Universidade Federal de Campina Grande
Unidade Acadêmica de Matemática

Semana de Matemática

Propriedades focais das Cônicas e a Cardióide. O que uma coisa tem a ver com a outra?

[1] Fábio M. Da Silva, [2] Lorynne de S. Santos, [3] Renato de M. Filho, [4] Daniel C. de M. Filho (Orientador)

[1] UFCG/CCT/UAMat/ Bolsista PET-Matemática UFCG – e-mail: fabio.monteiro2011@gmail.com,
[2] UFCG/CCT/UAMat/ Bolsista PET-Matemática UFCG – e-mail: lorynnessousa@gmail.com
[3] UFCG/CCT/UAMat/ Bolsista PET-Matemática UFCG – e-mail: renato.melo.fh@gmail.com
[4] UFCG/CCT/UAMat/Professor UAMAT – e-mail: demoraisfilho@gmail.com

INTRODUÇÃO

O conhecimento acerca das propriedades focais das cônicas foi, e ainda é, devido as suas conhecidas aplicações, bastante importante tanto para a Matemática quanto para as áreas nas quais tem sido aplicada, como a Física. Sabemos que a circunferência é uma particularização de uma cônica e, deste modo, será que não podemos pensar em alguma "propriedade focal" para a circunferência? Por exemplo, se de um ponto da circunferência partem raios luminosos que a tocam em pontos arbitrários, qual será a figura formada?

OBJETIVOS

O objetivo do nosso trabalho é mostrar que o envólucro dos raios refletidos sobre uma circunferência, quando o ponto de luz encontra-se fixo à mesma, descreve uma Cardióide. Em outras palavras, vamos demonstrar que os raios refletidos são sempre tangentes à Cardióide.

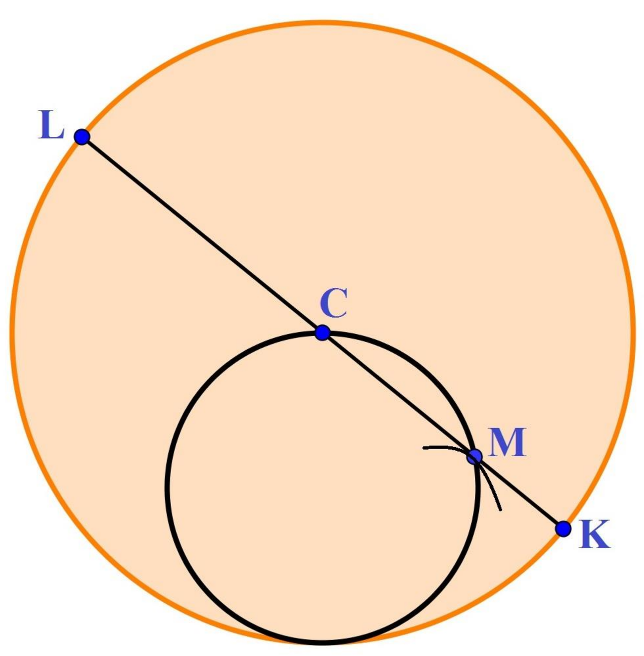
METODOLOGIA

O presente trabalho foi motivado a partir do problema apresentado em [1], sendo realizadas pesquisas em livros e em artigos disponíveis na internet.

RESULTADOS E CONCLUSÕES

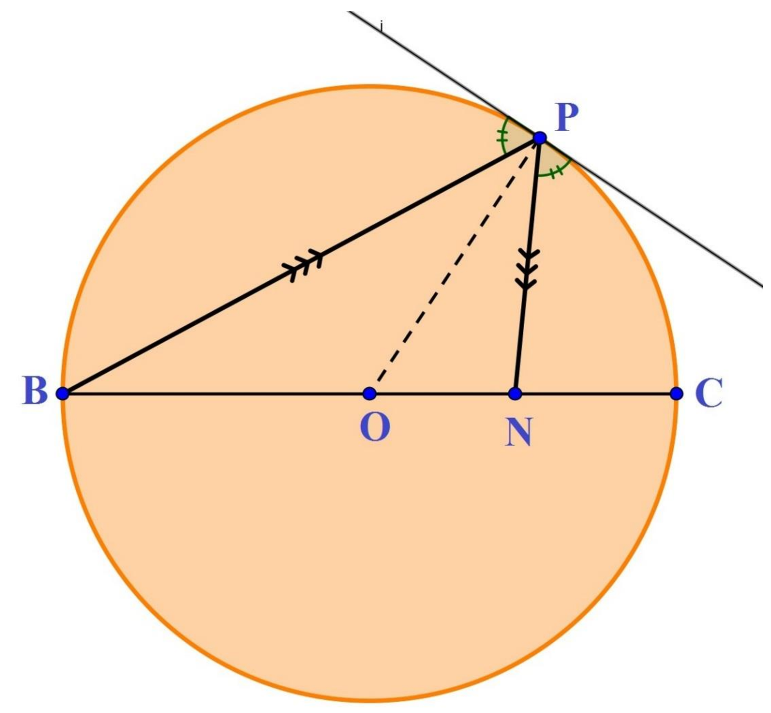
Resultado Utilizado: Teorema dos dois Círculos

Seja um círculo δ de raio r rolando, sem escorregar, dentro de um círculo γ de raio $2r$. Ambos rolam sobre uma superfície ρ. Admitiremos sem demonstrar que o envólucro de todas as posições do diâmetro do círculo maior será o lugar geométrico descrito por um ponto M que está fixo à circunferência menor.



A Cardióide como o envólucro dos raios refletidos

É dado um ponto B fixo a uma circunferência. Deste ponto partem raios de luz que tocam a circunferência em pontos arbitrários e são refletidos pela mesma. Vamos provar que o envólucro dos raios refletidos é uma cardióide.



Demonstração:

Suponha que o raio $\overline{BP}$ é refletido no ponto P alcançando o ponto N sobre o diâmetro $\overline{BC}$

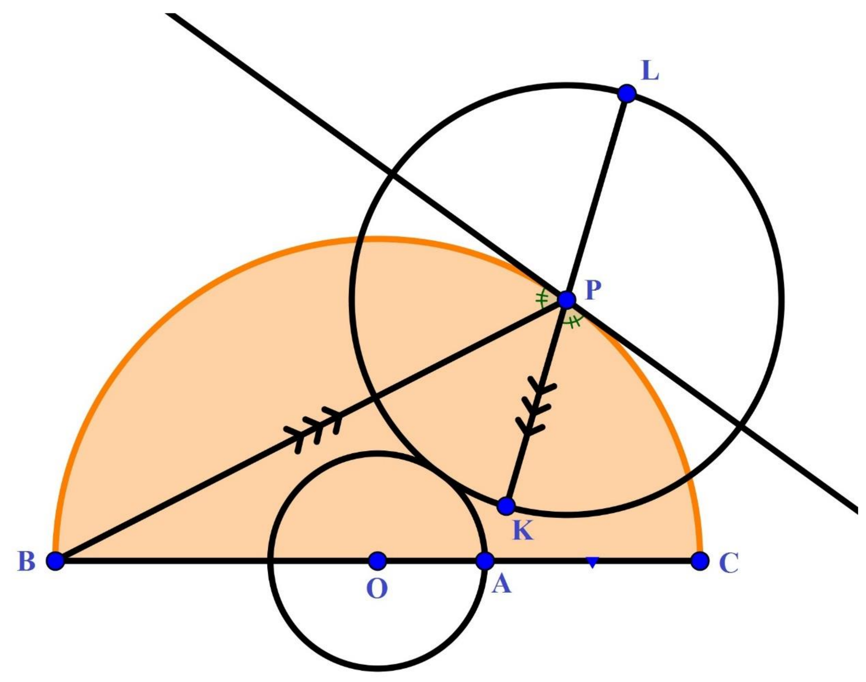
Então

$$P\hat{N}C = B\hat{P}N + P\hat{B}N$$
$$P\hat{N}C = P\hat{B}N + 2P\hat{B}N = 3P\hat{B}N$$

Assim, rotacionando o raio $\overline{BP}$ com uma velocidade angular ω, o raio refletido será rotacionado com uma velocidade angular de 3ω. Ao mesmo tempo, o ponto de reflexão P irá rolar ao longo da circunferência de diâmetro BC com uma velocidade angular de 2ω (observe o ângulo $P\hat{O}N$). Nosso objetivo é mostrar que o segmento $\overline{PN}$ (o raio refletido) é sempre tangente a cardióide e dessa forma desenhá-la. Para isso realizemos a seguinte construção.

Rolemos uma circunferência de raio $\frac{2\overline{OB}}{3}$ e centro no ponto móvel P ao longo de uma circunferência de raio $\frac{\overline{OB}}{3}$ e centro O (Considerando que o diâmetro $\overline{KL}$ está, em um momento inicial, sobre o diâmetro $\overline{BC}$).

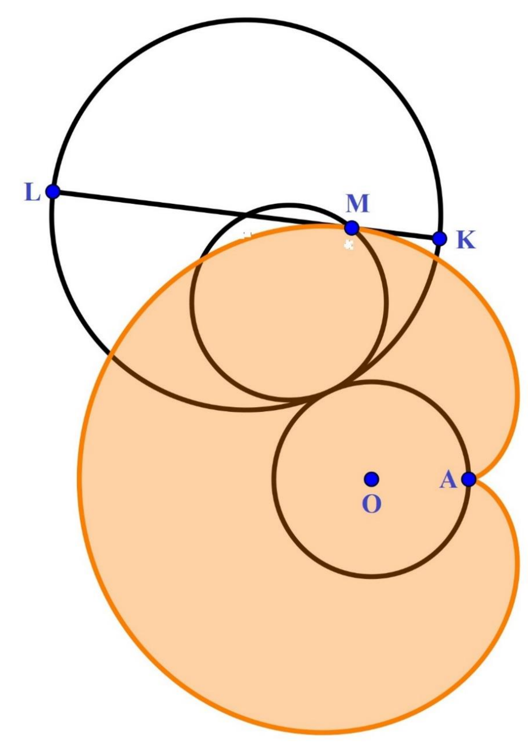
Se o centro P da circunferência em movimento rola com uma velocidade angular de 2ω, então o diâmetro $\overline{KL}$ é rotacionado com uma velocidade angular de 3ω. Veja por quê:



Podemos enxergar a velocidade linear do ponto P de duas formas

$$V_P = OB.2\omega$$
$$V_P = \frac{2\overline{OB}}{3}.\omega_L,\ logo:\ \omega_{KL} = 3\omega$$

Pelo teorema dos dois círculos, o envólucro das posições ocupadas pelo diâmetro $\overline{KL}$ é sempre tangente ao lugar geométrico descrito pelo ponto M o qual pertence a uma circunferência de raio $\frac{\overline{OB}}{3}$.



Como temos duas circunferências de mesmo raio, uma fixa e a outra rolando sobre a primeira, então o lugar geométrico descrito pelo ponto M é uma Cardióide.

REFERÊNCIAS

1. VASILYEV, N.B; GUTENMACHER, V.L. *Straight Lines and Curves*. Tradução de Anjan Kundu. Moscou: Mir Publishers Moscow,1980.
2. John Baez, Rolling Circles and Balls. Disponível em <http://math.ucr.edu/home/baez/rolling/rolling_1.html>. Acesso em 10 de Outubro de 2015
3. SIMMONS, G.: *Cálculo com Geometria Analítica*, Volume 2. McGraw-Hill, 1987.
4. WALKER, Jearl et al. *Fundamentos de Física,* Volume 1. 08.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.