UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

LOGARITMOS E APLICAÇÕES

Josiel Pereira da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva

Campina Grande - PB
Abril/2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG.

S5861 Silva, Josiel Pereira da.

Logaritmos e Aplicações / Josiel Pereira da Silva - Campina Grande, 2013.

46 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2013.

"Orientação: Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva".

Referências.

1. Matemática - Ensino. 2. Aplicação. 3. Logaritmo.
I. Silva, Diogo Diniz Pereira da Silva e. II. Título.

CDU 51(07)(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

LOGARITMOS E APLICAÇÕES

por

Josiel Pereira da Silva †

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Bolsista CAPES

LOGARITMOS E APLICAÇÕES

por

Josiel Pereira da Silva

Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado por:

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo - UEPB

Aparecido Jesuíno de Souza

Prof. Dr. Aparecido Jesuíno de Souza - UFCG

Diogo Diniz P.S. Silva.

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Abril/2013

Dedicatória

Dedico à minha esposa Luciléia, meu grande amor, aos meus pais Daniel Pereira e Maria do Socorro, à minha irmã Daniele, ao meu irmão Josenildo, pessoas importantes que tanto amo.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por ter tido a oportunidade de conhecer um pouco mais a beleza da matemática e também poder melhorar os conhecimentos adquiridos nos tempos de graduação.

Agradeço aos docentes e discentes da turma pioneira do Mestrado Profissional da UFCG e de forma especial, à Emanuel Adriano, Salomão, Diogo Diniz, Aparecido e Aldo Trajano pelas sugestões que contribuiram de forma significativa para a conclusão do presente trabalho e à Andrezza por ter atendido de forma competente as solicitações feitas durante o Curso.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional, à CAPES pela concessão da bolsa e à UFCG por ser uma das Universidades que aceitaram oferecer este Curso.

Resumo

O ensino de Matemática está passando por diversas transformações e isto se deve ao fato da sociedade estar exigindo do homem, conhecimentos matemáticos suficientes para levá-lo a desempenhar atividades, compreender fenômenos que fazem parte do nosso dia-a-dia. Estudar e entender os logaritmos tornou-se uma tarefa necessária para a compreensão do mundo em que vivemos. A partir desta ótica, elaboramos uma sequência didática que deve ser aplicada em turmas do 1º ano do Ensino Médio, seguindo as orientações estabelecidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais. A mesma é composta por quatro atividades que abordam o conceito, as propriedades fundamentais e algumas aplicações, que deve ser aplicada ao longo de 16 aulas de 50 minutos cada. Esperamos levar os discentes não só a adquirir o gosto pela Matemática, mas também compreender a importância dos logaritmos no desenvolvimento da ciência.

Palavras Chaves: Ensino. Aplicação. Logaritmo.

Abstract

The teaching of mathematics is undergoing several transformations and this due to the fact that the society is demanding of men man, mathematical knowledge enough to take him to play activities, understand phenomenon that are part of our daily lives. Studying and understanding the logarithms have become a necessary task to understand the world in which we live. From this viewpoint, we developed a didactic sequence that must be applied to classes in the first grade of high school, following the established orientation in *Parâmetros Curriculares Nacionais*. The same consists of four activities addressed to the concept, fundamental properties and some applications, which must be applied along 16 classes of 50 minutes each one. We expect to lead the students not only to acquire a taste for mathematics, but also understand the importance of logarithms in the development of science.

Keywords: Teaching. Application. Logarithm.

Lista de Tabelas

Lista de Abreviaturas e Siglas

SBM . . . . Sociedade Brasileira de Matemática
UAMAT . . . . Unidade Acadêmica de Matemática

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$ .... Conjunto dos números naturais
$\mathbb{N}^*$ .... Conjunto dos números naturais diferentes de zero
$\mathbb{Z}$ .... Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Z}^*$ .... Conjunto dos números inteiros diferentes de zero
$\mathbb{Q}$ .... Conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$ .... Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}_+$ .... Conjunto dos números reais não negativos
$\mathbb{R}_+^*$ .... Conjunto dos números reais positivos
$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ .... Conjunto dos números irracionais
$\mathbb{C}$ .... Conjunto dos números complexos

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Muitos fenômenos que conhecemos hoje, podem ser representados por modelos matemáticos envolvendo logaritmos. Daí, a grande importância que esse tema tem para o exercício da cidadania para compreeder o mundo em que vivemos. Por isso, "um Ensino Médio concebido para a universalização da Educação Básica precisa desenvolver o saber matemático, científico e tecnológico como condição de cidadania e não como prerrogativas de especialistas"[3, p.7].

Esse trabalho tem como objetivo propor atividades diferenciadas que possam proporcionar a oportunidade ao aluno de compreender de forma eficaz e ativa, o conceito, as propriedades e as aplicações dos logaritmos. Para isso, propomos uma sequência didática para o ensino de logaritmo com atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula. A ideia de elaborar esse trabalho surgiu devido à anos lecionando em turmas de Ensino Médio da rede Pública de Ensino do Estado da Paraíba.

Durante esse período, após trabalhar com várias coleções de livros didáticos que são utilizados em diversas escolas públicas brasileiras, percebemos que o tema logaritmos é tratado de tal forma que leva os alunos a aprender de forma mecânica.

Após ingressar no Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional (PROFMAT), em 2011, resolvi elaborar uma sequência didática de modo a produzir um material didático mais atraente, que pudesse levar o aluno a compreender o conceito de Logaritmo, manipulá-lo adequadamente utilizando suas propriedades básicas e conhecer algumas aplicações. Essa sequência didática, construída sobre os pilares dos PCNs constitui o produto final do nosso curso de mestrado.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira, no Capítulo 2, abordamos o ensino de matemática e os logaritmos, dando ênfase ao ensino de matemática, a resolução de problemas e a história dos logaritmos, destacando os principais matemáticos que contribuiram para a construção desse conhecimento e, por fim, a definição de logaritmo e suas propriedades.

No Capítulo 3 temos uma sequência didática. Ela é constituída por quatro atividades que trabalham o conceito, as propriedades e o uso dos logaritmos na resolução de problemas reais. São atividades que tornam o estudo do logaritmo uma ação interessante e prazerosa.

Na primeira atividade, apresentamos uma tabela que contém o logaritmo na base dez de alguns números naturais. Essa atividade objetiva levar o aluno a perceber que esta tabela permite transformar multiplicação em soma. Além disso, busca levar o aluno a compreender como se deu o surgimento desse conhecimento e quais foram as propriedades importantes percebidas pelos matemáticos que foram personagens importantes no desenvolvimento dos conhecimentos envolvendo os logaritmos.

Na segunda atividade nosso objetivo é levar o discente a compreender a fórmula de mudança de base de logaritmos. Além disso, procuramos proporcionar ao educando a oportunidade de perceber que as propriedades detectadas na Atividade 1 também podem ser observadas na Atividade 2. Um ponto importante que torna a Atividade 2, diferenciada daquelas que encontramos na maioria dos livros didáticos brasileiros, é o fato que o aluno pode perceber que os logaritmos de um mesmo número, escritos em bases diferentes, se relacionam por meio de uma constante. Esse fato é conhecido como forma de mudança de base de logaritmos.

Na terceira atividade exibimos uma aplicação dos logaritmos. A sua resolução leva o aluno a responder o seguinte questionamento: como podemos garantir que um fenômeno natural pode ser descrito através de um modelo exponencial?

Na quarta atividade, temos uma aplicação dos logaritmos. Nessa atividade, abordamos a matemática financeira, uma área bastante interessante,mas que muitas pessoas não compreendem de forma efetiva. Essa atividade torna-se diferente das que geralmente são propostas na maioria dos livros didáticos brasileiros devido ao fato de ser um problema real que faz parte do cotidiano de todo cidadão.

No Capítulo 4 temos alguns comentários a respeito das atividades do Capítulo 3. Esses comentários são importantes pois, orientam os docentes que pretendem aplicar essa sequência didática. Por fim, apresentamos no Capítulo 5 as consideraçoes finais.

Capítulo 2

O Ensino de Matemática e os Logaritmos

2.1 O Ensino de Matemática e a Resolução de Problemas

É inegável que a matemática faz parte do cotidiano de todo cidadão. Ela está presente em praticamente todas as atividades que o homem desempenha no seu dia-a-dia. É por esse fato que ela é considerada um campo do conhecimento muito importante, onde o homem necessita dominar as técnicas a ponto de utilizá-las na produção de conhecimentos.

Segundo [1, p. 27], "[...] a matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e autonomia [...]".

Ensinar matemática de modo que o aluno aprenda de forma efetiva é um desafio com o qual muitos educadores convivem diariamente. Trazer para sala de aula metodologias que possam atrair a atenção do aluno, levá-lo a compreender os conceitos matemáticos e assim tornar a matemática para este um conhecimento importante é o objetivo de todos educadores que tem compromisso com a melhoria da qualidade do ensino de matemática.

Diante da dinâmica existente devido ao avanço tecnológico, aprender matemática ficou sendo praticamente uma obrigação de todos. Devido a isso, a escola também ficou com o dever de oferecer um ensino de qualidade onde todos consigam aprender. Nessa direção, Educadores Matemáticos apontam a resolução de problemas como uma ótima ferramenta que pode ser usada em aulas de matemática a fim de tornar a matemática mais atrativa para o aluno. Como é dito em [1, p. 40], "[...] a resolução de problemas, na perspectivas indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance [...]".

A resolução de problemas possibilita ao professor proporcionar ao aluno a construção do próprio conhecimento. Para isso ele deve propor atividades compostas por problemas reais que leve o aluno a compreender conceitos, propriedades e aplicações.

Nem todo problema é adequado para ser aplicado com intuito de promover uma aprendizagem significativa. Segundo [4, pp. 50-51], as características de um bom problema são:

ser desafiador para o aluno; ser real para o aluno; ser do interesse do aluno; ser o elemento desconhecido de um problema, realmente desconhecido; não consistir na aplicação evidente e direta de uma ou mais fórmulas ou mais operações aritméticas e ter um nível adequado de dificuldade.

Nesse sentido, percebe-se a importância de propor problemas interessantes que sejam passíveis de compreensão pelos alunos pois, caso contrário, pode levá-los a desistência de solucioná-los.

2.2 O Logaritmo no Ensino Médio

O estudo dos logaritmos configura-se como um dos principais temas abordados na 1ª série do ensino médio. Isso se deve ao fato de que muitos fenômenos naturais podem ser modelados usando a função logarítmica. O que ocorre é que muitos discentes concluem o Ensino Médio sem conseguir perceber a importância que esse tema tem na modelagem de fenômenos. As funções exponenciais e logarítmicas são importantes nesse estudo, pois são usadas para descrever muitos fenômenos, sendo aplicado na matemática financeira, crescimento populacional, etc.

Espera-se que o estudante, ao final do ensino médio, saiba usar a matemática para resolver problemas e para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento. Para que isso se torne possível, deve reconhecer a linguagem algébrica relacionando grandezas, modelar situações, associar diferentes funções aos seus gráficos, identificar regularidades e associar o conceito de função à exemplos reais.

O logaritmo sempre ocupou uma posição de destaque no currículo escolar brasileiro, uma prova disso, é que desde a criação desse currículo até os dias atuais, o mesmo faz parte dos conteúdos que os jovens brasileiros devem aprender. Isso se deve segundo [10, p. 15] "a sua enorme relevância nas aplicações, tanto na vida diária como nas outras ciências e na própria matemática".

Estamos numa fase de transição no ensino de logaritmos. Os exercícios manipulativos estão sendo substituídos por aplicações práticas. A questão é que essa mudança ocorre lentamente. Alguns livros didáticos recentes já começaram trazer alguns problemas aplicados envolvendo logaritmos, através de atividades com o uso da calculadora científica, porém, abordam de maneira mais significativa os logaritmos naturais.

Ainda segundo [10, p. 464], "[...] no ensino médio, as funções exponenciais e logarítmicas são tratadas separadamente e só de passagem é dito que uma é o inverso da outra. Os variados, atuais e importantes exemplos em que essas funções são aplicadas são escassos [...]".

Nessa direção, para que possamos ter a possibilidade de ter um ensino de qualidade, pretendemos propor algumas atividades que possam ser resolvidas pelos alunos. Algumas atividades podem ser propostas na introdução do conteúdo de logaritmos e outras podem ser propostas após o estudo da definição e das propriedades inerentes a esse tema.

2.3 Logaritmos: do surgimento aos dias atuais

O surgimento dos logaritmos se deu durante o final do século XVI devido a necessidade do homem em desenvolver técnicas para efetuar cálculos na resolução de problemas na astronomia e na navegação, pois os problemas exigiam cálculos aritméticos muito complexos para a época. Diversos matemáticos contribuiram na construção dos logaritmos que conhecemos hoje, porém, um ficou eternizado por suas publicações, John Napier (1550-1617). Foi um nobre teólogo escocês, não era matemático profissional, mas tinha a matemática como lazer. Seu interesse era por alguns aspectos da computação e trigonometria, especialmente estudos relacionados a simplificação de cálculos.

Napier elaborou uma tábua de logaritmos com o objetivo de simplificar as operações, principalmente a de produtos e quocientes.Além de Napier, o suíço Joost Biirgi (1552-1632), também contribuiu para o surgimento dos logaritmos produzindo trabalhos a respeito desse tema. Napier e Biirgi lançaram suas tábuas de logaritmos em 1614 e 1620, respectivamente. O primeiro fez seu lançamento em Edimburgo e o segundo, em Praga. Os logaritmos, sem dúvida, foi uma invenção extraordinária para a época, chegando ao conhecimento de muitos amantes da Matemática, após a publicação de Napier em 1614. Muitos matemáticos ficaram encantados com os trabalhos de Napier, dentre eles está Henry Briggs (1561-1631), o responsável pelo o aparecimento dos logaritmos decimais. Briggs publicou suas primeiras tábuas em 1617; depois, em versão bem mais ampliada, em 1624.

Durante o século XVI, as operações eram classificadas em três espécies, eram elas: 1ª espécie: adição e subtração; 2ª espécie: multiplicação e divisão e; 3ª espécie: potenciação e radiciação. Naquela época, não existiam as calculadoras existentes atualmente, então a única maneira de executar cálculos envolvendo adição e subtração, multiplicação e divisão, potenciação e radiciação era reduzir as operações de 2ª e 3ª espécies em operações de 1ª espécie. Para se ter uma ideia de como eram feito os cálculos envolvendo a multiplicação, observe o exemplo de como era resolvida a multiplicação $1535 \cdot 325$: eles usavam a seguinte fórmula:

$$x \cdot y = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

Efetuava-se o cálculo:

$$1535 \cdot 325 = \left(\frac{1535+325}{2}\right)^2 - \left(\frac{1535-325}{2}\right)^2 = \left(\frac{1860}{2}\right)^2 - \left(\frac{1210}{2}\right)^2$$

e recorria-se a tabela a seguir:

n	$\cdots$	1210	1211	1212	$\cdots$	1860
$\left(\frac{n}{2}\right)^2$	$\cdots$	366025	366630,25	367236	$\cdots$	864900

Tabela 2.1: Tabela com números naturais e os quadrados de suas metades

Logo,

$$1535 \cdot 325 = \left(\frac{1860}{2}\right)^2 - \left(\frac{1210}{2}\right)^2 = 864900 - 366025 = 498875$$

Outro método interessante desenvolvido pelos matemáticos daquela época, foi associar os termos de uma progressão geométrica (PG):

$$k^1, k^2, \cdots, k^n, \cdots$$

aos termos de uma progressão aritmética (PA):

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$$

Colocando esses valores numa tabela para um caso particular onde $k = 2$, temos:

2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	$\cdots$
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$

Tabela 2.2: Tabela com P.A e P.G

Por exemplo, para calcular $8 \cdot 16$ bastava efetuar a adição $3 + 4 = 7$ e verificar qual é o valor do termo da PG, correspondente ao termo 7 da P.A. Nesse caso, é o número 128. Logo, $8 \cdot 16 = 128$.

Já para calcular a divisão, de dois números naturais o procedimento era o inverso ao anterior. Por exemplo, para calcular a divisão $\frac{512}{128}$, bastava fazer $9 - 7 = 2$ e verificar qual é o valor do termo da P.G, correspondente ao termo da P.A cujo valor é 2, nesse caso, encontramos o número 4. Logo, $\frac{512}{128} = 4$. Essas ideias são formalizadas atualmente pelas propriedades das potências que possuem mesma base.

2.4 Definições e Propriedades

A seguir apresentaremos algumas definições e propriedades relacionadas às funções exponenciais e logarítmicas.

2.4.1 Função Exponencial

Nessa Seção, abordaremos as definições de potência de números naturais, inteiros, racionais e por fim, números reais. As demonstrações a seguir foram desenvolvidas seguindo as ideias de [7] e [8].

Definição 2.1 *Dado um número real $a > 0$. Definimos a potência de a, com expoente natural n, denotada por a^n, da seguinte forma:*

(i) $a^0 = 1$;

(ii) $a^1 = a$;

(iii) $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

Proposição 2.1 *Para os números reais $a > 0$ e $b > 0$,*

(i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

(ii) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

(iii) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

são verdadeiras para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração.

(i) Fixando m provaremos por indução sobre n. Ora, sendo

$$p(n) : a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

a relação, teremos que $P(0)$ é verdadeira pois,

$$a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m = a^{m+0}.$$

Suponha que $P(n)$ seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Vamos mostrar que $P(n+1)$ também é verdadeira. De fato,

$$a^m \cdot a^{n+1} = a^m \cdot (a^n \cdot a) = (a^m \cdot a^n) \cdot a = a^{m+n} \cdot a = a^{(m+n)+1} = a^{m+(n+1)},$$

onde segue que $P(n+1)$ é verdadeira. Assim,

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

é verdadeira para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

(ii) Assim como foi feito na demonstração anterior, fixando m provaremos essa relação por indução sobre n. Ora, sendo

$$P(n) : (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

a relação, teremos que $P(0)$ é verdadeira pois,

$$(a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m \cdot 0}.$$

Suponha que $P(n)$ seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Vamos mostrar que $P(n+1)$ também é verdadeira. De fato,

$$(a^m)^{n+1} = (a^m)^n \cdot a^m = a^{m \cdot n} \cdot a^m = a^{m \cdot n + m} = a^{m \cdot (n+1)},$$

ou seja,

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n},$$

para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

(iii) Seja $P(n) : (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ a relação. Então, teremos que $P(0)$ é verdadeira pois,

$$(a \cdot b)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 \cdot b^0.$$

Suponha que $P(n)$ seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$(a \cdot b)^n = a^m \cdot a^n.$$

Vamos mostrar que $P(n+1)$ também é verdadeira. Ora,

$$(a \cdot b)^{n+1} = (a \cdot b)^n \cdot (a \cdot b) = a^n \cdot (b^n \cdot a) \cdot b = a^n \cdot (a \cdot b^n) \cdot b = (a^n \cdot a) \cdot (b^n \cdot b) = a^{n+1} \cdot b^{n+1}.$$

Logo, $P(n+1)$ é verdadeira.

Portanto,

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

□

A definição a seguir será dada de modo que para todo número real $a > 0$ a propriedade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ seja válida para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$.

Definição 2.2 *Dado um número real $a > 0$. Definimos a potência de a, com expoente inteiro não positivo $-n$, denotado por a^{-n}, da seguinte forma:*

(i) $a^0 = 1,$

(ii) $a^{-n} = \frac{1}{a^n},$ *para todo* $n \in \mathbb{N}^*$.

Uma consequência imediata da definição (2.2) é a seguinte: Dados $m, n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$(a^m)^{-n} = (a^n)^{-m}.$$

De fato,

$$(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{m \cdot n}} = \frac{1}{a^{n \cdot m}} = \frac{1}{(a^n)^m} = (a^n)^{-m}.$$

Proposição 2.2 *Para os números reais $a > 0$ e $b > 0$,*

(i) $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{(-m)+(-n)};$

(ii) $(a^{-m})^{-n} = a^{(-m) \cdot (-n)};$

(iii) $(a \cdot b)^{-n} = a^{-n} \cdot b^{-n}.$

são verdadeiras para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração.

(i) Observe que

$$a^{-n} \cdot a^{-m} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{1 \cdot 1}{a^n \cdot a^m} = \frac{1}{a^{n+m}} = a^{-(n+m)} = a^{(-n)+(-m)}.$$

Logo,

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{(-m)+(-n)}.$$

(ii) Para essa prova, consideremos a consequência destacada anteriormente. Assim:

$$(a^{-n})^{-m} = \frac{1}{(a^{-n})^m} = \frac{1}{(a^m)^{-n}} = (a^m)^n = a^{m \cdot n} = a^{(-m)\cdot(-n)}.$$

Mostrando que

$$(a^{-n})^{-m} = a^{(-m)\cdot(-n)},$$

como queríamos.

(iii) Para essa demonstração, basta observar que

$$(a \cdot b)^{-n} = \frac{1}{(a \cdot b)^n} = \frac{1}{a^n \cdot b^n} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{b^n} = a^{-n} \cdot b^{-n}.$$

Logo,

$$(a \cdot b)^{-n} = a^{-m} \cdot a^{-n},$$

como queríamos. $\square$

Definição 2.3 *Dado o número real $k > 0$, chama-se potência de expoente racional $\frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}^*$ de base k, a potência denotada por $k^{\frac{p}{q}}$, que satisfaz a seguinte propriedade:*

$$\left(k^{\frac{p}{q}}\right)^q = k^p.$$

Proposição 2.3 *Dado um número real $k > 0$ e r e s racionais, tem-se:*

$$k^r \cdot k^s = k^{r+s}.$$

Demonstração. Sejam os racionais $r = \frac{p}{q}$ e $s = \frac{p'}{q'}$, onde $p,\ p',\ q,\ q' \in \mathbb{Z}$ com $q \neq 0$ e $q' \neq 0$. Inicialmente, observe que

$$(k^r)^q = \left(k^{\frac{p}{q}}\right)^q = k^p$$

e

$$(k^s)^{q'} = \left(k^{\frac{p'}{q'}}\right)^{q'} = k^{p'}.$$

Assim,

$$(k^r \cdot k^s)^{q \cdot q'} = (k^r)^{q \cdot q'} \cdot (k^s)^{q \cdot q'} = k^{r \cdot q \cdot q'} \cdot k^{s \cdot q \cdot q'} = k^{\frac{p \cdot q \cdot q'}{q}} \cdot k^{\frac{p' \cdot q \cdot q'}{q'}} = k^{(p \cdot q') + (p' \cdot q)}.$$

Segue que,

$$k^r \cdot k^s = k^{\frac{(p\cdot q')+(p'\cdot q)}{q\cdot q'}} = k^{\left(\frac{p}{q}\right)+\left(\frac{p'}{q'}\right)} = k^{r+s},$$

como queríamos. $\square$

Fixado $x \in \mathbb{R}$, existe um único número real positivo a^x tal que $r < x < s$ com $r,s \in \mathbb{Q}$ acarreta $a^r < a^x < a^s$. De fato, não podem existir dois números reais diferentes, digamos $K < W$ com a propriedade acima pois, neste caso teríamos $r < x < s$ com $r,s \in \mathbb{Q}$ acarretando $a^r < K < W < a^s$, o que levaria o intervalo $[K,W]$ não conter nenhuma potência de a com expoente racional, contrariando o Lema (2.6). A existência de tal número entretanto só é garantida utilizando a noção de supremo.

Definição 2.4 *Dado um número real $k > 0$ e um número real x, definimos a potência de k de expoente x, denotada por k^x, como sendo*

$$k^x = \begin{cases} \sup\{k^r;\ r \in \mathbb{Q},\ r \leq x\}, & se\ k > 1 \\ \sup\{k^r;\ r \in \mathbb{Q},\ x \leq r\}, & se\ k < 1 \end{cases}.$$

Proposição 2.4 *Dado um número real $k > 0$ e $x,y \in \mathbb{R}$, tem-se:*

$$k^x \cdot k^y = k^{x+y}.$$

Demonstração. Considere os conjuntos $A = \{k^{r_1};\ r_1 \in \mathbb{Q},\ r_1 \leq x\}$ e $B = \{k^{r_2};\ r_2 \in \mathbb{Q}, r_2 \leq y\}$. Definimos $A \cdot B = \{k^{r_1} \cdot k^{r_2};\ k^{r_1} \in A \text{ e } k^{r_2} \in B\}$. Assim, $a^x = \sup A$ e $a^y = \sup B$, onde segue que

$$a^x \cdot a^y = \sup A \cdot \sup B = \sup(A \cdot B) = a^{x+y}.$$

como queríamos. $\square$

Sabemos que a sequência cujo n-ésimo termo é a^n é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

Proposição 2.5 *Se $a > 1$, então a sequência formada pelas potências a^n, com $n \in \mathbb{N}$ é ilimitada superiormente.*

Demonstração. Se $a > 1$, existe $d \in \mathbb{R}^*_+$ tal que $a = 1 + d$. Pela desigualdade de Bernoulli, que pode ser encontrada em [9], teremos $a^n > 1 + nd$ para todo n natural maior que 1. Então, dado $K > 0$, tome $n > (K-1)/d$ e tem-se $a^n > 1 + nd > K$. $\square$

Lema 2.6 *Fixado o número real positivo $a \neq 1$, e dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*_+$ com $0 < \alpha < \beta$, então existe algum $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a^r \in [\alpha, \beta]$.*

Demonstração. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ com $0 < \alpha < \beta$, para demonstrar esse lema, devemos exibir um número $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a^r \in [\alpha, \beta]$. Dividiremos essa demonstração em quatro casos:

(i) $a > 1$ e $1 < \alpha < \beta$;

(ii) $a < 1$ e $1 < \alpha < \beta$;

(iii) $a > 1$ e $0 < \alpha < 1 < \beta$;

(iv) $a < 1$ e $0 < \alpha < \beta < 1$.

Para para a demonstração de (i), se $a > 1$ e $1 < \alpha < \beta$, segue da Proposição (2.5), que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha < \beta < a^M. \tag{2.1}$$

Determinado $M \in \mathbb{N}$ satisfazendo a desigualdade (2.1), considere o número real

$$K = \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right).$$

Observe que $\left(\frac{\beta-\alpha}{a^M}\right)$ é positivo, pois por hipótese, $\beta > \alpha$. Assim, segue que $K > 1$. Pela Proposição (2.5), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n \tag{2.2}$$

Da desigualdade (2.2) decorre que

$$1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}$$

o qua acarreta

$$0 < a^M \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \beta - \alpha.$$

Assim, para todo racional $\frac{m}{n} \leq M$, temos:

$$0 < a^{\frac{m}{n}} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) \leq a^M \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \beta - \alpha.$$

Daí,

$$0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha. \tag{2.3}$$

Da desigualdade (2.3) conclui-se que as potências

$$a^0,\ a^{\frac{1}{n}},\ a^{\frac{2}{n}},\ \cdots,\ a^{\frac{m-1}{n}},\ a^M$$

são extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento menor do que o comprimento do intervalo $[\alpha, \beta]$.

Como $[\alpha,\beta]\subset[1,a^M]$, pois $1<\alpha<\beta<a^M$, pelo menos um desses extremos, digamos $a^{\frac{m}{n}}\in[\alpha,\beta]$. Tomando $r=\frac{m}{n}$, temos $a^r\in[\alpha,\beta]$ como queríamos.

Para o caso (ii), suponha que $a<1$ e $1<\alpha<\beta$. Então, como $\frac{1}{a}>1$, pela Proposição (2.5), existe $M_1\in\mathbb{N}$ tal que

$$0<\alpha<\beta<a^{-M_1}.$$

Fazendo $M=-M_1$, a demonstração segue do caso (i).

Para a demonstração do caso (iii), suponha que $a>1$ e $0<\alpha<1<\beta$. Então, tomando $t=\frac{1+\beta}{2}$, temos

$$\alpha<1<t<\beta.$$

Pelo caso (i), existe um racional r tal que $a^r\in[t,\beta]$. Como $[t,\beta]\subset[\alpha,\beta]$, temos que $a^r\in[\alpha,\beta]$, como queríamos.

Finalmente para a demonstração do caso (iv), se $a<1$ e $0<\alpha<\beta<1$, teremos $\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}>1$. Pelo caso (i), existe $r\in\mathbb{Q}$ tal que $\frac{1}{\beta}\leq\left(\frac{1}{a}\right)^r\leq\frac{1}{\alpha}$. Logo, $\alpha\leq a^r\leq\beta$, como queríamos.

$\square$

Definição 2.5 *Seja $a\in\mathbb{R}_+^*$ com $a\neq 1$. Chama-se função exponencial de base a, a função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=a^x$.*

A função definida acima satisfaz as seguintes propriedades para quaisquer $x,y\in\mathbb{R}$:

1. $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$;
2. $a^1=a$;
3. (a) se $x<y$, então $a^x<a^y$ quando $a>1$ e

   (b) se $x<y$, então $a^x>a^y$ quando $0<a<1$.

Proposição 2.7 *A função exponencial de base $a\in\mathbb{R}_+^*$ com $a\neq 1$ é contínua.*

Demonstração. Devemos mostrar que dado $x_0\in\mathbb{R}_+^*$, então

$$\lim_{x\to x_0}|a^x-a^{x_0}|=0.$$

Para isto, suponha que $a>1$ (o caso em que $0<a<1$ é tratado de modo análogo) e considere o conjunto

$$A=\{a^{\frac{1}{n}};\,n\in\mathbb{N}\},$$

limitado inferiormente. Logo o conjunto A possui ínfimo. Seja $j=\inf A$. Observe que $j=1$. De fato, basta observar que $\forall\,n\in\mathbb{N}$ temos $1\leq j<a^{\frac{1}{n}}$, que acarreta $j^n<a$, $\forall\,n\in\mathbb{N}$. Assim, a sequência $(j^1,\,j^2,\,\cdots,j^n,\,\cdots)$ é limitada superiormente, o que implica $j=1$, pois se $j>1$, pela Proposição (2.5), a sequência $(j^1,\ j^2,\ \cdots,\ j^n,\ \cdots)$ seria ilimitada superiormente, o que é uma contradição. Logo, $j = 1$.

Agora vamos mostrar que
$$\lim_{x\to 0} |a^x - a^0| = 0.$$
De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a^{\frac{1}{n_0}} < 1+\varepsilon$. Se $0 \leq x < \frac{1}{n_0}$, então $1 \leq a^x < a^{\frac{1}{n_0}} < 1+\varepsilon$. Já se $-\frac{1}{n_0} < x < 0$, tem-se $1 > a^x > a^{-\frac{1}{n_0}} = \frac{1}{\frac{1}{n_0}} > \frac{1}{1+\varepsilon} > 1-\varepsilon$. Logo, se $|x-0| < \frac{1}{n_0}$, temos $1-\varepsilon < a^x < \varepsilon + 1$, ou seja,
$$|a^x - a^0| < \varepsilon.$$
Portanto,
$$\lim_{x\to 0} |a^x - a^0| = 0,$$
como queríamos.

Agora fixado $x_0 \in \mathbb{R}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que
$$|x - x_0| < \delta \text{ implica } |a^{x-x_0} - 1| < \frac{\varepsilon}{a^{x_0}}.$$
Daí, multiplicando a desigualdade $|a^{x-x_0} - 1| < \frac{\varepsilon}{a^{x_0}}$ por a^{x_0}, segue que
$$|a^x - a^{x_0}| < \varepsilon.$$
Portanto,
$$\lim_{x\to x_0} |a^x - a^{x_0}| = 0,$$
para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ fixo, como queríamos. □

Proposição 2.8 *Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$ com $a \neq 1$. Então a função a^x é ilimitada.*

Demonstração. Consequência imediata do Lema (2.6). □

Proposição 2.9 *Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$ com $a \neq 1$. Então a função a^x é injetora.*

Demonstração. Consequência imediata da Propriedade 3 da Definição (2.5). □

Proposição 2.10 *Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$ com $a \neq 1$. Então a imagem da função a^x é o intervalo $(0,\infty)$.*

Demonstração. Devemos demonstrar que para todo $b \in \mathbb{R}_+^*$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$. Para isso, escolhemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma potência a^{r_n} com $r_n \in \mathbb{Q}$ tal que,
$$b - \frac{1}{n} < a^{r_n} < b + \frac{1}{n}.$$

Isso acarreta $|b - a^{r_n}| < \frac{1}{n}$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = b.$$

Se $a > 1$, (o caso onde $a < 1$ é análogo) podemos escolher as potências a^{r_n} de tal modo que

$$a^{r_1} < a^{r_2} < a^{r_3} < \cdots < a^{r_n} < \cdots < b.$$

Fixando $s \in \mathbb{Q}$ tal que $b < a^s$ (isso é possível em virtude do Lema (2.6)) e considerando a monotonicidade da função exponencial, chegamos às desigualdades

$$r_1 < r_2 < \cdots < r_n \cdots < s.$$

A sequência (r_n) é monótona crescente, limitada superiormente por s, logo, devido à completeza de $\mathbb{R}$, (a_n) possui limite. Assim, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} r_n = x.$$

Devido ao fato da função exponencial ser contínua,

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = b$$

como queríamos.

Já o caso onde $a < 1$ segue das Proposições (2.7) e (2.10). □

Teorema 2.11 *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ uma função monótona injetiva (crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.*
2. *Se $a = f(1)$, então $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*
3. *$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. (1) $\Longrightarrow$ (2). Sendo $r = \frac{m}{n}$ um racional (com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$) temos $f(r) = a^r$. De fato, $r = \frac{m}{n}$ acarreta $m = n \cdot r$. Daí, se $x \in \mathbb{R}_+^*$, então

$$f(rx)^n = f(nrx) = f((nr) \cdot x) = f(m \cdot x) = f(x)^m,$$

ou seja,

$$f(r \cdot x) = f(x)^r.$$

Escrevendo $f(1) = a$ e tomando $x = 1$, temos

$$f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r.$$

para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Suponha que f seja crescente (o caso onde f é decrescente é análogo). Observe que $1 = a^0 = f(0) < f(1) = a$, ou seja,

$$a > 1.$$

Afirmação: Para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $f(x) = a^x$. Com efeito, para x racional já está provado, resta provar para x irracional. Ora, suponha que exista $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$, digamos $f(x) < a^x$ (o caso onde $f(x) > a^x$ é feito de modo análogo). Pelo Lema (2.6) existe um número racional r tal que

$$f(x) < a^r < a^x,$$

ou seja,

$$f(x) < f(r) = a^r < a^x.$$

Como f é crescente, temos $x < r$ e como a^x também é crescente, temos que $r < x$. O que é uma contradição. Logo, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $f(x) = a^x$.

$(2) \Longrightarrow (3)$. Basta observar que para todo $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y).$$

Antes de provarmos $(3) \Longrightarrow (1)$, provaremos quatro propriedades importantes, são elas:

(i) $f(0) \neq 0$;

(ii) $f(0) = 1$;

(iii) $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

(iv) $f(-n \cdot x) = \frac{1}{f(n \cdot x)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para a prova de (i), suponha que $f(0) = 0$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$f(x) = f(x+0) = f(x) \cdot f(0) = f(x) \cdot 0 = 0.$$

Assim f é uma função constante, o que contradiz a hipótese de que f é monótona injetiva. Portanto, $f(0) \neq 0$ como queríamos.

Já para a prova de (ii), observe que

$$f(0) = f(0+0) = f(0) \cdot f(0).$$

Isso acarreta

$$f(0) \cdot [f(0) - 1] = 0,$$

donde segue que $f(0) = 1$ pois, $f(0) \neq 0$.

Para provar (iii), basta perceber que dado $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

Para provar (iv), basta observar que para todo $x \in \mathbb{R}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$1 = f(0) = f((n \cdot x) + (-n \cdot x)) = f(n \cdot x) \cdot f(-n \cdot x),$$

ou seja
$$f(-n\cdot x)=\frac{1}{f(n\cdot x)}.$$

Provaremos agora que $(3)\implies(1)$. Para n natural, vamos provar essa implicação por indução sobre n. Ora, seja
$$P(n): f(nx)=f(x)^n$$
a sentença. Observe que $P(0)$ é verdadeira, pois
$$f(0\cdot x)=f(0)=1=f(x)^0,$$
para todo $x\in\mathbb{R}$.

Suponha que $P(n)$ seja verdadeira para algum n natural, ou seja,
$$f(n\cdot x)=f(x)^n$$
para todo $x\in\mathbb{R}$. Vamos mostrar que $P(n+1)$ é também verdadeira. De fato, para todo $x\in\mathbb{R}$,
$$f((n+1)\cdot x)=f(n\cdot x+x)=f(n\cdot x)\cdot f(x)=f(x)^n\cdot f(x)=f(x)^{n+1}.$$
Logo, $P(n+1)$ também é verdadeira. Portanto, $P(n)$ é verdadeira para todo $n\in\mathbb{N}$.

Para n inteiro negativo, $-n$ é um inteiro positivo, ou seja, um número natural. Então,
$$f(n\cdot x)=\frac{1}{f(-n\cdot x)}=\frac{1}{f(x)^{-n}}=f(x)^n,$$
como queríamos. □

Teorema 2.12 *Seja $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_+^*$ uma função monótona injetiva (crescente ou decrescente) tal que, para $x,h\in\mathbb{R}$ quaisquer, o acrescimo relativo $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ dependa apenas de h, mas não de x. Então, se $b=g(0)\neq 0$ e $a=\frac{g(1)}{g(0)}$, tem-se $g(x)=ba^x$ para todo $x\in\mathbb{R}$.*

Demonstração. Suponha que o quociente
$$q(h)=\frac{g(x+h)}{g(x)}$$
independa de x e considere a função f definida por $f(x)=\frac{g(x)}{b}$ com $b=g(0)$. Como g é monótona injetiva, f também é. Além disso, $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ independe de x e $f(0)=1$, pois,
$$\frac{f(x+h)}{f(x)}=\frac{\frac{g(x+h)}{b}}{\frac{g(x)}{b}}=\frac{g(x+h)}{g(x)}=q(h)\ \text{ e }\ f(0)=\frac{g(0)}{b}=\frac{b}{b}=1.$$
Observe também que $q(h)=f(h)$, para isto, basta tomar $x=0$ nas primeiras igualdades acima. Assim,
$$f(h)=q(h)=\frac{f(x+h)}{f(x)},$$

ou seja,

$$f(x+h) = f(x) \cdot f(h).$$

Como f é monótona injetiva e satisfaz $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$, $\forall \ x, y \in \mathbb{R}$, segue do Teorema (2.11), que f é dada por $f(x) = a^x$. Assim,

$$g(x) = b \cdot f(x) = b \cdot a^x.$$

□

2.4.2 Função Logarítmica

Considerando o exposto acima e as proposições (2.9) e (2.10), vamos não só definir logaritmos e função logarítmica, mas também destacar algumas proriedades, cujas demonstrações são feitas seguindo as ideias de [6], que destaca o fato da função logarítmica ser a função inversa da exponencial .

Definição 2.6 *Dado um número real $k > 0$, com $k \neq 1$, o logaritmo de um número $x > 0$ na base k é o expoente y a que se deve elevar k de tal modo que $k^y = x$. Escreve-se $y = \log_k x$ e lê-se y é o logaritmo de x na base k.*

Proposição 2.13 *Sendo a, b e c números reais positivos, $a \neq 1$, tem-se*

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c.$$

Demonstração. Denotaremos x, y e z respectivamente por $\log_a b$, $\log_a c$ e $\log_a bc$. Segue da Definição (2.6) acima que

$$a^x = b, \tag{2.4}$$

$$a^y = c \tag{2.5}$$

e

$$a^z = b \cdot c. \tag{2.6}$$

Substituindo (2.4) e (2.5) em (2.6) temos $a^z = a^x a^y = a^{b+c}$, que pela injetividade da função exponencial, acarreta $z = b + c$, ou seja,

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c.$$

□

Proposição 2.14 *Sendo a, b e c números reais positivos, com $a \neq 1$, tem-se*

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$$

Demonstração. Denotaremos x, y e z respectivamente por $\log_a b$, $\log_a c$ e $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)$. Segue da Definição (2.6) que

$$a^x = b, \tag{2.7}$$

$$a^y = c \tag{2.8}$$

e

$$a^z = \frac{b}{c}. \tag{2.9}$$

Substituindo (2.7) e (2.8) em (2.9) temos $a^z = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, que pela injetividade da função exponencial, acarreta $z = x - y$, ou seja,

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$$

□

Proposição 2.15 *Sendo a, b e c números reais positivos com $b \neq 1$ e $c \neq 1$, tem-se que*

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}.$$

Demonstração. Denotaremos x, y e z respectivamente por $\log_b a$, $\log_c a$ e $\log_c b$. Segue da definição (2.6) que

$$b^x = a, \tag{2.10}$$

$$c^y = a \tag{2.11}$$

e

$$c^z = b. \tag{2.12}$$

De (2.10) e (2.11), temos

$$b^x \quad = \quad c^y. \tag{2.13}$$

Substituindo (2.12) em (2.13) obtemos $c^{zx} = c^y$, que pela injetividade da função exponencial, acarreta $zx = y$, provando que $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$, ou seja,

$$\log_c a = \log_c b \cdot \log_b a.$$

$\square$

Lema 2.16 *Dados os números reais positivos a e b, com* $a \neq 1$. *Então:*
(a) $\log_a a^m = m$, *para todo m real;*
(b) $a^{\log_a b} = b$.

Demonstração.
(a) Seja $\log_a a^m = p$. Vamos mostrar que $p = m$. De fato, $\log_a a^m = p$ acarreta $a^p = a^m$. Pela a injetividade da função exponencial, segue que $p = m$.
(b) Seja $\log_a b = r$. Então, $a^r = b$. Assim,

$$a^{\log_a b} = a^r = b.$$

$\square$

Proposição 2.17 *Sendo b e c números reais positivos com* $c \neq 1$ *e m um número natural, tem-se*

$$\log_c b^m = m \cdot \log_c b.$$

Demonstração.
Sendo b e c números reais positivos com $c \neq 1$, fazendo $a = b^m$ na Proposição (2.15) segue do Lema 2.16, que

$$\log_c b^m = \log_b b^m \cdot \log_c b = m \cdot \log_c b.$$

$\square$

Teorema 2.18 *Seja* $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função monótona injetiva (crescente ou decrescente) tal que*

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. *Então, existe* $a > 0$ *com* $a \neq 1$ *tal que* $f(x) = \log_a x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Demonstração. Dividiremos esta demonstração em duas partes:

(i) Vamos mostrar que $f(a^m) = m$ para todo m real. Para isso, suponha inicialmente que $f(a) = 1$. Ora,

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1),$$

o que acarreta $f(1) = 0$.

Além disso, como f é crescente e $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, tem-se $a > 1$. Para a prova de que $f(a^m) = m$ para todo m real, iniciaremos provando para m natural. De fato, sendo

$$P(m) : f(a^m) = m$$

a sentença, $P(0)$ é verdadeira, pois

$$f(a^0) = f(1) = 0.$$

Suponha que $P(m)$ seja verdadeira para algum m natural, ou seja,

$$f(a^m) = m.$$

Vamos mostrar que $P(m+1)$ também é verdadeira. De fato,

$$f(a^{m+1}) = f(a^m \cdot a) = f(a^m) + f(a) = m + 1.$$

Logo, $P(m+1)$ também é verdadeira. Portanto, $f(a^m) = m$, para todo m natural.

Sendo m natural, $-m$ é um inteiro negativo. Além disso, tem-se $f(a^{-m}) = -m$. Com efeito,

$$f(a^{-m}) + m = f(a^{-m}) + f(a^m) = f(a^{-m} \cdot a^m) = f(a^{-m+m}) = f(1) = 0,$$

ou seja,

$$f(a^{-m}) = -m.$$

Já se $r = \frac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos $m = r \cdot n$. Logo,

$$m = f(a^m) = f(a^{n \cdot r}) = f((a^r)^n) = n \cdot f(a^r),$$

o que acarreta

$$f(a^r) = \frac{m}{n} = r.$$

Por fim se $x \in \mathbb{R}$, então existem $r, s \in \mathbb{Q}$, tal que $r < x < s$. Logo, $a^r < a^x < a^y$, ou seja,

$$f(a^r) < f(a^x) < f(a^s).$$

Assim,

$$r < f(a^x) < s.$$

Dessa forma, todo número racional r menor do que x, também é menor que $f(a^x)$ e todo número racional s maior que x, também é maior que $f(a^x)$. Logo,

$$f(a^x) = x.$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, pois caso contrário, teríamos $f(a^x) < x$ ou $f(a^x) > x$. Se ocorrer $f(a^x) < x$,

$$r < f(a^x) < x < s.$$

Assim, $\forall\, q \in \mathbb{Q}$ tem-se $q \notin (f(a^x), x)$. O que é um absurdo, pois, entre quaisquer dois números reais existe um número racional. O caso onde $f(a^x) > x$ é justificado de modo análogo.

Assim, fazendo $a^x = y$ na igualdade $f(a^x) = x$, pela Definição (2.6) tem-se

$$f(y) = \log_a y$$

para todo y positivo.

(ii) Para o caso geral, considere uma função crescente $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$g(x \cdot y) = g(x) + g(y).$$

Para essa função g, verifica-se que $g(1) = 0$ e além disso, como $1 < 2$, escrevendo $b = g(2)$, temos $b > 0$, pois $g(2) > g(1) = 0$. Agora considere uma função $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{g(x)}{b}$. Observe que, f é crescente pois, g é crescente, transforma produtos em somas e além disso, $f(2) = 1$. Pela parte (i) da demonstração, tem-se $f(x) = \log_2 x$, para todo x positivo. Assim, para todo x positivo,

$$x = 2^{f(x)} = 2^{\frac{g(x)}{b}} = (2^{\frac{1}{b}})^{g(x)} = a^{g(x)},$$

escrevendo $a = 2^{\frac{1}{b}}$. Aplicando $\log_a$ em ambos os membros da igualdade $a^{g(x)} = x$ e o Lema (2.16) vem,

$$g(x) = \log_a x.$$

$\square$

Capítulo 3

Logaritmo: Aprendendo através da Resolução de Problemas

3.1 Compreendendo a definição, as propriedades e algumas aplicações dos logaritmos

A seguir, propomos atividades com o objetivo de apresentar a definição de logaritmo e conhecer as propriedades do logaritmo por meio de tabelas e em seguida, algumas aplicações importantes que fazem parte do cotidiano de muitos cidadãos.

Em geral, as propriedades são ensinadas como regras, enunciadas no quadro negro. Atividades com as tabelas (que podemos chamar de tábuas) podem articular-se com a abordagem tradicional de sala de aula oferecendo aos alunos uma oportunidade para lidar com as propriedades de forma mais concreta e dinâmica.

Para alcançar estes objetivos é necessário que os alunos sejam motivados a ponto de ter uma participação efetiva na resolução das atividades. A seguir, temos uma descrição dos aspectos das atividades propostas na Seção 3.2.

3.1.1 Aspectos das atividades 1 e 2

- Objetivos

  Essas atividades objetivam levar o aluno a compreender a definição de logaritmo; entender a maneira que se deu o surgimento do logaritmo; perceber que o logaritmo é uma ferramenta que pode ser usada para executar cálculos e conhecer algumas propriedades importantes do logaritmo.

  Dessa forma, os conceitos matemáticos envolvidos nessas atividades são a definição e suas propriedades. Essa proposta se torna diferente das que encontramos constantemente nos livros didáticos da rede estadual do estado da Paraíba. Neles, a definição é colocada sem significado, sem conexão com a história da matemática, sem as motivações que levaram a criação desse conhecimento. Já nas atividades propostas, com a resolução das questões, o aluno tem a possibilidade de construir seu próprio conhecimento, compreender a definição e identificar as propriedades.

- Público alvo

  As atividades 1 e 2 são destinadas aos alunos da 1ª série do ensino médio. Os alunos dessa faixa etária, devido às experiências vividas nas séries anteriores, já adquiriram maturidade que possibilita compreender de forma efetiva os conceitos abstratos típicos dos logaritmos.

- Pré-requisitos

  O aluno necessita ter uma boa noção de funções exponenciais, propriedades das potências e função injetora.

- Materiais e tecnologia

  Para o desenvolvimento dessas atividades, é necessário papel A4, caneta esferográfica, lápis grafite, borracha e projetor multimídia (data show).

- Recomendações metodológicas

  É recomendável que o professor trabalhe essas atividades em equipes, pois, a interação entre os componentes da equipe, além de proporcionar um ambiente de discussão, pode facilitar a compreensão dos conceitos abordados nas atividades.

  No desenvolvimento das atividades, é importante que o professor proporcione um ambiente de discussão propondo aos alunos a exposição das resoluções das atividades para os demais alunos da turma, escolhendo para isso, um aluno de cada grupo.

- Dificuldades previstas

  Algumas dificuldades podem surgir no desenvolvimento dessa atividade, dentre elas está: timidez dos alunos; falta de interesse pelas aulas de matemática; turmas com número excessivo de alunos; dificuldade em identificar relações entre alguns elementos da tabela.

- Descrição geral

  Essas atividades deverão ser trabalhadas em turmas do 1º ano do ensino médio durante um período de 4 (quatro) aulas (com 50 minutos cada). Elas devem ser trabalhadas na introdução do conteúdo logaritmo, pois, os questionamentos são feitos com intuito de provocar os alunos a ponto dos mesmos conseguirem compreender a motivação que levou o surgimento dos logaritmos. Para isso, nos 50 primeiros minutos o professor deve explicar a dinâmica das aulas para que todos possam entender como serão desenvolvidas as atividades, em seguida, devem ser reservados 50 minutos para que os grupos se familiarizem com a atividade, com a participação do professor. Nos próximos 50 minutos os alunos devem elaborar suas resoluções e eleger um componente do grupo para que possa fazer a exposição para os demais grupos da sala. Os 50 minutos restantes podem ser utilizados para fazer alguns questionamentos e apresentar a notação e definição dos logaritmos, mencionar a ideia de base que será objeto de estudo.

- Possíveis continuações

  Essas atividadse podem ser complementada propondo ao educando, a construção de algumas tábuas de logaritmos. Essa atividade é interessante, pois leva os alunos a compreender o processo pelo qual os matemáticos passaram para construir as tábuas de logaritmos que conhecemos atualmente.

3.1.2 Aspectos da atividade 3

- Objetivos

  Essa atividade objetiva levar o aluno a compreender que para elaborar um modelo usando uma função exponencial que descreva um fenômeno natural é necessário verificar se esse problema satisfaz a caracterização da função de tipo exponencial.

- Público alvo

  A atividade é destinada aos alunos da 1ª série do ensino médio.

- Pré-requisitos

  O aluno necessita ter uma boa noção de funções exponencial e logarítmica, propriedades das potências e, função injetora e sobrejetora.

- Materiais e tecnologia

  Para o desenvolvimento dessas atividades, é necessário papel A4, caneta esferográfica, lápis grafite, borracha, projetor multimídia (data show) e calculadora científica.

- Recomendações metodológicas

  É recomendável que o professor trabalhe essa atividade em equipes, pois, a interação entre os componentes da equipe, além de proporcionar um ambiente de discussão, pode facilitar a compreensão dos conceitos abordados na atividade.

  No desenvolvimento da atividade, é importante que o professor proporcione um ambiente de discussão propondo aos alunos a exposição das resoluções das atividades para os demais alunos da turma, escolhendo para isso, um aluno de cada grupo.

- Dificuldades previstas

  Algumas dificuldades podem surgir no desenvolvimento dessa atividade, dentre elas está: timidez dos alunos; falta de interesse pelas aulas de matemática; turmas com número excessivo de alunos; além da dificuldade em compreender os conceitos de acréscimo relativo e de dependência.

- Descrição geral

  Essa atividade deverá ser trabalhada em turmas do 1º ano do ensino médio durante um período de 4 aulas (com 50 minutos cada). Ela deve ser trabalhada no aprofundamento do conteúdo logaritmo, pois, os questionamentos são feitos com intuito de provocar os alunos a ponto dos mesmos conseguirem compreender a caracterização da função de tipo exponencial. Para isso, nos 50 primeiros minutos, o professor deve, explicar a dinâmica das aulas para que todos possam entender como serão desenvolvidas as atividades, em seguida, nos próximos 50 minutos devem-se ser reservados para que os grupos se familiarizem com a atividade. Os próximos 50 minutos os alunos devem elaborar suas resoluções e eleger um componente do grupo para que possa fazer a exposição para os demais grupos da sala. Os 50 minutos restantes podem ser utilizados para fazer alguns questionamentos ou algumas demonstrações.

- Possíveis continuações

  Essa atividade pode ser complementada propondo aos educandos, a demonstração da caracterização das funções exponenciais e logarítmica. Ter domínio dessas ideias é importante pois, são necessárias quando precisamos saber qual função pode ser usada para modelar um fenômeno.

3.1.3 Aspectos da atividade 4

- Objetivos

  Essa atividade objetiva levar o aluno a perceber a existência de aplicações dos logaritmos; verificar que o logaritmo é uma ferramenta que pode ser usada para resolver problemas que convivemos diariamente.

- Público alvo

  A atividade 4 é destinada aos alunos da 1ª série do ensino médio. Os alunos dessa faixa etária, devido às experiências vividas nas séries anteriores, já adquiriram maturidade que possibilitam compreender de forma efetiva os conceitos abstratos típicos dos logaritmos, tais como generalizações e demonstrações.

- Pré-requisitos

  O aluno necessita ter uma boa noção de: propriedades das potências, função exponencial, equações exponenciais, propriedades das potências, equações logarítmicas.

- Materiais e tecnologias

Para o desenvolvimento dessa atividade, é necessário papel A4, caneta esferográfica, lápis grafite, borracha e projetor multimídia (data show) e calculadora científica.

- Recomendações metodológicas

  É recomendável que o professor trabalhe essa atividade em equipes, pois, a interação entre os componentes da equipe, além de proporcionar um ambiente de discussão, pode facilitar a compreensão dos conceitos abordados na atividade. No desenvolvimento da atividade, é importante que o professor proporcione um ambiente de discussão propondo aos alunos a exposição das resoluções da atividade para os demais alunos da turma, escolhendo para isso, um aluno de cada grupo.

- Dificuldades previstas

  Algumas dificuldades podem surgir no desenvolvimento dessa atividade, dentre elas está: timidez dos alunos; falta de interesse pelas aulas de matemática; turmas com número excessivo de alunos; dificuldade em modelar o problema.

- Descrição geral

  Essa atividade deverá ser trabalhada em turmas do 1º ano do ensino médio durante um período de 4 aulas (com 50 minutos cada). Ela deve ser trabalhada após os alunos terem compreendido de forma efetiva o conteúdo logaritmo. Os questionamentos colocados em cada item são feitos com intuito de provocar os alunos a ponto dos mesmos conseguirem compreender os modelos que são utilizados para resolver alguns itens da atividade. Para que a atividade seja um meio eficaz para atingir uma aprendizagem satisfatória, é necessário que o professor nos 50 primeiros minutos, explique a dinâmica da aula para que todos possam entender como será desenvolvida a atividade e, em seguida, deve-se ser reservado os 50 minutos, para que os grupos se familiarizem com a atividade. Os próximos 50 minutos os alunos devem elaborar suas resoluções e eleger um componente do grupo para que possa fazer a exposição para os demais grupos da sala. Os 50 minutos restantes podem ser utilizados para fazer alguns questionamentos ou algumas demonstrações.

- Possíveis continuações

  Essa atividade pode ser complementada propondo ao educando, a demonstração da regra dos 70 que pode ser encontrada em [5]. Essa demonstração pode ser feita pelo aluno quando o mesmo se sentir maduro a ponto de compreender o significado das ideias nela contida.

3.2 Atividades

Atividade 1.

Nem sempre existiu a facilidade que presenciamos atualmente com relação à tarefa de efetuar cálculos. Calculadoras, computadores são invenções recentes do homem, são ferramentas que no século XVII não existiam. Realizar cálculos envolvendo as operações: multiplicação, divisão e potenciação, por exemplo, naquela época era uma atividade que geralmente poucos conseguiam realizar de forma eficiente. Diante desse fato, Carlos decidiu investigar os modos que os matemáticos usavam para realizar seus cálculos naquele século. Para a surpresa de Carlos, a única pista que encontrou foi uma parte de uma tabela (Tabela 3.1), que foi construída no começo do século XVII pelo matemático suíço Joost Biirgi (1552-1632).

———	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5	Coluna 6
Linha 1	1	0,000	11	1,041	21	1,322
Linha 2	2	0,301	12	1,079	22	1,342
Linha 3	3	0,477	13	1,114	23	1,361
Linha 4	4	0,602	14	1,146	24	1,380
Linha 5	5	0,699	15	1,176	25	1,398
Linha 6	6	0,778	16	1,204	26	1,415
Linha 7	7	0,845	17	1,230	27	1,431
Linha 8	8	0,903	18	1,255	28	1,447
Linha 9	9	0,954	19	1,279	29	1,462
Linha 10	10	1	20	1,301	30	1,447

Tabela 3.1: Tabela Misteriosa 1

A tabela elaborada por esse matemático guardava alguns fatos que deixou Carlos curioso, por exemplo, para efetuar a multiplicação 2×4, bastava observar o número que estava posicionado (na mesma linha) logo após o 2 (que nesse caso é 0,301) e o número que estava posicionado (na mesma linha) logo após o 4 (que nesse caso é $0,602$), efetuar a soma $0,301 + 0,602 = 0,903$, localizar o número $0,903$ na tabela e, em seguida observar que o número que está logo atrás (na mesma linha) de $0,903$ é 8.

(a) Será que Carlos descobriu um caso isolado ou existem outras multiplicações envolvendo números dessa tabela (que estão nas colunas ímpares, por exemplo, nas colunas $1, 3, 5$, etc...), que podem ser efetuadas usando o procedimento relatado anteriormente? Justifique.

(b) Se sua resposta foi sim no item (a), usando a Tabela 3.1 , tente efetuar as multiplicações abaixo:

(i) $4 \times 7 =$

(ii) $5 \times 5 =$

(iii) $5 \times 4 =$

(iv) $7 \times 3 =$

(c) Será que para efetuar divisões envolvendo números que estão nas colunas ímpares (por exemplo, coluna 1, 3, 5, etc...) é possível usar a tabela de forma análoga a usada no relato anterior? Justifique.

(d) Se sua resposta foi sim no item (c), tente efetuar as divisões a seguir, usando a tabela.

(i) $20 \div 5 =$

(ii) $30 \div 6 =$

(iii) $28 \div 4 =$

(iv) $18 \div 6 =$

(v) $21 \div 7 =$

(vi) $30 \div 10 =$

(vii) $24 \div 6 =$

(viii) $28 \div 7 =$

(e) Outro fato bastante curioso é que Carlos percebeu que para calcular 5^2, bastava observar qual número estava (na mesma linha do 5), logo após o 5 (nesse caso $0,699$) e em seguida, multiplicá-lo pelo expoente 2, encontrando nesse caso, o número $1,398$ e observar qual é o número que está logo atrás (na mesma linha) de $1,398$ (que nesse caso é 25). Logo, Carlos concluiu que $5^2 = 25$. O ocorrido é uma coincidência ou podemos calcular potências de números que estão nas colunas impares (por exemplo, coluna 1, 3, 5, etc...) usando a tabela da forma como foi usada no relato anterior? Justifique.

(f) Se sua resposta foi sim no item (e), tente resolver as potências a seguir, usando o procedimento relatado anteriormente.

(i) $3^2 =$

(ii) $4^2 =$

(iii) $2^4 =$

(iv) $3^3 =$

(v) $2^3 =$

(vi) $2^3 =$

Quando vamos resolver equações exponenciais em $\mathbb{R}$, por exemplo, a equação $10^x = 100$, devemos encontrar um valor para a letra $x \in \mathbb{R}$ de modo que se tenha $10^x = 100$. Nesse caso, $x = 2$, pois $10^x = 100 \Longleftrightarrow x = 2$. Essa equivalência é verdadeira devido ao fato da função exponencial ser injetora. Nem sempre os elementos do conjunto solução de uma equação exponencial são números naturais. Em muitos casos, o conjunto solução contém números racionais ou até mesmo irracionais. Considere a equação $10^x = 2$. Resolver essa equação em $\mathbb{R}$ significa encontrar valor(es) real(is) para x de modo que se tenha $10^x = 2$. A grande questão é que o provável valor para r é um número irracional. Então o que podemos encontrar é uma aproximação para x tal que $10^x \approx 2$. Essa aproximação pode ser feita com quantas casas decimais você queira. Por exemplo, com três casas decimais, temos $0,301$, é um valor aproximado para x por falta, pois $10^{0,301} \approx 1,99987$ e $10^{0,302} \approx 2,00447$. O valor da letra x na potência 10^x de modo que x seja solução da equação $10^x = 2$ é chamado logaritmo de 2 na base 10, que denotamos por $\log_{10} 2$. Dessa forma, com três casas decimais temos $x = \log_{10} 2 \approx 0,301$. Na tabela 3.1 tem-se que as colunas pares da mesma, representam os logaritmos, na base 10, dos números naturais compreendidos entre 1 e 30. No entanto, $\log_{10} r$ pode ser definido para qualquer $r\mathbb{R}_+^*$, como solução da equação $10^x = r$

(g) De acordo com as ideias expostas anteriormente, usando a Tabela 3.1, identifique os valores (com três casas decimais) de:

(i) $\log_{10} 5$;

(ii) $\log_{10} 7$;

(iii) $\log_{10} 10$;

(iv) $\log_{10} 15$.

(h) Classifique as igualdades a seguir em verdadeira ou falsa, de acordo com a Tabela 3.1, justificando cada caso.

(i) $\log_{10} 15 = \log_{10}(3 \cdot 5) = \log_{10} 3 + \log_{10} 5$.

(ii) $\log_{10}(2 \cdot 3) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3$.

(iii) $\log_{10}(3 \cdot 7) = \log_{10} 3 + \log_{10} 7$.

(iv) $\log_{10}(r \cdot s) = \log_{10} r + \log_{10} s$, com $r > 0$, e $s > 0$.

(v) $\log_{10}\left(\frac{15}{5}\right) = \log_{10} 15 - \log_{10} 5$.

(vi) $\log_{10}\left(\frac{30}{5}\right) = \log_{10} 30 - \log_{10} 5$.

(vii) $\log_{10}\left(\frac{15}{5}\right) = \log_{10} 15 - \log_{10} 5$.

(viii) $\log_{10}\left(\frac{r}{s}\right) = \log_{10} r - \log_{10} s$, com $r > 0$, e $s > 0$.

(ix) $2 \cdot \log_{10} 3 = \log_{10} 9 = \log_{10} 3^2$.

(x) $k \cdot \log_{10} r = \log_{10} r^k,$ para $r > 0,$ e k um número real qualquer.

(i) Na busca de mais explicações a respeito de como os matemáticos da antiguidade realizavam cálculos, Carlos encontrou a tabela seguir:

————	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5	Coluna 6
Linha 1	1,1	0,041	2,2	0,342	3,3	0,518
Linha 2	1,2	0,079	2,3	0,361	3,4	0,531
Linha 3	1,3	0,114	2,4	0,380	3,5	0,544
Linha 4	1,4	0,146	2,5	0,398	3,6	0,556
Linha 5	1,5	0,176	2,6	0,415	3,7	0,568
Linha 6	1,6	0,204	2,7	0,431	3,8	0,580
Linha 7	1,7	0,230	2,8	0,447	3,9	0,591
Linha 8	1,8	0,260	2,9	0,462	4,0	0,602
Linha 9	1,9	0,279	3,0	0,477	4,1	0,612
Linha 10	2,0	0,301	3,1	0,491	4,2	0,623
Linha 11	2,1	0,322	3,2	0,505	4,3	0,633

Tabela 3.2: Tabela Misteriosa 2

A dúvida de Carlos foi a seguinte: será que essa tabela também contém alguns fatos curiosos que constatamos na tabela 3.2? Qual é a sua opinião? Será que essa Tabela envolvendo números na forma decimais tem as propriedades da Tabela 3.2? Justifique.

(j) Se sua resposta foi sim no item anterior, tente efetuar multiplicações, divisões e potenciações envolvendo números que se localizam nas colunas ímpares. Os resultados das multiplicações com uma casa decimal foram exatos ou aproximados? Por quê?

Atividade 2.

Além das tabelas exibidas nas atividades anteriores, também existem outras tabelas que os matemáticos usavam para realizar seus cálculos. Uma pergunta que surge naturalmente é a seguinte: Qual é a relação existente entre essas tabelas? A seguir temos parte de uma tabela muito utilizada.

————	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5	Coluna 6
Linha 1	1	0,000	11	2,298	21	3,044
Linha 2	2	0,693	12	2,485	22	3,091
Linha 3	3	1,099	13	2,565	23	3,135
Linha 4	4	1,386	14	2,639	24	3,178
Linha 5	5	1,609	15	2,708	25	3,219
Linha 6	6	1,792	16	2,772	26	3,258
Linha 7	7	1,946	17	2,833	27	3,296
Linha 8	8	2,079	18	2,890	28	3,332
Linha 9	9	2,197	19	2,944	29	3,367
Linha 10	10	2,303	20	2,996	30	3,401

Tabela 3.3: Tabela Misteriosa

(a) Existem algumas constantes famosas na literatura matemática. Uma delas é a constante de Euler, denotada pela letra e. Esse número e é irracional e o mesmo pode se aproximado por $e = 2,71821$. Resolver equações do tipo $e^k = 2$ no conjunto dos números reais, tomando um valor aproximado para e, digamos, $e = 2,7182$ significa encontrar um k real tal que $(2,7182)^k = 2$. A solução da equacão $e^k = 2$ com aproximação por falta com três casas decimais é $k = 0,693$. Essa solução será denotada por $\log_e 2$, ou seja, $\log_e 2 \approx 0,693$. Definimos $\ln_e r$ como sendo a solução $x \in \mathbb{R}$ da equação $e^x = r$. A Tabela 3.3 contém valores aproximados de $\ln_e r$, para $r \in \mathbb{N}$ entre 1 e 30.

(i) $\log_e 1$;

(ii) $\log_e 8$;

(iii) $\log_e 11$;

(iv) $\log_e 5$;

(v) $\log_e 7$;

(vi) $\log_e 10$;

(vii) $\log_e 15$.

(b) Encontre os valores de cada divisão a seguir:

(i) $1,946 \div 0,845 =$

(ii) $1,792 \div 0,778 =$

(iii) $2,639 \div 1,146 =$

(c) Observe que no item (b), 1,946 pertence à linha 7 e coluna 2 da Tabela 3.3 e 0,845 pertence à linha 7 e coluna 2 da Tabela 3.1, ou seja, possuem a mesma localização em suas respectivas tabelas. O mesmo ocorre com os pares 1,792 e 0,778 e, 2,639 e 1,146. Os resultados que você obteve nos subitens (i) (ii) e (iii) do item (b) foram aproximadamente iguais? Se sua resposta foi sim, expresse esse valor com três casas decimais.

(d) Será que as divisões envolvendo números das Tabelas 3.3 e 3.1 , respectivamente, que estão nas colunas de ordem par e possuem a mesma localização sempre tem como resultado, aproximadamente, o número 2,303?

(e) Qual é a relação existente entre os números que estão nas colunas de ordem par da tabela 3.3 e os que estão nas colunas de ordem par da tabela 3.1 que possuem a mesma localização em suas respectivas tabelas?

(f) Com três casas decimais, a igualdade

$$\log_e 7 = \log_{10} 7 \cdot \log_e 10$$

é verdadeira? Justifique sua resposta usando as Tabelas 3.3 e 3.1.

(g) De acordo com os itens anteriores, sendo a, b e c números reais positivos com b e c diferentes de 1, a fórmula

$$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_c b}$$

é válida? Justifique usando argumentos matemáticos.

(h) Classifique as igualdades a seguir em verdadeira ou falsa, de acordo com a Tabela 3.3, justificando cada caso.

(i) $\log_e 15 = \log_e(3 \cdot 5) = \log_e 3 + \log_e 5.$

(ii) $\log_e(2 \cdot 3) = \log_e 2 + \log_e 3.$

(iii) $\log_e(3 \cdot 7) = \log_e 3 + \log_e 7.$

(iv) $\log_e(r \cdot s) = \log_e r + \log_e s,$ com $r > 0,$ e $s > 0.$

(v) $\log_e\left(\frac{15}{5}\right) = \log_e 15 - \log_e 5.$

(vi) $\log_e\left(\frac{30}{5}\right) = \log_e 30 - \log_e 5.$

(vii) $\log_e\left(\frac{15}{5}\right) = \log_e 15 - \log_e 5.$

(viii) $\log_e\left(\frac{r}{s}\right) = \log_e r - \log_e s,$ com $r > 0,$ e $s > 0.$

(ix) $2 \cdot \log_e 3 = \log_e 9 = \log_e 3^2.$

(x) $k \cdot \log_e r = \log_e r^k,$ para $r > 0,$ e k um número real qualquer.

(i) Encontre os valores dos seguintes quocientes:

(i) $\frac{\log_e 5}{\log_{10} 5}.$

(ii) $\frac{\log_e 7}{\log_{10} 7}.$

(iii) $\frac{\log_e 10}{\log_{10} 10}.$

(iv) $\frac{\log_e 15}{\log_{10} 15}.$

Qual é a relação entre $\log_e 5$ e $\log_{10} 5$? E entre $\log_e r$ e $\log_{10} r$, com $r > 0$?

Atividade 3.

O ser humano sempre procura compreender os fenômenos que ocorre na natureza. Um desses fenômenos que chamou a atenção há décadas foi o fenômeno da desintegração radioativa. Ele ocorre quando átomos de uma substância radioativa possuem a tendência de se desintegrarem, emitindo partículas e transformando-se em outra substância não-radioativa.

(a) Um cientista fez um experimento com uma amostra de uma substância radioativa para verificar o valor da massa $M(t)$ em kg da substância radioativa existente após t anos. O resultado desse experimento está exposto na tabela a seguir:

Período (t)	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4	$4,5$	5
Massa $(M(t))$	8	$6,93$	6	$5,20$	$4,50$	$3,90$	$3,38$	$2,92$	$2,53$	$2,19$	$1,90$

Tabela 3.4: Dados do experimento

De acordo com a Tabela 3.4, qual o valor (em kg) da massa existente inicialmente? E após 4 anos?

(b) Esboce um gráfico com as informações da Tabela 3.4. Esse gráfico representa uma função? Explique.

(c) Sendo $M(t)$ a massa da substância existente após t anos, calcule os quocientes

$$\frac{M(t+1)-M(t)}{M(t)}$$

para $t \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots, 5\}$. Quais foram os valores (com duas casas decimais) dos quocientes?

(d) Resolva o item anterior trocando o quociente $\frac{M(t+1)-M(t)}{M(t)}$ pelo quociente $\frac{M(t+2)-M(t)}{M(t)}$. Quais foram os valores (com duas casas decimais) dos quocientes?

(e) O quociente $\frac{M(t+h)-M(t)}{M(t)}$ é denominado acréscimo relativo. No item anterior você calculou os valores do quociente $\frac{M(t+h)-M(t)}{M(t)}$ com $h = 2$, para vários valores de t. Esse acréscimo relativo depende de t? Justifique.

(f) Fixe t, digamos $t = 1$ ano e calcule o quociente $\frac{M(t+h)-M(t)}{M(t)}$ para $h = 1$, $h = 2$ e $h = 3$. Quais foram os valores obtidos? Os valores do quociente $\frac{M(t+h)-M(t)}{M(t)}$ dependem de h? Justifique.

(g) O Teorema da caracterização da função de tipo exponencial garante que quando temos uma função $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ crescente ou decrescente, tal que para $t, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $\frac{M(t+h)-M(t)}{M(t)}$ depende apenas de h, mas não de t, se $b = M(0)$ e $a = M(1)/M(0)$ tem-se $M(t) = ba^t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Encontre uma expressão matemática que expressa a massa M dessa amostra, em quilogramas, em função do tempo t, em anos. (Em seus cáculos, use aproximações com duas casas decimais).

(h) Após quantos anos, aproximadamente, a massa da substância radioativa existente é aproximadamente igual a $\frac{1}{2}$ do valor da quantidade de massa inicial? (Em seus cálculos, use aproximações com duas casas decimais).

(i) Sendo $a > 1$, após quantos anos, a massa (em kg) da substância radioativa existente é aproximadamente igual a $\frac{1}{a}$ do valor da quantidade de massa inicial?

(j) Cite alguns problemas que podemos resolver usando função exponencial e função logarítmica.

(k) Ao resolver o item (h), em um dado momento, você resolveu uma equação exponencial. Como podemos garantir que tal equação resolvida possui uma única solução? Existe alguma relação entre a função exponencial e a função logarítmica?

Atividade 4.

Quando o juro vai sendo incorporado ao capital após cada período de tempo, ele é chamado de juro composto. A soma do capital (C) com o juro (J) é o que chamamos de montante (M). A taxa é aplicada sempre em relação ao montante de cada período. Para se ter uma ideia, para se obter o montante, produzido por um capital de R$ 4.000,00 aplicada à taxa de juros de 10% ao ano, durante três anos, procedemos como está descrito na Tabela 3.5:

Prazo (em anos)	Saldo (início de cada ano)	Juro (cada ano)	Montante (cada ano)
1° ano	4.000,00	10% de 4.000,00	4.400,00
2° ano	4.400,00	10% de 4.400,00	4.840,00
3° ano	4.840,00	10% de 4.840,00	5.324,00

Tabela 3.5: Cálculo do Montante para 3 meses e juros de $10\%a.a.$

Então, o montante ao final de três anos é R$ 5.324,00.

Um fato interessante é que sendo $M(t)$ o montante obtido após t anos de aplicação, podemos chegar a mesma resposta da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
M(1) = 4400 &= 4000 + 0,1 \cdot 4000 \\
&= 4000 \cdot (1 + 0,1) \\
M(2) = 4840 &= M(1) + 0,1 \cdot M(1) \\
&= 4000 \cdot (1 + 0,1) + 0,1 \cdot 4000 \cdot (1 + 0,1) \\
&= 4000 \cdot (1 + 0,1)^2 \\
M(3) = 5324 &= M(2) + 0,1 \cdot M(2) \\
&= 4000 \cdot (1 + 0,1)^2 + 0,1 \cdot 4000 \cdot (1 + 0,1)^2 \\
&= 4000 \cdot (1 + 0,1)^3
\end{aligned}$$

Logo,

$$M(3) = 4000 \cdot (1 + 0,1)^3.$$

E para n anos, como podemos escrever o valor de $M(n)$, para n natural?

Situações como a descrita no exemplo anterior fazem parte do dia-a-dia de muitos brasileiros. As movimentações financeiras geralmente exigem que o cidadão tenha alguma habilidade para ter condições de compreender alguns procedimentos que as agências bancárias utilizam para calcular o montante após uma aplicação de um capital por um certo período de tempo à uma taxa fixa.

Nesse contexto, considere um capital que inicialmente era de R$ 8.000,00 aplicado à juro composto à uma taxa de 5% ao ano durante 15 anos.

(a) Complete corretamente a Tabela 3.6 a seguir, utilizando se preferir, uma calculadora:

Prazo (em anos)	Saldo (início de cada ano)	Juro (cada ano)	Montante (cada ano)
1° ano			
2° ano			
3° ano			
4° ano			
5° ano			
6° ano			
7° ano			
8° ano			
9° ano			
10° ano			
11° ano			
12° ano			
13° ano			
14° ano			
15° ano			

Tabela 3.6: Cálculo do Montante para 15 meses à juros de 5% a. a.

(b) Se $C(0)$ é o capital inicial e $i\%$ é a taxa de juro anual, qual deve ser o valor do montante $M(t)$ após t anos?

(c) Em qual ano, o montante obtido ficou mais próximo do dobro do capital aplicado inicialmente?

(d) Complete a Tabela 3.6 para a mesma taxa de juro ao ano (5%) e para o mesmo período de aplicação (15 anos) de um capital de:

(i) R$ 100,00;

(ii) R$ 150,00;

(iii) R$ 200,00.

e responda os itens (a), (b) e (c) para estes casos.

(e) Nos casos (i), (ii), (iii) do item anterior, o que ocorreu com o montante no 14^{o} ano? Tem alguma relação com o capital inicial? É aproximadamente igual ao dobro do capital inicial? Será que para qualquer valor do capital inicial aplicado à taxa de 5% ao ano, no 14º ano o montante será praticamente igual ao dobro do valor do capital inicial? Justifique sua resposta com argumentos matemáticos.

A justificativa formal do fato em que no 14º mês o montante é aproximadamente igual ao dobro do capital inicial pode ser encontrada no Apêndice A.

Capítulo 4

Comentários a respeito das atividades

4.1 Atividade 1

Nessa atividade é colocada uma tabela e com o uso desta, é feito o produto $2 \times 4 = 8$. Em seguida, foi proposto ao aluno, efetuar cálculos usando o mesmo procedimento adotado para calcular $2 \times 4 = 8$.

O item (a) é proposto com objetivo de levar o aluno a identificar que qualquer par de elementos situados em colunas de ordem ímpar pode-se efetuar multiplicações entre eles usando a tabela.

O item (b) é proposto com objetivo de ilustrar como foi que a ideia de logaritmo surgiu, e como eram realizados os cálculos durante os séculos XVI e XVII.

Os itens (c) e (d) são colocados para que o aluno possa identificar que além da multiplicação, a divisão entre elementos da tabela que se localizam em colunas ímpares também podem ser efetuadas com o uso da tabela.

Já no item (e) é feito um comentário a respeito de como pode ser feito o cálculo da potência 5^2 e em seguida é questionado se poderíamos calcular outras potências de números que se localizam em colunas de ordem ímpar. A resposta para esse questionamento é sim. Em seguida, no item (f), é proposto o cálculo de algumas potências usando a tabela.

É importante destacar que atualmente, os cálculos propostos nos itens anteriores podem ser efetuados sem nenhuma dificuldade, porém, o objetivo dessa atividade é mostrar uma utilidade dessa Tabela à época antiga.

Um ponto importante dessa atividade é o comentário a respeito da resolução de equações exponenciais. Esse comentário tem como objetivo, levar o aluno a compreender que os logaritmos nada mais são do que a soluções de equações exponenciais. Com isso, o aluno pode perceber que $\log_{10} 2 \approx 0,301$ e com o auxílio do professor, poderá perceber que os elementos das colunas de ordem ímpar da Tabela 3.1 são soluções aproximadas de equações do tipo $10^x = a$.

Após esses reconhecimentos, o item (g) procura proporcionar ao aluno reconhecer que a Tabela 3.1 nada mais é do que uma tábua de logaritmos na base 10, dos números naturais de 1 à 30.

O item (h) ao ser resolvido pode levar o aluno à identificação das propriedades principais dos logaritmos, utilizando a Tabela 3.1. Os subitens (iv), (viii) e (x) são as generalizações das três propriedades fundamentais, as quais estão demonstradas no Capítulo 2 para auxiliar o professor.

Os itens (i) e (j) são exercícios análogos aos anteriores (itens (a)-(h)). Eles são colocados com intuito de deixar claro que podemos calcular logaritmos de números decimais e que as propriedades destacadas no item (h), ainda continuam válidas.

4.2 Atividade 2

Na Atividade 2 é apresentada uma tábua de logaritmos na base e. Essa constante é conhecida na literatura matemática como constante de Euler, que denotamos por e e tem o valor aproximado de $2,71828...$.

O número e é irracional. Então, não conhecemos seu valor exato, somente aproximações. Por isso, resolver equações do tipo $e^k = 2$ no conjunto dos números reais, tomando $e = 2,71828$, significa encontrar um k real tal que satisfaça a equação $(2,71828)^k = 2$. A solução com aproximação por falta com três casas decimais é $k = 0,693$. Essa solução é denotada por $\log_e 2$, ou seja, $\log_e 2 = 0,693$, número que encontramos na Tabela 3.3.

O professor deve convidar os alunos a verificar que os elementos que se localizam nas colunas de ordem ímpar da Tabela 3.3 são soluções aproximadas, com três casas decimais das equações do tipo $e^k = a$. Portanto, a tabela 3.3 é uma pequena tábua de logaritmos na base e dos números naturais de 1 à 30.

Nos itens (b), (c), (d) e (e) a ideia é verificar que com uma aproximação de três casas decimais, existe uma constante que relacionam os elementos das duas tabelas que possuem mesmas localizações em suas respectivas tabelas, valor este denominado constante de mudança de base (da base 10 para base e).

4.3 Atividade 3

Nessa atividade, inicialmente no item (a) temos uma tabela que contém dados de um experimento. Nela, são exibidos alguns dados desse experimento, tais como os valores da quantidade de massa da substância, existente após n anos, para n natural entre 0 e 30 anos. Esse item se torna importante devido ao fato da necessidade do aluno se reiterar do problema. A tabela dá uma ideia de como esses valores crescem ou decrescem (nesse caso, decrescem).

O item (b) leva o aluno a perceber que com os valores da tabela podemos esboçar um gráfico e ter uma melhor visualização do problema. Além disso, podemos também verificar se o gráfico pode representar uma função.

Já as resoluções dos itens (c), (d), (e) e (f) devem levar o aluno a perceber que os acréscimos relativos não dependem de t (tempo) e sim de h.

No item (g), é destacada a caracterização da função de tipo exponencial, muito importante para detectarmos quais fenômenos podemos modelar usando essa função. Uma discussão interessante sobre a caracterização da função de tipo exponencial é feita em [7].

No item (h) temos um fato que na literatura matemática é conhecido como meia vida. A meia vida consiste no período necessário para que a massa de uma substância se reduza a sua metade. Já no item (i) temos a generalização do item (h).

Os itens (j) e (k) abordam fatos que são determinantes para a resolução das equações exponenciais, que é, o fato da função exponencial $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ ser bijetora. Ser uma correspondência biunívoca permite não só garantir a existência da solução, mas também a unicidade dessa solução.

4.4 Atividade 4

Na Atividade 4, é proposto um problema de juro composto, aparentemente é um problema como quaisquer outros que aparecem nos livros didáticos. Esse problema se torna interessante devido ao fato que inicialmente, no item (a), é solicitado que o aluno complete a tabela 3.6. e em seguida, no item (b) e (c) são pedidos que o aluno responda qual o montante após t anos. A ideia aqui é levar o aluno a perceber que a função exponencial pode ser usada para modelar o problema em questão.

O item (d) aborda um ponto importante, que torna essa atividade diferenciada daquelas de mesma natureza que encontramos nos livros didáticos, o fato de existir um instante onde o montante será igual a aproximadamente o dobro do capital aplicado.

Os itens (e) e (f), são propostos para provocar o aluno para que este possa chegar a uma generalização da famosa regra dos 70, utilizadas em diversas agências bancárias de nosso país.

Capítulo 5

Considerações finais

O ensino de matemática está passando por transformações, atividades contemplando apenas a manipulação não são mais adequadas para o modelo de ensino que se propõe atualmente. A dinâmica do mundo moderno exige de todos, conhecimento sólido de matemática para que consigam tomar decisões de forma inteligente.

Diante desse cenário, Professores buscam diariamente metodologias que possam levar os alunos a compreender os conceitos matemáticos, necessários para uma formação sólida e efetiva.

Após muitos anos lecionando, percebemos que o logaritmo sem dúvida, é um tema que muitos docentes sentem dificuldades em ensinar no 1º ano do Ensino Médio. Os motivos são vários, dentre eles está o fato da maioria dos livros didáticos mais utilizados no nosso país não trazerem um material que contemplem o conceito, as propriedades e as aplicações.

Diante disso, procuramos elaborar uma sequência didática sobre a ótica dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e da resolução de problemas, que possa ser aplicada por docentes em turmas de 1º ano do Ensino Médio. Nessa elaboração, pensamos em atividades que pudessem levar o aluno a compreender o conceito, as propriedades fundamentais e algumas aplicações do logaritmo.

Essas atividades são passíveis de ajustes que podem ser feitas pelos docentes de acordo com as características de cada turma. Esperamos que os professores que lecionarem no 1º ano do Ensino Médio possam utilizar essa sequência de atividades em suas aulas, seguindo as orientações estabelecidas no presente material de modo que possa tornar a aula de matemática um ambiente propício para ocorrer uma aprendizagem significativa.

Por fim, esperamos que esse trabalho seja o começo de um estudo que pode ser aprofundado por outros docentes que pretendem oferecer um ensino de qualidade, onde todos possam compreender e desfrutar da beleza da matemática.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Matemática. Brasília: MEC/SEF, 2001.

[2] BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*. Brasília: MEC/SEF, 2006.

[3] BRASIL. MEC. SEF. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília, 2000.

[4] DANTE, Luiz Roberto. *Formulação e resolução de problemas de matemática*. São Paulo, Ática, 2009.

[5] FUNÇÕES. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_3_2.pdf>. Acesso em 28 jan 2013.

[6] GENTIL, N.: MARCONDES, C. A et al. *Matemática Novo Ensino Médio*. São Paulo, Ática, 2002.

[7] LIMA, Elon Lages et al. *A Matemática do Ensino Médio (Volume 1)* Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2006.

[8] LIMA, Elon Lages. *Logaritmos*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2009.

[9] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise*. Vol. 1. (11^a edição). Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2006.

[10] LIMA, Elon Lages. *Exames de textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio* . Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2001.

Apêndice A

Demonstração da regra dos 70

Essa demonstração pode ser encontrada em [5]. Para essa prova, usaremos a função logaritmo natural de x, $x > 0$, que aqui denotamos por $\ln(x)$, sendo $\ln(x)$ o valor de r tal que

$$e^r = x.$$

Pode-se mostrar, basta consultar [8], que

$$y = \ln(x) \Longleftrightarrow x = e^y.$$

Existe uma forma prática para calcular o valor numérico do logaritmo de um números real $x > 0$, mesmo que aproximado. Para isso, basta usar a expressão a seguir que pode ser encontrada em textos de cálculo diferencial e integral:

$$\ln(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \ para - 1 < x < 1.$$

Essa expressão, conhecida como série de Taylor da função $\ln(1+x)$ permite obter uma primeira aproximação de $\ln(1+x)$ por x para valores de x positivos e próximos de 0.

Um capital C, aplicado à taxa anual de $i\%$, transforma-se, após 1 ano, em

$$C(1) = C + \frac{i}{100}C = C\left(1 + \frac{i}{100}\right).$$

Após dois anos teremos

$$C(2) = C(1) + \frac{i}{100}C(1) = C\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2.$$

De forma geral, após t anos teremos

$$C(t) = C\left(1 + \frac{i}{100}\right)^t.$$

Logo, o tempo d necessário para a duplicação do capital é obtido da equação:

$$2C = C\left(1+\frac{i}{100}\right)^d \text{ ; ou seja, } 2 = \left(1+\frac{i}{100}\right)^d.$$

Logo,

$$d = \frac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{i}{100}\right)}.$$

Usando a aproximação mencionada para o cálculo de $\ln\left(1+\frac{i}{100}\right)$ tem-se

$$\ln\left(1+\frac{i}{100}\right) \approx \frac{i}{100},$$

e sendo $\ln(2) \approx 0,70$, podemos escrever

$$d = \frac{0,70}{\frac{i}{100}} = \frac{70}{i}$$

Na atividade proposta temos $i = 5\%$. Então, para saber em quantos anos o capital irá dobrar basta fazer $70/i = 70/5 \approx 14$.