VII BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA MATEMÁTICA
MACEIÓ - ALAGOAS

UMA DEMONSTRAÇÃO ELEGANTE DE QUE $\mathbb{R}^n$ NÃO É HOMEOMORFO A $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

ARTHUR CAVALCANTE CUNHA

CUNHA, A. C.; SILVA, W. F.;
DE MORAIS FILHO, D. C. (Orientador)
Universidade Federal de Campina Grande

arthur@dme.ufcg.edu.br; weslley@dme.ufcg.edu.br ; daniel@dme.ufcg.edu.br

Definição: Dois subconjuntos X e Y do $\mathbb{R}^n$ são ***homeomorfos*** quando existe uma bijeção contínua $f: X \longrightarrow Y$, com inversa $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ também contínua. Uma função f desse tipo chama-se um homeomorfismo entre os conjuntos X e Y.

Conjuntos homeomorfos são indistinguíveis do ponto de vista da Topologia e uma importância principal desse conceito é que os homeomorfismos preservam os chamados **invariantes topológicos.**

Por importância desse conceito, uma das perguntas principais da Topologia é "Dados dois conjuntos, eles são ou não homeomorfos?"

Vejamos alguns resultados que serão necessários em nossa demonstração:

Lema 1: Se $\varphi: X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo, então $\varphi^{-1}(K) \subset X$ é compacto sempre que $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto. Em outras palavras, a imagem inversa pela φ de qualquer compacto é ainda um compacto.

Lema 2: Seja $\varphi: X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função com a seguinte propriedade: para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, o conjunto $\varphi^{-1}(K)$ é compacto. Então, $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} \|\varphi(x)\| = \infty$, onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana usual.

Lema 3: Suponha $\varphi: X \subset \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ cumprindo a hipótese do lema 2. Então, $\lim\limits_{x \to 0} \|\varphi(x)\| = \infty$, onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana usual.

Teorema: $\mathbb{R}^n$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.

Demonstração: Suponha, por contradição, que exista um homeomorfismo $\varphi: \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Logo, pelo lema 1, podemos concluir que $\varphi^{-1}(K) \subset \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ é compacto sempre que $K \subset \mathbb{R}^n$ for compacto.

Considere agora a esfera unitária $S = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x\| = 1\}$. Temos $\varphi(S)$ compacto e, portanto, limitado. Logo, existe $\rho > 0$ tal que para $\omega \in \varphi(S)$ tem-se $\|\omega\| \leq \rho$.

Por outro lado, pelos lemas 2 e 3, temos $\lim_{\|x\| \to \infty} \|\varphi(x)\| = \infty$ e $\lim_{x \to 0} \|\varphi(x)\| = \infty$. Assim, devem existir $y \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ tal que $\|y\| > 1$ com $\|\varphi(y)\| > \rho$ e $z \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ tal que $\|z\| < 1$ com $\|\varphi(z)\| > \rho$.

Considerando $A = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x\| > \rho\}$, temos A conexo por caminhos e portanto existe uma curva contínua $\gamma: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo $\gamma(0) = \varphi(z)$, $\gamma(1) = \varphi(y)$ e

$$\|\gamma(t)\| > \rho, \qquad \forall\, t \in [0,1].$$

Definindo a curva $\beta = \varphi^{-1} o\, \gamma: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, segue que β é contínua e, além disso,

$$\|\beta(0)\| = \|z\| < 1 \quad \text{e} \quad \|\beta(1)\| = \|y\| > 1.$$

Pelo teorema do valor intermediário, deve existir $t_0 \in (0,1)$ tal que $\|\beta(t_0)\| = \|\varphi^{-1}(\gamma(t_0))\| = 1$, donde $\varphi^{-1}\big(\gamma(t_0)\big) \in S$. Assim, $\gamma(t_0) \in \varphi(S)$ e daí

$$\|\gamma(t_0)\| \leq \rho,$$

o que é um absurdo!!

Referências:
[1] LIMA , E. L. *Espaços Métricos*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1983. Projeto Euclides.
[2] MUNKRES, J. R. *Topología*. 2. ed. Madrid: Prentice Hall, 2002.
[3] RIBEIRO, T. C. $\mathbb{R}^n$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}^n - \{0\}$: uma prova elementar. *Matemática Universitária*, Rio de Janeiro, n. 37, p. 33-34, 2004.