UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Um Estudo Sobre Área de Triângulos e Polígonos Convexos e Não-convexos

Fernando da Silva Batista

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes

Campina Grande - PB
Março/2014

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG.

B333e Batista, Fernando da Silva.

Um estudo sobre área de triângulos e polígonos convexos e não-convexos / Fernando da Silva Batista. - Campina Grande, 2014.
95f.:il. Color.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.

"Orientação: Prof. Dr.José de Arimatéia Fernandes".
Referências.

1. Triângulos 2. Área de Polígonos 3. Fórmula de Pick.
I. Fernandes, José de Arimatéia. II. Título.

CDU 514(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

UM ESTUDO SOBRE ÁREA DE TRIÂNGULOS E POLÍGONOS CONVEXOS E NÃO-CONVEXOS

por

Fernando da Silva Batista †

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

†Bolsista CAPES

Um Estudo Sobre Área de Triângulos e Polígonos Convexos e Não-convexos

por

Fernando da Silva Batista

Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:

Prof. Dr. Lenimar Nunes de Andrade - UFPB

Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros - UFCG

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Março/2014

Dedicatória

Ao meu filho Luiz Fernando, a minha esposa e a todos que me ajudaram direta ou indiretamente.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, que me concedeu a vida e a coragem, que me presenteou com a liberdade, que me abençoou com a inteligência e me deu força para conquistar minhas realizações, que esteve presente na alegria e na tristeza, fazendo da derrota uma vitória, da fraqueza uma força. Acima de tudo, quero lhe agradecer porque não é o fim de nada, mas o começo de tudo.

À UFCG e todos os professores que participaram do programa PROFMAT, que contribuiram imensamente nos meus estudos. Em especial, aos professores Aparecido (coordenador do curso), Luiz Antônio, Rosana, Jaqueline, Jesualdo, Jaime, Iraponil e Daniel e à secretária Andrezza por seus atendimentos realizados durante o curso.

Ao professor Arimatéia, pelos esforços empenhados em me orientar sempre que possível e por sua disposição e paciência a cada encontro, fazendo de minhas dúvidas, certezas.

À Banca Examinadora formada pelos professores Luiz Antônio da Silva Medeiros (UFCG) e Lenimar Nunes de Andrade (UFPB) por toda ajuda e observações que melhoram significativamente este Trabalho de Conclusão de Curso.

Meu muito obrigado a todos os colegas da turma 2012, que compartilharam comigo seus conhecimentos, experiências, dúvidas, alegrias, ideias, sugestões e aflições. Enfim, aprendemos muito.

À consultoria Canuto/Alencar: soluções textuais na pessoa do senhor Rafael Alencar pela revisão textual do TCC.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

Resumo

Neste trabalho são apresentadas estratégias de ensino diferentes do tradicional sobre área de polígonos, no qual se apresentam apenas fórmulas, sem demonstrar, e em seguida resolvem-se alguns exemplos. Buscamos trabalhar, além das demonstrações, alguns conceitos básicos da Geometria, citando alguns matemáticos que contribuíram significativamente com os avanços da Matemática. Baseados em livros da coleção PROFMAT e do ensino médio, buscamos desenvolver uma metodologia que venha contribuir com a aprendizagem, através de algumas atividades dirigidas, duas destas envolvendo o *software* GeoGebra, haja vista que o uso de recursos computacionais favorece experiências concretas, pesquisas, levantamento de hipóteses e generalizações de propriedades matemáticas, em um tempo consideravelmente reduzido. Destacamos também a importância do professor em levar para sala de aula curiosidades e aplicações, casos especiais de áreas de triângulos e ainda trabalhamos a fórmula de Pick que por sua vez permite o cálculo de áreas de polígonos convexos e não-convexos, estimulando, assim, o interesse dos alunos pela matéria, tornando as aulas mais interessantes.

Palavras Chaves: Triângulos. Área de Polígonos. Fórmula de Pick.

Abstract

In this work presents nontraditional teaching strategies on area of polygons, without any formula presentation or demonstration, finalizing by solving examples. We extrapolate beyond demonstrations, the basic concepts of the subject by citing mathematicians who significantly contributed to the progress of Mathematics. Based on the books from PROFMAT collection and from high school, we seek to develop a methodology to contribute to students learning, through some directed activities, involving the GeoGebra *software*, since computational resources provides concrete experiences, a research environment, hypotheses considerations and generalizations of mathematical properties, in a considerably shorter time . We also highlight the importance of the teacher brings curiosities and applications to the classroom, as the special cases of triangles area calculation and we also work the formula for Pick formula permits to calculate the area convex and non-convex polygons, simulating the student interest by the subject, then turning classes more interesting.

Keywords: Triangles. Area of Polygons. Pick's formula.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Tradicionalmente, a Matemática tem sido vista como a disciplina que, além de ter o maior índice de reprovação, desperta ansiedade e medo em crianças, jovens e adultos. Isso se deve ao mecanicismo, bastante difundido nas escolas, em que o aluno decora regras e fórmulas com o objetivo de resolver certos problemas que, às vezes, fogem do seu cotidiano. Além disso, a disciplina Matemática vem sendo utilizada, há muito tempo, como um instrumento de seleção, passando a ser vista como um "selecionador de grandes mentes". Cabe destacar que, a disciplina Matemática tem como objetivo principal desenvolver habilidades para resolver problemas, o que favorece a compreensão do mundo e a formação do pensamento crítico do aluno, assegurando o seu desenvolvimento individual e a sua inserção na sociedade, assim como a capacidade de tomar decisões que venham garantir uma melhor qualidade de vida.

Atualmente o ato de ensinar tem sido visto como uma tarefa difícil e, em particular, ensinar Matemática tem sido um desafio, pois a maioria dos alunos não visa o aprendizado e a descoberta, mas, apenas a aprovação no fim do ano. Os altos níveis de insucesso escolar constituíram o que se convencionou denominar de "crise do ensino da Matemática". Uma discussão sobre o tema pode ser encontrado em Lara [11].

Ao se estudar Geometria o caso se agrava pois os alunos, além de terem que fazer contas, devem saber também observar figuras e dominar conceitos e definições características da Geometria. Ainda, o livro didático não contribui, pois a Geometria sempre é abordada nos últimos capítulos. Acreditamos que, quando o professor faz uso de outros recursos didáticos, seus alunos têm um melhor desempenho. Mas a maioria dos professores usa apenas o livro adotado pela escola como único recurso didático, ora por falta de tempo devido à sua carga horária excessiva, ora por falta de motivação para pesquisar em outras fontes novas estratégias que venham facilitar o processo ensino-aprendizagem da Matemática.

Segundo as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) [4], os alunos ao concluírem o ensino básico devem adquirir as habilidades de *"... calcular a área de figuras planas pela decomposição e/ ou composição de figuras de áreas conhecidas, ou por meio de estimativas"*. Diante dessa realidade, pensando nessas questões é que este trabalho está sendo proposto, para contribuir no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, em especial da Geometria.

Abordaremos temas que venham valorizar a reconstrução de conceitos matemáticos, a curiosidade e a descoberta de propriedades características de certas figuras planas. Primeiramente, os conceitos básicos da Geometria, tais como axiomas e definições, alguns fatos históricos que contribuíram para o desenvolvimento desse ramo da Matemática, alguns teoremas notáveis, dos quais o Teorema de Pitágoras se destaca, pois é considerado pela maioria dos matemáticos, o teorema mais importante da Geometria. Aprofundaremos o estudo da área de polígonos, principalmente do triângulo, para o qual há várias formas de se calcular sua área. Veremos ainda como a Geometria Analítica pode ajudar no cálculo da área de regiões triângulares. Por fim, completa-se esse estudo com uma fórmula muito curiosa, chamada de Fórmula de Pick que permite calcular áreas de polígonos convexos e não-convexos.

Esta pesquisa apresenta um conjunto de resultados da Geometria que poderá auxiliar no desenvolvimento de um trabalho diferenciado em sala de aula, principalmente nas turmas de ensino médio, pois contém estratégias de introdução de conteúdos, breves biografias de matemáticos, assim como atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula, enriquecendo o desenvolvimento da aprendizagem da Geometria.

1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo geral contribuir para uma aprendizagem mais significativa em relação ao cálculo de área de polígonos, em especial a área de regiões triangulares, desde a maneira mais básica ensinada no ensino fundamental até formas mais complexas. E como objetivos específicos:

- Classificar triângulos;
- Identificar quando um polígono é regular;
- Apresentar diferentes fórmulas que possibilitem o cálculo da área de regiões triangulares;
- Reconhecer a importância da unidade de medida em Geometria;
- Demonstrar teoremas a partir de conhecimentos básicos da Geometria Plana;
- Propor atividades que estimulem professores e alunos a usarem o laboratório de informática para estudar Geometria Plana;
- Estimular a curiosidade e a própria descoberta de propriedades pelos alunos.

1.2 Organização

Este TCC está organizado da seguinte forma: além desta Introdução (Capítulo 1), no Capítulo 2 apresentamos um pouco da história do surgimento da Geometria, suas aplicações no passado e na atualidade, curiosidades e um resumo da história de dois grandes matemáticos que contribuíram nos estudos dessa parte da Matemática. No Capítulo 3 são trazidos resultados importantes da Geometria Plana, além de definições e símbolos que serão usados nos capítulos posteriores, tornando assim, a leitura mais compreensível. Além de uma curiosidade sobre área e perímetro. No Capítulo 4 são mostradas algumas formas diferentes de calcular a área de uma região triangular, casos particulares, demonstrações e aplicações. No Capítulo 5 apresentamos mais dois casos de como calcular a área de um triângulo, desta vez usando resultados da Geometria Analítica, mais especificamente, através do determinante e de vetores. No Capítulo 6, apresentamos como calcular a área de polígonos, tanto regulares, como convexos e não-convexos, trabalhando com a curiosa *Fórmula de Pick*. No Capítulo 7 apresentamos algumas atividades propostas, visando uma aprendizagem dos conteúdos abordados através de recursos computacionais e papel milimetrado. No Capítulo 8 apresentamos as considerações finais do trabalho. Por fim, as Referências Bibliográficas e os Apêndices.

Capítulo 2

Um breve histórico sobre Geometria

2.1 Introdução.

Apresentaremos neste capítulo alguns fatos históricos que nortearam o estudo da Geometria como ciência, mostrando como ela ajudou no desenvolvimento das civilizações mais antigas e sua importância na atualidade. Faremos também uma breve biografia de dois matemáticos mais influentes nos estudos da Geometria: Euclides e Pitágoras.

2.2 Geometria

A palavra Geometria deriva do grego “*geometrein*” que significa “medição de terras”, “*geo*” significa “terra” e “*metria*” significa “medida” (Ver Morais Filho [6]).

As primeiras noções geométricas surgiram quando o homem viu-se com a necessidade de medir, ou seja, comparar distâncias e determinar as dimensões. Egípcios, Assírios e Babilônios já conheciam as principais figuras geométricas e as noções de ângulo que usavam nas medidas de área e na Astronomia. No Egito Antigo, os conhecimentos de Geometria eram utilizados de forma prática, principalmente para medir terrenos e realizar construções. As construções egípcias mais conhecidas são as pirâmides, famosas pela beleza e engenhosidade de suas edificações. Mais detalhes em Boyer [3].

A necessidade de se determinar a medida da área de uma região veio do fato de que os agricultores das margens do Rio Nilo pagavam ao faraó um imposto pelo uso da terra, que era proporcional à região de terra cultivada. Hoje, paga-se um imposto territorial urbano ou rural, cujo valor é proporcional, dentre outros critérios, à área do terreno adquirido.

Outra informação relevante é a de como é possível calcular as áreas de cada região do país, por meio do *software* GeoMedia usando a Projeção Cônica de Albers, na qual a superfície terrestre é projetada sobre um cone, que é longitudinalmente cortado e desenvolvido em um plano. Os sistemas de projeções constituem-se de uma fórmula matemática que transforma as coordenadas geográficas, a partir de uma superfície esférica (elipsoidal), em coordenadas planas, mantendo correspondência entre elas.

Norte	$3\,853\,327,229\ km^2$	45,25 %
Nordeste	$1\,554\,257,004\ km^2$	18,87 %
Centro-Oeste	$1\,606\,371,505\ km^2$	18,25 %
Sudeste	$924\,511,292\ km^2$	10,86 %
Sul	$576\,409,569\ km^2$	6,77 %
Total	$4\,946\,876,599\ km^2$	

Tabela 2.1: Área de cada região brasileira. (Fonte: IBGE 2009.)

Também na astronomia, os matemáticos eram fascinados em procurar entender a harmonia do universo, como exemplos podemos citar o cálculo de distâncias inascessíveis com uma aproximação bastante razoável, como a distância entre a Terra e a Lua e a descoberta que os planetas desenham órbitas elípticas no seu movimento em torno do Sol, sempre na tentativa de explicar racionalmente regularidades da natureza. Na Figura 2.1 é ilustrado um exemplo de uma das descobertas que contribuíram nos estudos da Física, conhecida como a 2ª Lei de Kepler[1] ou Lei das Áreas: *O raio vetor que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais* (Eves [7]).

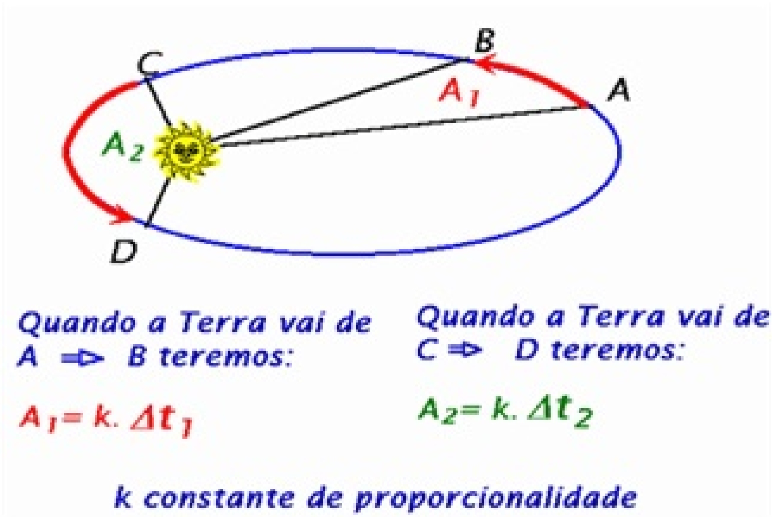


Figura 2.1: Lei das Áreas

Mais fatos históricos sobre as outras leis de Kepler podem ser vistos em Eves [7].

[1]As leis de Kepler são as três leis do movimento planetário definidas por Johannes Kepler (1571 – 1630), um matemático e astrônomo alemão. Essas leis foram a principal contribuição de Kepler à astronomia e astrofísica.

2.3 Dois grandes nomes da Geometria

Euclides (século III a.C.)

Muito antes de Euclides, a Geometria já era assunto corrente no Egito. Agrimensores usavam-na para medir terrenos, construtores recorriam a ela para projetar suas pirâmides. Tão famosa era a geometria egípcia que matemáticos gregos de renome, como Tales de Mileto e Pitágoras, se deslocavam de sua terra para ir ao Egito ver o que havia de novo em matéria de ângulos e linhas. Foi com Euclides, entretanto, que a geometria do Egito se tornou realmente formidável, fazendo de Alexandria o grande centro mundial do compasso e do esquadro, por volta do século III a.C. Euclides foi o primeiro matemático a usar um modelo axiomático.

Figura 2.2: Desenho representando Euclides.

Tudo começou com *Os Elementos*[2], um livro de 13 volumes, no qual Euclides reuniu tudo que se sabia sobre matemática em seu tempo - aritmética, geometria plana, teoria das proporções e geometria sólida. Sistematizando a grande massa de conhecimentos que os egípcios haviam adquirido desordenadamente através do tempo, o matemático grego deu ordem lógica e esmiuçou a fundo as propriedades das figuras geométricas, das áreas e volumes, e estabeleceu o conceito de lugar geométrico.

Para Euclides, a geometria era uma ciência dedutiva que operava a partir de certas hipóteses básicas - os *axiomas*. Estes eram considerados óbvios e, portanto, de explicação desnecessária.

[2]O texto completo de *Os Elementos* encontra-se atualmente disponível gratuitamente no site www.dominiopublico.gov.br. Recentemente, Irineu Bicudo publicou uma edição completa dos Elementos traduzida diretamente do grego em Bicudo [2], ver também Roque [16].

Pitágoras (569 - 480 a.C.)

Pitágoras foi um homem que mistificava a matemática e sua biografia é uma mistura de lenda e história real. Nasceu na ilha de Samos, perto de Mileto, ele não deixou obras escritas. Viajou bastante e esteve no Egito e na Babilônia, onde absorveu os conhecimentos matemáticos e as ideias religiosas de cada região. Voltando ao mundo grego, fundou sua escola em Crotona (hoje, sudeste da Itália), a qual era uma sociedade secreta, onde se estudava aritmética, geometria, música e astronomia. Também tinha aulas de religião e moral. Mais que uma escola, Pitágoras conseguira criar uma comunidade religiosa, filosófica e política. Os alunos que formava saíam para ocupar altos cargos do governo local; cientes de sua sabedoria torciam o nariz ante as massas ignorantes e apoiavam o partido aristocrático. Resultado: as massas retrucaram pela violência e - segundo dizem uns - incendiaram a escola, prenderam o professor e o mataram. Outros são mais otimistas: contam que Pitágoras foi só exilado para Metaponto, mais ao norte, na Lucânia, onde teria morrido, esquecido mas em paz com mais de 80 anos de idade.

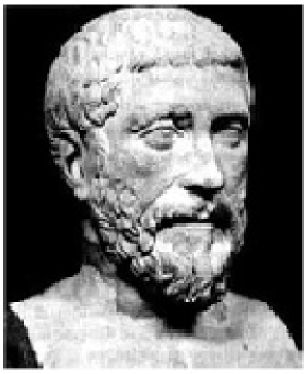


Figura 2.3: Busto de Pitágoras.

Mas, como todos os documentos daquela época se perderam, todas as informações que se tem são a partir de referências de outros autores que viveram séculos depois. Por isso, Pitágoras é uma figura obscura na história da Matemática[3] e, para dificultar mais as coisas, a sua escola, além de secreta, era comunitária, ou seja, todo o conhecimento e todas as descobertas eram comuns, pertenciam a todos. Assim, não sabemos sequer se foi o próprio Pitágoras que descobriu o teorema que leva o seu nome, pois era comum naquela época dar todo crédito de uma descoberta ao mestre. *O Teorema de Pitágoras* é o mais belo e mais importante teorema da Geometria, desde o século V a.C. até hoje inúmeras demonstrações deste Teorema foram publicados.

[3]Além desses dois grandes nomes citados neste trabalho, podem ser encontrados descobertas notáveis nas biografias de outros matemáticos em Só Matemática [24].

Capítulo 3

Resultados da Geometria Plana

3.1 Introdução.

Neste capítulo são apresentados os conceitos e definições necessários para a obtenção de fórmulas e propriedades que podem ser vistas nos próximos capítulos. Como também as notações usadas para representar objetos matemáticos.

3.2 Definições e conceitos geométricos básicos

Definição 3.1 *Dadas no mesmo plano duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, um ângulo (ou região angular) de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.*

Um ângulo pode ser côncavo ou convexo, observa-se na Figura 3.1, o ângulo em (a) é convexo e o ângulo em (b) é côncavo. O contexto deixará claro se estamos nos referindo ao ângulo convexo ou ao ângulo côncavo. Denotaremos o ângulo por $\angle AOB$.

Figura 3.1: Regiões angulares no plano.

Em relação à medida da região do plano que um dado ângulo ocupa, vamos considerar um círculo Σ de centro O dividido em 360 arcos iguais, tome pontos X e Y extremos de um desses 360 arcos iguais. Dizemos que a medida desse ângulo é de 1 grau, denotado por 1°. O círculo está ilustrado na Figura 3.2. Nesta definição de grau, podemos afirmar que ela não depende do círculo escolhido, uma dircussão bastante interessante sobre esse fato, pode ser encontrada em Muniz Neto [15].

De acordo com o Sistema Internacional de Medidas (SI), a unidade usual de medida de ângulo é o grau, e seus submúltiplos são o minuto, representado por $'$ e o segundo, representado por $''$. Consequentemente, $1^\circ = 60'$ e $1' = 60''$.

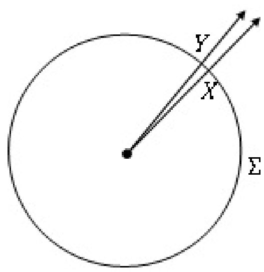


Figura 3.2: Grau como unidade de medida de ângulos.

Geralmente, usamos por economia de notação, letras gregas minúsculas para representar medidas de ângulos, com exceção da letra π (lê-se pi), pois reservamos outro uso para tal letra. Mas, também escrevemos por exemplo, $A\hat{O}B = \theta$ para significar que a medida do ângulo $\angle AOB$ é θ graus.

Quando escrevemos $\angle AOB$, estaremos nos referindo, a menos que se diga o contrário, ao ângulo convexo $\angle AOB$, isto é, ao ângulo $\angle AOB$ tal que $0^\circ < \angle AOB \leq 180^\circ$. Diremos que um ângulo $\angle AOB$ é agudo quando $0^\circ < \angle AOB < 90^\circ$, reto quando $\angle AOB = 90^\circ$, obtuso quando $90^\circ < \angle AOB < 180^\circ$ e raso quando $\angle AOB = 180^\circ$. A Figura 3.3 ilustra esses ângulos citados.

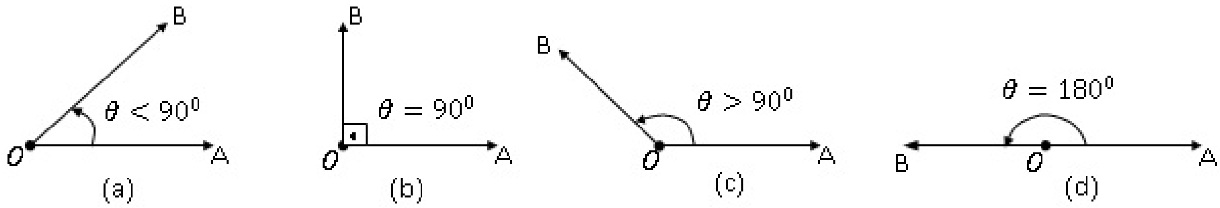


Figura 3.3: Tipos de Ângulos: (a) Agudo, (b) Reto, (c) Obtuso e (d) Raso.

Muitas vezes, é útil ter um nome especial associado a dois ângulos cuja soma das medidas seja igual a 90°, diremos que dois ângulos com tal propriedade são complementares. Assim, se α e β são as medidas de dois ângulos complementares, então $\alpha + \beta = 90^\circ$. Dizemos que α é o complemento de β e vice-versa. Por exemplo, dois ângulos medindo 30° e 60° são complementares, uma vez que $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$.

Definição 3.2 *Dois ângulos $\angle AOB$ e $\angle COD$ (de mesmo vértice O) são opostos pelo vértice (abreviamos OPV) se seus lados forem semirretas opostas.*

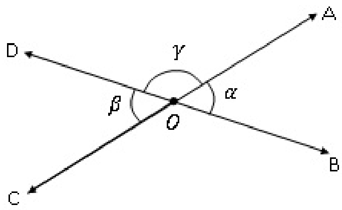


Figura 3.4: Ângulos opostos pelo Vértice.

Os ângulos $\angle AOB$ e $\angle COD$ da Figura 3.4 são OPV, uma vez que as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$, bem como as semirretas $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$, são respectivamente opostas.

Proposição 3.1 *Dois ângulos OPV são iguais.*

Demonstração:

Considerando a Figura 3.4 acima. Como $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$ são semirretas opostas, segue que $\alpha+\gamma = 180°$. Analogamente, $\beta+\gamma = 180°$.

Portanto,

$$\alpha = 180° - \gamma = \beta \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \beta.$$

Observação: Diremos que dois ângulos são iguais se suas medidas forem iguais.

3.2.1 Polígonos

Definição 3.3 *Um polígono é a região do plano limitada (de área finita) por uma poligonal fechada, que constitui seus lados.*

A palavra Polígono é de origem grega "*polygon*" que significa "vários ângulos", "*poly*" significa "muitos" e "*gon*" significa "ângulos" (Ver Morais Filho [6]).

Neste trabalho, representaremos o segmento de reta que tem os pontos A e B como extremos por AB e a medida desse segmento por $\overline{AB}$. Observa-se o exemplo da Figura 3.5: os pontos $A_1, A_2, \ldots, A_6$ são os *vértices* do polígono; os segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_6A_1$ são os *lados* do polígono e as *medidas* dos comprimentos dos lados representaremos por $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_6A_1}$.

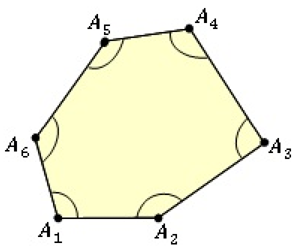


Figura 3.5: Elementos de um polígono.

Definição 3.4 *Um polígono é regular se tiver todos os seus lados iguais e ângulos também iguais, sejam eles internos ou externos.*

Uma observação importante é o fato de que todo polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência. A Figura 3.6, ilustra alguns polígonos regulares sobrepostos.

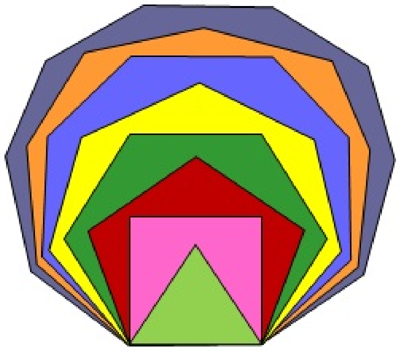


Figura 3.6: Polígonos regulares.

Um polígono que não é regular é chamado de polígono *irregular*.

Definição 3.5 *Um polígono é convexo quando qualquer segmento que une dois de seus pontos está inteiramente contido nele.*

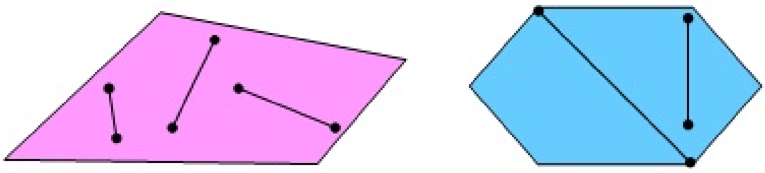


Figura 3.7: Polígonos convexos.

Definição 3.6 *Um polígono é não-convexo quando houver algum segmento com extremidades nele, mas com pelo menos um ponto do segmento fora dele.*

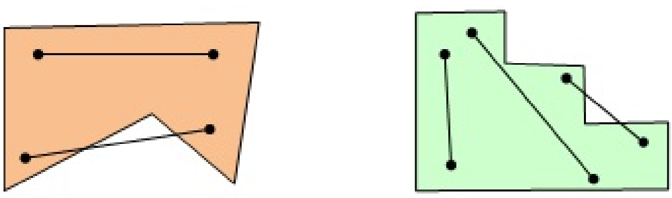


Figura 3.8: Polígonos não-convexos.

Alguns polígonos recebem nomes especiais, observe a tabela seguinte:

Número de lados	Nome
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

Tabela 3.1: Nomes especiais de polígonos.

3.2.2 Triângulos

Definimos por triângulo a região do plano delimitada por três pontos não-colineares. Sendo A, B e C tais pontos, diremos que A, B e C são os vértices do triângulo ABC, cujas medidas são $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Observe a Figura 3.9 seguinte.

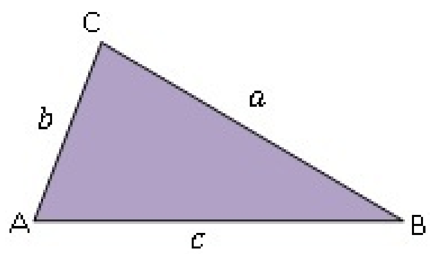


Figura 3.9: Elementos de um triângulo.

Os triângulos são classificados de duas maneiras diferentes:

Em relação às medidas dos lados

- Triângulo Equilátero: quando possui as três medidas dos lados iguais.
- Triângulo Isósceles: quando possui pelo menos duas medidas dos lados iguais.
- Triângulo Escaleno: quando possui as três medidas dos lados diferentes.

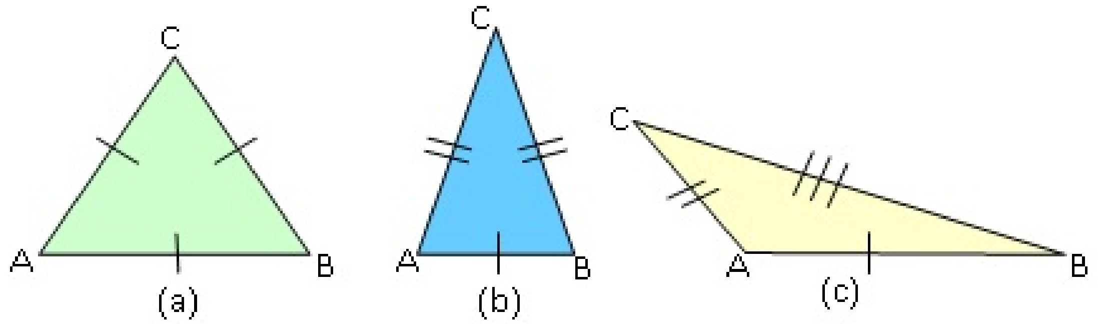


Figura 3.10: Classificação de triângulos quanto às medidas dos lados: (a) Equilátero, (b) isósceles e (c) Escaleno.

Em relação às medidas dos ângulos

- Triângulo Acutângulo: quando possui os três ângulos agudos.
- Triângulo Retângulo: quando possui um ângulo reto.
- Triângulo Obtusângulo: quando possui um ângulo obtuso.

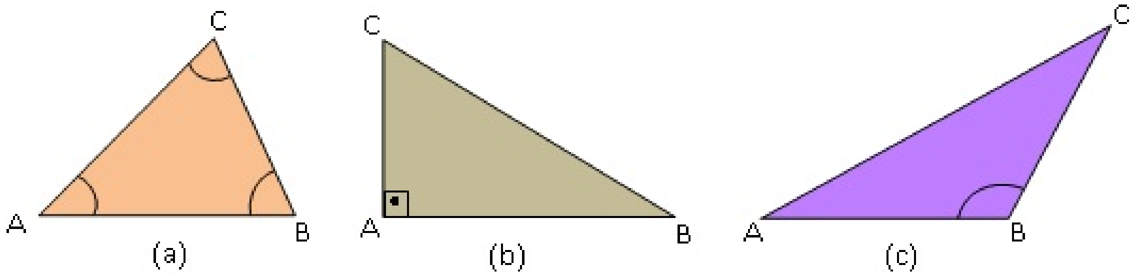


Figura 3.11: Classificação de triângulos quanto às medidas dos ângulos: (a) Acutângulo, (b) Reto e (c) Obtusângulo.

3.2.3 Desigualdade triangular

Proposição 3.2 *Em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.*

Também conhecida como condição de existência de um triângulo, a desigualdade triangular consiste em uma relação importante entre as medidas dos lados de um triângulo.

Seja ABC um triângulo tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Vamos mostrar que

$$a < b + c.$$

Demonstração:

Conforme a Figura 3.12, prolongando a semirreta CA, marquemos o ponto $D \in CA$, tal que $\overline{AB} = \overline{AD} = c$. Assim, o triângulo ABD é isósceles, logo, os ângulos $A\hat{D}B$ e $A\hat{B}D$ são congruentes.

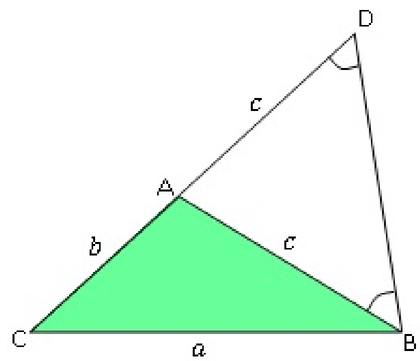


Figura 3.12: Desigualdade triangular.

Agora note que, no triângulo BCD, temos

$$C\hat{B}D > A\hat{B}D = A\hat{D}B.$$

E, como um maior ângulo está oposto ao maior lado desse triângulo, podemos concluir que $\overline{CD} > \overline{BC}$, ou seja, $b + c > a$. Analogamente, podemos concluir ainda que

$$b < a + c \quad \text{e} \quad c < a + b.$$

Portanto, um triângulo de lados medindo a, b e c satisfaz as seguintes relações:

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b\,. \end{cases}$$

3.2.4 A circunferência e o círculo

Alguns livros não fazem distinção entre circunferência e círculo, alegando que não há tal diferenciação no caso de polígonos (fala-se tanto no perímetro como na área de um polígono). Já outros livros fazem a distinção: circunferência é a linha, círculo é a região limitada pela circunferência. Segundo Lima [13]: “Para livrar-se da ambiquidade, quando isso é necessário, costuma-se usar a palavra disco para significar a região do plano limitada por uma circunferência. Aí não resta dúvida.”

Circunferência: é uma linha fechada cujos pontos estão à mesma distância R de um ponto O do plano, chamado de centro.

Círculo: é a união da circunferência com os pontos interiores a ela, também conhecido como disco. O centro do círculo é o centro da circunferência que o determina.

Raio: é todo segmento que une o centro a qualquer ponto da circunferência.

Corda: é todo segmento com extremidades em dois pontos quaisquer da circunferência.

Diâmetro: é toda corda que passa pelo centro da circunferência. A medida do diâmetro corresponde ao dobro da medida do raio.

Na Figua 3.13 são ilustradas as definições mencionadas.

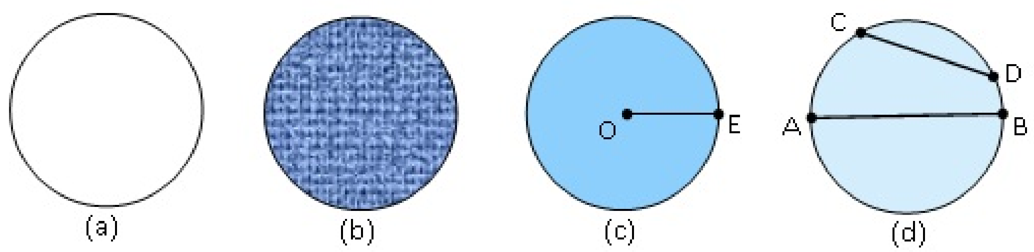


Figura 3.13: (a) Circunferência, (b) Círculo, (c) Raio OE, (d) Diâmetro AB e Corda CD.

3.2.5 Perímetro e semiperímetro

A palavra perímetro é de origem grega, “*Peri*” significa “ao redor” e “*metrein*” significa “medida”(Ver Morais Filho [6]).

O *Perímetro* de um polígono qualquer é a soma das medidas de todos os seus lados, representado por $2p$. O *Semiperímetro* de um polígono corresponde à metade do perímetro, ou seja, p. Usando as notações da Figura 3.9, o perímetro e o semiperímetro do triângulo ABC são dados por

$$2p = a+b+c \quad \text{e} \quad p = \frac{a+b+c}{2}.$$

3.2.6 Área das figuras planas

Segundo Lima [14] et al (2006), medir uma grandeza significa compará-la com uma outra de mesma espécie tomada como unidade. Área é a medida da porção do plano ocupada por uma figura.

Então, para encontrar a área de uma determinada região do plano, devemos comparar sua superfície com a de outra tomada como padrão. O resultado dessa comparação será um número que representa quantas vezes maior ou menor, a área da figura será dada em relação à unidade tomada como padrão.

Dependendo da unidade de medida escolhida, os resultados obtidos serão diferentes. Para facilitar o entendimento e a comunicação entre as pessoas, foi estabelecida também uma unidade de medida padrão: o metro quadrado (representando por m^2), que corresponde a área da região do plano ocupada por um quadrado, cuja medida do lado é 1 m. Outras unidades de medida muito utilizadas são:

- O centímetro quadrado (representado por cm^2), corresponde a uma área ocupada por um quadrado, cuja medida do lado é 1 cm , usado para medir regiões menores que o metro;

- O quilômetro quadrado (representado por km^2), corresponde a uma área ocupada por um quadrado, cuja medida do lado é 1 km , usado para medir superfícies terrestres bem maiores que o metro, como por exemplo, superfícies de cidades ou países;

- O hectare (representado por ha), corresponde a uma área ocupada por um quadrado, cuja medida do lado é 100 m , usado para medir superfícies terrestres ocupadas por fazendas, áreas de desmatamento, áreas de reflorestamento etc. Note que 1 ha corresponde a 1 hectômetro quadrado.

- O are (representado por a), corresponde a uma área ocupada por um quadrado, cuja medida do lado é 10 m, usado também em medidas agrárias.

Buscando uma definição mais geral, podemos dizer que *área* é um número que atribuímos à extensão de uma superfície qualquer, plana ou curvada, de modo que consiga saber qual superfície é maior e qual é menor, de acordo com a unidade de medida que adotamos para expressar a área.

Se obtemos 16 quilômetros quadrados de área, então estamos lidando com uma extensão equivalente, mas não necessariamente igual, a um quadrado com 4 quilômetros de lado.

Para figuras mais complicadas, cheias de curvas, se faz necessário, usar a técnica da *Soma de Riemann* ou o *Cálculo Integral*. Leitores interessados podem consultar Paliga [23].

3.2.7 Curiosidade: Área e perímetro iguais

A seguinte proposição encontra-se em Hellmeister et al [9], cuja demonstração reapresentamos aqui com mais detalhes.

Proposição 3.3 *Só existem cinco triângulos que tenham perímetro numericamente igual à área, quando fixamos a unidade e exigimos que os lados do triângulo tenham medidas inteiras.*

Sendo a, b e c as dimensões dos lados do triângulo, podemos provar que a área e o perímetro deles possuem o mesmo valor numérico, de acordo com a tabela 3.2.

a	b	c	Perímetro = Área
29	25	6	60
20	15	7	42
17	10	9	36
13	12	5	30
10	8	6	24

Tabela 3.2: Área e Perímetro iguais.

Estes lados definem os únicos cinco triângulos que satisfazem as condições exigidas.

Demonstração: Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo na unidade fixada, $2p$ o perímetro e p o semiperímetro. Então, sendo a área e o perímetro do triângulo representado pelo mesmo número (perímetro na unidade e área na unidade ao quadrado), temos pela fórmula de Heron:

$$2s = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, obtemos:

$$4s^2 = s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c) \quad \Rightarrow \quad 4s = (s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,.$$

Sejam $x = s-a$, $y = s-b$ e $z = s-c$. Como $s-a+s-b+s-c = 3s-(a+b+c) = 3s-2s = s$, segue que $s = x+y+z$ e podemos escrever

$$4\,(x+y+z) = xyz. \qquad (1)$$

De $s = x+y+z$, conclui-se que

$$\begin{cases} a = y+z \\ b = x+z \\ c = x+y. \end{cases} \qquad (*)$$

Vamos mostrar que o perímetro tem que ser par.

Observe que

$$p = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$
$$\Rightarrow \quad p = \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)},$$

ou seja,

$$p = \frac{\sqrt{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)\,(a+b-c)}}{4}.$$

Suponha que p seja ímpar:

- Ou um dos lados é ímpar e os outros dois lados são pares;
- Ou os três lados são ímpares.

Em nenhum dos dois casos, a raiz quadrada do numerador é ímpar e p não poderá ser inteiro. Logo, o perímetro é sempre par, e s sendo inteiro, consequentemente, x, y e z também serão inteiros.

O triângulo não pode ser *equilátero*, pois se $x = y = z$ pela equação (1), obtemos

$$x^2 = 12,$$

o que não produz número inteiro para x.

O triângulo não pode ser *isósceles*, pois se $y = z$ por exemplo, teremos por (1):

$$xy^2 - 8y - 4x = 0,$$

donde y para ser inteiro, vai depender de que $4 + x^2$ seja um quadrado perfeito, o que não acontece para nenhum $x > 0$, inteiro.

De fato, suponha que $4 + x^2 = a^2$, isto é, seja um quadrado perfeito. Assim, temos

$$4 = a^2 - x^2 \qquad \Rightarrow \qquad 4 = (a-x)\cdot(a+x)\,.$$

Como os únicos possíveis valores para $a+x$ e $a-x$ são 1, 4 e 2, concluímos que $4+x^2$ não pode ser um quadrado perfeito.

Então, o triângulo só pode ser *escaleno*. Sem perda de generalidade, considerando-se $z > y > x$. O valor de x não pode ser zero, pois teríamos $a = s$ e não existiria triângulo. Isolando z na equação (1), obtemos

$$z = \frac{4\,(x+y)}{xy-4}. \qquad (2)$$

Assim, atribuindo valores inteiros para x e y, encontramos z.

$$\text{Para} \quad x=1 \quad \text{e} \quad \begin{cases} y=5, & \text{temos} \quad z=24 \\ y=6, & \text{temos} \quad z=14 \\ y=8, & \text{temos} \quad z=9 \end{cases}.$$

$$\text{Para} \quad x=2 \quad \text{e} \quad \begin{cases} y=3; & \text{temos} \quad z=10 \\ y=4; & \text{temos} \quad z=6 \end{cases}.$$

Outros valores de y ou não produzem z inteiros, ou produzem $z<y$. Assim como qualquer outro valor para x terá $y<x$ para z ser inteiro.

Vamos analisar os seguintes casos: ($x=1$ e $y>4$), ($x=2$ e $y\geq 3$) e ($x\geq 3$).

- **Caso** 1: $x=1$ e $y>4$

  Por hipótese $z>y$ e pela equação (2) temos

$$z=\frac{4\,(1+y)}{y-4}>y \qquad \Rightarrow \qquad y^2-8y-4<0.$$

  Resolvendo o sistema formado pelas inequações $y^2-8y-4<0$ e $y>4$, chegamos à conclusão que os únicos valores inteiros para y são 5, 6 e 8.

- **Caso** 2: $x=2$ e $y\geq 3$

  Análogo ao caso anterior, por hipótese $z>y$ e pela equação (2) temos

$$z=\frac{4\,(2+y)}{2y-4}>y \qquad \Rightarrow \qquad y^2-4y-4<0.$$

  Resolvendo o sistema formado pelas inequações $y^2-4y-4<0$ e $y\geq 3$, chegamos à conclusão que os únicos valores inteiros para y são 3 e 4.

- **Caso** 3: $x\geq 3$

  Vamos mostrar que não existe outro valor para x, exceto 1 e 2.

  Da equação (2) e pela hipótese $z>y$ temos

$$z=\frac{4\,(x+y)}{xy-4}>y \qquad \Rightarrow \qquad 4\,(x+y)>xy^2-4y \qquad \Rightarrow \qquad xy^2-8y-4x<0.$$

  Obtendo o conjunto solução desta inequação do 2º grau acima na incógnita y, temos

$$y=\frac{4\pm 2\sqrt{4+x^2}}{x}.$$

  Como $y>x$, podemos escrever:

$$\frac{4\pm 2\sqrt{4+x^2}}{x} > x \quad \Rightarrow \quad 4\pm 2\sqrt{4+x^2} > x^2 \quad \Rightarrow \quad 4\left(4+x^2\right) > x^4-8x^2+16 \quad \Rightarrow \quad x^2 < 12,$$

o que é uma contradição, pois se $x \geq 3$, deveríamos ter $x^2 \geq 9$.

Portanto, os únicos valores inteiros para x são 1 e 2. Logo, substituindo os valores inteiros encontrados para x, y e z em $(*)$ obtemos a tabela 3.2.

Estes lados definem os únicos cinco triângulos que satisfazem as condições exigidas.

Com efeito, um triângulo que tenha lados medindo 10, 8 e 6 unidades, terá perímetro numericamente igual à área nessa unidade. Construindo, então, um triângulo com 10, 8 e 6 *cm* de lados e tornando a medir seus lados em milímetro, ele terá, agora, um perímetro de 240 *mm* e área de 2400 mm^2. O fenômeno da igualdade desaparece.

De fato, na equação

$$2s = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)},$$

pensamos como medidas, o primeiro membro tem valor apresentado em unidades e o segundo membro tem valor apresentando em unidades ao quadrado. Há uma diferença na dimensão.

Não somente essa propriedade de coincidência numérica da área e perímetro não resiste à mudança de unidades como também ela não é privilégio de certos triângulos.

De fato, dado um triângulo qualquer, existe sempre uma unidade de comprimento em que o perímetro seja o mesmo que a área: basta tomar o perímetro p' numa unidade u' qualquer e a área A' na unidade $(w')^2$ e tomar a nova unidade $u = (A'/p')\,u'$. Podemos verificar abaixo que, na unidade u, o perímetro e a área do triângulo dado se medem pelo mesmo número. Acontece, entretanto, que nem sempre as medidas dos lados, nessa unidade u, serão números inteiros.

$$\textit{Perímetro } P = p'u' = p'\frac{p'}{A'}u = \frac{(p')^2}{A'}u = tu, \text{ onde } t = \frac{(p')^2}{A'}.$$

$$\textit{Área } A = A'\left(u'\right)^2 = A'\left(\frac{p'}{A'}\right)^2 u^2 = \frac{(p')^2}{A'}u^2 = tu^2, \text{ onde } t = \frac{(p')^2}{A'}.$$

Essa Proposição prova que essas medidas só serão, as três, dadas por números inteiros se o triângulo de partida for semelhante a um dos cinco triângulos da tabela 3.2. Neste contexto, eles são especiais.

3.3 O Teorema de Pitágoras

Teorema 3.4 *Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.*

Sejam a, b e c conforme a Figura 3.14, então

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

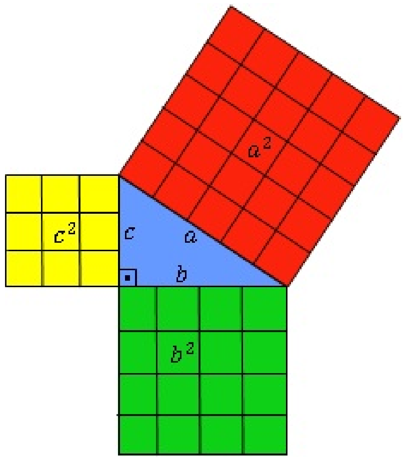


Figura 3.14: O Teorema de Pitágoras.

Observações:

1. A recíproca do Teorema de Pitágoras é verdadeira: Se a, b e c são reais positivos com $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo de hipotenusa a e catetos b e c é retângulo.

2. Um outro enunciado do Teorema de Pitágoras: Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos.

Historicamente esse Teorema fascinou muitas pessoas. Dentre elas destacam-se: Leonardo da Vinci, James A. Garfield (presidente dos EUA), Euclides, Euler etc. O professor Scott Loomis reuniu 370 demonstrações em seu livro "*The Pythagorean Proposition*".

Existem dois tipos de demonstrações: Geométricas (baseadas em comparações de áreas) e Algébricas (baseadas nas relações métricas dos triângulos retângulos).

Apresentamos apenas duas demonstrações, sendo a primeira Geométrica e a segunda Algébrica.

Comparando áreas

Considerando o triângulo retângulo da Figura 3.15, em que a é a medida da hipotenusa, b e c são as medidas dos catetos.

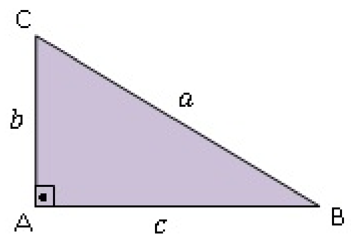


Figura 3.15: O triângulo retângulo.

Observando, agora, na Figura 3.16, os quadrados $MNPQ$ e $DEFG$, que têm a mesma área, visto que o lado de cada quadrado tem medida $b+c$.

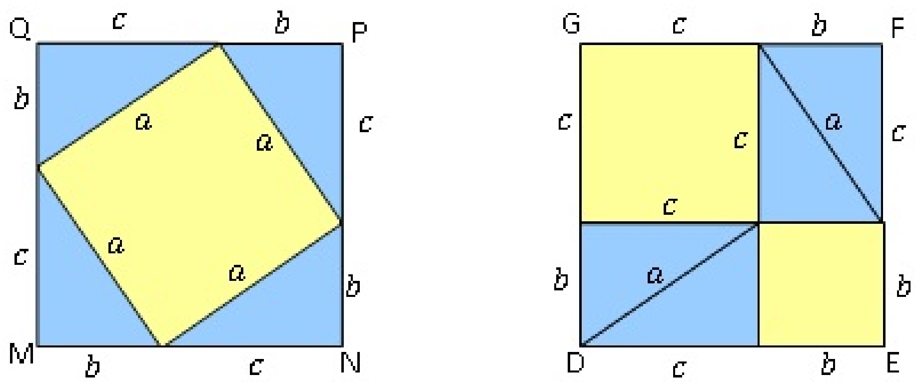


Figura 3.16: Demonstração geométrica.

No quadrado $MNPQ$ retiramos os quatro triângulos congruentes ao triângulo ABC que estamos considerando, visto que na Figura 3.16, restando apenas um quadrado de lado a. Em seguida, no quadrado $DEGF$ retiramos os quatro triângulos iguais ao triângulo que estamos considerando, restando, um quadrado de lado b e outro quadrado de lado c. Logo, a área do quadrado de lado a é igual a soma das áreas dos quadrados cujos lados medem b e c.

Esta demonstração clássica encontra-se, sem nenhum comentário, em tratados indianos dos Sulbasutras (em torno do século VII) e na China, nos comentários de Liu-Hui sobre o clássico da matemática chinesa os Nove Capítulos. Trata-se do que chamamos hoje de uma "prova sem palavras".

Existem *sites* que disponibilizam aplicativos gratuitos para se trabalhar *Geometria Dinâmica*, em que o aluno pode manipular objetos matemáticos e descobrir propriedades da Geometria. Recomendamos o *site* cujo endereço eletrônico é:

<http://dmentrard.free.fr/GEOGEBRA/Maths/accueilmath.htm>

Nele o aluno pode encontrar mais de 400 formas diferentes de se demonstrar geometricamente o Teorema de Pitágoras, assim como outros resultados da Geometria Plana e Espacial.

Usando semelhança de triângulos.

Dado o triângulo retângulo ABC da Figura 3.17.

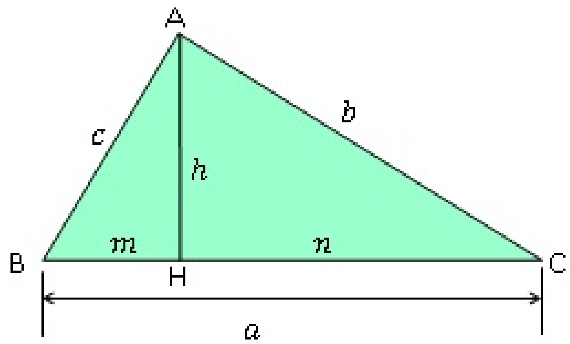


Figura 3.17: Demonstração algébrica.

Da semelhança entre os triângulos AHB e CAB, temos $c^2 = am$ e da semelhança entre os triângulos AHC e BAC, temos $b^2 = an$. Adicionando essas duas igualdades membro a membro, segue que

$$b^2 + c^2 = a(m+n) = a \cdot a = a^2.$$

Atualmente, esta demonstração é mais frequente nas aulas de matemática, pois permite encontrar as outras relações importantes do triângulo retângulo. Além das relações $c^2 = am$ e $b^2 = an$, que deram origem à demonstração do teorema, obtemos facilmente, $bc = ah$, que também se interpreta com o conceito de área, e $h^2 = mn$, que revela o importante fato de que a altura é a média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Mais algumas demonstrações, curiosidades, exemplos, aplicações e exercícios a respeito do Teorema de Pitágoras podem ser encontrados em Lima [14].

Neste trabalho, o Teorema de Pitágoras será necessário para auxiliar na demonstração da Proposição 3.5 que é uma generalização do Teorema de Pitágoras no plano, na Proposição 4.3 (Fórmula de Heron), na Proposição 4.11, que é uma das generalizações do Teorema de Pitágoras no espaço, e na demonstração da Proposição 4.12 para obter a área de um triângulo equilátero.

3.4 Lei dos Senos

Proposição 3.5 *Em qualquer triângulo, o quociente entre cada lado e o seno do ângulo oposto a esse lado é igual ao dobro da medida do raio R da circunferência circunscrita a esse triângulo.*

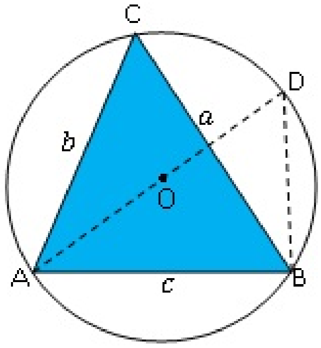


Figura 3.18: Lei dos Senos.

De acordo com a Figura 3.18, temos

$$\frac{a}{\text{sen}\left(\hat{A}\right)} = \frac{b}{\text{sen}\left(\hat{B}\right)} = \frac{c}{\text{sen}\left(\hat{C}\right)} = 2R.$$

Demonstração:

Seja ABC um triângulo de lados a, b e c inscrito em uma circunferência de raio R, centro O e diâmetro AD de acordo com a Figura 3.18. Observa-se que o triângulo ABD é retângulo em B, uma vez que o ângulo $\hat{B}$ corresponde ao ângulo inscrito na circunferência e, portanto, tem medida igual à metade do arco correspondente, que é uma semicircunferência, logo $\hat{B} = 90^0$. Por outro lado, temos $\hat{D} = \hat{C}$, pois são ângulos inscritos correspondentes ao mesmo arco $\overset{\frown}{\text{AB}}$. Assim,

$$\text{sen}\left(\hat{C}\right) = \frac{c}{2R} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{\text{sen}\left(\hat{C}\right)} = 2R.$$

Analogamente, segue que

$$\frac{a}{\text{sen}\left(\hat{A}\right)} = 2R \quad \text{e} \quad \frac{b}{\text{sen}\left(\hat{B}\right)} = 2R.$$

Logo,

$$\frac{a}{\text{sen}\left(\hat{A}\right)} = \frac{b}{\text{sen}\left(\hat{B}\right)} = \frac{c}{\text{sen}\left(\hat{C}\right)} = 2R.$$

A Lei dos Senos é usada, principalmente, para obter outros elementos de um triângulo em que os ângulos são conhecidos e apenas um lado é conhecido. Geralmente, conhecendo dois ângulos internos e um dos lados, usando o fato que a soma dos três ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, descobrimos o terceiro ângulo, em seguida, usando a Lei dos Senos descobrimos os outros dois lados. Além disso, a Lei dos Senos nos fornece uma forte relação entre as medidas do triângulo e o raio da circunferência circunscrita a esse triângulo.

3.5 Lei dos Cossenos

Proposição 3.6 *Em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.*

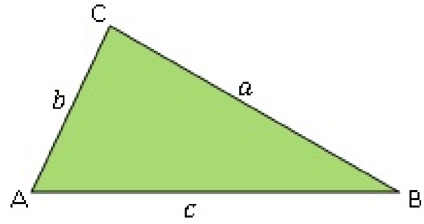


Figura 3.19: Lei dos Cossenos.

De acordo com a Figura 3.19, temos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\left(\hat{A}\right), \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos\left(\hat{B}\right), \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\left(\hat{C}\right)$$

Demonstração:

Caso 1**:** *ABC* é um triângulo *acutângulo*.

Considerando o ponto D como sendo o pé da perpendicular baixada do ponto C sobre o lado AB, conforme a Figura 3.20. Tem-se $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CD} = h$ e $\overline{AD} = x$.

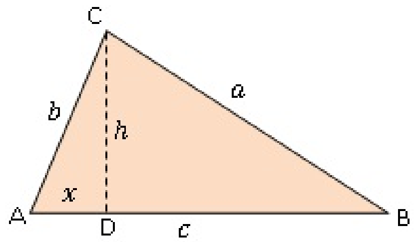


Figura 3.20: Triângulo Acutângulo.

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos ACD e BCD, obtemos as seguintes relações:

$$h^2 = b^2 - x^2 \qquad \text{e} \qquad a^2 = h^2 + (c - x)^2.$$

Substituindo a primeira na segunda e simplificando, obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx. \qquad (3)$$

Por outro lado, usando razões trigonométricas, nota-se que $x = b\ \cos\left(\hat{A}\right)$. Substituindo esse valor de x em (3), segue que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\cos\left(\hat{A}\right).$$

Caso 2**:** *ABC* é um triângulo *obtusângulo*.

Considere o ponto D como sendo o pé da perpendicular baixada do ponto C sobre a reta AB. Neste caso, D está na semirreta oposta à semirreta AB, com a mesma origem A. Sejam $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CD} = h$ e $\overline{AD} = x$, conforme a Figura 3.21.

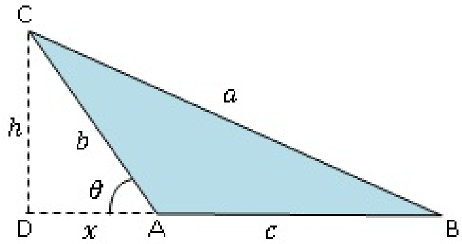


Figura 3.21: Triângulo obtusângulo.

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos ACD e BCD, obtemos as relações:

$$h^2 = b^2 - x^2 \qquad \text{e} \qquad a^2 = h^2 + (c+x)^2.$$

Substituindo a primeira na segunda e simplificando, obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx. \qquad (4)$$

Por outro lado, note que $\theta = 180^0 - \hat{A}$, assim, $\cos(\theta) = -\cos\left(\hat{A}\right)$, em que θ é o ângulo externo ao vértice A.

Usando razões trigonométricas, temos

$$\cos(\theta) = \frac{x}{b} \qquad \Rightarrow \qquad x = b\,\cos(\theta) = -b\cos\left(\hat{A}\right).$$

Daí, substituindo esse valor de x em (4), segue que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\cos\left(\hat{A}\right).$$

Analogamente, podemos obter as outras igualdades.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,\cos\left(\hat{B}\right) \qquad \text{e} \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,\cos\left(\hat{C}\right).$$

Observe que a Lei dos Cossenos generaliza o Teorema de Pitágoras, no sentido de que se o triângulo ABC for *retângulo* em $\hat{A}$, então $\cos\left(\hat{A}\right) = 0$, logo $a^2 = b^2 + c^2$.

Capítulo 4

Diferentes formas de calcular a área de uma região triangular

4.1 Introdução.

Neste capítulo, apresentamos diversas formas de obter a área de um triângulo, figura esta sobre a qual Holanda [10] escreveu seu trabalho de conclusão de curso cujo título foi bastante original: "*Os mistérios da mais bela forma geométrica: O Triângulo*." No seu trabalho, o autor apresenta os elementos do triângulo, relações entre as medidas dos lados e dos ângulos, propriedades importantes, assim como aplicações dessa figura na construção civil. Em nosso trabalho, centralizamos a atenção no que se refere ao cálculo da área de regiões triangulares. O que chama atenção nesta figura geométrica tão especial é que dependendo dos elementos conhecidos, sua área pode ser determinada de várias formas, onde a demonstração de todas elas sempre se baseia na fórmula mais básica, em que a área de um triângulo é igual à metade do produto da base pela altura relativa a esta base.

Neste capítulo, encontram-se as fórmulas mais gerais e algumas mais específicas, desde a fórmula de Heron até a Generalização do Teorema de Pitágoras que podem ser trabalhadas no ensino médio, enriquecendo o estudo sobre áreas, fornecendo um material de pesquisa para que alunos e professores possam conhecer, por exemplo, relações entre elementos do triângulo e suas principais circunferências, além disso, apreciar demonstrações baseadas em relações elementares. Mostramos ainda alguns casos particulares envolvendo o triângulo equilátero, o triângulo isósceles, o triângulo escaleno e o triângulo retângulo. Acreditamos que isto possa despertar o interesse de alguns estudantes pelo assunto.

Doravante, denotaremos a área de um triângulo de vértices A, B e C por (ABC).

4.2 Conhecendo um dos lados e a altura relativa a este lado.

Proposição 4.1 *A área de um triângulo ABC qualquer é igual a metade do produto do comprimento de qualquer um de seus lados pela altura relativa a este lado.*

Seja ABC um triângulo de medidas $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ e alturas h_a, h_b e h_c, relativas aos lados a, b e c, respectivamente, conforme a Figura 4.1. Então a área do triângulo ABC é dada por

$$(ABC) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} \cdot$$

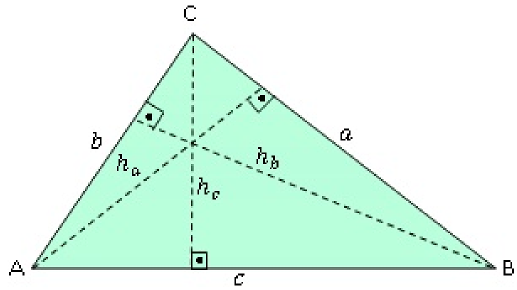


Figura 4.1: Triângulo e suas alturas.

Demonstração:

Vamos provar apenas a primeira igualdade, pois as outras são análogas. Traçando pelo vértice C, uma reta paralela ao lado AB, e pelo vértice B uma reta paralela ao lado AC, conforme ilustrado na Figura 4.2, então as duas retas se interceptam em um ponto D. O polígono $ABDC$ é um paralelogramo, e os dois triângulos ABC e CDB são congruentes.

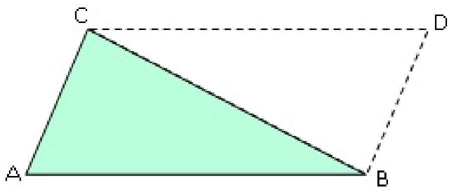


Figura 4.2: Paralelogramo.

Observação:

Por definição a área de um paralelogramo é igual ao produto do comprimento de um de seus lados pelo comprimento da altura relativa a este lado.

Como $(ABDC) = (ABC) + (CDB)$ e $(ABC) = (CDB)$, então

$$(ABC) = \frac{1}{2}(ABDC) \cdot$$

Para completar a demonstração, observa-se que a altura relativa ao vértice C do triângulo ABC é exatamente a altura do paralelogramo $ABDC$ relativa ao lado AB.

4.3 Conhecendo apenas os lados: Fórmula de Heron.

Proposição 4.2 *Se um triângulo possui os lados medindo a, b e c e o seu perímetro é representado por* $2p = a+b+c$*, conforme a Figura 4.3, então, a área do triângulo ABC é dada por*

$$(ABC) = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

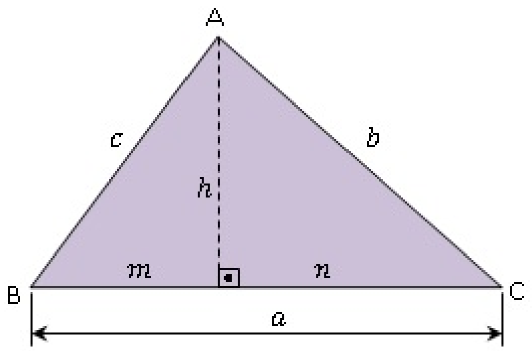


Figura 4.3: Fórmula de Heron para a área de um triângulo.

Demonstração:

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos da Figura 4.3, temos:

$$b^2 = h^2 + n^2 \qquad (I)$$

$$c^2 = h^2 + m^2. \qquad (II)$$

Fazendo $(II) - (I)$, obtemos

$$c^2 - b^2 = m^2 - n^2 = (m+n)\,(m-n) = a\,(m-n) \quad \therefore \quad m - n = \frac{c^2 - b^2}{a}.$$

Como $m + n = a$, temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} m+n = a \\ m-n = \frac{c^2-b^2}{a} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, segue que

$$m = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \quad \text{e} \quad n = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}. \qquad (*)$$

De $2p = a+b+c$, podemos escrever:

(i) $a+b-c = a+b+c-2c = 2p-2c = 2\,(p-c)$;

(ii) $a+c-b = a+b+c-2b = 2p-2b = 2\,(p-b)$;

(iii) $b+c-a = a+b+c-2a = 2p-2a = 2\,(p-a)$.

Agora, usando o fato de que

$$(ABC) = \frac{ah}{2} \Rightarrow (ABC)^2 = \frac{1}{4}a^2h^2 = \frac{1}{4}a^2\left(b^2 - n^2\right) = \frac{1}{4}a^2\,(b+n)\,(b-n)\,.$$

Substituindo $(*)$ na última igualdade temos

$$\begin{aligned}
(ABC)^2 &= \frac{1}{4}a^2\left(b + \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)\left(b - \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right) \\
&= \frac{1}{4}a^2\left(\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2a}\right)\left(\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2a}\right) \\
&= \frac{1}{4}a^2\frac{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}{4a^2} \\
&= \frac{1}{16}[(a+b-c)\,(a+b+c)][(c-a+b)\,(c+a-b)].
\end{aligned}$$

Substituindo (i), (ii) e (iii), na última igualdade, obtemos

$$\begin{aligned}
(ABC)^2 &= \frac{1}{16}[2\,(p-c)\,2p][2\,(p-a)\,2\,(p-b)] \\
&= \frac{1}{16}\cdot 16p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,. \\
\Rightarrow \qquad (ABC)^2 &= p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,.
\end{aligned}$$

Logo,

$$(ABC) = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

4.4 Conhecendo dois lados e o ângulo formado por esses dois lados.

Proposição 4.3 *A área de um triângulo ABC qualquer é igual ao semi-produto das medidas de dois lados pelo seno do ângulo que eles formam entre si. Ou seja,*

$$(ABC) = \frac{ab\ \mathrm{sen}\left(\hat{C}\right)}{2} = \frac{ac\ \mathrm{sen}\left(\hat{B}\right)}{2} = \frac{bc\ \mathrm{sen}\left(\hat{A}\right)}{2}.$$

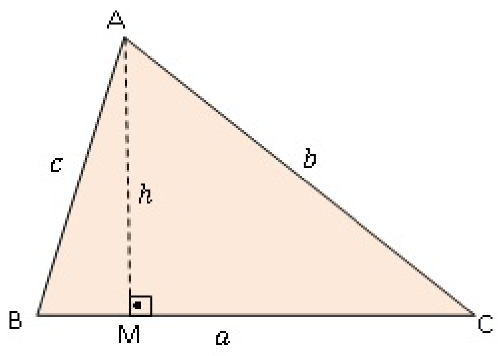


Figura 4.4: Triângulo com dois lados e um ângulo.

Demonstração:

Considerando a altura h, relativa ao lado BC, cujo pé da perpendicular é o ponto M, conforme a Figura 4.4. Usando razões trigonométricas no triângulo BMA, temos

$$\mathrm{sen}\left(\hat{B}\right) = \frac{h}{c} \qquad \Rightarrow \qquad h = c\ \mathrm{sen}\left(\hat{B}\right). \qquad (III)$$

Por outro lado, a área do triângulo ABC é dado por:

$$(ABC) = \frac{ah}{2}. \qquad (IV)$$

Substituindo (III) em (IV), obtemos:

$$(ABC) = \frac{ac\ \mathrm{sen}\left(\hat{B}\right)}{2}.$$

Como as provas das outras duas igualdades são análogas, concluímos a demonstração.

4.5 Conhecendo os três lados e o raio da circunferência circunscrita.

Proposição 4.4 *A área de um triângulo ABC qualquer é igual ao quociente do produto dos lados do triângulo pelo quádruplo do raio da circunferência circunscrita ao triângulo.*

Seja ABC um triângulo de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ e R o raio da circunferência circunscrita ao triângulo, conforme a Figura 4.5. Então

$$(ABC) = \frac{abc}{4R}\cdot$$

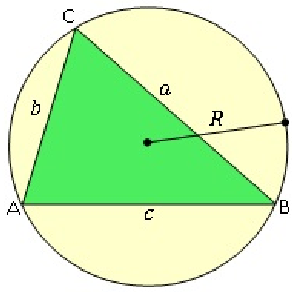


Figura 4.5: Triângulo e a circunferência circunscrita.

Demonstração:

Sabemos que pela Lei dos Senos:

$$\frac{a}{\text{sen}\left(\hat{A}\right)} = \frac{b}{\text{sen}\left(\hat{B}\right)} = \frac{c}{\text{sen}\left(\hat{C}\right)} = 2R.$$

Assim,

$$\text{sen}\left(\hat{C}\right) = \frac{c}{2R}\cdot \qquad (V)$$

Por outro lado, pela Proposição 4.3:

$$(ABC) = \frac{1}{2}ab\ \text{sen}\left(\hat{C}\right) \qquad (VI)$$

Substituindo (V) em (VI), obtemos

$$(ABC) = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}\cdot$$

Logo,

$$(ABC) = \frac{abc}{4R}\cdot$$

Outra aplicação desta fórmula é determinar a medida do raio da circunferência circunscrita a um triângulo dado, conhecendo suas medidas e sua área.

4.6 Conhecendo os três lados e o raio da circunferência inscrita.

Proposição 4.5 *A área de um triângulo ABC qualquer é igual ao produto do seu semi-perímetro pelo raio da circunferência inscrita no triângulo.*

Seja ABC um triângulo de medidas $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, semiperímetro p e raio r da circunferência inscrita no triângulo, conforme a Figura 4.6. Então a área do triângulo ABC é dada por

$$(ABC) = p \cdot r.$$

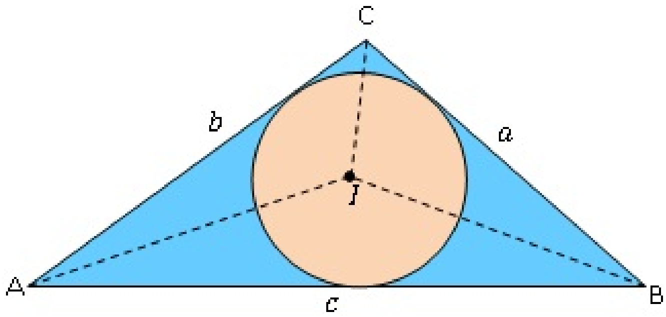


Figura 4.6: Triângulo e a circunferência inscrita.

Demonstração:

Seja I o incentro (encontro das medianas) conforme pode ser visto na Figura 4.6. Assim a área do triângulo ABC corresponde à soma das áreas dos triângulos AIB, AIC e BIC. Sabendo que o raio da circunferência é perpendicular ao lado do triângulo ABC no ponto de tangência, temos

$$(ABC) = (AIB) + (AIC) + (BIC) = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{(a+b+c)\,r}{2} = \frac{2pr}{2} = p \cdot r.$$

Logo,

$$(ABC) = p \cdot r.$$

4.7 Conhecendo os três lados e o raio da circunferência ex-inscrita.

Proposição 4.6 *A área de um triângulo ABC qualquer é igual ao produto da diferença entre seu semiperímetro e um dos lados, pelo raio da circunferência ex-inscrita, correspondente à este lado do triângulo.*

Seja ABC um triângulo de lados $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$, semiperímetro p e r_a é o raio da circunferência ex-inscrita a BC, conforme a Figura 4.7. Então a área do triângulo ABC é dada por

$$(ABC)=(p-a)\cdot r_a.$$

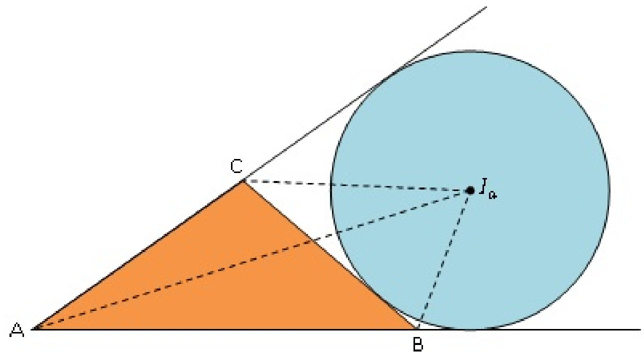


Figura 4.7: Triângulo e a circunferência ex-inscrita.

Demonstração:

Seja I_a o ex-incentro relativo ao lado BC conforme a Figura 4.7. Assim a área do triângulo corresponde à soma das áreas dos triângulos AI_aB, AI_aC menos a área do triângulo BI_aC.

Logo,

$$\begin{aligned}(ABC) &= (AI_aB)+(AI_aC)-(BI_aC)=\frac{cr_a}{2}+\frac{br_a}{2}-\frac{ar_a}{2}\\ &= \frac{(c+b-a)\cdot r_a}{2}=\frac{2\,(p-a)\cdot r_a}{2}=(p-a)\cdot r_a.\end{aligned}$$

Portanto,

$$(ABC)=(p-a)\cdot r_a.$$

Analogamente, mostra-se que

$$(ABC)=(p-b)\cdot r_b=(p-c)\cdot r_c.$$

4.8 Multiplicando as medidas dos raios.

Proposição 4.7 *A área de um triângulo ABC qualquer é igual à raiz quadrada do produto do raio da circunferência inscrita pelos raios das três circunferências ex-inscritas referentes aos lados do triângulo.*

Seja ABC um triângulo de medidas $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Sendo r o raio da circunferência inscrita no triângulo dado e r_a, r_b e r_c os raios das circunferências ex-inscritas relativas aos lados BC, AC e AB, respectivamente, como ilustrado na Figura 4.8. Então a área do triângulo ABC é dada por

$$(ABC) = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}.$$

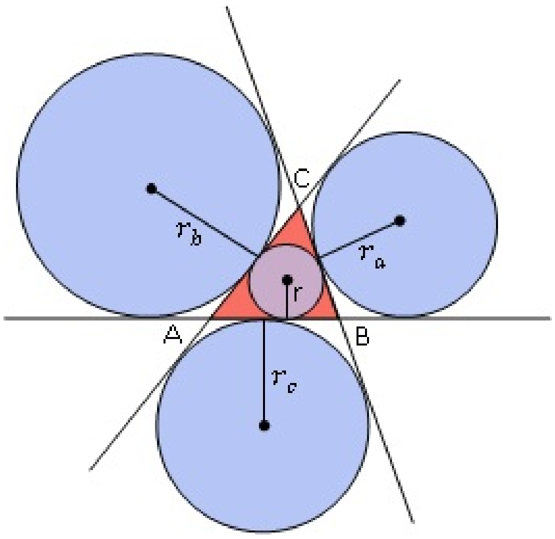


Figura 4.8: Triângulo e as circunferências ex-inscritas.

Demonstração:

Pela Proposição 4.5, temos

$$(ABC) = p \cdot r \qquad (\oplus)$$

e, pela Proposição 4.6, temos

$$(ABC) = (p-a) \cdot r_a \qquad (\ominus)$$

$$(ABC) = (p-b) \cdot r_b \qquad (\otimes)$$

$$(ABC) = (p-c) \cdot r_c \qquad (\oslash)$$

Multiplicando membro a membro as igualdades $(\oplus)$, $(\ominus)$, $(\otimes)$ e $(\oslash)$, obtemos

$$(ABC)^4 = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c).$$

Mas, pela Proposição 4.2 (Fórmula de Heron)

$$(ABC)^2 = p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c).$$

Assim,

$$(ABC)^4 = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot (ABC)^2.$$

Logo,

$$(ABC)^2 = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c.$$

Portanto,

$$(ABC) = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}.$$

4.9 Dividindo o triângulo em paralelogramos e triângulos menores.

Proposição 4.8 *Sendo ABC um triângulo e P um ponto no seu interior. Paralelas aos lados contendo P dividem o triângulo em* 6 *partes das quais* 3 *são triângulos de área* S_1, S_2 *e* S_3, *conforme a Figura 4.9. A área do triângulo ABC é dada por*

$$(ABC) = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2.$$

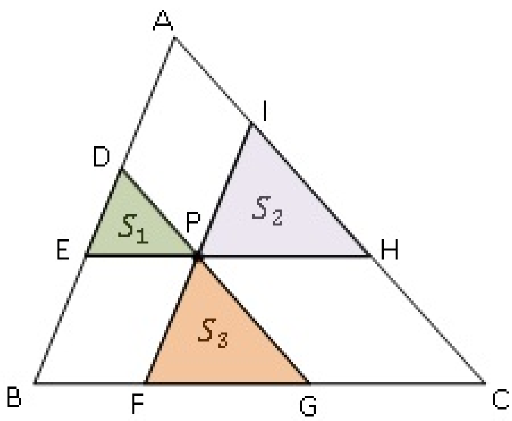


Figura 4.9: Triângulos e paralelogramos.

Demonstração:

Como $DG//AC$, $IF//AB$ e $EH//BC$, temos as semelhanças dos triângulos:

$$\Delta DEP \sim \Delta PFG \sim \Delta IPH \sim \Delta ABC.$$

Sabendo que a razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança, temos

$$\frac{S_1}{(ABC)} = \left(\frac{\overline{EP}}{\overline{BC}}\right)^2, \qquad \frac{S_2}{(ABC)} = \left(\frac{\overline{PH}}{\overline{BC}}\right)^2, \qquad \frac{S_3}{(ABC)} = \left(\frac{\overline{FG}}{\overline{BC}}\right)^2.$$

Escrevendo de outra maneira:

$$\sqrt{\frac{S_1}{(ABC)}} = \frac{\overline{EP}}{\overline{BC}}, \qquad \sqrt{\frac{S_2}{(ABC)}} = \frac{\overline{PH}}{\overline{BC}}, \qquad \sqrt{\frac{S_3}{(ABC)}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{BC}}.$$

Adicionando as últimas igualdades acima, obtemos:

$$\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{(ABC)}} = \frac{\overline{EP}+\overline{PH}+\overline{FG}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BF}+\overline{GC}+\overline{FG}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC}} = 1.$$

Assim,

$$\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3} = \sqrt{(ABC)}.$$

Logo, concluímos que

$$(ABC) = \left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2.$$

Exemplo:

Por um ponto P no interior de um triângulo ABC traçamos retas paralelas aos seus lados. Tais retas particionam ABC em três triângulos e três paralelogramos, conforme as configurações da Figura 4.9. Se as áreas dos triângulos são iguais a $S_1 = 1\ cm^2$, $S_2 = 4\ cm^2$ e $S_3 = 9\ cm^2$. Calcule a área do triângulo ABC.

Solução:

Sendo (ABC) a área do triângulo ABC, pela proposição anterior, temos que

$$(ABC) = \left(\sqrt{1}+\sqrt{4}+\sqrt{9}\right)^2 = (1+2+3)^2 = 36\cdot$$

Logo,

$$(ABC) = 36\ cm^2.$$

4.10 Dividindo para depois somar.

Proposição 4.9 *Dado um triângulo ABC qualquer e suas três cevianas*[1] *concorrendo em um ponto P no seu interior, então a área do triângulo é dada pela soma dos seis triângulos formados. Observa-se a figura 4.10.*

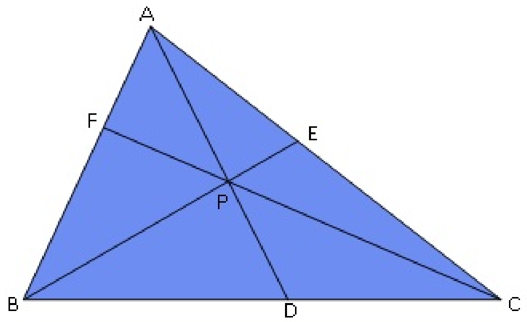


Figura 4.10: Triângulo e suas cevianas.

$$(ABC) = (APE) + (APF) + (BPD) + (BPF) + (CPD) + (CPE)\,.$$

Demonstração:

De acordo com a Figura 4.10, basta observar que o triângulo ABC foi particionado pelas suas cevianas e ABC corresponde à união de um número finito de outros triângulos, os quais não possuem pontos interiores comuns, ou seja, possuem apenas seus lados em comum. Então a área de ABC é igual à soma das áreas dos triângulos menores, são eles $APE, APF, BPD, BPF, CPD, CPE$.

Logo,

$$(ABC) = (APE) + (APF) + (BPD) + (BPF) + (CPD) + (CPE)\,.$$

[1]Ceviana é um segmento de reta que liga um vértice do triângulo ao lado oposto correspondente ou ao do seu prolongamento. São exemplos de cevianas a Mediana, a Altura, a Bissetriz.
O nome vem do matemático italiano Giovanni Ceva, que formulou o Teorema de Ceva, que dá condições para que três cevianas sejam concorrentes.

Aplicação:

Sejam ABC um triângulo e D, E e F pontos respectivamente sobre os lados BC, CA e AB, tais que os segmentos AD, BE e CF são concorrentes em P. Sabe-se que $(BDP) = 40$, $(CDP) = 30$, $(CEP) = 35$ e $(AFP) = 84$. Calcule a área de ABC. Observe a Figura 4.11.

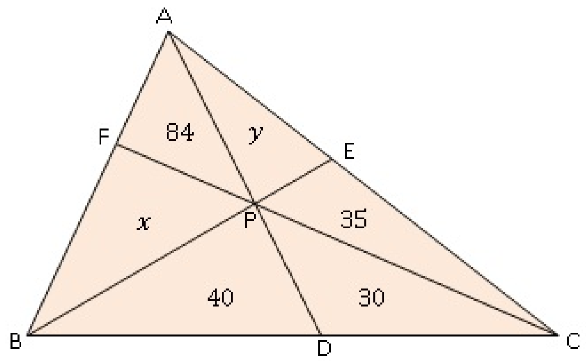


Figura 4.11: Triângulo particionado.

Solução: Considere o seguinte Lema 4.10.

Lema 4.10 *Se dois triângulos têm a mesma altura, então a razão entre suas áreas é igual a razão entre suas bases.*

Sejam as áreas $(FBP) = x$ e $(AEP) = y$, aplicando o Lema acima, segue que:

i) Nos triângulos BDP e CDP, temos

$$\frac{40}{30} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}.$$

Por outro lado, nos triângulos ABD e ADC, temos

$$\frac{x+40+84}{y+30+35} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}.$$

Assim,

$$\frac{x+124}{y+65} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad 3x - 4y = -112. \qquad (\triangle)$$

ii) Nos triângulos CEP e AEP, temos

$$\frac{35}{y} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}.$$

Por outro lado, nos triângulos CBE e ABE, temos

$$\frac{105}{x+y+84} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}.$$

Assim,

$$\frac{105}{x+y+84} = \frac{35}{y} \quad \Rightarrow \quad 35x - 70y = 84 \cdot 35 \quad \Rightarrow \quad x = 2y - 84. \qquad (\triangledown)$$

De $(\triangle)$ e $(\bigtriangledown)$, temos o sistema de equações

$$\begin{cases} 3x - 4y = -112 \\ x = 2y - 84 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$x = 56 \quad \text{e} \quad y = 70.$$

Logo, a área do triângulo ABC é dada pela soma

$$(ABC) = 40 + 30 + 35 + 70 + 84 + 56 = 315.$$

Observação:

As três medianas de um triângulo o dividem em seis triângulos menores de áreas iguais.

Demonstração do Lema 4.10.

Sejam os triângulos ABC e DEF, cujas bases são AB e DE, respectivamente, e de mesma altura h, conforme a Figura 4.12.

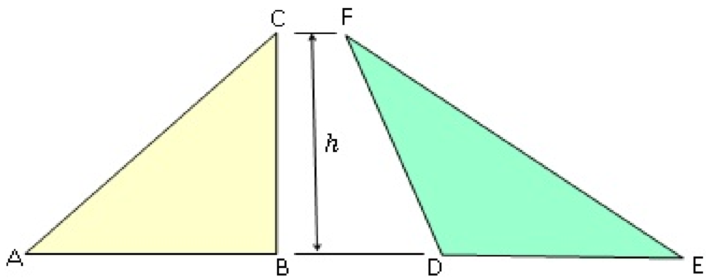


Figura 4.12: Triângulos de mesma altura.

Temos

$$(ABC) = \frac{\overline{AB} \cdot h}{2} \quad \text{e} \quad (DEF) = \frac{\overline{DE} \cdot h}{2}.$$

A razão entre as áreas dos triângulos é dada por

$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \frac{\overline{AB} \cdot \frac{h}{2}}{\overline{DE} \cdot \frac{h}{2}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}.$$

Logo,

$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}.$$

4.11 Uma Generalização do Teorema de Pitágoras

Proposição 4.11 *Considere o triedro trirretângulo de vértice O, cortado por um plano qualquer, formando o tetraedro ABCO com* $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$ *e* $\overline{OC} = c$, *como ilustra a Figura 4.13. Sejam as áreas* (ABC), (AOB), (BOC), (AOC). *Então*

$$(ABC)^2 = (AOB)^2 + (BOC)^2 + (AOC)^2.$$

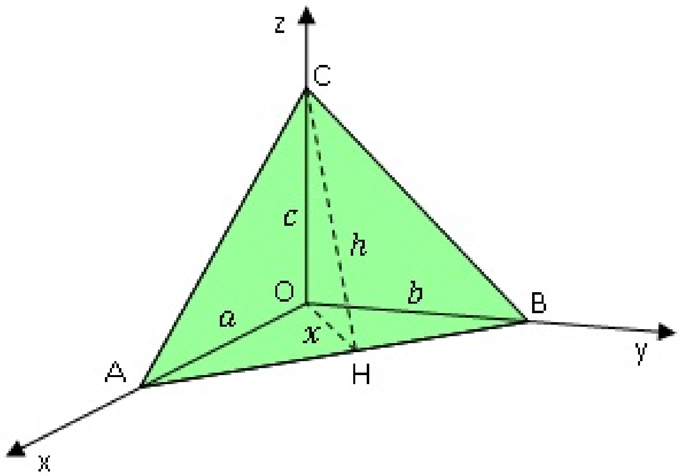


Figura 4.13: Tetraedro.

Demonstração:

Considerando o plano que contém OC e é perpendicular a AB. Esse plano corta AB em H e, consequentemente, tanto OH quanto CH são perpendiculares a AB. Façamos $\overline{OH} = x$ e $\overline{CH} = h$.

Pelo cálculo da área do triângulo OAB, temos

$$\overline{AB} \cdot x = ab.$$

Por outro lado, observa-se que

$$(ABC) = \frac{\overline{AB} \cdot h}{2}, \qquad (AOB) = \frac{ab}{2}, \qquad (BOC) = \frac{bc}{2}, \qquad (AOC) = \frac{ac}{2}.$$

Portanto,

$$(AOB)^2 + (BOC)^2 + (AOC)^2 = \frac{a^2b^2}{4} + \frac{b^2c^2}{4} + \frac{a^2c^2}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(\overline{AB}\right)^2 x^2 + c^2\left(a^2 + b^2\right)\right) = \frac{1}{4}\left(\left(\overline{AB}\right)^2 x^2 + c^2\left(\overline{AB}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\overline{AB}\right)^2\left(x^2 + c^2\right).$$

No triângulo OHC, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$x^2 + c^2 = h^2.$$

Assim,

$$(AOB)^2 + (BOC)^2 + (AOC)^2 = \frac{1}{4}\left(\overline{AB}\right)^2 h^2 = \left(\frac{\overline{AB} \cdot h}{2}\right)^2 = (ABC)^2.$$

Logo,

$$(ABC)^2 = (AOB)^2 + (BOC)^2 + (AOC)^2.$$

Exemplo:

Os segmentos OA, OB e OC são perpendiculares dois a dois. Se $\overline{OA} = 2\ cm$, $\overline{OB} = 3\ cm$ e $\overline{OC} = 6\ cm$, calcule a área do triângulo ABC.

Solução:

Pela Proposição 4.11, temos

$$\begin{array}{rrcl} & (ABC)^2 & = & (AOB)^2 + (BOC)^2 + (AOC)^2 \\ \Rightarrow & (ABC)^2 & = & \left(\frac{2\cdot 3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\cdot 6}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\cdot 6}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow & (ABC)^2 & = & 9 + 81 + 36 \ = \ 126 \\ \Rightarrow & (ABC) & = & \sqrt{126} = 3\sqrt{14}\ cm^2\cdot \end{array}$$

4.12 Área de um triângulo equilátero

Proposição 4.12 *A área de um triângulo ABC equilátero de lado a é dada por*

$$(ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot$$

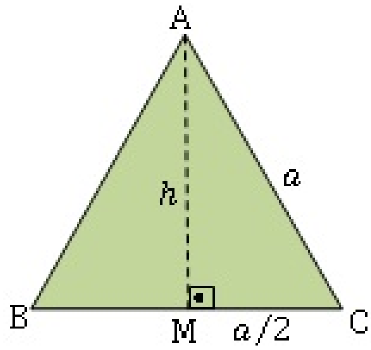


Figura 4.14: Triângulo equilátero.

Demonstração:

Seja h a altura relativa à base BC do triângulo ABC, conforme a Figura 4.14. Como o triângulo é equilátero, então o ponto M é ponto médio do lado BC, assim, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AMC, retângulo em M, temos a altura h, em função do lado a:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot \qquad (*)$$

Por outro lado, como a área do triângulo ABC é dada por:

$$(ABC) = \frac{\overline{BC}\cdot h}{2} = \frac{ah}{2}\cdot \qquad (\star)$$

Substituindo $(*)$ em $(\star)$, obtemos

$$(ABC) = \frac{ah}{2} = \frac{a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot$$

Logo,

$$(ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot$$

4.13 Área de um triângulo isósceles

Proposição 4.13 *Em um triângulo ABC isósceles de base BC, considere conhecidos os lados que possuem a mesma medida l e os ângulos da base de medida θ, como ilustrado na Figura 4.15 (a). A área do triângulo ABC em função de l e θ é dada por*

$$(ABC) = l^2 \ \mathrm{sen}\,(\theta) \ \cos\,(\theta)\,.$$

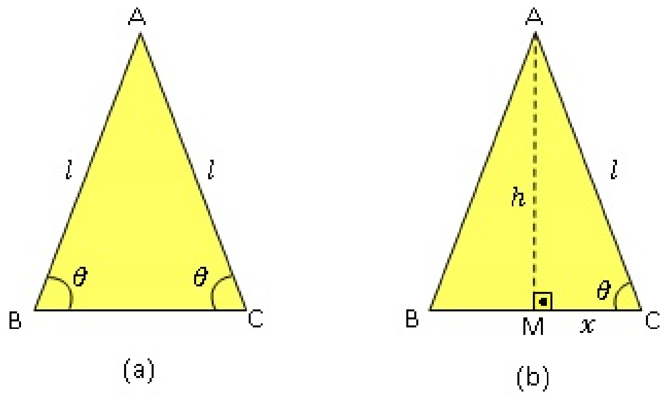


Figura 4.15: Triângulo isósceles.

Demonstração:

Sejam h a altura relativa ao lado BC e $\overline{BM} = x$, em que M é o ponto médio de BC, como observa-se na Figura 4.15 (b).

Pelas razões trigonométricas do triângulo AMC, temos

$$\mathrm{sen}\,(\theta) = \frac{h}{l} \quad \Rightarrow \quad h = l\,\mathrm{sen}\,(\theta)\,. \qquad (\square)$$

$$\cos\,(\theta) = \frac{x}{l} \quad \Rightarrow \quad x = l\cos\,(\theta)\,. \qquad (\blacksquare)$$

Por outro lado, a área do triângulo ABC é dada por

$$(ABC) = \frac{\overline{BC} \cdot h}{2} = \frac{2xh}{2} = x \cdot h. \qquad (\Diamond)$$

Substituindo $(\square)$ e $(\blacksquare)$ em $(\Diamond)$, obtemos:

$$(ABC) = l\,\mathrm{sen}\,(\theta)\,l\cos\,(\theta) = l^2\,\mathrm{sen}\,(\theta)\cos\,(\theta)\,. \qquad (\blacklozenge)$$

Obsevação: Como $\mathrm{sen}\,(2\theta) = 2\,\mathrm{sen}\,(\theta)\cos\,(\theta)$, podemos escrever $(\blacklozenge)$ da seguinte forma:

$$(ABC) = \frac{l^2}{2}\,\mathrm{sen}\,(2\theta)\,.$$

4.14 Área de um triângulo escaleno

Proposição 4.14 *Em um triângulo ABC, conhecidos os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ e dado $\overline{BC} = d$, como ilustrado na Figura 4.16. A área do triângulo ABC em função de $\hat{B}$, $\hat{C}$ e d é dada por*

$$(ABC) = \frac{d^2}{2\left(\operatorname{cotg}\left(\hat{B}\right) + \operatorname{cotg}\left(\hat{C}\right)\right)}.$$

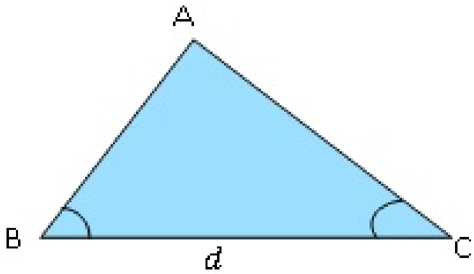


Figura 4.16: Triângulo escaleno.

Demonstração:

Observando-se a Figura 4.17. Seja M o pé da perpendicular do ponto A sobre a base BC. Como $\overline{BC} = d$, considerando $\overline{BM} = m$ e $\overline{MC} = d - m$.

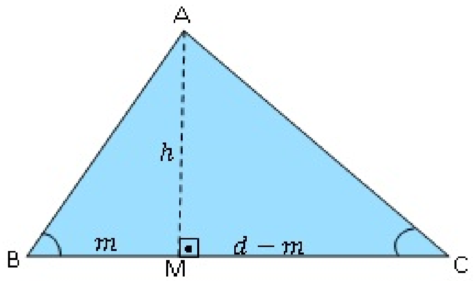


Figura 4.17: Demonstração: triângulo escaleno.

Aplicando as razões trigonométricas nos triângulos BMA e CMA, obtemos, respectivamente, as relações

$$m = \frac{h}{\operatorname{tg}\left(\hat{B}\right)} \qquad \text{e} \qquad h = (d - m)\operatorname{tg}\left(\hat{C}\right).$$

Substituindo a primeira na segunda, obtemos

$$h = \left(d - \frac{h}{\operatorname{tg}\left(\hat{B}\right)}\right)\operatorname{tg}\left(\hat{C}\right) \quad \Rightarrow \quad d - \frac{h}{\operatorname{tg}\left(\hat{B}\right)} = \frac{h}{\operatorname{tg}\left(\hat{C}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad d = h\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\hat{B}\right)+\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\hat{C}\right)}}\right) = h\left(\operatorname{cotg}\left(\hat{B}\right)+\operatorname{cotg}\left(\hat{C}\right)\right) \qquad \Rightarrow \quad h = \frac{d}{\left(\operatorname{cotg}\left(\hat{B}\right)+\operatorname{cotg}\left(\hat{C}\right)\right)}.$$

Por outro lado, a área do triângulo ABC é dada por

$$(ABC) = \frac{\overline{BC}\cdot h}{2} = \frac{d}{2}\cdot\frac{d}{\left(\operatorname{cotg}\left(\hat{B}\right)+\operatorname{cotg}\left(\hat{C}\right)\right)}.$$

Logo,

$$(ABC) = \frac{d^2}{2\left(\operatorname{cotg}\left(\hat{B}\right)+\operatorname{cotg}\left(\hat{C}\right)\right)}.$$

4.15 Área de um triângulo retângulo

Proposição 4.15 *A área de um triângulo ABC retângulo é igual a metade do produto de seus catetos.*

Seja ABC um triângulo retângulo de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, em que a é a hipotenusa, b e c são os catetos. Conforme a Figura 4.18. Então a área do triângulo ABC é dada por

$$(ABC) = \frac{b\cdot c}{2}.$$

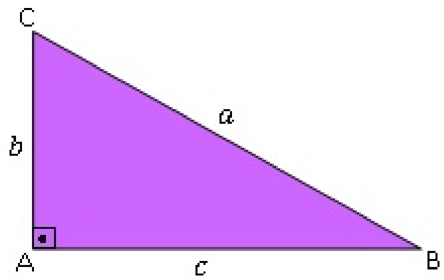


Figura 4.18: Triângulo retângulo.

Demonstração:

Sabendo-se que o triângulo retângulo ABC possui o ângulo reto em $\hat{A}$, como visto na Figura 4.18. A altura relativa ao lado AB, é o próprio lado AC, assim, pela Proposição 4.1, segue que

$$(ABC) = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{2} = \frac{b\cdot c}{2}.$$

Capítulo 5

Geometria Analítica

5.1 Introdução.

A Geometria analítica tem entre suas características a realização de conexões entre a Geometria e a Álgebra, pois, por exemplo, permite compreender as soluções de um sistema linear de duas incógnitas por meio da interseção de retas em um plano, ou então, representar por meio de uma equação uma figura bidimensional ou tridimensional, (Souza [17]).

Neste capítulo, abordaremos o cálculo de área de regiões triangulares, desta vez usando o método analítico de duas formas. Primeiramente, através do determinante e, em seguida, por meio de vetores, obtidos a partir das coordenadas dos vértices de um triângulo dado.

5.2 O Plano Cartesiano

Um sistema de coordenadas cartesianas no plano consiste de um par de eixos perpendiculares OX (horizontal) e OY (vertical) contidos nesse plano, com a mesma origem O, que dividem o plano em quatro regiões chamadas *quadrantes*. Observe a Figura 5.1. Chamamos OX de eixo das *abscissas* e OY de eixo das *ordenadas*. O sistema é indicado com a notação XOY. Cada ponto P do plano possui uma única representação, indicado pelo *par ordenado* (x,y) de números reais, onde x é a abscissa e y é a ordenada do ponto P, segundo o Sistema Ortogonal XOY. Representa-se por $P(x,\ y)$.

Observação:

Os eixos OX e OY são retas orientadas, isto é, quando sobre elas escolhe-se um sentido de percurso, chamado positivo. O sentido oposto sobre o eixo é denominado negativo. Geralmente, para o eixo OX o sentido *positivo* escolhido é à *direita* da origem e sentido *negativo* à *esquerda* da origem. Para o eixo OY o sentido positivo é *acima* da origem e sentido negativo *abaixo* da origem.

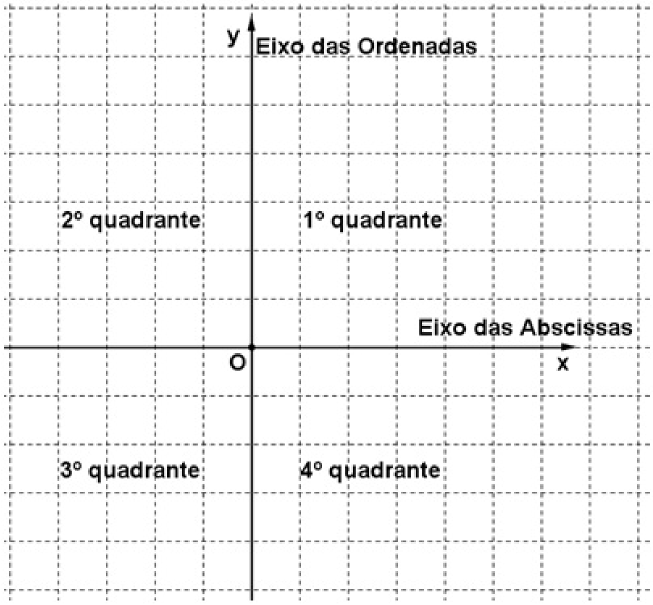


Figura 5.1: Plano cartesiano.

Figura 5.2: René Descartes.

René Descartes $(1596-1650)$, matemático e filósofo francês é considerado o criador da Geometria Analítica, por ter sido quem primeiro utilizou o sistema de coordenadas que hoje leva seu nome em problemas de Geometria. Em filosofia, sua obra se destacou principalmente pelo tratado *Discurso sobre o Método*.

5.3 O Determinante

Indicamos o determinante de uma matriz A, por $\det(A)$.

Denomina-se o determinante como sendo um número real que se associa a uma matriz quadrada. Este número permite saber se a matriz tem ou não inversa, pois as que não têm são precisamente aquelas cujo determinante é igual a 0. É importante observar que não existe determinante de matrizes que não sejam quadradas.

Definimos o determinante de uma matriz da seguinte forma:
(i) Determinante de uma matriz de ordem 1

$$A = (a_{11}) \quad \Rightarrow \quad \det(A) = a_{11}.$$

(ii) Determinante de uma matriz de ordem 2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

(iii) Determinante de uma matriz de ordem 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Observação:

A regra mais conhecida para obter o determinante de uma matriz quadrada de ordem maior que 3 é o *Teorema de Laplace* que consiste em escolher uma das filas (linha ou coluna) da matriz e somar os produtos dos elementos dessa fila pelos seus respectivos cofatores. Aqui não nos prolongamos no tema, para podermos manter o foco nas diferentes formas de calcular áreas de triângulos.

5.4 A área de um triângulo usando determinante

Proposição 5.1 *Dadas as coordenadas de três pontos não colineares, digamos* $A = (x_A, y_A)$*,* $B = (x_B, y_B)$ *e* $C = (x_C, y_C)$*, é possível calcular a área do triângulo ABC, cujos vértices são esses pontos, usando a fórmula*

$$(ABC) = \frac{1}{2} \cdot |D|, \qquad \text{em que} \quad D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Demonstração:

Observando a Figura 5.3 note que a área do triângulo ABC é igual a soma das áreas dos triângulos ACD e BCD. Inicialmente, determinaremos a abscissa x_D do ponto D em função das coordenadas de A, B e C.

Como os triângulos ABG e ADF são semelhantes, temos:

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AF}} \quad \Rightarrow \quad \frac{|x_B - x_A|}{|x_D - x_A|} = \frac{|y_B - y_A|}{|y_C - y_A|}.$$

Sem perda de generalidade, consideremos $x_A < x_D < x_B < x_C$ e $y_A < y_C < y_B$.

Assim, podemos escrever

$$x_D = x_A + \frac{(x_B - x_A)(y_C - y_A)}{y_B - y_A}.$$

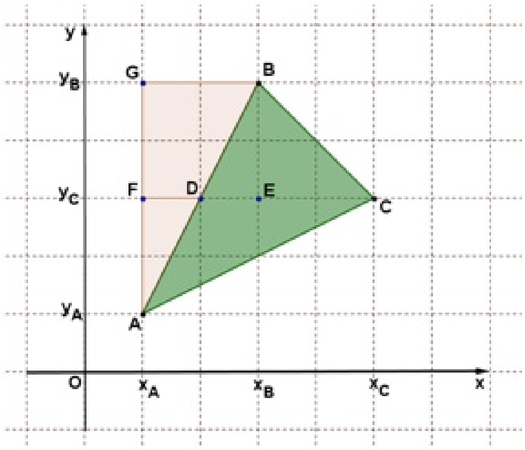


Figura 5.3: Área usando determinante.

Agora, vamos determinar a medida $\overline{CD}$:

$$\begin{aligned}
\overline{CD} &= |x_C - x_D| = \left| x_C - x_A - \frac{(x_B - x_A)(y_C - y_A)}{y_B - y_A} \right| \\
&= \left| \frac{(x_C - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A)}{y_B - y_A} \right| \qquad (*).
\end{aligned}$$

Calcula-se a área do triângulo ABC:

$$(ABC) = (ACD) + (BCD) = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{AF} + \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{FG} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \left(\overline{AF} + \overline{FG} \right) = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{AG}.$$

Como $\overline{AG} = y_B - y_A$ e $\overline{CD}$ corresponde à expressão $(*)$, obtemos

$$\begin{aligned}
(ABC) &= \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{(x_C - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A)}{y_B - y_A} \right| \cdot |y_B - y_A| \\
&= \frac{1}{2} \cdot |(x_C - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A)| \\
&= \frac{1}{2} \cdot |-(x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C)| \\
&= \frac{1}{2} \cdot |(x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C)|.
\end{aligned}$$

Note que $(x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C)$ corresponde ao determinante:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Portanto, a área do triângulo ABC é dada por

$$(ABC) = \frac{1}{2} \cdot |D|.$$

Exemplo 1: Vamos determinar a área do triângulo ABC, de vértices $A\,(2,\ 3)$, $B\,(4,\ 5)$, $C\,(2,\ -3)$.
Solução: Temos que

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Logo,

$$(ABC) = \frac{1}{2} \cdot |D| = \frac{1}{2}.|-12| = \frac{12}{2} = 6.$$

Outra forma de calcular o valor do determinante da matriz de ordem 3 da Proposição 5.1, é usando a ideia da Revista RPM [18]. Faremos aqui uma reapresentação mostrando mais detalhes. Primeiramente, escrevemos da seguinte maneira as coordenadas dos vértices do triângulo dado:

$$H = \left| \begin{array}{cccc} x_A & x_B & x_C & x_A \\ & & & \\ y_A & y_B & y_C & y_A \end{array} \right|.$$

Vamos obter o número H que tem o mesmo valor do determinante visto anteriormente, mas definido diferentemente. Para calcular H devemos somar os produtos dos números ao longo de cada uma das diagonais inclinadas para a direita e subtrair a soma dos produtos dos números ao longo de cada uma das diagonais inclinadas para a esquerda.

O sinal de H dependerá da ordem em que os pontos forem escolhidos, H será positivo se os pontos forem escolhidos no sentido anti-horário e será negativo se a escolha for feita no sentido horário, escolha que fizemos na Figura 5.3 e também no exemplo 1.

Por exemplo, se trocarmos as posições dos pontos $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, teremos

$$-H = \left| \begin{array}{cccc} x_A & x_C & x_B & x_A \\ & & & \\ y_A & y_C & y_B & y_A \end{array} \right|.$$

Em qualquer caso, temos

$$(ABC) = \frac{1}{2} \cdot |H|.$$

Podemos generalizar essa ideia para um polígono de vértices consecutivos $A_1, A_2 \ldots A_n$ ordenados no sentido anti-horário, como ilustrado na Figura 5.4 e seja $K = (x_0, y_0)$ um ponto qualquer no interior do polígono.

Dividimos o polígono em n triângulos, cada um deles tendo K como um de seus vértices. Podemos aplicar a fórmula vista anteriormente para obter a seguinte expressão para o dobro da *área do polígono*, denotada por $A\,(P)$.

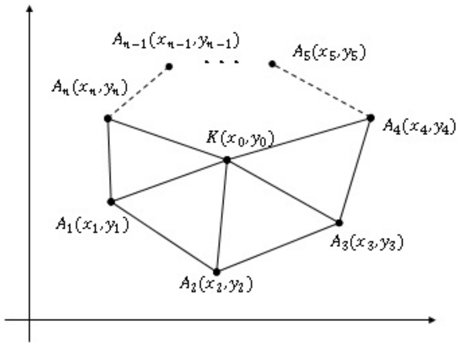


Figura 5.4: Dispositivo para calcular a área polígonos.

$$2A\,(P) = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_0 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_0 & x_2 & x_3 & x_0 \\ y_0 & y_2 & y_3 & y_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_0 & x_3 & x_4 & x_0 \\ y_0 & y_3 & y_4 & y_0 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x_0 & x_n & x_1 & x_0 \\ y_0 & y_n & y_1 & y_0 \end{vmatrix}.$$

Expandindo e cancelando os termos semelhantes, obtemos

$$2A\,(P) = (x_1y_2 + x_2y_3 + \ \ldots\ x_{n-1}y_n + x_ny_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + \ \ldots\ x_ny_{n-1} + x_1y_n),$$

o que pode ser escrito como

$$A\,(P) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & y_0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n & y_0 \end{vmatrix}.$$

Observe que essa expressão independe do ponto K escolhido como vértice comum de todos os triângulos.

Exemplo 2: Calcule a área do polígono $ABCDE$ de vértices

$$A\,(1,\ 1),\ B\,(2,\ 4),\ C\,(3,\ 6),\ D\,(-1,\ 8),\ E\,(-4,\ 5).$$

Solução: A área é dada por

$$(ABCDE) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 8 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot [(4+12+24-5-4)-(2+12-6-32+5)] = 25.$$

Pode-se mostrar, de modo semelhante, que, com uma escolha criteriosa dos triângulos, a fórmula acima também pode ser usada para calcular a área de polígonos não-convexos.

Exemplo 3: Considere os pontos $A\,(0,\ 0),\ B\,(4,\ 2),\ C\,(0,\ 8),\ D\,(6,\ 12),\ E\,(10,\ 0)$.

(a) A área do polígono não-convexo $AEDBC$ é

$$(AEDBC) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 10 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 58.$$

(b) A área do polígono não-convexo $AEDCB$ é

$$(AEDCB) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 10 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 68.$$

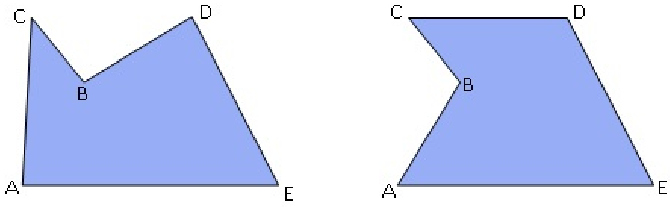


Figura 5.5: Dispositivo para calcular a área polígonos não-convexos.

5.5 Vetores no plano cartesiano

Seguindo as ideias de Frensel [22], apresentaremos algumas noções sobre vetores no plano. Para entendermos o significado de vetor é importante conhecermos o seguinte lema.

Lema 5.2 *Se $A\,(x_A,\, y_A)$, $B\,(x_B,\, y_B)$, $C\,(x_C,\, y_C)$ e $D\,(x_D,\, y_D)$ são pontos de um dado sistema Cartesiano, então:*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_B - x_A = x_D - x_C \\ y_B - y_A = y_D - y_C. \end{cases}$$

Sejam A e B dois pontos do plano. O vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB, ou seja, possuem mesmo comprimento, direção e sentido. Cada segmento equipolente a AB é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$. Na Figura 5.6 vê-se um conjunto de vetores equipolentes no plano. Isto é, qualquer ponto do plano é origem de um único segmento orientado representante do vetor $\overrightarrow{v}$.

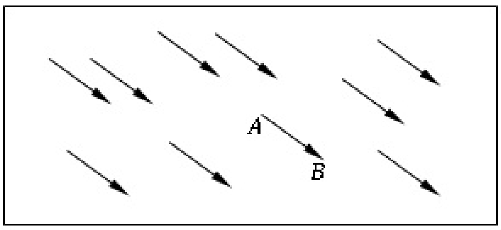


Figura 5.6: Vetores no plano.

Dados os pontos $A\,(x_A,\, y_A)$ e $B\,(x_B,\, y_B)$, os números $x_B - x_A$ e $y_B - y_A$ são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e escrevemos $\overrightarrow{v} = (x_B - x_A,\, y_B - y_A)$.

Um estudo bem mais detalhado sobre vetores no plano pode ser encontrado em [22].

5.6 A área de um triângulo usando vetores

Usando o cálculo da área do paralelogramo, calcula-se a área do triângulo ABC. O triângulo ABC pode ser visto na Figura 5.7. Como o paralelogramo $ABDC$ de lados adjacentes AB e AC é composto dos triângulos congruentes ABC e DCB, temos

$$(ABDC) = 2 \cdot (ABC) = \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{pmatrix} \right|,$$

em que $\begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{pmatrix}$ representa a matriz cujas filas são as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, respectivamente.

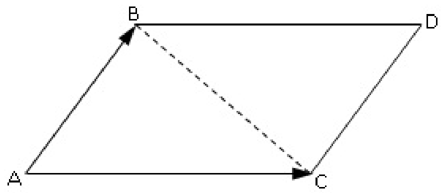


Figura 5.7: Triângulo ABC.

Portanto, podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 5.3 *Dados os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ que representam dois lados adjacentes de um triângulo, é possível calcular a área do triângulo ABC, usando a fórmula*

$$(ABC) = \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{pmatrix} \right|.$$

De fato, vemos na última demonstração que

$$(ABC) = \frac{1}{2} \left| (x_C - x_A) \cdot (y_B - y_A) - (x_B - x_A) \cdot (y_C - y_A) \right|.$$

Exemplo 4: Vamos determinar a área do triângulo ABC, cujas coordenadas são $A(2,\ 3)$, $B(4,\ 5)$ e $C(2,\ -3)$.

Solução: Temos que $\overrightarrow{AB} = (2,\ 2)$ e $\overrightarrow{AC} = (0,\ -6)$, assim,

$$(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot |\,(-12 - 0)\,| = \frac{12}{2} = 6.$$

Capítulo 6

Área de polígonos regulares, convexos e não-convexos

6.1 Introdução.

Neste capítulo fazemos uma ligação entre o que vimos nos capítulos anteriores, buscando completar um estudo sobre áreas de figuras geométricas planas, usando resultados acessíveis aos alunos do ensino médio, sem entrar no campo do cálculo diferencial e integral e buscando justificar propriedades, mostrar casos especiais de polígonos regulares e algumas aplicações interessantes, como também apresentar e demonstrar a *fórmula de Pick*, que serve para calcular a área de um polígono qualquer, desde que este polígono não tenha ponto de auto-interseção, ou seja, um polígono cujo bordo é uma poligonal fechada que pode ser percorrida inteiramente sem passar duas vezes pelo mesmo vértice. No Apêndice *B* apresentamos uma outra demonstração desta fórmula, usando o Princípio de Indução.

Segundo Lima [14]: "A área de uma região no plano é um número positivo que associamos a mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado." Ainda, de acordo com Barbosa [1]: "A toda região poligonal corresponde um número maior do que zero."

Para calcular a área de um polígono convexo, basta usar o princípio de que as diagonais do triângulo traçadas a partir de um de seus vértices o particionam em triângulos, e em seguida, calcular a área de cada um desses triângulos.

Seguindo as ideias de Muniz Neto [15], devemos considerar as seguintes propriedades como postulados, a fim de que o conceito de área para polígonos faça sentido e promova chegar aos resultados mais importantes de forma mais rápida.

6.2 Propriedades

(i) Polígonos congruentes têm áreas iguais.

(ii) Se um polígono convexo é particionado em um número finito de outros polígonos convexos, então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.

(iii) Se um polígono (maior) contém outro (menor) em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.

(iv) A área de um quadrado de lado 1 cm é igual a 1 cm^2.

(v) Todo polígono regular é inscritível e circunscritível, e os círculos inscrito e circunscrito têm o mesmo centro.

6.3 Elementos de um polígono regular inscrito

1) Raio de um polígono regular.

Na Figura 6.1, o raio de comprimento r da circunferência em que está inscrito o polígono regular é também chamado de *raio do polígono regular*.

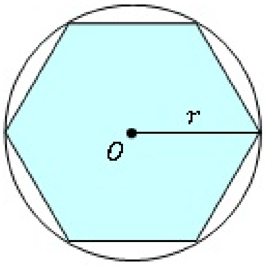


Figura 6.1: Raio de um polígono regular.

2) Apótema de um polígono regular.

O *Apótema* de um polígono é o segmento que liga o centro O do polígono ao ponto médio M de qualquer um dos lados, representado por a, como ilustrado na Figura 6.2.

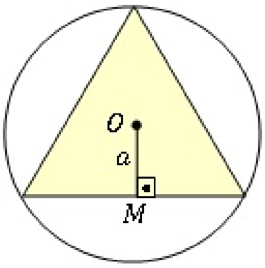


Figura 6.2: Apótema de um polígono regular.

3) Ângulo central.

O *Ângulo central* α de um polígono inscrito de n lados, é o ângulo cujo vértice está no centro da circunferência e cujos lados passam por dois vértices consecutivos do polígono. Sua medida é dada por $\alpha = \dfrac{360^\circ}{n}$. Na Figura 6.3 vê-se o ângulo central α de um hexágono regular.

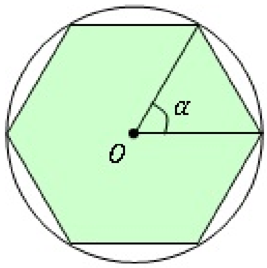


Figura 6.3: Ângulo central de um polígono regular.

4) Ângulos internos.

Em um polígono regular inscrito em uma circunferência, todos os *ângulos internos i* são congruentes e, se o polígono tem n lados, a medida de cada um dos ângulos é dada por $i = \dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$, como ilustrado na Figura 6.4.

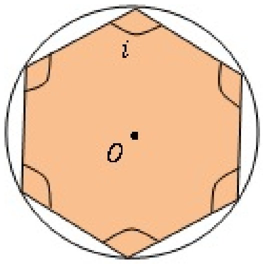


Figura 6.4: Ângulos internos de um polígono regular.

5) Diagonais de um polígono regular.

Diagonal é todo segmento que une dois vértices não consecutivos. Observa-se na Figura 6.5 as diagonais de um polígono. O número d de diagonais de um polígono de n lados é dado por:

$$d = \frac{n\cdot(n-3)}{2}$$

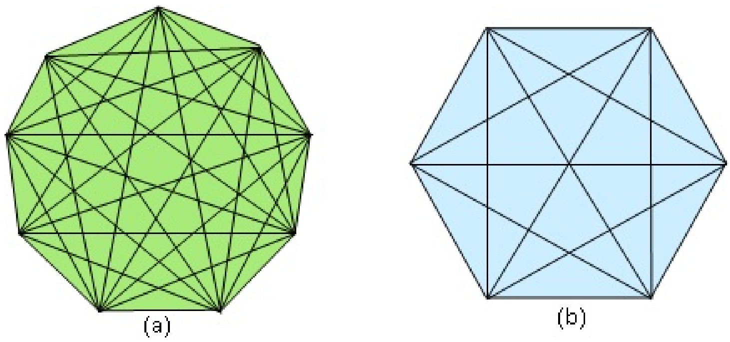


Figura 6.5: Diagonais de Polígonos (a) 27 diagonais e (b) 9 diagonais.

6.4 A área de polígonos regulares em função da medida do lado

Considere um hexágono regular $ABCDEF$ de centro O e lado l, como ilustrado na Figura 6.6. Podemos dividi-lo em seis triângulos congruentes. A área do hexágono será igual à soma das áreas dos seis triângulos em que foi decomposto.

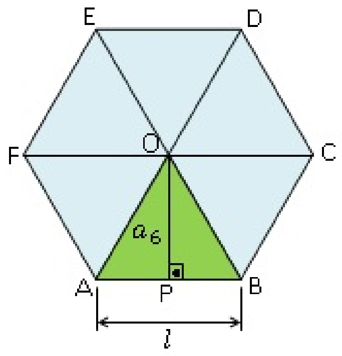


Figura 6.6: Hexágono regular.

Em cada um dos triângulos, temos:

- A base do triângulo, que corresponde ao lado do polígono e cuja medida é l.
- A altura relativa à base do triângulo, que corresponde ao apótema do polígono e denotada por a_6.

Logo,

$$(ABCDEF) = 6 \cdot (AOB) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{OP} = 3 \cdot l \cdot a_6.$$

Mas, $3 \cdot l$ corresponde ao semiperímetro do polígono. Como representa-se o perímetro de um polígono por $2p$, então o semiperímetro representaremos por p.

Daí,

$$(ABCDEF) = p \cdot a_6$$

Usando este mesmo raciocínio, e denotando a área do polígono de n lados por A_n. Podemos enunciar a seguinte Proposição.

Proposição 6.1 *Para qualquer polígono regular de n lados, semiperímetro p e apótema a_n, sua área é dada por*

$$A_n = p \cdot a_n$$

Usando essa ideia, podemos determinar a área dos primeiros polígonos regulares, escrevendo a apótema em função da medida do lado.

1) Considere o triângulo ABC equilátero de lado l e altura h de acordo com a Figura 6.7.

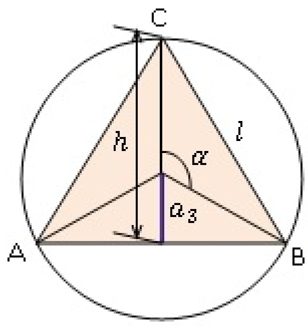


Figura 6.7: Triângulo equilátero inscrito.

- Ângulo central: $\alpha = \dfrac{360°}{3} = 120°$.
- Semiperímetro: $p = \dfrac{3l}{2}\cdot$
- Apótema: $a_3 = \dfrac{1}{3}h = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{l\sqrt{3}}{2} = \dfrac{l\sqrt{3}}{6}\cdot$
- Área: $(ABC) = p\cdot a_3 = \dfrac{3l}{2}\cdot\dfrac{l\sqrt{3}}{6} = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}\cdot$

2) Considere o quadrado $ABCD$ de lado l de acordo com a Figura 6.8.

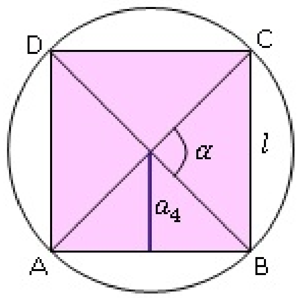


Figura 6.8: Quadrado inscrito.

- Ângulo central: $\alpha = \dfrac{360°}{4} = 90°$
- Semiperímetro: $p = \dfrac{4l}{2} = 2l$
- Apótema: $a_4 = \dfrac{l}{2}$
- Área: $(ABCD) = p\cdot a_4 = 2l\cdot\dfrac{l}{2} = l^2$.

3) Considere o pentágono regular de lado l da Figura 6.9.

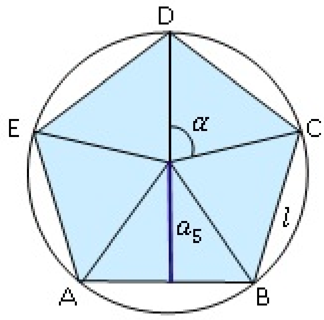


Figura 6.9: Pentágono inscrito.

- Ângulo central: $\alpha = \dfrac{360^\circ}{5} = 72^\circ$
- Apótema: $a_5 = \dfrac{l}{2 \cdot tg\,(36^\circ)}$
- Semiperímetro: $p = \dfrac{5l}{2}$

$$\bullet \text{Área} : (ABCDE) \;=\; p \cdot a_5 \;=\; \frac{5l}{2} \cdot \frac{l}{2 \cdot tg\,(36^\circ)} \;=\; \frac{5l^2}{4 \cdot tg\,(36^0)} \cong \frac{125}{72} l^2.$$

4) Considere o hexágono regular $ABCDEF$ de lado l da Figura 6.10.

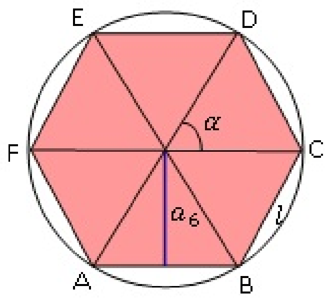


Figura 6.10: Hexágono inscrito.

- Ângulo central: $\alpha = \dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ$
- Apótema: $a_6 = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$
- Semiperímetro: $p = \dfrac{6l}{2} = 3l$

$$\bullet \text{Área} : (ABCDEF) \;=\; p \cdot a_6 \;=\; 3l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}.$$

6.5 A área de polígonos regulares em função do raio da circunferência circunscrita

Proposição 6.2 *A área A_n de um polígono regular de n lados, inscrito em uma circunferência de raio R é dada por:*

$$A_n = \frac{1}{2}nR^2 \operatorname{sen}\left(\frac{360^\circ}{n}\right).$$

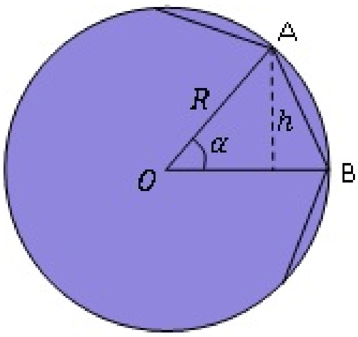


Figura 6.11: Polígono regular inscrito.

Demonstração:

Observando a Figura 6.11, seja O o centro da circunferência. Ligando-se cada um dos vértices do polígono ao ponto O, formam-se n triângulos isósceles, cujas bases são os lados do polígono, cujos lados iguais têm a mesma medida R e cujo ângulo do topo (ângulo central) mede $\frac{360^\circ}{n}$. Seja AOB um desses triângulos. Traça-se a altura h do vértice A. Essa altura mede $R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$ e o lado OB mede R.

Daí, a área deste triângulo é

$$(AOB) = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{360^\circ}{n}\right).$$

Logo, a área total do polígono é

$$A_n = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{360^\circ}{n}\right). \qquad (\clubsuit)$$

Usando o fato de que $\operatorname{sen}(2\theta) = 2 \cdot \operatorname{sen}(\theta) \cdot \cos(\theta)$, podemos escrever a igualdade $(\clubsuit)$ da seguinte forma:

$$A_n = nR^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right).$$

6.6 Uma fórmula curiosa: A Fórmula de Pick

Trata-se de uma forma simples para calcular a área de um polígono qualquer, convexo ou não-convexo. É uma fórmula bastante interessante, pois transforma um problema, em geral difícil, do cálculo de áreas, em uma mera contagem direta de pontos.

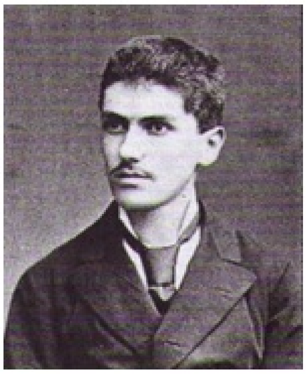


Figura 6.12: Georg A. Pick.

Georg Alexander Pick nasceu em Viena em 1859 e morreu no campo de concentração de Theresienstadt em 1941. Escreveu 67 artigos nas mais diversas áreas da Matemática. Esta fórmula, que ficou conhecida como o teorema de Pick, apareceu em um artigo publicado em Praga, em 1899.

Pick foi reitor da Faculdade Alemã de Praga em 1901, lá ele orientou cerca de 20 alunos para os seus doutoramentos, sendo o mais famoso Charles Loewner, cujo doutorado sobre teoria de funções geométricas foi premiado em 1917. Há outro aspecto da vida de Pick que merece atenção. Em 1910, ele estava em uma comissão criada pela Universidade de Praga para nomear Albert Einstein para a cadeira de Física. Pick foi o principal motivador por trás da nomeação e Einstein foi nomeado em 1911, ocupou este cargo até 1913 e durante estes anos, os dois se tornaram amigos íntimos. Não só compartilhavam interesses científicos, como também o interesse pela música. Pick tocou em um quarteto musical, apresentando Einstein para as sociedades científica e musical de Praga. Na verdade o grupo musical de Pick era constituído de quatro professores da universidade, incluindo Camillo Körner, professor de engenharia mecânica.

Apresentamos uma demonstração da fórmula de Pick seguindo a ideia de Lima [13] que escreveu: "O matemático tcheco Georg A. Pick publicou, em 1899, uma fórmula simples e bonita para a área de um polígono cujos vértices são pontos de uma rede."

6.7 Definições e notações

Definição 6.1 *Uma* **rede** *no plano é um conjunto infinito de pontos dispostos regularmente ao longo de retas paralelas horizontais e retas paralelas verticais, de modo que a distância de cada um deles aos pontos mais próximos na horizontal ou na vertical é igual a* 1.

Segundo a Fórmula de Pick: A área de um polígono denotado por $A(P)$ cujos vértices são pontos de uma rede é dada por

$$A(P) = \frac{B}{2} + I - 1,$$

em que I e B denotam, respectivamente, o número de pontos da rede situados sobre os lados do polígono e o número de pontos da rede existentes no interior do polígono.

A Figura 6.13 mostra sete polígonos, cujas áreas podem ser calculadas facilmente com a fórmula de Pick, exceto a sétima figura. Todavia, essa fórmula só se aplica a um polígono simples (isto é, cujo bordo é uma poligonal fechada que pode ser percorrida inteiramente sem passar duas vezes pelo mesmo vértice). Logo, a sétima figura, localizada no canto inferior direito, conforme a Figura 6.13, formada por dois triângulos de um vértice em comum não é considerado um polígono simples, pois possui um ponto de auto-interseção. Doravante, vamos considerar uma rede no plano.

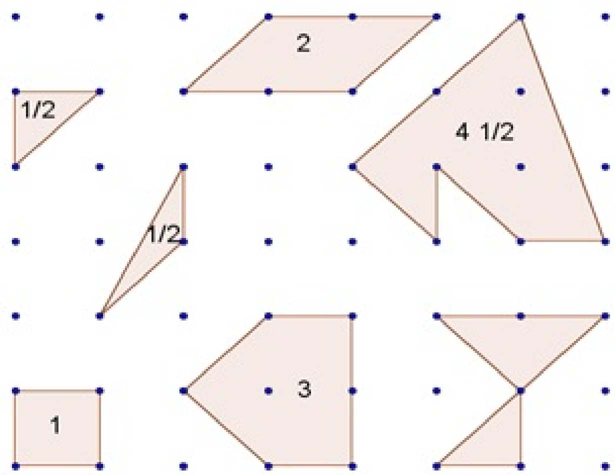


Figura 6.13: Polígonos em uma rede.

Definição 6.2 *Chama-se de* **triângulo fundamental** *quando seus três vértices e mais nenhum outro ponto (do bordo ou do interior) estão sobre a rede.*

Como pode ser visto na Figura 6.14.

Observação:

Analogamente, um paralelogramo é dito fundamental, quando os quatro vértices são os únicos dos seus pontos que pertencem à rede.

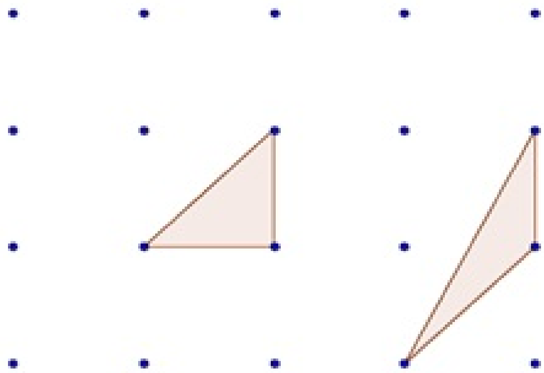


Figura 6.14: Triângulos fundamentais.

Proposição 6.3 *Se ABC é um triângulo fundamental, então ABCD é um paralelogramo fundamental.*

Demonstração:

Considerando os pontos $A\,(0,\ 0)$, $B\,(m,\ n)$ e $C\,(s,\ t)$ em um sistema de coordenadas cartesianas no plano, em que todas as coordenadas são inteiras. Traçando pelo ponto C uma paralela ao lado AB e pelo ponto B uma paralela ao lado AC, obtém-se o ponto de interseção D e vamos mostrar que ele terá coordenadas $D\,(m+s,\ n+t)$. Como pode ser visto na Figura 6.15.

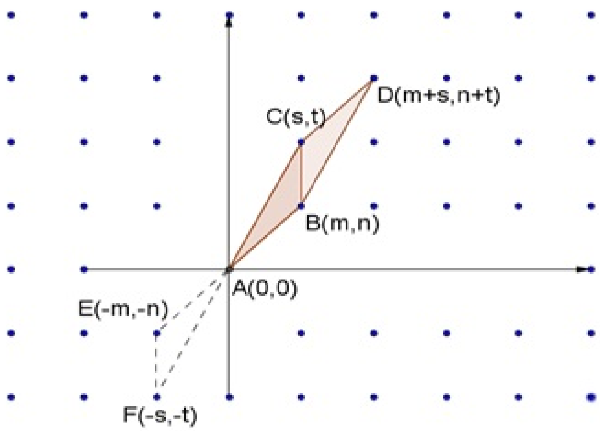


Figura 6.15: Triângulos e paralelogramo fundamentais.

Seja o triângulo AEF, cujos vértices são

$$A\,(0,\ 0) \quad E\,(-m,\ -n) \quad F\,(-s,\ -t)$$

Note que AEF não contém outro ponto da rede, apenas seus vértices que são simétricos a ABC em relação à origem. Como todas as coordenadas são inteiras, concluímos que AEF é um triângulo fundamental.

Sendo o ponto $D\,(\alpha,\ \beta)$, pela simetria dos triângulos ABC e AEF, temos

$$CD = AB \quad \therefore \quad (\alpha - s,\ \beta - t) = (m,\ n) \quad \therefore \quad \begin{cases} \alpha = m + s \\ \beta = n + t. \end{cases}$$

Daí,

$$D\,(m+s,\ n+t)\,.$$

Logo, BCD só possui coordenadas inteiras, assim, BCD é um triângulo fundamental. E, consequentemente, $ABCD$ é um paralelogramo fundamental.

Proposição 6.4 *A área de um triângulo fundamental é igual a* $1/2$*.*

Demonstração:

Considerando os dois vértices $A\,(0,\ 0)$ e $B\,(m,\ n)$ de um triângulo fundamental ABC, em um sistema de coordenadas cartesianas no plano, em que todas as coordenadas são inteiras. Mostremos inicialmente que, m e n são primos entre si. Se $d > 1$ fosse um divisor comum de m e n, o ponto $P\left(\frac{m}{d},\ \frac{n}{d}\right)$ teria coordenadas inteiras, logo estaria na rede e no interior do segmento de reta AB, como está ilustrado na Figura 6.16 (a), o que é uma contradição.

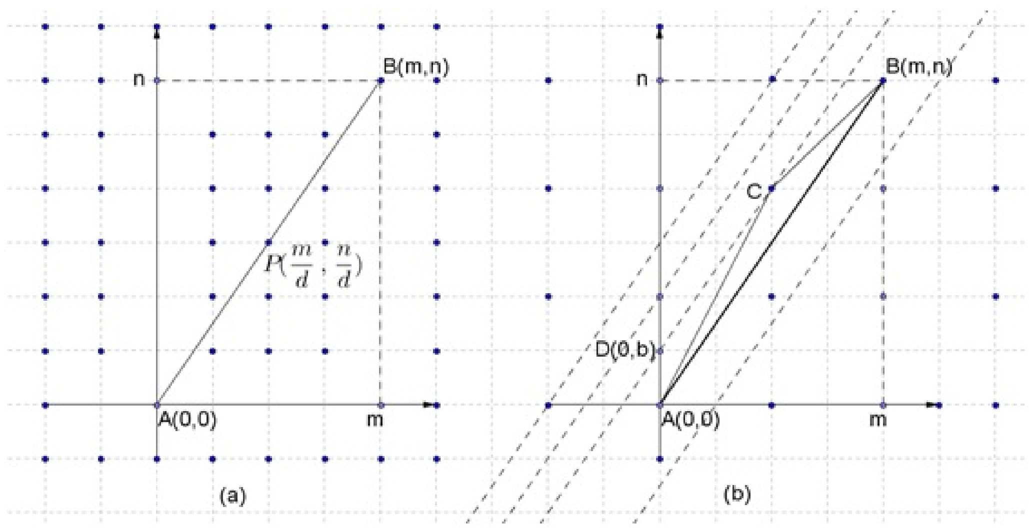


Figura 6.16: Retas paralelas a AB.

Considerando $m \neq 0$. A equação da reta que passa pelo ponto C e é paralela a AB é

$$y = \left(\frac{n}{m}\right)x + b,$$

onde b é a ordenada do ponto $D\,(0,\ b)$ no qual a reta corta o eixo vertical. Todos os triângulos que têm AB como base e cujo terceiro vértice está sobre essa reta têm a mesma área que ABC. Em particular, temos

$$(ABC) = (ABD) = \frac{|b| \cdot |m|}{2},$$

onde $|b|$ é a medida da base e $|m|$ a medida da altura de ABC. Basta provar que, $|b| = 1/(|m|)$.

Considere um caso mais geral, a equação da reta paralela a AB,

$$y = \left(\frac{n}{m}\right) x + \beta,$$

onde β é a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo vertical, de acordo com a Figura 6.16 (b). Se a reta passa por algum ponto da rede com coordenadas $(s,\, t)$, teremos

$$t = \left(\frac{n}{m}\right) s + \beta \quad \therefore \quad \beta = \frac{tm - sn}{m}.$$

De todas essas retas, apenas uma está mais próxima do segmento AB e não o contém, é aquela que passa por C, para a qual temos $\beta = b$. Logo, $|b|$ é o menor valor positivo que $|\beta|$ pode assumir.

Por outro lado, como m e n são primos entre si, pelo Lema B.1 seguinte, existem s e t inteiros, tais que

$$tm - sn = 1$$

Portanto, $1/(|m|)$ é o menor valor positivo de $|\beta|$, donde $|b| = 1/(|m|)$.

Agora, se $m = 0$, teremos $n = \pm 1$ e ABC é um triângulo retângulo, metade de um dos quadrados da rede, logo sua área é $1/2$.

Lema 6.5 *Se os inteiros m, n são primos entre si, então existem inteiros s e t tais que*

$$tm - sn = 1.$$

Demonstração:

Considerando que existam os números inteiros s e t tais que $p = tm - sn$ seja positivo. Vamos mostrar que se $p > 1$, então podemos modificar os inteiros s e t de modo que a expressão $tm - sn$ assuma um valor positivo menor do que p. Sendo, m e n primos entre si, pelo menos um deles, digamos m, não é divisível por p, isto é, $m = pq + r$, com $0 < r < p$. O inteiro $r' = p - r$ também cumpre a condição $0 < r' < p$.

Além disso, $r = p - r'$, logo,

$$m = pq + r = pq + p - r' = p(q+1) - r'.$$

Assim,

$$t(q+1)m - s(q+1)n = p(q+1) = m + r',$$

ou seja,

$$(tq+t-1)m-(sq+s)n=r', \qquad \text{com} \qquad 0<r'<p.$$

Repetindo o processo tantas vezes quantas sejam necessárias, chegamos a inteiros s e t tais que

$$tm-sn=1.$$

Observação:

Podemos decompor um polígono convexo de n lados em uma reunião de $n-2$ triângulos justapostos. Observando-se a Figura 6.17, basta selecionarmos um vértice do polígono e, a partir dele, traçar as $n-3$ diagonais que o ligam aos vértices não-adjacentes.

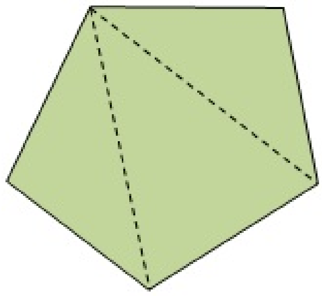


Figura 6.17: Pentágono decomposto em 3 triângulos por 2 diagonais.

Proposição 6.6 *Todo polígono de n lados pode ser decomposto como reunião de $n-2$ triângulos justapostos, cujos vértices são vértices do polígono dado.*

Demonstração:

Suponha por absurdo que existam polígonos para os quais a Proposição 6.6 não é verdadeira, seja n o menor número natural tal que existe um polígono P, com n lados, o qual não pode ser decomposto. Há dois casos a analisar:

Primeiro caso: ABC não contém outros vértices de P, além de A, B e C, como se vê na Figura 6.18. Neste caso, o polígono P' obtido de P quando se substituem os lados AB e AC por BC, tem $n-1$ lados. Mas n é o menor número de lados para o qual a Proposição é falsa, P' pode ser decomposto em $n-3$ triângulos, daí, P pode ser decomposto em $(n-3)+1=n-2$ triângulos, o que é uma contradição.

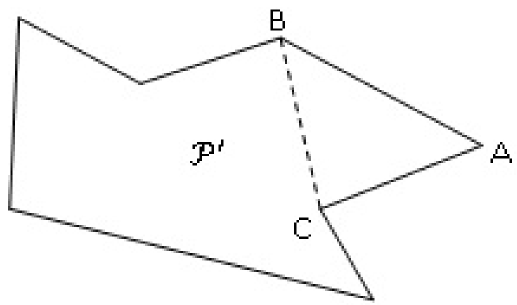


Figura 6.18: Polígono não-convexo sem ponto no interior.

Segundo caso: ABC contém algum outro ponto de P, além de A, B e C. Como se vê na Figura 6.19. Seja D o ponto mais distante do lado BC. Então, o segmento de reta AD decompõe P em dois polígonos P' e P''. Sejam n' e n'' o número de lados de P' e P'', respectivamente, assim, $n' + n'' = n + 2$. Como $n' > 3$ e $n'' > 3$ e vemos que n' e n'' são ambos menores do que n, então a Proposição vale para P' e P'', ou seja, podem ser decompostos em $n' - 2$ e $n'' - 2$ triângulos. Justapondo essas decomposições ao longo de AD, obtemos a seguinte decomposição em triângulos para P:

$$\left(n' - 2\right) + \left(n'' - 2\right) = n - 2 \quad \text{triângulos,}$$

o que é uma contradição.

Portanto, a Proposição 6.6 é verdadeira para polígonos convexos ou não-convexos.

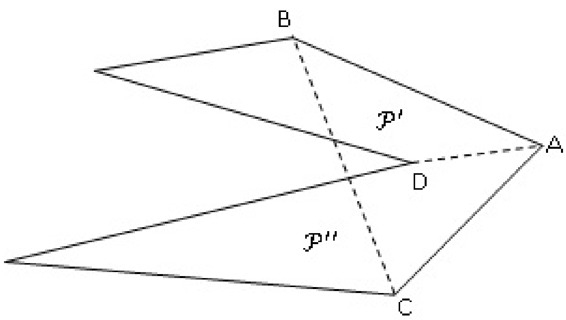


Figura 6.19: Polígono não-convexo com ponto no interior.

Corolário 6.7 *A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é igual a*

$$(n-2)\,\pi.$$

Proposição 6.8 *Todo polígono cujos vértices pertencem a uma rede pode ser decomposto numa reunião de triângulos fundamentais.*

Demonstração:

Pela Proposição 6.6, basta considerar o caso em que o polígono dado é um triângulo ABC que contém n pontos da rede (no interior ou no bordo).

Se existir algum ponto P da rede no interior do triângulo, traçamos segmentos de reta ligando esse ponto aos vértices A, B e C, como visto na Figura 6.20 (a).

Se existir pontos sobre os lados de ABC, escolhemos um deles, digamos P sobre AB, e o ligamos ao vértice C, como na Figura 6.20 (b).

Prosseguindo desta maneira, com um número finito de etapas chega-se a uma decomposição de ABC em triângulos fundamentais.

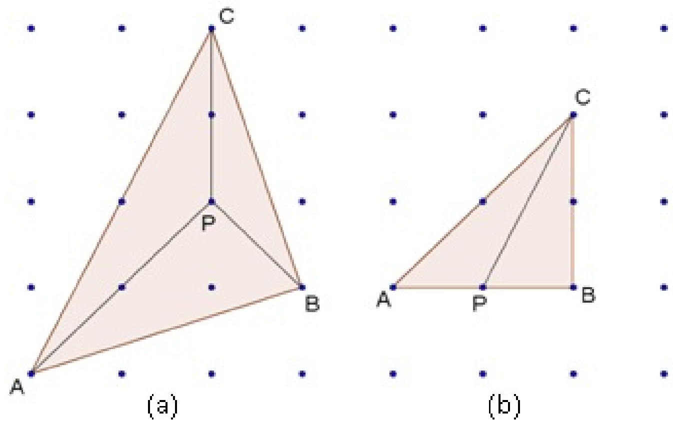


Figura 6.20: Decompondo polígonos em triângulos fundamentais.

6.8 Uma demonstração da fórmula de Pick.

Seja P um polígono cujos vértices pertencem a uma rede. Sejam B o número de pontos situados sobre os lados de P e I o número de pontos situados no interior de P.

Para provar que a área de P é dada por $\frac{B}{2}+I-1$, considerando a Proposição 6.8, basta mostrar que o número T de triângulos fundamentais da decomposição de P é igual a $B+2I-2$, pois pela Proposição 6.4, a área de P é igual a $T/2$.

Vamos calcular a soma dos ângulos internos dos T triângulos fundamentais que compõem o polígono P de duas formas diferentes.

Primeiramente, se há T triângulos, a soma S dos ângulos internos é dada por

$$S = \pi \cdot T. \qquad (\diamondsuit)$$

A segunda maneira é calcular separadamente a soma S_b dos ângulos que têm vértice no bordo e a soma S_i dos ângulos cujos vértices estão no interior de P.

Sejam B' o número de vértices de P e B'' o número de pontos da rede que estão sobre o bordo de P, mas não são vértices. Como pode ser visto na Figura 6.21. Então, $B = B' + B''$.

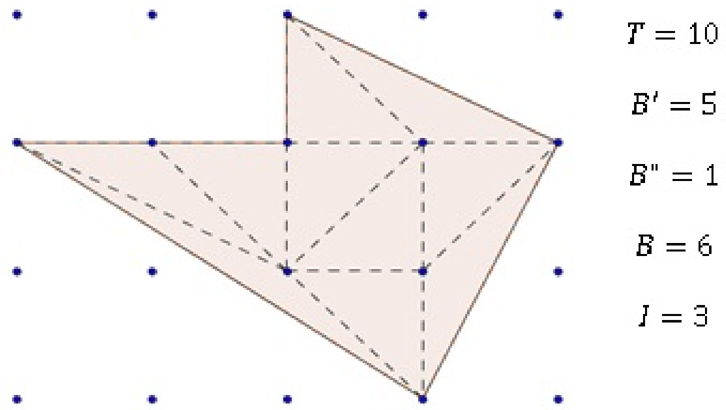


Figura 6.21: A soma dos ângulos de um polígono.

Assim,

$$S_b = \left(B' - 2\right) \cdot \pi + B'' \cdot \pi = \pi \cdot \left(B' + B'' - 2\right) = \pi \cdot (B - 2).$$

Por outro lado, em cada ponto da rede interior a P, os ângulos que o têm como vértice somam $2 \cdot \pi$.

Logo,

$$S_i = 2 \cdot \pi \cdot I.$$

Portanto,

$$S = S_b + S_i = \pi \cdot (B + 2I - 2). \qquad (\heartsuit)$$

Comparando $(\diamondsuit)$ e $(\heartsuit)$, completamos a demonstração da fórmula:

$$\pi \cdot T = \pi \cdot (B + 2I - 2) \quad \therefore \quad T = B + 2I - 2.$$

Como a área de P é igual a $T/2$, obtemos

$$A(P) = \frac{B}{2} + I - 1.$$

Capítulo 7

Atividades Propostas

7.1 Introdução.

Neste capítulo, apresentaremos algumas atividades envolvendo os resultados abordados nos capítulos 4, 5 e 6. Para desenvolver as habilidades e competências sobre esses conteúdos que foram estudados, se faz necessário que os alunos adquiram certas experiências com atividades direcionadas e bem planejadas nas quais se trabalha a ideia de calcular áreas de triângulos, identificando a fórmula mais adequada que envolva os dados do problema e ainda a área de polígonos, trabalhando com o *software* GeoGebra que por sua vez permite investigar, obter resultados e levantar hipóteses sobre o conteúdo trabalhado. No Apêndice *A* encontram-se a construção do Aplicativo para a Atividade 1 e uma apresentação do *software* GeoGebra.

7.2 Aspectos das atividades

Justificativa

Para que a aprendizagem seja mais significativa, se faz necessário que os alunos vivenciem as atividades direcionadas, de tal maneira que ao concluí-las o aluno perceba que aprendeu alguma coisa diferente e que isso pode lhe ajudar nos seus estudos posteriores. Pensando nisso, propomos uma série de atividades que podem ser facilmente adaptadas à turma. São atividades que auxiliam no aprendizado de áreas de figuras planas, envolvendo o *software* GeoGebra, outras envolvendo papel milimetrado e por fim atividades que visam verificar a aprendizagem.

Objetivos

- Calcular a área de polígonos tanto convexos como não-convexos;
- Obter medidas por estimativas e aproximações;

- Aplicar as fórmulas de Pick e de Heron;
- Incentivar o uso do computador como instrumento de ensino;
- Utilizar fórmulas para calcular áreas de superfícies planas e aplicá-las na resolução de problemas.

Metodologia

Recomenda-se que, para aplicar estas atividades os alunos tenham os conhecimentos prévios sobre áreas de figuras planas, unidades de medidas, fórmula de Pick, também sobre as diferentes formas de calcular áreas de triângulos e sobre o uso do GeoGebra, por isso deve ser aplicada a partir do 9° ano, adaptando se necessário.

Atividades com o GeoGebra: A Atividade 1 tem caráter introdutório e visa à familiarização com os recursos disponíveis no GeoGebra, no roteiro dessa atividade os alunos conhecem alguns comandos básicos, como construir polígonos e calcular sua área. Consiste de um exercício de verificação da aprendizagem envolvendo a fórmula de Pick. Na Atividade 2, o aluno tem a oportunidade de conhecer as ferramentas do GeoGebra e também investigar casos em que a fórmula de Pick não é válida, comparando resultados e observando construções feitas pelo *software*.

Atividades com papel milimetrado: As Atividades 1, 2, 3 e 4 têm por objetivos aplicar os conhecimentos do Capítulo 7, usando um material alternativo e barato que é o papel milimetrado. Em particular, a atividade 4 traz uma aplicação muito interessante que é a de obter um valor aproximado para a área de uma região, no caso o Estado da Paraíba, podendo generalizar a ideia para outros casos.

Atividades complementares: As 6 atividades propostas nesta seção são situações-problema e desafios para que os alunos aprimorem seus conhecimentos para vestibulares e concursos, os principais conteúdos abordados são os vistos nos Capítulos 4 e 5.

Dificuldades previstas

Esperamos que os alunos desenvolvam bem todas as atividades propostas, mas podem surgir dificuldades no desenvolvimento delas. Em relação às atividades propostas com o GeoGebra, se o aluno seguir os comandos que estão no roteiro, chegarão ao resultado esperado, porém uma das dificuldades que podem surgir é a falta de computador para cada aluno, o que pode causar formação de duplas. Em relação às atividades propostas com o papel milimetrado, a dificuldade que pode surgir é a de trabalhar com escalas, mas o professor pode auxilar na conversão dos resultados para o tamanho real. Já em relação às atividades complementares, as dificuldades que podem surgir na resolução desse tipo de exercício pode ser eliminada com a releitura dos Capítulos 4, 5 e 6.

7.3 Atividades com o GeoGebra

(1) Obtenha a área de cada polígono ligando os pontos da Figura através do GeoGebra.

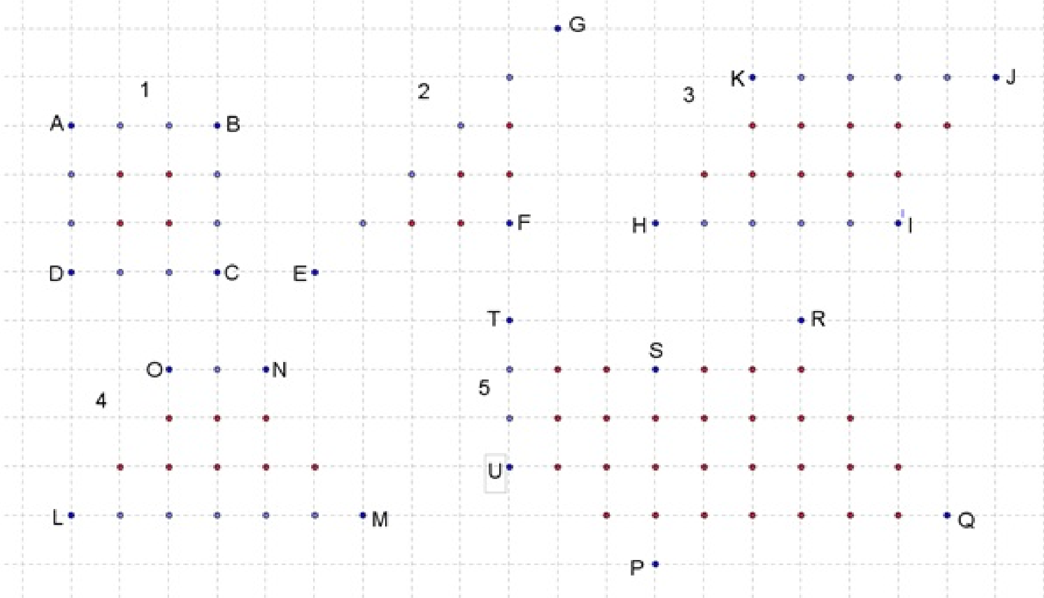


Figura 7.1: Ligando pontos até formar um polígono.

Roteiro:

a) Abra o aplicativo **Área.ggb** (Construção do Aplicativo em anexo A.1);

b) Usando a ferramenta **Polígono**, ligue os pontos azuis da Figura 7.1 na sequência $A-B-C-D-A$;

c) Proceda da mesma forma do item b) com as Figuras 2, 3, 4 e 5. Lembre-se: na ordem alfabética;

d) Identifique as variáveis B (pontos azuis) e I (pontos vermelhos) da *fórmula de Pick* em cada figura, anotando-os na seguinte tabela e calculando sua área;

Figura	B	I	Cálculos	Área
1				
2				
3				
4				
5				

Tabela 7.1: Atividade sobre Área.

e) Usando a ferramenta **Área**, selecione com o *mouse* cada polígono, obtendo sua área;

f) Verifique se os resultados obtidos em d) são os mesmos.

(2) Usando o GeoGebra, construa polígonos e calcule sua área.

Roteiro:

a) Abra o GeoGebra e escolha a disposição **Álgebra e Gráficos**;

b) Na janela de visualização, escolha **esconder os eixos** e **exibir malha**;

c) Usando a ferramenta **Polígono**, marque os vértices na janela de visualização, em interseções da malha de modo que ao concluir o polígono não tenha pontos de auto-interseção;

d) Usando a ferramenta **Novo Ponto**, escolha a cor dos pontos e localize todos os pontos internos de seu polígono;

e) Marque também os pontos que estão sobre os lados do polígono, mas não são vértices;

f) Usando a fórmula de Pick, calcule a área desse polígono;

g) Para finalizar, usando a ferramenta **Área**, selecione com o *mouse* o polígono, obtendo a sua área e verifique se foi o mesmo resultado encontrado em f);

h) Agora, usando a ferramenta **Polígono Regular**, marque dois pontos na janela de visualização. Em interseções da malha, abrirá uma janela, então indique quantos lados (diferente de 4) terá seu polígono e dê um **OK**;

i) Proceda como nos itens d), e), f) e g) e responda o que você observa ao comparar os resultados. Descubra o motivo da diferença.

7.4 Atividades com papel milimetrado

(1) (Adaptado de [14]) Na Figura 7.2 a seguir, cada quadrícula representa uma unidade de área. Qual é a área do polígono que aparece no interior do quadriculado?

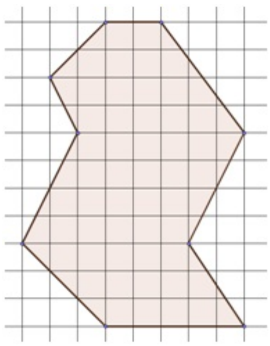


Figura 7.2: Polígono1 no papel milimetrado.

(2) (Adaptado de [8]) Feito um levantamento de um terreno, foi construída a Figura 7.3 a seguir. Sabendo que cada quadradinho representa $1m^2$. Qual é a área desse terreno?

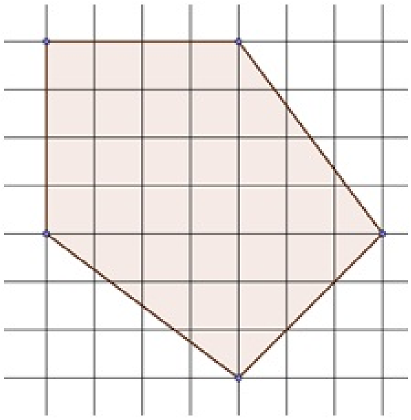


Figura 7.3: Polígono2 no papel milimetrado.

(3) (Fuvest-SP) Considere o triângulo representado na malha quadriculada. A área do triângulo, em cm^2, é:

$(a)\,2 \qquad (b)\,3 \qquad (c)\,4 \qquad (d)\,5 \qquad (e)\,6$

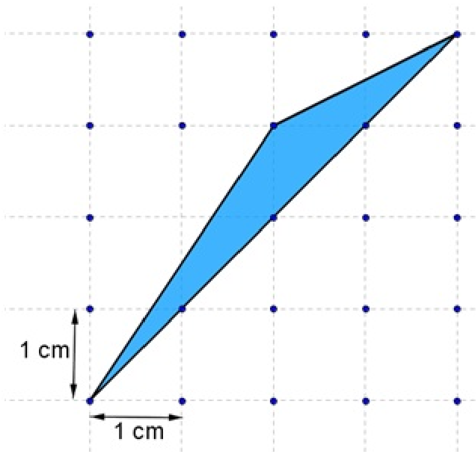


Figura 7.4: Polígono3 no papel milimetrado.

(4) (Adaptado de [17]) Considere a rede construída sobre o mapa do estado da Paraíba, cuja menor distância entre dois pontos seja 1 *cm* e considere a escala indicada na figura seguinte. Usando a *fórmula de Pick*, calcule a área aproximada da Paraíba. Em seguida, compare sua resposta com a área da Paraíba estimada pelo IBGE: 56.439 km^2.

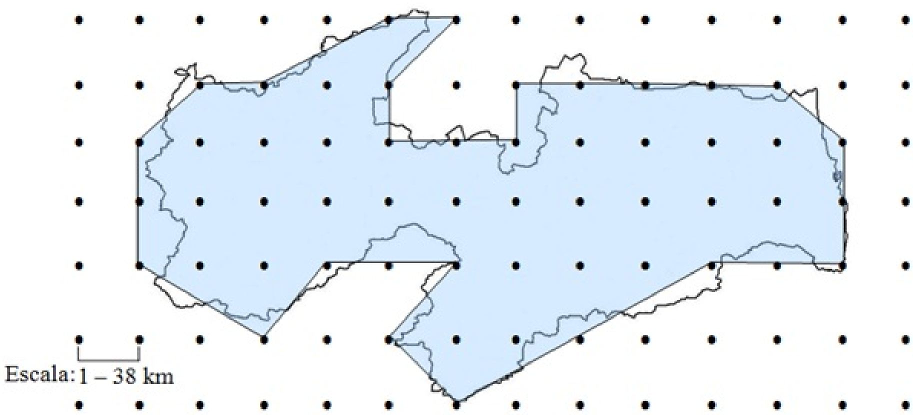


Figura 7.5: Mapa da Paraíba.

7.5 Atividades complementares

(1) Marina tem um terreno para vender, esse terreno tem um formato triangular e suas dimensões são 13 m, 13 m e 10 m. Sabendo que cada metro quadrado custa R\$ 1.400,00, obtenha o valor de venda desse terreno.

(2) Paulo possui um terreno triangular em que foi feito um levantamento de algumas medidas de acordo com a Figura seguinte. Quanto ele pagará de imposto territorial, sabendo que por cada m^2 devem ser pagos R\$ 20,00 ?

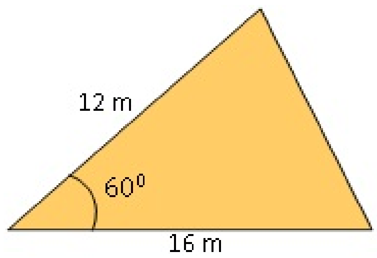


Figura 7.6: Área do terreno triangular.

(3) (ENEM 2008 - Questão 21) O Tangram é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de 7 peças: 5 triângulos retângulos isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas, recortando-se um quadrado de acordo com a Figura 1. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas Figuras 2 e 3. Se o lado maior do hexágono, mostrado na Figura 2 mede 2 *cm*, então a área da Figura 3, que representa uma "casinha", é igual a:

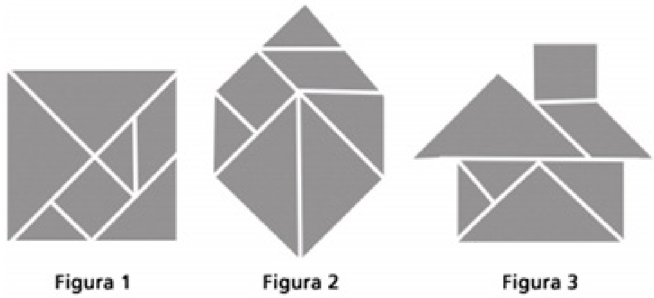


Figura 7.7: Tangram.

$(a)\,4\ cm^2 \qquad (b)\,8\ cm^2 \qquad (c)\,12\ cm^2 \qquad (d)\,14\ cm^2 \qquad (e)\,16\ cm^2$

(4) (Adaptado de [17]) Vimos no Capítulo 4 a fórmula para calcular a área de um triângulo qualquer deduzida por *Heron* em sua obra *A Métrica*. Ocorre que essa fórmula é válida pelo fato de que qualquer triângulo pode ser inscrito em uma circunferência, o que não ocorre, por exemplo, para todos os quadriláteros. Em trabalhos posteriores, creditados a matemáticos hindus, foi deduzida uma extensão da fórmula de Heron, válida para quadriláteros que podem ser inscritos em uma circunferência. Essa fórmula pode ser escrita como:

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

em que a, b, c, d são as medidas dos lados do quadrilátero, p é o semiperímetro e A é a área. Utilizando a fórmula acima, calcule a área aproximada da cada quadrilátero inscrito na circunferência.

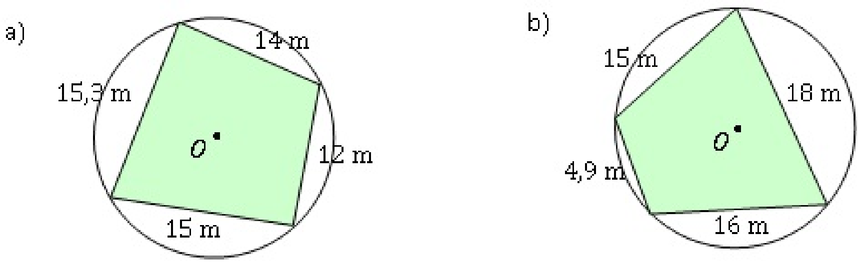


Figura 7.8: Quadriláteros inscritos em uma circunferência.

(5) (Banco de Questões da OBMEP-2010) A figura dada representa um trapézio *ABCD*, em que *AB* é paralelo a *CD* e as diagonais *AC* e *BD* cortam-se no ponto *P*. Se as áreas dos triângulos *APB* e *CPD* medem 4 e 9 cm^2, respectivamente, qual é a área do triângulo *PCB*?

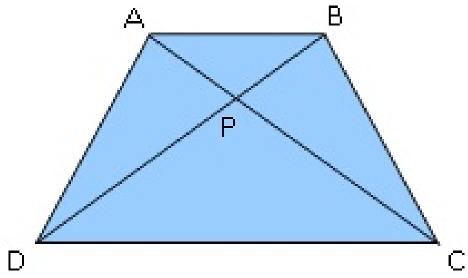


Figura 7.9: Trapézio.

(6) (Adaptado de [17]) O senhor Roberto comprou um terreno que custou $R\$ \, 78.000,00$. Ele gostaria de saber quanto pagou por cada metro quadrado. Para isso ele empregou seus conhecimentos da Geometria Analítica, efetuando algumas medidas e desenhando o terreno quadrangular *ABCD* em um plano cartesiano, de acordo com a Figura 7.10. Calcule a área desse terreno, em seguida, diga quanto custou cada metro quadrado.

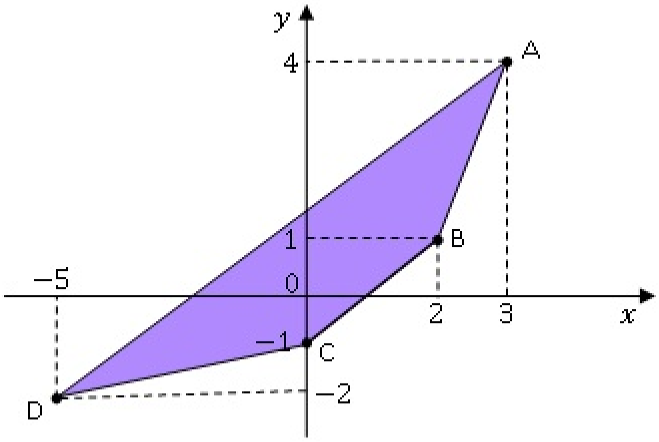


Figura 7.10: Área do terreno quadrangular.

7.6 Respostas das Atividades Propostas

Atividades com o GeoGebra:

1. (u.a. = unidade de área)
   - Figura 1: 9 u.a.;
   - Figura 2: $7,5$ u.a.;
   - Figura 3: 15 u.a.;
   - Figura 4: 12 u.a.;
   - Figura 5: 30 u.a.
2. Resposta pessoal. (item *i)*: o motivo da diferença é porque nem todos os vértices do polígono pertencem à malha quadriculada).

Atividades com papel milimetrado:

1. $59,5$ u.a.
2. $32,5\ m^2$.
3. (a) $2\ cm^2$.
4. $54.872\ km^2$.

Atividades complementares:

1. R$ $84.000,00$.
2. Aproximadamente R$ $1.662,77$.
3. (b) $8\ cm^2$.
4. (a) $196,5\ m^2$ e (b) $160,7\ m^2$.
5. $6\ cm^2$.
6. $13\ m^2$ e cada metro quadrado custou R$ $6.000,00$.

Capítulo 8

Considerações Finais

Aprimorar a prática pedagógica é um dos fatores fundamentais para melhorar o processo de ensino-aprendizagem em nosso país. Pensando nisso, buscamos com este trabalho contribuir para esse desafio, desenvolvendo uma metodologia, em que usamos além das aulas expositivas, o uso de recursos computacionais.

Primeiramente, mostramos um pouco da história da Geometria, como ela se desenvolveu desde os tempos antigos até os dias atuais. Em seguida, apresentamos um conjunto de definições e proposições para que os alunos tenham noção do que aprenderam no ensino fundamental, servindo assim de uma revisão para que depois fosse apresentada uma nova abordagem do tema *Área de Triângulos*, em que alguns dos resultados já são conhecidos e outros acreditamos que sejam novidades, principalmente os que envolvem relações entre triângulos e suas principais circunferências. Aproveitando o estudo sobre áreas, trabalhamos como calcular a área de polígonos regulares, convexos e não-convexos, completando assim um estudo sobre áreas, finalizando com alguns exercícios de fixação do conteúdo contextualizados de forma que os alunos consigam se preparar para aplicar esses conhecimentos no cotidiano, pois a Geometria está presente em toda parte. Destacamos ainda, o fato de esses conteúdos serem abordados em vestibulares, diversos processos seletivos e concursos públicos.

Devido ao impacto tecnológico, a aprendizagem dos conteúdos matemáticos exigirá do ensino de Matemática, um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante avanço.

É importante ressaltar que o uso do computador como recurso de ensino favorece uma experiência concreta, auxiliando na aprendizagem e trazendo benefícios como, por exemplo, o de analisar propriedades matemáticas buscando generalizações, porém não devemos colocar o uso do computador como uma simples ferramenta que facilita e automatiza cálculos, usando-o apenas para verificar resultados, pois como qualquer outro instrumento possui suas limitações.

Na educação sempre que desenvolvemos alguma pesquisa, os frutos desse trabalho só serão obtidos a médio e longo prazo, nosso objetivo foi de reunir aplicações e curiosidades sobre o tema, mostrando como pode ser interessante o estudo da Geometria. Pretendemos também, com este trabalho, contribuir como fonte de pesquisas para as novas gerações.

Para finalizar, este trabalho pode ser utilizado por professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, fazendo as devidas modificações e ajustes de acordo com suas necessidades e público alvo. A fim de atingir integralmente ou em parte o objetivo principal do programa PROFMAT, que é melhorar a qualidade de ensino público.

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, João Lucas Marques; *Geometria Euclidiana Plana*, 11^a ed. Rio de Janeiro: SBM, (2012), 273p.

[2] BICUDO, Irineu (Tradutor e Organizador). *Os elementos*. São Paulo: Editora UNESP, (2009).

[3] BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*, tradução de Elza F. Gomide, São Paulo: Edgar Blucher, (1974).

[4] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática / Secretaria de educação Fundamental*. Brasília: MEC, (2001), 148p.

[5] DE MORAIS FILHO, D. C.; *Um Convite à Matemática: Fundamentos Lógicos, com Técnicas de Demonstração,Notas Históricas e Curiosidades*, 3^a ed., Totalmente voltada às técnicas de demonstração,Campina Grande - PB: Fabrica de Ensino, (2010), 194p.

[6] DE MORAIS FILHO, D. C.; *Manual de Redação Matemática, com um dicionário etimológico-explicativo de palavras usadas na Matemática e um capítulo especial sobre como escrever uma dissertação*, 2^a ed. Campina Grande - PB: Fabrica de Ensino, (2009), 151p.

[7] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: UNICAMP, (2004).

[8] GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; et al. *A Conquista da Matemática*. Ed. Renovada. São Paulo: FTD, Coleção a Conquista da Matemática, 8^o Ano, (2009), 384p.

[9] HELLMEISTER, Ana Catarina; et al. *Explorando o Ensino da Matemática: Artigos*, vol. 1, Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, (2004), 240p.

[10] HOLANDA, Adriano J. Meireles. *Os mistérios da mais bela forma geométrica: o triângulo*. Mossoró (RN), UFERSA, (2013), 88p.

[11] LARA, Isabel Cristina Machado de. *Jogando com a matemática*. 1^a Ed. São Paulo: Rêspel, (2003), 176p.

[12] LIMA, Elon Lages. *Medida e Forma em Geometria*. 1^{a} Ed. Rio de Janeiro: SBM, (1997), 91p.

[13] LIMA, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. 5^{a} Ed. Rio de Janeiro: SBM, (2011), 206p.

[14] LIMA, Elon Lages; et al. *Temas e Problemas Elementares*. 2^{a} Ed. Rio de Janeiro: SBM, (2005), 246p.

[15] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana*. 1^{a} Ed. Rio de Janeiro: SBM, (2012), 432p.

[16] ROQUE, Tatiana; et al. *Tópicos de História da Matemática*, Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, (2012), 285p.

[17] SOUZA, Joamir Roberto de. *Um Novo Olhar Matemática*. Vol. 2 e 3, 1^{a} Ed. São Paulo: FTD, (2010), 320p.

[18] VICTOR, Carlos Alberto da Silva. *Área de um Polígono*. Rio de Janeiro: IMPA, Revista Professor de Matemática (RPM), n^{o} 35. 1^{o} Quadrimestre de 1998.

[19] ANDRADE, Lenimar Nunes de. (2000) *Breve Introdução ao Latex.*
Disponível em: <http://www.mat.ufpb.br/lenimar/textos/index.html >.
Página consultada em 10 de Janeiro de 2014.

[20] Geometria Dinâmica com Aplicativo do GeoGebra
Disponível em: <http://dmentrard.free.fr/GEOGEBRA/Maths/accueilmath.htm >.
Página consultada em 19 de Março de 2014.

[21] Contando Áreas (O Teorema de Pick).
Disponível em: <http://www.rpm.org.br/conteudo/78/teorema-pick.pdf>
Página consultada em 19 de Dezembro de 2013.

[22] Notas de Geometria Analítica (Aula 5).
Disponível em: <www.professores.uff.br/katia-frensel/>
Página consultada em 17 de Dezembro de 2013.

[23] Somas de Riemann e Integração Numérica (pdf).
Disponível em: <wp.ufpel.br.edu.br>
Página consultada em 19 de Março de 2014.

[24] Só Matemática. (Portal Matemático).
Disponível em:< http://www.somatematica.com.br >
Página consultada em 10 de Novembro de 2013.

Apêndice A

GeoGebra

Para a Atividade 1 o professor deve construir um aplicativo no GeoGebra para auxiliar na sua realização. Este apêndice traz os passos para sua construção, chamaremos o aplicativo de *Área.ggb*, construído no GeoGebra 4.2. Apresentamos também o *software* GeoGebra, suas principais ferramentas e um exemplo de construção de figuras.

A.1 Aplicativo da Atividade 1

1. Abra o GeoGebra e escolha a disposição **Álgebra e Gráficos**;
2. Na janela de visualização, escolha **esconder os eixos** e **exibir malha**;
3. No **Campo de Entrada**, digite as coordenadas dos vértices dos polígonos: $A = (1,8)$, $B = (4,8)$, $C = (4,5)$ $D = (1,5)$, $E = (6,5)$, $F = (10,6)$, $G = (11,10)$, $H = (13,6)$, $I = (18,6)$, $J = (20,9)$, $K = (15,9)$, $L = (1,0)$, $M = (7,0)$, $N = (5,3)$, $O = (3,3)$, $P = (13,-1)$, $Q = (19,0)$, $R = (16,4)$, $S = (13,3)$, $T = (10,4)$ e $U = (10,1)$;
4. Usando a ferramenta **Polígono**, ligue os pontos de cada polígono nas sequências seguintes: A-B-C-D-A, E-F-G-E, H-I-J-K-H, L-M-N-O-L e P-Q-R-S-T-U-P;
5. Usando a ferramenta **Novo Ponto**, marque os pontos que estão sobre os lados do polígono, mas não são vértices;
6. Ainda usando a ferramenta **Novo Ponto**, escolha a cor vermelha na janela de visualização e marque todos os pontos internos de cada polígono;
7. Na janela de **Álgebra** procure as figuras Triângulo, Quadrilátero e Hexágono, selecione com o botão direito do **mouse** e escolha a opção **Exibir objeto**;
8. Na barra de ferramentas escolha **Inserir Texto** e numere as 5 figuras;
9. Salve o arquivo com o nome **Área.ggb**.

A.2 O *software* GeoGebra

O GeoGebra é um *software* livre de matemática dinâmica idealizado para professores e alunos de todos os níveis educacionais. Disponibilizado gratuitamente na internet, o GeoGebra reúne recursos de geometria dinâmica, álgebra e cálculo em um mesmo programa, e com o mesmo grau de importância.

Do ponto de vista da *Geometria*, ícones em uma barra de ferramentas localizada na parte superior do aplicativo permitem a construção dinâmica de diversos objetivos geométricos por meio da manipulação do mouse do computador.

Do ponto de vista da *Álgebra*, um campo de entrada localizado na parte inferior do aplicativo permite a digitação de equações e coordenadas para a construção desses mesmos objetos geométricos. No GeoGebra, uma expressão na janela de álgebra à esquerda do aplicativo corresponde a um objeto na janela de visualização geométrica à direita do aplicativo, e vice-versa.

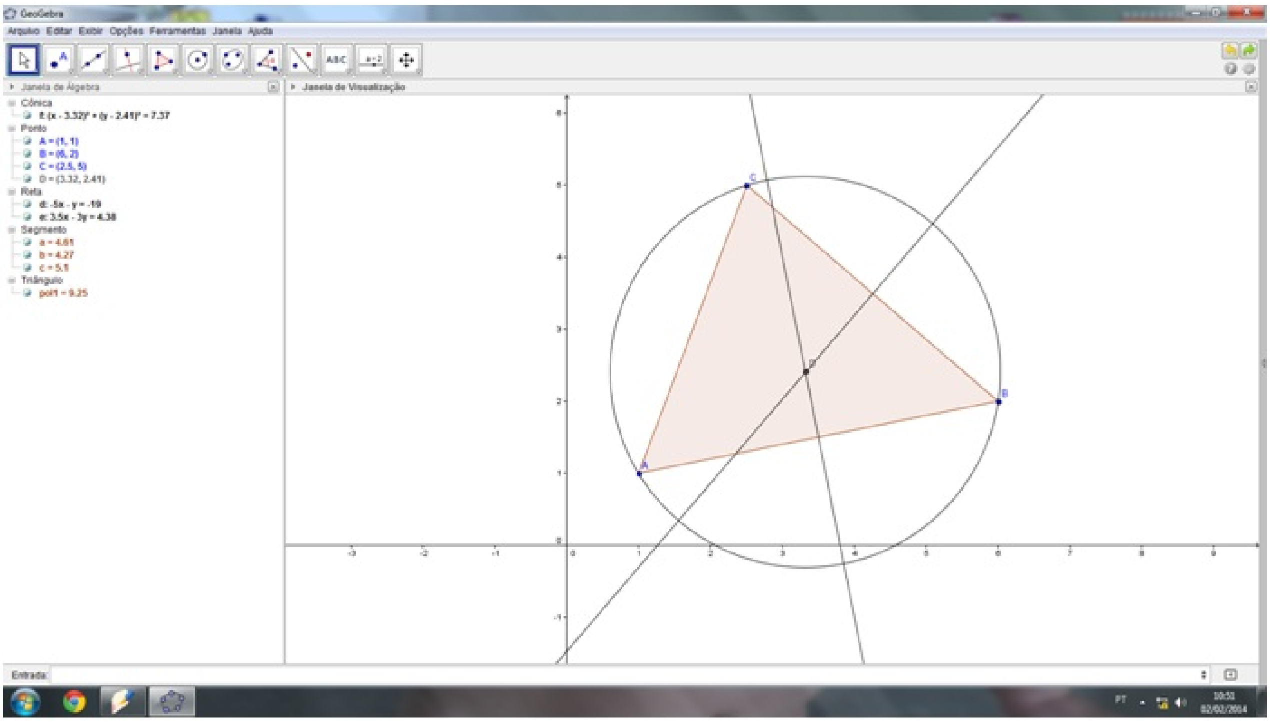


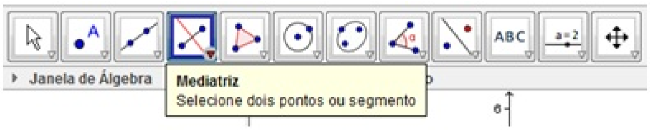
Figura A.1: Aplicativo GeoGebra

Por exemplo, na Figura A.1 vemos um triângulo e sua circunferência circunscrita. Para fazer essa construção via barra de ferramentas geométricas, na parte superior do aplicativo, basta realizar a seguinte sequência de ações:

1. Habilitar a opção **Polígono**:

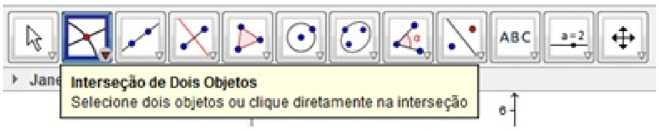
   Clicar em três locais distintos na janela de visualização geométrica para definir os vértices do triângulo; clicar novamente no primeiro vértice para fechar o ciclo de vértices do triângulo.

2. Habilitar a opção **Mediatriz**:



   Selecionar um lado ou dois vértces para construir uma primeira mediatriz; selecionar outro lado ou outros dois vértices para construir uma segunda mediatriz.

3. Habilitar a opção **Interseção de Dois Objetos**:

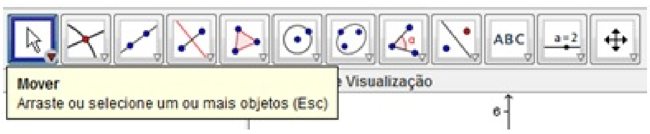


   Selecionar as mediatrizes construídas para construir o ponto onde elas se cruzam.

4. Habilitar a opção **Círculo definido pelo centro e um de seus pontos**:

   Selecionar o encontro das mediatrizes e um vértice do triângulo para construir a circunferência circunscrita.

5. Habilitar a opção **Mover**:



   Usar o *mouse* para movimentar qualquer um dos vértices do triângulo; você irá vivenciar o poder da Geometria Dinâmica

Para fazer essa mesma construção via campo de entradas algébricas, na parte inferior do aplicativo, basta digitar no **Campo de Entrada** a seguinte sequência de comandos:

1. A=(1,1)
2. A=(6,2)
3. A=(2.5,5)
4. Polígono[A,B,C]
5. Mediatriz[A,B]
6. Mediatriz[B,C]
7. Intersação[d,e]
8. Círculo[D,A]

Além das construções via campo de entrada ou barra de ferramentas, o GeoGebra permite a manipulação e formatação dos objetos construídos. A seguir listamos algumas dicas que podem ser úteis durante uma construção geométrica no GeoGebra. Com esse *software* você pode:

- Usar os ícones **Desfazer** e **Refazer** no lado direito da barra de ferramentas para desfazer ou refazer a(s) última(s) construção(ões);
- Esconder objetos clicando sobre eles com o botão direito do mouse e escolhendo **Exibir objeto** para desativar ou reativar a exibição;
- Alterar a aparência dos objetos (nome, cores, espessura, etc.), clicando sobre eles com o botão direito do *mouse* e escolhendo **Propriedades** para habilitar a caixa de diálogo específica para esse fim;
- Arrastar a janela de visualização com o mouse habilitando o ícone **Deslocar Eixos** na barra de ferramentas;
- Escolher letras gregas e comandos algébricos diversos ao lado do campo de entrada;
- Ativar ou desativar a exibição de muitos objetos e elementos gráficos na opção de menu **Exibir**;
- Alterar muitas coisas na opção de menu **Opções**.

Para saber mais sobre o *GeoGebra*, basta acessar o endereço eletrônico <www.geogebra.org>, onde encontram-se o *link* para *download* da versão 4.4 do *software*, tutorial, comunidade, fórum de perguntas e sugestões.

Apêndice B

Outra demonstração da Fórmula de Pick

Neste Apêndice apresentaremos uma outra demonstração da *Fórmula de Pick*, baseada no Princípio de Indução em um contexto um pouco diferente do usual.

Consideremos um polígono P no plano cartesiano. Se os vértices de P têm todos coordenadas inteiras, então a *Fórmula de Pick* para sua área é

$$A = i + \frac{f}{2} - 1, \qquad (\bigstar)$$

na qual i e f representam o número de pontos com coordenadas inteiras no interior e nas arestas do polígono, respectivamente.

Primeiramente, mostramos que a fórmula $(\bigstar)$ tem um caráter aditivo, isto é, se o polígono P for a união de dois outros polígonos, P_1 e P_2 que se intersectam em uma aresta comum, então a fórmula para P é também válida para P_1 e P_2. A ideia central, então, é dividir o polígono dado em dois outros com um número menor de lados. Prosseguindo desta forma, podemos decompor o polígono em triângulos para os quais o teorema pode ser demonstrado diretamente (esta é a estratégia escolhida, por exemplo, em Lima [13]). De fato, esta decomposição não é perseguida até o final aqui. Em vez disso, usamos o Princípio de Indução. Mostramos que o resultado vale para triângulos (o que dá o passo inicial para o processo de indução) e então usamos a aditividade mencionada para completar o argumento de indução.

B.1 Linhas poligonais e polígonos no plano

Dados dois pontos A e B no plano, denotamos por $\overline{AB}$ o segmento de reta que tem A e B como extremos. Chamamos de interior de $\overline{AB}$ o conjunto dos pontos de $\overline{AB}$ que são distintos de A e de B. Dado um número finito de pontos distintos do plano, V_1, $V_2, \ldots,$ V_n, chamamos de *linha poligonal* com extremos em V_1 e V_n a união dos segmentos (chamados de arestas) $\overline{V_1V_2}$, $\overline{V_2V_3}, \ldots, \overline{V_{n-1}V_n}$. Supondo que três vértices consecutivos nunca são colineares. Chamamos de *linha poligonal fechada*, ou simplesmente *polígono*, com vértices V_1, $V_2, \ldots,$ V_n, a união dos segmentos $\overline{V_1V_2}$, $\overline{V_2V_3}, \ldots, \overline{V_{n-1}V_n}$, $\overline{V_nV_1}$. Também supomos que três vértices consecutivos de um polígono não são colineares, entendendo agora que $\{V_{n-1},\ V_n,\ V_1\}$ e $\{V_n,\ V_1,\ V_2\}$ também são conjuntos de vértices consecutivos.

Diremos que o polígono é *simples* se a interseção de um par de arestas não consecutivas é sempre vazia (um par de arestas consecutivas é determinado por cada conjunto de três vértices consecutivos). Um polígono simples P divide o plano em duas regiões: o interior I, e o exterior E, de P. Essas regiões são caracterizadas pelas seguintes propriedades. Dois pontos do plano fora de P são extremos de alguma linha poligonal que não intersecta P se e somente se, ou os dois pertencem a I, ou os dois pertencem a E. Além disso, I é limitada e E é ilimitada e P é fronteira comum de ambas (P ser fronteira de I e de E significa que qualquer pequeno disco centrado em qualquer ponto de P contém pontos de I e de E).

Lema B.1 *Seja P um polígono com interior I. Então qualquer ponto A de P pode ser ligado a qualquer ponto B de I por uma linha poligonal cujos pontos, exceto A, estão todos contidos em I.*

B.2 Polígonos com vértices de coordenadas inteiras

Como é usual em Geometria Analítica, introduzindo coordenadas cartesians ortogonais, podemos identificar os pontos do plano com $\mathbb{R}^2$. Os pontos com coordenadas inteiras estão, dessa forma, identificados com $\mathbb{Z}^2$.

B.2.1 Propriedade aditiva da fórmula

Sejam P e Q polígonos simples no plano cuja interseção é igual a uma aresta comum. Fazendo permutações dos vértices de P e de Q, podemos sem perda de generalidade supor que os vértices de P são $V_1,\ V_2,\dots,V_n$ e os de Q são $V_1,\ V_2,\ U_1,\ U_2,\ U_3,\dots,U_n$. Denotemos por $P\sharp Q$ o polígono de vértices

$$V_2,\ V_3,\ \dots,\ V_n,\ V_1,\ U_m,\ U_{m-1},\dots,U_3,\ U_2,\ U_1.$$

Suponhamos que todos os vértices de P, assim como os de Q, pertencem a $\mathbb{Z}^2$. Nesta subseção, nosso objetivo é provar que, a fórmula ($\bigstar$) vale para P e Q, então ela vale também para $P\sharp Q$. Denotemos por $i_1,\ i_2$ e i o número de pontos de $\mathbb{Z}^2$ contidos no interior de P, Q e $P\sharp Q$, respectivamente. E por $f_1,\ f_2$ e f o número de pontos de $\mathbb{Z}^2$ contidos nas poligonais fechadas de P, Q e $P\sharp Q$, respectivamente.

Denotemos por Q' o complementar da aresta $\overline{V_1V_2}$ em Q. Como Q' é a união crescente de linhas poligonais com extremos pertencentes ao complementar de P, então ou Q' está inteiramente contido no interior de P ou está inteiramente contido no exterior de P, como se observa na Figura B.1.

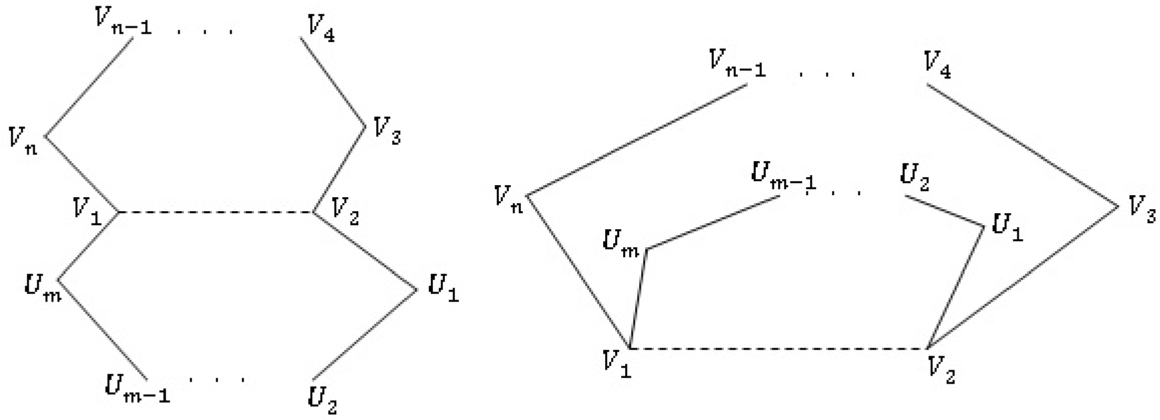


Figura B.1: Q' pode estar contido no exterior ou no interior de P.

Consideremos primeiramente o caso em que Q' está contido no exterior de P. Neste caso, os interiores I_P e I_Q de P e de Q não se intersectam e o interior de $P\sharp Q$ é igual à união $I_P \bigcup I_a \bigcup I_Q$, em que I_a denota o interior da aresta $\overline{V_1V_2}$. Estas afirmações, intuitivamente óbvias, podem ser demonstradas detalhadamente usando as propriedades do interior e do exterior de um polígono. Limitamo-nos entretanto a mencionar que, pelo Lema B.1, um ponto qualquer $A \in I_P$ pode ser ligado a um ponto $C \in I_a$ (exceto pelo ponto C), e um ponto qualquer $B \in I_Q$ pode ser ligado a C por uma linha poligonal contida em I_Q (exceto pelo ponto C). A união das duas poligonais é, portanto, uma linha poligonal que não intersecta $P\sharp Q$ ligando A e B.

Temos então que a área do polígono $P\sharp Q$ é igual à área do polígono P somada à área do polígono Q.

Queremos mostrar portanto que

$$i + \frac{f}{2} - 1 = \left(i_1 + \frac{f_1}{2} - 1\right) + \left(i_2 + \frac{f_2}{2} - 1\right). \qquad (\spadesuit)$$

Como o interior de $P\sharp Q$ é igual à união disjunta de I_P, I_a e I_Q, temos que $i = i_1 + i_2 + f_3$, em que f_3 denota o número de pontos de $\mathbb{Z}^2$ contidos em I_a. A linha poligonal $P\sharp Q$ é igual à união de P com Q subtraída de I_a. Como $P \bigcap Q = \overline{V_1V_2}$, o número de pontos de $\mathbb{Z}^2$ contidos em $P \bigcap Q$ é igual a $f_3 + 2$ (lembrando que, por hipótese, V_1 e V_2 pertencem a $\mathbb{Z}^2$). Assim, $f = f_1 + f_2 - (f_3 + 2) - f_3 = f_1 + f_3 - 2(f_3 + 1)$. Daí vem que

$$i + \frac{f}{2} - 1 = (i_1 + i_2 + f_3) + \frac{f_1 + f_2 - 2(f_3 + 1)}{2} - 1,$$

o que demonstra $(\spadesuit)$.

Consideremos agora o segundo caso em que Q' está contido no interior de P. Queremos então provar que

$$i + \frac{f}{2} - 1 = \left(i_1 + \frac{f_1}{2} - 1\right) - \left(i_2 + \frac{f_2}{2} - 1\right). \qquad (\maltese)$$

O interior de P é igual à união disjunta do interior de $P\sharp Q$ com o interior de Q com o complementar de $\overline{V_1V_2}$ em Q. Com o mesmo f_3 que usamos no primeiro caso, obtemos $i_1 = i + i_2 + f_2 - (f_3 + 2)$, logo

$$i = i_1 - i_2 - f_2 + (f_3 + 2)\,.$$

Tal como no caso anterior, vale também agora que $f = f_1 + f_3 - 2\,(f_3 + 1)$. Daí vem que

$$i + \frac{f}{2} - 1 = (i_1 - i_2 - f_2 + f_3 + 2) + \frac{f_1 + f_2 - 2\,(f_3 + 1)}{2} - 1,$$

o que demonstra (✠).

B.2.2 O caso de triângulos

Seja T um triângulo retângulo com vértices em $\mathbb{Z}^2$ e catetos paralelos aos eixos coordenados e seja R o retângulo que tem os catetos de T como dois de seus lados. Sejam m e n os comprimentos dos catetos de T, i o número de pontos de $\mathbb{Z}^2$ no interior de T e f_h o número de pontos de $\mathbb{Z}^2$ no interior da hipotenusa de T. O número de pontos de $\mathbb{Z}^2$ no interior de R é $(m-1)\,(n-1)$. Daí vem que

$$i = \frac{(m-1)\,(n-1) - f_h}{2}.$$

O número f de pontos de $\mathbb{Z}^2$ em T é igual a $m + n + f_h + 1$. Assim

$$i + \frac{f}{2} - 1 = \frac{(m-1)\,(n-1) - f_h}{2} + \frac{m + n + f_h + 1}{2} - 1 = \frac{mn}{2},$$

e segue que a fórmula (★) vale para triângulos retângulos com catetos paralelos aos eixos coordenados.

Todo retângulo R pode ser escrito como $R = T_1\sharp T_2$, em que T_1 e T_2 são triângulos retângulos. Segue então, do que provamos na Subseção B.2.1, que a fórmula (★) vale para todo retângulo com vértices em $\mathbb{Z}^2$ e lados paralelos aos eixos coordenados.

Convidamos agora o leitor a reler a seção anterior para se convercer de que o mesmo argumento que lá usamos mostra também que, se a fórmula (★) vale para $P_1\sharp P_2$ e para P_1, então vale também para P_2.

Seja agora T um triângulo qualquer com vértices em $\mathbb{Z}^2$. Podemos encontrar triângulos retângulos T_1, T_2 e T_3 com vértices em $\mathbb{Z}^2$ e catetos paralelos aos eixos coordenados tais que $R = T\sharp T_1\sharp T_2\sharp T_3$ é um retângulo com lados paralelos aos eixos coordenados (em alguns casos especiais, menos de três triângulos serão necessários, mas o argumento será igual - ver Figura B.2). Como a fómula (★) vale para R, T_1, T_2 e T_3, ela vale também para T.

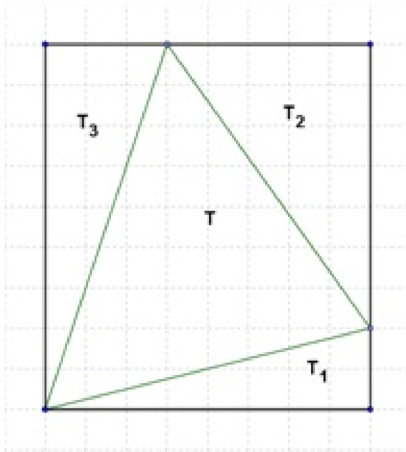


Figura B.2: Teorema de Pick para triângulos.

B.2.3 O caso geral

A demonstração de (★) é feita por indução sobre o número de vértices de P. Na subseção B.2.2, vimos que a fórmula é válida se P tiver três vértices. Suponhamos que a fórmula já foi provada se o número de vértices for menor que n. Provemos então que ela é válida para a linha poligonal P de vértices V_1, $V_2, \ldots, V_n$. Pelo Lema B.2, P possui um par de vértices que são extremos de um segmento cujo interior não intersecta P. Sem perda de generalidade, podemos supor que um desses vértices é V_1. Seja V_p o outro vértice. Seja P_1 o polígono de vértice V_1, $V_2, \ldots, V_p$ e seja P_2 o polígono de vértices V_1, V_p, $V_{p+1}, \ldots, V_n$. A fórmula (★) vale para P_1 e para P_2, pois ambas têm menos de n vértices. Pelo resultado da Subseção B.2.1, ela vale também para $P = P_1 \sharp P_2$.

Lema B.2 *Num polígono simples P com mais de três vértices, existe um par de vértices que são extremos de um segmento cujo interior não intersecta o polígono.*

As demonstrações dos dois Lemas citados neste Apêndice podem ser encontradas em Pereira [21].