UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS

Valderi Candido da Costa

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto

Campina Grande - PB
Abril/2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

C837n Costa, Valderi Candido.

Números Construtíveis / Valderi Candido da Costa. – Campina Grande, 2013.
51 f.:il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2013.

"Orientador: Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto".
Referências.

1. Geometria. 2. Números construtíveis. 3. Régua e compasso. 4. GeoGebra. I. Souto, Marco Aurélio Soares. II. Título.

CDU 514(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS

por

VALDERI CANDIDO DA COSTA †

Trabalho Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Bolsista CAPES

NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS

por

Valderi Candido da Costa

Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado por:

Prof. Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho - UFCG

Elisandra F. Gloss de Moraes

Prof. Dra. Elisandra de Fátima Gloss de Morais - UFPB

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Abril/2013

Dedicatória

A minha mãe, a minha esposa e aos meus irmãos por serem a base da minha vida, pelo apoio, incentivo e paciência diante das minhas angústias e temores e pelo carinho, amor e respeito a mim reservados, dedico-lhes mais esta grande conquista.

Agradecimentos

À Deus, minha fortaleza, que me deu a oportunidade e me proporcionou força de vontade para que este sonho fosse concretizado;

Ao meu orientador Marco Aurélio, pela paciência, ensinamentos e estímulo;

Aos meus colegas e amigos pela ajuda e pelas conversas descontraídas;

À Secretaria de Educação de Areia pelo apoio e pela liberação de minha carga horária semanal para que eu pudesse me dedicar ao PROFMAT;

Por fim, à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

Resumo

Este trabalho busca contribuir com uma prática pedagógica que possibilite aos alunos perceberem o uso das construções geométricas, bem como da importância das mesmas para a resolução de problemas que envolvem os números construtíveis. Para isso, são apresentados fatos históricos sobre geometria e construções geométricas com o objetivo de conhecer mais sobre o surgimento desses conteúdos e, no caso das construções, sobre quais são os únicos instrumentos e procedimentos que podem ser utilizados para realizá-las. Veremos, portanto, que esses instrumentos são a régua e o compasso e que os procedimentos são o traçado de retas e de circunferências. Além disso, resolvemos vários problemas, envolvendo construções, com o auxílio do GeoGebra, tentando estimular tanto o ensino dos números construtíveis, quanto o uso desse ambiente de geometria dinâmica. Também apresentamos os três problemas clássicos gregos, cuja solução, com régua e compasso, não é possível, a não ser aproximadamente. Enfatizamos, ainda, a definição e algumas propriedades dos números construtíveis, mostrando cada uma delas através de construções. Finalmente, mostramos exemplos e sugerimos atividades que, acreditamos, incentivam a construção de alguns números e o uso do GeoGebra.

Palavras Chaves: Números construtíveis. Régua e compasso. GeoGebra.

Abstract

The aim of this work is to contribute to a pedagogical practice that enables students realize the use of geometric constructions, as well as the importance of the same to solve problems involving constructible numbers. For this, we present historical facts about geometry and geometric constructions in order to know more about the emergence of such content and, in the case of constructions, which are the only tools and procedures that can be used to perform them. We will see, therefore, that these tools are the ruler and compass and that procedures are tracing straight lines and circles. Moreover, we solved several problems involving such constructions, with the help of GeoGebra, trying to stimulate both the teaching of constructible numbers, as the use of dynamic geometry environment. Also we present three classical Greek problems, whose solution, with ruler and compass, is impossible, unless approximately. We further emphasize the definition and some properties of constructible numbers, each showing through constructions. Finally, we show examples and suggest activities that we believe will encourage the construction of some numbers and the use of GeoGebra.

Keywords: Constructible numbers. Ruler and compass. GeoGebra.

Lista de Figuras

Notação

$\overline{AB}$ .... Segmento de reta
AB .... Medida do segmento de reta
$\overrightarrow{AB}$ .... Semirreta
$A\widehat{O}B$ e $\widehat{P}$ .... Amplitude do ângulo
$\overleftrightarrow{AB}$ .... Reta
$\perp$ .... Perpendicularismo
$\parallel$ .... Paralelismo
$\neq$ .... Diferente

Lista de Símbolos

$\mathbb{Z}$ .... Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$ .... Conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$ .... Conjunto dos números reais
$\mathscr{C}$ .... Conjunto dos números construtíveis

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Ensinar Matemática ainda é um desafio, especialmente para quem, como aluno, viveu a Matemática das regras, do mecanicismo, do estudar para passar. Embora as novas pesquisas estejam voltadas para uma visão de que saber Matemática implica fazer Matemática, ou seja, reconstruir conceitos que a humanidade levou milênios para construir, muitos professores, por desconhecerem tais pesquisas e sentirem-se inseguros, recorrem constantemente aos livros didáticos e listas de exercícios objetivos.

Quando se trata de problemas de construção geométrica, com régua e compasso, a situação é ainda mais complicada , ou seja, os alunos, e também alguns professores, encontram-se tão acostumados a todo esse ensino mecanizado que sequer verificam se é possível fazer determinada construção. Eles sempre enfrentam dificuldades no ensino-aprendizagem desses problemas por não compreenderem que nem sempre é possível obter uma solução gráfica adequada, mesmo resolvendo-os com o auxílio de métodos para sua construção. Isto acontece porque nem todo número é construtível.

Nesta proposta, trataremos das noções básicas de números construtíveis, bem como trabalharemos problemas que envolvam a construção geométrica, no software GeoGebra, desses números, tentando explicar as propriedades aqui utilizadas e visando contribuir para enriquecer a prática pedagógica utilizada hoje.

Este tema – *Números Construtíveis* – despertou-nos o interesse e constitui objeto de estudo deste trabalho que responde aos seguintes questionamentos: *Que motivos levam o aluno a não se interessar pelas construções geométricas de determinados problemas propostos em sala de aula? Até que ponto a metodologia do professor enfatiza a importância dos números construtíveis para alguns conteúdos do Ensino Médio?* Partimos das hipóteses iniciais de que a falta de conhecimentos prévios e necessários para o estudo de números construtíveis pelo aluno torna-o desmotivado e a metodologia utilizada pelo professor na sala de aula não propicia ao aluno compreender e identificar as várias aplicações desses números.

Cabe ressaltarmos quão importante é esta pesquisa por apresentar um problema constante nas salas de aula e porque os resultados aqui apresentados poderão auxiliar uma prática pedagógica que valorize o estudo dos números construtíveis, embasando-a e enriquecendo-a teoricamente.

Devido aos obstáculos pelos quais professores e alunos passam e tentando facilitar o entendimento do conceito de números construtíveis, bem como buscar a forma mais adequada de aplicá-los em situações-problemas, desenvolvemos esta pesquisa voltada para a utilização de números construtíveis, em diversos conteúdos, por alunos do 2º e 3º ano do Ensino Médio, que já dominam alguns conceitos básicos de geometria.

1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo geral contribuir para uma prática pedagógica em sala de aula que possibilite aos alunos perceberem a importância das construções geométricas bem como dos números construtíveis na compreensão e solução de diversos problemas. E como objetivos específicos:

- Estimular o uso de construções geométricas na solução de alguns problemas;
- Compreender o significado de números construtíveis;
- Mostrar, através do uso de ambientes de geometria dinâmica, algumas propriedades características desses números;
- Identificar em quais situações esses números podem ser aplicados;
- Propor atividades que estimulem alunos e professores a usarem os ambientes de geometria dinâmica, em particular, com o recurso régua e compasso, nas construções;
- Tornar o ensino-aprendizagem de Matemática atrativo e estimulante, apresentando-a como um conhecimento imprescindível na vida cotidiana.

1.2 Organização

Este TCC está organizado da seguinte forma: Além desta Introdução (Capítulo 1), o Capítulo 2 apresenta fatos históricos que permeiam a Geometria e as Construções Geométricas, bem como dá exemplos dessas construções, visando conhecer os instrumentos e procedimentos que são permitidos para realizá-las. Além disso, são propostos alguns exercícios ao longo do texto, com os passos para construí-los, e cujas soluções (ou construções) estão no Apêndice A. Neste Capítulo (Capítulo 2) também são apresentados alguns problemas que não são possíveis de serem construídos de acordo com os critérios estabelecidos pelas construções geométricas. O Capítulo 3 apresenta números construtíveis, com suas definições e suas propriedades, que são mostradas através de construções, segundo os critérios estabelecidos no Capítulo anterior (Capítulo 2). Este Capítulo apresenta, ainda, alguns princípios básicos das construções, mostrando os únicos procedimentos permitidos e as operações elementares que são realizadas com os mesmos. Já no Capítulo 4, apresentamos algumas atividades que são sugeridas, visando aperfeiçoar a prática adquirida nas construções e no uso do GeoGebra. No Capítulo 5 estão expostas as palavras finais e possíveis implicações pedagógicas desta pesquisa. Por fim, temos as Referências Bibliográficas e os Apêndices A e B.

Capítulo 2

Um Breve Histórico

Apresentamos aqui alguns aspectos da História da Matemática relacionados, especificamente, com a Geometria e com as Construções Geométricas, partindo do pressuposto de que professores e alunos devem conhecer os fatos históricos que envolvem esses conteúdos.

2.1 Geometria

Conforme foi evoluindo, a humanidade passou a ter necessidade como a de contar e a de medir coisas. A Geometria, por sua vez, provavelmente surgiu para suprir a necessidade que o homem tinha de medir. Não só a de medir comprimentos, mas também a de medir ângulos. Em construções, por exemplo, saber medir ângulos, assim como distâncias, era fundamental. Isto fica cada vez mais evidente quando, há cerca de 2.500 anos atrás, Herótodo (apud PRADO Jr., 1980, p. 115), considerado o pai da história, no volume II de sua obra Histórias, fala sobre um rei egípcio chamado Sesóstris, que governou o Egito por volta do ano 2.000 a.C.. Heródoto comenta:

> Disseram que esse rei (Sesóstris) tinha repartido todo o Egito entre os seus Habitantes, e que tinha dado a cada um uma porção igual e retangular de terra, com a obrigação de pagar por ano certo tributo. Que se a porção de algum fosse diminuída pelo rio Nilo, ele fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra. Que ao mesmo tempo o rei enviaria medidores ao local e faria medir a terra, a fim de saber de quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado da terra.

Desta forma, percebemos que desde a antiguidade sentia-se a necessidade de se fazer medições. A própria palavra Geometria expressa bem isto, pois ela é derivada das palavras gregas: Geo (que significa *terra*) e Metron (que significa *medida*).

Construções como as pirâmides testemunham sobre um conhecimento sistemático da Geometria por parte dos egípcios. Contudo, há vários indícios de que outras civilizações antigas também possuíam conhecimentos geométricos. Araújo (2007, p. 1) afirma que: "... *assírios e babilônios já conheciam as principais figuras geométricas, bem como as noções* *de ângulos que usavam na medição de áreas e na Astronomia".* Civilizações como a China e a Hindu também possuíam tais conhecimentos. Os hindus, por exemplo, conheciam o teorema sobre o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo.

A Geometria é vista de um modo diferente apenas por volta da segunda metade do século VI a.C., na Grécia Antiga, quando, através dos esforços de Tales de Mileto (640 – 546 a.C.), Pitágoras (580 – 500 a.C.) e Eudoxio (408 – 355 a.C.), ela aparece como ciência dedutiva. Segundo Eves (1994, p. 7):

> Tales de Mileto (640 – 546 a.C.) foi um dos primeiros gregos a insistir que fatos geométricos devem ser estabelecidos por raciocínio lógico e não por observação, experimentação, tentativa e erro. Ele foi o fundador da geometria descritiva. Seus esforços serviram de base para o incomparável trabalho de Euclides (300 a.C.): Os Elementos.

Ainda de acordo com Eves (1994, p. 7): *"Os Elementos, obra memorável de Euclides, é uma cadeia dedutiva única de 465 proposições de álgebra geométrica grega".* Euclides registrou em sua obra, que consistia de 13 livros e que abordava conhecimentos de Geometria Plana e Espacial, Teoria dos Números e Álgebra Elementar Geométrica, todo o conhecimento de Geometria existente na época.

2.2 Construções Geométricas

Construções Geométricas é uma parte da Matemática destinada a explicar ou justificar porque certos procedimentos conduzem à determinadas construções. De maneira alguma, construções geométricas deve ser confundido com desenho geométrico, uma vez que nesse último são usados outros instrumentos (como o esquadro e o transferidor, por exemplo), além da *régua* e do *compasso*, que são os únicos permitidos nas construções geométricas.

As construções geométricas tiveram início há cerca de 2.500 anos, onde não se usava o termo calcular, mas construir, e seu curso, no decorrer da história, se deu paralelo a Geometria Euclidiana. Ambas sempre ligadas, ou seja, uma não existia sem a outra.

Com origem na Grécia Antiga, tais construções, bem como suas regras, são atribuídas a Platão (cerca de 390 a.C.), o qual estabeleceu um rigoroso critério de trabalho: Deve-se utilizar apenas *régua*, que deve ser não graduada, e um *compasso*, que deve ser dobradiço, de tal forma que, segundo Eves (2004, p. 134), a régua é utilizada apenas para traçar uma reta por dois pontos distintos dados e o compasso é usado apenas para traçar uma circunferência com centro num ponto dado e que passa por outro ponto qualquer dado e também para transportar segmentos.

Como os postulados de *Os Elementos* (de Euclides) restringem o uso da *régua* e do *compasso*, esses instrumentos são conhecidos como *instrumentos euclidianos*. O compasso euclidiano era fechado, ou desmontado, assim que um de seus braços era retirado do papel.

Ainda de acordo com Eves (2004, p. 134), mesmo com essa descrição, o compasso euclidiano, ou compasso desmontável, como também era conhecido, era equivalente ao compasso moderno. Ambos, *régua* e *compasso*, não devem ser utilizados com outra finalidade.

Infelizmente, nas últimas décadas houve, no Mundo todo, uma decadência da Geometria nas escolas. Nada mais era justificado (através de construções, por exemplo), mas apenas mostrado. Atualmente, com o surgimento dos Programas (ou ambientes) de Geometria Dinâmica, como o Régua e Compasso, o Cabri e o GeoGebra, dentre outros, começou a se resgatar as Construções Geométricas e, portanto, a Geometria aos poucos está começando a ser justificada. Porém, há uma preocupação quanto ao uso apenas desses ambientes, deixando de lado as construções feitas em papel, como afirma Lamphier (2004, p. 6) sobre alguns livros:

> Ao invés de se concentrarem em papel e lápis, e nas construções com régua e compasso, os livros atuais tendem a enfatizar o uso de softwares de geometria dinâmica [...] Será verdade que as construções euclidianas usando régua e compasso em papel em breve serão coisas do passado?

Mas Lamphier (2004, p. 6) também afirma que, se bem usada, a tecnologia evita a *"imprecisão das construções feitas pelo homem"*.

Aqui, neste trabalho, tentaremos justificar as construções feitas através do GeoGebra (Os nossos "régua" e "compasso" serão virtuais), sem quebrar as regras básicas das construções geométricas. Para tanto, utilizaremos, do GeoGebra, apenas os recursos que funcionam como *régua* e *compasso*, pelo menos a princípio, já que, após justificar, não é necessário utilizar os mesmos procedimentos iniciais para traçar paralelas e perpendiculares, dentre outras construções, pois o GeoGebra possui recursos específicos para as mesmas.

Em outras palavras, significa que para traçar retas, segmentos de reta e semirretas, por exemplo, usaremos os recursos "reta", "segmento" e "semirreta", todos "definidos por dois pontos" (Sendo que tais pontos também podem ser obtidos com os recursos "novo ponto" ou "interseção de dois objetos") e que para traçar circunferências e transportar segmentos, por exemplo, usaremos os recursos "círculo dados centro e um de seus pontos" ou "compasso". O GeoGebra ainda permite traçar ângulos e desenhar polígonos. Sua vantagem em relação ao Régua e Compasso se dá pelo fato de ser mais completo, e em relação ao Cabri, pelo fato de ser gratuito, ou seja, de mais fácil acesso, e por ter o recurso entrada algébrica.

Tais recursos são úteis em sala de aula devido a familiaridade que os alunos vão ter, além de melhorar a aprendizagem dos conceitos. Para obter mais informações sobre o GeoGebra e outros softwares, bem como alguns exercícios de familiarização, consulte [3]. No Exercício 4.1.1.1, p. 37, e no *Apêndice B* deste trabalho, também constam algumas dicas e "curiosidades" sobre o GeoGebra.

2.2.1 Problemas básicos de Construção Geométrica

Em sua obra, Os Elementos, Euclides enuncia vários problemas de construções geométricas, cujas soluções são obtidas apenas com o auxílio de *régua* e *compasso*. Alguns desses problemas são destacados como proposições, como mostra a tradução feita por Irineu Bicudo (EUCLIDES, 2009):

1. **Livro I**
   - Proposição I – Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada (p. 99).
   - Proposição IX – Cortar em dois o ângulo retilíneo dado (p. 105).
   - Proposição X – Cortar em duas a reta limitada dada (p. 106).
   - Proposição XII – Traçar uma linha reta perpendicular à reta ilimitada dada, a partir do ponto dado, que não está sobre ela (p. 107).
   - Proposição XXXI – De um ponto dado conduzir uma linha reta paralela a outra linha reta dada (p. 121).
   - Proposição XXXIII – Sobre a reta dada e no ponto sobre ela, construir um ângulo retilíneo igual ao ângulo retilíneo dado (p. 122).
2. **Livro III**
   - Proposição I – Achar o centro do círculo dado (p. 152).
   - Proposição XVII – A partir do ponto dado, traçar uma linha reta tangente ao círculo dado (p. 167).
   - Proposição XXX – Cortar a circunferência dada em duas partes (p. 176).
3. **Livro IV**
   - Proposição IV – Inscrever um círculo no triângulo dado (p. 190).
   - Proposição VI – Inscrever um quadrado no círculo dado (p. 192).
4. **Livro VI**
   - Proposição X – Cortar a reta dada não cortada semelhantemente à dada cortada (p. 242).
   - Proposição XII – Dadas três retas, achar uma quarta em proporção (p. 243).
   - Proposição XIII – Achar uma média em proporção entre duas retas dadas (p. 244).

Observe que a linguagem utilizada por Euclides era bem diferente da atual. Ele, por exemplo, usava os termos “reta limitada” e “ângulo retilíneo” para indicar, respectivamente, *segmento de reta* e *ângulo reto*. Por esse motivo, escrevemos, logo abaixo, essas Proposições numa linguagem mais atual, levando-se em em conta o fato de que naquela época alguns termos matemáticos ainda não eram conhecidos. Vejamos então:

1. **Livro I**

   - Proposição I – Construir um triângulo equilátero de lado igual a um segmento de reta dado.
   - Proposição IX – Dividir em dois um ângulo reto dado (Achar a sua bissetriz).
   - Proposição X – Dividir em dois um segmento de reta dado (Achar o seu ponto médio).
   - Proposição XII – Traçar por um ponto dado uma reta perpendicular a uma reta dada.
   - Proposição XXXI – Traçar por um ponto dado uma reta paralela a uma reta dada.
   - Proposição XXXIII – Traçar por um ponto sobre uma reta dada uma perpendicular a essa reta.

2. **Livro III**

   - Proposição I – Achar o centro do círculo dado.
   - Proposição XVII – Traçar as tangentes a uma circunferência por um ponto dado na circunferência ou fora dela.
   - Proposição XXX – Traçar o diâmetro da circunferência dada.

3. **Livro IV**

   - Proposição IV – Inscrever um círculo no triângulo dado.
   - Proposição VI – Inscrever um quadrado no círculo dado.

4. **Livro VI**

   - Proposição X – Dividir um segmento dado em partes proporcionais a de um outro segmento dado.
   - Proposição XII – Dados três segmentos, achar um quarto em proporção (Quarta Proporcional).
   - Proposição XIII – Achar a média geométrica entre dois segmentos dados.

De acordo com Wagner (2005, p. 2), os primeiros problemas que devemos saber resolver com os instrumentos *régua* e *compasso* são os dois seguintes:

1. Traçar por um ponto dado uma reta perpendicular a uma reta dada.

2. Traçar por um ponto dado uma reta paralela a uma reta dada.

Como já vimos, esses problemas são a Proposição XII e a Proposição XXXI do **Livro I** que acabamos de citar.

Vejamos como resolver esses e outros problemas de construções geométricas:

Problema 2.2.1.1 *Dados uma reta r e um ponto P, traçar uma reta perpendicular*[1] *à r, passando por P.*

Solução: Temos dois casos a considerar:

(a) O ponto P está sobre a reta r (Acompanhe na Fig. 2.1).

Tome o compasso com uma abertura qualquer e, com centro em P, desenhe uma circunferência intersectando a reta r em dois pontos, digamos A e B. Depois, pegue o compasso, com abertura maior do que a metade de AB, e com centro em A e depois em B, trace outras duas circunferências que se intersectam em dois pontos, sendo um deles o ponto Q. Temos que $\overleftrightarrow{PQ} \perp r$.

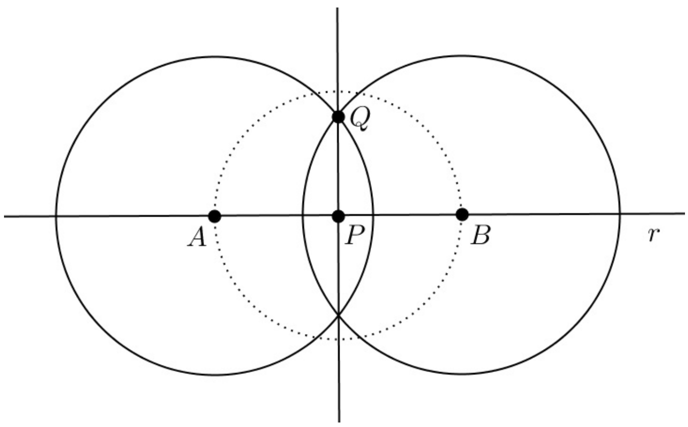


Figura 2.1: Retas perpendiculares 1.

Justificativa: Ao fazermos o primeiro arco, estamos garantindo que $PA = PB$, ou seja, P é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e, portanto, pertence a sua mediatriz (Definição 2.2.1, p. 13). Do mesmo modo, ao fazermos os outros dois arcos que tem Q como um dos pontos de intersecção, estamos garantindo que $AQ = BQ$, ou seja, o ponto Q também pertence a mediatriz de $\overline{AB}$ (Definição 2.2.1, p. 13). Temos que $\overleftrightarrow{PQ} \perp \overline{AB}$.

[1]Duas retas são perpendiculares quando se instersectam formando entre si quatro ângulos de 90º.

(b) O ponto P está fora da reta r (Acompanhe na Fig. 2.2).

Tome o compasso com uma abertura maior do que a distância de P à r e, com centro em P, desenhe uma circunferência intersectando a reta r em dois pontos, digamos A e B. Depois, pegue o compasso com a mesma abertura, centro em A e depois em B, e trace outras duas circunferências que se intersectam em dois pontos: P (já dado) e C. Temos que $\overleftrightarrow{PC} \perp r$.

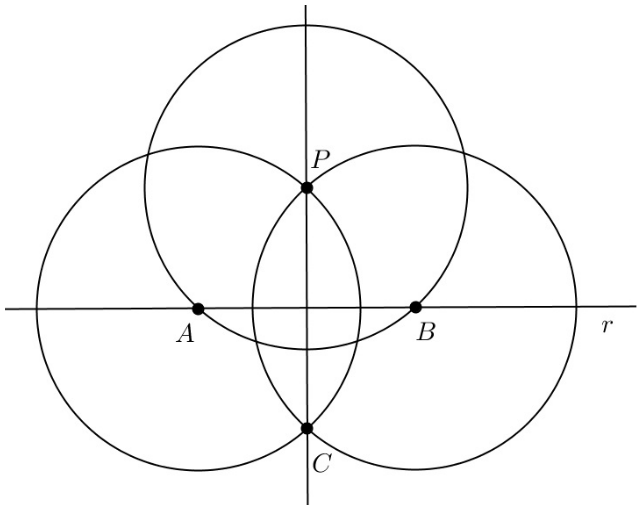


Figura 2.2: Retas perpendiculares 2.

Justificativa: Ao fazermos o primeiro arco, estamos garantindo que $PA = PB$, ou seja, P pertence à mediatriz de $\overline{AB}$ (Definição 2.2.1, p. 13). Do mesmo modo, ao fazermos os outros dois arcos que se intersectam em P e C, estamos garantindo que $CA = CB$, ou seja, o ponto C também pertence a mediatriz de $\overline{AB}$ (Definição 2.2.1, p. 13). Logo, $\overleftrightarrow{PC} \perp \overline{AB}$.

Problema 2.2.1.2 *Dados uma reta r e um ponto P fora dela, traçar uma reta paralela*[2] *à r passando por P.*

Solução (Acompanhe na Fig. 2.3)**:** Tome o compasso com uma abertura maior do que a distância de P à r e, com centro em P, desenhe uma circunferência intersectando a reta r em dois pontos. Tome um desses pontos, digamos, A. Com a mesma abertura e com centro em A, desenhe outra circunferência intersectando r em outros dois pontos. Tome, novamente, um desses pontos, digamos, B. Depois, com a mesma abertura e centro em B, desenhe mais uma circunferência intersectando a primeira em C. Temos que $\overleftrightarrow{PC} \parallel r$.

[2]Duas retas são paralelas quando são coplanares e não se intersectam.

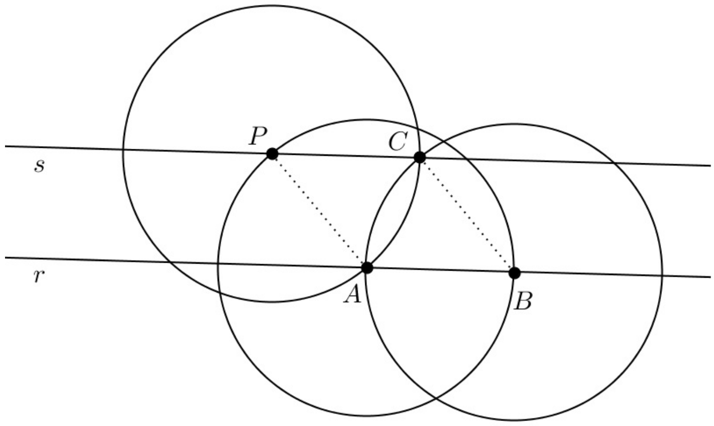


Figura 2.3: Retas paralelas.

Justificativa: Observe que $PA = AB = BC = CP$, ou seja, $PABC$ é um losango[3] e, consequentemente, um paralelogramo[4]. Portanto, seus lados opostos são paralelos. Logo, $\overline{PC} \parallel \overline{AB}$.

Exercício 2.2.1.3 *Construa, com régua e compasso, um quadrado utilizando, se necessário, os critérios estabelecidos nas construções feitas nos Problemas 2.2.1.1 e 2.2.1.2.*

PASSOS DA CONSTRUÇÃO

1. Construa um segmento $\overline{AB}$ qualquer.
2. Trace por A e depois por B perpendiculares à $\overline{AB}$.
3. Com abertura do compasso igual à AB, centre-o em A e depois em B e construa as circunferências de centro A e raio AB e de centro B e raio AB.
4. Marque os pontos de intersecção dessas circunferências com as perpendiculares à $\overline{AB}$ e chame-os de C e D.
5. Trace $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$
6. Construímos o quadrado $ABCD$ de lado AB. $\square$

Construiremos agora a mediatriz de um segmento de reta qualquer. Antes disso, vejamos a seguinte:

[3]Um losango é um paralelogramo que possui os quatro lados iguais.
[4]Paralelogramos são quadriláteros que possuem os lados opostos paralelos e os ângulos opostos iguais.

Definição 2.2.1 *A mediatriz*[5] *de um segmento qualquer* $\overline{AB}$*, é a reta perpendicular a esse segmento e que passa pelo seu ponto médio.*

Problema 2.2.1.4 *Dado um segmento* $\overline{AB}$ *qualquer, traçar a sua* mediatriz.

Solução (Acompanhe na Fig. 2.4)**:** Tome o compasso centrado no ponto A, e com abertura maior do que a metade da medida de $\overline{AB}$, trace uma circunferência. Depois, com o compasso centrado em B e mesma abertura, trace outra circunferência intersectando a primeira em dois pontos, digamos, P e Q. Portanto, a reta que passa por P e Q é a mediatriz de $\overline{AB}$.

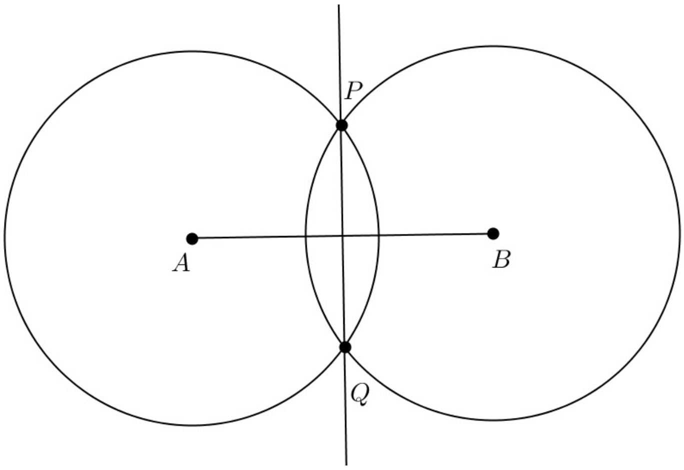


Figura 2.4: Mediatriz de $\overline{AB}$.

Justificativa: Note que $AP = PB = BQ = QA$, ou seja, $APBQ$ é um losango e, portanto, seus lados opostos são paralelos. Mas as diagonais de um losango são perpendiculares e se intersectam em seus respectivos pontos médios. Logo, a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é a mediatriz de $\overline{AB}$.

Da mesma forma que fizemos com a mediatriz, antes de construirmos a bissetriz de um ângulo qualquer, vejamos a seguinte:

Definição 2.2.2 *A bissetriz*[6] *de um ângulo qualquer* $A\widehat{O}B$ *é a semirreta, digamos,* $\overrightarrow{OC}$*, que o divide em dois ângulos iguais.*

Problema 2.2.1.5 *Dado um ângulo qualquer de vértice no ponto O, traçar a sua bissetriz.*

Solução (Acompanhe na Fig. 2.5)**:** Tome o compasso centrado no vértice do ângulo (ponto O) e, com uma abertura qualquer, trace uma circunferência, intersectando os lados do ângulo em dois pontos, digamos A e B. Em seguida, com mesma abertura, centro em A

[5] A mediatriz de um segmento é o conjunto de todos os pontos equidistantes dos extremos desse segmento. [13]

[6] A bissetriz de um ângulo é o conjunto de todos os pontos equidistantes dos lados desse ângulo. [13]

e depois centro em B, trace mais duas circunferências, cujas intersecções são os pontos O (vértice do ângulo) e P. Temos que $\overrightarrow{OP}$ é a bissetriz do ângulo $A\widehat{O}B$.

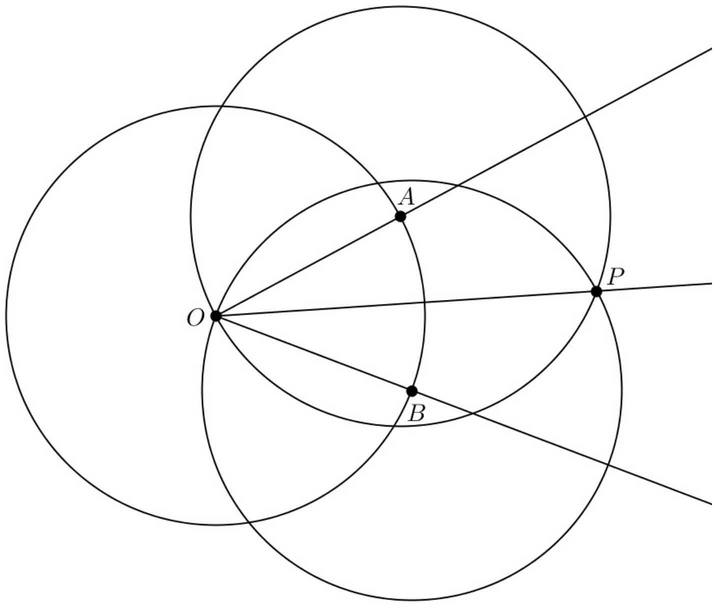
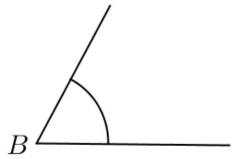


Figura 2.5: Bissetriz do ângulo $A\widehat{O}B$.

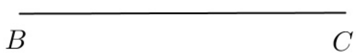
Justificativa: Como $AP = PB = BO = OA$, ou seja, $APBO$ é um losango, note que a semirreta $\overrightarrow{OP}$ contém a mediana do triângulo AOB em relação à $\overline{AB}$ (pois passa pelo seu ponto médio), e também contém a altura (pois $\overline{OP} \perp \overline{AB}$). Mas o triângulo AOB é isósceles[7] de base $\overline{AB}$ e, portanto, $\overrightarrow{OP}$ é também bissetriz do ângulo $A\widehat{O}B$.

Exercício 2.2.1.6 *Construa, com régua e compasso, o triângulo ABC, sendo dados:*

- *O ângulo* $\widehat{B}$*:*



- *O lado* $\overline{BC}$*:*



- *O lado* $\overline{CA}$*:*

[7]Um triângulo é isósceles quando possui dois lados iguais. Ao outro lado desse triângulo, chamamos de base. Em um triângulo isósceles, a mediana, a bissetriz e a altura relativas à base coincidem.

PASSOS DA CONSTRUÇÃO

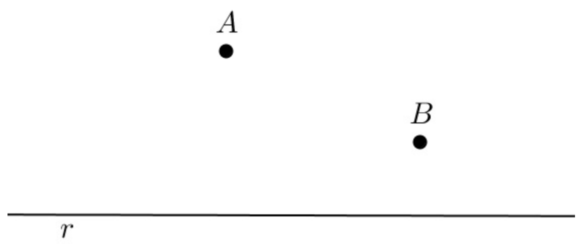
1. Trace sobre os lados do ângulo dado as semirretas $\overrightarrow{BX}$ e $\overrightarrow{BY}$.

2. Com abertura do compasso igual à BC, centre-o em B e construa uma circunferência de centro B e raio BC tal que C é o ponto de intersecção dessa circunferência com a semirreta $\overrightarrow{BX}$.

3. Em seguida, com abertura do compasso igual à CA, centre-o em C e construa uma circunferência de centro C e raio CA.

4. Denotando por A e A' os pontos de intersecção dessa última circunferência com a semirreta $\overrightarrow{BY}$, construímos os triângulos ABC e $A'BC$, ambos com as condições preestabelecidas. $\square$

Exercício 2.2.1.7 *Dados uma reta r e dois pontos A e B fora dela, ambos num mesmo semiplano determinado por r, encontrar um ponto P pertencente à r tal que a distância $AP+PB$ seja a menor possível.*



PASSOS DA CONSTRUÇÃO

1. Encontre o ponto simétrico[8] de B em relação à r e chame-o de B'.

2. Trace $\overline{BB'}$ e em seguida, $\overline{AB'}$.

3. Marque o ponto de intersecção de $\overline{AB'}$ com r e chame-o de P.

4. Trace $\overline{PB}$.

5. Como $PB' = PB$, afirmamos que P, com as condições estabelecidas nesta construção, é tal que $AP+PB$ é o menor possível. $\square$

[8] Se um ponto qualquer B' é o simétrico de um outro ponto B em relação à uma reta r qualquer, então B e B' equidistam de r.

Façamos, agora, a construção do arco capaz de um ângulo dado sobre um segmento de reta também dado. Para tanto vejamos a:

Definição 2.2.3 *Dados, numa circunferência, uma corda $\overline{AB}$ e um ponto P qualquer sobre um dos arcos determinados pelos pontos A e B, temos que o ângulo $A\widehat{P}B = \alpha$ é constante. Dizemos que esse arco, contendo o ponto P, é o arco capaz do ângulo α construído sobre o segmento $\overline{AB}$.*

Isto significa que um observador situado em qualquer ponto sobre esse arco AB (Fig. 2.6), vê o segmento $\overline{AB}$ sob o mesmo ângulo α. Mais ainda, se considerarmos um outro ponto R, exterior ao arco considerado e no mesmo semiplano gerado por $\overleftrightarrow{AB}$, então $A\widehat{R}B < \alpha$. E se R for interior à esse arco, então $A\widehat{R}B > \alpha$.

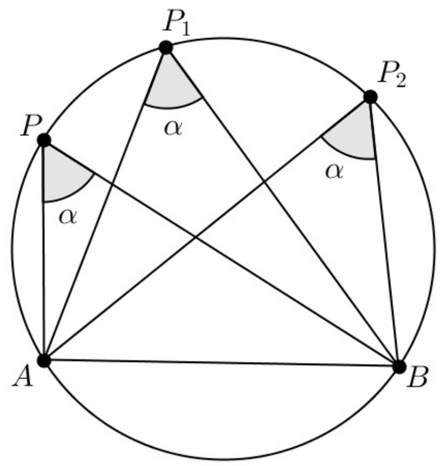


Figura 2.6: Arco Capaz 1.

Note que se o ponto P pertencer a um dos arcos, então para qualquer ponto Q pertencente ao outro, o ângulo $A\widehat{Q}B$ é também constante e igual a $180^o - \alpha$ (Fig. 2.7).

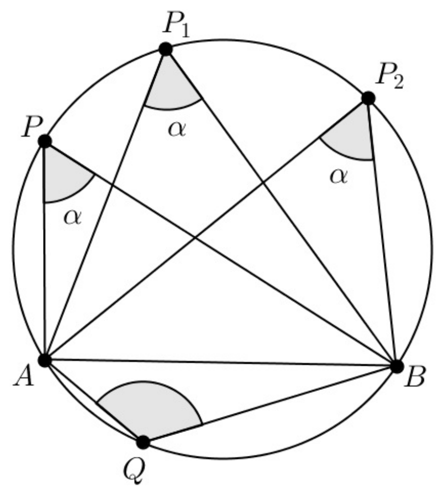


Figura 2.7: Arco Capaz 2.

Para verificar esse fato, considere a seguinte proposição que se encontra em [2] (p. 163), inclusive com a sua demonstração, aqui omitida:

Proposição 2.1 *Um quadrilátero pode ser inscrito em um círculo se e somente se possui um par de ângulos opostos suplementares.*

Assim, como o quadrilátero $APBQ$ está inscrito numa circunferência, seus ângulos opostos somam 180º, ou seja, $A\widehat{Q}B + A\widehat{P}B = A\widehat{Q}B + \alpha = 180^o$ e, portanto, $A\widehat{Q}B = 180^o - \alpha$.

É ainda interessante notar que se $\overline{AB}$ é o diâmetro[9] da circunferência, então o ângulo $A\widehat{P}B$ é reto ($\alpha = 90^o$) (Fig. 2.8) e portanto, cada semicírculo é também chamado de *arco capaz* de 90º sobre $\overline{AB}$.

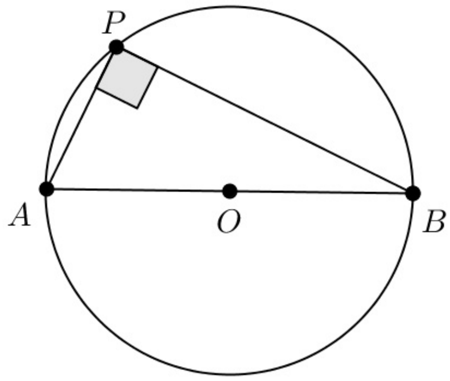


Figura 2.8: Arco Capaz de 90º construído sobre $\overline{AB}$.

Para construir o arco capaz de um ângulo qualquer dado sobre um segmento dado, deve-se também saber como transportar esse ângulo de um lugar para outro, caso seja necessário.

Suponhamos, portanto, que um ângulo α, de vértice O, é dado e que desejamos construir um outro ângulo $B\widehat{A}X = \alpha$, sendo dada a semirreta $\overrightarrow{AB}$ (Fig. 2.9). Para tanto, traçamos uma circunferência com centro em O e raio qualquer, intersectando os lados do ângulo α em dois pontos, digamos M e N. Em seguida, traçamos uma circunferência de centro A e mesmo raio da primeira, intersectando a semirreta $\overrightarrow{AB}$ no ponto M'. Agora, com raio MN e centro em M', traçamos mais uma circunferência intersectando a anterior em dois pontos, sendo N' um deles. Logo, podemos afirmar que $M\widehat{O}N = M'\widehat{A}N' = \alpha$.

[9] O diâmetro de uma circunferência é o segmento que une dois pontos dessa circunferência (que chamamos de corda) e que passa pelo seu centro.

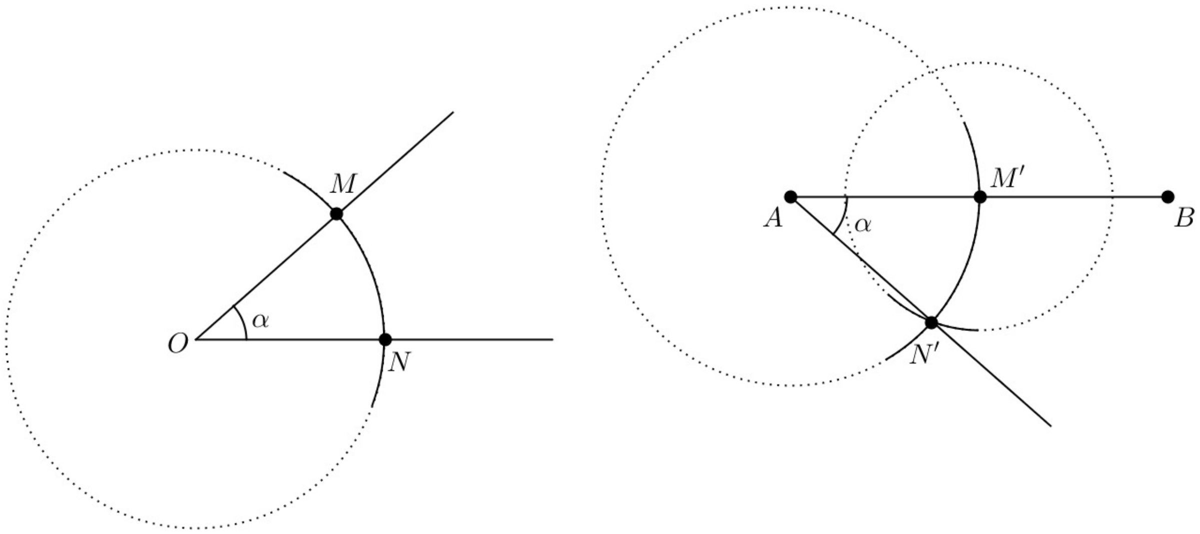
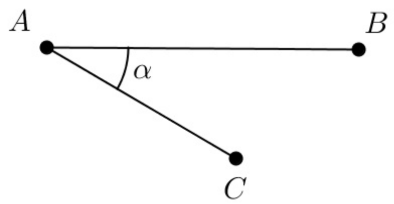


Figura 2.9: Transporte do ângulo α.

Após conhecer a definição de arco capaz e tendo estabelecido algumas condições para construí-lo, podemos, então, resolver o seguinte:

Problema 2.2.1.8 *Dado um ângulo qualquer $B\widehat{A}C$, de medida α, construir sobre o segmento $\overline{AB}$ o arco capaz desse ângulo. (Em construções geométricas, quando se fala "dado um ângulo", na verdade está se referindo ao ângulo desenhado e não à sua medida).*



Solução (Acompanhe na Fig. 2.10)**:** Note que, neste caso, não é necessário transportar o ângulo α, pois ele já está sobre o segmento $\overline{AB}$. Assim, passando pelo ponto A, construa uma perpendicular à $\overline{AC}$. Em seguida, construa a mediatriz de $\overline{AB}$. Marque o ponto de intesecção de $\overline{AB}$ com a sua mediatriz e chame-o de M. Depois, marque o ponto de intersecção dessa mediatriz com a perpendicular à $\overline{AC}$ e chame-o de O. O arco de centro O e extremidades A e B, situado no semiplano oposto à C (semiplanos relativos à $\overleftrightarrow{AB}$) é o arco capaz do ângulo α construído sobre $\overline{AB}$.

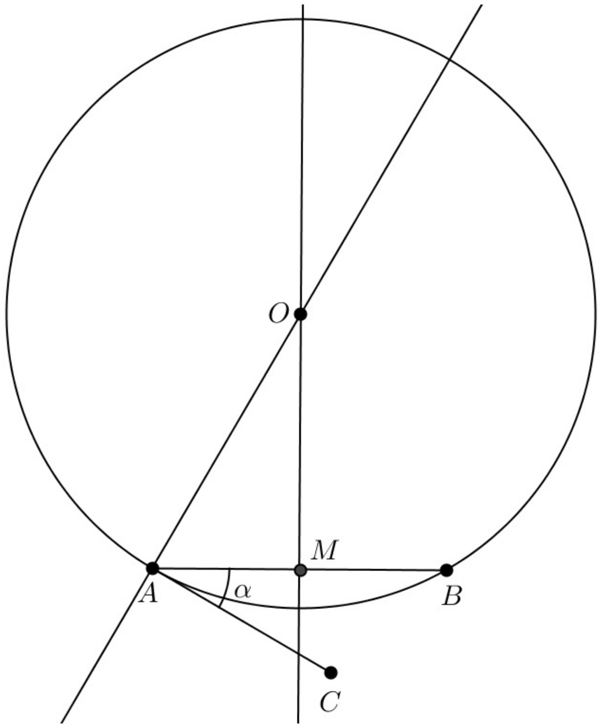


Figura 2.10: Arco Capaz do ângulo α construído sobre $\overline{AB}$.

Justificativa: Observe que sendo M o ponto médio de $\overline{AB}$ e como $B\widehat{A}C = \alpha$, então $M\widehat{A}O = O\widehat{A}C - \alpha = 90^o - \alpha$. Segue que $A\widehat{O}M = \alpha$ ($A\widehat{O}M = 180^o - (90^o - \alpha) - 90^o$) e daí, $A\widehat{O}B = 2\alpha$. Portanto, como a medida do ângulo inscrito[10] é a metade da medida do ângulo central[11] correspondente teremos, para qualquer ponto P do arco construído, $A\widehat{P}B = \alpha$.

Exercício 2.2.1.9 *Dados uma circunferência β e um ponto P, pertencente ou exterior à ela, traçar as tangentes[12] à β passando por P.*

PASSOS DA CONSTRUÇÃO

Vamos considerar os casos separadamente:

(a) O ponto P pertence à circunferência β:

1. Seja O o centro de β. Trace o raio $\overline{OP}$ dessa circunferência.
2. Passando por P, trace uma perpendicular à $\overline{OP}$.
3. Essa perpendicular é portanto a reta tangente à β que passa por P. □

[10]Ângulo inscrito é aquele cujo vértice pertence a circunferência e cujos lados intersectam-na.

[11]Ângulo central é aquele cujo vértice coincide com o centro da circunferência.

[12]Uma reta é tangente a uma circunferência quando é perpendicular ao seu raio e a intersecta em um único ponto.

(b) O ponto P não pertence à circunferência β:

1. Seja O o centro da circunferência β. Trace $\overline{OP}$.
2. Marque o ponto médio de $\overline{OP}$ e chame-o de M.
3. Com abertura do compasso igual à $OM = MP$, centre-o em M e construa uma circunferência de centro M e raio $OM = MP$.
4. Marque os pontos de intersecção dessa circunferência com β e chame-os de A e B.
5. Em seguida, trace $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$.
6. Afirmamos que $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ são as tangentes à β passando por P. □

2.3 Os Três Famosos Problemas Gregos

Mesmo sendo de fundamental importância para resolver problemas de construção, os instrumentos euclidianos (*régua* e *compasso*) nem sempre eram suficientes. Um exemplo claro disto são os três famosos problemas gregos, conhecidos como *problemas clássicos gregos*. São eles:

1. ***Duplicação do cubo (ou Problema de Delos)***: construir a aresta de um cubo cujo volume é igual ao dobro do de um cubo dado.
2. ***Quadratura do círculo***: construir um quadrado com área igual à de um círculo dado.
3. ***Trissecção do ângulo***: dividir um ângulo qualquer em três partes iguais.

Esses problemas podem ser reescritos da seguinte forma (Veja [11]):

1. $\sqrt[3]{2}$ é construtível?
2. $\sqrt{\pi}$ é construtível?
3. Se $\cos 3\alpha$ é construtível, então $\cos\alpha$ é construtível?

Mesmo parecendo de construção simples, tais problemas não podem ser resolvidos, a não ser aproximadamente, com os instrumentos euclidianos. A não-construtibilidade desses problemas se dá pelo fato de $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{\pi}$ e $\cos 20^{\circ}$ (sendo $\cos 60^{\circ}$ construtível) não serem construtíveis (Veja [8]). O leitor deve estar se perguntando o que é que tem a ver trisseccionar um ângulo com o cosseno (ou com o seno) dele. Na verdade, se um ângulo é construtível, então o seu seno e o seu cosseno também o são e, portanto, trisseccioná-lo equivale a construir o cosseno (ou o seno) de sua terça parte.

Embora hoje se saiba que essas três construções, com os instrumentos euclidianos, são impossíveis, a sua não-construtibilidade foi estabelecida apenas 2.000 anos após tais problemas terem surgido. Antes disso, vários matemáticos tentaram resolvê-los, mas sem êxito. No entanto, tais tentativas influenciaram no desenvolvimento da Geometria grega e na descoberta das seções cônicas e de muitas curvas cúbicas, quárticas e transcendentes. Eves (2004, p. 134) afirma que *"um produto muito posterior foi o desenvolvimento de partes da teoria das equações ligadas a domínios de racionalidade, números algébricos e teoria dos grupos"*. Todos esses temas não fazem parte do nosso trabalho e, portanto, não vamos nos deter no estudo dos mesmos.

Vejamos como surgiram os três *problemas clássicos gregos* e quais foram algumas das tentativas de resolvê-los:

2.3.1 Duplicação do cubo

Tudo indica que, ao descrever a insatisfação do mítico rei Minos com as dimensões do túmulo construído para seu filho Glauco, um poeta grego antigo (talvez Eurípedes), leigo em matemática, pode ter dado origem ao problema da duplicação do cubo. Nas palavras do poeta, Minos ordenou que o volume do túmulo fosse dobrado e que isso seria possível dobrando-se todas as suas dimensões.

Mais tarde, para livrar-se de uma peste que os assolava, os delianos, ao procurarem seu oráculo, foram orientados a dobrarem o volume do altar de Apolo, que era cúbico. Por esse motivo, o problema da duplicação do cubo é também conhecido como *Problema de Delos*. A partir daí, o problema caiu nas mãos dos geômetras, que o abraçaram, começando por Hipócrates (c. 440 a.C.), que o reduziu a construção de duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta medindo s e $2s$ (Veja [7]). Após essa redução, as tentativas seguintes tomaram o mesmo caminho. Dentre elas, Eves (2004, p. 135) destaca:

> [...] uma solução por geometria superior, dada por Arquitas (c. 400 a.C.) [...] a solução de Eudoxo (c. 370 a.C.) se perdeu. Menaecmo (c. 350 a.C.) deu duas soluções do problema e, tanto quanto se sabe, inventou as secções cônicas para esse propósito. Atribui-se a Eratóstenes (c. 230 a.C.) uma solução posterior usando dispositivos mecânicos.

Muitas outras soluções para o problema foram dadas, tanto por volta da mesma época quanto modernamente. Para conhecer mais sobre algumas dessas soluções, veja [7], onde consta uma solução atribuída a Platão por Eutócio.

2.3.2 Trissecção do ângulo

Pelo fato da bissecção ser uma construção simples e possível, o problema da trissecção do ângulo também é visto (pelo menos por alguns matemáticos iniciantes), da mesma forma. É tanto que a maioria deles tenta resolvê-los, mesmo sabendo que sua solução, com os instrumentos euclidianos, é impossível. Talvez isso ocorra porque, dos três problemas clássicos, esse é o de mais fácil compreensão.

O problema, no entanto, surgiu provavelmente de esforços dos gregos para multisseccionar ângulos ou na tentativa de construir um polígono regular de nove lados, onde era necessário trisseccionar um ângulo de 60º. Os gregos também reduziram esse problema a um outro, conhecido como um *problema de neusis*, para o qual foram descobertas várias curvas planas superiores que o resolvem. Dentre elas, Eves (2004) destaca: *"a conchóide inventada por Nicodemos (c. 240 a.C.). [...] a quadratriz, inventada por Hípias (c. 425 a.C.), e a espiral de Arquimedes"*. Essas duas últimas curvas também resolvem o problema da quadratura do círculo. Outras soluções são a dada por Papus (c. 300 a.C.), usando cônicas, e uma de autoria desconhecida que chama-se *machadinho* (Veja [7]).

Como matemáticos que somos, e com a intenção de descontrair, mostraremos aqui como trisseccionar o ângulo de 90º usando apenas os instrumentos euclidianos (Vale lembrar que tal solução já existe (talvez de outra forma) e, portanto, não estamos requerendo a sua autoria).

Exemplo 2.3.2.1 *Trisseccionar o ângulo reto, ou seja, de medida igual a* 90^o.

Solução (Acompanhe na Fig. 2.11)**:** Considere, inicialmente, o ângulo $A\widehat{O}B$ medindo 90º. Considere ainda, sem perda de generalidade, $OA = OB$. Tome o compasso com abertura igual a OA, centre-o no vértice do ângulo (ponto O) e depois em B e trace duas circunferências que se intersectam em dois pontos. Considere um desses pontos, digamos, o ponto P. Trace a semirreta $\overrightarrow{OP}$, obtendo os ângulos agudos $A\widehat{O}P$ e $P\widehat{O}B$, medindo, respectivamente, 30º e 60º (Veja a justificativa). Agora, tome o compasso com a mesma abertura OA, centre-o em P e trace outra circunferência, intersectando a segunda em dois pontos: O (já dado) e P'. Trace a semirreta $\overrightarrow{OP'}$. Logo, temos que $A\widehat{O}P = P\widehat{O}P' = P'\widehat{O}B = 30^o$.

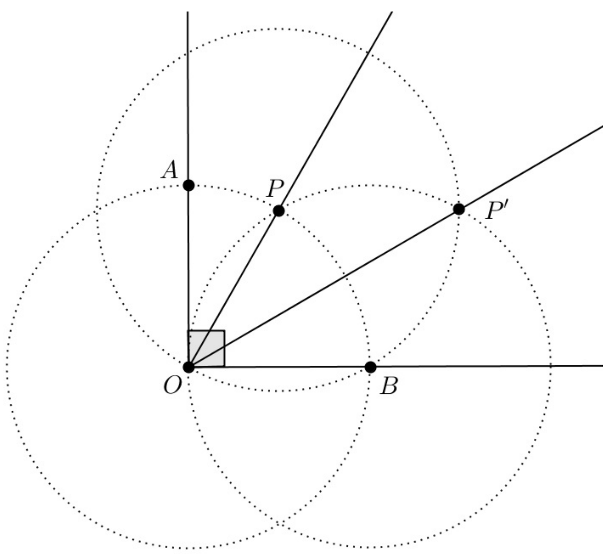


Figura 2.11: Trissecção do ângulo de 90º.

Justificativa: De fato, note que ao, traçarmos as duas circunferências iniciais, estamos construindo o triângulo equilátero[13] BOP, cujos ângulos internos, incluindo o ângulo $P\widehat{O}B$, medem cada um 60º e, portanto, $A\widehat{O}P$ mede 30º. Em seguida, construímos a bissetriz do ângulo $P\widehat{O}B$, garantindo que $A\widehat{O}P = P\widehat{O}P' = P'\widehat{O}B = 30^o$.

Observe que ao trisseccionar o ângulo reto, acabamos por construir o ângulo de 60º, mostrando, assim, que ele é realmente construtível, embora sua terça parte, ou seja, o ângulo de 20º, não seja.

2.3.3 Quadratura do círculo

O problema da quadratura do círculo talvez seja o mais fascinante dentre os três problemas clássicos gregos. Sendo assim, mesmo com a demonstração de que sua solução com *régua* e *compasso* é impossível, vários matemáticos ainda tentam construí-lo apenas com esses instrumentos. Os egípcios “resolveram” o problema em 1800 a.C.. Para tanto, tomaram o lado do quadrado igual a $8/9$ do diâmetro do círculo dado.

A *espiral de Arquimedes* e a *quadratriz*, de Hípias de Elis (c. 425 a.C.), também resolvem o determinado problema. Além dessas, Eves (2004, p. 140) cita contribuições dadas por Anaxágoras (c. 499–427 a.C.), Hipócrates de Quio (Contemporâneo de Anaxágoras) e Dinostrato (c. 350 a.C.).

[13]Um triângulo é equilátero quando seus lados são iguais e seus ângulos internos também o são.

Capítulo 3

Números Construtíveis

Consideremos, inicialmente, o conjunto $\mathscr{C}$, dos números reais que podem ser obtidos, por construção com régua e compasso, através de uma unidade linear pré-fixada. Mostraremos aqui quais são as principais características que esses números reais devem ter para fazer parte desse conjunto $\mathscr{C}$.

De acordo com a Geometria Euclidiana, construir com régua e compasso significa que podemos utilizar apenas os seguintes procedimentos:

1. Traçar uma reta conhecendo dois de seus pontos já construídos;
2. Traçar um círculo conhecendo o seu centro e um de seus pontos, ambos já construídos.

Uma vez conhecidos os procedimentos possíveis, vamos então a definição de números construtíveis:

Definição 3.0.1 *Dizemos que um número real x é construtível, ou seja, $x \in \mathscr{C}$, se $x = 0$ ou se for possível construir, com régua e compasso, através de um número finito desses procedimentos, um segmento de comprimento igual a $|x|$, a partir de um segmento de reta tomado como a unidade.*

3.1 Propriedades

Tendo as noções de construções geométricas, podemos, então, com o auxílio do GeoGebra, verificar algumas propriedades dos números construtíveis. Como já foi mostrado que algumas construções são possíveis de serem realizadas apenas com os instrumentos euclidianos (régua e compasso), não nos deteremos mais na descrição dos passos utilizados para realizá-las. Por exemplo, já vimos que é possível construir perpendiculares, paralelas, mediatrizes e bissetrizes, com algumas condições preestabelecidas. Portanto, quando for necessário, apenas usaremos tais construções, uma vez que seus critérios já foram justificados anteriormente. Dessa forma, podemos até usar os recursos do GeoGebra que já dão estas construções prontas.

Agora, consideremos a seguinte Proposição dizendo-nos que a soma, a diferença, o produto e o quociente de números reais construtíveis são também construtíveis:

Proposição 3.1 *Sejam a e b dois números reais construtíveis, com* $b \neq 0$*. Então*

$$a+b,\ a-b,\ ab \text{ e } a/b$$

também são construtíveis.

A partir desta Proposição, concluímos que todo número racional é construtível. Demonstrá-la, porém, equivale a demonstrar que:

1. Se $a, b \in \mathscr{C}$, então $a+b \in \mathscr{C}$.

   Demonstração. (Fig. 3.1) Considere, numa mesma reta r, os pontos A, B, e C tais que $AB = a$ e $AC = b$. Considere ainda, sem perda de generalidade, $0 < a < b$. Agora, tome o compasso e, com centro em C e abertura $AB = a$, construa uma circunferência intersectando r em dois pontos. Considere um desses pontos, digamos D, tal que C está entre B e D. Como A, B, C e D são colineares e $BD = AC$, temos que $AD = AB + AC = a + b$ e, portanto, $a+b \in \mathscr{C}$. □

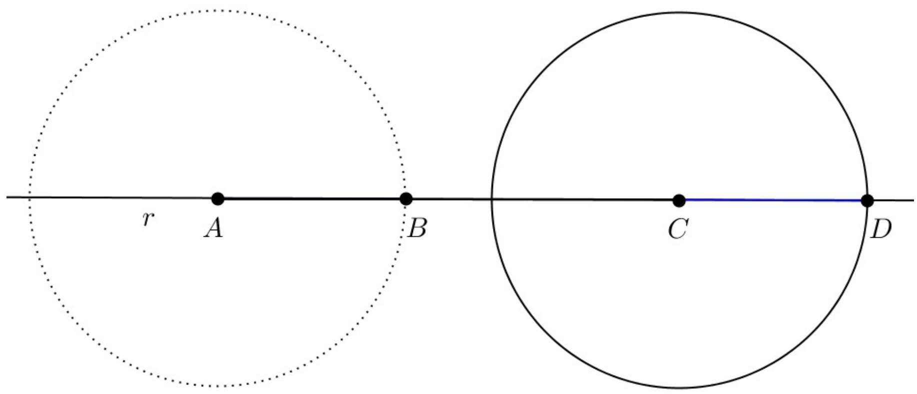


Figura 3.1: Propriedade 1.

2. Se $a \in \mathscr{C}$, então $-a \in \mathscr{C}$.

   Demonstração. Segue da definição, pois $|a| = |-a|$. □

   A partir daí, podemos concluir que se $a, b \in \mathscr{C}$ e sabendo que $a - b = a + (-b)$, então $a - b \in \mathscr{C}$.

3. Se $a, b \in \mathscr{C}$, então $a \cdot b \in \mathscr{C}$.

   Demonstração. (Fig. 3.2) Considere sobre uma mesma reta r os pontos O, I, A e B, tais que $OI = 1$, $OA = a$ e $OB = b$, e seja P um ponto fora dela. Construa o triângulo

OIP e em seguida construa por A uma paralela à $\overline{IP}$. Seja P' o ponto de intersecção dessa paralela com $\overleftrightarrow{OP}$. Note que os triângulos OIP e OAP' são semelhantes[1]. Assim, temos que $\frac{OI}{OA} = \frac{OP}{OP'}$. Agora, construa o triângulo OBP e em seguida construa uma paralela à $\overline{BP}$, passando por P'. Seja M o ponto de intersecção dessa nova paralela com r. Observe que os triângulos OBP e OMP' são semelhantes. Daí, temos que $\frac{OB}{OM} = \frac{OP}{OP'}$. Segue que $\frac{OI}{OA} = \frac{OB}{OM}$, o que nos dá $\frac{1}{a} = \frac{b}{OM}$ e, portanto, $OM = a \cdot b$. Logo, $a \cdot b \in \mathscr{C}$. □

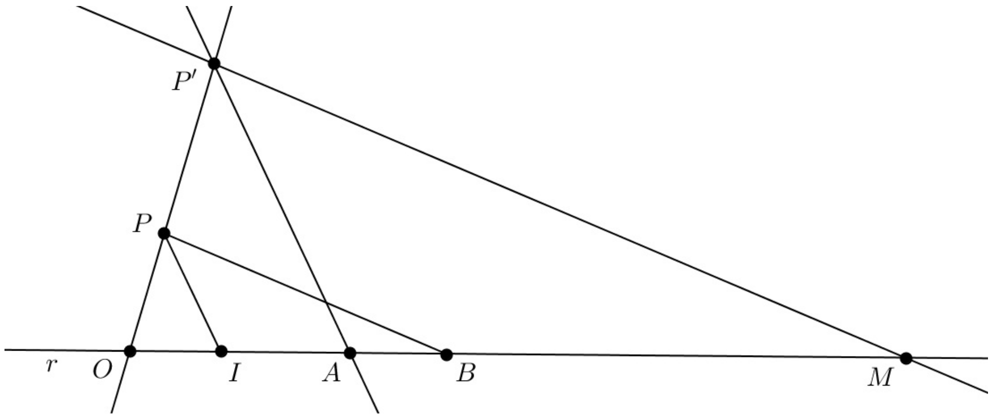


Figura 3.2: Propriedade 3.

4. Se $a \in \mathscr{C}$ e $a \neq 0$, então $a^{-1} = \frac{1}{a} \in \mathscr{C}$.

   Demonstração. (Fig. 3.3) Considere sobre uma mesma reta r os pontos O, I, M e A, tais que $OI = 1$, $OA = a$ e $OM = \frac{a}{2}$ (M é o ponto médio de $\overline{OA}$). Tome o compasso e, com centro em M e abertura $OM = \frac{a}{2}$, construa uma circunferência intersectando r nos pontos O e A, ambos já construídos. Em seguida, tome o compasso e, com centro em O e abertura $OI = 1$, construa mais uma circunferência, intersectando a primeira em dois pontos. Considere um desses pontos, digamos P. Passando por P, construa uma perpendicular à r, obtendo o ponto Q tal que $Q = \overleftrightarrow{PQ} \cap r$. Afirmamos que $OQ = \frac{1}{a}$. De fato, como $\overline{PQ}$ é altura do triângulo OAP, retângulo[2] em $\widehat{P}$, segue que $\overline{OQ}$ é a projeção do cateto $\overline{OP}$ sobre a hipotenusa $\overline{OA}$. Daí, temos que $OP^2 = OQ \cdot OA$ (Relação Métrica[3]), ou seja, $1 = OQ \cdot a$ e, portanto, $OQ = \frac{1}{a} = a^{-1}$. Logo, $a^{-1} \in \mathscr{C}$.

[1]Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando existe uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma. [4], p. 10

[2]Um triângulo é retângulo quando possui um ângulo reto, ou seja, igual a 90º.

[3]Relação métrica do triângulo retângulo que diz que o quadrado do cateto é igual ao produto da sua projeção pela hipotenusa do triângulo.

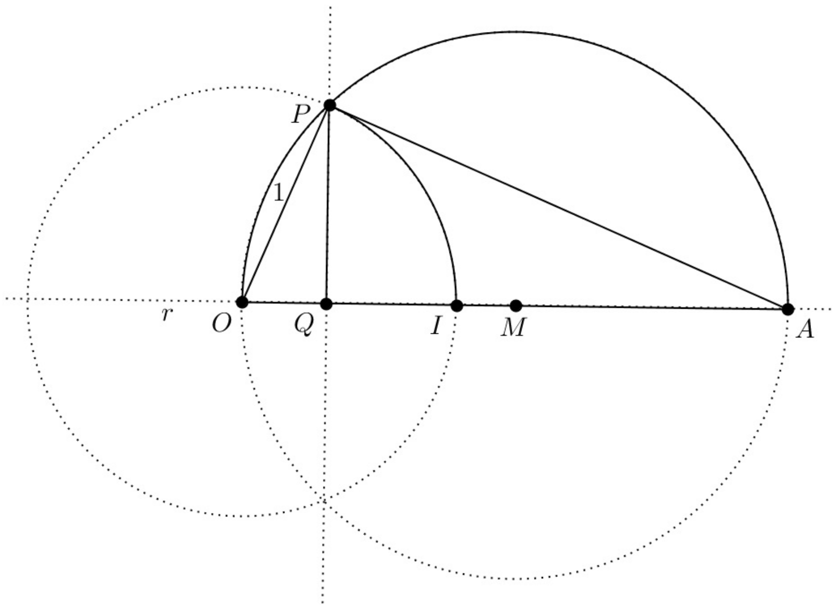


Figura 3.3: Propriedade 4.

Podemos concluir, então, que se $a, b \in \mathscr{C}$, com $b \neq 0$, então $\frac{a}{b} \in \mathscr{C}$. De fato, note que $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \in \mathscr{C}$. □

Em particular, como todo número racional pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, temos, portanto, que $\mathbb{Q} \subset \mathscr{C}$.

Exemplo 3.1.0.1 *Fazer a construção do número $\frac{2}{7}$.*

Solução (Acompanhe na Fig. 3.4)**:** Podemos fazer esta construção usando o método anterior, no qual determinaríamos $\frac{1}{7}$ e, em seguida, multiplicaríamos o resultado por 2 (ou somaríamos $\frac{1}{7}$ duas vezes, o que seria mais fácil). Ou podemos fazê-la usando um novo método que será mostrado agora. Antes, lembremos que o número $\frac{2}{7}$ significa que um inteiro qualquer foi dividido em sete partes iguais e que foram tomadas 2 delas. Assim, sendo $\overline{OA}$ o nosso inteiro (ou unidade), devemos dividi-lo em sete partes iguais e tomar duas dessas partes. Para tanto, considere a semirreta $\overrightarrow{OB}$. Tome o compasso e, com uma abertura qualquer (OX, por exemplo), marque sobre $\overrightarrow{OB}$ sete segmentos, cada um medindo OX. Seja B a extremidade do último desses segmentos. Trace o segmento $\overline{AB}$. Em seguida construa segmentos paralelos a $\overline{AB}$ passando pela extremidade direita de cada segmento inicial traçado sobre a semirreta $\overrightarrow{OX}$. Esses segmentos (paralelos)[4] dividem $\overline{OA}$ em sete partes de mesma medida. Como $\overline{OP}$ equivale a duas

[4]Teorema de Thales ([4], p. 5): Sejam r, s e t retas paralelas. Escolhemos pontos $A, A' \in r$, $B, B' \in s$ e $C, C' \in t$, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares. Então

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

dessas partes, afirmamos que $OP = \frac{2}{7}$.

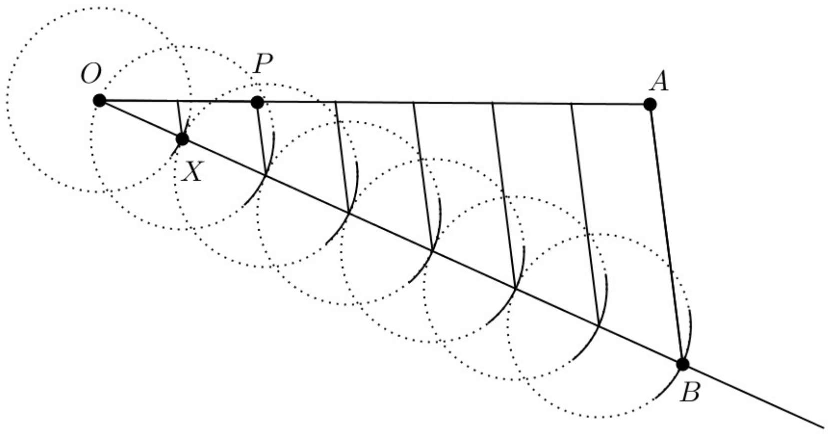


Figura 3.4: Construção do número $\frac{2}{7}$.

Podemos ainda enumerar as seguintes propriedades:

1. $\mathscr{C}$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$.

   Dizer que o conjunto $\mathscr{C}$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$, de acordo com Wagner (1993, p. 96), significa que $\mathscr{C}$ é *"um conjunto de números reais que possui* 0 *e* 1 *e é fechado em relação a adição, multiplicação, e cálculo de simétricos e de inversos (de elementos não nulos)"*.

2. Se $0 < a \in \mathscr{C}$, então $\sqrt{a} \in \mathscr{C}$.

   Vamos reescrever esta propriedade através do seguinte:

Lema 3.1.1 *Dados segmentos de comprimentos* 1 *e a, pode-se construir um segmento de comprimento* $\sqrt{a}$.

Demonstração. (Fig. 3.5) Considere sobre uma mesma reta r os pontos O, I, M e A, com I e M entre O e A e tais que $OI = 1$, $IA = a$ e $OM = \frac{OA}{2}$. Tome o compasso e, com centro em M e abertura OM, construa uma circunferência intersectando r nos pontos O e A, ambos já construídos. Em seguida, trace por I uma perpendicular à r, intersectando a circunferência em dois pontos. Seja P um desses pontos. Afirmamos que $IP = IP' = \sqrt{a}$. De fato, como $\overline{OI}$ é a altura do triângulo APO, retângulo em $\widehat{P}$, segue que $\overline{OI}$ e $\overline{IA}$ são, respectivamente, as projeções dos catetos $\overline{OP}$ e $\overline{PA}$ sobre a hipotenusa $\overline{OA}$. Daí, temos que $IP^2 = OI \cdot IA$ (Relação Métrica[5]), ou seja, $IP^2 = 1 \cdot a$ e, portanto, $IP = \sqrt{a}$. Logo, $\sqrt{a} \in \mathscr{C}$. □

[5]Relação métrica do triângulo retângulo que diz que o quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

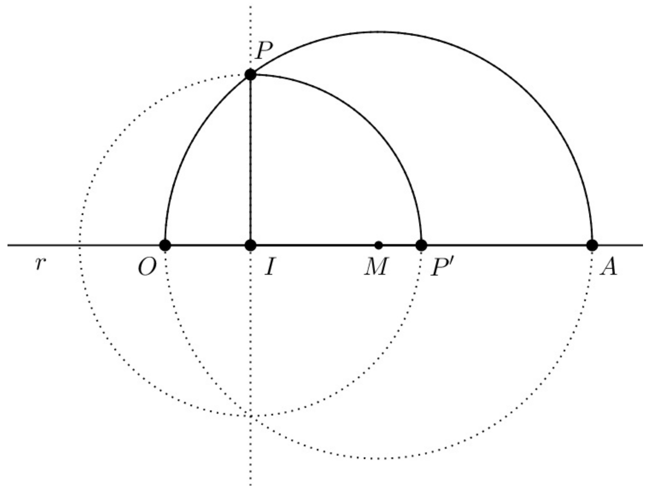


Figura 3.5: Raiz quadrada de a

3.2 Princípios Básicos

Como já vimos, o conjunto $\mathscr{C}$ é um corpo (ou um subcorpo de $\mathbb{R}$). Usaremos esta e outras afirmações para verificar que os procedimentos seguintes, que são os únicos que podemos utilizar para realizar as construções, são realmente construtíveis:

P$_1$ – Traçar uma reta conhecendo dois de seus pontos já construídos;

P$_2$ – Traçar um círculo conhecendo o seu centro e um de seus pontos, ambos já construídos.

Para tornar mais clara a compreensão desses procedimentos, vejamos as definições de ponto construtível, reta construtível e circunferência construtível:

Definição 3.2.1 *Dizemos que um ponto qualquer (a,b) do plano é construtível se $a,b \in \mathscr{C}$.*

Definição 3.2.2 *Dizemos que uma reta é construtível, se pelo menos dois de seus pontos são construtíveis.*

Definição 3.2.3 *Dizemos que uma circunferência é construtível, se o seu centro e um de seus pontos são ambos construtíveis.*

Segundo a Geometria Analítica, a utilização dos procedimentos P$_1$ e P$_2$, resume-se ao uso do seguinte:

Lema 3.2.1 *(a) Toda reta construtível pode ser representada por uma equação do tipo*

$$ax+by+c=0,$$

com $a,b,c \in \mathscr{C}$;

(b) Toda circunferência construtível pode ser representada por uma equação do tipo

$$x^2+y^2+ax+by+c=0,$$

com $a,b,c \in \mathscr{C}$.

Demonstração. (a) De fato, considere os pontos $(x_1,\ y_1)$ e $(x_2,\ y_2)$, ambos distintos e com coordenadas em $\mathscr{C}$. Analiticamente, a reta que une esses pontos é representada pela equação

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou seja,

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0,$$

e, portanto, é da forma

$$ax + by + c = 0,$$

com $a = y_1 - y_2$, $b = x_2 - x_1$ e $c = x_1y_2 - x_2y_1$. Logo, $a, b, c \in \mathscr{C}$, pois são obtidos dos números x_1, x_2, y_1 e y_2 através das operações de adição, subtração e multiplicação.

(b) De fato, considere os pontos $(\alpha,\ \omega)$ e $(x_1,\ y_1)$, ambos com coordenadas em $\mathscr{C}$, onde o primeiro é o centro de uma circunferência que passa pelo segundo, e seja r $(r > 0)$ a distância que os separa. Analiticamente, a equação da circunferência é representada por

$$(x - \alpha)^2 + (y - \omega)^2 = r^2.$$

Mas, sendo $(x_1,\ y_1)$ pertencente à circunferência, temos que:

$$r = \sqrt{(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \omega)^2},$$

ou seja, $r \in \mathscr{C}$ (Lema 3.1.1). Assim, podemos escrever a equação $(x - \alpha)^2 + (y - \omega)^2 = r^2$ da forma:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\omega y + \alpha^2 + \omega^2 - r^2 = 0$$

e, portanto,

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

com $a = -2\alpha$, $b = -2\omega$ e $c = \alpha^2 + \omega^2 - r^2$. Logo $a, b, c \in \mathscr{C}$, pois são obtidos a partir de α e ω através das operações de adição, subtração e multiplicação. $\square$

Dessa forma, um ponto construtível qualquer pode ser determinado através de uma das seguintes operações elementares:

1. Intersecção de duas retas construtíveis;

2. Intersecção de uma reta e uma circunferência, ambos construtíveis;

3. Intersecção de duas circunferências construtíveis.

Vejamos a Fig. 3.6, apenas para termos uma noção das operações citadas anteriormente:

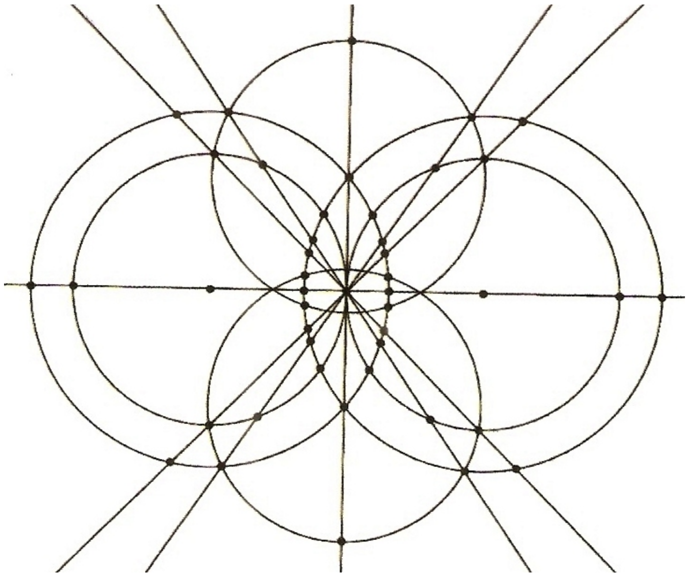


Figura 3.6: Pontos determinados por intersecções.

O conceito de números construtíveis pode ser relacionado com a existência de certas extensões de corpos, as quais não são objeto do nosso estudo e portanto não as mostraremos aqui. Se o leitor quiser se aprofundar mais neste assunto veja, por exemplo, [8].

Consideremos agora, o conjunto $\mathscr{C}^2 = \mathscr{C} \times \mathscr{C}$, subconjunto do $\mathbb{R}^2$. Dessa forma, as operações elementares citadas acima podem ser resumidas no seguinte:

Lema 3.2.2 *O ponto de intersecção de duas retas construtíveis pertence a $\mathscr{C}^2$. Os pontos de intersecção de uma reta com uma circunferência construtíveis, assim como os pontos de intersecção de duas circunferências, também construtíveis, pertencem a $\mathscr{C}^2$.*

Demonstração. O caso da intersecção de duas retas construtíveis nada mais é que a solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases},$$

com $a, a', b, b', c, c' \in \mathscr{C}$ (Lema 3.2.1). É claro que a solução deste sistema, se existir, envolve operações racionais, ou seja,

$$x = \left(\frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}\right) \text{ e } y = \left(\frac{ac' - a'c}{a'b - ab'}\right)$$

e, portanto, $x, y \in \mathscr{C}$, o que significa que $(x, y) \in \mathscr{C}^2$.

O caso da intersecção de uma reta com uma circunferência, ambos construtíveis, equivale a solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0 \end{cases},$$

com $a, a', b, b', c, c' \in \mathscr{C}$. Como os coeficientes a e b não podem ser simultaneamente zero, consideremos, sem perda de generalidade, $b \neq 0$. Assim, isolando y nesta equação, obtemos:

$$y = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x.$$

Substituindo na segunda equação, encontramos uma equação do segundo grau em x com coeficientes em $\mathscr{C}$. Resolvendo esta equação, obtemos soluções, se existirem, do tipo

$$A \pm B\sqrt{w},$$

com $A, B, w \in \mathscr{C}$. Substituindo estas soluções na primeira equação, obtemos uma solução análoga para y. Como $\sqrt{w} \in \mathscr{C}$ (Lema 3.1.1), temos que $x, y \in \mathscr{C}$ e, portanto, $(x, y) \in \mathscr{C}^2$.

No caso da intersecção de duas circunferências construtíveis, as equações:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x^2 & + & y^2 & + & ax & + & by & + & c & = & 0 \\ x^2 & + & y^2 & + & a'x & + & b'y & + & c' & = & 0 \end{array} \right. ,$$

com $a, a', b, b', c, c' \in \mathscr{C}$, podem ser subtraídas, obtendo-se uma equação linear com coeficientes em $\mathscr{C}$. Esta equação pode ser resolvida em simultâneo com uma das equações da circunferência, reduzindo este caso ao anterior. $\square$

Se continuarmos realizando essas operações elementares, obteremos novos pontos cujas coordenadas podem ser racionais ou da forma $a + b\sqrt{w}$, com $a, b, w \in \mathbb{Q}$ (Consequentemente, $\sqrt{w}$ é construtível), ou ainda, da forma $m + n\sqrt{k}$, onde m, n e k são também dessa mesma forma. Note que esse procedimento é infinito.

Segundo Gonçalves (1979), todos os números construtíveis podem ser descritos com precisão. Tais números, por exemplo, são os únicos que podem ser obtidos através de uma sequência de adjunções de raízes quadradas (Veja [8], p. 88).

Para tentar explicar mais claramente o que foi dito, apresentamos o seguinte:

Exemplo 3.2.2.1 $\sqrt{\sqrt{2+\sqrt{3}}+5}$ *é construtível.*

Para construir esse número, vamos usar, como vimos fazendo, o GeoGebra (nossos régua e compasso), tomando a unidade do seu sistema de eixos como a nossa unidade padrão. Mais ainda, os números serão construídos sobre o eixo das abscissas (o qual será ocultado, logo depois), apenas para visualizarmos as unidades. Para tanto, trace sobre ele uma reta r qualquer, para podermos marcar sobre a mesma os pontos de intersecção obtidos.

Comecemos pela construção do número $\sqrt{3}$, ou seja, nosso $a = 3$ (Lema 3.1.1) (Acompanhe na Fig. 3.7):

1. Marque sobre r os pontos O, correspondente ao valor 0, I, correspondente ao valor 1, e A, correspondente ao valor 3. Note que $OI = 1$ e que $OA = 3$.

2. Passando por I, construa uma perpendicular à r.

3. Construa o ponto médio de $\overline{OA}$ e chame-o de M.

4. Com abertura do compasso igual a $OM = MA$, centre-o em M e construa uma circunferência.

5. Marque o ponto de intersecção dessa circunferência com a perpendicular à r passando por M e chame-o de Q. Em seguida, trace $\overline{OQ}$.

6. Com abertura do compasso igual a OQ, centre-o em O e construa uma nova circunferência.

7. Marque o ponto de intersecção, que está entre O e A, dessa circunferência com r e chame-o de P.

8. Como já vimos (Lema 3.1.1), $OP = \sqrt{3}$.

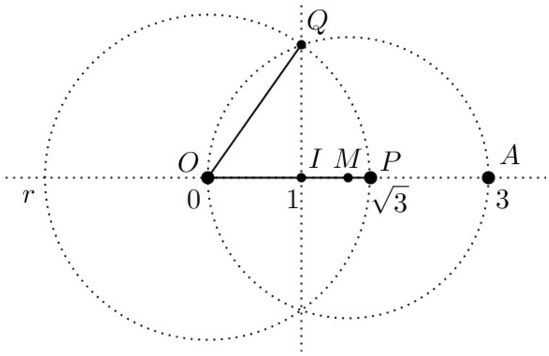


Figura 3.7: Construção de $\sqrt{3}$.

Agora devemos construir $2+\sqrt{3}$ (Proposição 3.1) (Fig. 3.8). Ora, mas isto é muito simples. Com abertura do compasso igual a $AI = 2$, centre-o em P e construa a circunferência de centro P e raio $AI = 2$. Marque o ponto T de intersecção dessa circunferência com r, tal que P está entre O e T. Como $PT = 2$, temos que $OT = 2+\sqrt{3}$.

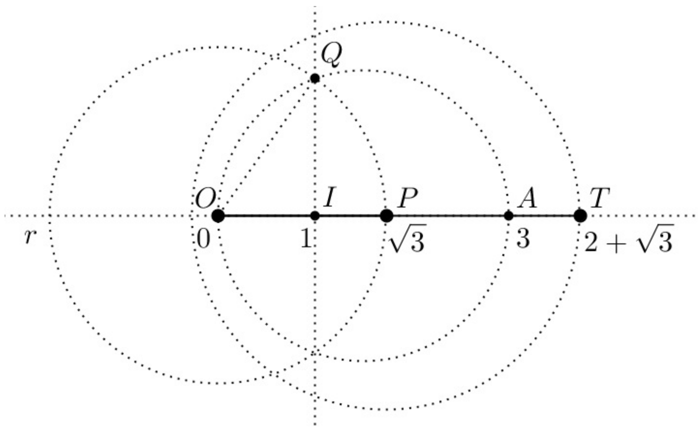


Figura 3.8: Construção de $2+\sqrt{3}$.

Para construir $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ (Fig. 3.9), procedemos como na primeira construção, sendo que o nosso número a agora é igual a $2+\sqrt{3}$ (Para facilitar a visualização dessa construção, ocultaremos alguns objetos usados na última). Temos que $ON=\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

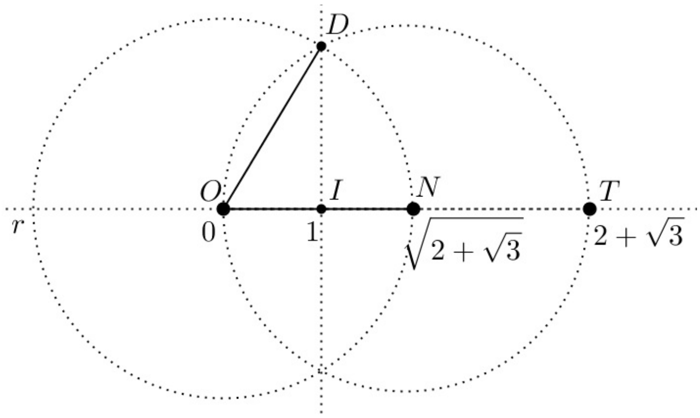


Figura 3.9: Construção de $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Do mesmo modo, para construir $\sqrt{2+\sqrt{3}}+5$ (Fig. 3.10), procedemos como na segunda construção. Assim, $OR=\sqrt{2+\sqrt{3}}+5$.

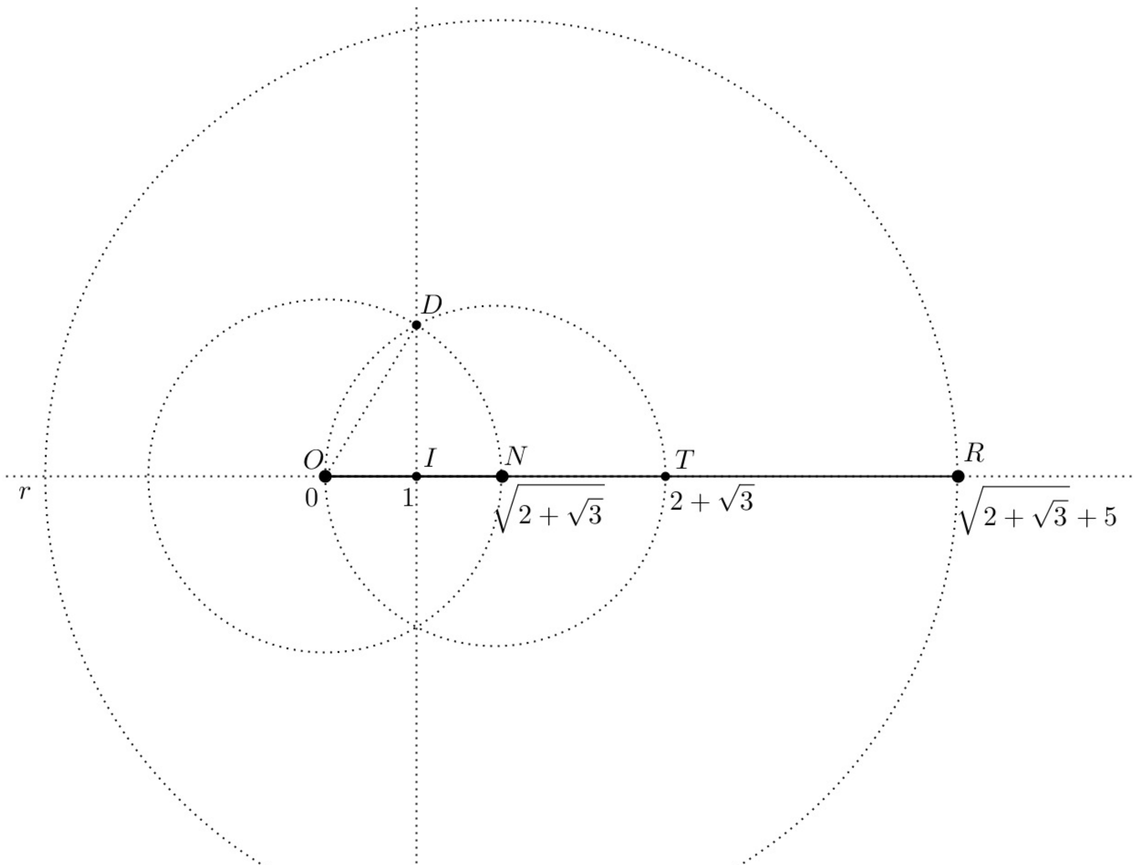


Figura 3.10: Construção de $\sqrt{2+\sqrt{3}}+5$.

Por fim, construímos o número $\sqrt{\sqrt{2+\sqrt{3}}+5}$ (Fig. 3.11), seguindo novamente os passos da primeira construção, sendo que desta vez $a = \sqrt{2+\sqrt{3}}+5$ (Aqui também serão ocultados alguns objetos das construções anteriores). Logo, $OS = \sqrt{\sqrt{2+\sqrt{3}}+5}$.

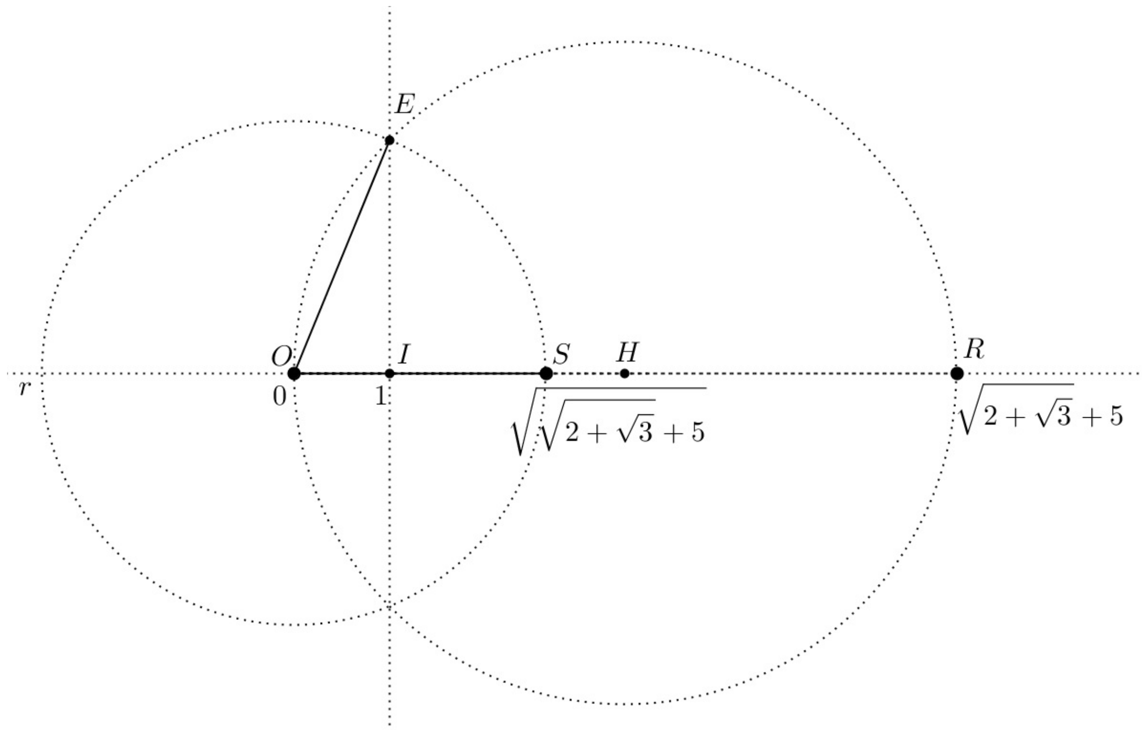


Figura 3.11: Construção de $\sqrt{\sqrt{2+\sqrt{3}}+5}$.

□

Como podemos ver, trabalhar com as construções desses números não é tão complicado quanto se imagina, pois a partir do momento que soubermos construir um determinado número, todos os demais, com propriedades idênticas, serão construídos seguindo-se praticamente os mesmos passos. No próximo Capítulo, enfatizaremos essa afirmação através de algumas atividades.

Capítulo 4

Sugestões de Atividades

Neste Capítulo apresentamos algumas sugestões de atividades que podem ser aplicadas em sala de aula, visando incentivar o uso do software GeoGebra e orientando quanto as construções de alguns números, sejam eles racionais ou irracionais. É importante lembrar que os recursos a serem utilizados aqui são aqueles, do GeoGebra, que funcionam como régua e compasso e também que antes da aula propriamente dita, é necessário fazer a instalação do programa com o qual se vai trabalhar (neste caso, do GeoGebra) nos computadores que serão usados. Para ter acesso ao GeoGebra, além de dicas de instalação e uso do mesmo, veja [3].

Das construções que serão trabalhadas aqui, algumas, senão todas, requerem o uso de uma unidade padrão que deve ser previamente estabelecida. Tal unidade padrão pode ser a mesma unidade usada no sistema de eixos da página inicial do GeoGebra.

Usando o fato de que determinados números têm características comuns (Os racionais, por exemplo, sempre podem ser representados sob a forma de fração), pretendemos, através dessas atividades, dar dicas de como construir alguns desses números, de tal forma que ao fazer a construção de um número racional, por exemplo, o aluno seja capaz de construir todos os outros números racionais.

Para facilitar a visualização dos resultados, é aconselhável que as medidas sejam marcadas sobre um dos eixos (de preferência, sobre o eixo das abscissas).

No entanto, se a intenção é apenas explorar as propriedades envolvidas no problema, aconselhamos também que o professor leve as construções já prontas para as suas aulas e, durante as mesmas, mostre somente essas propriedades, deixando claro que não é possível mover um ponto sobre nenhum objeto, uma vez que ao fazê-lo estamos obtendo um novo ponto. Tal recurso (permitido apenas em alguns ambientes de geometria dinâmica, o qual não é possível nas construções com régua e compasso em papel) é usado apenas para evitarmos fazer várias construções.

Em qualquer uma destas atividades, sempre que dissermos construa, estaremos nos referindo às construções possíveis com régua e compasso.

4.1 Atividades

4.1.1 Atividade 1: Como construir números racionais

Nesta atividade, daremos ênfase apenas àqueles números racionais que não são inteiros, uma vez que os inteiros são de fácil construção. Além disso, como todas as construções são para ser feitas com o auxílio do GeoGebra, então, no início dessa primeira atividade, descreveremos a maioria dos recursos que serão utilizados, afim de que nas construções seguintes isto não seja mais necessário.

Exercício 4.1.1.1 *(Fig. 4.1) Faça as seguintes construções:*

(a) *Com o recurso "Reta definida por dois pontos", trace uma reta $\overleftrightarrow{AB}$ qualquer, de tal forma que os pontos A e B estejam próximos um do outro e sobre o eixo das abscissas.*

(b) *Com o recurso "Segmento definido por dois pontos", trace $\overline{AB}$ e tome-o como a sua unidade padrão.*

(c) *Com o recurso "Compasso", centro em B e abertura AB, construa a circunferência de centro B e raio AB. Com o recurso "Intersecção de dois objetos", marque o outro ponto de intersecção dessa circunferência com $\overleftrightarrow{AB}$ e chame-o de C (Isto pode ser feito clicando-se com o botão direito do mouse sobre o objeto e usando a ferramenta "Exibir rótulo" e depois, "Renomear", ou ainda, com a ferramenta "Inserir texto". Ao clicar com o botão direito sobre um objeto, aparecem várias outras opções. Verifique!).*

(d) *Trace $\overline{AC}$. Note que $AC = 2AB$.*

(e) *Com a ferramenta "Inserir texto" ou "Renomear", faça $AC = a$. Note que, assim, $AB = a/2$.*

(f) *Agora, tome o "compasso" com a mesma abertura AB, centre-o em A e construa outra circunferência de centro A e raio AB.*

(g) *Marque os pontos de intersecção dessa circunferência com a primeira e chame-os de P e Q. Em seguida, trace $\overline{PQ}$. Marque o ponto de intersecção desse segmento com $\overline{AB}$ e chame-o de M (Note que, pelo Problema 2.2.1.4, p. 13, $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$).*

(h) *Trace $\overline{AM}$ e faça $AM = b$.*

(i) *Com o recurso "Mover", "mova" o ponto B sobre $\overleftrightarrow{AB}$ e observe os parâmetros a e b ao lado (Janela de Álgebra). Você nota alguma relação entre $AC = a$ e $AM = b$?*

Exercício 4.1.1.2 *(Fig. 4.2) Faça as seguintes construções:*

(a) *Construa o segmento $\overline{AB}$, de comprimento fixo, tal que $AB = 1$ (Isto pode ser feito com o recurso "Segmento com comprimento fixo").*

(b) *Construa a circunferência de centro A e raio $AB = 1$. Em seguida, marque o ponto O sobre $\overleftrightarrow{AB}$, tal que B está entre A e O.*

(c) *Construa a circunferência de centro O e raio AO. Marque o outro ponto de intersecção dessa circunferência com $\overleftrightarrow{AB}$ e chame-o de C. Marque também os pontos de instersecção das duas circunferências construídas e chame-os de P e Q.*

(d) *Trace $\overline{AC}$, depois $\overline{PQ}$ e marque o ponto de instersecção desse último segmento com $\overleftrightarrow{AB}$. Chame-o de M e trace $\overline{AM}$. Da mesma forma que na questão anterior, faça $AC = a$ e $AM = b$.*

(e) *"Mova" o ponto O sobre $\overleftrightarrow{AB}$ e observe os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{AC}$. Qual é a relação existente entre eles? Se $AC = a$, então quanto vale AM em função de a?*

(f) *Como fazemos para obter $3AM$? E $n \cdot AM$, com $n \in \mathbb{Z}$?*

O objetivo dessas duas atividades é, além de ajudar na utilização do GeoGebra, levar o aluno a perceber a existência de uma relação entre as medidas AC e AM, isto na primeira, para que na segunda ele tenha mais facilidade de visualizar tal relação. Estas atividades mostram que AM, na verdade representa uma razão (ou um número racional), sendo que na primeira, $AM = \frac{1}{4}AC$ e na segunda, $AM = \frac{1}{AC}$. Desse modo, para construir outros números, basta somar (ou multiplicar, dependendo do caso) a razão AM tantas vezes quantas forem necessárias.

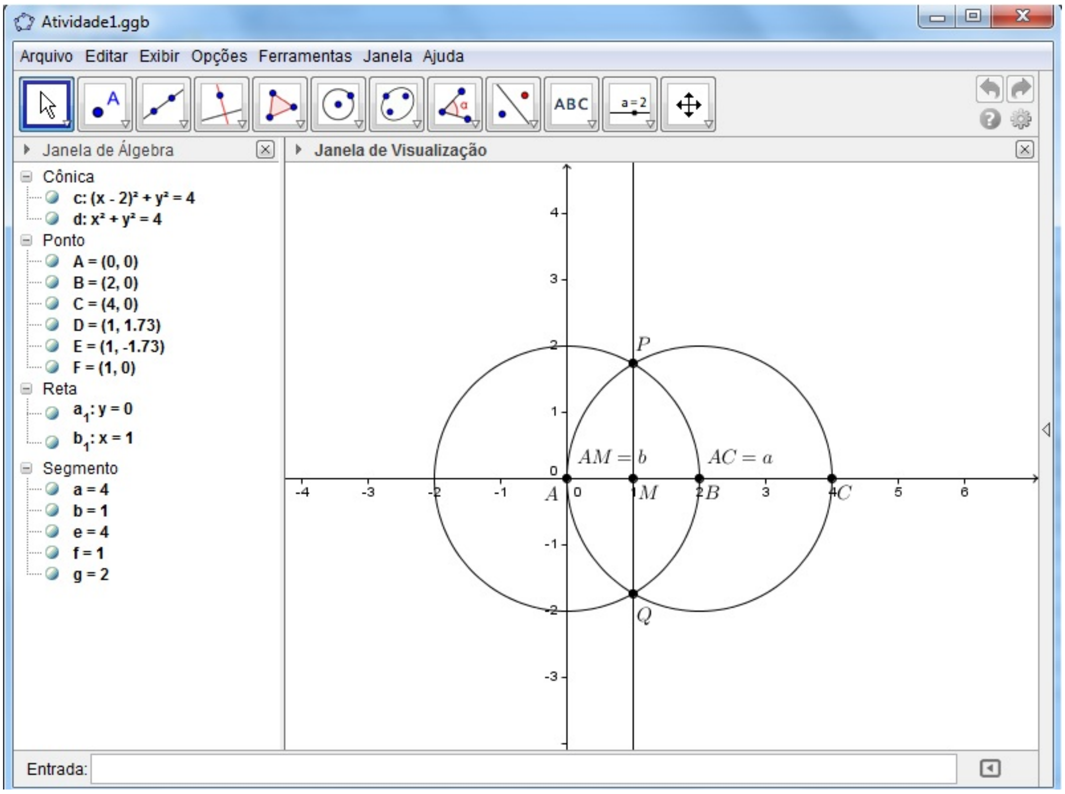


Figura 4.1: Exercício 4.1.1.1.

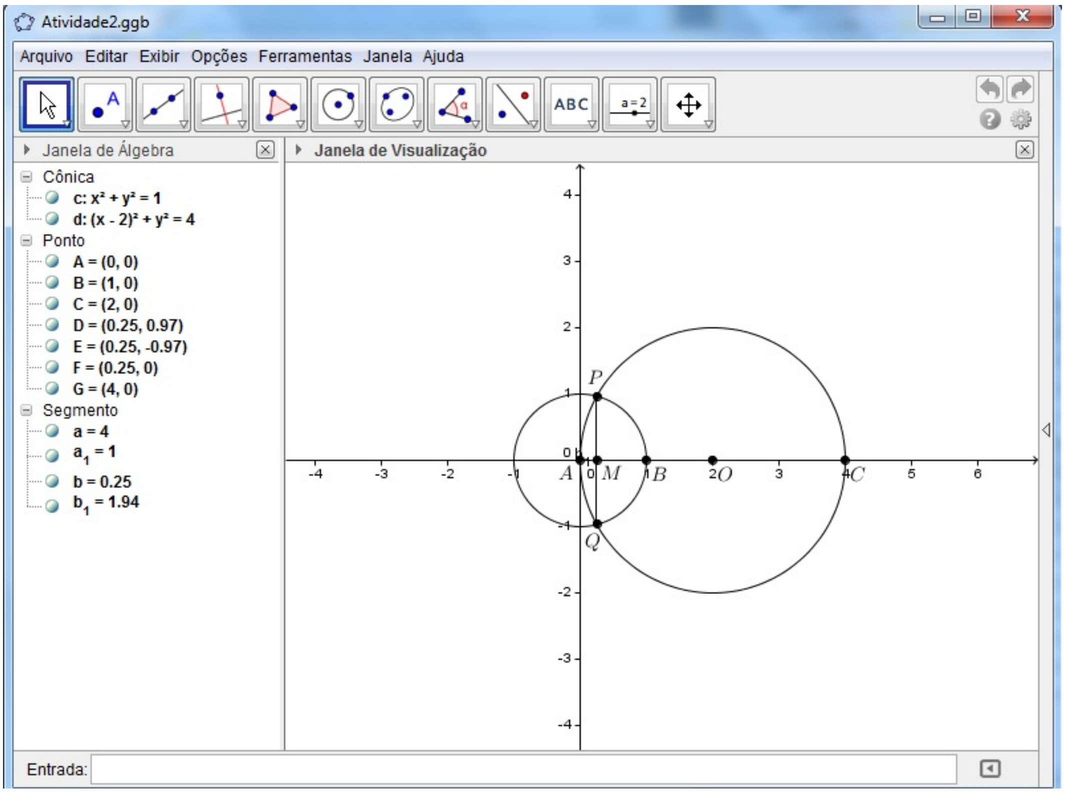


Figura 4.2: Exercício 4.1.1.2.

Observação: O sistema de eixos pode ser apagado "clicando-se" com o "botão direito" e, em seguida, usando-se a opção "Eixos".

Exercício 4.1.1.3 *Agora, usando os mesmos procedimentos, construa os números* $-\frac{3}{5}$, $1,333\ldots$ *e* $\frac{9}{4}$ (Se necessário, use também o Exemplo 3.1.0.1, p. 27).

4.1.2 Atividade 2: Como construir raízes cujos índices são potências de 2

Construiremos, nesta atividade, as raízes cujos índices são da forma 2^n, com $n = 1,2,3,\ldots$, levando em conta o fato de que os seus radicandos são também números construtíveis.

Exercício 4.1.2.1 *(Fig. 4.3) Faça as seguintes construções:*

(a) *Construa a reta* $\overleftrightarrow{AB}$*, tal que os pontos A e B estejam próximos um do outro.*

(b) *Trace* $\overline{AB}$*.*

(c) *Construa por B uma perpendicular a* $\overleftrightarrow{AB}$*.*

(d) *Marque sobre* $\overleftrightarrow{AB}$ *um ponto qualquer M tal que B está entre A e M.*

(e) *Com abertura do compasso igual a AM, centre-o em M e construa a circunferência de centro M e raio AM. Marque o outro ponto de intersecção dessa circunferência com* $\overleftrightarrow{AB}$ *e chame-o de C.*

(f) *Trace* $\overline{AC}$*.*

(g) *Marque também um dos pontos de intersecção dessa circunferência com a perpendicular a* $\overleftrightarrow{AB}$ *e chame-o de P.*

(h) *Trace o segmento* $\overline{BP}$*.*

(i) *Com abertura do compasso igual a BP, centre-o em B e construa a circunferência de centro B e raio BP. Em seguida, marque o ponto Q de intersecção dessa nova circunferência com* $\overleftrightarrow{AB}$*, tal que Q está entre A e C. Trace* $\overline{AQ}$*.*

(j) *Faça* $AB = a$*,* $BC = b$ *e* $AQ = s$*.*

(k) *"Mova" o ponto M sobre* $\overleftrightarrow{AB}$*. Há alguma relação entre* $AB = a$*,* $BC = b$ *e* $AQ = s$*?*

(l) *Determine o produto* $a \cdot b$ *e depois calcule a sua raiz quadrada. Em seguida, compare o resultado obtido com s. E agora, você nota alguma relação entre essas medidas?*

Exercício 4.1.2.2 *(Fig. 4.4) Faça as seguintes construções:*

(a) *Construa o segmento $\overline{AB}$, de comprimento fixo, tal que $AB = 1$.*

(b) *Trace $\overleftrightarrow{AB}$.*

(c) *Passando por B, construa uma perpendicular à $\overleftrightarrow{AB}$.*

(d) *Em seguida, marque o ponto O sobre $\overleftrightarrow{AB}$, tal que B está entre A e O.*

(e) *Com abertura do compasso igual a AO, centre-o em O e Construa a circunferência de centro O e raio AO. Marque o outro ponto de intersecção dessa circunferência com $\overleftrightarrow{AB}$ e chame-o de C. Marque também um dos pontos de instersecção dessa circunferência com a perpendicular à $\overleftrightarrow{AB}$ e chame-o de P.*

(f) *Trace $\overline{BC}$ e faça $BC = a$. Trace também $\overline{PB}$.*

(g) *Com abertura do compasso igual a PB, centre-o em B e construa a circunferência de centro em B e raio BP.*

(h) *Marque M, ponto de intersecção dessa circunferência com $\overleftrightarrow{AB}$, tal que M está entre A e C. Trace $\overline{AM}$.*

(i) *Chame $BM = b$ e $BC = a$.*

(j) *"Mova" o ponto O sobre $\overleftrightarrow{AB}$ e observe as medidas $BM = b$ e $BC = a$. Você percebe alguma relação entre elas? Em seguida, pegue uma tabela de raízes (Se necessário, faça uma) e observe essas medidas. E agora, você percebe alguma relação entre elas?*

(k) *Se $BC = a$, então quanto vale BM em função de a?*

O objetivo dessas duas atividades é, obviamente, mostrar o procedimento usado para calcular raízes cujos expoentes são potências de 2. Elas são direcionadas para levar o aluno a perceber a existência de relações entre as medidas envolvidas. No caso da primeira dessas atividades, a relação existente entre AB, BC e AQ é que $AQ = \sqrt{AB \cdot BC}$, ou seja, calculamos a raiz quadrada do produto $a \cdot b$. Já na segunda, a relação existente entre BM e BC é que $BM = \sqrt{BC}$, ou seja, $b = \sqrt{a}$. Desse modo, para construir outros números dessa forma, basta somar, subtrair, multiplicar, dividir ou calcular raízes quadradas de tais números tantas vezes quantas forem necessárias.

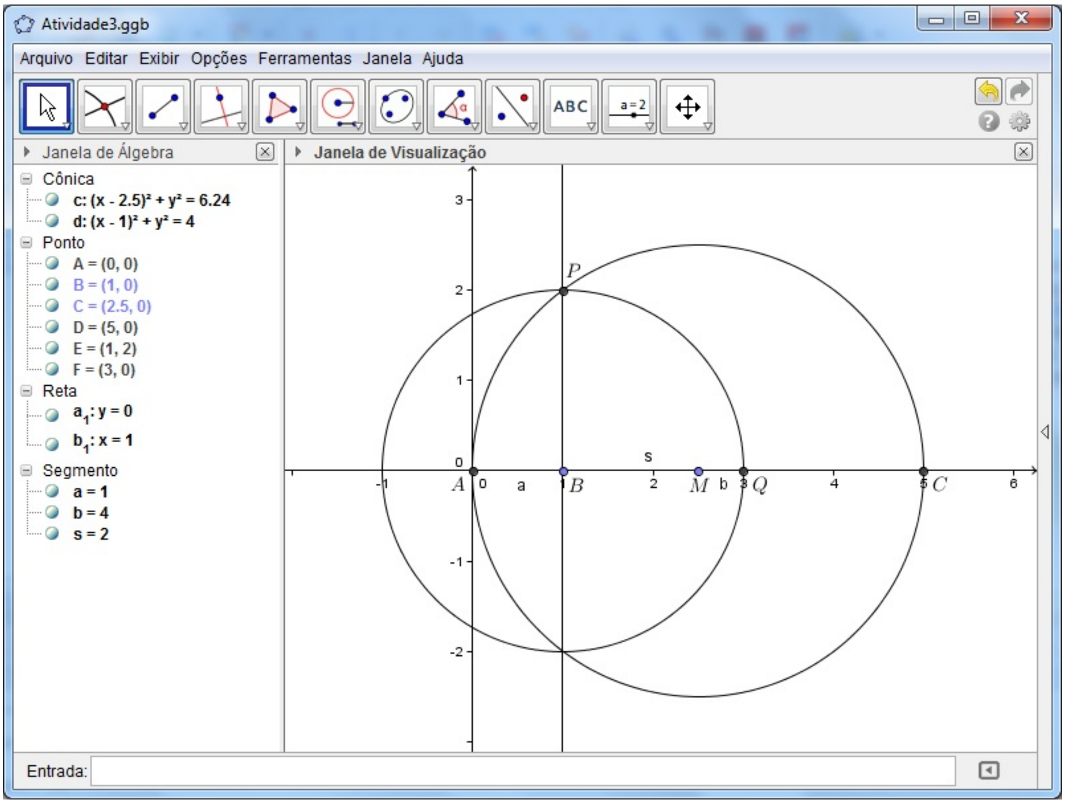


Figura 4.3: Exercício 4.1.2.1.

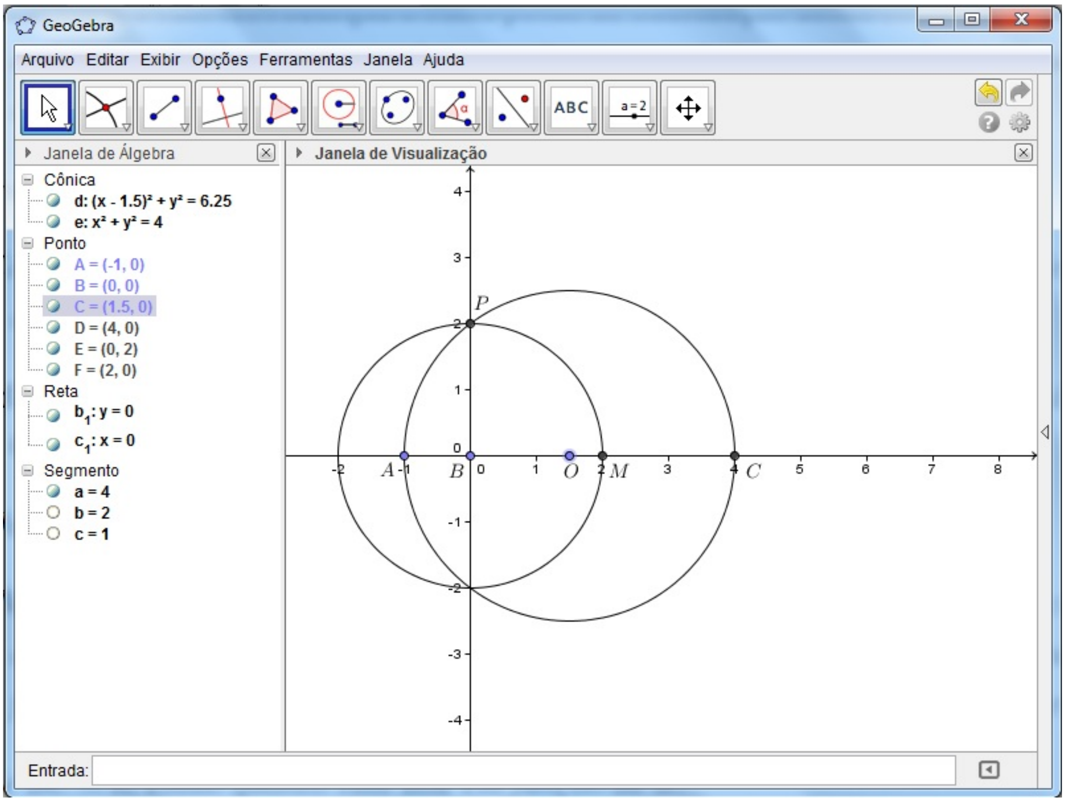


Figura 4.4: Exercício 4.1.2.2.

Exercício 4.1.2.3 *Agora, construa os seguintes números:*

(a) 2.

(b) $\sqrt{2}$.

(c) $\sqrt{3}$.

(d) $\sqrt[4]{3}$.

4.1.3 Atividade 3: Como construir números da forma $a+b\sqrt{w}$, com $a,b,w \in \mathbb{Q}$

Já sabemos como construir a soma, o produto, o quociente e também raízes quadradas e quartas de números construtíveis. Vamos agora usar essas operações para construir números da forma $a+b\sqrt{w}$, com $a,b,w \in \mathbb{Q}$ (Consequentemente, $\sqrt{w}$ também é costrutível). Tais construções nos levam a entender a construção de números dessa forma, onde a, b e w, são também da forma $m+n\sqrt{z}$, com $m,n,z \in \mathbb{Q}$. Note que se continuarmos, esse processo se repete indefinidamente.

Como as construções desses números envolvem construções anteriormente realizadas, ou seja, os procedimentos são praticamente os mesmos, vamos apenas apresentar a atividade sem resolvê-la (O leitor pode ver o Exemplo 3.2.2.1, p. 32). Porém, lembremos que para construir $3\sqrt{2}$, por exemplo, basta construir os dois números, 3 e $\sqrt{2}$, separadamente e depois multiplicá-los ou simplesmente, somar $\sqrt{2}$ três vezes. Ambos os casos já foram mostrados na Proposição 3.1 (p. 25) e no Exemplo 3.2.2.1, (p. 32).

Exercício 4.1.3.1 *Construa os seguintes números:*

(a) $1+\sqrt{2}$*;*

(b) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$

(c) $5+\sqrt{1+3\sqrt{2}}$.

Capítulo 5

Conclusões

Esses estudos teóricos e práticos vieram contribuir para o entendimento de como se deve trabalhar com construções, afim de que tanto os alunos quanto os professores possam verificar a importância destas para os números construtíveis, bem como desses dois conteúdos para o ensino de Matemática. É conveniente mencionarmos que hoje a metodologia utilizada pelos professores dificilmente enfatiza a importância dos números construtíveis para a construção da reta real, de pontos, retas e circunferências, por exemplo. Acabam por ensinar os conteúdos dando importância apenas à aplicações de fórmulas, sem no entanto, verificá-las. Mais ainda, a perspectiva histórica acaba sendo esquecida, transformando o ensino desses conteúdos em algo sem propósito algum.

Com isso, entendemos que o processo educacional deve oferecer ao professor subsídios para a sua prática pedagógica, no que concerne ao estudo da geometria em geral, com suas construções, e dos números construtíveis, para que este possa fazer um trabalho ativo, no qual professores e alunos interajam nesse processo de formação de indivíduos compromissados com a Matemática. E o professor, consequentemente, deve contemplar em seu plano de ensino, diversificadas estratégias que contribuam para uma maior e melhor habilidade do aluno em reconhecer o uso das construções geométricas na resolução de problemas envolvendo números construtíveis.

Portanto, salientamos que o ensino aprendizagem de construções geométricas e, consequentemente, de números construtíveis é tão importante como o de quaisquer outros conceitos matemáticos, como o de medir, por exemplo, na forma em que se encontra presente e interconectado com alguns conteúdos não só do Ensino Médio, mas de praticamente todo o Ensino Básico. Porém, antes de trabalharmos tais conteúdos, é importante que o aluno já conheça os conceitos básicos de geometria para, assim, poder usá-los de forma correta nas construções como um todo. Por isso, é adequado que o estudo dos mesmos seja somente a partir do 2º ano do Ensino Médio, de preferência após ter sido visto a parte de geometria plana.

No entanto, a maior parte do trabalho com números construtíveis deve concentrar-se nas construções dos mesmos. É interessante lembrarmos que o uso de exemplos ligados ao cotidiano e o uso de material pedagógico, industrializado ou não, que explorem a utilização desses números, talvez dentro de outros conteúdos, se faz necessário para ajudar a melhor formar os diversos conceitos envolvidos, embora o professor não deva se restringir apenas a eles. É importante percebermos que o uso de tais métodos, principalmente em geometria, torna a aula muito mais dinâmica e divertida. Cabe ressaltarmos, ainda, que alguns destes métodos podem servir como métodos de avaliação, o que fica a critério de cada professor.

Pretendemos com este TCC contribuir para que o ensino aprendizagem de números construtíveis, mesmo que dentro de outros conteúdos, se transforme em algo presente no Ensino Médio e que alunos e professores lancem um novo olhar sobre o estudo destes “novos” números. Também esperamos que este trabalho seja útil, quer a alunos quer a professores, no sentido de incentivá-los nesse estudo.

Referências Bibliográficas

[1] ARAÚJO, I. B. *Uma Abordagem para a Prova com Construções Geométricas e Cabri-geométre*. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2008.

[2] BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. 10ª ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[3] BARCELOS, G. T. e BATISTA, S. C. F. *Geometria Dinâmica utilizando o Software Geogebra*. Disponível em <https://sites.google.com/site/cursocie/softwares-livres> Acesso em Dezembro de 2012.

[4] CAMINHA, A. *Notas de Geometria*. Material usado na disciplina de Geometria I – PROFMAT, Turma 2011.

[5] EUCLIDES, *Os Elementos*. Tradução e Introdução de Irineu Bicudo – São Paulo: UNESP, 2009.

[6] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Tradução de Higyno H. Domingues. Campinas, São Paulo: Unicamp, 1994.

[7] _______ *Introdução à História da Matemática*. Tradução de Higyno H. Domingues. Campinas, São Paulo: Unicamp, 2004. 844 p.

[8] GONÇALVES, A. *Introdução à Álgebra*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

[9] LAMPHIER, L. *Geometric Constructions*. Disponível em <http://www.math.iastate.edu/thesisarchive/MSM/LamphierMSMF04pdf.pdf> Acesso em 28 de Janeiro de 2013.

[10] PRADO Jr., C. *Dialética do Conhecimento*. São Paulo: Brasiliense, 1980.

[11] SOARES SOUTO, M. A. *Construção por Régua e Compasso*. Seminário. Disponível em <http://www.dme.ufcg.edu.br/> Acesso em Dezembro de 2012.

[12] WAGNER, E. *Construções Geométricas*. Com a colaboração de José Paulo Q. Carneiro. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1993.

[13] ___________ *Construções Geométricas*. Com a colaboração de José Paulo Q. Carneiro. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

Apêndice A

Respostas dos Exercícios

Neste Apêndice estão as respostas dos exercícios citados no trabalho, para ser mais específico, no Capítulo 2. Como no trabalho já tem a descrição dos passos de cada uma dessas construções, colocaremos aqui somente as figuras correspondentes à elas. Já as respostas dos exercícios referentes às atividades, não serão dadas aqui, pois antes desses, têm outros exercícios com os passos que são necessários para solucioná-los, ou seja, para fazer as construções correpondentes.

Exercício 2.2.1.3 (p. 11) Quadrado de lado $\overline{AB}$.

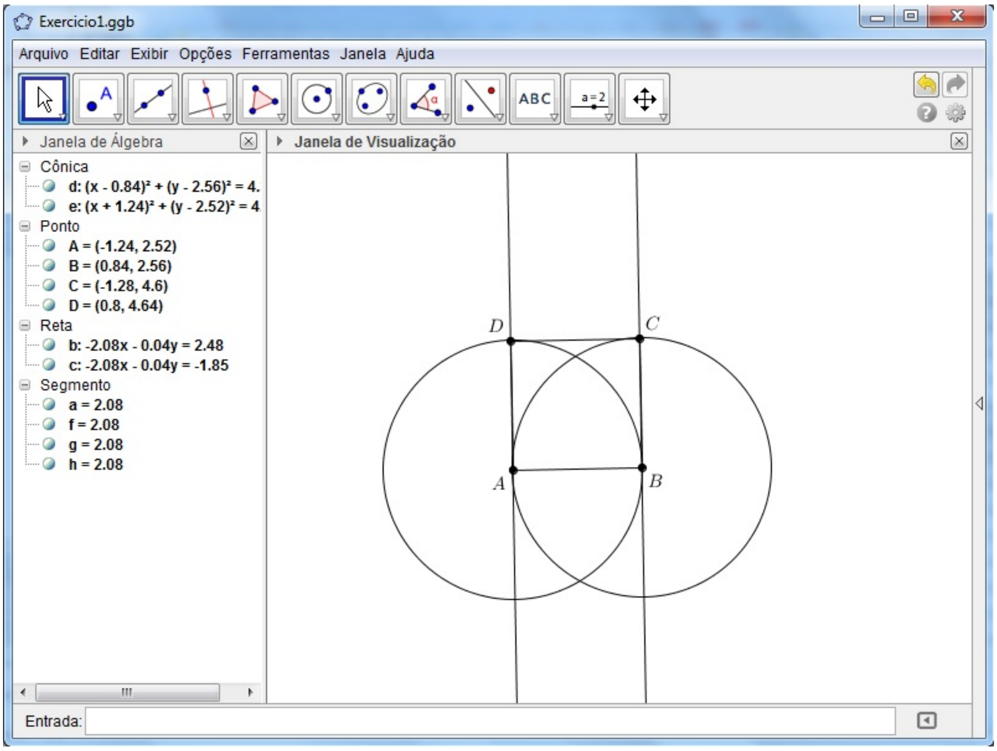


Figura A.1: Quadrado de lado $\overline{AB}$.

Exercício 2.2.1.6 (p. 12) Triângulo ABC.

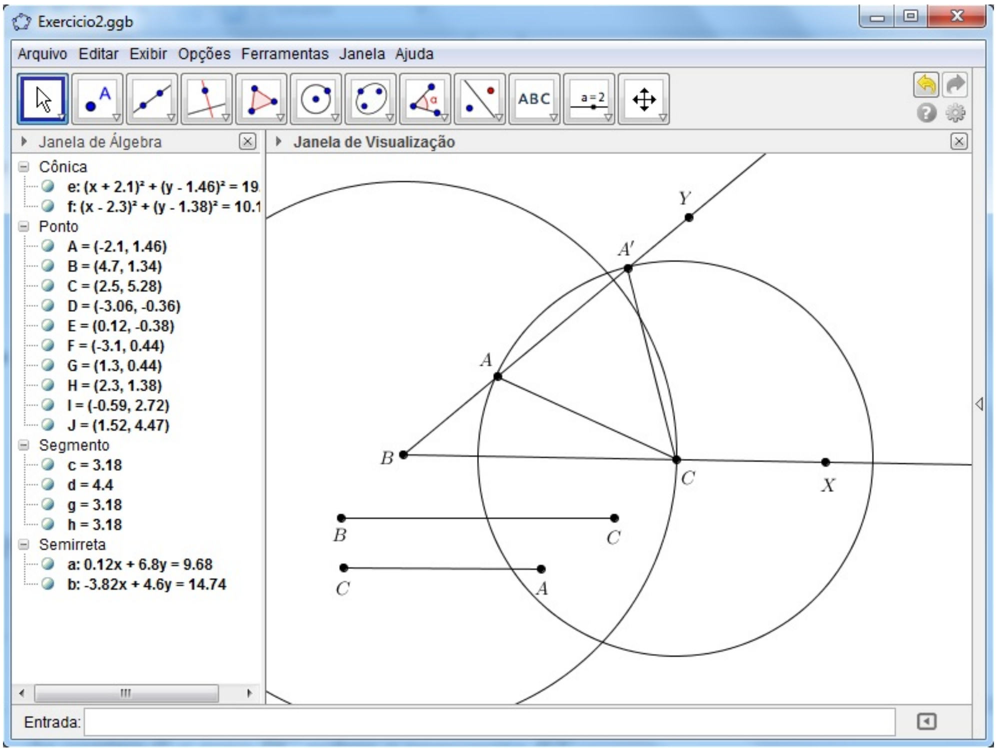


Figura A.2: Triângulo ABC, dados: $\widehat{B}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.

Exercício 2.2.1.7 (p. 13) Caminho Mínimo.

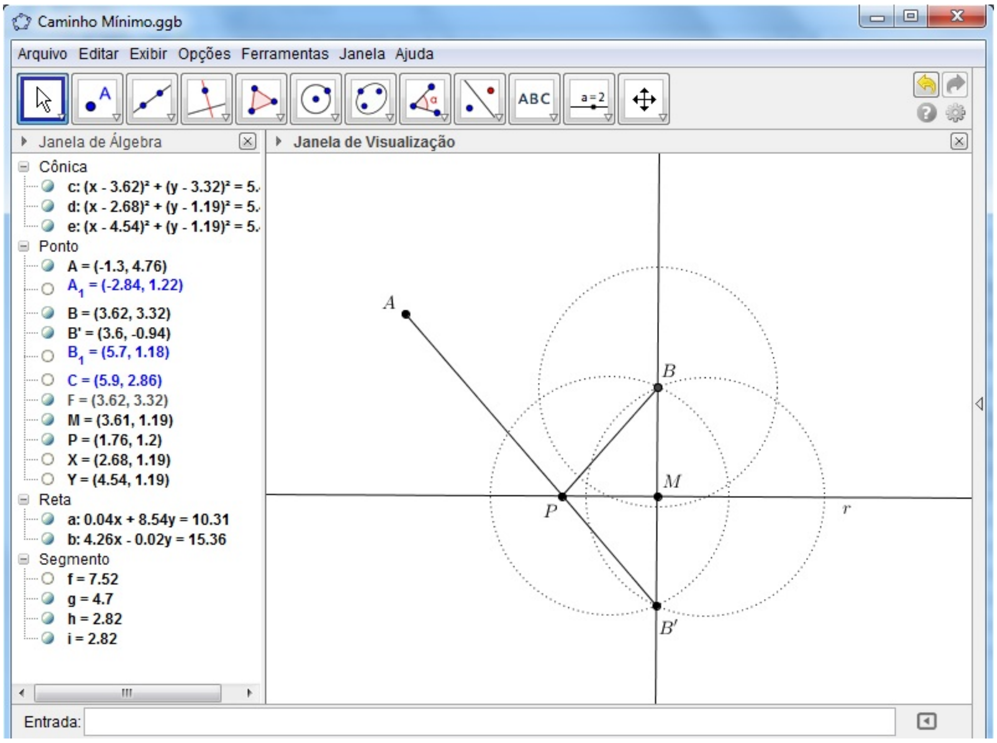


Figura A.3: P tal que $AP + PB$ seja mínimo.

Exercício 2.2.1.9 (p. 17) Tangentes à uma circunferência.

(a) O ponto P pertence à circunferência β.

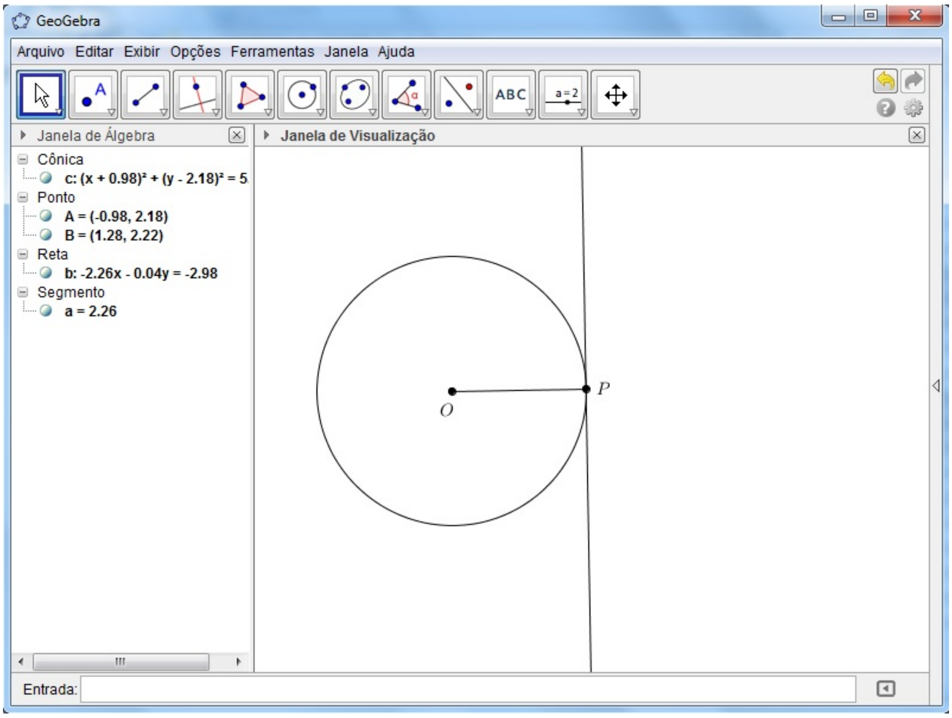


Figura A.4: Tangente à β por P, onde $P \in \beta$.

(b) O ponto P não pertence à circunferência β.

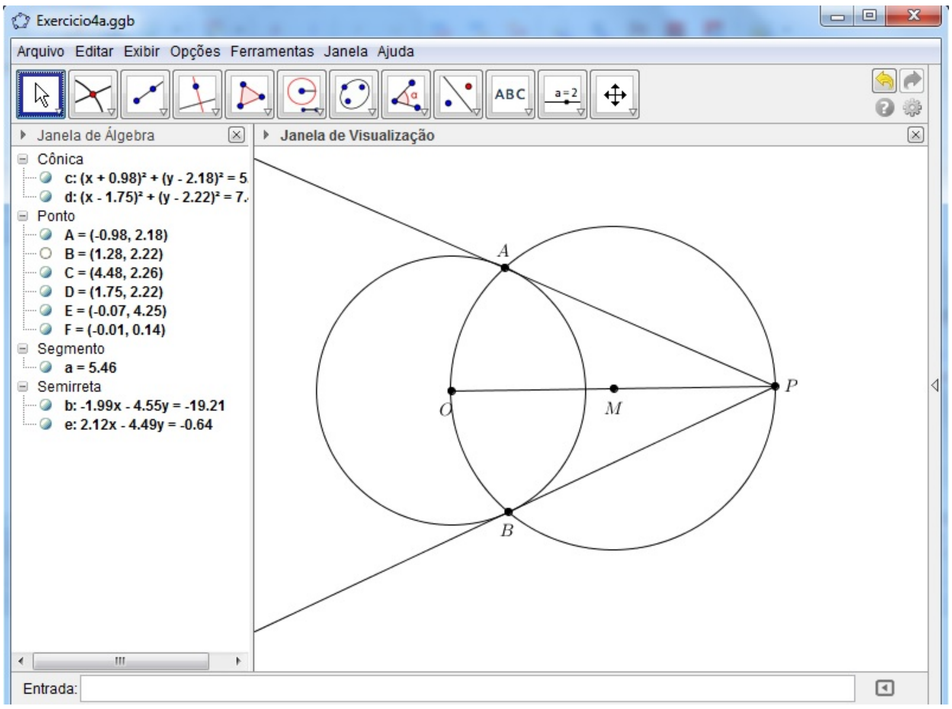


Figura A.5: Tangentes à β por P, onde $P \notin \beta$.

Apêndice B

“Curiosidades” sobre o GeoGebra

Neste Apêndice constam algumas dicas sobre o GeoGebra (Versão: 4–2–17–0). São apenas algumas “curiosidades” sobre ele que talvez não estejam tão detalhados na maioria dos tutoriais, algo que descobri devido ao muito uso do mesmo durante a elaboração deste trabalho.

Fórmula LaTex: Isto mesmo, LaTex. O GeoGebra nos dá a opção de escrever fórmulas, pontos, letras gregas, etc., com a mesma fonte existente no LaTex. Para tanto, basta selecionar a opção “Inserir texto”, “clicar” na “Janela de Visualização” (ou na figura) e depois em “Fórmula Latex” e, então, escolher o que deseja.

Ponto em Objeto: Se desejarmos colocar um ponto sobre um objeto de tal forma que ao movimentá-lo (ponto ou objeto), o ponto permaneça sobre o mesmo, é só usar esta opção. Isso pode ser feito “clicando-se” em cima da opção “Novo Ponto” e em seguida, selecionando-se a opção “Ponto em Objeto”.

Selecionar Objeto: Se por acaso, não conseguirmos selecionar um objeto (Pode ser que ele esteja muito próximo de outro, por exemplo), à esquerda, na “Janela de Álgebra”, isto também pode ser feito, ou seja, é possível selecioná-lo. Nesta “Janela”, passamos o “cursor” sobre os objetos e os observamos na “Janela de Visualização”. Ao encontrá-lo, procedemos como se fosse selecioná-lo normalmente. Se desejarmos apenas apagá-lo, basta “clicarmos” sobre a “bolinha” que tem ao lado do mesmo (Isto na “Janela de Álgebra”).

Compasso: Para usar esta opção, devemos “clicar” sobre os pontos que, no caso, serão as extremidades do segmento que será escolhido como a abertura do compasso. Esta abertura será o raio do arco (ou circunferência) que desejamos traçar. Depois, é só “clicar” sobre o ponto que será o “centro”.

Estilo Este com certeza deve ter em algum tutorial, e com detalhes. Mas, caso não queiramos procurar em outro lugar, vamos apenas dar algumas dicas de como usá-lo. Encontraremos esta opção “clicando” na “Janela de Visualização” com o botão direito, depois em “Propriedades” e, em seguida, em “Estilo”. Com isso, podemos diminuir (ou aumentar) a dimensão de um ponto, ou a espessura de uma reta ou de uma circunferência, ou ainda, colocá-las tracejadas. Em “Propriedades” também se encontra a opção para mudar a cor do objeto selecionado.

Botão direito do Mouse: Ao “clicarmos” com o botão direito do “mouse” sobre a “Janela de Visualização”, surgem várias outras opções. E se for sobre um objeto, também, embora as opções mudem.