USANDO DOBRADURAS PARA PROVAR A IRRACIONALIDADE DE ALGUMAS RAÍZES QUADRADAS

[1] Caio A. G. De M. Andrade, [2] Ismael S. Silva, [3] Daniel C. de M. Filho
[1] UFCG/CCT/UAMAT/ Bolsista PET-Matemática UFCG – e-mail: caioagma@gmail.com
[2] UFCG/CCT/UAMAT/ Bolsista PET-Matemática UFCG – e-mail: ismael.negro1@hotmail.com
[3] UFCG/CCT/UAMAT/Professor UAMAT, Tutor PET-Matemática UFCG – e-mail: daniel@mat.ufcg.edu.br

Introdução

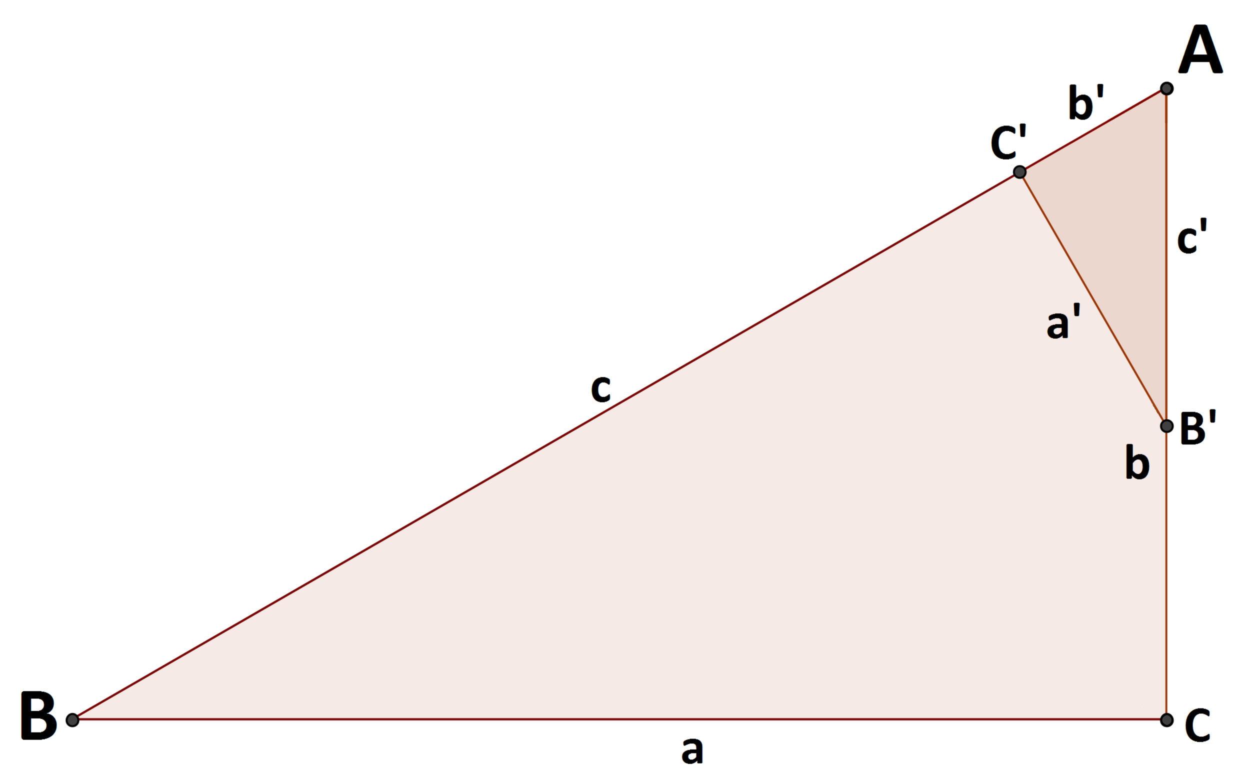
Os números irracionais configuram um tema de bastante relevância matemática. Existem diversas demonstrações da irracionalidade de certos números. Nesse trabalho, procuramos uma dessas demonstrações que fosse simultaneamente generalista e didática, culminando no método da ***dobradura***, tema do presente trabalho.

Objetivo

Dentre os resultados clássicos envolvendo números irracionais, pretendemos demonstrar a irracionalidade dos números da forma $\sqrt{n^2+1}$ para todo n natural e $\sqrt{n^2-1}$, para todo n natural e diferente de 1. Sob um viés geométrico, pretendemos oferecer demonstrações paupáveis e compreensíveis para estudantes do ensino fundamental e médio sem, contudo, perder de vista o rigor matemático.

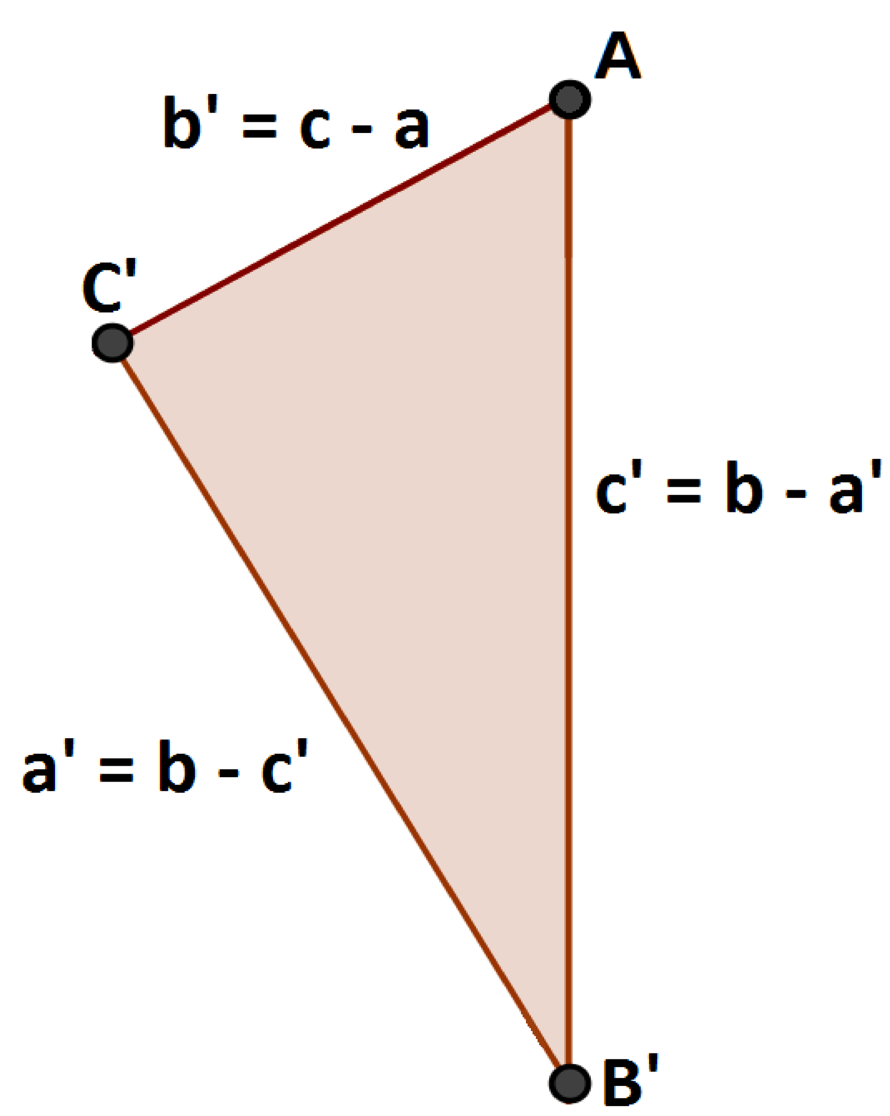
Metodologia

A pesquisa que fizemos é de caráter bibliográfico, se baseando em [1], donde extraímos o método do "paper folding", que denominamos ***dobradura***. Esse método baseia-se numa construção que pode ser feita com dobras de papel em formas de triângulos convenientes à demonstração desejada.



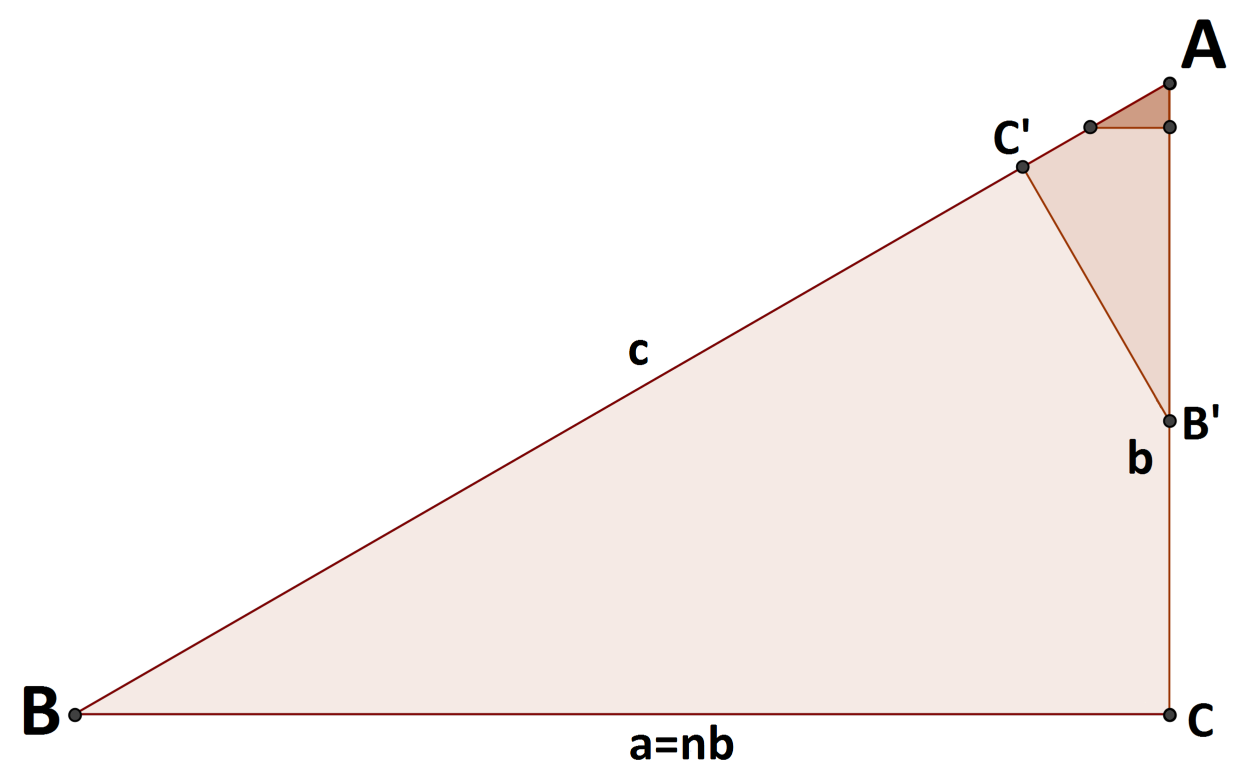
Consideremos o triângulo retângulo ABC mostrado na figura acima. Ao efetuarmos uma dobra sobrepondo o lado BC ao lado AB, obtemos o triângulo AB'C', triângulo semelhante a ABC e com lados de medidas estritamente menores.

Uma outra observação é que, caso o triângulo ABC tenha lados inteiros, e $c = nb$ ou $a = nb$ para algum n inteiro, então o triângulo AB'C' também terá lados inteiros, e valerá $c' = nb'$ ou $a' = nb$, fato que decorre das equações dos lados do triângulo AB'C' mostradas abaixo.



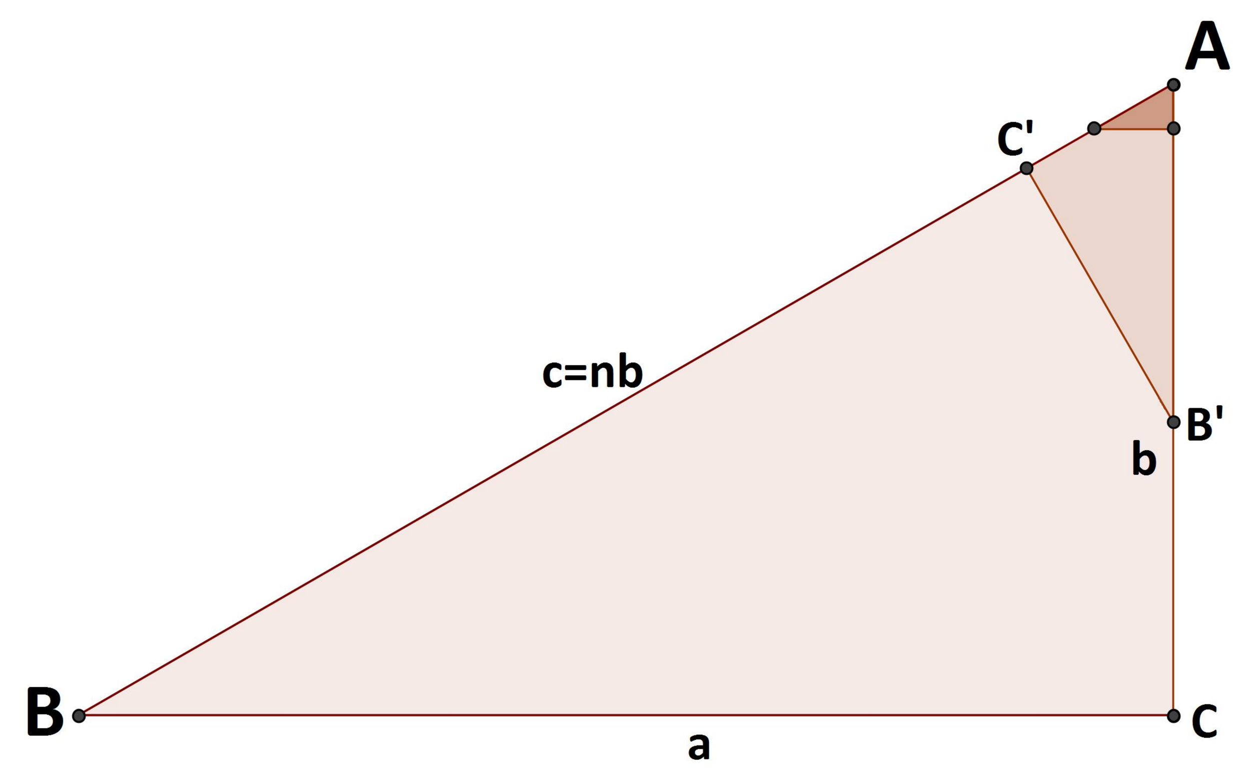
Resultados

Se supusermos $\sqrt{n^2+1}$ racional, isto é, $\sqrt{n^2+1} = c/b$, com c e b naturais, geometricamente, teríamos um triângulo retângulo de lados c, b e nb, conforme a figura que segue.



Uma vez que o triângulo ABC é retângulo e tem lados inteiros podemos aplicar o métedo da dobradura e, com isso, obter um triângulo semelhante ao triângulo ABC, de lados também inteiros e estritamente menores que os de ABC. Aplicando o processo indefinidamente (vide figura acima), chegariamos a um absurdo, porquanto uma sequência decrescente de números inteiros positivos é impossível. Concluímos então que $\sqrt{n^2+1}$ é irracional.

Para o caso de supormos $\sqrt{n^2-1} = a/b$, com a e b naturais, desde que $n \neq 1$, poderíamos formar o triângulo abaixo, incorrendo num absurdo análogo ao caso anterior.



Conclusão

Por envolver uma abordagem geométrica e trabalhar com dobraduras, concordamos que o método apresentado, de fato, mostra-se como uma forma mais assimilável para estudantes com menos experiência, não só da irracionalidade dos números aqui trabalhados, mas de demonstrações matemáticas de forma geral.

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer aos colegas do grupo PET-Matemática e, em especial, ao tutor do mesmo pela motivação e orientação prestada. Queremos agradecer aos organizadores da Semana da Matemática, e também aos demais professores da UAMAT, os quais nunca nos negaram ajuda e incentivo.

Referências

[1] CWIKEL, M.. *"Origami" proofs of irrationality of square roots*. Technion, Israel Institute of Technology, Haifa 32000, Israel. Disponível em <http://www.math.technion.ac.il/~mcwikel/paperfold.pdf> Acesso em 3 de setembro de 2015.
[2] BARBOSA, J. L. M.. *Geometria Euclidiana Plana.* Editora SBM – Coleção do Professor de Matemática.
[3] SINGH, S. *O Último Teorema de Fermat: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos;* Tradução de Jorge Luiz Calife. – 2ª ed. – Rio de Janeiro: Record, 1998.