Universidade Federal de Campina Grande
Unidade Acadêmica de Matemática

Semana de Matemática

Uma incrível EDO

Geovany Fernandes Patricio (Bolsista PET-Matemática)[1], Daniel Cordeiro de Morais Filho*(Tutor PET-Matemática)* [2]

[1] UFCG/CCT/UAMAMT/ Bolsista do PET - Matemática - UFCG – email: geovany@dme.ufcg.edu.br

[2] UFCG/CCT/UAMAT/Professor da UAMAT – email: daniel@mat.ufcg.edu.br

INTRODUÇÃO

Estamos acostumados a ver na Natureza vários fenômenos modelados por funções contínuas, soluções de equações diferenciais ordinárias (EDO's). Desde os primeiros anos de estudo do Cálculo, aprendem-se a resolver EDO's vinculadas a essas modelagens e o procedimento pragmático é: dada uma EDO, encontra-se a solução da equação, que é uma determinada função contínua.

Em sentido contrário a esse método pragmático, em 1981, Lee. A. Rubel (1928-1995), da Universidade de Illinois, destacado por suas contribuições em computação analógica, surpreendeu a muitos por exibir explicitamente uma EDO de quarta ordem, com uma propriedade admirável: qualquer função contínua real, definida na reta, pode ser aproximada, com a precisão que quisermos, por soluções desta EDO.

OBJETIVOS

Neste trabalho vamos apresentar um teorema que nos fornece um resultado fascinante e excepcional sobre uma EDO especial.

METODOLOGIA

Para o desenvolvimento deste trabalho foi necessário fazer leitura de textos em inglês bem como pesquisas em diversos livros e sites assim como a orientação do tutor e exposições do conteúdo para o mesmo.

RESULTADOS E CONCLUSÕES

$$3y'^4y''y''''^2 - 4y'^4y'''^2y'''' + 6y'^3y''^2y'''y'''' + 24y'^2y''^4y'''' - 12y'^3y''y'''^3 - 29y'^2y''^3y'''^2 + 12y''^7 = 0 \quad (*)$$

Para exibirmos tal EDO primeiramente consideremos as funções,

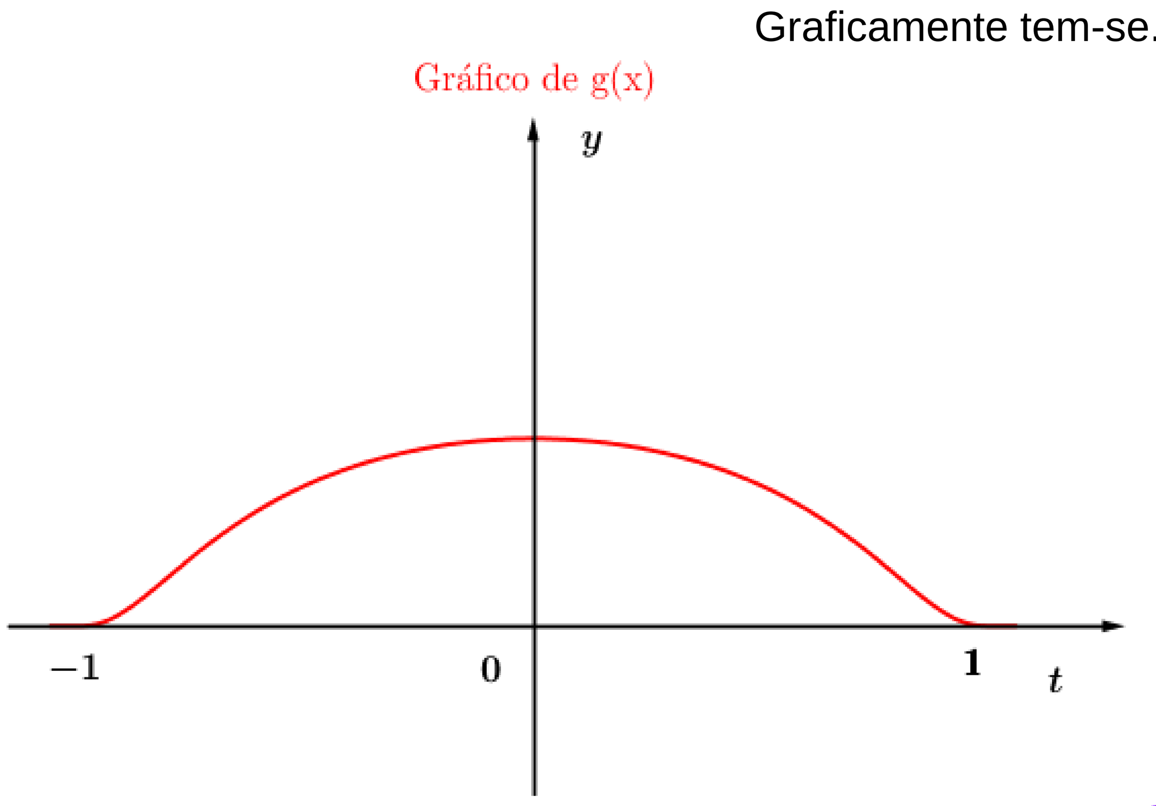
$$g(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(1-t^2)}}, & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases} \quad e \quad f(t) = \int_{-1}^{t} g(\zeta)d\zeta$$

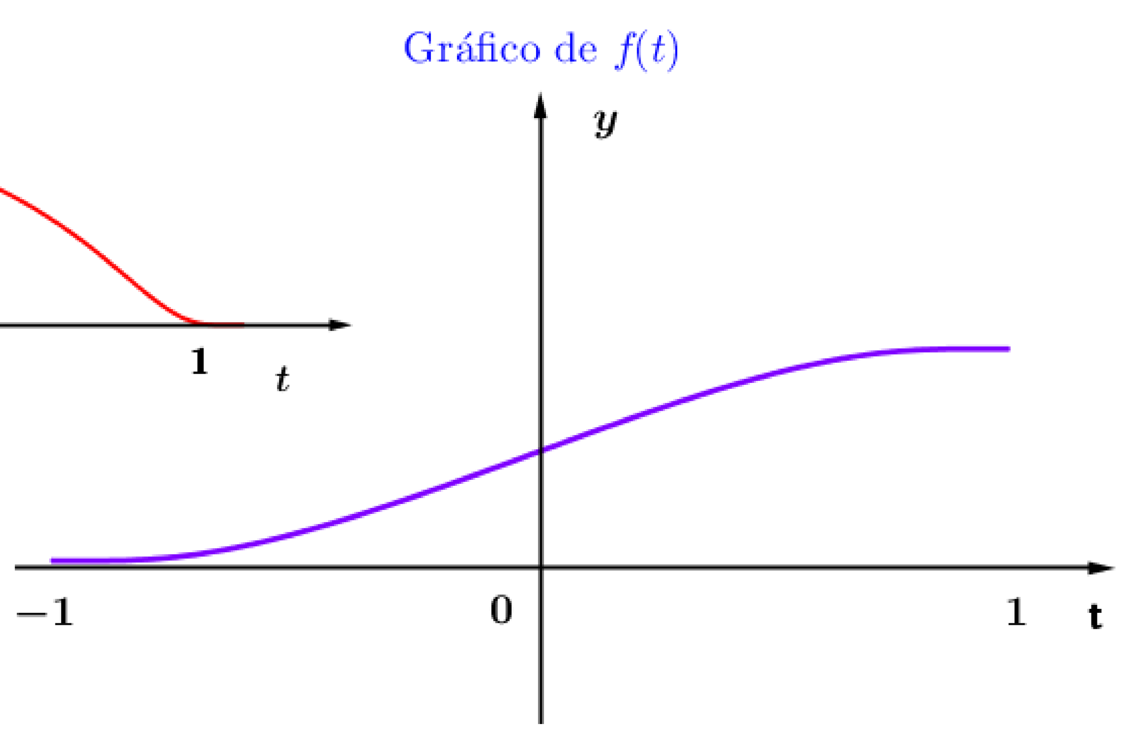
Algumas propriedades:

$i)$ $g(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$ii)$ $f(t)$ é crescente

Graficamente tem-se.





Se considerarmos $y(t) = Af(\alpha t + \beta) + B$, onde A, α, β e B são parâmetros reais que serão escolhidos posteriormente, e suas derivadas vamos ter que,

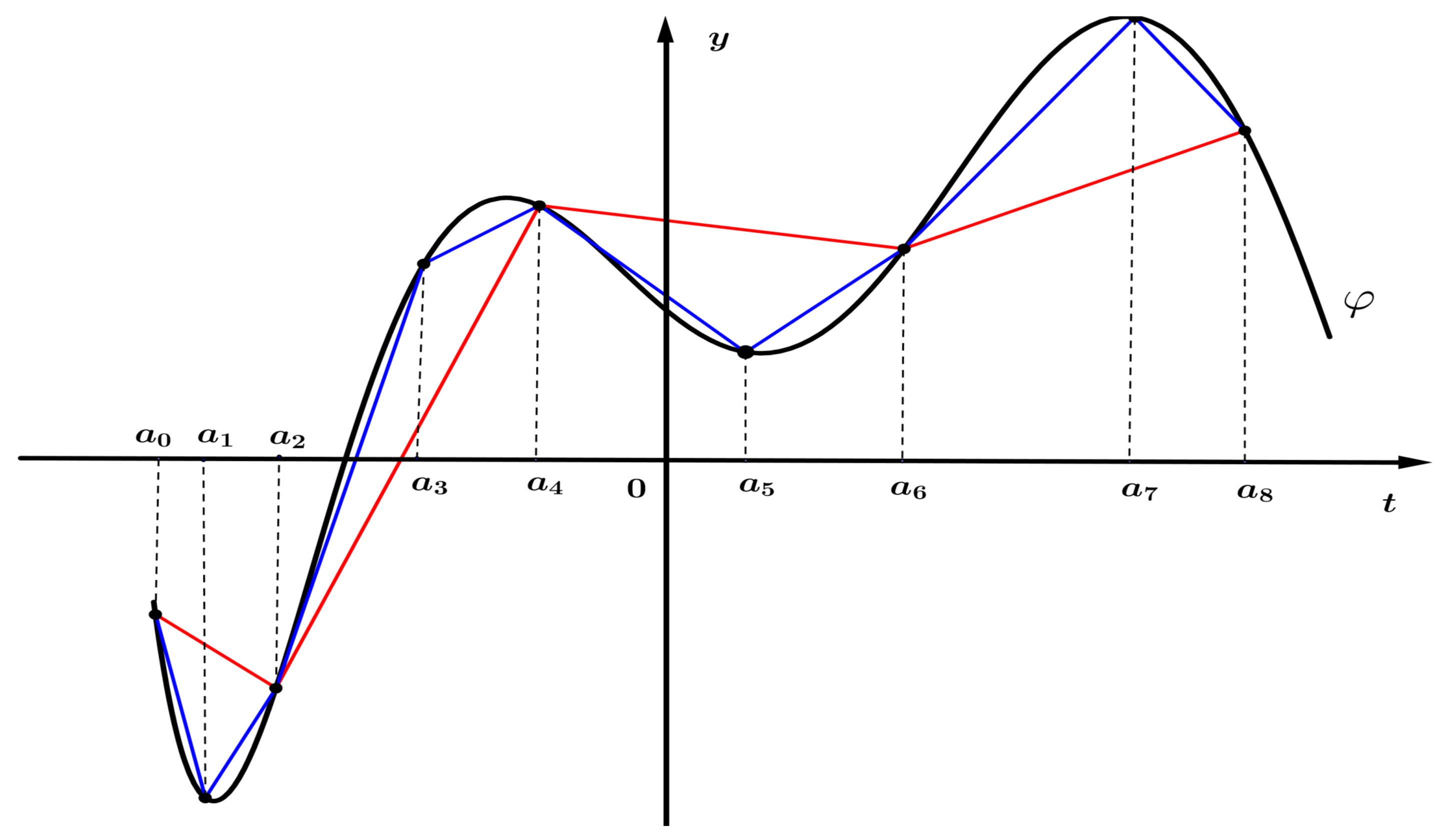
$y'(t) = A\alpha f(\alpha t + \beta)$, $y''(t) = A\alpha^2 f(\alpha t + \beta)$, $y'''(t) = A\alpha^3 f(\alpha t + \beta)$, $y''''(t) = A\alpha^4 f(\alpha t + \beta)$

Fazendo "algumas" substituições adequadas e manipulando as expressões acima vamos obter a EDO em questão.

Agora vamos mostra que dada qualquer função $\varphi \in C(\mathbb{R})$ contínua, sempre é possível encontrar solução $y(t)$ de $(*)$ tal que $|\varphi(t) - y(t)| < \epsilon$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

Inicialmente, dada $\varphi \in C([a_{j-1}, a_j])$ existe $\tilde{\varphi}$ afim por partes tal que $|\varphi(t) - \tilde{\varphi}_\epsilon(t)| < \epsilon, \forall\, t \in [a_{j-1}, a_j]$.

Graficamente tem-se



Nosso objetivo é aproximar $\varphi \in C([a_{j-1}, a_j])$ por uma solução $y(t) = Af(\alpha t + \beta) + B$ no qual A, α, β e B são parâmetros reais quaisquer e $t \in [a_{j-1}, a_j]$, $j = 1,2, \dots, n$, ou seja,

$\forall \epsilon > 0$, $\exists\, S_\epsilon$, solução da EDO, tal que $|\varphi(t) - S_\epsilon(t)| < \epsilon \;\forall\, t \in [a_{j-1}, a_j]$

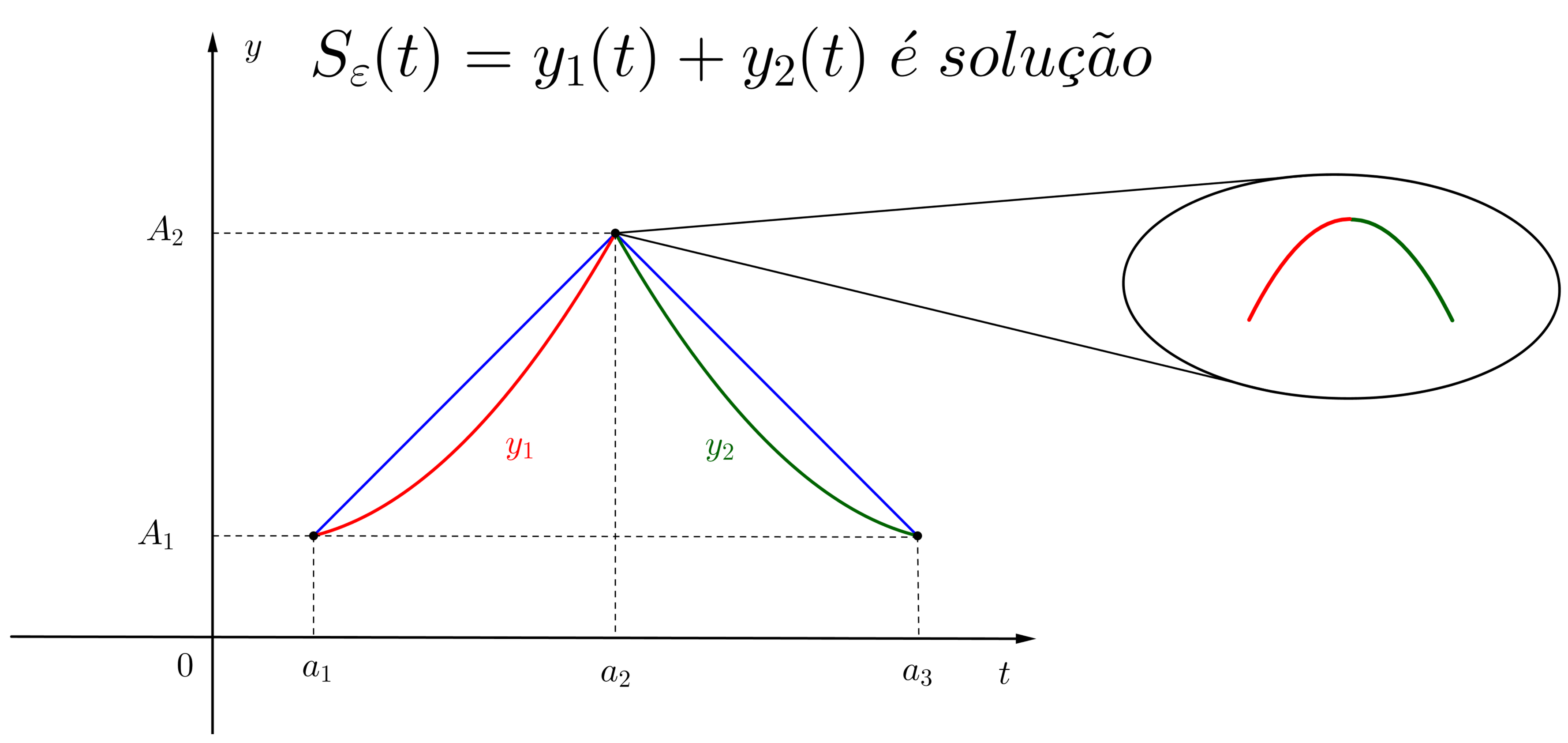
Sabemos que $\exists \tilde{\varphi}_\epsilon$, afim por partes, tal que $|\varphi(t) - \tilde{\varphi}_\epsilon(t)| < \frac{\epsilon}{2}, \forall\, t \in [a_{j-1}, a_j]$ daí,

$$|\varphi(t) - S_\epsilon(t)| \leq |\varphi(t) - \tilde{\varphi}_\epsilon(t)| + |\tilde{\varphi}_\epsilon(t) - S_\epsilon(t)|$$

Agora nosso problema reduz-se a mostrar que

$$|\tilde{\varphi}_\epsilon(t) - S_\epsilon(t)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Para fixarmos a ideia vamos analisar um "pedaço" do gráfico de $\tilde{\varphi}$ juntamente com soluções de $(*)$ em cada intervalo $[a_{i-1}, a_i\,]$ com $i = 1,2, \dots, k$.



REFERÊNCIAS

[1] C. Elsner. "*A Universal Differential Equation of Degree 6*",Journal of Mathematical Analysis and Application 244, 533-544, 2000.

[2] R. J. Duffin. "*Rubel's Universal Differential Equation*", Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Vol. 78, No. 8, pp. 4661-4662, 1981.

[3] Lee. A. Rubel. "*A Universal Differential Equation*" American Mathematical Society, Vol. 4, Number3, May 1981