# Existência de infinitos números primos e a série dos inversos dos primos, qual a relação?

Matheus Cunha Motta

11 de julho de 2013

**Resumo**

A existência de infinitos números primos foi provada por Euclides (360 a.C. - 295 a.C.), há mais de 2000 anos. A demonstração, que segue a proposição 20 do livro IX dos Elementos, é feita utilizando recursos elementares da Teoria dos Números. Dois milênios depois, em 1734, Euler apresenta duas novas demonstrações desse fato e as técnicas utilizadas por ele para tal feito serviram de base para a fundação de uma nova teoria, chamada Teoria Analítica dos Números. Neste texto veremos duas demonstrações, dando enfase particular aos conceitos introduzidos.

A função zeta $\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, estudada por Leonhard Euler (1707 - 1783), é definida como

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

A extensão dessa função ao conjunto $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(z) > 1\}$, é conhecida como a função zeta de Riemann. Além do papel central na Teoria Analítica dos Números (SIMMONS, 1987, p.714), essa função possui propriedades interessantes, por exemplo, o número $\zeta(3)$ é irracional (POORTEN, 2005) enquanto que o número $\zeta(k)$ é racional, para todo inteiro negativo $k$.

Em 1734 Euler descobriu a seguinte identidade, que relaciona $\zeta$ com todos os números primos.

**Teorema 1.** *Para todo primo $p$ e $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$, vale*

$$\zeta(s) = \prod_{p} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}. \tag{1}$$

*Demonstração.* Sendo $p$ um número primo arbitrariamente fixado, temos $1/p^s < 1$, para todo $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$. Pois,

$$\frac{1}{p^s} < 1 \iff 1 < p^s \iff 1 < p.$$

Assim, utilizando a série geométrica, obtemos

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ns}}.$$

Calculando o produto da série anterior para todas as possibilidades distintas de primos $p$, digamos $p_1, p_2, \ldots$ (a priori, esta lista pode ser finita ou não!), segue que

$$\begin{aligned}
\prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} &= \left(1 + \frac{1}{p_1^s} + \frac{1}{p_1^{2s}} + \cdots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{p_2^s} + \frac{1}{p_2^{2s}} + \cdots\right) \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \\
&= \zeta(s)
\end{aligned}$$

Na segunda igualdade utilizamos o Teorema Fundamental da Aritmética. □

Calculando $\zeta(1)$, um fato que salta aos olhos é a existência de infinitos números primos. Com efeito, suponha por absurdo que exista uma quantidade finita de números primos. Então, o produto no membro direito da equação (1) é finito para todo $s \in \mathbb{R}$, em particular para $s = 1$. Mas, usando a definição da função zeta, temos

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

Contradição, visto que a série na expressão anterior é a série harmônica, que é divergente.

Euler fez ainda outra grande descoberta, que permite demonstrar a existência de infinitos números primos de modo essencialmente diferente da que exibimos anteriormente.

**Teorema 2.** *A série dos inversos dos primos diverge. Isto é,*

$$\sum \frac{1}{p_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \infty.$$

*Demonstração.* Considere uma lista ordenada $p_i$ de $n$ números primos, digamos $p_1 = 2 < 3 < \cdots < p_n$. Sendo $1/p_i < 1$, para todo $1 \leq i \leq n$, temos pela série geométrica

$$\begin{aligned}\prod_p \frac{1}{1 - 1/p_n} &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_n^2} + \cdots\right) \\ &= \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k}.\end{aligned}$$

Assim, da desigualdade seguinte

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k} > \int_1^{p_n+1} \frac{\mathrm{dx}}{x} = \ln(p_n + 1) > \ln p_n$$

obtemos

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) < \frac{1}{\ln p_n}.$$

Aplicando ln em ambos os membros da desigualdade anterior, segue

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) < -\ln\ln p_n. \tag{2}$$

Ocorre que $\ln(1 + x) - 2x > 0$, para todo $x \in [-1/2, 0)$, visto que neste intervalo temos, $1/(1 + x) - 2 \leq 0$. Assim, como $p_k \geq 2$ para todo $k$, pondo $x = -1/p_k$, vale a desigualdade

$$-\frac{2}{p_k} < \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right). \tag{3}$$

Usando a desigualdade (3) em (2), obtemos

$$-2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} < -\ln\ln p_n,$$

isto é,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} > \frac{1}{2}\ln\ln p_n.$$

Logo, como $\ln\ln p_n \to \infty$, segue do teste da comparação que a série $\sum 1/p_n$ diverge. $\square$

# Referências

[1] http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html ; Consultado em 11/07/2013 às 10:00 hrs.

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler ; Consultado em 11/07/2013 às 10:08 hrs.

[3] NIVEN, I. *A Proof of the Divergence of* $1/p$. The American Mathematical Monthly, Vol. 78, No. 3 (Mar., 1971), pp. 272-273.

[4] SIMMONS, G. F. *Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo, Brasil: McGraw-Hill, 1987.

[5] POORTEN, A. J. V. D. *A proof that Euler missed*, Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$. Sydney, Australia: ceNTRE, 2005.