UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE - UFCG
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA – CCT
UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA – UAMAT
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL – PET

TUTOR: PROF. DR. DANIEL CORDEIRO DE MORAIS FILHO
VOLUNTÁRIO: LUCAS SIEBRA ROCHA

ANÁLISE DA ABORDAGEM DO TEMA FUNÇÃO EXPONENCIAL, EQUAÇÃO EXPONENCIAL E INEQUAÇÃO EXPONENCIAL EM UM LIVRO DIDÁTICO DE ENSINO MÉDIO

Campina grande – PB
Dezembro de 2015

APRESENTAÇÃO

O livro didático é um material importante e de grande aceitação porque, além de fornecer e organizar os conteúdos, inclui métodos de aprendizagem da disciplina. Ou seja, está contido uma concepção de aprendizagem. Daí, ele se torna um instrumento de grande poderio do professor. E assim como qualquer instrumento, quando usado corretamente pode fazer uma grande, e boa, diferença.

Ao longo de dois séculos, começaram a ser produzidos os primeiros livros didáticos no Brasil. Os livros passaram por inúmeras transformações, visando acompanhar as novas dinâmicas em sala de aula e contribuir para uma aprendizagem significativa. Ainda hoje, porém, melhorias precisam ser feitas e vê-se aí a função de um analista, que mostra muitas de suas deficiências de conteúdo, suas lacunas e erros conceituais para serem consertados, como também aponta os acertos para servirem de exemplos para outros autores.

Neste trabalho, mostraremos uma análise do assunto Função exponencial, equação exponencial e inequação exponencial de um livro didático do ensino médio, dando um enfoque na contextualização e aplicação do assunto, na clareza do conteúdo e nos exercícios trazidos pelo autor.

Dividiremos esta análise em dois capítulos: conteúdo e exercícios, para em seguida termos uma conclusão sobre o capítulo analisado. Além de usarmos como base teórica as referências [1] e [2]. Fazemos ainda a observação de que todas as imagens contidas nesta análise, com exceção da figura 1.3, foram retiradas do capítulo do livro analisado.

CAPÍTULO 1

CONTEÚDO

1.1 Introdução

Antes de iniciar de fato o assunto do capítulo, o autor apresenta adequadamente, de maneira contextualizada, duas imagens (ver figura 1.1). Logo em seguida, afirma que a função que será estudada no capítulo permitirá compreender melhor o sentido das manchetes das figuras. Feito a destacar-se, pois é ótimo já despertar a curiosidade e interesse do discente, previamente a apresentação do conteúdo do capítulo.

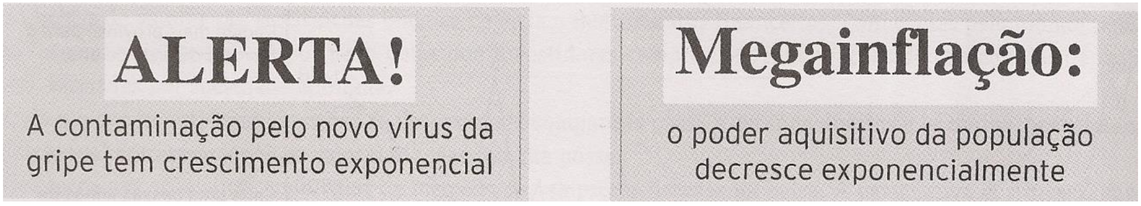


Figura 1.1: Manchete sobre usos da função exponencial.

1.2 Apresentação e definição de função exponencial

O exemplo exposto antes da definição se dá pelo crescimento de uma folha com forma circular de uma planta aquática. Ponto positivo para o autor por causar uma interdisciplinaridade, mostrando que a matemática abrange diversas áreas do conhecimento. Entretanto, ocorre uma incoerência no exemplo, já que dificilmente encontraremos uma planta com crescimento exponencial. Em seguida é feito uma tabela relacionando o tempo (em meses) e o diâmetro da planta (em cm) naquele certo mês. Daí, um gráfico é montado a partir da tabela e é afirmado que aquela curva representa um crescimento exponencial (ver figura 1.2).

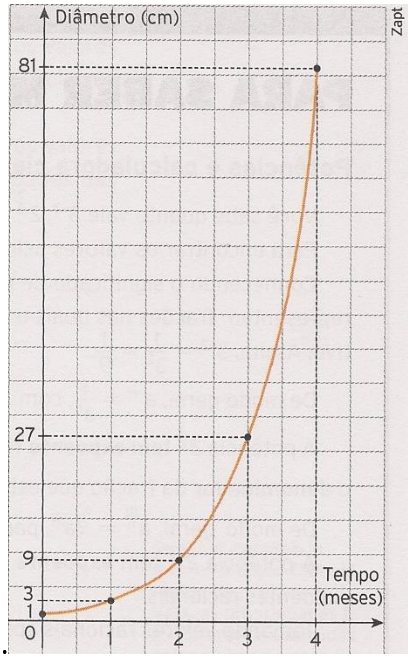


Figura 1.2: Gráfico do crescimento exponencial de uma planta aquática.

Como a função exponencial ainda não foi definida, tal gráfico pode causar certa confusão ao aluno por sua forma se assemelhar muito ao gráfico de uma função quadrática. Recomendamos uma aplicação, também interessante e possível de acontecer, que não causaria tal confusão: o resfriamento de um corpo (ver figura 1.3). Nota-se nele que o resfriamento chega muito próximo sem nunca atingir a temperatura zero. Isso faz com que se dê ao leitor uma impressão de um gráfico novo, de uma situação diferente das já vistas nos capítulos anteriores do livro.

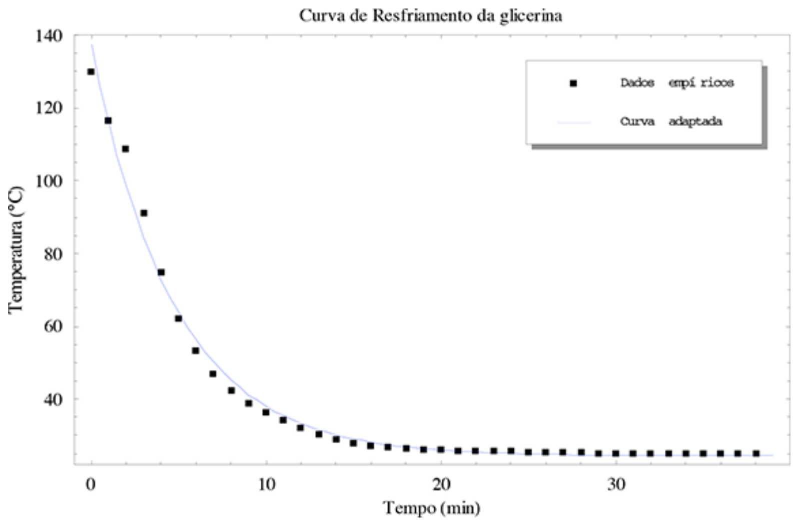


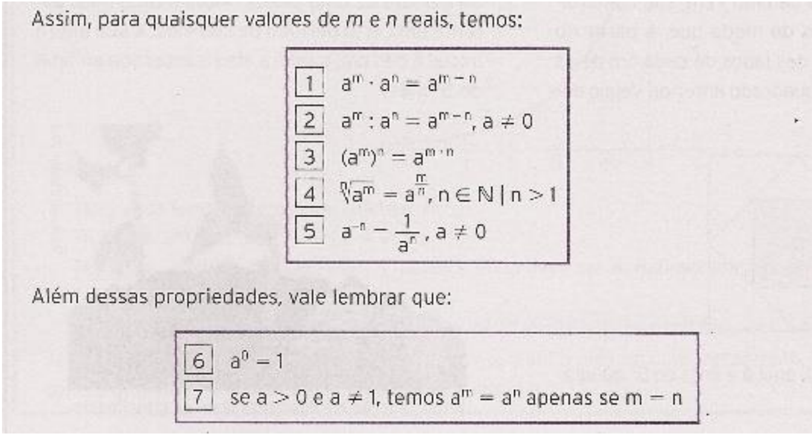
Figura 1.3: Gráfico do resfriamento de um corpo. Fonte: https://www.danilorvieira.com/disciplinas/fep0112/resfriamento.php acessado às 16:36 de 14/08/205.

1.3 Potências e propriedades da função exponencial

Assunto de grande importância para a obtenção das propriedades da função exponencial, a potenciação com expoente inteiro, racional e irracional é apresentada de uma maneira bastante interessante, associando-a ao uso da calculadora. A potenciação de um número é um processo trabalhoso em certos casos e a calculadora revela-se como um importante auxiliador, fato usado pelo autor nessa seção. Além disso, ele reforçou o uso da calculadora no intervalo $0 < a < 1$ (um dos intervalos da função exponencial), o que é muito bom já que esse intervalo é dominado por números racionais e irracionais.

Entretanto, notamos, até com certa surpresa, a ausência da apresentação do número *e*, tão importante para a função exponencial de base natural. Fato infeliz já que o assunto foi ignorado pelo autor, pois muitos fenômenos naturais são descritos por leis exponenciais de base *e*, como a taxa de crescimento de uma população ou de decaimento radioativo.

Por fim, são apresentadas, de maneira simples e adequada, as propriedades da função exponencial, uma vez que, conforme a figura 1.4, é feito o uso das regras de potenciação que acabaram de serem apresentadas no mesmo capítulo.



Assim, para quaisquer valores de *m* e *n* reais, temos:

$\boxed{1}$ $a^m \cdot a^n = a^{m-n}$

$\boxed{2}$ $a^m : a^n = a^{m-n}, a \neq 0$

$\boxed{3}$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$\boxed{4}$ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, n \in \mathbb{N} \mid n > 1$

$\boxed{5}$ $a^{-n} - \frac{1}{a^n}, a \neq 0$

Além dessas propriedades, vale lembrar que:

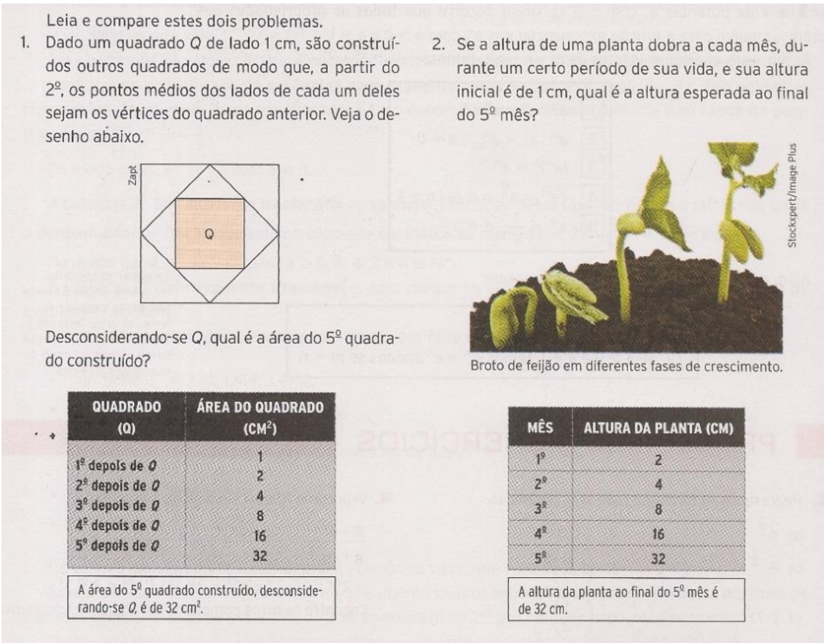
$\boxed{6}$ $a^0 = 1$

$\boxed{7}$ se $a > 0$ e $a \neq 1$, temos $a^m = a^n$ apenas se $m - n$

Figura 1.4: Propriedades da função exponencial

1.4 Conexão entre Progressão Geométrica e Função Exponencial

Objetivando fazer a conexão entre progressão geométrica e função exponencial, o autor acertadamente expõe um problema matemático e um problema biológico (porém, novamente uma situação que não pode ocorrer na vida real), como pode ser visto na figura 1.5, para em seguida fazer a relação entre a progressão e a função estudada. Parabenizamos a atitude do autor de fazer essa conexão, já que poucos livros abordam tal assunto.



Leia e compare estes dois problemas.

1. Dado um quadrado *Q* de lado 1 cm, são construídos outros quadrados de modo que, a partir do 2º, os pontos médios dos lados de cada um deles sejam os vértices do quadrado anterior. Veja o desenho abaixo.

Desconsiderando-se *Q*, qual é a área do 5º quadrado construído?

QUADRADO (Q)	ÁREA DO QUADRADO (CM^2)
1º depois de *Q*	1
2º depois de *Q*	2
3º depois de *Q*	4
4º depois de *Q*	8
5º depois de *Q*	16
	32

A área do 5º quadrado construído, desconsiderando-se *Q*, é de 32 cm^2.

2. Se a altura de uma planta dobra a cada mês, durante um certo período de sua vida, e sua altura inicial é de 1 cm, qual é a altura esperada ao final do 5º mês?

Broto de feijão em diferentes fases de crescimento.

MÊS	ALTURA DA PLANTA (CM)
1º	2
2º	4
3º	8
4º	16
5º	32

A altura da planta ao final do 5º mês é de 32 cm.

Figura 1.5: Problemas matemático e biológico para conexão entre Progressão geométrica Função exponencial.

1.5 Gráfico da função exponencial

Os gráficos da função exponencial são apresentados (ver figura 1.6), tanto para $a > 1$ como para $0 < a < 1$ para, a partir deles, serem mostradas as propriedades.

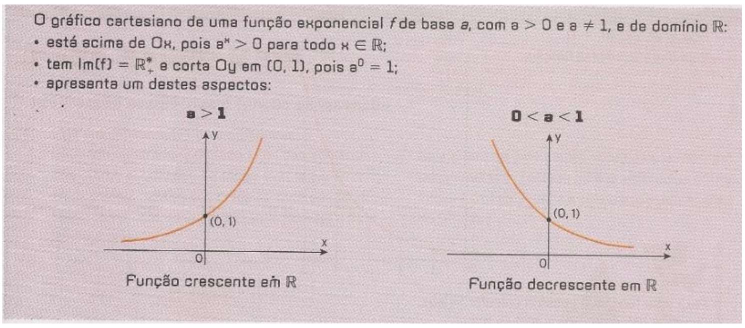


Figura 1.6: Gráficos da função exponencial.

Entretanto, identificamos que infelizmente não é justificada a monotonicidade da função, que seria interessante ser enunciada, já que se uma função for monótona, ela é injetora. Com isso, ela admite inversa e é possível obter uma nova função, a função logarítmica, que será estudada em um capítulo adiante.

1.6 Equações e Inequações exponenciais

Segundo Lima *et al*. (2001), Equações exponenciais se resumem basicamente à injetividade da função exponencial e as inequações exponenciais à monotonicidade da mesma função. A partir disso, concordamos em o assunto desse tópico ser tratado de forma curta e conter exercícios resolvidos para elucidar o tema. Ponto positivo para o autor.

1.6 Seções especiais “No computador”, “Conheça sua calculadora” e “Conexão”

Em uma das seções especiais do capítulo, denominada “No computador”, o autor incentiva o uso de um programa de computador para a obtenção de gráficos. O escritor traz a comparação entre as três funções já estudadas, a exponencial, a quadrática e a afim (vide figura 1.7). Ele utiliza exemplos simples, $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = 2^x$, pois o principal objetivo é ilustrar tal situação, para em seguida fazer questionamentos das semelhanças e diferenças dos gráficos. É sempre importante estabelecer relações entre assuntos já abordados, e a comparação entre esses gráficos no computador, uma forte ferramenta de ensino, foi uma ótima ideia.

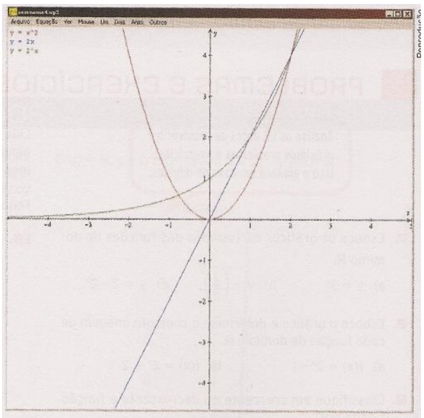


Figura 1.7: Relação entre os gráficos das funções afim, quadrática e exponencial.

Notamos na seção “Conheça sua calculadora” a preocupação do autor em mostrar mais uma vez o uso da calculadora, agora com explicação da função das teclas e com exercícios. Em nossa opinião, consideramos bom o destaque de tal aparelho nesse capítulo, pois além de auxiliar em cálculos de potências, como já exposto, ele pode ser usado como auxiliador de cálculos em exercícios contextualizados, já que em situações reais dificilmente encontramos números fáceis de se trabalhar.

Na seção especial seguinte, “Conexão”, é abordada uma aplicação da matemática nas ciências da natureza. Essa aplicação se dá pelo uso da função exponencial no cálculo do tempo de vida da radioatividade de uma substância. Além de fazer uma boa contextualização histórica do assunto, ainda é mostrado exemplos na datação da idade de plantas, de múmias e de animais e no exame diagnóstico e terapia específica para o tratamento de câncer de tireoide (ver figura 1.8). Elogiamos o autor, que desde o começo do capítulo, ao exibir reportagens que mostram o uso da função exponencial no dia a dia (figura 1.1), contextualiza a função estudada. A imagem que é passada é que a matemática não serve apenas para resolver problemas manipulativos, mas que é aplicada e fundamental nas diversas áreas do conhecimento, despertando o interesse do aluno e evitando a ideia de que a matemática é uma matéria sem graça e que não será utilizada durante a vida, como muitos livros podem insinuar.

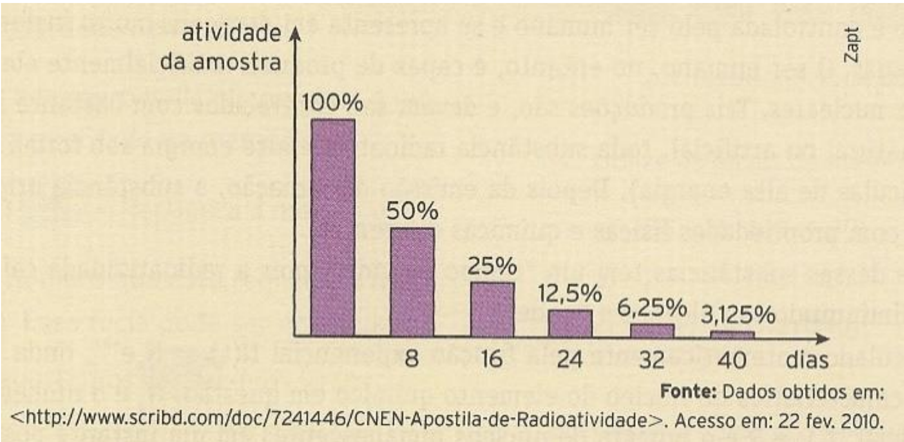


Figura 1.8: Gráfico do decaimento do iodo radioativo no tratamento da tireoide.

CAPÍTULO 2

EXERCÍCIOS

2.1 Problemas e exercícios

Tratam-se de 28 exercícios divididos em quatro partes com cada parte localizada depois do conteúdo relacionado a ela. Os primeiros exercícios de cada parte são puramente manipulativos, o que entendemos, já que é necessária a fixação das definições estudadas. Já os últimos, abordam problemas que exigem um raciocínio mais avançado cuja resolução vai além da aplicação imediata do tema estudado. Fato interessante para nós elogiarmos, pois os exercícios ficam dispostos em nível crescente de dificuldade e permite o desenvolvimento do raciocínio e a construção do conhecimento do aluno.

Destacamos o exercício 6 (ver figura 2.1), que aborda o tema de sequência geométrica, utilizado acertadamente pelo autor como forma de revisão do assunto, já que em seguida é feito a conexão entre progressão geométrica e função exponencial. Além dos exercícios 19 e 22 (ver figura 2.2), que trazem mais aplicações da função exponencial não vistas no capítulo até então. Concordamos com a atitude do autor de continuar a utilizar-se de aplicações, pois assim é passada a matemática como algo presente em nossas vidas.

6. Observe a sequência.

10 100 1 000 10 000

a) Indique o 5º, o 18º e o 100º termos dessa sequência.

b) Explique como essa sequência é formada.

c) Encontre o termo geral da sequência.

Figura 2.1: Exercício de sequência geométrica.

19. (UFPE – 2007) O preço de um automóvel, P(t), desvaloriza-se em função do tempo *t*, dado em anos, de acordo com uma função de tipo exponencial $P(t) = b \cdot a^t$, com *a* e *b* sendo constantes reais. Se, hoje (quando $t = 0$), o preço do automóvel é de 20 000 reais, e valerá 16 000 reais daqui a 3 anos (quando $t = 3$), em quantos anos o preço do automóvel será de 8192 reais? (Dado: $8\,192/20\,000 = 0{,}8^4$).

22. (UEM-PR – 2007) As bactérias têm alto poder de reprodução. Em algumas horas, sob condições ambientais adequadas, um único indivíduo pode originar milhares de descendentes. Suponha que, no início de um processo infeccioso (tempo zero), haja 2 bactérias da mesma espécie e que, um segundo após, a população alcance o número de 20 indivíduos. Suponha, ainda, que o processo de reprodução se mantenha no mesmo ritmo. Em relação às bactérias, identifique a alternativa incorreta.

a) No tempo $t = 3$ segundos, haverá menos de 2 500 bactérias.

b) A função *f* que descreve o número de bactérias em relação ao tempo em segundos é dada por $f(t) = 2 \cdot 10^t$, com $t \in \mathbb{N}$.

c) No tempo $t = 4$ segundos, haverá mais de 22 000 bactérias.

d) A cada segundo, o número de indivíduos aumentará em 10 vezes.

e) Após 10 segundos, a quantidade de indivíduos estará na casa dos bilhões.

Figura 2.2: Exercícios com aplicações da função exponencial.

2.2 Seção “Ler para resolver” e “Saia dessa”

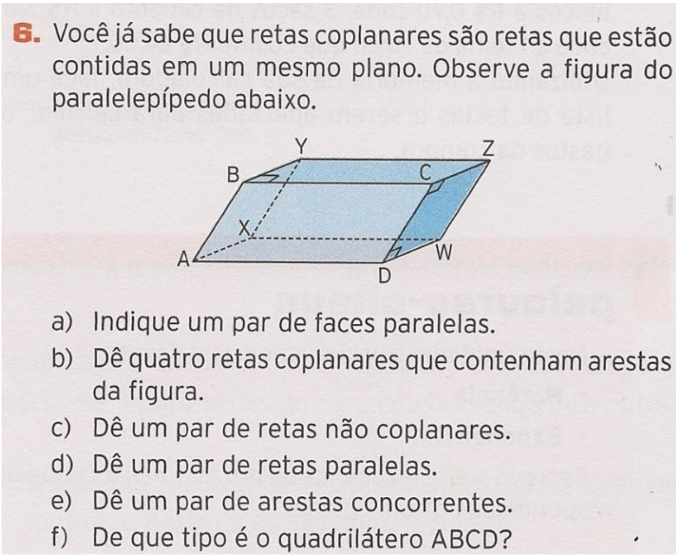
Essas duas seções são interligadas. Na primeira, é explicado maneiras de se resolver questões com alternativas. Essas boas dicas preparam, mesmo que implicitamente, o aluno para um futuro vestibular. Na segunda seção, o autor traz questões mais complexas e contextualizadas, típicas de vestibular. Ele fez bem nisso porque estimula o discente, possibilitando a liberdade de construir suas próprias estratégias de resolução.

2.3 Seções “Cálculo rápido”, “Invente você” e “Para recordar”

Há uma parte do capítulo que traz três questões, a primeira ainda com 12 itens, abordando apenas “cálculos que devem ser guardados na memória”, segundo o autor. Cálculo rápido, como foi intitulada essa parte, é completamente desnecessária. Até discordamos, também, de tê-la em algum dos outros capítulos, pois a matemática não deve ser passada como uma matéria cansativa, decorativa e manipulativa. Como já dizemos, concordamos em ter exercícios manipulativos como fixação de definições, mas não é interessante recorrer deles muitas vezes nem, menos ainda, trazer uma seção especial sobre eles.

Diferentemente de “Cálculo Rápido”, a seção “Invente você” desperta a construção do raciocínio do aluno. Nela, é estimulada a capacidade de construção de problemas e exemplos da função exponencial, além da discussão entre alunos das questões feitas por cada um. Um ponto bastante positivo por auxiliar o aluno na compreensão de conceitos matemáticos mais subjetivos.

Os últimos exercícios do capítulo são de revisão de assuntos já abordados em outros capítulos. Exercícios sem lógica de serem apresentados, como o da figura 2.3, já que não trazem nenhuma relação com o conteúdo que foi acabado de ser estudado. Seria bem mais interessante que essa seção, “Para recordar”, contivesse exercícios que incluíssem o tema função exponencial, mas também tivessem uma ligação com conteúdos anteriores ou com a abordagem de outros temas. Para, assim, servirem de revisão da função exponencial como uma forma de fixação de todo conteúdo estudado.


6. Você já sabe que retas coplanares são retas que estão contidas em um mesmo plano. Observe a figura do paralelepípedo abaixo.

a) Indique um par de faces paralelas.
b) Dê quatro retas coplanares que contenham arestas da figura.
c) Dê um par de retas não coplanares.
d) Dê um par de retas paralelas.
e) Dê um par de arestas concorrentes.
f) De que tipo é o quadrilátero ABCD?

Figura 2.3: Questão abordada na seção “Para recordar”.

CONCLUSÃO

Com base no enfoque considerado, o capítulo analisado do livro é bem construído e estruturado. Apesar de alguns equívocos apresentados anteriormente e colocações que podem ser melhorados, ressaltamos a contextualização do assunto que recebe grande enfoque do autor, revelada em seções especiais, exemplos e exercícios. Isso torna a matemática interativa e mostra quão útil e presente em nossas vidas ela pode ser.

O professor de porte de um capítulo com tantas informações e bons exercícios pode utiliza-lo como um meio de ensino muito eficiente. Dessa forma, consideramos o capítulo do livro analisado como uma boa referência para se estudar função exponencial, equação exponencial e inequação exponencial e recomendamos o estudo dele aos alunos de ensino médio.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LIMA, et al. *A Matemática do Ensino Médio*. 9ª edição. Coleção do Professor de Matemática; v. 1 Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, et al. *Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2001.