



ARQUIMEDES E O VOLUME DA ESFERA

¹ da Silva, L., ² Rocha, S. L., ³ Alves, E. C. A., ⁴ de Moraes Filho, D.C.

¹ UFPA/CCT/UAMAT/ Bolsista do PET- MATEMÁTICA-UFPA - e-mail: lucastr09@gmail.com

² UFPA/CCT/UAMAT/ Bolsista do PET- MATEMÁTICA-UFPA - e-mail: lucass@mat.ufpa.edu.br

³ UFPA/CCT/UAMAT/ Bolsista do PET- MATEMÁTICA-UFPA - e-mail: emanuelc@mat.ufpa.edu.br

⁴ UFPA/CCT/UAMAT/Professor da UAMAT e Tutor do grupo PET- MATEMÁTICA-UFPA – e-mail: daniel@mat.ufpa.edu.br

INTRODUÇÃO

Arquimedes, em um de seus estudos, buscou conhecer o volume da esfera. Sabendo a relação entre o cone e o cilindro que o circunscreve, ele determinou a relação entre o cilindro e a esfera nele inscrita. O raciocínio que foi usado para obter os resultados deste estudo só foi exposto em 1906, pelo professor de Filologia J. L. Heiberg.

O professor tomou conhecimento, por meio de um artigo, da existência de um manuscrito de conteúdo religioso em Constantinopla. Mas por baixo dos textos, havia uma escritura de natureza matemática. O pesquisador adquiriu o documento e realizou uma de suas maiores descobertas: um palimpsesto (vide Imagem 1), pergaminho cujo conteúdo original fora raspado para dar lugar a outro, contendo mais de 200 páginas de obras de Arquimedes. Entre elas destaca-se “O Método”.

Até então, em muitos trabalhos de Arquimedes, havia apenas teoremas apresentados em sua forma final, sem que se soubesse qual tinha sido o caminho utilizado para obter o resultado principal. No entanto, “O Método” mudou essa situação, pois nele é mostrado esse caminho.



Imagem 1

OBJETIVOS

Este trabalho visa apresentar o cálculo utilizado por Arquimedes para encontrar o volume de uma esfera. Assim como o método físico utilizado em demonstrações de vários de seus teoremas e, particularmente, no do nosso trabalho.

METODOLOGIA

Derivamos nosso trabalho de uma das atividades realizadas pelo Grupo PET-Matemática da UFPA. Além de uma pesquisa bibliográfica, ocorreram exposições orais ao tutor.

RESULTADOS E CONCLUSÕES

O Método do Equilíbrio

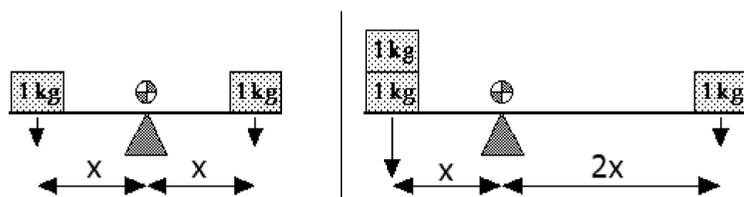


Imagem 2

$$P_1 \cdot x_1 = P_2 \cdot x_2$$

Cálculo do Volume da Esfera

Consideremos ABCD um círculo, AFG um triângulo (retângulo em A) isósceles, EFGH um retângulo (Vide Imagem 3), e uma reta MN, perpendicular a AC, cortando este segmento no ponto Q. Note que QP=AQ por semelhança de triângulo e que o triângulo OAQ é retângulo, daí

$$(QP)^2 + (QO)^2 = (AQ)^2 + (QO)^2 = (AO)^2$$

Por outro lado, o triângulo OAC é retângulo em O e OQ é perpendicular a AC. Logo,

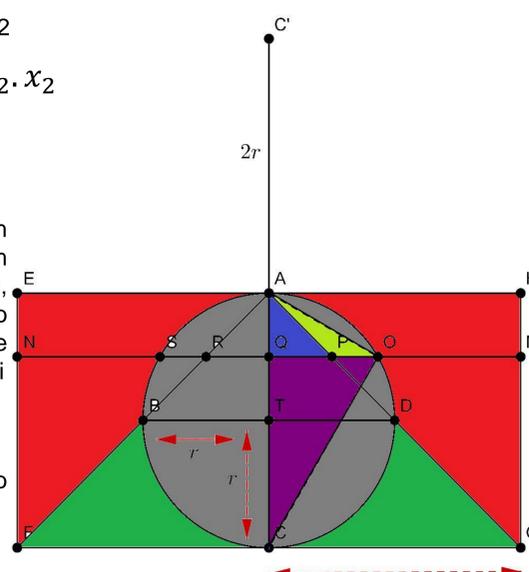
$$(AO)^2 = (AQ)(AC).$$


Imagem 3

Então,

$$(QP)^2 + (QO)^2 = (AQ)(AC).$$

Note ainda que QM = AC e tome AC' = AC por construção. Logo,

$$\frac{QP^2 + QO^2}{QM^2} = \frac{(AQ)(AC)}{QM^2} = \frac{AQ}{AC} = \frac{AQ}{AC'}.$$

Portanto,

$$\frac{\pi QP^2 + \pi QO^2}{\pi QM^2} = \frac{AQ}{AC'} \text{ ou}$$

$$(\pi QP^2 + \pi QO^2)AC' = (\pi QM^2)AQ \quad (1).$$

Podemos interpretar (1) como traduzindo o equilíbrio de pesos (Centros de massa dos círculos πPQ^2 , πOQ^2 e πQM^2) em uma alavanca QC' com fulcro em A (Imagem 4).

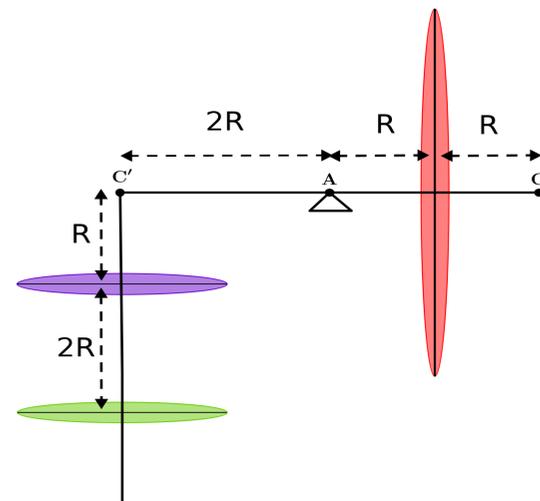


Imagem 4

Consideremos que a soma das áreas geradas a partir dos segmentos PQ, OQ e QM gerem, respectivamente, um cone, uma esfera e um cilindro, como mostra a imagem 5.

$$(CM_{esfera} + CM_{cone}) \cdot AC' = CM_{cilindro} \cdot AQ \quad (2).$$

Daí,

$$\frac{v_{cone} + v_{esfera}}{V_{cilindro}} = \frac{AQ}{AC'} = \frac{1}{2} \quad (3).$$

Partindo de que $V_{cilindro} = 3V_{cone}$ e de (3), encontramos que:

$$\frac{v_{cone} + v_{esfera}}{3v_{cone}} = \frac{1}{2} \rightarrow v_{esfera} = \frac{v_{cone}}{2}.$$

Daí, encontramos que a relação desejada é:

$$V_{esfera} = \frac{8}{2} v_{cone} \text{ ou } V_{esfera} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

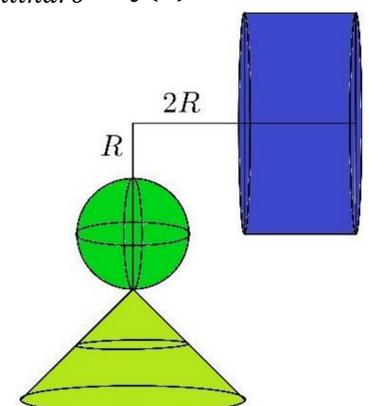


Imagem 5

Na época, não era concebido a ideia de infinito. Daí, Arquimedes utilizava a soma de forma finita, mas por traz já havia uma noção de integração. Além disso, Arquimedes tinha intuições da física e usou-as para a dedução dos volumes por meio da ideia de centro de massa e do método da balança.

REFERÊNCIAS

- PLUTARCO. *As Vidas dos Homens Ilustres*. Editora das Américas, São Paulo, vol. 3.
- ARQUIMEDES, “Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas.” In: A. K. T. Assis, *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca* (Apeiron, Montreal, 2008), págs. 222-240. Tradução de A. K. T. Assis da obra de Arquimedes. Disponível em: <<http://www.ifi.unicamp.br/~assis/papers.htm>>. Acesso em: 30 Ago. 2015.
- ÁVILA, G. S. S.. *RPM 10 - Arquimedes, a esfera e o cilindro*. Disponível em <<http://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/avila/rpm10.pdf>>. Acessado em 28 Ago. 2015.