UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Quadratura: da antiguidade à atualidade

Vandenberg Gouveia Dias

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Aparecido Jesuino de Souza

Campina Grande - PB
Julho/2014

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG.

D514 Dias, Vandenberg Gouveia.

Quadratura: da antiguidade à atualidade
/ Vandenberg Gouveia Dias.
Campina Grande, 2014.
49 f.:il.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) -
Universidade Federal de Campina Grande, CCT.
Referências.
Orientador: Prof. Dr.Aparecido Jesuino de Souza.
1. Historia da Matemática 2. Geometria 3. Quadratura
I. Quadratura: da antiguidade à atualidade.

CDU-51(091)(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Quadratura: da antiguidade à atualidade

por

Vandenberg Gouveia Dias †

Trabalho Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

†Bolsista CAPES

Quadratura: da antiguidade à atualidade

por

Vandenberg Gouveia Dias

Aprovado por:

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes - UFCG

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro - UFPB

Prof. Dr. Aparecido Jesuino de Souza - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Julho/2014

Dedicatória

À minha esposa e filha pela paciência e compreensão durante todo o Mestrado. E aos meus pais, que desde a minha infância se empenharam ao máximo para que eu pudesse ter uma educação de qualidade e enfim chegasse até aqui.

Agradecimentos

Agradeço à Escola Municipal Vereadora Neusa Pereira da Silva, na pessoa do Prefeito Municipal da cidade Pilões-PB, pelo apoio e pela liberação parcial de minha carga horária semanal para que eu pudesse me dedicar ao PROFMAT. Agradeço também à todos os professores que fizeram parte da minha vida acadêmica, em especial aqueles que me orientaram em agum projeto específico, Prof. Dr. Aparecido Jesuino de Souza (orientador do TCC) e José Lindomberg P. Barreto (Orientador de Iniciação Científica). Aos meus colegas de turma, agradeço pelo companherismo e por estarmos sempre juntos na busca de um melhor aprendizado e uma melhor formação. Agradeço à Deus, pela força sobrenatural que me concedeu durante esses anos de estudo.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

Resumo

Este trabalho tem na Geometria o seu principal fundamento com o intuito de contribuir no processo de ensino aprendizagem da Matemática. Nele apresentamos uma prática pedagógica que possa ajudar o aluno a perceber a importância do desenvolvimento da Geometria através dos anos e como ela foi e ainda é fundamental na resolução de certos problemas e situações práticas da vida. Desse modo apresentamos uma síntese do desenvolvimento da Geometria desde seu possível surgimento até os dias atuais, onde nossa ênfase maior dar-se-á no processo conhecido como Quadratura e como ele era usado para o cálculo de áreas de figuras planas. Sendo assim, construiremos, com base em proposições encontradas no livro Elementos de Euclides, todo o processo para a quadratura de um triângulo e consequentemente de um polígono. Sugerimos uma série de atividades a serem aplicadas usando os recursos do Geogebra que poderão contribuir para dinamizar o processo de aprendizagem do conteúdo envolvendo áreas de figuras planas. Por fim, dedicaremos uma pequena parte desse trabalho a comentários a respeito de como a História da Matemática foi e é vista pelos professores e profissionais da área.
Palavras Chaves: Geometria. Quadratura. História da Matemática.

Abstract

This work has on their main basis the Geometry in the elementary level. In it we present a pedagogical practice that can help students to realize the importance of the development of geometry along the years and how it can be used in solving certain problems in the everyday life. With this aim we present an overview of the development of geometry since antiquity to nowadays with emphasis in the process known as Quadrature and how it was and it is used to calculate areas of plane figures. Based in a sequence of axioms and propositions found in Euclid's Elements book we present the quadrature process for a triangle and consequently for a polygon. After the process is presented, we suggest a number of activities to be implemented using the capabilities of Geogebra software which may stimulate the learning process involving the content of areas of plane figures. In the last part of the work, we present some comments on how the history of mathematics was and it is viewed by teachers and professionals.
Keywords: Geometry. Quadrature. History of Mathematics.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O tema desse trabalho resultou dos estudos e discussões realizadas na disciplina de História da Matemática do curso do PROFMAT no que diz respeito a forma como os povos antigos, em destaque os gregos, trabalhavam a medição de áreas. Foi acreditando que tais métodos servem de preparação e motivação para a construção do conhecimento matemático do aluno sobre esse conteúdo é que esse trabalho foi desenvolvido. A proposta é que o professor utilize com o seu alunado os antigos métodos de medição de áreas dos gregos de forma que sirva de introdução e preparação para os métodos atuais já conhecidos. Parece um retrocesso, mas na verdade é uma valorização do conhecimento construido por longos anos, bem como uma oportunidade do aluno conhecer e se sentir parte de algo muito pouco valorizado nos curriculos hoje em dia: A História da Matemática.

O que pretendemos com o alunado é trabalhar de forma que ele conheça a história da construção desse conhecimento, não só através de textos, mas principalmente no desenvolvimento de atividades práticas de medição de áreas. Ele terá a oportunidade de entender e visualizar uma das inúmeras aplicações do Teorema de Pitágoras e conhecer o famoso método grego da quadratura de um triângulo, objeto principal do nosso estudo. Para isso o aluno será desafiado a sair das quatro paredes de uma sala de aula, e navegar pelo mundo virtual através do uso da internet e de softwares matemáticos, como por exemplo o Geogebra. O aluno terá a oportunidade de sentir na pele a forma como os gregos tratavam no passado a questão de medição de áreas, fazendo medições práticas utilizando tais métodos.

É claro que o objetivo principal desse trabalho é utilizar a quadratura de um polígono qualquer como motivador para o estudo de áreas de polígonos através das formulas já conhecidas. Queremos que os alunos tenham uma visão diferente de como a Matemática foi construída, comparando a realidade de hoje com a da antiguidade. Comparando o hoje, que para eles já é algo díficil de se desenvolver, com o ontem, onde as ferramentas, os métodos e as fórmulas eram muito escassos. Com as atividades propostas poderemos ajudar o aluno a desenvolver o seu raciocínio no cálculo de áreas, bem como criar um ambiente propício para o desenvolvimento de ideias, troca de experiências e discussões construtivas.

Ao longo de todo esse trabalho encontraremos uma forte abordagem histórica a respeito de como era feita a medição de áreas na antiga Grécia trazendo um capítulo totalmente dedicado à História da Geometria ao longo dos tempos. Além disso, apresentaremos um teste de sondagem feito com os professores de Matemática da cidade de Areia, colhendo a opinião de cada um deles a respeito da História da Matemática, do desenvolvimento ao longo do tempo da Geometria e sobre o tema quadratura de triângulos. Apresentaremos algumas atividades propostas para serem desenvolvidas pelo professor e a sua turma, como motivação para a aplicação do conteúdo de áreas de polígonos e como auxiliador do processo de aprendizagem dos alunos. O conteúdo de áreas de polígonos é objeto de estudo tanto do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio.

1.1 Objetivos

O objetivo geral desse trabalho é contribuir para uma prática pedagógica em sala de aula que possibilite aos alunos perceberem, através de problemas práticos e situações extra-escolares, a importância do cálculo de área de figuras planas desde a antiguidade até os dias atuais. Já os objetivos específicos visam:

- Motivar o estudo do conteúdo de áreas de figuras planas;
- Conhecer na prática uma das antigas utilidades do teorema de Pitágoras;
- Mostrar através do ambiente de Geometria Dinâmica como o Teorema de Pitágoras ajudava os povos na antiguidade;
- Criar junto com o aluno situações e atividades para que se possa comparar os métodos antigos de quadratura com os atuais, em que as fórmulas já estão disponíveis;
- Promover uma reflexão sobre a importância da História da Matemática no currículo escolar;
- Contribuir para tornar o ensino da Matemática mais atrativo, interessante e estimulante através do conteúdo de área, algo imprescidível para a formação do aluno.

1.2 Organização

Este TCC está organizado da seguinte forma: Esta introdução que fornece uma visão ampla do que está sendo proposto; o Capítulo 2 com um pouco da História da Matemática, mais especificamente da Geometria e como os povos ao longo do tempo foram construindo e utilizando tal conhecimento; o Capítulo 3 que trata do tema base de nosso trabalho, a quadratura do triângulo, onde também será citado a impossibilidade da quadratura do círculo utilizando apenas a régua e o compasso; o Capítulo 4 em que são propostas algumas atividades utilizando o Geogebra, processos algébricos ou situações que vão além das quatros paredes da sala de aula; o Capítulo 5 apresenta uma reflexão a respeito de como a História da Matemática é vista pelos profissionais da área no que diz respeito ao ensino da Matemática; o Capítulo 6 apresenta as considerações finais seguidas das Referências Bibliográficas e dos apêndices. O Apêndice A apresenta axiomas e proposições citadas em algumas demonstrações ao longo do trabalho, já o Apêndice B contêm um questionário de sondagem sobre como a História da Matemática é valorizada por seus companheiros de trabalho.

1.3 Definições

Apresentamos as duas definições a seguir para uma melhor compreensão do que vem nos capítulos seguintes.

Definição 1.1 *Dois polígonos são equivalentes se possuirem a mesma área.*

Definição 1.2 *Dois polígonos são congruentes se possuirem ângulos correspondentes de medidas iguais e lados correspondentes de medidas iguais.*

Capítulo 2

História da Geometria

2.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos um pouco da história da Geometria, objeto de nosso estudo. Queremos e devemos mostrar aos alunos a importância de cada conteúdo abordado e que tais conteúdos não surgiram prontos, da forma que são apresentados a eles. "Por trás de cada informação dada com tanta simplicidade em sala de aula existem as lágrimas, as aventuras e a coragem dos cientistas" (Cury, [2], p.136). E acredito que a história da Matemática, em particular a Geometria, muitas vezes é desprezada e desconsiderada por boa parte dos professores, e o nosso alunado acaba perdendo a oportunidade de "viajar" nesse fantástico mundo de descobertas e construções que fazem da Matemática a grande potência do conhecimento que é hoje em dia.

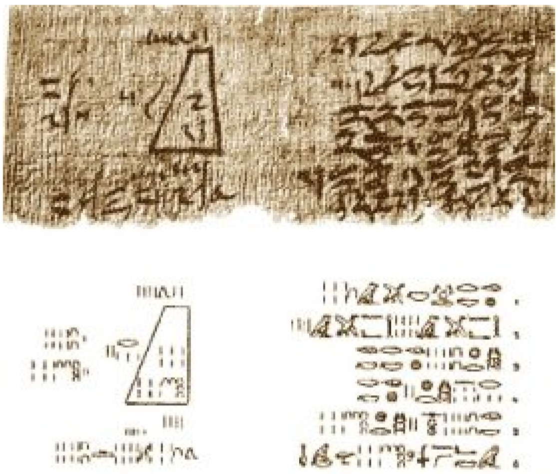
2.2 História da Geometria

Parece não haver dúvidas que a Geometria deve ter se iniciado em tempos muitos remotos da antiguidade, de maneira tímida e modesta e que foi crescendo gradualmente até atingir a dimensão que tem hoje. Contudo é preciso entender que a Geometria teve conotações diferentes em diferentes períodos do seu desenvolvimento. Parece que as primeiras considerações que o ser humano fez a respeito da Geometria se originou de simples observações motivadas pela capacidade humana de reconhecer e comparar formas e tamanhos. Assim como os números surgiram da necessidade de contar, a geometria teria surgido por razões semelhantes, ou seja por circunstâncias da vida. A noção de distância provavelmente foi um dos primeiros conceitos geométricos a serem desenvolvidos. A necessidade de delimitar terras levou à noção de figuras geométricas simples, tais como retângulos, quadrados e triângulos, objetos principais do nosso trabalho. Por isso, há quem diga que a Geometria surgiu às margens do rio Nilo, diante da necessidade de medir, redistribuir e repartir. Devido às enchentes, vários povos sofriam perdas e, diante do prejuizo, as áreas das terras precisavam ser redistribuídas. Escritos de Herôdoto fortalecem essa hipótese. Segundo Herôdoto (Oeuvres complètes II 109, p.183, apud PITOMBEIRA, [7], p.49)

> "Quando das inundações do Nilo, o rei Sésostris enviava pessoas para inspecionar o terreno e medir a diminuição dos mesmos para atribuir ao homem uma redução proporcional de impostos. Aí está, creio eu, a origem da geometria que migrou, mais tarde, para a Grécia."

Existem desde aproximadamente 2000 a.C. dois papiros muito importantes na história da geometria, veja Fig. 2.1(a) e Fig. 2.1(b): Papiro de Rhind, que apresenta dados sobre trigonometria, aritmética, equações, área e volume; Papiro de Moscou, que foi escrito por volta de 1850 a.C. apresentando problemas de geometria e matemática.

(a)



(b)

Figura 2.1: Papiros: (a) Papiro de Rhind e (b) Papiro de Moscou. (Fonte: Clube de Geometria).

São vários os indícios de civilizações antigas que possuíam conhecimentos geométricos. Podemos citar os Egípicios, os Assírios e os Babilônios. Na Fig. 2.2 estão representados os Egípcios e suas famosas e intrigantes pirâmides.

Como afirma Araújo (2007, p. 1, apud COSTA, [1], p.5) "... assírios e babilônios já conheciam as principais figuras geométricas, bem como as noções de ângulos que usavam na medição de áreas e na Astronomia". Os chineses e também os hindús conheciam o teorema sobre o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo.

Figura 2.2: Piramide.(Fonte: [5]).

2.3 A evolução da Geometria ao longo dos tempos

2.3.1 A geometria antes dos gregos

Há quem defenda o surgimento de várias geometrias ao longo da história. Seria uma espécie de evolução da Geometria, que começaria ali no subconsciente: geometria essa citada nos parágrafos inciais desse capítulo. Mais tarde a inteligência humana tornou-se capaz de, a partir de um certo número de observações no que diz respeito às formas, tamanhos e relações no espaço dos objetos físicos, passar a extrair relações e propriedades tornando essa Geometria Científica, como é conhecida atualmente. Há também o que conhecemos como Geometria Pré-Helênica, onde a partir de tábuas antigas constatamos que os Babilônios do período de 2000-1600 a.c. conheciam as regras gerais para o cálculo da área do retângulo, de triângulos retângulos e isósceles, e até possivelmente de qualquer triângulo, do trapézio retângulo, do volume do paralelepípedo retângulo e de uma maneira mais geral, do volume do prisma reto com base trapezoidal, entre outras. Podemos citar também os registros encontrados no papiros de Moscou e de Rhind, no que diz respeito à geometria egípicia antiga. Dos 110 problemas desses papiros, 26 são de Geometria, que em sua maioria, provém de fórmulas de medição necessárias para calcular áreas de terras e volumes de celeiros. É provável que na Índia e na China tenham ocorrido realizações em Geometria semelhantes às encontradas no Egito e na Babilônia, contudo muito pouco se sabe a respeito da história da Geometria desses dois povos. Com as mudanças políticas e econômicas ocorridas no desenrolar dos anos, mais precisamente nos últimos séculos do segundo milênio, os gregos surgem com grande força em contrapartida com o enfraquecimento do poder do Egito e da Babilônia. Então o “bastão” do desenvolvimento da Geometria passou para as mãos dos gregos, que transformaram a matéria em algo muito diferente do que pensavam os seus antecessores.

2.3.2 O período de ouro

A partir da entrada dos gregos nessa história, surge então uma espécie de Geometria sistemática ou demonstrativa, onde os fatos geométricos deveriam ser estabelecidos por raciocínios dedutivos, e não por procedimentos empíricos como defendiam os Egípicios e Babilônios. A grande decepção porém, se dá ao fato de existirem poucas fontes que relatam os primórdios da Geometria grega primitiva. O Sumário Eudemiano de Proclus é a principal fonte de informações referente à Geometria grega primitiva. O problema é que esse sumário, assim como os demais manuscritos que tratam da geometria grega primitiva, datam de vários séculos depois de os originais terem sido escritos. Segundo esse sumário, o grande fundador da geometria demonstrativa foi Tales de Mileto, provavelmente o pioneiro da Geometria grega. Em seguida, o sumário Eudemiano traz Pitágoras como o próximo grande geômetra grego, dando continuidade à sistematização da geometria iniciada por Tales. Foi na Grécia que Pitágoras fundou a famosa escola pitagórica, onde a partir daí cadeias de proposições em que umas derivam de outras anteriores começaram a surgir. Emergia então a ideia de desenvolver a Geometria como uma longa cadeia. Hipócrates foi o primeiro a tentar, seguido por Leon, Teudius e outros. Contudo, foi por volta do ano 300 a.c. que Euclides produziu sua obra espetacular, conhecida como Os Elementos, uma cadeia dedutiva única de 465 proposições englobando a geometria plana, espacial, teoria dos números e álgebra geométrica grega. Foram inúmeras as realizações dos gregos durantes os três seculos entre Tales e Euclides. Foi a partir dessas realizações e desenvolvimento, que originou-se tentativas constantes de resolver os três famosos problemas de construção da antiguidade: A duplicação do cubo; A trissecção do ângulo; e a quadratura do círculo. Bem, é fato que os três geômetras mais importantes da antiguidade foram Euclides (c. 300 a.c.), Arquimedes (287-212 a.c.) e Apolônio (c. 225 a.c.), já que quase tudo que se fez em Geometria, até os dias atuais, tem sua semente originada em algum trabalho desses "gigantes". Alguns tratados matemáticos de Arquimedes sobreviveram até nos dias atuais, outros há vestígios que se perderam. Dos "sobreviventes" temos trabalhos sobre Geometria Plana e Geometria Sólida, que foram criações originais e que marcam Arquimedes como o maior matemático da antiguidade e um dos maiores de todos os tempos. Foi esse gênio que deu o primeiro pontapé na longa história da busca de aproximações cada vez mais refinadas para o valor de π, com o seu clássico trabalho da geometria plana sobre o método dos perímetros para calcular o valor de π. No que diz respeito à Geometria sólida, encontramos, pela primeira vez, as fórmulas corretas para as áreas da supefície esférica e calota esférica, bem como para o volume da esfera. Quanto a Apolônio, uma de suas obras extraordinárias foi sobre as secções cônicas, que foi um estudo exaustivo a respeito dessas curvas que superaram qualquer estudo já feito anteriormente. Deve-se a Apolônio a criação dos termos "elipse", "hipérbole" e "parábola". Um problema muito interessante e instigante proposto por Apolônio foi a construção com régua e compasso de um círculo tangente a três círculos dados, problema conhecido hoje como problema de Apolônio. Mais tarde, com a morte de Apolônio, teríamos o fim da época de ouro da Geometria grega. É claro que posteriormente surgiram outros geômetras de destaque como Heron (c. 75 d.C.), Menelau (c. 100), Claudio Ptolomeu (c.85-c.165) e Papus (c.320), que preencheram detalhes e desenvolveram certas teorias cujos "embriões" na verdade já estavam contidos nos trabalhos dos três grandes antecessores.

2.3.3 O período de seca: Aritmética e Álgebra em evidência

Com a queda do império grego e a expansão do império romano, o ensino quase que deixou de existir. O saber grego quase desapareceu e a maioria das artes e ofícios transmitidos pelo mundo antigo foram esquecidos. Foi então nesse período de "seca" que os povos do Oriente, especialmente os hindús e árabes, tornaram-se os maiores estudiosos da matemática. Contudo, embora se destacando no cálculo, contribuindo para a álgebra e desempenhando um papel de destaque no desenvolvimento do atual sistema de numeração posicional, os hindús quase nada produziram de importante em Geometria. Já os árabes, cuidadosamente traduziram trabalhos na área de matemática para a sua língua, desse modo conservando-os até que os europeus posteriormente tivessem condições de retraduzí-los. Além disso, os matemáticos árabes deram algumas contribuições próprias na área de geometria, dentre elas podemos citar as soluções geométricas para as equações cúbicas dada por Omar Khayyan (c.1044-c.1123). Contudo, no final do século XI os clássicos gregos da ciência e da matemática voltaram a difundir-se na Europa. Assim o saber antigo, preservado pela cultura mulçumana, foi passado para a Europa Ocidental mediante traduções latinas feitas por eruditos cristãos. O século XII ficou conhecido como o século dos tradutores, sendo que no século seguinte o surgimento das universidades fortaleceu o desenvolvimento da Matemática. Foi por volta de 1260 que Johannes Campanus fez uma tradução para o latim dos Elemento de Euclides, que mais tarde em 1842 tornava-se a primeira versão impressa dessa grande obra.

A guerra dos cem anos e a peste que assolou a Europa praticamente fez do século XIV improdutivo à Matemática. O início do Renascimento testemunhou o retorno da arte e do saber na Europa, em que muitos clássicos gregos, conhecidos apenas na tradução árabe, passaram a ser estudados na sua língua original. O século XV também marcou um grande avanço nos meios de comunicação fazendo com que o conhecimento se difundisse rapidamente. Contudo nessa época a Matemática se concentrava na aritmética, na álgebra e na trigonometria. No século seguinte a aritmética e a álgebra continuaram em grande desenvolvimento, enquanto os maiores destaques da Geometria dessa época foram: a tradução em 1533 do Comentário sobre o Livro I de Euclides, feito por Proclus; a primeira tradução para o latim dos Livros I-IV da obra Secções Cônicas de Apolônio, por Federigo Commandino em 1566; e em 1572 uma tradução dos Elementos de Euclides, também feito por Commandino, a partir do grego. Sem contar que na época muitos trabalhos de Arquimedes já tinham sido traduzidos para o Latim. Era inevitável então que, com a divulgação desses grandes trabalhos gregos, o assunto Geometria voltasse a chamar a atenção dos estudiosos da época.

2.3.4 Do Renascimento nasce a Geometria Projetiva

Devido ao Renascimento, muitos artistas e arquitetos passaram a se interessar profundamente pelos segredos que regem a construção de projeções de objetos sobre uma tela. Uma teoria geometrica sobre o assunto tinha então sido criada já a partir do século XV, porém essa teoria só foi consideravelmente ampliada no início do século XVII, por um pequeno grupo de matemáticos franceses motivados pelo engenheiro e arquiteto, Gérard Desargues. Esse por sinal, publicou em 1639 um tratado original sobre secções cônicas, que explorava a idéia de projeção. Tratado esse que foi ignorado pelos matemáticos da época e consequentemente esquecido, tendo o seus exemplares desaparecidos. Só em 1845 o geômetra e historiador Michel Chasles ressuscitou esse tema. Mas a reintrodução de fato das considerações projetivas em geometriva só ocorreram no fim do século XVIII, através do geômetra francês Gaspard Monge, criando sua geometria descritiva. Essa disciplina refere-se a uma maneira de representar e analisar objetos em três dimensões por meio de suas projeções sobre certos planos. Vários outros geômetras deram o respaldo necessário a Monge, entre eles podemos citar Lazare Carnot, Charles J. Brianchon e Jean Victor Poncelet. Esse último por sinal foi o responsável pelo verdadeiro ressurgimento da geometria projetiva. Foi o seu trabalho que deu início ao chamado período da Geometria projetiva.

2.3.5 A fascinante Geometria Analítica

Paralelamente a inaugração do novo campo da geometria projetiva, outros dois gênios geômetras começavam a conceber as ideias da moderna e espetacular geometria analítica. Coube a Renner Descartes e Pierre de Fermat os primeiros passos desse fascinante mundo geométrico. Provavelmente, para a maioria do alunado, esse é o método mais viável de lidar com problemas geométricos. Porém não existe uma unanimidade entre a comunidade matemática sobre quem de fato inventou a geometria analítica, nem tampouco sobre a época do seu surgimento. Muito dessa divergência se deve ao fato do que realmente constitui a geometria analítica. Por exemplo, o conceito de fixar pontos por meio de coordenadas convenientes pode sido empregado pelos egípicios e romanos na antiguidade, ou até mesmo as equações cartesianas estabelecidas por Apolônio na sua obra Seções Cônicas. Contudo, se formos considerar a geometria analítica como na forma que encontramos hoje, é mais correto concordar com a maioria dos historiadores que consideram as contribuições decisivas de Descartes e Fermat, no século XVII, como sendo a origem essencial dessa matéria. Apesar das idéias desencadeadas por Descartes e Fermat, o primeiro desenvolvimento sistemático dessa matéria foi feito por Antoine Parent, em 1700, enquanto Alexis Claude Clairaut foi o primeiro a escrever analiticamente sobre curvas não planas no espaço em 1731. Podemos citar outros grandes avanços na geometria analítica, tais como as coordenadas polares, consideradas incialmente em 1691 por Jakob Bernoulli ou até mesmo o estudo do hiperespaço realizado no século XIX por Arthur Cayley, Hermann Grassmann e G.F. Bernhard Riemann.

2.3.6 O Cálculo e sua grande aplicação: A geometria diferencial

O século XVII foi altamente produtivo no que concerne ao desenvolvimento da matemática, já que muitos campos novos e extensos foram se abrindo. Foi nessa época que Isaac Newton e Gottfried Wihelm von Leibniz inventaram o cálculo. Como sabemos hoje, esse novo instrumento, na época é claro, mostrou-se de uma eficácia impressionante ao conseguir resolver inúmeros problemas até então sem soluções. E uma das grandes aplicações desse ramo matemático situa-se no campo da geometria, mais especificamente no estudo das propriedades das curvas e das superfícies e suas generalizações. Estamos falando da Geometria Diferencial, muito conhecida entre os alunos do ensino superior e principalmente de pós graduação em Matemática ou Física. É correto dizer, que essa matéria, pelo menos da forma que encontramos hoje, começou por volta do século XVIII, com o surgmento do cálculo e da geometria analítica. Mas, a gênesis dessa matéria é atribuida a Gaspard Monge, que pode ser considerado como o pai da geometria diferencial de curvas e superfícies do espaço. Mais tarde surgiram os estudos de Carl Friedrich Gauus (1777-1855) com a geometria diferencial de curvas e superfícies por meio de parametrização e Bernhard Riemann com sua famosa geometria riemanniana.

2.3.7 O Sistema de Euclides não está sozinho

Por dois milênios, o espírito humano esteve limitado pela tradição e crença de que o sistema de Euclides era a única maneira de descrever geometricamente o espaço físico, sendo inconsistente qualquer outro sistema geométrico contrário. Essa tradição ou crença veio a cair por terra quando o conhecido postulado das paralelas começou a entrar em discussão. A partir dessas discussões e estudos vieram à luz várias consequências que são reconhecidas hoje como teoremas importantes de uma geometria não euclidiana. Foi Gauss o primeiro a obter resultados dessa nova geometria, mas como não publicou nada a respeito, o surgimento desta geometria é atribuido ao húngaro Janos Bolyai (1802-1860) e ao russo Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856). A real independência do postulado das paralelas com relação aos outros postulados de geometria euclidiana, fruto da origem dessa nova geometria, só foi inquestionavelmente estabelecida quando se obtiveram provas da consistência da geometria não euclidiana, o que ocorreu através de Eugenio Beltrami, Felix Klein, Henri Poincaré e outros.

Foi em 1871 que Klein batizou às três famosas geometrias - de Bolyai e Lobachevsky, de Euclides, e de Riemann - de “geometria hiperbólica”, de “geometria parabólica” e de “geometria elíptica”, respectivamente. A Topologia, que em linhas gerais, pode ser definida como o estudo matemático da continuidade, começou como um ramo da geometria durante o seculo XX. A Topologia sofreu inúmeras generalizações se envolvendo com vários ramos da matemática que hoje é considerada como uma parte fundamental da mesma, ao lado da geometria, da álgebra e da análise. Se nos restringirmos apenas aos aspectos que nos remetem à origem geométrica da Topologia, podemos citar a descoberta da relação

$$V - A + F = 2,$$

já conhecida por Descartes em 1640, porém demonstrada por Euler em 1751, hoje conhecida como Relação de Euler sobre o número de vértices, faces e arestas de um poliedro. O termo topologia foi introduzido em 1847 por um aluno de Gauss, de nome J.B. Listing. Gustav Robert Kirchoff, outro aluno de Gauss, empregou no mesmo ano a topologia dos grafos lineares no estudo dos circuitos elétricos. Qual o aluno hoje concluinte do ensino médio que não conhece a famosa Lei de Kirchoff? Contudo, dentre todos os alunos de Gauss, o que mais contribuiu com a topologia foi Riemann, que em sua tese de doutorado, em 1851, introduziu os conceitos topológicos no estudo da teoria das funções complexas. Quando se fala em topologia não se deve esquecer de Poincaré, que com o seu trabalho intitulado *Analysis situs*, provocou um grande avanço na topologia agregando muitos matemáticos a esse ramo.

2.3.8 O Programa de Erlanger

Em meados do século XIX muitas geometrias diferentes tinham passado a existir, consequentemente surgiu uma necessidade de codificar e sintetizar, a fim de ordenar e classificar essas geometrias. E foi na Faculdade de Filosofia da Universidade de Erlanger, mais especificamente em sua aula inaugural em 1872, que Felix Klein propôs uma esquema para essa organização das geometrias. Esse esquema ficou conhecido como Programa de Erlanger. Esse programa estabelece que a geometria é a investigação das propriedades das figuras que se mantêm inalteradas quando são sujeitas a um grupo de transformações. Nesse caso, cada geometria tem seu grupo de transformações, sendo assim caracterizadas: Na geometria métrica euclidiana plana, o grupo de transformações é considerado o conjunto de rotações e translações do plano; Na geometria projetiva plana, o grupo de transformações é considerado o conjunto das chamadas transformações projetivas planas; já na topologia, o grupo de transformações é considerado o conjunto de todas as transformações topológicas. Enfim, o Programa de Erlanger defende a classificação das geometrias existentes, além da criação e do estudo de novas geometrias, de acordo com esse esquema. Em 1906 outras geometrias passaram a existir graças ao surgimento através de Maurice Fréchet do estudo dos "espaços abstratos". E convém salientar que essas geometrias já não mais seriam ajustadas necessariamente ao programa de Erlanger. Um espaço tornou um conjunto de pontos junto com um conjunto de relações nas quais esses pontos estão envolvidos. A geometria tornou-se simplesmente uma teoria de um tal espaço. Contudo essa ideia de uma geometria como estudo de um conjunto de pontos já aparecia em algumas observações feitas por Riemann em 1854. Essas novas geometrias vieram a encontrar grandes aplicações no ramo da Análise.

2.3.9 A Geometria hoje é indispensável

Com a destruição da convicção secular de que só era possível uma única geometria, abriu-se espaço para a criação de muitas outras geometrias. Em 1899, David Hilbert escreveu um verdadeiro clássico que ficou conhecido como o trabalho mais importante escrito até hoje no campo da geometria da era moderna. Esse livro foi o principal obra do modelo axiomático formal, que preenchia as lacunas das suposições táticas de Euclides, cuja obra fazia parte da axiomática material. A obra de Hilbert, foi usada por muitos autores e equipes de escritores na segunda metade do século XX, como base para um tratamento rigoroso da geometria nos cursos de primeiro e segundo graus. Enfim, o que se percebe ao longo de toda essa trajetória de descobertas, no que diz respeito à Matemática, é que a introdução de um procedimento e uma terminologia geométricos pode simplificar muito a compreensão de um determinado conceito ou desenvolvimento. É fato que muitas vezes a linguagem da geometria é mais simples e elegante que a linguagem da álgebra e da análise. Talvez o aspecto mais importante esteja no fato de que as imagens geométricas sugeridas frequentemente levam a resultados e estudos adicionais, dotando-nos de um instrumento poderoso de raciocínio indutivo e criativo. E é com essa idéia que buscamos usar o processo de quadratura de polígonos como tal instrumento que levará o aluno a buscar esse raciocínio. Processo esse que será detalhado no capítulo seguinte.

Capítulo 3

A quadratura do triângulo

Antigamente, na Matemática grega clássica, não se media áreas de regiões poligonais da maneira como fazemos hoje. Por exemplo, nos Elementos de Euclides não se encontra nenhum resultado semelhante aos que usamos nos dias atuais para calcular a área de um triângulo. Hoje sabemos que o produto entre o comprimento da base e a metade do comprimento da altura, resulta na área de um triângulo qualquer. É claro que aqueles que trabalhavam com medições de terra naquela época sabiam na prática calcular a área de regiões poligonais, contudo na Matemática pura dos gregos isso não acontecia. Logo, para lidar com essas grandezas, o caminho era a comparação. Por exemplo, imagine que dois filhos receberam por herança um pedaço de terra plana, cada um deles, e desejaram descobrir qual deles recebera o terreno de maior área. Por se tratar de dois terrenos planos poligonais, o caminho seria transformá-los em quadrados equivalentes, podendo assim comparar se os dois tinham mesmo tamanho, tamanhos diferentes ou até mesmo se havia uma proporção entre eles. Esse processo de transformar uma região poligonal em um quadrado equivalente é conhecido como “quadratura de uma região poligonal”. Foi daí que surgiu a expressão “fazer a quadratura do círculo”, dos três problemas clássicos dos gregos, o mais fascinante. O interessante é que mesmo com a demonstração de que a solução com régua e compasso é impossível, vários matemáticos ainda buscaram fazer, com algumas adaptações, essa “quadratura” usando apenas esses instrumentos. Os egípicios, por exemplo, chegaram a “resolver” esse problema por volta de 1800 a.C. Contudo, tiveram que assumir o lado do quadrado como sendo 8/9 do diâmetro do círculo dado. Recentemente a revista do professor da matemática (RPM n° 81) publicou um artigo sobre a quadratura do círculo de muita valia para o entendimento da impossibilidade de tal quadratura.

3.1 Euclides e os passos para quadratura

Nos livros I e II dos Elementos de Euclides, encontramos o procedimento feito por ele para fazer a quadratura de qualquer região poligonal dada. Convém salientar que os instrumentos utilizados para tal procedimento são apenas régua e compasso, e além disso

Euclides o realizou mesmo antes de ter a sua disposição a teoria das proporções de Eudoxo, as quais encontramos no Livro V dos Elementos. Segue então que todas as construções feitas e aqui abordadas não utilizaram argumentos baseados em proporções.

Na verdade, o que Euclides usou como ponto de partida foram os casos de congruências de triângulos encontrados na forma original nas Proposições I.4, I.8 e I.26 dos Elementos, as quais apresentaremos abaixo como as Proposições 3.1, 3.2 e 3.3, respectivamente, com as devidas e necessárias alterações para melhor compreensão do leitor:

Proposição 3.1 *(I.4) Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente congruentes a dois lados e ao ângulo formado por esses dois lados em outro triângulo, então o terceiro lado desses triângulos são congruentes, os dois triângulos são congruentes e os outros dois ângulos opostos à lados congruentes também são congruentes.*

Demonstração. Sejam os dois triângulos ABC, DEF, cujos lados AB e CA são congruentes a DE e FD respectivamente, ou seja, $AB \cong DE$, e $CA \cong FD$; e seja o ângulo $\widehat{CAB} \cong \widehat{FDE}$, conforme a Fig. 3.1

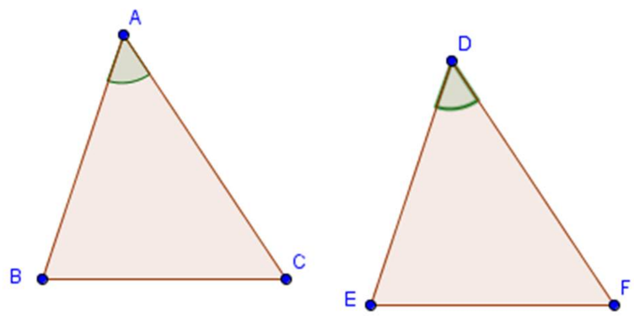


Figura 3.1: Triângulos Congruentes I.

Se sobrepormos o triângulo ABC sôbre o triângulo DEF, de modo que o ponto A coincida com o ponto D, e a reta AB coincida com a reta DE. O ponto B coincidirá com o ponto E, pois $AB \cong DE$. Ajustando-se pois AB sobre DE, também a reta CA se ajustará sobre a reta FD, sendo o ângulo $\widehat{CAB} \cong \widehat{FDE}$. Logo sendo $CA \cong FD$, o ponto C coincidirá com o ponto F. Mas já vimos que B coincide com E. Logo o lado BC coincidirá com o lado EF. Porque se não coincidirem, B com E, e C com F, teremos dois segmentos de retas com extremidades coincidentes formando um espaço entre eles, algo absurdo segundo o Axioma 1 do Apêndice A. Logo o lado BC deve-se ajustar sôbre o lado EF, consequentemente eles são congruentes. Sendo assim, todo o triângulo ABC se ajusta sôbre todo o triângulo DEF, e assim são congruentes; e os outros ângulos do primeiro triângulo também se ajustam sôbre os outros do,segundo e são congruentes; isto é, o ângulo $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$, e $\widehat{BCA} \cong \widehat{EFD}$.

□

Proposição 3.2 *(I.8) Se dois lados de um triângulo forem congruentes a dois lados de um outro triângulo, e o terceiro lado do primeiro triângulo for congruente ao terceiro lado do outro, então os ângulos compreendidos entre os lados congruentes também são congruentes.*

Demonstração. Sejam os dois triângulos ABC, DEF, e seja o lado $AB \cong DE$, e $CA \cong FD$, e também o terceito lado BC congruente a EF, conforme a Fig. 3.2

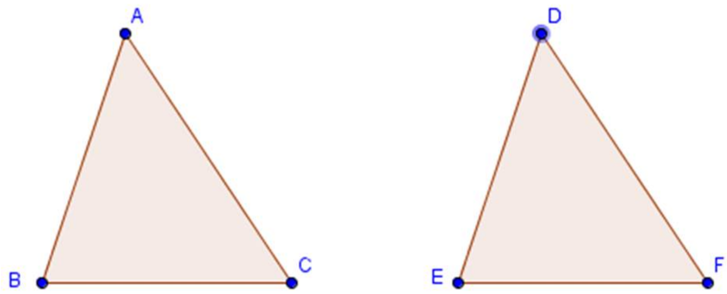


Figura 3.2: Triângulos Congruentes II.

Sobrepondo o triângulo ABC sôbre o triângulo DEF de modo que o ponto B coincida em E, e a reta BC com a reta EF, também o ponto C deve coincidir com o ponto F, por ser $BC \cong EF$; e assim ajustando BC com EF, os dois lados, AB e CA se ajustarão com os lados DE e FD. E se, ajustando-se o lado BC sôbre o lado EF, supormos que os lados AB, CA não se ajustem sobre os lados DE, FD, teríamos então dois triângulos diferentes sobre a mesma base que possuem os outros dois lados congruentes, o que contradiz a Prop. A.1 do Apêndice A. Logo se o lado BC se ajusta sobre o lado EF, os lados BA e AC devem-se ajustar sôbre os lados ED e DF, e por conseqüência o ângulo $\widehat{BAC}$ sobre o ângulo $\widehat{EDF}$. Logo será $\widehat{BAC} \cong \widehat{EDF}$ segundo Axioma 2 do Apêndice A.

□

Proposição 3.3 *(I.26) Se dois ângulos de um triângulo forem congruentes a dois ângulos de um outro triângulo e um lado do primeiro triângulo for congruente a um lado do segundo, e forem estes lados adjacentes ou opostos a ângulos congruentes, então os outros dois lados do* *primeiro triângulo serão congruentes aos outros dois lados do segundo e o terceiro ângulo do primeiro será congruentes ao terceiro ângulo do segundo.*

Demonstração. Sejam os dois triângulos ABC, DEF, que tenham os ângulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{BCA}$ congruentes aos ângulos $\widehat{DEF}$ e $\widehat{EFD}$, respectivamente, isto é, $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$, e $\widehat{BCA} \cong \widehat{EFD}$; e um lado do primeiro congruente a um lado do segundo, e sejam estes lados em primeiro lugar, adjacentes a ângulos congruentes, isto é, $BC \cong$EF conforme a Fig. 3.3.

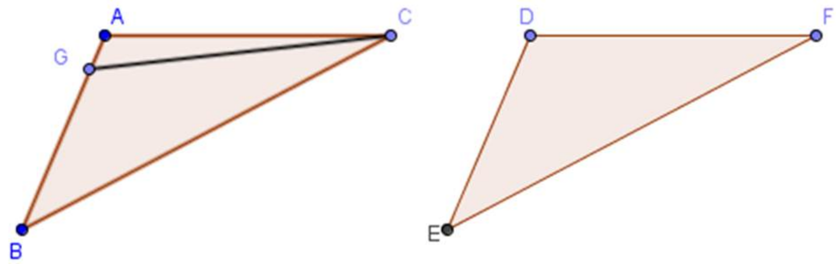


Figura 3.3: Triângulos Congruentes III.

Se AB e DE não são congruentes, um deles sera maior. Seja AB maior. Tome um ponto G no lado AB tal que $BG \cong$DE, e forme o segmento GC. Mas como $\widehat{GBC} \cong \widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$, temos que a base $GC \cong$DF , onde DF é a base do segundo triângulo, de acordo com a Prop. 3.1, e segue que os triângulo GBC e DEF são congruentes, assim como os outros ângulos opostos a lados iguais serão respectivamente congruentes entre si. Sendo assim temos que o ângulo $\widehat{GCB} \cong \widehat{DFE}$. Contudo sabemos que $\widehat{DFE} \cong \widehat{BCA}$. Então $\widehat{BCG} \cong \widehat{BCA}$, ou seja, temos um ângulo menor igual a um ângulo maior, o que é um absurdo. Sendo assim temos que AB é congruente a DE. Como $BC \cong$EF e o ângulo $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$, temos que a $\widehat{AC} \cong \widehat{DF}$ e o ângulo $\widehat{BAC} \cong \widehat{EDF}$ de acordo com Prop. 3.1.

Consideremos agora o segundo caso em que sejam agora congruentes os lados que ficam opostos a ângulos congruentes, isto é, seja $AB \cong$DE, conforme a Fig. 3.4.

Se BC e EF não são congruentes, um deles será maior que o outro. Seja BC maior que EF. Tome um ponto H sobre o lado BC talque $BH \cong$EF e forme o segmento AH. Sendo $BH \cong$EF e $AB \cong$DE e $\widehat{ABH} \cong \widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$, temos que a base AH será congruente à base DF; e o triângulo ABH congruente ao triângulo DEF; e assim os outros ângulos do triângulo ABH serão congruentes aos outros ângulos do triângulo DEF. Logo, teremos o ângulo $\widehat{BHA} \cong$

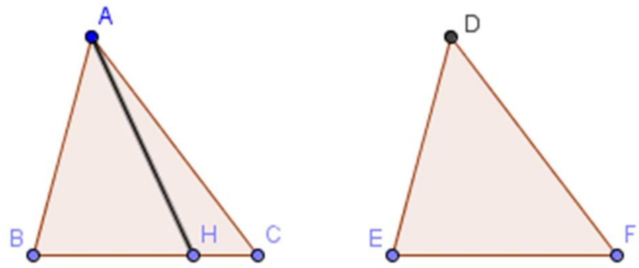


Figura 3.4: Triângulos Congruentes IV.

$\widehat{EFD}$. Mas por hipótese nos ângulo $\widehat{EFD}$ e $\widehat{BCA}$, temos $\widehat{EFD} \cong \widehat{BCA}$. Logo teremos $\widehat{BHA} \cong \widehat{BCA}$; ou seja, o ângulo externo $\widehat{BHA}$ do triângulo AHC será congruente ao interno e oposto $\widehat{BCA}$, o que é um absurdo segundo a Prop. A.2 do Apêndice A. Logo, os segmentos BC e EF são congruentes. Mas $AB \cong$DE e $BC \cong$EF e os ângulos feitos por esses lados também são congruentes, ou seja, $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$. Logo, a base AC é congruente a base DF e $\widehat{BAC} \cong \widehat{EDF}$. □

Em seguida, Euclides demonstra resultados importantes que servirão de base para o nosso objetivo. Esses resultados são encontrados em sua forma original nas Proposições I.34, I.35, I.36, I.37 e I.38 dos Elementos de Euclides, e apresentaremos respectivamente como as Proposições 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8.

Proposição 3.4 *(I.34) Em um paralelogramo, os lados e os ângulos opostos são congruentes e o paralelogramo é dividido pela diagonal em duas partes congruentes.*

Demonstração. Seja o paralelogramo ABDC, cuja diagonal é BC, conforme a Fig. 3.5

Sendo as retas que contém os segmentos AB e CD, paralelas e cortadas pela reta que contêm o segmento BC, os ângulos alternos $\widehat{ABC}, \widehat{BCD}$ serão congruentes segundo a Prop. A.3 do Apêndice A. Analogamente por serem paralelas as retas que contêm AC e BD, e cortadas pela mesma reta, a que contêm BC, devem ser congruentes entre si os ângulos alternos $\widehat{ACB}$ e $\widehat{CBD}$. Logo os ângulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{BCA}$ do triângulo ABC é congruente aos ângulos $\widehat{BCD}$ e $\widehat{CBD}$ do triângulo BCD respectivamente. Como BC é o lado comum aos dois triângulos temos que os outros dois lados e o terceiro ângulo do triângulo ABC é respectivamente congruente aos outros dois lados e ao terceiro ângulo do triângulo CBD, de acordo com Prop. 3.3. Sendo assim teremos $AB \cong$CD, $AC \cong$BD e o ângulo BAC = BDC. Logo, como os ângulos ABC e ACB são respectivamente congruentes aos ângulos BCD e CBD, temos que o ângulo $\widehat{ABD}$ é congruente ao ângulo $\widehat{ACD}$. E então os lados e os ângulos opostos do paralelogramo são congruentes. Resta-nos demonstrar que o paralelogramo ABDC

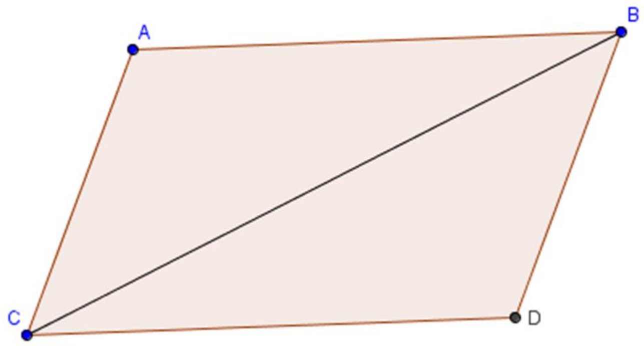


Figura 3.5: Paralelogramo.

é divido em duas partes congruentes pela diagonal BC. De fato, como $AB \cong$CD e BC é um lado comum aos triângulos ABC e BCD temos pela Prop. 3.1 que os triângulos ABC e BCD são congruentes. Portanto a diagonal BC divide em duas partes congruentes o paralelogramo ABDC.

□

Proposição 3.5 *(I.35) Paralelogramos que estão postos sobre a mesma base e entre duas paralelas, uma delas contendo a base e a outra contendo os dois lados dos paralelogramos que são opostos a base, são congruentes.*

Demonstração. Sejam os paralelogramos ABCD, EBCF sobre a mesma base BC, e entre duas paralelas, uma delas contendo a base BC e a outra contendo os lados AD e EF dos paralelogramos, lados esses que são opostos a base. Considere um caso particular como na Fig. 3.6, em que $AD + EF < AF$, sendo os demais casos desenvolvidos de maneira análoga.

Se o ponto E do paralelogramo BCFE coincidir com o ponto D do paralelogramo ABCD teremos que a soma das áreas dos dois será o dobro da área do triângulo BDC ou BEC, de acordo com a Prop. 3.4. Sendo assim os paralelogramos serão congruentes. Vamos supor então que os pontos E e D não sejam comuns. Sabemos pela Prop. 3.4 que no paralelogramo ABCD temos que $AD \cong BC$ e no paralelogramo BCFE temos $EF \cong BC$, e assim, pelo Axioma I de Euclides, $AD \cong EF$. Acrescentando o segmento DE aos lados AD e EF teremos que $AE \cong DF$, de acordo com o Axioma II do Livro de Euclides. Como $AB \cong DC$ e $EA \cong FD$, temos que o ângulo externo $\widehat{FDC}$ é congruente ao ângulo interno $\widehat{EAB}$ segundo a Prop. A.3 do Apêndice A. Sendo assim os triângulos EAB e FDC são congruentes pela Prop. 3.1. Agora, considere o trapézio ABCF e retire o triângulo FDC, restando assim o paralelogramo ABCD. Do mesmo modo retire o triângulo EAB do mesmo trapézio, restando o paralelogramo EBCF. Logo, os paralelogramos ABCD e EBCF que restaram da retirada dos

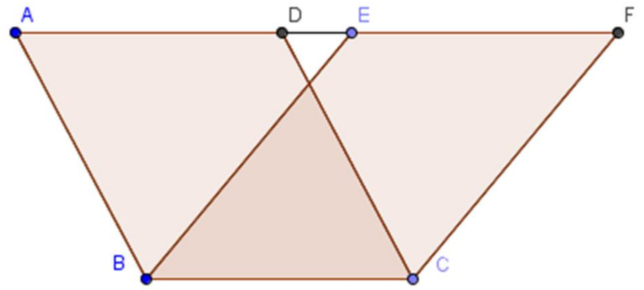


Figura 3.6: Paralelogramos sobre a mesma base.

triângulos congruentes FDC e EAB são também congruentes, de acordo com o Axioma 3 do Apêndice A.

□

Proposição 3.6 *(I.36) São congruentes os paralelogramos que estão postos sobre bases congruentes e entre duas paralelas, uma delas contendo as bases e a outra contendo os dois lados dos paralelogramos que são opostos as bases.*

Demonstração. Considere os paralelogramos ABCD e EFGH postos sobre as bases congruentes BC e FG, e entre duas paralelas, uma contendo as bases BC e FG e outra contendo os lados AD e EH dos paralelogramos paralelos as bases. Considere a Fig. 3.7 um caso particular em que $AD+EH > AH$, sendo os demais casos desenvolvidos de maneira análoga.

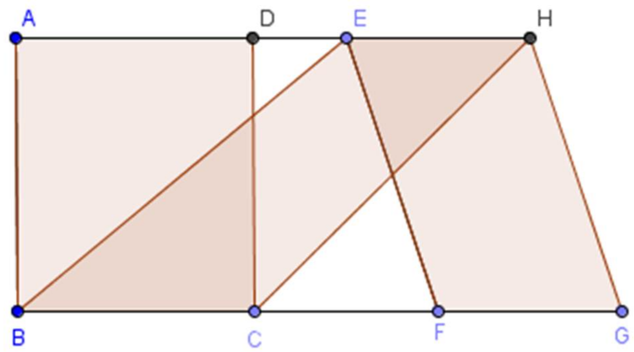


Figura 3.7: Paralelogramos de bases congruentes.

Sejam as retas contendo os segmentos BE e CH. Sendo $BC \cong FG$ e $FG \cong EH$, temos que $BC \cong EH$. Trace os segmentos BE e CH. Sendo $BC \cong FG$, e $FG \cong EH$, temos pela Proposição 34 do Livro I dos Elementos que $BC \cong EH$. Mas como os segmentos BC e EH são paralelos, e a partir dos extremos B, C, E e H traçamos os segmentos BE e CH, sendo assim pela Prop. A.4 do Apêndice A, BE e CH também são congruentes e paralelos. Então EBCH é um paralelogramo congruente ao paralelogramo ABCD, de acordo com Prop. 3.5. Analogamente, concluimos que EFGH será um paralelogramo congruente a EBCH, e portanto ABCD e EFGH serão também congruentes.

□

Proposição 3.7 *(I.37) São congruentes os Triângulos que estão postos sobre a mesma base e entre duas paralelas, uma delas contendo a base e a outra contendo os dois vértices dos triângulos que são opostos a base.*

Demonstração. Considere os triângulos ABC e DBC que estão sôbre a mesma base BC, e entre duas paralelas que contém os vértices A e D, dos triângulos ABC e DBC respectivamente. Considere o caso representado na Fig. 3.8 sendo análoga a demonstração dos demais casos.

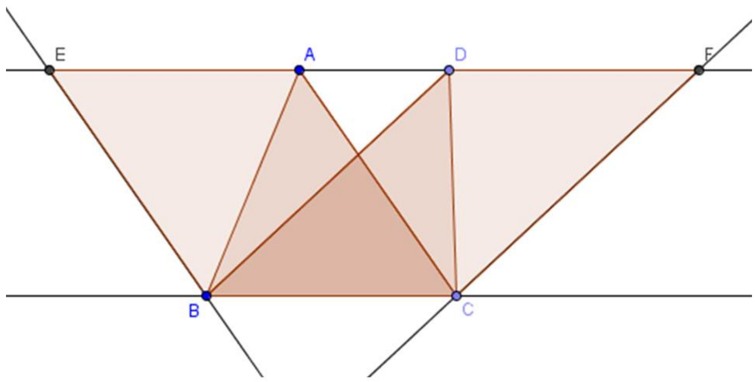


Figura 3.8: Triângulos sobre a mesma base.

Considere a reta que contêm os vértices A e D dos triângulos ABC e DBC. Passando por B trace o segmento BE, com E pertencente a reta que contêm A e D, paralelo a CA. Em seguida, passando por C trace o segmento CF paralelo a BD, onde F também pertence a reta que contem A e D. Logo, teremos dois paralelogramos, EBCA e DBCF, que estão sobre a mesma base BC e entre duas paralelas, uma delas contendo a base e a outra contendo os dois lados dos paralelogramos que são opostos a base. Sendo assim eles são congruentes, de acordo com Prop. 3.5. Pela Prop. 3.4, temos que o paralelogramo EBCA está dividido pela diagonal AB em dois triângulos congruentes, EBC e BCA. De igual modo, o paralelogramo DBCF foi dividido pela diagonal DC em dois triângulos congruentes, DBC e DCF. Portanto o triângulo BCA é congruente ao triângulo DBC, pois as metades de quantidades iguais são também iguais, segundo o Axioma 4 do Apêndice A.

□

Proposição 3.8 *(I.38) São equivalente os triângulos que estão postos sobre bases congruentes e entre duas paralelas, uma delas contendo as bases e a outra contendo os dois vértices dos triângulos que são opostos as bases.*

Demonstração. A demonstração dessa proposição é feita de maneira análoga a da Prop. 3.7 e será omitida. Segue a Fig. 3.9 apenas para visualização e melhor entendimento da mesma.

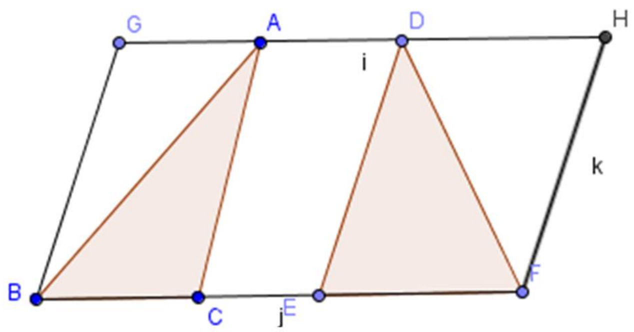


Figura 3.9: Triangulos de bases congruentes.

A demonstração dessa proposição é feita de maneira análoga à demonstração da Prop. 3.8, a conclusão segue.

□

De posse dos resultados da Prop. 3.1 à Prop. 3.8 podemos então considerar o seguinte problema: "Dado um triângulo, construir um retângulo equivalente a esse triângulo".

Vejamos o procedimento:

1. Seja um triângulo ABC, "complete-o" de forma que obtenhamos um paralelogramo ABCD, cuja área é o dobro da área do triângulo ABC, já que o paralelogramo surge quando completamos o triângulo inicial através de um triângulo congruente ao triângulo ABC, conforme a Fig. 3.10.

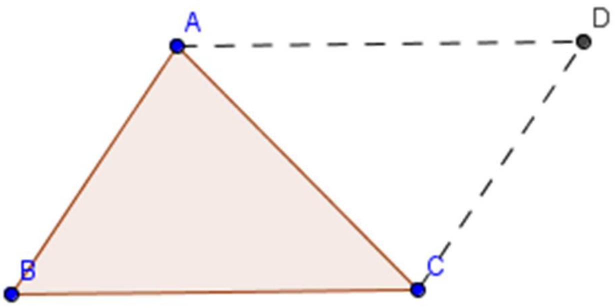


Figura 3.10: Triangulo e Paralelogramo.

2. Construa um retângulo EBCF (que é um tipo de paralelogramo) sobre a mesma base BC do paralelogramo ABCD e de modo que os pontos E e F pertençam a reta que passa por A e D, sendo assim o retângulo EBCF e o paralelogramo ABCD são equivalentes segundo a Prop. 3.5. Veja a Fig. 3.11.

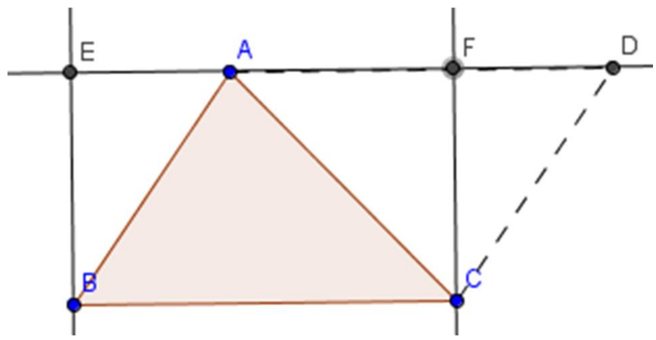


Figura 3.11: Retângulo e Paralelogramo.

3. Usando o retângulo EBCF, tracemos a sua altura passando pelo ponto médio de sua base, obtendo assim dois retângulos equivalentes e consequentemente equivalentes ao triângulo ABC. Veja a Fig. 3.12

A partir desse procedimento fica fácil resolver o problema de construir um retângulo equivalente a uma região plana poligonal, pois basta dividir esta região poligonal em triângulos e, em seguida "transformar" cada um desses triângulos em retângulos, isto é, obter retângulos equivalentes a cada um dos triângulos, para depois somar as áreas destes retângulos. A grande questão agora é: Como somar área de retângulos? Nesse caso, temos então

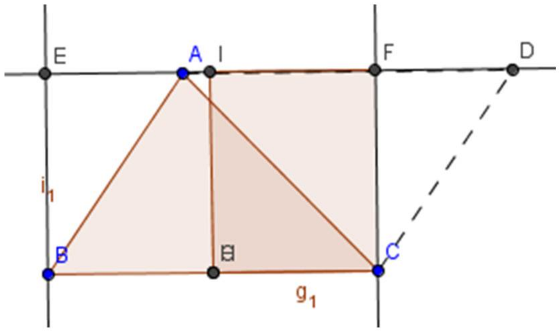


Figura 3.12: Retângulo e Triângulo.

o ponto chave de nosso trabalho: "Transformar" os retângulos em quadrados, ou seja fazer a "quadratura" de cada retângulo. Feitas essas quadraturas utilizaremos, o método que os gregos usavam para fazer operações com áreas utilizando o Teorema de Pitágoras. Vejamos como o Teorema é citado e demonstrado nos Livro de Euclides (I.47), com as devidas alterações para facilitar a compreensão e a interpretação:

Proposição 3.9 *(I.47) Em todo triângulo retângulo, a área do quadrado formado sobre o lado oposto ao ângulo reto é igual a soma das áreas dos quadrados formados sobre os outros lados, que fazem o mesmo ângulo reto.*

Demonstração. Seja o triângulo retângulo ABC, cujo ângulo reto é $\widehat{BAC}$ como na Fig. 3.13. Descreva sobre BC o quadrado BDEC e sobre os lados BA e AC, descreva respectivamente os quadrados AGFB e AHKC. A partir do ponto A trace o segmento AL paralelo a BD, com L pertencente ao lado DE. Este segmento também define o ponto M no lado BC. Trace também os segmentos AD e FC. Como os ângulos $\widehat{BAG}$ e $\widehat{BAC}$ são retos, temos que os segmentos AG e AC estão sobre uma mesma reta, segundo a Prop. A.5 do Apêndice A.

Analogamente temos que os segmentos AB e AH estão sobre a mesma reta. Comos os ângulos $\widehat{DBC}$ e $\widehat{FBA}$ são retos e o ângulo $\widehat{ABC}$ é o comum aos triângulos ABD e FBC, temos que os ângulos $\widehat{FBC}$ e $\widehat{ABD}$ são congruentes. Mais ainda, os lados FB e AB são congruentes assim como os lados BC e BD, pois tratam-se de lados do mesmo quadrado. Sendo assim o triângulo DBA é congruente ao triângulo FBC. Observe que o triângulo ABD e o retângulo BDLM têm a mesma base e estão entre as mesmas paralelas, e assim, segundo a Prop. A.6 temos que o retângulo BDLM é o dobro do triângulo ABD. Pelo mesmo motivo o quadrado ABFG é o dobro do triângulo FBC. E como os triângulo DBA e FBC são congruentes e são respectivamente o dobro dos paralelogramos BDLM e ABFG temos pelo o Axioma 5 do Apêndice A, que BDLM também é congruente a ABFG. Analogamente, traçando os segmentos BK e AE como na Fig. 3.14 e mostramos que o quadrado ACKH e o retângulo

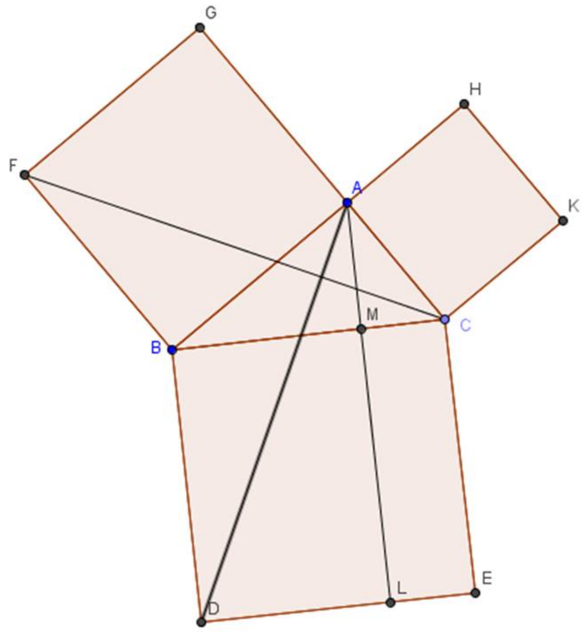


Figura 3.13: Teorema de Pitágoras I.

MLEC são congruentes. Mas o quadrado BCED é igual a soma dos retângulos BDLM e MLEC, portanto temos que o quadrado BCED é igual a soma do quadrado ABFG com o quadrado ACKH.

□

O que mais chama a atenção nessa demonstração, é algo que é praticamente irreconhecível para o nosso alunado atualmente, é que o Teorema de Pitágoras é um resultado de equivalência de áreas e não simplesmente um fato algébrico. Qual a resposta mais comum de um aluno ao ser questionado sobre o Teorema de Pitágoras? É fato que a maioria responde

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Dando continuidade a nossa caminhada rumo a quadratura de uma região poligonal, damos o próximo passo que é fazer a quadratura de um retângulo, ou seja transformar um retângulo em um quadrado de mesma área do retângulo dado. Nesse caso lançaremos mão de mais um resultado do livro de Euclides, a Proposição II.5 e apresentaremos com as convenientes alterações como a Prop. 3.10.Vejamos:

Proposição 3.10 *(II.5) Se um segmento de reta for dividido em duas partes congruentes, e em outras duas partes não congruentes, a área do retângulo formado pelas partes não congruentes, somada com a área do quadrado formado pela parte entre as duas seções será igual à área do quadrado formado pela metade do segmento de reta inicial.*

Demonstração. Seja a reta AB dividida em partes de mesma medida no ponto C, e em partes de medidas diferentes no ponto D como na Fig. 3.15. Construa o quadrado CEFB e

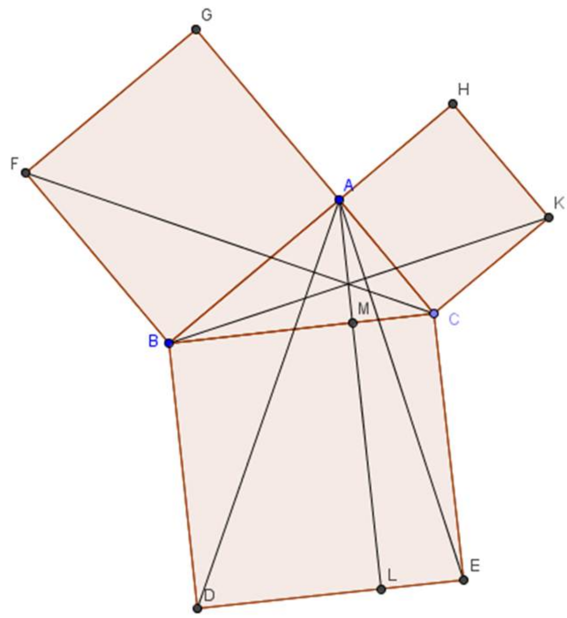


Figura 3.14: Teorema de Pitágoras II.

considere a diagonal BE. Pelo ponto D, trace a paralela DG a CE, a qual corta a diagonal BE no ponto H. Seja KM a paralela a AB e que passa por H. Seja AK o segmento de reta perpendicular a AB e que liga A a K. Como as áreas dos retângulos CDHL e HMFG são iguais, adicione a cada uma dessas áreas a área do quadrado DBHM. Então, as áreas dos retângulos CLMB e DGFB são iguais. Mas as áreas dos retângulos CLMB e AKLC são iguais. Como as áreas dos retângulos AKLC e CLMB são iguais, por terem bases e alturas respectivamente iguais, segue-se que as áreas dos retângulos AKLC e DGFB também são iguais. Adicione a cada uma dessas áreas a área do retângulo CLHD. Então, a área do retângulo AKHD é igual à soma das áreas dos retângulos CLHD, DHMB e HGFM. Mas a área do retângulo AKHD é igual à área do retângulo de base AD e altura DB, pois DH é igual a DB. Assim, a soma das área dos retângulos CLHD, DHMB e HGFM é também igual à área do retângulo de base AD e altura DB. Adicione a área do quadrado LEGH, que é igual à área do quadrado de lado CD, a ambas as áreas. Segue-se então que a soma das áreas dos retângulos CLHD, DHMB e HGFM com a soma das áreas dos retângulos LEGH e DHMB é igual à soma das áreas do retângulo AKHD e do quadrado LEGH. Mas a soma das áreas dos retângulos CLHD, DHMB e HGFM com a soma das áreas de LEGH e DHMB é igual à área do quadrado CEFB, construído sobre CB. Assim, a soma das áreas do retângulo de base AD e altura DB e do quadrado LEGH (que é igual ao quadrado de lado CD) é igual à área do quadrado de lado CB, o que queríamos demonstrar.

□

Observando a Fig. 3.15, podemos dizer em outras palavras que se denotarmos o retângulo de base AD e altura DB por RET(AD;DB), o quadrado de lado CD por QUAD(CD) e o

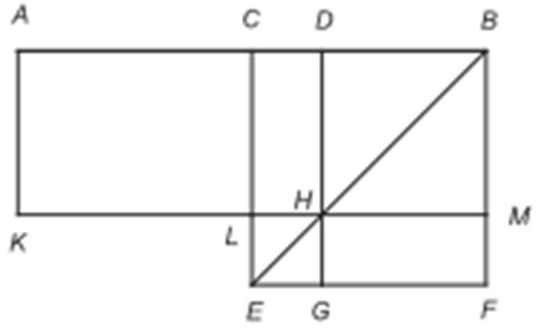


Figura 3.15: Soma de retângulos e quadrados.

quadrado de lado CB por QUAD(CB), então temos que

$$RET(AD;DB) + QUAD(CD) = QUAD(CB).$$

Dessa forma, para enfim chegarmos ao objetivo de fazer a quadratura de uma região poligonal citaremos um último resultado necessário também disponível no livro de Euclides como a Proposição II.14, apresentada neste trabalho como a Prop. 3.11. Vejamos:

Proposição 3.11 *(II.14) Construir um quadrado equivalente um retângulo dado.*

Demonstração. Considere um retângulo BCDE. Devemos-se construir um quadrado equivalente a esse retângulo BCDE. Se tivermos o segmento EB congruente ao segmento ED, estará feito o que se pede, porque BCDE será um quadrado. Mas se não forem congruentes os lados BE e ED, prolongue o segmento BE até o ponto F, de modo que tenhamos $EF \cong$ED, e em seguida tome o ponto médio G do segmento BF. Com o centro em G e raio de medida GB ou GF, descreva o semicírculo BHF. Prolongue o segmento DE até cortar o semicírculo no ponto H e trace o segmento de reta GH. Como a reta BF está dividida em duas partes congruentes no ponto G, e em duas partes não congruentes no ponto E, pela Prop. 3.10 a área do retângulo compreendido pelas retas BE e EF, somada com a área do quadrado de lado EG é igual a área do quadrado de lado GF. Mas o segmento de reta $GF \cong$GH, logo a área do retângulo de base BE e altura EF, somada com a área do quadrado de lado EG, será igual a área do quadrado de lado GH. Mas segundo Prop. 3.9 a área do quadrado de lado HE somada com a área do quadrado de lado EG é igual a área do quadrado de lado GH. Então, a área do retângulo de base BE e altura EF, somada com a área do quadrado de lado EG, será igual a área do quadrado de lado HE somada com a área do quadrado de lado EG. Logo, tirando o quadrado comum de EG, ficará o retângulo de BE, EF igual ao quadrado de EH. Mas o retângulo de base BE e altura EF é equivalente ao retângulo BCDE, já que ser $EF \cong$EI. Assim, BCDE será equivalente ao quadrado de lado EH. Portanto, o retângulo BCDE será equivalente ao quadrado de lado EH. E estará feito o que se pedia.

□

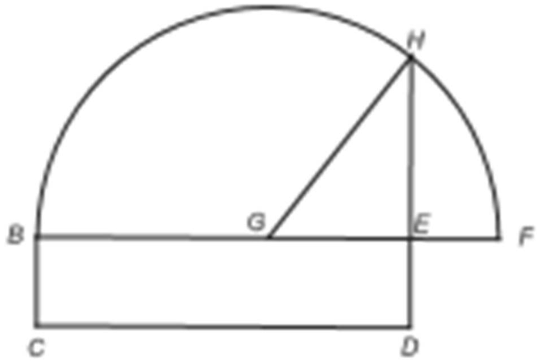


Figura 3.16: Quadratura II.

Dessa forma, podemos agora realizar a quadratura de um polígono qualquer, a partir do fato de podermos dividir esse polígono em triângulos.

Capítulo 4

Sugestões de Atividades

4.1 Introdução

Com o intuito de fortalecer o conteúdo abordado neste trabalho e melhorar o processo de ensino-aprendizagem do conteúdo de geometria no ensino médio, daremos algumas sugestões de atividades a serem aplicadas em sala de aula. O software Geogebra será o nosso instrumento base, já que nele encontramos recursos que funcionam como régua e compasso, instrumentos usados desde a antiguidade para construções geométricas. É recomendável, caso o Geogebra não esteja disponível para ser utilizado nas atividades, que o responsável visite o endereço eletrônico www.geogebra.org, faça o "download" do programa e em seguida a instalação.

4.2 Atividades

4.2.1 Atividade 1: O Teorema de Pitágoras na comparação de áreas

Nessa atividade temos o objetivo de mostrar ao aluno um lado que é pouco explorado pelos professores no ensino do Teorema de Pitágoras: A sua belíssima aplicação na comparação de áreas. É claro que com as fórmulas de cálculo de área das figuras planas já a disposição, tudo fica mais simples. Porém, nem tudo que é simples é motivador. Buscaremos resgatar a história contextualizando uma situação que leve o aluno de volta ao passado. Convém sugerir essas atividades para uma possível introdução ao conteúdo de área de figuras planas, assunto trabalhado de uma maneira geral no segundo ano do ensino médio. Vejamos dois problemas:

Problema 4.1 *Querendo presentear seus dois únicos filhos com dois pedaços de terra para a construção de suas casas, o grego Acelo tinha a disposição um terreno quadrangular de 10 metros de lado. Pensou em dividir ao meio e dar um pedaço a cada filho. Contudo, os irmãos Acteão e Actéia não se davam bem e seria uma péssima ideia serem vizinhos.*

Um certo jovem chamado Délio, propôs a seguinte troca com Acelo: "Vou lhe ceder dois terrenos quadrados, um de lado 6 metros e outro de lado 8 metros, em troca do seu terreno. Mas com a condição de você me compensar em moedas a diferença". Ao realizarem os devidos cálculos os dois tiveram uma supresa. Que surpressa foi essa?

Procedimento

1. Questione os seus alunos inicialmente sobre quem sairia beneficiado com essa troca: O jovem Délio ou o pai Acelo?

2. Após ouvir as repostas dos alunos faça junto com eles a seguinte construção utilizando o Geogebra:

   (a) Com o recurso "Segmento com comprimento fixo", trace um segmento AB de medida 6;

   (b) Com o recurso "polígono regular" clique sobre os pontos A e B, nessa ordem e forme um polígono regular ABCD de 4 lados;

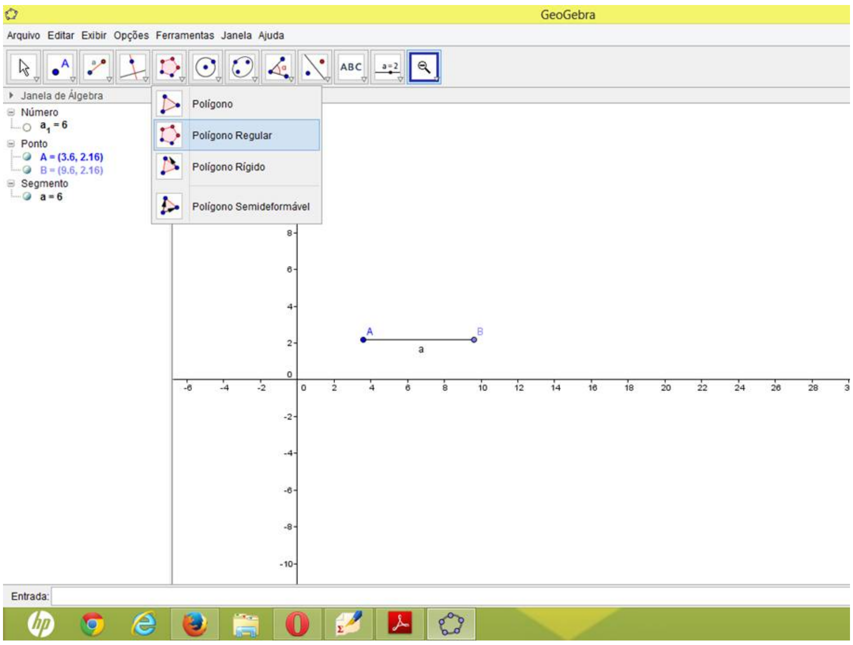


Figura 4.1: poligono.

   (c) Com o recurso "reta definida por dois pontos" defina a reta que passa pelos pontos C e D;

   (d) Marque sobre essa reta, a direita do ponto C um novo ponto E utilizando o recurso "ponto", traçando em seguida um segmento CE de medida 8 sobre a reta definida por C e D (Caso não consiga colocar o ponto E de modo que CE tenha medida 8, utilize o recurso mover para isso);

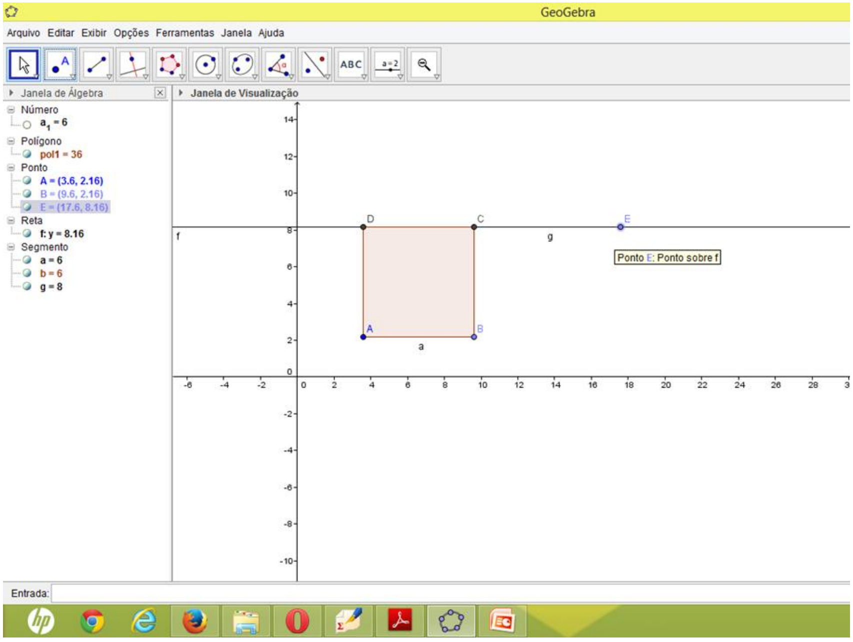


Figura 4.2: segmento.

(e) Com o recurso "polígono regular" clique sobre os pontos C e E, nessa ordem e forme um polígono regular CEFG de 4 lados;

(f) Com o recurso "poligono regular" clique sobre os pontos E e B nessa ordem e forme o poligono regular EBHI de 4 lados;

(g) Utilizando o recurso "distância, Comprimento ou Perímetro" clique sobre os lados dos quadrados ABCD, CEFG e EBHI;

(h) Faça o mesmo procedimento do item anterior só que usando o recurso "área";

Estabelecendo os dois primeiros quadrados como sendo os dois terrenos a serem trocados, perceberemos juntos com os alunos que através do Teorema de Pitágoras a soma das áreas dos dois quadrados é exatamente igual a área do quadrado maior que representa o terreno maior.

3. Introduza a fórmula para o cálculo da área de um quadrado e faça junto com os alunos os cálculos e a comparação.

4. Esse é o momento de dialogar com os alunos a importância da história da Matemática. O quanto foi importante tudo o que já foi feito para que um dia tivéssemos a disposição fórmulas tão viáveis e práticas para resoluções de problemas como este.

Problema 4.2 *Um ancião grego ao morrer deixou como herança 3 lotes de terra para os seus três únicos filhos. Cada lote de terra possuia dois terrenos quadrados de área plantada com batatas. Contudo, na leitura do testamento constava que o lote que possuia a maior área de plantação de batatas era para o primogênito e o de menor área de plantação de* *batata era para o caçula. Obviamente o filho do meio herdava o outro lote. Sabendo que o primeiro lote tinha duas áreas quadradas de plantação de lados 7 metros e 10 metros; o segundo lote tinha duas áreas quadradas de plantação de lados 8 metros e 9 metros e o terceiro lote tinha duas áreas quadradas de plantação de lados 6,5 metros e 10,5 metros. Qual lote era destinado ao filho mais velho?*

Procedimento

1. Questione os seus alunos inicialmente sobre qual dos lotes compete ao filho mais velho?

2. Após ouvir as repostas dos alunos faça junto com eles a seguinte construção utilizando o Geogebra:

   (a) Com o recurso "Segmento com comprimento fixo", trace um segmento AB de medida 7;

   (b) Com o recurso "polígono regular" clique sobre os pontos A e B, nessa ordem e forme um polígono regular ABCD de 4 lados;

   (c) Com o recurso "reta definida por dois pontos" defina a reta sobre os pontos A e B;

   (d) Marque sobre essa reta, a direita do ponto B um novo ponto E utilizando o recurso "ponto", traçando em seguida um segmento BE de medida 10 sobre a reta definida por C e D (Caso não consiga colocar o ponto E de modo que BE tenha medida 10, utilize o recurso "mover" para isso);;

   (e) Com o recurso "polígono regular" clique sobre os pontos E e B, nessa ordem e forme um polígono regular BEFG de 4 lados;

   (f) Com o recurso "polígono regular", clique sobre os pontos C e E, nessa ordem e forme um polígono de 4 lados;

   (g) Repita os procedimetos acima para segmentos de medida 8 e 9, e segmento de medidas 6,5 e 9,5.

   (h) Com o recurso "distância, comprimento ou perímetro" clique sobre as hipotenusas dos triângulos retângulos formados e por fim, compare e conclua qual terreno compete a cada filho;

   (i) Repita o procedimento do item anterior utilizando o recurso "área".

3. Utilize a fórmula para o cálculo da área de um quadrado e faça junto com os alunos os cálculos e a comparação.

4. Discuta com os alunos qual dos métodos é mais rápido, qual é mais eficiente, qual é mais prático e qual exige mais do aluno.

4.2.2 Atividade 2: Encontrando um retângulo equivalente a um triângulo dado

Ja sábemos agora somar a área de quadrados utilizando o Teorema de Pitágoras, contudo nem tudo são flores, pelo contrário: na prática, terrenos, plantações e áreas de construção raramente são da forma de um polígono regular ou da forma de um quadrado. Com isso, na nossa próxima atividade pretendemos iniciar o processo prático utilizando o Geogebra, e construir figuras equivalentes. Inicialmente sugerimos um problema em que possamos encontrar um retângulo equivalente a um triângulo dado. Já que qualquer polígono pode ser dividido em triângulos, então podemos com isso dizer que qualquer polígono pode ter área equivalente a soma das área dos triângulos que o dividem e cada um desses triângulos terá a área equivalente a de um retângulo.

1. Peça para que os seus alunos peguem uma folha de papel A4 e com uma régua ligue duas pontas não consecutivas. Com uma tesoura, peça para que recortem a folha através dessa linha formada. Faça as seguintes perguntas:

    (a) Que figura foi formada?

    (b) Juntando pelo mesmo corte os dois triângulos, o que obtemos?

    (c) O que podemos dizer dos dois triângulos formados após o corte da folha?

    (d) Conclua com eles que cada triângulo é a metade do retângulo.

2. Peça agora, para que com outra folha de papel A4 os alunos dobre a folha ao meio da maneira convecional, ou seja juntando dois lados oposto da folha. Oriente-os a recortar a folha através da dobra feita na folha. Conclua com eles que a área das metades formadas é igual a área das metades formadas no primeiro procedimento. Ou seja, acabamos de encontrar um retângulo equivalente a um triângulo.

3. Realize com os alunos esse processo de encontrar um retângulo equivalente a um dado triângulo utilizando o Geogebra. Acompananhe na Fig. 4.3

    (a) Com o recurso "polígono" desenhe um triângulo qualquer;

    (b) Com o recurso "reta paralela" trace uma reta passando por um dos vértices, o vértice C por exemplo e paralela ao lado oposto a esse vértice;

    (c) Faça o mesmo com outro vértice do triângulo,o vértice B por exemplo;

    (d) Com o recurso "intersecção de dois objetos" clique sobre as duas retas criadas formando o ponto D;

    (e) Com o recurso "polígono" forme o triângulo BCD;

    (f) Comprove utilizando o recurso "área" a equivalência dos triângulos ABC e BCD;

(g) Utilizando o recurso “reta perpendicular” trace duas retas perpendiculares à uma das retas anteriores passando pelos pontos que a formam, a reta que passa por B e D por exemplo;

(h) Utilizando o recurso “reta paralela”, trace uma reta passando por A e C que seja paralela àquela que passa por B e D;

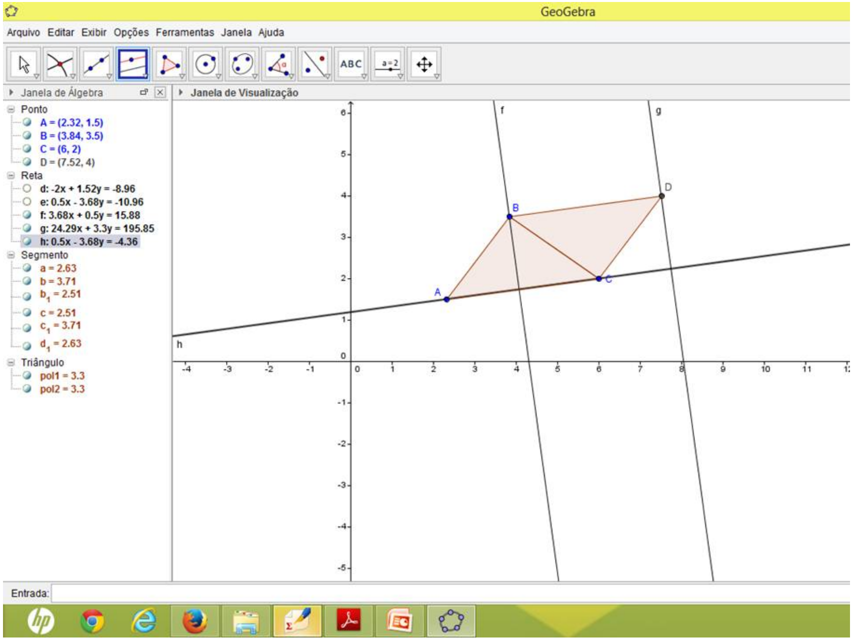


Figura 4.3: triângulo.

(i) Com o recurso “intersecção de dois objetos” clique sobre a nova reta paralela e as duas retas perpendiculares, formando assim os pontos E e F;

(j) Utilizando recurso “ponto médio ou centro”, marque os pontos médios G e H dos segmentos BD e EF, respectivamente;

(k) Com o recurso “polígono” forme o polígono EDGH;

(l) Com o recurso “área” comprove que esse retângulo EBGH é equivalente ao triângulo inicial ABC;

4. Realize com os alunos os cálculos da área do triângulo ABC e do retângulo EBGH utilizando as fórmulas utilizadas hoje em dia.

5. Discuta com eles como as fórmulas atuais tornaram o processo mais simples, e também bem mais algébrico;

6. Mostre que com a área do triângulo, é possível usando a fórmula da área do retângulo, encontrar apenas com cálculos, um retângulo equivalente;

4.2.3 Atividade 3: Dado um retângulo fazer sua quadratura

De fato essa é última etapa para enfim termos condições que realizar a quadratura de um triângulo e consequentemente de um polígono qualquer. Vamos inicialmente tentar despertar o entendimento do aluno a respeito da quadratura de um retângulo na prática. Vejamos:

1. Peça ao seu aluno que utilizando uma folha A4 e uma tesoura busque recortar a folha de modo que consiga formar um quadrado. (Caso ele consiga, é muito provável que o quadrado encontrado não seja equivalente à folha A4 inicial. Ver a Fig. 4.5.

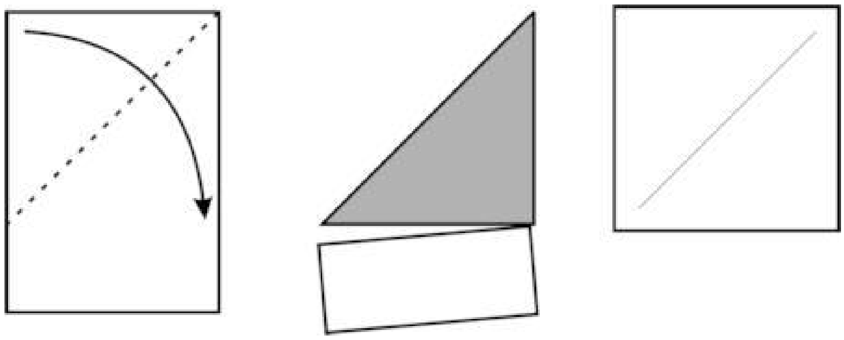


Figura 4.4: Quadrado.(Fonte: [6].)

2. Explique que o quadrado encontrado não é equivalente à folha A4, e que o procedimento é um pouco complexo para ser feito a mão, por isso será utilizado o Geogebra;
3. Utilizando o Geogebra faça essa quadratura através do processo de Euclides. Veja a Fig. 4.5)
    (a) Utilizando o recurso “reta paralela” trace uma paralela ao eixo das abcissas;
    (b) Utilizando o recurso “segmento definido por dois pontos” trace um segmento AB sobre essa paralela;
    (c) Utilizando os recurso “reta paralela” e “reta perpendicular” trace uma perpendicular a AB passando por B e uma perpendicular a AB passando por A. Em seguida trace uma paralela a AB passando por essas duas perpendiculares construídas anteriormente.
    (d) Use o recurso “intersecção entre dois objetos” e clique sobre as perpendiculares e a paralela a AB, formando os pontos C e D;
    (e) Utilize o recurso “polígono” e forme o retângulo ABCD;
    (f) Utilize o recurso “distância, comprimento ou perímetro” para saber a medida do lado BC;

(g) Com o recurso “ponto” marque sobre a reta que contêm D e C, o ponto E, à direita de C, de modo que CE tenha a mesma medida de BC;

(h) Com o recurso “ponto médio ou centro” clique sobre os pontos E e D formando o ponto F, médio do segmento ED;

(i) No recurso “semicírculo definido por dois pontos” clique sobre os pontos D e E;

(j) Utilizando mais uma vez o recurso “reta perpendicular” trace uma perpendicular ao segmento DE passando por C;

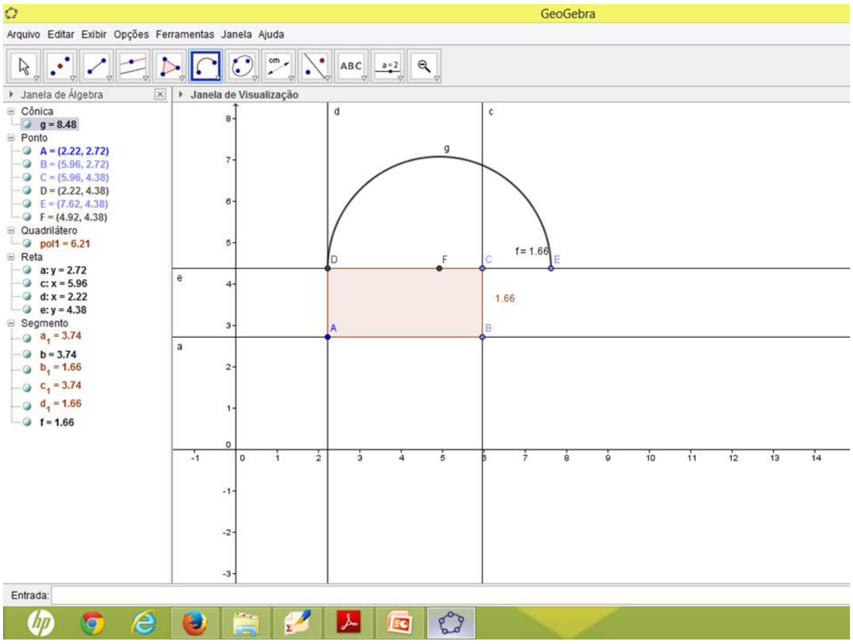


Figura 4.5: quadratura.

(k) Com o recurso “intersecção entre dois objetos” clique sobre essa perpendicular e o semicírculo, formando o ponto G;

(l) No recurso “segmento definido por dois pontos” ligue os pontos G e F (Apenas para efeito de demonstração);

(m) Por fim, utilize o recurso “polígono regular” clique sobre os pontos G e C nessa ordem e forme um polígono de 4 lados;

(n) Verifique usando o recurso “área” a equivalência do retângulo ABCD e do quadrado CHIG;

4. Utilizando as fórmulas de área do retângulo e do quadrado, mostre aos alunos como encontrar um quadrado equivalente ao retângulo;

5. Discuta as vantagens e desvantagens dos dois métodos.

4.2.4 Atividade 4: Dado um polígono qualquer fazer sua quadratura

Agora que o aluno já sabe encontrar um retângulo equivalente a um triângulo e um quadrado equivalente a um retângulo, e usando o fato que um polígono qualquer pode ser dividido em triângulos, é hora de fazer então a quadratura de um polígono qualquer.

1. Teste a capacidade de entendimento dos alunos quanto ao grau de dificuldade de se fazer a quadratura de um polígono tanto quanto for o numero de lados. Peça que cada um desenhe o poligono que quiser em uma folha, utilizando o lápis e a régua.

2. Diga a eles que a atividade de cada um será fazer a quadratura de seu polígono. Ou seja, terão de dividir esses polígonos em triângulos e fazer a quadratura de cada triângulo da divisão. Provavelmente é nesse momento que eles vão perceber a bobagem de terem escolhido um polígono de muitos lados.

3. Utilizando o Geogebra desenhe uma quadrilátero e divida-o em dois triângulos;

4. Utilize os procedimentos anteriores para fazer a quadratura desses dois triângulos;

5. Através do Teorema de Pitágoras, some a área de cada quadrado obtendo assim o quadrado equivalente ao quadrilátero desenhado inicialmente;

4.2.5 Atividade 5: A quadratura do quartel general dos Estados Unidos: O Pentágono

Como os alunos já têm as ferramentas necessárias para fazer a quadratura de qualquer polígono, iremos propor algumas atividades que despertem o interesse e ajudem a motivar o aluno no estudo desse fascinante mundo da geometria.

1. Traga para os seus alunos uma foto do quartel general dos Estados Unidos, o Pentágono, e utilizando a régua peça para que eles façam a medição dos lados do Pentágono;

2. Oriente-os usando o geogebra a reproduzir o perímetro da figura que representa o pentágono com as mesmas medidas encontradas na figura;

3. Utilizando o processo da quadratura de um polígono, peça para que eles determinem a área da figura que representa o pentágono;

4. Diante da impossibilidade de visitar o prédio do Pentágono, peça que os alunos pesquisem as suas reais dimensões, para que possam refazer a sua quadratura e comparar com a foto;

5. Diante dos cálculos realizados, utilize as fórmulas atuais para o cálculo da área do pentágono;

6. Questione-os sobre a eficiência e exigência dos dois métodos utilizados.

4.2.6 Atividade 6: Bom ou mau negócio?

Como autor desse projeto gostaria de deixar como sugestão de atividade algo que aconteceu comigo quando comprei o terreno da minha casa. Como eu confiava bastante naquele que me vendeu a propriedade acreditei fielmente que estava comprando um terreno retângular com 10 metros de frente e 20 metros de fundo. Meses depois, ao começar a construir, o meu engenheiro constatou que o terreno não se tratava de um retângulo e sim um quadrilátero de dimensões 10 metros, 18,5 metros, 21 metros e 10 metros. Diante dessa situação, o que podemos concluir? Houve perda ou ganho da minha parte em termos de área a ser construída?

1. Inicialmente deixe os alunos à vontade para debater a situação questionando-os da resposta que vierem a dar;
2. Proponha que os alunos desenhe os terrenos nas duas situações citadas e realize com eles a quadratura do terreno retangular e a triangularização do terreno verdadeiro para eventual quadratura;
3. Com a resposta certa em mãos discuta com os alunos o porque dos erros e acertos;
4. Calcule a área dos terrenos usando as fórmulas convencionais.

4.2.7 Atividade 7: Cálculo da área construída da praça do prédio central da UFPB do *campus* de Areia.

Uma das atividades sugeridas para que os professores possam unir a teoria e a prática é pesquisar uma obra, local ou monumento em sua cidade, ou em cidade circunvizinha que tenha o formato de um polígono fechado. Sendo assim, o professor poderá levar os seus alunos para que ná prática eles possam fazer medições, triangularizar o polígono e até mesmo imaginar de que forma calculariam a área nos moldes antigos e nos dias atuais. Nesse trabalho usamos como exemplo a praça do prédio central da Universidade Federal da Paraíba (UFPB) *campus* de Areia. Ela tem o formato de um quadrilátero.

1. Leve seus alunos para o prédio central da UFPB e lá peça para que eles façam a medição das dimensões da praça central;
2. Com as medições em mãos questione os alunos sobre que tipo de polígono se trata a área construída dessa praça;
3. Peça para que eles triangularizem o polígono, anotando as medidas dos lados dos triângulos em questão;
4. Permita que os alunos calculem a área dessa região da maneira que eles acharem mais conveniente;

5. Peça para que os alunos utilizando uma escala convencional reproduzam em papel o desenho do polígono que representa a área construída da praça, bem como sua triangularização;

6. Utilizando régua e compasso peça para que eles façam a quadratura de cada triângulo e somando através do Teorema de Pitágoras cada quadrado, obtenha assim uma área equivalente a do polígono original.

7. Peça que façam o mesmo procedimento do item anterior contudo lançando mão dos recursos do Geogebra;

8. Por fim, utilize as fórmulas atuais para o cálculo da área construída da praça;

9. Discuta com os alunos sobre os três procedimentos: Régua e compasso; Geogebra; Fórmulas atuais. Qual deles deu mais trabalho? Qual o mais eficiente? Qual o mais prático? Qual eles gostaram mais?

Esperamos sinceramente que essas atividades propostas auxiliem no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, motivando e despertando um interesse maior do aluno para o estudo dessa fascinante disciplina. Todas essas atividades foram aplicadas na turma do 1°Ano do Ensino Médio do Colégio Educacional Risco e Rabisco (Sistema Geo de Ensino), na cidade de Areia-PB. A participação, a dedicação e a curiosidade foram as marcas principais encontradas no desenvolvimento de cada uma dessas atividades. Com isso acreditamos fielmente que a História da Matemática é sim uma “via” muito eficaz para dinamizar e tornar mais atrativa as aulas de Matemática. Contudo devemos considerar e refletir do quão extenso é o nosso currículo, que pouco valoriza essa área da Matemática.

Capítulo 5

A História da Matemática: Uma reflexão curricular

5.1 Introdução

Para a maioria dos matemáticos e educadores, a História da Matemática deve estar presente em sala de aula. Contudo, é fato que o discurso entra em contradição com a prática, mais pelo fato de existirem muitas dúvidas a respeito da melhor forma de utilizar tal recurso. A História da Matemática é sem dúvida um importante recurso pedagógico e a sua utilização em sala de aula não é algo tão novo entre os matemáticos. Para se ter uma idéia dessa dimensão, vemos que no Brasil, a História da Matemática só veio a ganhar espaço a partir de 1999, ano de fundação da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat). Internacionalmente falando, foi na década de 1980 que ela começou a se destacar com a criação do International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics (HPM) que está ligado à Comissão Internacional de Ensino da Matemática (ICMI). O que percebemos no dia a dia em sala de aula é que algo como a História da Matemática pode servir para despertar o interesse dos alunos em sala de aula. Devemos mostrar aos nossos alunos a importância de cada conteúdo que estão aprendendo, e que esses conteúdos não surgiram do nada. “Por trás de cada informação dada com tanta simplicidade em sala de aula existem as lágrimas, as aventuras e a coragem dos cientistas” (Cury, [2], p. 136). Contudo, não podemos cair na ilusão de que usar esse recurso pedagógico apenas como fator motivador é algo que vai despertar o interesse do alunado. Pois se isso fosse mesmo verdade as “nossas” aulas de História espalhadas pelo mundo seriam as mais desejadas pelos alunos. Por isso, devemos ir além de contar simplesmente a história, mas usar esse recurso para tornar os conteúdos matemáticos mais atrativos e interessantes de serem descobertos e apreciados.“Para contar histórias é necessário exercitar uma voz flutuante, teatralizada, que muda de tom durante a exposição. É preciso produzir gestos e reações capazes de expressar o que as informações lógicas não conseguem”(Cury, [2], p. 132).

5.2 A História só nos livros

Nenhum professor de Matemática é obrigado a ir além do que o conteúdo do Ensino Básico exige. É claro que os PCNs orientam, os cursos de formação incentivam, a pedagogia recomenda, mas o que se percebe ainda atualmente é que o "inchado" conteúdo do ensino básico, principalmente no ensino médio, dificulta para os professores o uso contínuo de inovações para sua sala de aula. O mundo fascinante da história do conhecimento, e não menos fascinante ainda, o da história da matemática, é algo que deveria ser intensamente explorado nas aulas de matemática. É fato que os livros didáticos em sua maioria preocupam-se com isso trazendo introduções de capítulos ou até mesmo citações posteriores a assuntos ensinados que buscam estimular alunos e professores sobre o tema. Mas acredito que uma reforma curricular que reduzisse os conteúdos e desse mais espaço e condições aos professores de explorar e desenvolver melhor os temas seria uma boa alternativa. Ter fatos históricos por trás de um conteúdo matemático a ser ensinado pode se tornar uma ferramenta bastante útil para prender o interesse e a atenção dos alunos. Um conteúdo como geometria, e mais especificamente a parte que trata de área de figuras é muita aberta para o uso de recursos pedagógicos, e se acrescentarmos a história na questão podemos dar ao nosso aluno respostas a perguntas do tipo: Por que estou estudando isso? Qual a relevância de tal conteúdo? Os próprios PCNs valorizam a incrementação da história da matemática no processo ensino aprendizagem: "Apresentada em várias propostas como um dos aspectos importantes da aprendizagem matemática, por propiciar compreensão mais ampla da trajetória dos conceitos e métodos dessa ciência, a História da Matemática também tem se transformado em assunto específico, um item a mais a ser incorporado ao rol de conteúdos, que muitas vezes não passa da apresentação de fatos ou biografias de matemáticos famosos"(PCNs). "O conhecimento da história dos conceitos matemáticos precisa fazer parte da formação dos professores para que tenham elementos que lhes permitam mostrar aos alunos a Matemática como ciência que não trata de verdades eternas, infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos"(PCNs). Qual é o professor que nunca se deparou com a pergunta do tipo: Quem inventou a Matemática? Os próprios PCNs nos incentivam a trabalhar essa questão como sendo um fator importantíssimo no processo de ensino aprendizagem: "A História da Matemática, mediante um processo de transposição didática e juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos, pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático. Além disso, conceitos abordados em conexão com sua história constituem-se veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural.

Além disso, conceitos abordados em conexão com a sua história constituem-se veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural."

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho percebemos que os estudos feitos, bem como as aplicações práticas podem em muito contribuir para o ensino de Geometria, mais especificamente do conteúdo de áreas de figuras planas. É claro que o processo de Quadratura é um método antigo e não se compara com a praticidade das fórmulas que hoje temos à disposição para o cálculo de áreas. Contudo, resgatar essse procedimento histórico como ferramenta de motivação e de valorização da evolução da Matemática é capaz de dar algum propósito ao aluno sobre o que ele está estudando.

A verdade é que atualmente devemos entender que o processo educacional deve ser "alimentado" com subsídios que ajudem o professor a deixar o seu trabalho mais dinâmico e atrativo, para que juntos com os seus alunos possam construir o conhecimento e difundir o grau de importância da Matemática na vida de cada um de nós. Acreditamos que as atividades aqui propostas podem enriquecer os planos de ensino dos professores de Matemática, diversificando assim as estratégias que poderão contribuir para um melhoramento das habilidades do aluno em aplicar os conceitos geométricos na resolução de problemas.

Por isso, o fato de utilizarmos um "software" tão moderno como o Geogebra unido aos procedimentos antigos da Quadratura de um triângulo que eram feitos com régua e compasso, é de fato um método que vale a pena para construir e introduzir as fórmulas convencionais de áreas de figuras planas. Porém, é fundamental que os alunos tenham sidos "nutridos" com os conceitos básicos de Geometria, para que se possa trabalhar em tempo hábil todos os procedimentos da Quadratura do triângulo.

Como legado, pretendemos com esse TCC disponibilizar uma ferramenta que possa tornar as aulas de Geometria mais dinâmicas, mais práticas e mais divertidas. Bem como despertar no professor de Matemática a importância da História da Matemática como parte importante no processo e no desenvolvimento do conhecimento. Que esse trabalho seja útil, tanto para os professores como para os alunos incentivando-os de alguma forma a perceber o valor da História da Matemática em todo o conhecimento que nos é disponibilizado hoje.

Referências Bibliográficas

[1] COSTA, V. C.; *Números Construtíveis*, Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado em Matemática - PROFMAT), Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2013.

[2] CURY, A. J.; *Pais brilhantes, professores fascinantes: a educação dos nossos sonhos, formando jovens felizes e inteligentes*, Rio de Janeiro: Sextante, 2003.

[3] COMMANDINO, F.; *Euclides: Elementos de Geometria*, São Paulo: Edições Cultura, 1944.

[4] CAMINHA, A.; *Geometria*, SBM, 2013 - COLEÇÃO PROFMAT.

[5] EVES, H.; *Tópicos de História da Matemática-para uso em sala de aula*, 1ª ed, N^o **5**, (1992),São Paulo - Atual, pp. 632–640.

[6] FIGUEIREDO, E.B., BOULLAUF, M. F., MIARKA, R.; *A impossibilidade da quadratura do círculo por meio da quadratriz*, Revista do Professor de Matemática, N^o **81**, (2013), pp. 40–44.

[7] ROQUE, T., PITOMBEIRA, J. B.; *Tópicos de História da Matemática*, 1ª ed, N^o **5**, (2012), pp. 632–640.

[8] Caos no Sistema: *Destrua as correntes que controlam sua mente*, Disponível em <http://http://caosnosistema.com/tales-de-mileto-imortalidade-espirito/> Acesso em 28 de Abril de 2014.

[9] Origami: Transformando papel em arte: *Como Obter um Quadrado de um Retângulo?*, Disponível em <http://origami.em.blog.br/archives/origami-como-obter-quadrado-retangulo/> Acesso em 28 de Abril de 2014.

[10] Parâmetros Curriculares Nacionais(Ensino Médio): *Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Secretaria de Educação Média e Tecnológica*, Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em 28 de Abril de 2014.

Apêndice A

Primeiro Apêndice

Neste Apêndice apresentaremos alguns axiomas e proposições que foram utilizadas para as demonstrações realizadas nos capítulos anteriores. Citaremos nesse Apêndice os Axiomas 10,8,3,7 e 2 do livro I dos Elementos de Euclides, como os Axiomas 1,2,3,4 e 5, respectivamente. E as Proposições I.7, I.16, I.29, I.33, I.14, I.41 e I.45 dos Elementos de Euclides serão identificadas nesse apêndice como as proposições A.1, A.2, A.3, A.4, A.5, A.6 e A.7 respectivamente com as devidas adaptações para melhor entendimento.

Axioma 1 *Duas linhas retas não compreendem espaço.*

Axioma 2 *Duas quantidades, que se ajustam perfeitamente uma com outra são congruentes.*

Axioma 3 *Se de coisas iguais se tirarem outras iguais, os restos serão iguais.*

Axioma 4 *As metades de uma mesma quantidade são também iguais.*

Axioma 5 *Se a coisas iguais juntarmos outras coisas iguais, os todos serão iguais.*

Proposição A.1 *(I.7) Sobre a mesma base não se pode construir dois triângulos diferentes, que tenham os outros lados congruentes isto é, os dois lados, que partem de um mesmo vértice da base, e os outros dois, que partem do outro, não podem ser iguais.*

Proposição A.2 *(I.16) Considere um lado qualquer de um triângulo. Temos que o ângulo externo relativo a esse lado é sempre maior que cada um dos ângulos internos não adjacentes a ele.*

Proposição A.3 *(I.29) Uma reta transversal que corta duas retas paralelas, faz com que os ângulos alternos sejam congruentes entre si, o ângulo externo congruente ao interno sendo eles do mesmo lado da transversal e em diferentes paralelas, e finalmente a soma dos dois ângulos internos que estão do mesmo lado da transversal é igual a* $180°$.

Proposição A.4 *(I.33) Considere dos segmentos de retas congruentes e paralelos. Se ligarmos as extremidades que estão do mesmo lado desses segmentos, obteremos dois novos segmentos também congruentes e paralelos.*

Proposição A.5 *(I.14) Se em um ponto de uma reta qualquer concorrerem de partes opostas duas semiretas, fazendo com a primeira reta ângulos adjacentes cuja soma é iguail a* $180°$, *as semiretas, que concorrem para o dito ponto estarão sobre uma mesma reta.*

Proposição A.6 *(I.41) Se um paralelogramo e um triângulo estiverem sobre uma mesma base, e entre as mesmas paralelas, de forma que os vértices do paralelogramo e o vértice do triângulos opostos a base estejam sobre uma das paralelas e a base sobre a outra, temos que a área do paralelogramo será o dobro da área do triângulo.*

Proposição A.7 *(I.45) Construir um paralelogramo igual a uma figura retilínea qualquer dada, e com um ângulo igual a outro ângulo dado*

Apêndice B

Questionário para o professor de Matemática

Neste Apêndice apresentamos uma sugestão para você que é professor de Matemática: Um questionário elaborado com o intuito de sondar como a História da Matemática é tratada hoje pelos professores de Matemática da sua região. É claro que não queremos apenas críticar ou expor algum problema ou descaso a respeito do tema, mas incentivar o uso dessa ferramenta poderosa no auxílio do processor de ensino-aprendizagem. Acreditamos que esse questionário possa se tornar um veículo de um trabalho de valorização, por parte dos próprios professores, da História da Matemática. Segue abaixo um modelo sugestivo e flexivo para que você professor possa usá-lo ou adaptá-lo à sua realidade:

B.1 Questionário de Sondagem

1. Qual seu grau de formação?

2. Em toda a sua formação acadêmica você cursou alguma disciplina de História da Matemática? Qual a duração?

3. Você considera a História da Matemática importante no processo de ensino aprendizagem?

4. Você poderia citar algo da História da Matemática que poderia ser usado como introdução de algum conteúdo abordado?

5. Os livros didáticos que você utiliza em sua escola abordam a História da Matemática em seus conteúdos? Em que grau de qualidade?

6. Você acredita que ao longo dos tempos, o avanço da tecnologia e da informação facilitaram os cálculos de áreas de figuras planas?

7. Você já ouviu falar do processo de quadratura?