Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática e Estatística

**Área de Conhecimento: Análise.**

# Análise da Lentidão da Divergência da Série Harmônica: Uma Contradição à nossa Intuição


***CUNHA, Arthur Cavalcante; FERREIRA FILHO, Paulo Romero; MOTTA, Matheus Cunha; DE MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro (Orientador)***

Universidade Federal de Campina Grande

*arthur@dme.ufcg.edu.br; paulo@dme.ufcg.edu.br; matheus@dme.ufcg.edu.br; daniel@dme.ufcg.edu.br.*


## INTRODUÇÃO

As séries, mesmo precisando de um entendimento mais formal, são usadas desde a matemática grega até nossos dias. Expressar um número ou uma função como uma “soma infinita” de termos é um objetivo bastante procurado em toda Matemática, que facilita os cálculos e a análise dos dados.

Este trabalho desenvolvido por integrantes do Grupo PET-Matemática-UFCG, sob a tutoria do Prof.Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho, tem como objetivo principal estudar a tão conhecida série harmônica que, em geral, é o primeiro exemplo de uma série divergente apresentada aos alunos quando fazem seus cursos de Cálculo [5]. Um estudo mais aprofundado dessa série é feito geralmente em um curso de Ánalise na Reta [4].

## METODOLOGIA

O interesse no desenvolvimento desse trabalho, surgiu numa aula de Análise na reta quando foi posto a questão da lentidão da divergência da série harmônica. A pesquisa foi feita com base em artigos do Prof. Geraldo Ávila [1], [2], além disso, desenvolvemos aplicativos para plotar os gráficos e obter algumas reduzidas da série harmônica para grandes quantidades de termos. As características observadas foram motivadas pelas seguintes questões:

- De que forma o crescimento da série harmônica ocorre?
- É muito lento? Muito rápido? É perceptível em uma primeira análise?
- Quão rapidamente ou lentamente se dá essa divergência?
- Qual é o valor dessa soma para $1.000$ termos? Para $100.000$ termos?

## RESULTADOS E CONCLUSÕES

Através de métodos elementares do Cálculo Numérico calculamos a sequência das somas parciais da série harmônica, tirando daí, informações interessantes, muitas vezes despercebidas por quem apenas considera a divergência da séria harmônica, sem notar realmente o que ocorre quando se analisa a sequência de sua soma parcial. Veremos que a divergência da série harmônica é muito lenta, mas, muito lenta mesmo!!! Veja:

Na tabela abaixo, listamos alguns valores da sequência das reduzidas de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, onde a terceira coluna $\Delta S_n$ apresenta a diferença entre duas linhas consecutivas da coluna anterior:

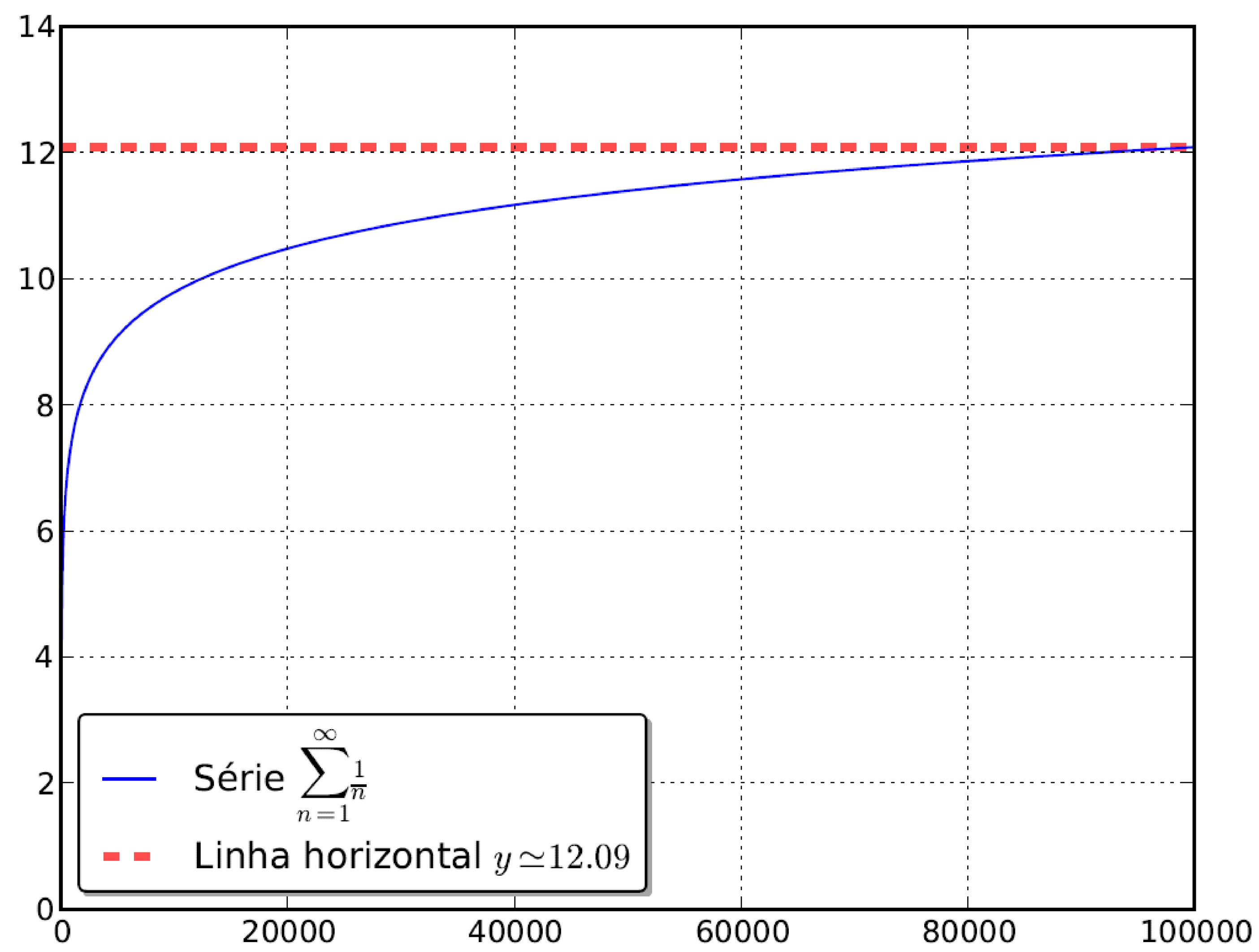
| $n$ | $S_n$ | $\Delta S_n$ |
|---|---|---|
| $10^7$ | 16,6953112659 | |
| $2\cdot 10^7$ | 17,3884584714 | 0,693147205 |
| $3\cdot 10^7$ | 17,7939235879 | 0,405465116 |
| $4\cdot 10^7$ | 18,0816056645 | 0,287682077 |
| $5\cdot 10^7$ | 18,3047492183 | 0,223143554 |
| $6\cdot 10^7$ | 18,4870707768 | 0,182321558 |
| $7\cdot 10^7$ | 18,6412214578 | 0,154150681 |
| $8\cdot 10^7$ | 18,7747528513 | 0,133531393 |
| $9\cdot 10^7$ | 18,8925358876 | 0,117783036 |
| $10^8$ | 18,9978964039 | 0,105360516 |

Na última linha consta que a diferença entre $S_{10^8}$ e $S_{9\cdot 10^7}$ é apenas $0{,}105360516$ (aproximadamente 1 decimo), mesmo após a soma de $10^7$ (10 milhões) de termos a partir de $S_{9\cdot 10^7}$.

Note que para alcançar o valor 19, aproximadamente, é necessário adicionar 100 milhões de termos.

## A DIVERGÊNCIA DA SÉRIE HARMÔNICA

Uma demonstração de que a série harmônica é divergente apareceu pela primeira vez, do ponto de vista histórico, relativamente tarde, e foi feita pelo Bispo Nicole Oresme (1320 - 1382) no século XIV [3]. A dificuldade está no fato de que o crescimento da série harmônica não explicita naturalmente sua divergência, pois, para termos muito grandes a soma tem crescimento cada vez menor. Ver gráfico.




## DEMONSTRAÇÃO DA DIVERGÊNCIA DA SÉRIE HARMÔNICA

Reagrupando os termos da série temos,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots.$$

Note que cada expressão entre parênteses é maior do que $\frac{1}{2}$. Por exemplo,

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}; \qquad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

Então,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots = \infty.$$

Logo, a série harmônica é divergente.

## REFERÊNCIAS


[1] ÁVILA, G. A Série Harmônica e a Fórmula de Euler-MacLaurin. *Revista Matemática Universitária,* São Paulo, n. 19, p.55-63, 1995.

[2] ÁVILA, G. As Séries Infinitas. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 30, p.10-17, 1996.

[3] EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* Campinas - SP: Editora da Unicamp, 2004.

[4] LIMA, E. L. *Curso de Análise Vol. 1*. ed. 12. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[5] SPIVAK, M. Calculus. ed 4. Publish or Perish, 2008.