TEOREMA DE MORLEY: O QUE OS TRIÂNGULOS AINDA PODEM NOS REVELAR

Daniel Cordeiro de Morais Filho, UFCG
Arthur Cavalcante Cunha, UFCG
Amauri da Silva Barros, UFAL

♦ Nível Intermediário

INTRODUÇÃO

Problemas de Geometria sempre encantaram os admiradores da Matemática. Como a Geometria é uma das mais antigas manifestações matemáticas da humanidade, era de se esperar, há alguns séculos atrás, que os mais importantes resultados sobre triângulos já tivessem sido descobertos e estabelecidos. Mas isso não é verdade. No começo do século passado ainda se estava descobrindo resultados envolvendo triângulos, e é sobre um desses belos resultados que falaremos neste artigo.

O PROBLEMA

Como sabemos, as bissetrizes de um triângulo qualquer, semirretas que dividem os ângulos internos em dois ângulos congruentes, se intersectam em um ponto chamado incentro. Esse ponto tem a interessante propriedade de ser o centro de uma circunferência inscrita no triângulo. O famoso matemático grego Euclides (c.325 a.C-c.365 a.C.) provou esse resultado no Livro IV dos seus Elementos (Proposição 4), há pelo menos 24 séculos!

Nessa direção, a história guardou uma pergunta bem natural que parece não ter sido feita ao longo dos séculos: e se dividirmos os ângulos internos de um triângulo em três partes iguais? Encontraremos algum resultado também interessante? Vejamos.

As duas semirretas que dividem um ângulo interno de um triângulo em três ângulos congruentes chamam-se ***trissetrizes***. As trissetrizes de um triângulo geram seis pontos de interseção. Há alguma propriedade interessante que envolve esses pontos? Para ver o que ocorre, é preciso distinguir um pouco mais essas trissetrizes. Diremos que duas trissetrizes são ***adjacentes*** quando partem de vértices opostos pertencentes a um mesmo lado do triângulo e formam o menor ângulo que uma trissetriz pode formar com esse lado.

Una os pontos de interseção das trissetrizes adjacentes de um triângulo qualquer. Você obterá um triângulo. Observe melhor, mais do que isso, você descobrirá um resultado surpreendente: o triângulo obtido é sempre um triângulo eqüilátero! Vide figura a seguir.

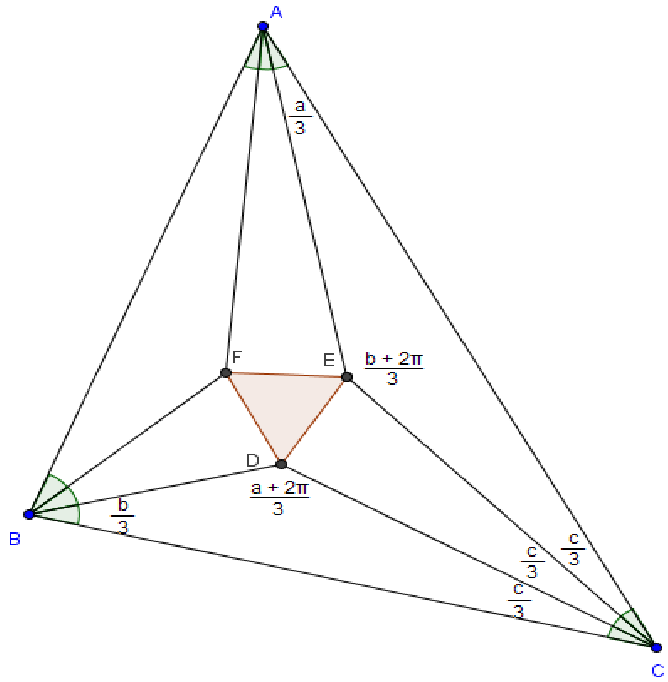

Figura 1: O Triângulo equilátero DEF é chamado Triângulo de Morley.

Esse é o Teorema de Frank Morley (1860-1937), matemático anglo-americano, presidente da American Mathematical Society no biênio 1919-1920, que provou esse teorema no final do Século XIX (vide uma pequena bibliografia de Morley em [1]). Na verdade, a demonstração do teorema como conhecido hoje só foi publicada em 1929 ([2]).

O enunciado do teorema é o seguinte:

Teorema de Morley: Em um triângulo qualquer, a união dos pontos de interseção das trissetrizes adjacentes forma um triângulo equilátero.
Uma animação do teorema pode ser vista em [3].

Porque esse problema é importante

Bem, além de ser um belo resultado, esse problema envolve um dos antigos problemas famosos da Matemática, que é a trissecção de um ângulo em três ângulos congruentes. Saber se é possível fazer isso para qualquer ângulo usando apenas régua e compasso é um problema famoso, que levou 20 séculos para ser

resolvido, e a solução é negativa (vide [4]): não é possível, em geral, trissectar ângulos com régua e compasso. Por essa razão, talvez os resultados envolvendo trissecção de ângulos tenham sido considerados desinteressantes, e velado o teorema até ser descoberto e provado apenas no começo do século XX. Mas, convenhamos, na prática, ninguém precisa trissectar um ângulo para descobrir ou provar o Teorema de Morley!
Em segundo lugar, das demonstrações possíveis desse teorema (e há várias, dos mais variados gostos, e algumas até bem modernas. Vide [5].) optamos pela que usasse certos resultados vistos na Trigonometria, que às vezes são apenas memorizados pelos estudantes do Ensino Médio. Na maioria das vezes, esses resultados são apenas apresentados sem qualquer aplicação de destaque que merecesse estudá-los. Nossa demonstração também fornece a oportunidade de usar algumas identidades trigonométricas como as que transformam produtos em soma, bem como uma aplicação das Leis dos Senos e dos Cossenos em um único problema.

Demonstração do Teorema de Morley

Consideremos o triângulo *ABC*, da Figura 1, com ângulos internos $a = B\widehat{A}C$, $b = A\widehat{B}C$ e $c = A\widehat{C}B$. Consideremos também o triângulo DEF, formado pela interseção das trissetrizes adjacentes relativas a esses ângulos.
A ideia dessa demonstração é calcular os comprimentos dos lados do triângulo DEF, mostrando que são iguais. Como usaremos a Lei dos Senos, seja R o raio da circunferência inscrita ao triângulo ABC. Vamos mostrar que

$$DE = EF = FD = 8R\ \text{sen}\frac{a}{3}\text{sen}\frac{b}{3}\text{sen}\frac{c}{3}.$$

Iremos usar as seguintes identidades trigonométricas:

1. $\text{sen}\, x = 4\text{sen}\frac{x}{3}\text{sen}\frac{x+\pi}{3}\text{sen}\frac{x+2\pi}{3}$
2. $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$
3. $\text{sen}\, x\ \text{sen} y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]$
4. $\cos\frac{a+b+2\pi}{3} = \cos\frac{2\pi+\pi-c}{3} = \cos\left(\pi-\frac{c}{3}\right) = -\cos\frac{c}{3}$

5. $\frac{1}{2}(\cos x + \cos y) = \cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

Pela Lei dos Senos aplicada ao triângulo *ABC*, e pela identidade (1) temos

$$6. \quad \frac{BC}{\operatorname{sen} a} = 2R \Rightarrow BC = 8R \operatorname{sen} \frac{a}{3} \operatorname{sen} \frac{a+\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{a+2\pi}{3}.$$

Considere agora o triângulo *BDC*. As medidas de seus ângulos internos são:

$$C\hat{B}D = \frac{b}{3}, B\hat{C}D = \frac{c}{3} \text{ e } B\hat{D}C = \pi - \frac{b}{3} - \frac{c}{3} = \frac{3\pi - b - c}{3} = \frac{(\pi - b - c) + 2\pi}{3} = \frac{a + 2\pi}{3}.$$

Agora, aplicando a Lei dos Senos ao triângulo *BDC* e usando a igualdade (6) obtemos:

$$\frac{BC}{\operatorname{sen}\frac{a+2\pi}{3}} = \frac{CD}{\operatorname{sen}\frac{b}{3}} \Rightarrow CD = \frac{BC \operatorname{sen}\frac{b}{3}}{\operatorname{sen}\frac{a+2\pi}{3}} \Rightarrow$$

$$CD = \frac{8R \operatorname{sen}\frac{a}{3} \operatorname{sen}\frac{a+\pi}{3} \operatorname{sen}\frac{a+2\pi}{3} \operatorname{sen}\frac{b}{3}}{\operatorname{sen}\frac{a+2\pi}{3}} \Rightarrow$$

$$7. \quad CD = 8R \operatorname{sen}\frac{a}{3} \operatorname{sen}\frac{b}{3} \operatorname{sen}\frac{a+\pi}{3}.$$

Fazendo o mesmo para o triângulo *ACE*, resulta em

$$8. \quad CE = 8R \operatorname{sen}\frac{a}{3} \operatorname{sen}\frac{b}{3} \operatorname{sen}\frac{b+\pi}{3}.$$

Para encontrar o comprimento do lado *DE*, usaremos a Lei dos Cossenos ao triângulo *CDE*, e por (7) e (8):

$$DE^2 = CD^2 + CE^2 - 2CD \cdot CE \cdot \cos\frac{c}{3} \Rightarrow$$

$$(9.)\qquad DE^2=64R^2\operatorname{sen}^2\frac{a}{3}\operatorname{sen}^2\frac{b}{3}\left[\operatorname{sen}^2\frac{a+\pi}{3}+\operatorname{sen}^2\frac{b+\pi}{3}-2\operatorname{sen}\frac{a+\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{b+\pi}{3}\cos\frac{c}{3}\right].$$

Para simplificar a escrita, chamemos

$M=8R\operatorname{sen}\dfrac{a}{3}\operatorname{sen}\dfrac{b}{3}$, donde

$M^2=64R^2\operatorname{sen}^2\dfrac{a}{3}\operatorname{sen}^2\dfrac{b}{3}.$

De (2) e (3), segue da expressão (9) que

$$DE^2=M^2\left[\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2a+2\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2b+2\pi}{3}\right)-2\left(\frac{1}{2}\left(\cos\frac{a-b}{3}-\cos\frac{a+b+2\pi}{3}\right)\right)\cos\frac{c}{3}\right].$$

De (4) e (5), obtemos

$$DE^2=M^2\left[\frac{1}{2}\left(1+1-\cos\frac{2a+2\pi}{3}-\cos\frac{2b+2\pi}{3}\right)-\left(\cos\frac{a-b}{3}\cos\frac{c}{3}+\cos\frac{c}{3}\cos\frac{c}{3}\right)\right]=$$

$$=M^2\left[1-\left(-\cos\frac{c}{3}\cos\frac{a-b}{3}\right)-\cos\frac{a-b}{3}\cos\frac{c}{3}-\cos^2\frac{c}{3}\right]=M^2\left(1-\cos^2\frac{c}{3}\right)=M^2sen^2\frac{c}{3}.$$

Logo,

$$DE=M\operatorname{sen}\frac{c}{3}=8\text{R}\operatorname{sen}\frac{a}{3}\operatorname{sen}\frac{b}{3}\operatorname{sen}\frac{c}{3}.$$

Se fizermos o mesmo procedimento para os triângulos *BDF* e *AFE*, encontraremos que o comprimento dos lados *DF* e *EF* do triângulo *DEF* é também dado por

$$DF=EF=8\text{R}\operatorname{sen}\frac{a}{3}\operatorname{sen}\frac{b}{3}\operatorname{sen}\frac{c}{3}.$$

Portanto, como *DE, DF* e *EF* são iguais, o triângulo *DEF* é equilátero. Como queríamos demonstrar.

Conclusão

Em [3] pode-se encontrar 23 demonstrações desse teorema. Nossa demonstração baseia-se no artigo [5], onde pode ser encontrado um detalhado histórico desse teorema, que parece ter caído no gosto de muitos. Enfim, ficar famoso por provar, em pleno Século XX, um teorema da Geometria Elementar é um fato que muitos gostariam de ter tido o privilégio de que ocorresse com eles. Coisas da História, coisas da Matemática...

BIBLIOGRAFIA

[1] http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/morley.html
[2] American Journal of Mathematics, F. Morley, 51 (1929), pp. 465-472.
[3] http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/index.shtml
[4] Gonçalves, Adilson; Introdução à Álgebra, IMPA (1999).
[5] Cletus O. Oakley e Justine Davis, The Morley Trisector Theorem, Amer. Math Monthly (1978), p. 737-745.O artigo pode ser encontrado na página http://www.haverford.edu/math/cgreene/399/morley/morley.pdf.