# PRINCÍPIO DA REFLEXÃO E RELAÇÕES COM A CARDIOIDE, UM ESTUDO INTERDISCIPLINAR.

**Renato de Melo Filho (1); Lucas da Silva (2); Fábio Monteiro da Silva (3); Daniel Cordeiro de Morais Filho (4)**

**1 - Bacharelando em Matemática pela UFCG e Bolsista do Grupo PET-Matemática UFCG - renato.melo.fh@mat.ufcg.edu.br**
**2 - Licenciando em Matemática pela UFCG e Bolsista do Grupo PET-Matemática UFCG - lucastri09@gmail.com**
**3 - Licenciando em Matemática pela UFCG e Bolsista do Grupo PET-Matemática UFCG – fabio.monteiro2011@gmail.com**
**4 - Tutor do Grupo PET-Matemática UFCG - daniel@mat.ufcg.edu.br**

## INTRODUÇÃO

A interdisciplinaridade é hoje fundamental para o ensino e aprendizagem de qualquer disciplina. Muitos autores concordam com esse posicionamento. Na visão de [Moraes] (2002), a realidade é complexa, ela requer um pensamento abrangente, multidimensional, capaz de compreender a complexidade do real e construir um conhecimento que leve em consideração essa mesma amplitude. Daí podemos inferir que a interdisciplinaridade permite uma compreensão múltipla da realidade, concedendo significado a conhecimentos vistos como abstratos. Portanto, o presente trabalho se propõe a discutir o princípio físico da reflexão óptica, usando uma aplicação de forma interessante, a partir da construção de uma curva conhecida como cardioide.

## METODOLOGIA

O trabalho se baseia em uma pesquisa de caráter bibliográfico cuja principal referência é o livro soviético traduzido para o Inglês “Straight Lines and Curves”. Também foram realizadas pesquisas complementares em livros de física e matemática e em artigos disponíveis na internet.

## RESULTADOS E CONCLUSÕES

Quando se estuda as ondas luminosas dois importantes fenômenos se sobressaem: A refração e a reflexão da luz, ilustrados abaixo:

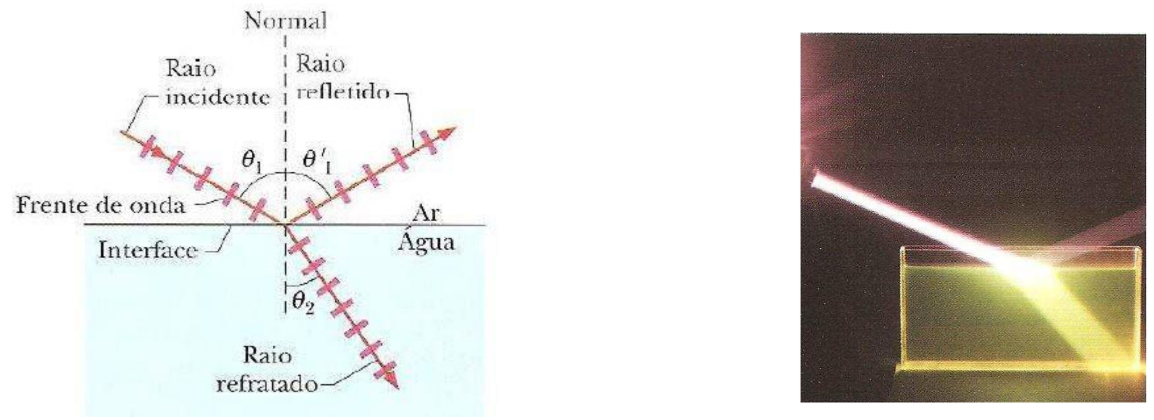


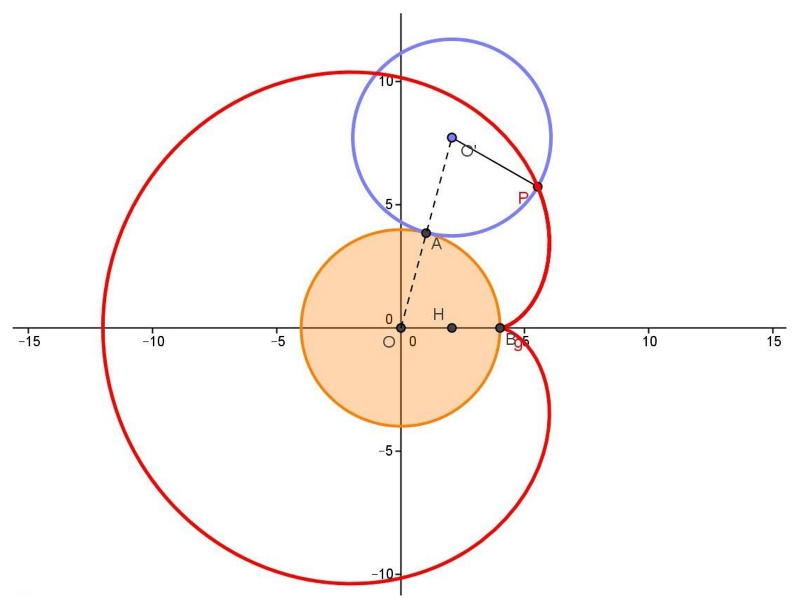

**Figura 1:** Reflexão e Refração da luz.

Neste trabalho, será utilizada apenas a lei de reflexão:

**Lei da Reflexão:** O raio refletido está no plano de incidência e tem um ângulo de reflexão igual ao ângulo de incidência. Na figura anterior isso significa que:

$$\theta_1 = \theta_1{}'$$

Existiria alguma relação entre esse princípio e a curva cardioide? Para responder à pergunta, é necessário conhecer melhor esse objeto matemático.



Descreve-se a cardioide como a curva gerada por um ponto P fixado a um círculo λ que rola, sem deslizar, sobre outro círculo θ de mesmo raio. A figura 2 ilustra uma cardioide.

**Figura 2:** A Cardioide.

Existiria alguma relação entre essa curva e a reflexão da luz mencionada acima? A figura 3 abaixo ilustra esse fato:

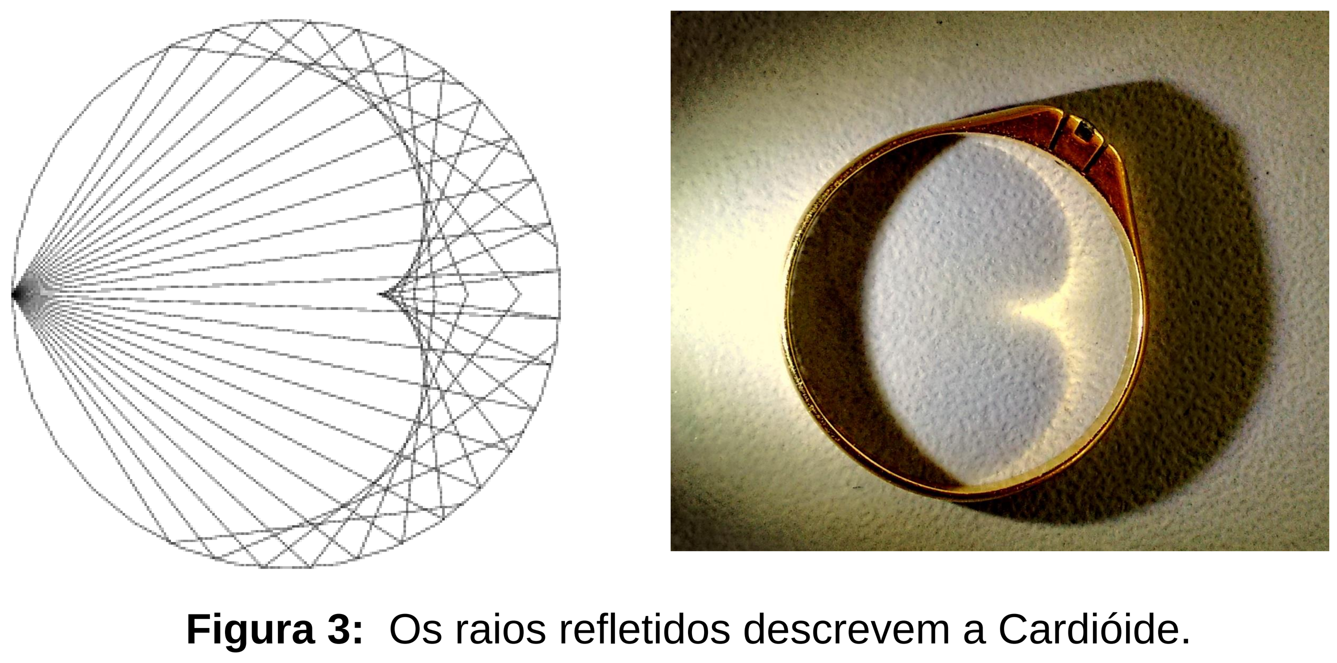
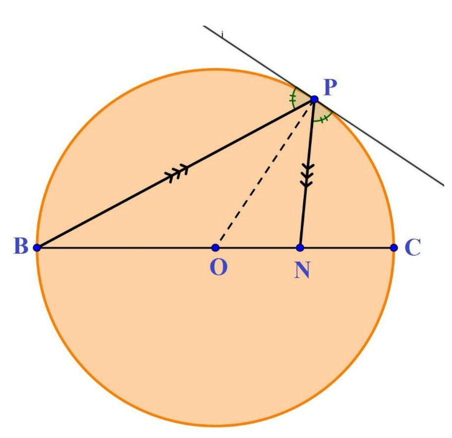


**Figura 3:** Os raios refletidos descrevem a Cardióide.

A partir da figura 3 nota-se que o feixe de luz produz incrivelmente uma cardioide no interior da circunferência. Perceba que todos os raios refletidos são tangentes à cardioide. Neste ponto, faz-se necessário a formalização matemática da relação entre a figura formada e a cardioide. Para isso utilizar-se-á o seguinte resultado, que pode ser encontrado em Vasiliev e Gutenmacher, 1980 :

**Teorema dos dois Círculos:** Seja α um círculo de raio r que rola, sem escorregar, dentro de um círculo β de raio 2r, tais que ambos rolam sobre uma superfície λ. Então o invólucro de todas as posições do diâmetro do círculo maior será o lugar geométrico descrito por um ponto M fixado na circunferência menor

Com esse resultado e a definição de cardioide dada acima já é possível demonstrar que ela pode ser obtida como o invólucro dos raios refletidos sobre uma circunferência. Para isso considere a figura 4 abaixo:




Suponha um raio qualquer BP do feixe de luz. Este é emitido de uma fonte localizada em B sendo refletido em um ponto arbitrário P. O raio refletido intersecta o ponto N sobre o diâmetro BC. Logo:

$$P\hat{N}C = P\hat{B}N + B\hat{P}N$$
$$P\hat{N}C = P\hat{B}N + 2P\hat{B}N = 3P\hat{B}N$$

**Figura 4:** Reflexão de um raio de luz

Por definição, a velocidade angular é a taxa com que o ângulo varia em relação ao tempo, ou seja, $\omega = \Delta\theta/\Delta t$. Disso, segue que ao rotacionar-se o raio BP em torno do ponto B com uma velocidade angular ω, o raio refletido será rotacionado com uma velocidade angular de 3ω em relação ao diâmetro BC. Ao mesmo tempo, o ponto de reflexão P irá rolar ao longo da circunferência de diâmetro BC com uma velocidade angular de 2ω (Observe que $P\hat{O}N = 2P\hat{B}N$). Objetiva-se mostrar que o segmento PN (o raio refletido) é sempre tangente a cardioide, para assim, obtê-la por definição. Role uma circunferência de raio 2/3(OB), cujo centro é o ponto móvel P, ao longo de uma circunferência de raio 1/3(OB) e centro O (Considerando que o diâmetro KL está, em um momento inicial, sobre o diâmetro BC).

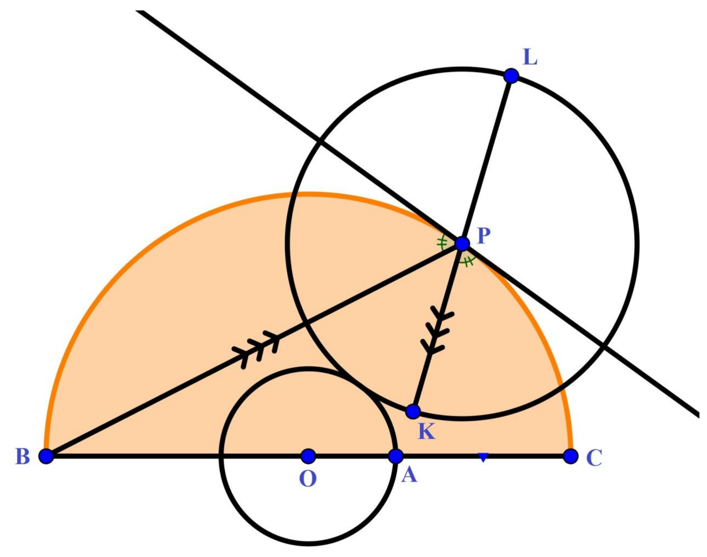



**Figura 5:** Construção da Cardióide.

Se o centro P da circunferência em movimento rola com uma velocidade angular de 2ω, então diâmetro KL é rotacionado com uma velocidade angular de 3ω em torno do diâmetro BC. Veja o porquê:

É possível enxergar a velocidade linear (Também conhecida como velocidade tangencial) do ponto P de duas formas

$$V_P = OB.2\omega$$
$$V_P = \frac{2OB}{3}\omega_{KL} \Rightarrow \omega_{KL} = 3\omega$$

Pelo teorema dos dois círculos, o invólucro das posições ocupadas pelo diâmetro KL é sempre tangente à trajetória descrita pelo ponto M, o qual pertence a uma circunferência de raio 1/3(OB). Como há duas circunferências de mesmo raio, uma fixa e a outra rolando sobre a primeira, então, por definição, o lugar geométrico descrito pelo ponto M é uma Cardioide, como ilustra a figura 5.

## PRINCIPAIS REFERÊNCIAS

MORAES, M. C. O paradigma educacional emergente. São Paulo: Papirus, 2002.

JAPIASSU, H. Interdisciplinaridade e patologia do saber. Rio de Janeiro: Imago, 1976.SWETZ,

VASILYEV, N.B; GUTENMACHER, V.L. Straight Lines and Curves. Tradução de Anjan Kundu. Moscou: Mir Publishers Moscow, 1980.

WALKER, J. et al. Fundamentos de Física, Volumes 1 e 4. 08.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009

Financiado pelo FNDE