 2 abaixo), verifique se ele cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD.

1

Figura C.1: Respostas das atividades do Aluno 5

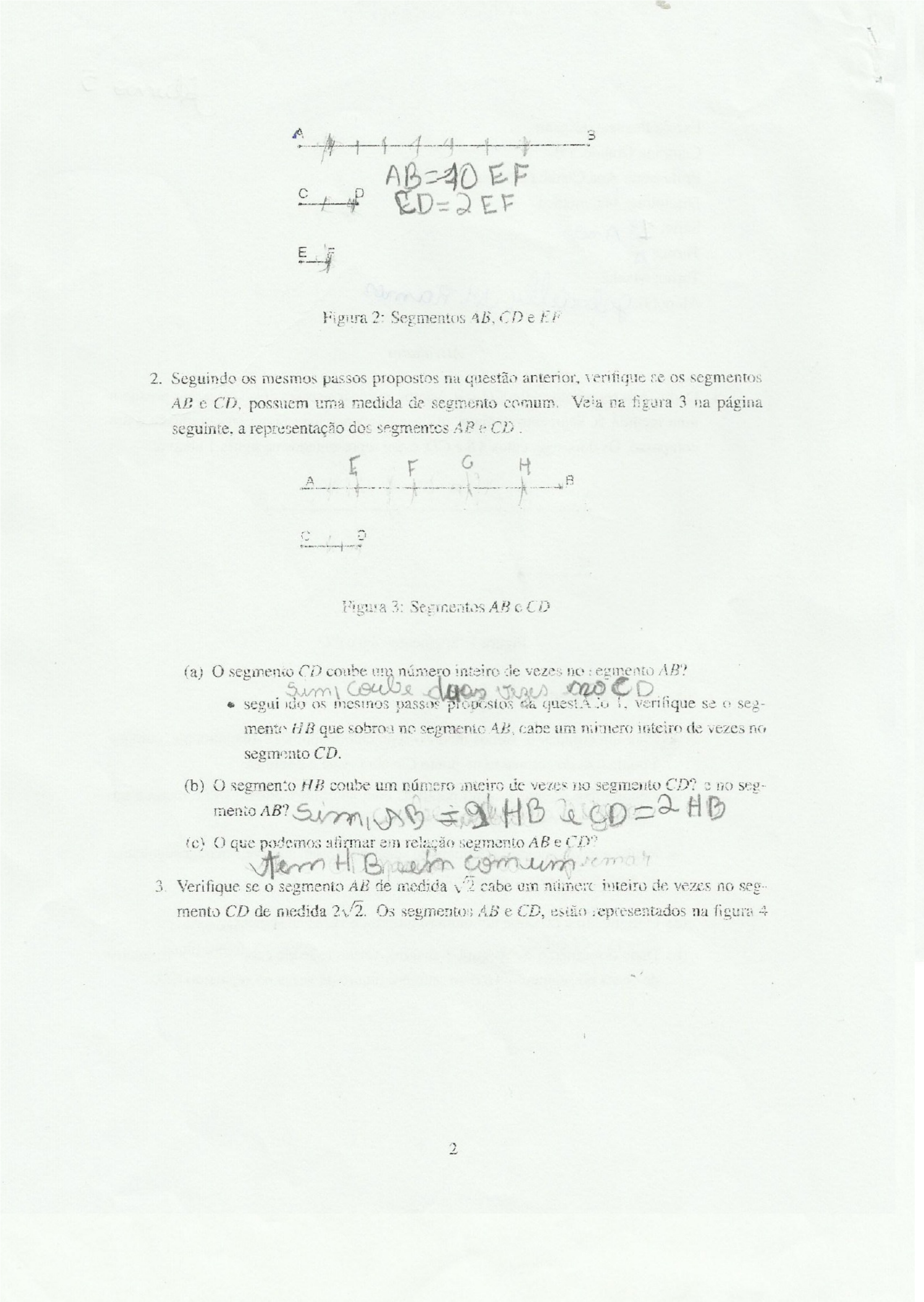


Figura 2: Segmentos AB, CD e EF

2. Seguindo os mesmos passos propostos na questão anterior, verifique se os segmentos AB e CD, possuem uma medida de segmento comum. Veja na figura 3 na página seguinte, a representação dos segmentos AB e CD.

Figura 3: Segmentos AB e CD

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB?

Sim, coube duas vezes no CD

- seguindo os mesmos passos propostos na questão 1, verifique se o segmento HB que sobrou no segmento AB, cabe um número inteiro de vezes no segmento CD.

(b) O segmento HB coube um número inteiro de vezes no segmento CD? e no segmento AB? Sim, AB = 9 HB e CD = 2 HB

(c) O que podemos afirmar em relação segmento AB e CD?

tem HB como comum

3. Verifique se o segmento AB de medida $\sqrt{2}$ cabe um número inteiro de vezes no segmento CD de medida $2\sqrt{2}$. Os segmentos AB e CD, estão representados na figura 4

2

Figura C.2: Respostas das atividades do Aluno 5

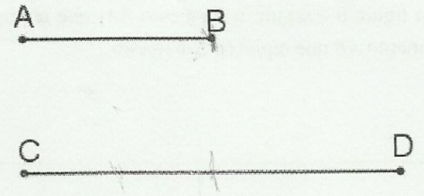


Figura 4: Segmentos AB e CD

a)O segmento de medida $\sqrt{2}$ coube um número inteiro de vezes no segmento de medida $2\sqrt{2}$? Sim, AB possui um duas medidas no CD

b)O que podemos concluir em relação aos segmentos AB e CD, de medidas respectivas, $\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$? Eles possui a medida do AB em comum

Definição 0.1 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são* ***comensuráveis****, se existir um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

4. Dado um círculo $C = 2\pi r$ de diâmetro $AB = 2r$, representa na figura 5 abaixo:

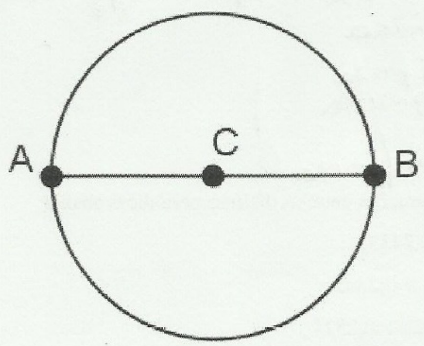


Figura 5: Círculo de centro C

3

Figura C.3: Respostas das atividades do Aluno 5

Cortando o círculo no ponto A, obteremos o segmento AA_1, que representa seu comprimento. Veja figura 6 a seguir, o segmento AA_1 que representa o comprimento do círculo e o segmento AB que representa diâmetro .

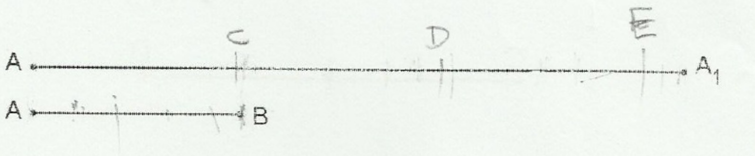


Figura 6: Comprimento AA_1 e diamentro AB

Verifique se os segmentos AA_1 e AB, representados na figura acima, são comensuráveis. não são. Comesuráveis porque sobra segmentos.

Definição 0.2 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são* ***incomensuráveis****, quando não for possível encontrar um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

5. Sem realizar a divisão entre o numerador e o denominador, verifique se as frações irredutíveis abaixo, possuem representação decimal finita ou infinita e periódica, apenas trabalhando com o denominador.

a) $\frac{73}{8}$ finita

b) $\frac{49}{6}$ finita

c) $\frac{782}{125}$ finita

d) $\frac{8753}{500}$ finita

e) $\frac{843}{14}$ infinita

6. Calcule as operações entre as dízimas periódicas abaixo:

a) 0,777... + 0,24333...

b)0,252525... × 0,2333...

c)0,42743743... ÷ 0,2525...

d)0,7454545... - 0,4526363...

4

Figura C.4: Respostas das atividades do Aluno 5

Atividades

1. Dados dois segmentos AB e $CD = u$. Vamos verificar se esses dois segmentos possuem uma medida de segmento comum, utilizando apenas uma régua não graduada e um compasso. Os dois segmentos AB e CD, estão representados na figura 1 abaixo:

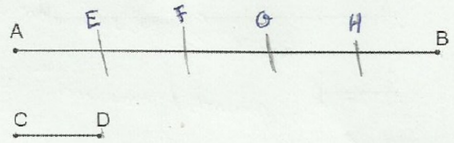


Figura 1: Segmentos AB e CD

Siga os passos a seguir:

- Com um compasso, vamos medir o segmento menor CD. Inicialmente, coloque a ponta fixa do compasso no ponto C e abra-o até o ponto D.
- Depois, fixe o compasso no ponto A, com abertura medindo $\overline{CD}$ e marque um ponto E sobre o segmento AB (Veja que $\overline{AE}$=$\overline{CD}$).
- Repita o passo anterior, o número de vezes que forem possíveis marcar segmentos de medida $\overline{CD}$ sobre o segmento AB.

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB?

Sim, Coube 5 vezes em AB

(b) Dado o segmento EF (figura 2 abaixo), verifique se ele cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD.

1

Figura C.5: Respostas das atividades do Aluno 6

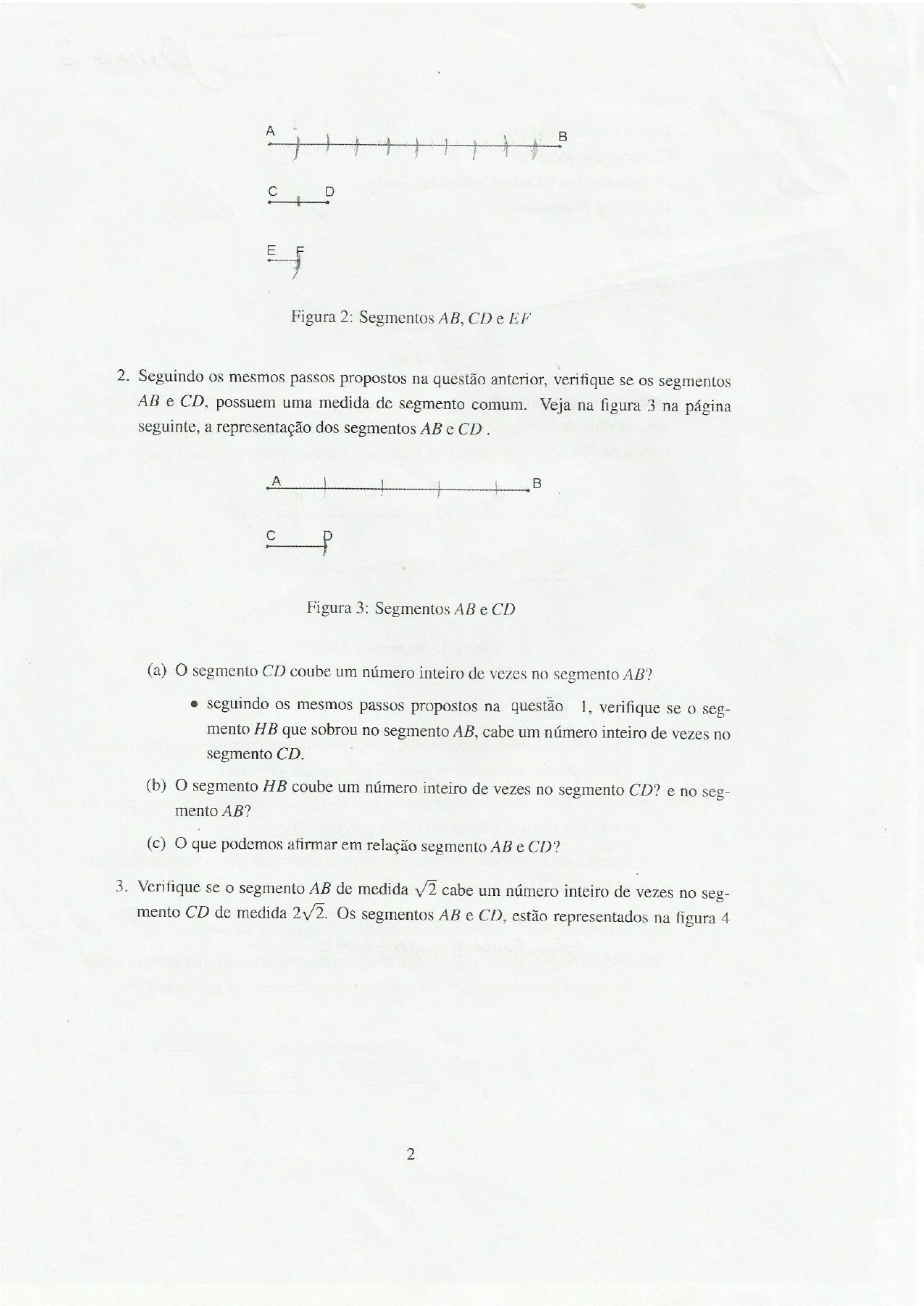


Figura 2: Segmentos AB, CD e EF

2. Seguindo os mesmos passos propostos na questão anterior, verifique se os segmentos AB e CD, possuem uma medida de segmento comum. Veja na figura 3 na página seguinte, a representação dos segmentos AB e CD .

Figura 3: Segmentos AB e CD

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB?

- seguindo os mesmos passos propostos na questão 1, verifique se o segmento HB que sobrou no segmento AB, cabe um número inteiro de vezes no segmento CD.

(b) O segmento HB coube um número inteiro de vezes no segmento CD? e no segmento AB?

(c) O que podemos afirmar em relação segmento AB e CD?

3. Verifique se o segmento AB de medida $\sqrt{2}$ cabe um número inteiro de vezes no segmento CD de medida $2\sqrt{2}$. Os segmentos AB e CD, estão representados na figura 4

2

Figura C.6: Respostas das atividades do Aluno 6

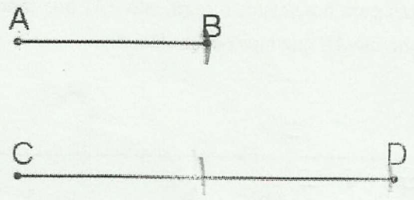


Figura 4: Segmentos AB e CD

a)O segmento de medida $\sqrt{2}$ coube um número inteiro de vezes no segmento de medida $2\sqrt{2}$?

Sim, Coube 2 vezes

b)O que podemos concluir em relação aos segmentos AB e CD, de medidas respectivas, $\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$?

Eles Tem em comum $2\sqrt{2}$

Definição 0.1 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são* ***comensuráveis****, se existir um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

4. Dado um círculo $C = 2\pi r$ de diâmetro $AB = 2r$, representa na figura 5 abaixo:

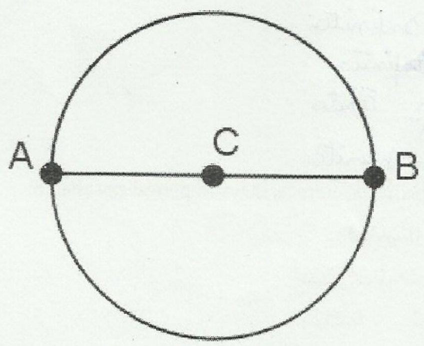


Figura 5: Círculo de centro C

3

Figura C.7: Respostas das atividades do Aluno 6

Cortando o círculo no ponto A, obteremos o segmento AA_1, que representa seu comprimento. Veja figura 6 a seguir, o segmento AA_1 que representa o comprimento do círculo e o segmento AB que representa diâmetro .

Figura 6: Comprimento AA_1 e diamentro AB

Verifique se os segmentos AA_1 e AB, representados na figura acima, são comensuráveis. Não, pois Sempre sobra segmento

Definição 0.2 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são* ***incomensuráveis****, quando não for possível encontrar um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

5. Sem realizar a divisão entre o numerador e o denominador, verifique se as frações irredutíveis abaixo, possuem representação decimal finita ou infinita e periódica, apenas trabalhando com o denominador.

   a) $\frac{73}{8} = \frac{73}{2^3}$ Finita

   b) $\frac{49}{6} = \frac{49}{2 \cdot 3}$ Infinita

   c) $\frac{782}{125}$ $\frac{782}{125}$ finita

   d) $\frac{8753}{500}$ $\frac{8753}{2^2 5^3}$ Finito

   e) $\frac{843}{14}$ $\frac{843}{2 \cdot 7}$ Infinita

6. Calcule as operações entre as dízimas periódicas abaixo:

   a) 0,777... + 0,24333...

   b)0,252525... × 0,2333...

   c)0,42743743... ÷ 0,2525...

   d)0,7454545... - 0,4526363...

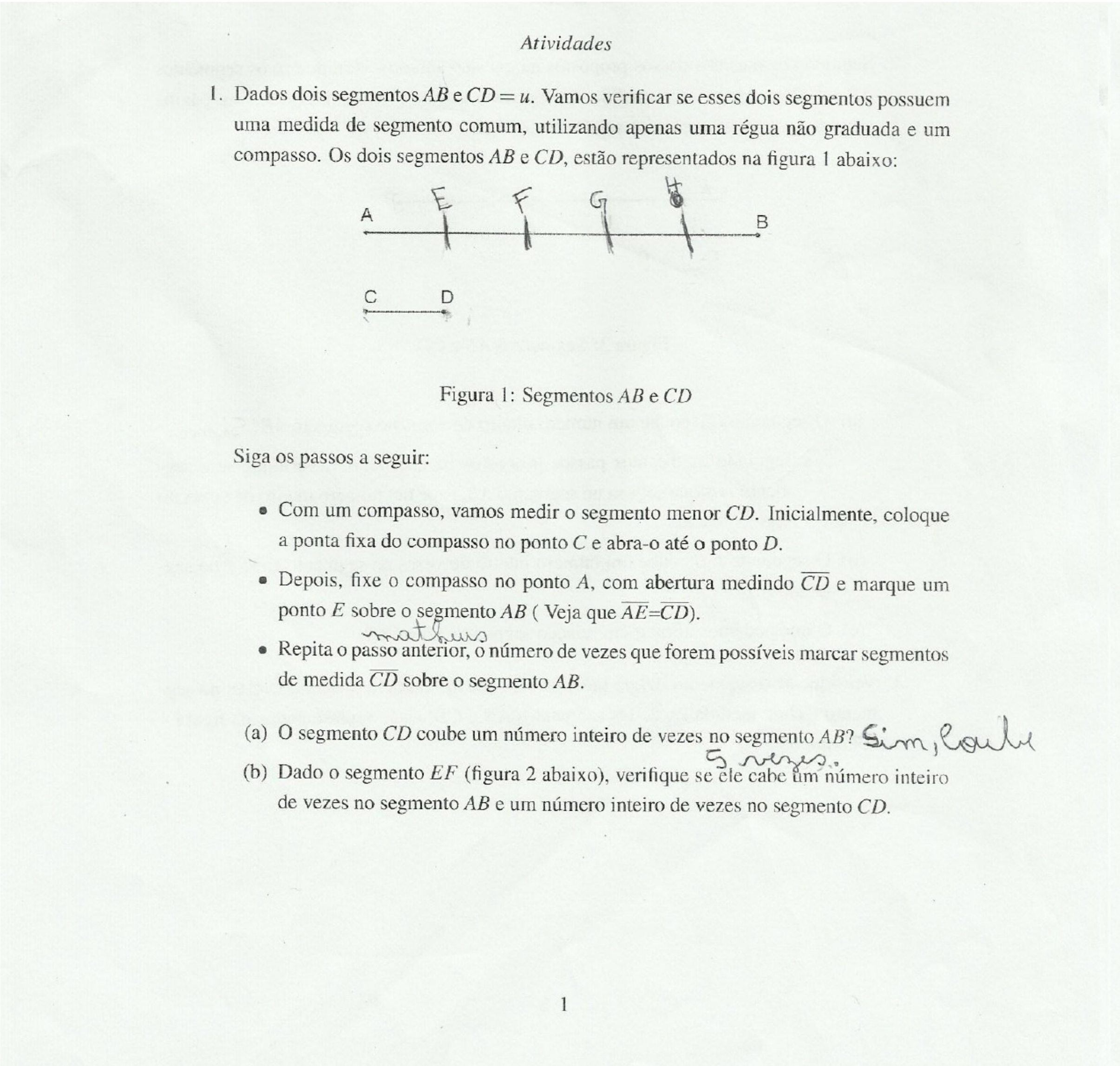
a. $\frac{7}{9} + \frac{243}{900} = \frac{700 + 219}{900} = \frac{919}{900}$

b $\frac{25}{99} \times \frac{21}{90} = \frac{525}{8910}$

c $\frac{4270}{99900} : \frac{25}{99} = \frac{4270}{99900} \times \frac{99}{25} = \frac{422730}{2497500}$

4

Figura C.8: Respostas das atividades do Aluno 6



Atividades

1. Dados dois segmentos AB e $CD = u$. Vamos verificar se esses dois segmentos possuem uma medida de segmento comum, utilizando apenas uma régua não graduada e um compasso. Os dois segmentos AB e CD, estão representados na figura 1 abaixo:

Figura 1: Segmentos AB e CD

Siga os passos a seguir:

- Com um compasso, vamos medir o segmento menor CD. Inicialmente, coloque a ponta fixa do compasso no ponto C e abra-o até o ponto D.
- Depois, fixe o compasso no ponto A, com abertura medindo $\overline{CD}$ e marque um ponto E sobre o segmento AB (Veja que $\overline{AE}$=$\overline{CD}$).
- matheus
  Repita o passo anterior, o número de vezes que forem possíveis marcar segmentos de medida $\overline{CD}$ sobre o segmento AB.

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB? Sim, coube 5 vezes.

(b) Dado o segmento EF (figura 2 abaixo), verifique se ele cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD.

1

Figura C.9: Respostas das atividades do Aluno 7

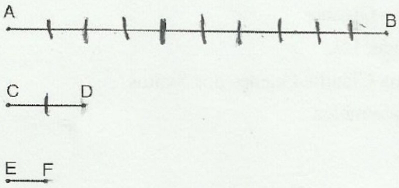


Figura 2: Segmentos AB, CD e EF

2. Seguindo os mesmos passos propostos na questão anterior, verifique se os segmentos AB e CD, possuem uma medida de segmento comum.
Veja na figura 3, a representação dos segmentos AB e CD.

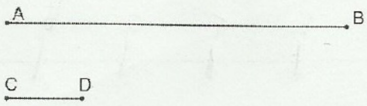


Figura 3: Segmentos AB e CD

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB? Sim.

- seguindo os mesmos passos propostos na questão 1, verifique se o segmento HB que sobrou no segmento AB, cabe um número inteiro de vezes no segmento CD.

(b) O segmento HB coube um número inteiro de vezes no segmento CD? e no segmento AB?

(c) O que podemos afirmar em relação segmento AB e CD?

3. Verifique se o segmento AB de medida $\sqrt{2}$ cabe um número inteiro de vezes no segmento CD de medida $2\sqrt{2}$. Os segmentos AB e CD, estão representados na figura 4

2

Figura C.10: Respostas das atividades do Aluno 7

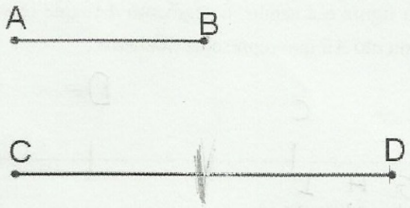


Figura 4: Segmentos AB e CD

a)O segmento de medida $\sqrt{2}$ coube um número inteiro de vezes no segmento de medida $2\sqrt{2}$? Sim, o segmento $\overline{AB}$ coube duas vezes.

b)O que podemos concluir em relação aos segmentos AB e CD, de medidas respectivas, $\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$? Sim, a medida $\sqrt{2}$.

Definição 0.1 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são* ***comensuráveis****, se existir um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

4. Dado um círculo $C = 2\pi r$ de diâmetro $AB = 2r$, representa na figura 5 abaixo:

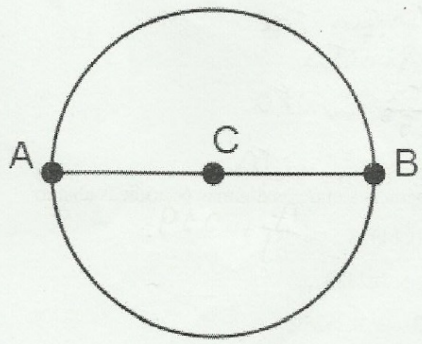
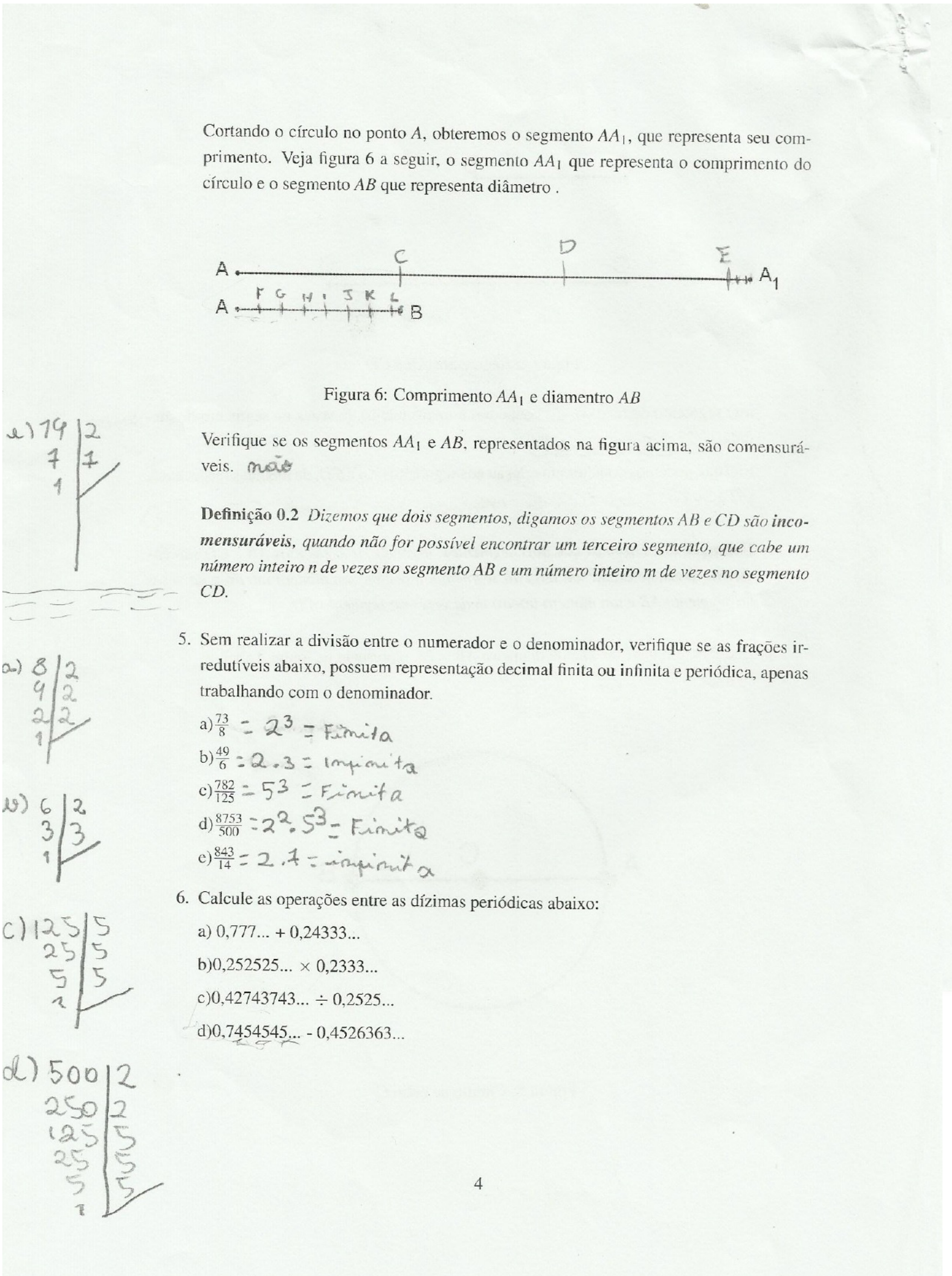


Figura 5: Círculo de centro C

3

Figura C.11: Respostas das atividades do Aluno 7



Cortando o círculo no ponto A, obteremos o segmento AA_1, que representa seu comprimento. Veja figura 6 a seguir, o segmento AA_1 que representa o comprimento do círculo e o segmento AB que representa diâmetro .

A C D E A_1

A F G H I J K L B

Figura 6: Comprimento AA_1 e diamentro AB

Verifique se os segmentos AA_1 e AB, representados na figura acima, são comensuráveis. não

Definição 0.2 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são* ***incomensuráveis****, quando não for possível encontrar um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

5. Sem realizar a divisão entre o numerador e o denominador, verifique se as frações irredutíveis abaixo, possuem representação decimal finita ou infinita e periódica, apenas trabalhando com o denominador.

   a) $\frac{73}{8} = 2^3 =$ Finita

   b) $\frac{49}{6} = 2 . 3 =$ infinita

   c) $\frac{782}{125} = 5^3 =$ Finita

   d) $\frac{8753}{500} = 2^2 . 5^3 =$ Finita

   e) $\frac{843}{14} = 2 . 7 =$ infinita

6. Calcule as operações entre as dízimas periódicas abaixo:

   a) 0,777... + 0,24333...

   b)0,252525... × 0,2333...

   c)0,42743743... ÷ 0,2525...

   d)0,7454545... - 0,4526363...

e) 14 | 2; 7 | 7; 1

a) 8 | 2; 4 | 2; 2 | 2; 1

b) 6 | 2; 3 | 3; 1

c) 125 | 5; 25 | 5; 5 | 5; 1

d) 500 | 2; 250 | 2; 125 | 5; 25 | 5; 5 | 5; 1

4

Figura C.12: Respostas das atividades do Aluno 8

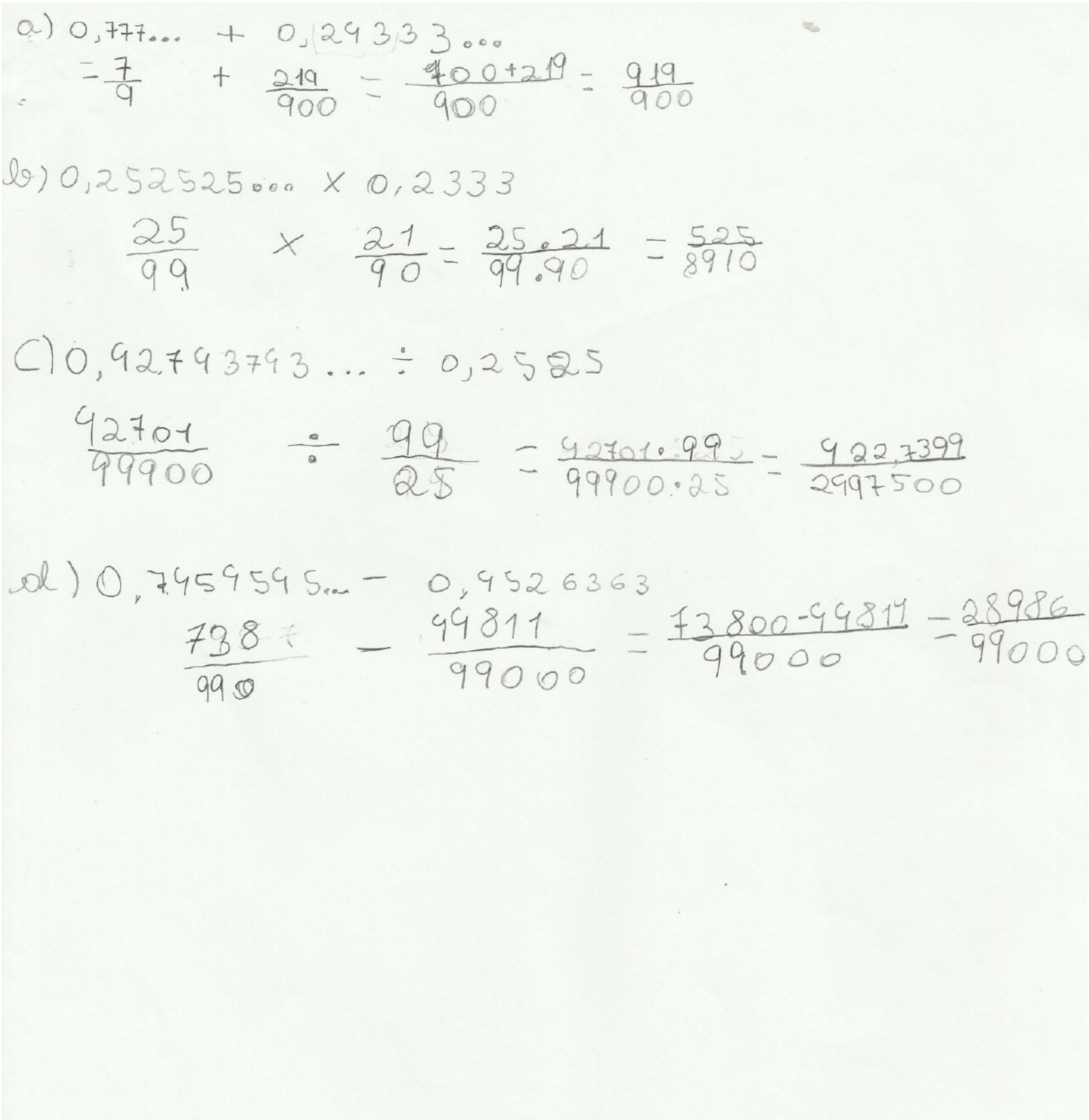


Figura C.13: Respostas das atividades do Aluno 8

Atividades

1. Dados dois segmentos AB e $CD = u$. Vamos verificar se esses dois segmentos possuem uma medida de segmento comum, utilizando apenas uma régua não graduada e um compasso. Os dois segmentos AB e CD, estão representados na figura 1 abaixo:

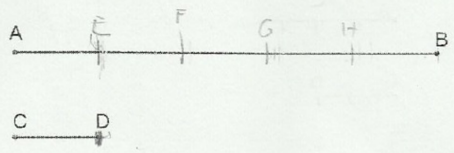


Figura 1: Segmentos AB e CD

Siga os passos a seguir:

- Com um compasso, vamos medir o segmento menor CD. Inicialmente, coloque a ponta fixa do compasso no ponto C e abra-o até o ponto D.
- Depois, fixe o compasso no ponto A, com abertura medindo $\overline{CD}$ e marque um ponto E sobre o segmento AB (Veja que $\overline{AE}$=$\overline{CD}$).
- Repita o passo anterior, o número de vezes que forem possíveis marcar segmentos de medida $\overline{CD}$ sobre o segmento AB.

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB?

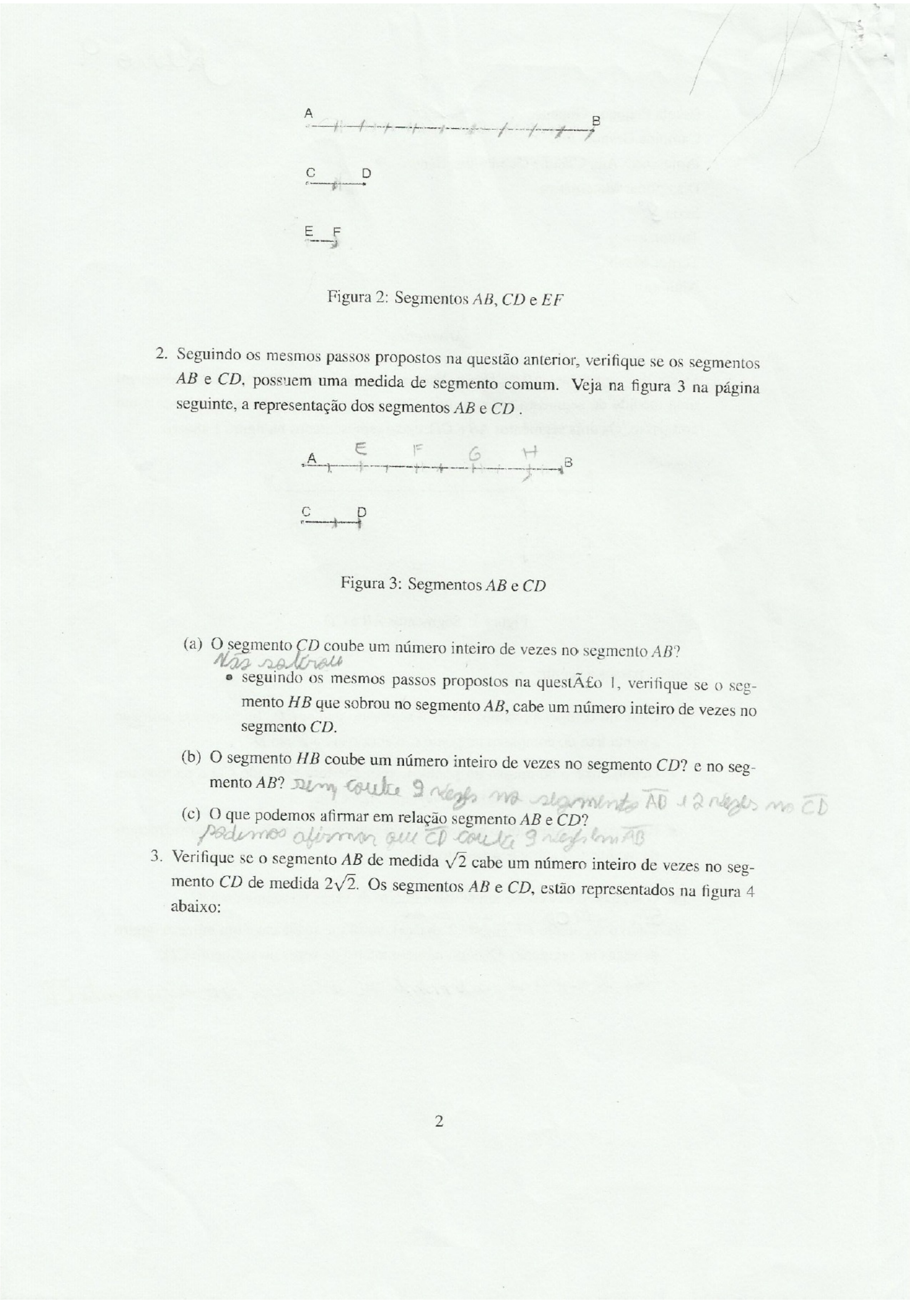
Sim, coube $\overline{CD}$ deu 5 vezes no AB

(b) Dado o segmento EF (figura 2 abaixo), verifique se ele cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD.

Deu 10 vezes no segimento $\overline{AB}$ e 2 vezes no segimento $\overline{CD}$

1

Figura C.14: Respostas das atividades do Aluno 9



A B

C D

E F

Figura 2: Segmentos AB, CD e EF

2. Seguindo os mesmos passos propostos na questão anterior, verifique se os segmentos AB e CD, possuem uma medida de segmento comum. Veja na figura 3 na página seguinte, a representação dos segmentos AB e CD .

A E F G H B

C D

Figura 3: Segmentos AB e CD

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB?
Não sobrou
   - seguindo os mesmos passos propostos na questÃ£o 1, verifique se o segmento HB que sobrou no segmento AB, cabe um número inteiro de vezes no segmento CD.

(b) O segmento HB coube um número inteiro de vezes no segmento CD? e no segmento AB? sim coube 9 vezes no segmento $\overline{AB}$ e 2 vezes no $\overline{CD}$

(c) O que podemos afirmar em relação segmento AB e CD?
podemos afirmar que $\overline{CD}$ coube 9 vezes em $\overline{AB}$

3. Verifique se o segmento AB de medida $\sqrt{2}$ cabe um número inteiro de vezes no segmento CD de medida $2\sqrt{2}$. Os segmentos AB e CD, estão representados na figura 4 abaixo:

2

Figura C.15: Respostas das atividades do Aluno 9

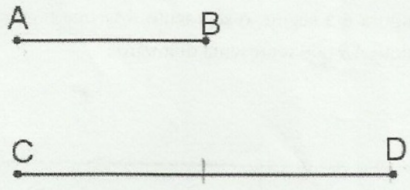


Figura 4: Segmentos AB e CD

a)O segmento de medida $\sqrt{2}$ coube um número inteiro de vezes no segmento de medida $2\sqrt{2}$? Coube 2 vezes

b)O que podemos concluir em relação aos segmentos AB e CD, de medidas respectivas, $\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$? Possui a raiz de dois em comum

Definição 0.1 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são **comensuráveis**, se existir um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

4. Dado um círculo $C = 2\pi r$ de diâmetro $AB = 2r$, representa na figura 5 abaixo:

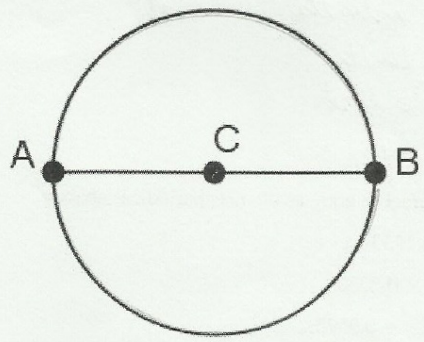


Figura 5: Círculo de centro C

3

Figura C.16: Respostas das atividades do Aluno 9

Cortando o círculo no ponto A, obteremos o segmento AA_1, que representa seu comprimento. Veja figura 6 a seguir, o segmento AA_1 que representa o comprimento do círculo e o segmento AB que representa diâmetro .

Figura 6: Comprimento AA_1 e diamentro AB

Verifique se os segmentos AA_1 e AB, representados na figura acima, são comensuráveis. Não são, sobrou um segmento

Definição 0.2 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são* ***incomensuráveis****, quando não for possível encontrar um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

5. Sem realizar a divisão entre o numerador e o denominador, verifique se as frações irredutíveis abaixo, possuem representação decimal finita ou infinita e periódica, apenas trabalhando com o denominador.

a) $\frac{73}{8} = 2^3 =$ Finita

b) $\frac{49}{6} = 2 \cdot 3 =$ infinita

c) $\frac{782}{125} = 5^3 =$ finita

d) $\frac{8753}{500} = 2^2 \cdot 5^3 =$ finita

e) $\frac{843}{14} = 2, 7 =$ infinita.

a) $\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$ b) $\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$ c) $\begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ d) $\begin{array}{r|l} 500 & 2 \\ 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ e) $\begin{array}{r|l} 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$

6. Calcule as operações entre as dízimas periódicas abaixo:

a) 0,777... + 0,24333...

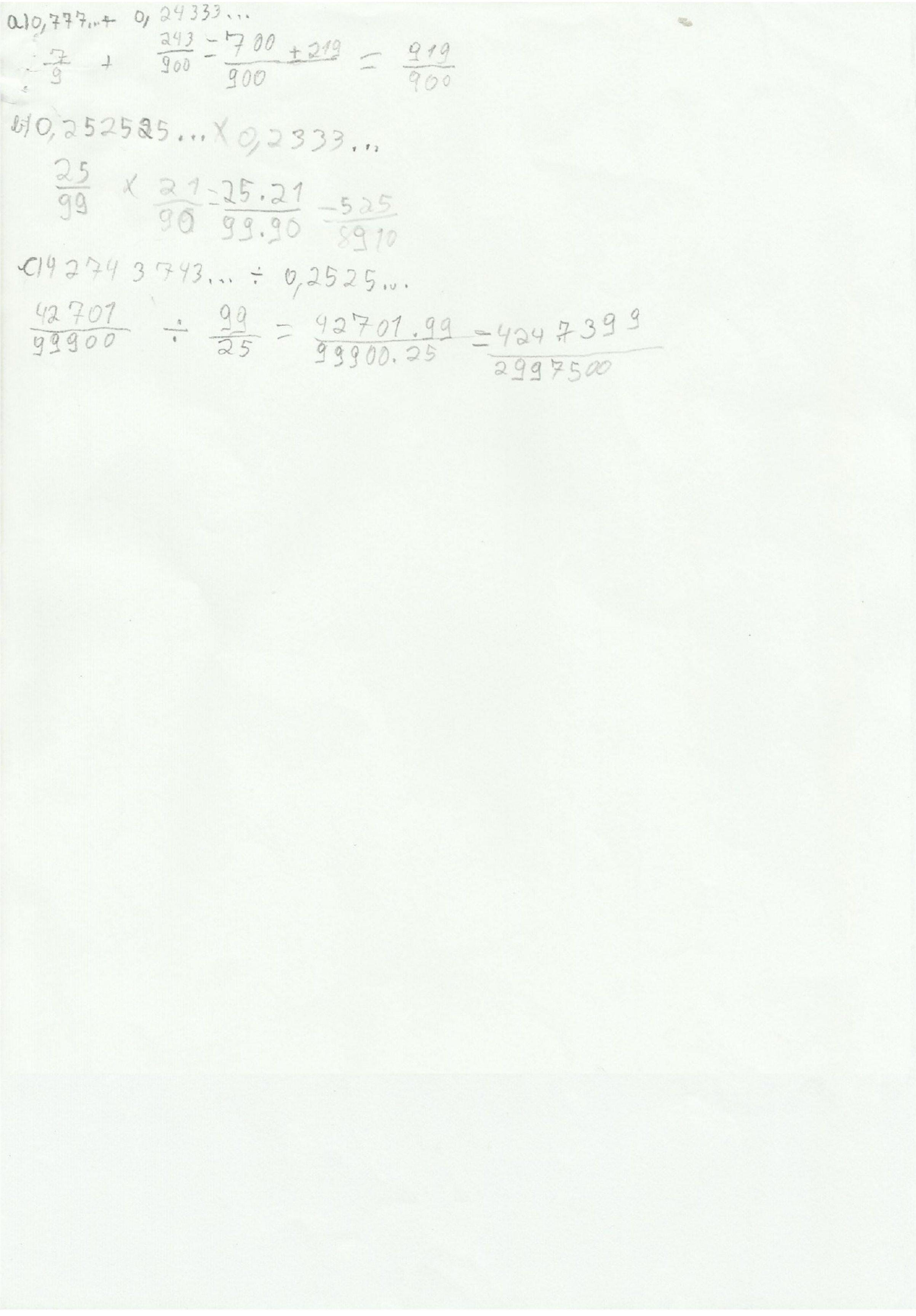
b)0,252525... × 0,2333...

c)0,42743743... ÷ 0,2525...

d)0,7454545... - 0,4526363...

4

Figura C.17: Respostas das atividades do Aluno 9


a) 0,777... + 0,24333...

$\frac{7}{9} + \frac{243}{900} = \frac{700 + 219}{900} = \frac{919}{900}$

b) 0,252525... × 0,2333...

$\frac{25}{99} \times \frac{21}{90} = \frac{25 \cdot 21}{99 \cdot 90} = \frac{525}{8910}$

c) 4274 3743... ÷ 0,2525...

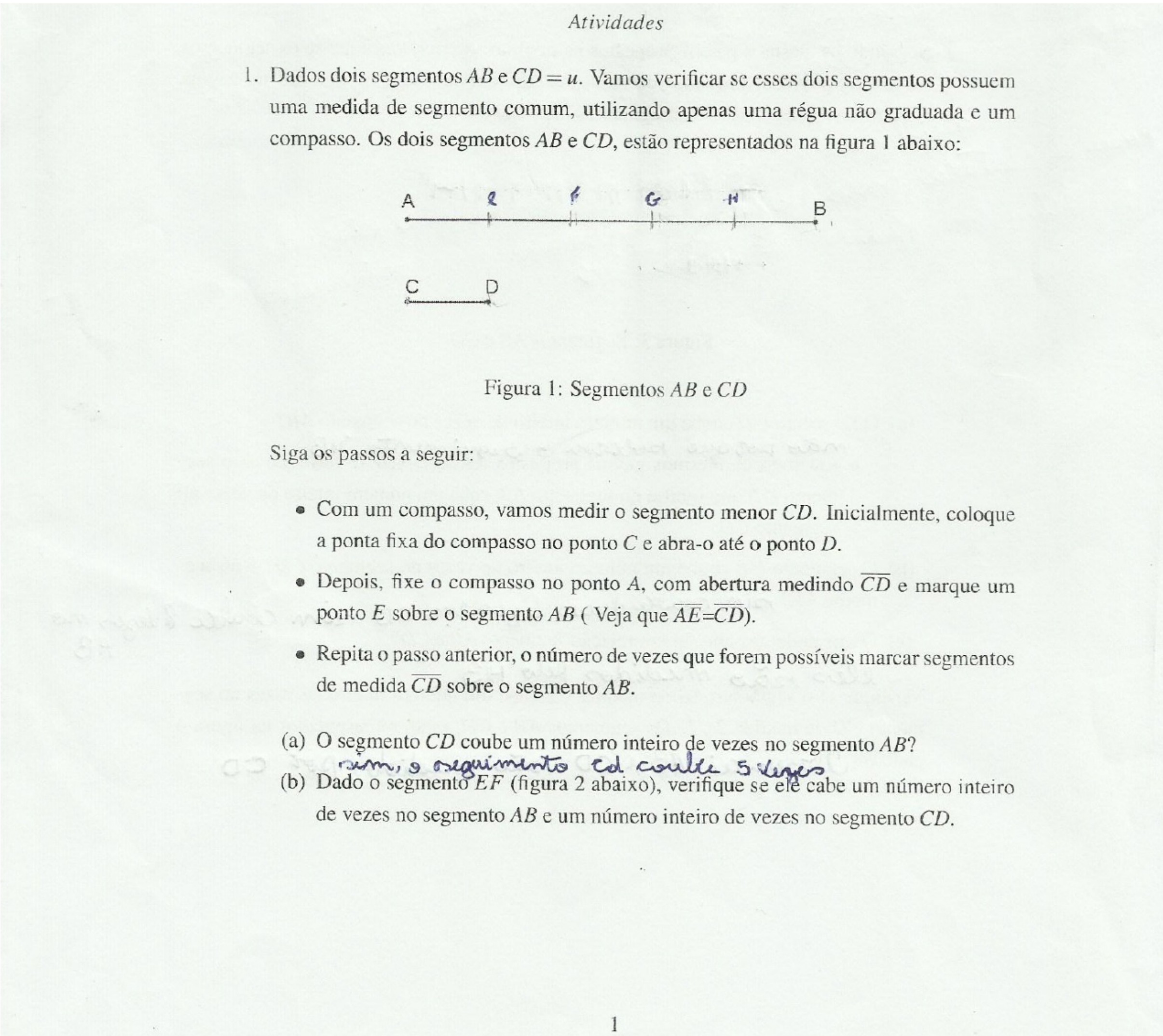
$\frac{42701}{99900} \div \frac{99}{25} = \frac{42701 \cdot 99}{99900 \cdot 25} = \frac{4247399}{2997500}$

Figura C.18: Respostas das atividades do Aluno 9

Apêndice D

Anexos 3

Neste Apêndice, vamos apresentar as respostas de 4 alunos as atividades aplicadas em sala de aula. Cada aluno será identificado por: Aluno 10, Aluno 11, Aluno 12 e Aluno 13.



Atividades

1. Dados dois segmentos AB e $CD = u$. Vamos verificar se esses dois segmentos possuem uma medida de segmento comum, utilizando apenas uma régua não graduada e um compasso. Os dois segmentos AB e CD, estão representados na figura 1 abaixo:

Figura 1: Segmentos AB e CD

Siga os passos a seguir:

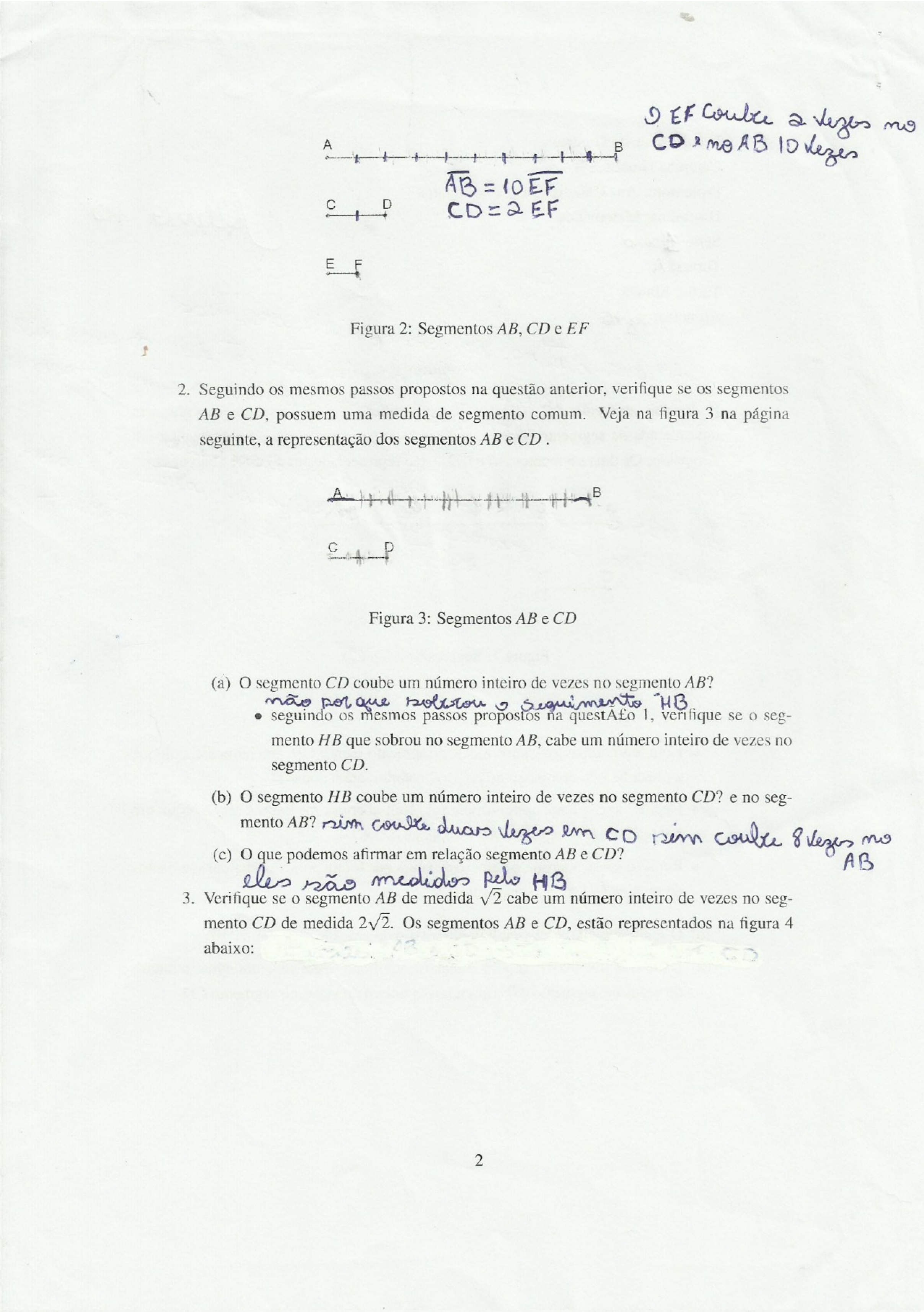
- Com um compasso, vamos medir o segmento menor CD. Inicialmente, coloque a ponta fixa do compasso no ponto C e abra-o até o ponto D.
- Depois, fixe o compasso no ponto A, com abertura medindo $\overline{CD}$ e marque um ponto E sobre o segmento AB (Veja que $\overline{AE}$=$\overline{CD}$).
- Repita o passo anterior, o número de vezes que forem possíveis marcar segmentos de medida $\overline{CD}$ sobre o segmento AB.

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB?
sim, o segmento cd coube 5 vezes
(b) Dado o segmento EF (figura 2 abaixo), verifique se ele cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD.

1

Figura D.1: Respostas das atividades do Aluno 10

4



O EF coube 2 vezes no CD e no AB 10 vezes

A B

$\overline{AB} = 10\overline{EF}$

C D $CD = 2\,EF$

E F

Figura 2: Segmentos AB, CD e EF

2. Seguindo os mesmos passos propostos na questão anterior, verifique se os segmentos AB e CD, possuem uma medida de segmento comum. Veja na figura 3 na página seguinte, a representação dos segmentos AB e CD .

A B

C D

Figura 3: Segmentos AB e CD

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB?
não porque sobrou o seguimento HB
   - seguindo os mesmos passos propostos na questA£o 1, verifique se o segmento HB que sobrou no segmento AB, cabe um número inteiro de vezes no segmento CD.

(b) O segmento HB coube um número inteiro de vezes no segmento CD? e no segmento AB? sim coube duas vezes em CD sim coube 8 vezes no AB

(c) O que podemos afirmar em relação segmento AB e CD?
eles são medidos pelo HB

3. Verifique se o segmento AB de medida $\sqrt{2}$ cabe um número inteiro de vezes no segmento CD de medida $2\sqrt{2}$. Os segmentos AB e CD, estão representados na figura 4 abaixo:

2

Figura D.2: Respostas das atividades do Aluno 10

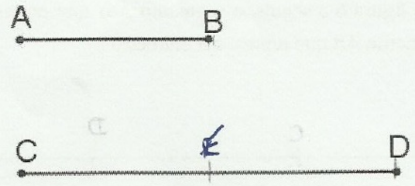


Figura 4: Segmentos AB e CD

a)O segmento de medida $\sqrt{2}$ coube um número inteiro de vezes no segmento de medida $2\sqrt{2}$? sim Duas vezes o Seguimento AB coube 2 vezes no CD

b)O que podemos concluir em relação aos segmentos AB e CD, de medidas respectivas, $\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$? eles possuem uma medida em comum AB

Definição 0.1 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são **comensuráveis**, se existir um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

4. Dado um círculo $C = 2\pi r$ de diâmetro $AB = 2r$, representa na figura 5 abaixo:

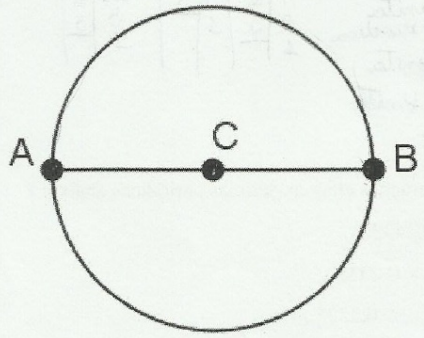


Figura 5: Círculo de centro C

3

Figura D.3: Respostas das atividades do Aluno 10

Cortando o círculo no ponto A, obteremos o segmento AA_1, que representa seu comprimento. Veja figura 6 a seguir, o segmento AA_1 que representa o comprimento do círculo e o segmento AB que representa diâmetro .

Figura 6: Comprimento AA_1 e diamentro AB

Verifique se os segmentos AA_1 e AB, representados na figura acima, são comensuráveis. Não por que sempre tá sobrando um pedaço em segmento

Definição 0.2 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são* ***incomensuráveis****, quando não for possível encontrar um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

5. Sem realizar a divisão entre o numerador e o denominador, verifique se as frações irredutíveis abaixo, possuem representação decimal finita ou infinita e periódica, apenas trabalhando com o denominador.

a) $\frac{73}{8}$ $\frac{73}{2^3}$ finita

b) $\frac{49}{6}$ $\frac{49}{2 \cdot 3}$ infinita e periodica

c) $\frac{782}{125}$ $\frac{782}{5^3}$ finita

d) $\frac{8753}{500}$ $\frac{8753}{2^2 \cdot 5^3}$ finita

e) $\frac{843}{14}$ $\frac{843}{2 \cdot 7}$

a) 8 | 2, 4 | 2, 2 | 2, 1
b) 6 | 2, 3 | 3, 1
c) 125 | 5, 25 | 5, 5 | 5, 1

6. Calcule as operações entre as dízimas periódicas abaixo:

a) 0,777... + 0,24333...

b)0,252525... × 0,2333...

c)0,42743743... ÷ 0,2525...

d)0,7454545... - 0,4526363...

4

Figura D.4: Respostas das atividades do Aluno 10

Atividades

1. Dados dois segmentos AB e $CD = u$. Vamos verificar se esses dois segmentos possuem uma medida de segmento comum, utilizando apenas uma régua não graduada e um compasso. Os dois segmentos AB e CD, estão representados na figura 1 abaixo:

Figura 1: Segmentos AB e CD

Siga os passos a seguir:

- Com um compasso, vamos medir o segmento menor CD. Inicialmente, coloque a ponta fixa do compasso no ponto C e abra-o até o ponto D.
- Depois, fixe o compasso no ponto A, com abertura medindo $\overline{CD}$ e marque um ponto E sobre o segmento AB (Veja que $\overline{AE}$=$\overline{CD}$).
- Repita o passo anterior, o número de vezes que forem possíveis marcar segmentos de medida $\overline{CD}$ sobre o segmento AB.

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB?
Sím, CD Cabe 5 Vezes em AB.

(b) Dado o segmento EF (figura 2 abaixo), verifique se ele cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD.

1

Figura D.5: Respostas das atividades do Aluno 11

Sim, no Segmento CD Cobe 2 vezes, no Segmento AB Cobe 10 vezes.
$\overline{AB} = 10\overline{EF}$
$\overline{CD} = 2\overline{EF}$

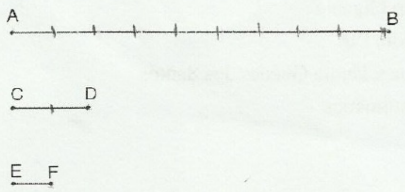


Figura 2: Segmentos *AB*, *CD* e *EF*

2. Seguindo os mesmos passos propostos na questão anterior, verifique se os segmentos *AB* e *CD*, possuem uma medida de segmento comum. Veja na figura 3 na página seguinte, a representação dos segmentos *AB* e *CD* .

Figura 3: Segmentos *AB* e *CD*

(a) O segmento *CD* coube um número inteiro de vezes no segmento *AB*?
não, Porque Sobrou o Segmento $\overline{HB}$
   - seguindo os mesmos passos propostos na questÃ£o 1, verifique se o segmento *HB* que sobrou no segmento *AB*, cabe um número inteiro de vezes no segmento *CD*.

(b) O segmento *HB* coube um número inteiro de vezes no segmento *CD*? e no segmento *AB*? não, Coube a medida $\overline{HB}$, na $\overline{CD}$

(c) O que podemos afirmar em relação segmento *AB* e *CD*?
não, Vejo Relação.

3. Verifique se o segmento *AB* de medida $\sqrt{2}$ cabe um número inteiro de vezes no segmento *CD* de medida $2\sqrt{2}$. Os segmentos *AB* e *CD*, estão representados na figura 4 abaixo:

2

Figura D.6: Respostas das atividades do Aluno 11

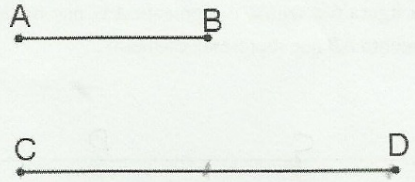


Figura 4: Segmentos AB e CD

a)O segmento de medida $\sqrt{2}$ coube um número inteiro de vezes no segmento de medida $2\sqrt{2}$? Sim, o Segmento $\overline{AB}$ coube no Segmento $\overline{CD}$ 2 vezes.

b)O que podemos concluir em relação aos segmentos AB e CD, de medidas respectivas, $\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$? eles possui uma medida $\overline{AB}$ em comum

Definição 0.1 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são* ***comensuráveis****, se existir um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

4. Dado um círculo $C = 2\pi r$ de diâmetro $AB = 2r$, representa na figura 5 abaixo:

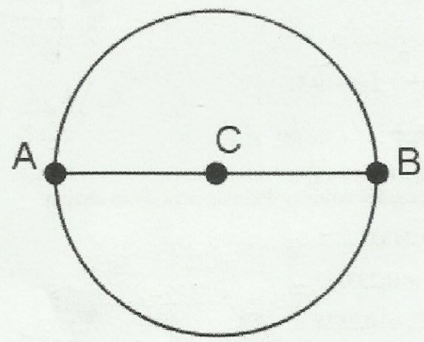


Figura 5: Círculo de centro C

3

Figura D.7: Respostas das atividades do Aluno 11

Cortando o círculo no ponto A, obteremos o segmento AA_1, que representa seu comprimento. Veja figura 6 a seguir, o segmento AA_1 que representa o comprimento do círculo e o segmento AB que representa diâmetro .

Figura 6: Comprimento AA_1 e diamentro AB

Verifique se os segmentos AA_1 e AB, representados na figura acima, são comensuráveis. não, São Comensuráveis.

Definição 0.2 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são* ***incomensuráveis****, quando não for possível encontrar um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

5. Sem realizar a divisão entre o numerador e o denominador, verifique se as frações irredutíveis abaixo, possuem representação decimal finita ou infinita e periódica, apenas trabalhando com o denominador.

a) $\frac{73}{8} = \frac{73}{2^3}$, finito

b) $\frac{49}{6} = \frac{49}{6}$, finito

c) $\frac{782}{125} = \frac{782}{5^3}$, finito

d) $\frac{8753}{500} = \frac{8753}{5^5}$ = finito

e) $\frac{843}{14} = \frac{3}{2^7}$, infinita

a) $8 \mid 2$; $4 \mid 2$; $2 \mid 2$; 1; (6)

b) $6 \mid 2$; $3 \mid 3$; 1; (6)

c) $125 \mid 5$; $25 \mid 5$; $5 \mid 5$; 1

d) $500 \mid 2$; $250 \mid 2$; $125 \mid 5$; $25 \mid 5$; $5 \mid 5$; 1

e) $14 \mid 2$; $7 \mid 7$; 1

6. Calcule as operações entre as dízimas periódicas abaixo:

a) 0,777... + 0,24333... $= \frac{7}{9} + \frac{243-24}{900} = \frac{919}{900}$

b) 0,252525... × 0,2333... $= \frac{25}{99} \times \frac{23-2}{90} = \frac{25}{99} \cdot \frac{21}{90} = \frac{525}{8910}$

c) 0,42743743... ÷ 0,2525...

d) 0,7454545... - 0,4526363...

c)

d) $\frac{745-7}{990} - \frac{45263-452}{99000}$

4

Figura D.8: Respostas das atividades do Aluno 11

Atividades

1. Dados dois segmentos AB e $CD = u$. Vamos verificar se esses dois segmentos possuem uma medida de segmento comum, utilizando apenas uma régua não graduada e um compasso. Os dois segmentos AB e CD, estão representados na figura 1 abaixo:

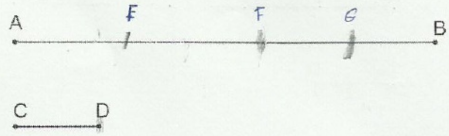


Figura 1: Segmentos AB e CD

Siga os passos a seguir:

- Com um compasso, vamos medir o segmento menor CD. Inicialmente, coloque a ponta fixa do compasso no ponto C e abra-o até o ponto D.
- Depois, fixe o compasso no ponto A, com abertura medindo $\overline{CD}$ e marque um ponto E sobre o segmento AB (Veja que $\overline{AE}$=$\overline{CD}$).
- Repita o passo anterior, o número de vezes que forem possíveis marcar segmentos de medida $\overline{CD}$ sobre o segmento AB.

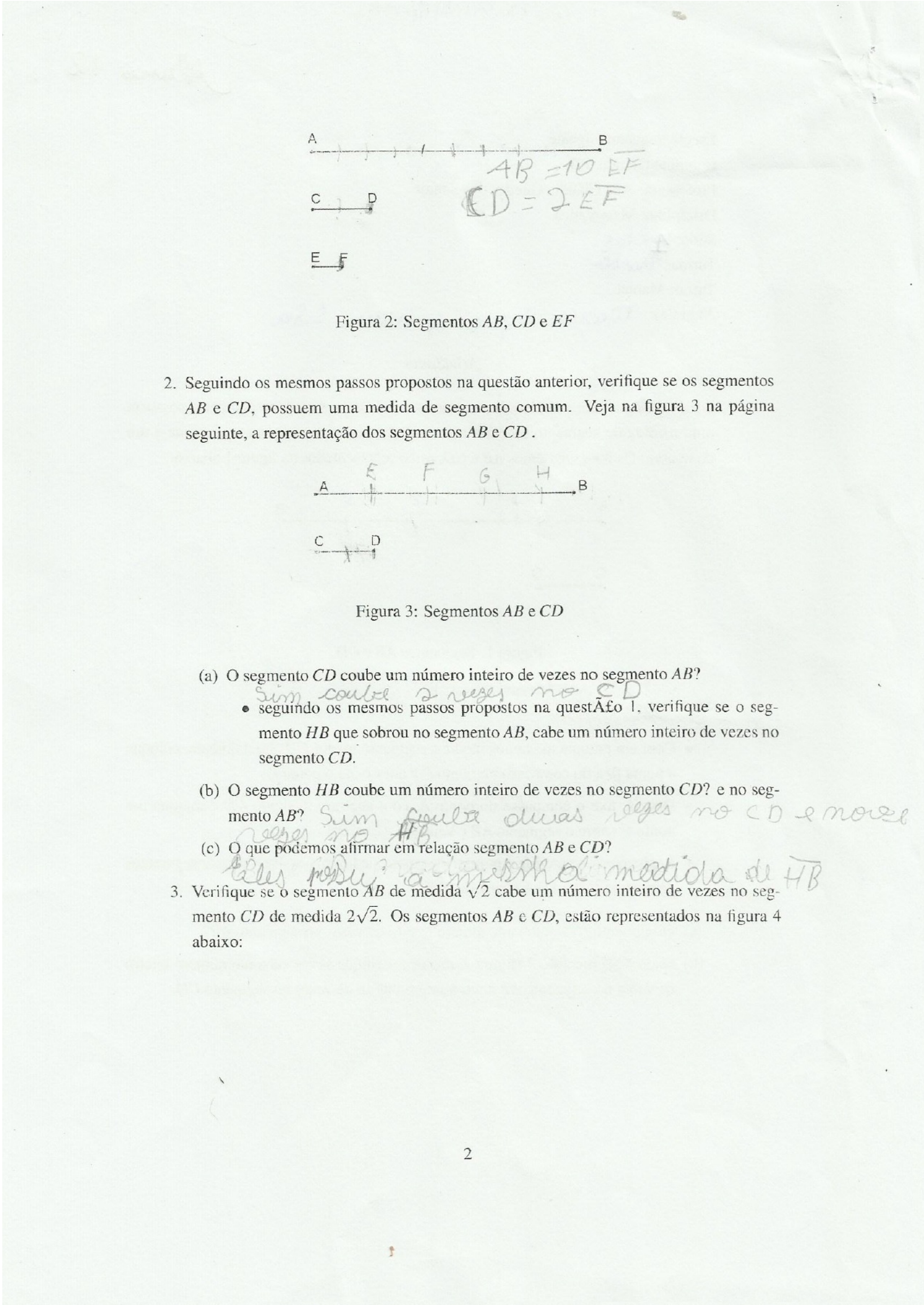
(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB?

Sim cinco

(b) Dado o segmento EF (figura 2 abaixo), verifique se ele cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD.

1

Figura D.9: Respostas das atividades do Aluno 12



A B

AB = 10 EF

C D

CD = 2 EF

E F

Figura 2: Segmentos AB, CD e EF

2. Seguindo os mesmos passos propostos na questão anterior, verifique se os segmentos AB e CD, possuem uma medida de segmento comum. Veja na figura 3 na página seguinte, a representação dos segmentos AB e CD .

A E F G H B

C D

Figura 3: Segmentos AB e CD

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB?

Sim coube 2 vezes no CD

- seguindo os mesmos passos propostos na questÃ£o 1, verifique se o segmento HB que sobrou no segmento AB, cabe um número inteiro de vezes no segmento CD.

(b) O segmento HB coube um número inteiro de vezes no segmento CD? e no segmento AB? Sim coube duas vezes no CD e nove vezes no HB

(c) O que podemos afirmar em relação segmento AB e CD?

Eles possui a mesma medida de HB

3. Verifique se o segmento AB de medida $\sqrt{2}$ cabe um número inteiro de vezes no segmento CD de medida $2\sqrt{2}$. Os segmentos AB e CD, estão representados na figura 4 abaixo:

2

Figura D.10: Respostas das atividades do Aluno 12

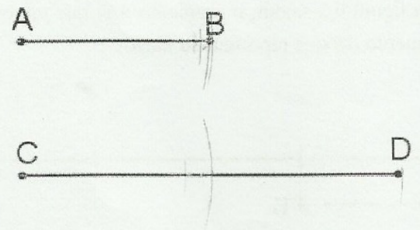


Figura 4: Segmentos AB e CD

a)O segmento de medida $\sqrt{2}$ coube um número inteiro de vezes no segmento de medida $2\sqrt{2}$? Sim coube 2 vezes

b)O que podemos concluir em relação aos segmentos AB e CD, de medidas respectivas, $\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$? Ele possui a medida AB comum

Definição 0.1 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são **comensuráveis**, se existir um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

4. Dado um círculo $C = 2\pi r$ de diâmetro $AB = 2r$, representa na figura 5 abaixo:

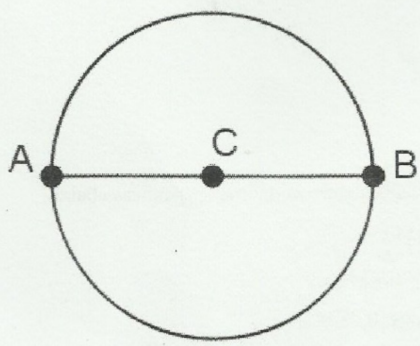


Figura 5: Círculo de centro C

3

Figura D.11: Respostas das atividades do Aluno 12

Cortando o círculo no ponto A, obteremos o segmento AA_1, que representa seu comprimento. Veja figura 6 a seguir, o segmento AA_1 que representa o comprimento do círculo e o segmento AB que representa diâmetro .

Figura 6: Comprimento AA_1 e diamentro AB

Verifique se os segmentos AA_1 e AB, representados na figura acima, são comensuráveis. não são pois não consegui encontrar um seguimento para medir A A 1 e AB

Definição 0.2 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são* ***incomensuráveis****, quando não for possível encontrar um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

5. Sem realizar a divisão entre o numerador e o denominador, verifique se as frações irredutíveis abaixo, possuem representação decimal finita ou infinita e periódica, apenas trabalhando com o denominador.

a) $\frac{73}{8}$

b) $\frac{49}{6}$

c) $\frac{782}{125}$

d) $\frac{8753}{500}$

e) $\frac{843}{14}$

6. Calcule as operações entre as dízimas periódicas abaixo:

a) 0,777... + 0,24333...

b) 0,252525... × 0,2333...

c) 0,42743743... ÷ 0,2525...

d) 0,7454545... - 0,4526363...

4

Figura D.12: Respostas das atividades do Aluno 12

Atividades

1. Dados dois segmentos AB e $CD = u$. Vamos verificar se esses dois segmentos possuem uma medida de segmento comum, utilizando apenas uma régua não graduada e um compasso. Os dois segmentos AB e CD, estão representados na figura 1 abaixo:

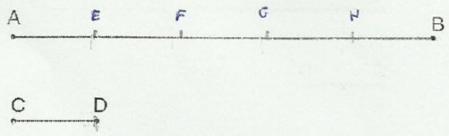


Figura 1: Segmentos AB e CD

Siga os passos a seguir:

- Com um compasso, vamos medir o segmento menor CD. Inicialmente, coloque a ponta fixa do compasso no ponto C e abra-o até o ponto D.
- Depois, fixe o compasso no ponto A, com abertura medindo $\overline{CD}$ e marque um ponto E sobre o segmento AB (Veja que $\overline{AE}$=$\overline{CD}$).
- Repita o passo anterior, o número de vezes que forem possíveis marcar segmentos de medida $\overline{CD}$ sobre o segmento AB.

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB?

Sim CD coube 5 vezes

(b) Dado o segmento EF (figura 2 abaixo), verifique se ele cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD.

Observei AB e CD são medidos por CD.

1

Figura D.13: Respostas das atividades do Aluno 13

"Sim, no seguimento CD coube 2 vezes.

$\overline{AB} = 10\ EF$
$\overline{CD} = 2\ EF$

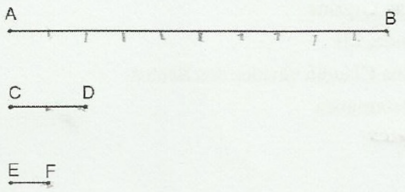


Figura 2: Segmentos AB, CD e EF

2. Seguindo os mesmos passos propostos na questão anterior, verifique se os segmentos AB e CD, possuem uma medida de segmento comum. Veja na figura 3 na página seguinte, a representação dos segmentos AB e CD .

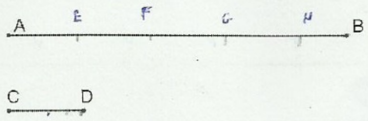


Figura 3: Segmentos AB e CD

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB?
não Porque sobrou o segmento HB.
   - seguindo os mesmos passos propostos na questA£o 1, verifique se o segmento HB que sobrou no segmento AB, cabe um número inteiro de vezes no segmento CD.

(b) O segmento HB coube um número inteiro de vezes no segmento CD? e no segmento AB? Sim coube duas vezes em CD e 8 em AB.

(c) O que podemos afirmar em relação segmento AB e CD?
A B e CD tem a mesma medida HB.

3. Verifique se o segmento AB de medida $\sqrt{2}$ cabe um número inteiro de vezes no segmento CD de medida $2\sqrt{2}$. Os segmentos AB e CD, estão representados na figura 4 abaixo:

2

Figura D.14: Respostas das atividades do Aluno 13

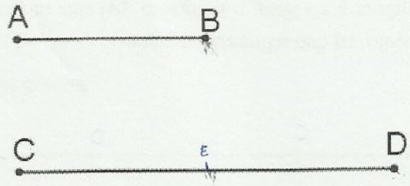


Figura 4: Segmentos AB e CD

a)O segmento de medida $\sqrt{2}$ coube um número inteiro de vezes no segmento de medida $2\sqrt{2}$? Sim o segmento coube 2 vezes AB em CD

b)O que podemos concluir em relação aos segmentos AB e CD, de medidas respectivas, $\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$? Eles possui uma medida. AB

Definição 0.1 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são* ***comensuráveis****, se existir um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

4. Dado um círculo $C = 2\pi r$ de diâmetro $AB = 2r$, representa na figura 5 abaixo:

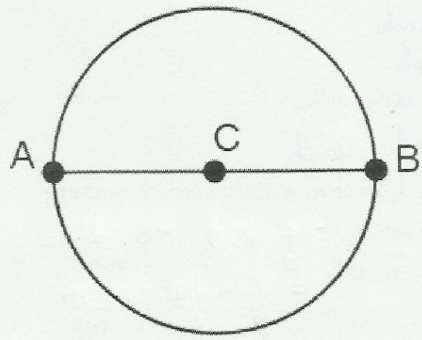


Figura 5: Círculo de centro C

3

Figura D.15: Respostas das atividades do Aluno 13

Cortando o círculo no ponto A, obteremos o segmento AA_1, que representa seu comprimento. Veja figura 6 a seguir, o segmento AA_1 que representa o comprimento do círculo e o segmento AB que representa diâmetro .

Figura 6: Comprimento AA_1 e diamentro AB

Verifique se os segmentos AA_1 e AB, representados na figura acima, são comensuráveis. não são comensuráveis, Pois não consegui um segmento para medi AB e A1.

Definição 0.2 *Dizemos que dois segmentos, digamos os segmentos AB e CD são* ***incomensuráveis****, quando não for possível encontrar um terceiro segmento, que cabe um número inteiro n de vezes no segmento AB e um número inteiro m de vezes no segmento CD.*

5. Sem realizar a divisão entre o numerador e o denominador, verifique se as frações irredutíveis abaixo, possuem representação decimal finita ou infinita e periódica, apenas trabalhando com o denominador.

a) $\frac{73}{8} = \frac{73}{2^3}$ finita

b) $\frac{49}{6}$ $\frac{49}{2}$ finita

c) $\frac{782}{125}$ $\frac{782}{5^3}$ finita

d) $\frac{8753}{500}$ $\frac{8753}{5^3}$ infinita

e) $\frac{843}{14}$ $\frac{843}{2 \cdot 7}$ finita

6. Calcule as operações entre as dízimas periódicas abaixo:

a) 0,777... + 0,24333... $= \frac{7}{9} + \frac{221}{900} = \frac{700+221}{900} = \frac{921}{800}$

b)0,252525... × 0,2333... $= \frac{25}{99} \times \frac{21}{80} = \frac{525}{8810}$

c)0,42743743... ÷ 0,2525...

d)0,7454545... - 0,4526363... $= \frac{745-7}{990} - \frac{45263}{99000} = \frac{73800-45263}{99000} = \frac{28537}{99000}$

4

Figura D.16: Respostas das atividades do Aluno 13