A Circunferência dos Nove Pontos

DE MORAIS FILHO, D. C. (Tutor PET-Matemática-UFCG)

MELO FILHO, R. (Bolsista PET-Matemática-UFCG)

SOUSA, T. A. (Bolsista PET-Matemática-UFCG)

Universidade Federal de Campina Grande

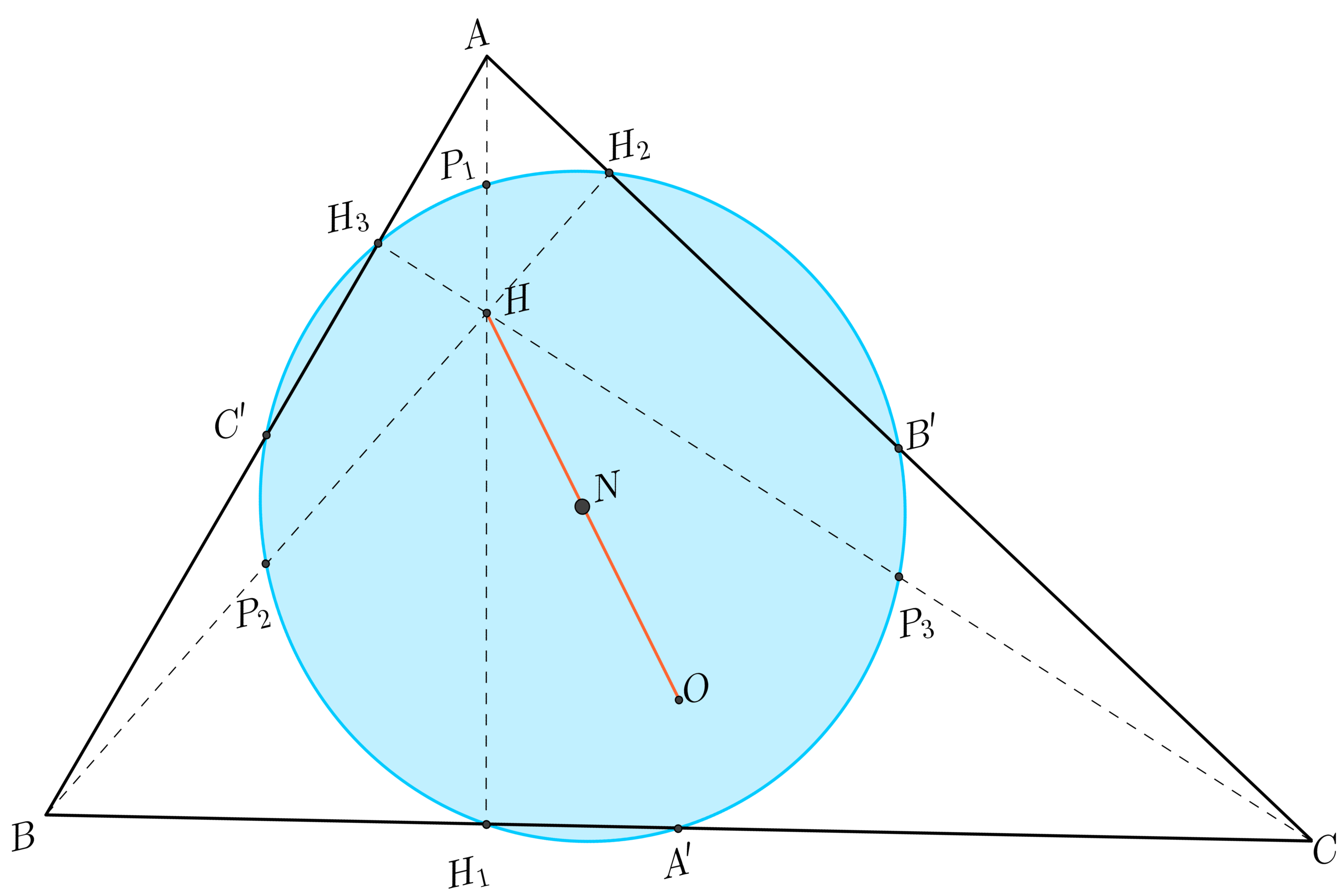
daniel@mat.ufcg.edu.br; renato.melo.fh@gmail.com; tiagoalves@mat.ufcg.edu.br

INTRODUÇÃO

Leonhard Euler (1707 - 1783) foi um matemático incansável, produziu cerca de 886 trabalhos em diversas áreas da matemática, tais como cálculo, geometria e grafos. Além disso, também ficou famoso por seus trabalhos em mecânica, óptica e astronomia. Neste trabalho abordaremos um teorema que lhe foi atribuído [1], conhecido como Circunferência dos Nove Pontos, que é considerada a primeira circunferência a ter um nome próprio depois da era grega.

Leonhard Euler sabia algumas propriedades dessa circunferência, mas foi o matemático francês Poncelet (1788 – 1867) que publicou, em 1821, um artigo demonstrando que para todo triângulo é possível encontrar uma circunferência passando pelos pontos médios dos lados, os pés das alturas e os pontos médios dos segmentos que unem os vértices do triângulo ao ortocentro, vide Figura ao lado.

A geometria que fascinou e até divertiu nossos precursores da Grécia antiga foi o que nos motivou a escolher a Circunferência dos Nove Pontos como tema deste trabalho.



OBJETIVOS

Nosso objetivo é apresentar o Teorema da Circunferência dos Nove pontos e suas propriedades.

METODOLOGIA

Este trabalho é proveniente de uma das atividades realizadas pelo Grupo PET - Matemática UFCG. Nossa pesquisa bibliográfica partiu principalmente do estudo do livro Geometria II[3] e da leitura da Revista do Professor de Matemática[2].

RESULTADOS AUXILIARES

1. Teorema Base Média de um Triângulo: Seja ABC um triângulo qualquer. Se M e N são pontos médios dos lados AB e AC, então MN // BC e MN = $\frac{1}{2}BC$.

2. Dadas duas retas e uma terceira interceptando-as, se a soma dos ângulos colineares for 180º, então elas são paralelas;

3. Todo trapézio isósceles é inscritível;

4. Três pontos determinam univocamente uma circunferência;

5. Dada uma circunferência, o ponto de intersecção das mediatrizes de duas cordas quaisquer é o centro da circunferência;

6. Baricentro, ortocentro e circuncentro de um triângulo são colineares, e a reta que passa por eles é denominada Reta de Euler.

7. O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

TEOREMA

Seja ABC um triângulo de circuncentro O e de ortocentro H. Então os pontos médios dos lados, os pés das alturas e os pontos médios dos segmentos que ligam o ortocentro aos vértices estão em uma circunferência cujo centro é o ponto médio do segmento OH e cujo raio é a metade do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

Demonstração:

1. O Trapézio 1, A'B'C'H_1 é Isósceles e, portanto, inscrito em uma circunferência Ω.

2. O trapézio 2, A'C'B'H_2 é inscrito em uma circunferência Ω_1. Pelo resultado 4, $\Omega = \Omega_1$. Analogamente o trapézio 3, A'B'C'H_3 é também inscrito em Ω.

3. Semelhantemente, analisando o triângulo ABH notamos que o trapézio 4, P_1P_2C'H_3 é isósceles, inscrito em uma circunferência Ω''.

4. Os trapézios 5, H_1P_1C'P_2 e 6, $P_2H_2P_1$C' são inscritos em Ω''. Como Ω'' passa em H_1, H_2 e H_3 então Ω'' = Ω.

5. Analogamente, analisando o triângulo *ACH*, Ω também passa por P_3. Logo existe uma circunferência que passa por A', B', C', H_1, H_2, H_3, P_1, P_2 e P_3.

6. Observando os trapézios retângulos 6, H_1A'OH e 7, C'H_3HO e utilizando o resultado 5, obtemos que N é o centro de Ω.

7. Pelo triângulo 1, HOC, e pelo resultado 1, NP_3 é base média relativa ao lado OC, que é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Assim $NP_3 = \frac{OC}{2}$

REFERÊNCIAS

[1] FREITAS, V. P. Alguns Teoremas Clássicos da Geometria Sintética e Aplicações. 2013. 71 f.. Dissertação (PROFMAT) – Instituto de Ciências Exatas, UFAM, Manaus, 2013.

[2] PINHEIRO, P. R. O Círculo dos Nove Pontos, Revista do Professor de Matemática, São Paulo: SBM, 14, pp 49 - 52, 1989.

[3] MORGADO, A.C.; WAGNER, E.; JORGE, M. Geometria II. Fortaleza-CE: VestSeller, 2009. 286 p.