UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL
TUTOR: PROF. DR. DANIEL CORDEIRO DE MORAIS FILHO
BOLSITAS: FELIPE BARBOSA CAVALCANTE
MATHEUS CUNHA MOTTA.
GRUPO PET-MATEMÁTICA

A conjectura de Goldbach e mais uma tentativa de demonstrá-la

Campina Grande – PB
28 de junho de 2013

Christian Goldbach (1690 – 1764) foi um matemático nascido na cidade de Königsberg, antigo reino da Prússia, situado no norte da Alemanha, porém dissolvido atualmente. Goldbach conheceu diversos matemáticos famosos como Leibniz (1646 – 1716), Leonhard Euler (1707 – 1783) e Nicolau I. Bernoulli (1695 – 1726). Após algumas viagens, Goldbach começou a lecionar na Academia das Ciências de São Petersburgo, Rússia. Tornou-se conhecido, principalmente, por seus estudos sobre somas infinitas, teoria das curvas e teoria das equações.

A partir de uma de suas correspondências com Euler, em 1742, surgiu um fantástico problema da Teoria dos Números, conhecido como "A Conjectura de Goldbach", este problema continua sem solução até os dias de hoje.

A Conjectura de Goldbach: *Todo número par maior do que 2 é soma de dois números primos*.

Muitos matemáticos, de vários lugares do mundo, trabalharam arduamente na tentativa de demonstrar essa conjectura. Tomás Oliveira e Silva, professor associado do Departamento de Eletrônica, Telecomunicações e Informática da Universidade de Aveiro, chegou a verificar, numericamente, este fato até o número $2 \cdot 10^{17}$. [1]

Recentemente uma editora ofereceu um prêmio de um milhão de dólares para quem conseguisse demonstrar essa conjectura. [2]

Iremos mostrar agora uma dessas tentativas infrutíferas, embora bastante interessante. Essa tentativa foi enviada, por e-mail, ao tutor Dr. Prof. Daniel Cordeiro de Morais Filho. O texto está na integra mesmo contendo alguns erros no referente à gramática, e no tocante à matemática.

"**Demonstração**: Vimos[1][sic] que $a_n = 2\text{n} + 2, n \in \mathbb{N}$, representa todos os números pares maiores que 2.

$a_n = 2n + 2 = n + 1 + n + 1 = (n + 1) + (n + 1) = (n + 1 + m) + (n + 1 - m)$.

Com $m < n + 1$, m par. (1)

Note que $n + 1$ é impar (2), pois não nos interessa saber o resultado quando $n + 1$ é par. Isso quer dizer que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(n + 1 + m)$ e $(n + 1 - m)$ são primos (VIDE PROVA ABAIXO)[sic], o que encerra a demonstração.

PROPOSIÇÃO: Seja x um numero[sic] composto impar[sic]. Então, existe $k \in \mathbb{N}$, k par, tal que $(x + k)$ e $(x - k)$ são primos.

DEMONSTRAÇÃO: Sabemos que $mmc(a, b) \cdot mdc(a, b) = ab$. Não será diferente com os números $(x + k)$ e $(x - k)$. Então, temos:

$$\begin{aligned} & mmc(x + k, x - k) \cdot mdc(x + k, x - k) = (x + k) \cdot (x - k) \\ \text{(3)} \quad & \Longrightarrow (x + k) \cdot (x - k) \cdot mdc(x + k, x - k) = (x + k) \cdot (x - k) \\ & \Longrightarrow mdc(x + k, x - k) = 1 \end{aligned}$$

Logo, $(x + k)$ e $(x - k)$ são primos entre si. Mas eles são impares; então, temos o caso particular de serem primos ambos , quer dizer, existe k tal que $(x + k)$ e $(x - k)$ são primos".[sic]

[1] O texto enviado começa dessa maneira, o a_n deve ser a representação da sequência 4,6,8,10,...,$2n + 2$,...

Observemos que inicialmente, vide (1), o autor da demonstração apenas cita que m é par não explicitando a que conjunto m pertence, mais ainda quando $n = 1$, temos $n + 1 = 2$ e como $m < n + 1$ e m par deveríamos ter um número par menor que 2.

No início da demonstração o n é tomado como qualquer $n \in \mathbb{N}$, em seguida, vide (2), utiliza apenas a hipótese de que $(n + 1)$ é impar, mas isso implica n ser sempre par, assim na demonstração apresentada estão excluídos os números pares da forma $2n + 2$, com n ímpar.

Notemos que em (3), é tomado que $mmc(x + k, x - k) = (x + k) \cdot (x - k)$, porém isso só ocorre quando esses números são primos entre si, o que é algo que deve ser mostrado. Como podemos ver no seguinte exemplo $\mathrm{mmc}(5{,}15) = 15 \neq 75 = 5 \cdot 15$, o que garante que a propriedade usada em (3) foi utilizada erroneamente.

Então como visto acima essa demonstração contém erros de lógica matemática, o que a torna inválida. Gostaríamos de observar que embora a demonstração da proposição, apresentada pelo autor da demonstração, contenha erros, mesmo com muito esforço não conseguimos encontrar um contraexemplo ou uma demonstração para esta proposição. Verificamos que a propriedade é verdadeira para todos os inteiros impares não primos até 100000, apesar dessa inspeção não ser suficiente para demonstrar o resultado, é o bastante para desencorajar a busca infrutífera por contraexemplos mentalmente. Para realizar esta inspeção, utilizamos o seguinte programa, que pode ser executado em Octave[2] (uma linguagem de programação capaz de computações numéricas) ou Matlab®.

Para usar o código abaixo basta copiar e colar em um editor de texto puro, como o notepad, salvar com a extensão .m (por exemplo conjectura.m) e executar.

```
n = 4;
while (n < 100000)
    m = 2*n + 1;
    c = 0;
    if (isprime(m) ~= 1)
        for k = 2:2:(m - 1)
            if (and(isprime(m - k) == 1, isprime(m + k) == 1))
                break
            end
        end
        if (c == ((m - 1) - 2)/2 + 1)
            m
            break
        end
    end
n = n + 1;
end
```

[2] Que pode ser obtido gratuitamente no endereço: http://octave.sourceforge.net/

Na verdade, utilizamos uma versão aperfeiçoada, que tira vantagem do crivo de Erastóstenes para checar se $n - k$ e $n + k$ são primos de modo muito mais rápido pré-computando uma grande lista de primos apenas uma vez.

Referencias bibliográficas

[1] http://pt.wikipedia.org/wiki/Conjectura_de_Goldbach; Consultado em 28/06/2013 às 10:00 hrs.

[2] DOXIADIS, Apostolos; Tio Petros e A Conjectura de Goldbach; Editoria 34, 2001.

[3] OCTAVE, http://octave.sourceforge.net/; Consultado em 28/06/2013 às 10:11 hrs.