$R = \frac{v_0{}^2}{16} \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática

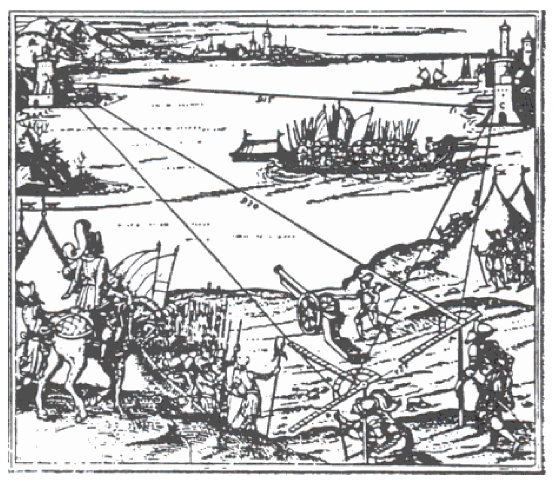
VII Semana da Matemática
10 anos do PPGMAT

A INCRÍVEL MATEMÁTICA DA GUERRA: AS TRAJETÓRIAS DAS BOLAS DE CANHÃO

CUNHA, Arthur Cavalcante (Bolsista PET-Matemática); DE MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro (Tutor PET-Matemática)
Universidade Federal de Campina Grande
arthur@dme.ufcg.edu.br; daniel@dme.ufcg.edu.br

INTRODUÇÃO

Já ouvimos falar diversas vezes que a Matemática faz parte do cotidiano de todos. E isso não foi diferente no século XVII, quando a busca por novas tecnologias militares era essencial para que os exércitos se saíssem vitoriosos em suas batalhas. Dentre essas tecnologias, uma que poderia resultar no sucesso de uma guerra era o canhão - e a melhor maneira de usá-lo, tanto para intimidar os inimigos como para destruí-los.



OBJETIVOS

Neste trabalho, nos propomos a apresentar demonstrações geométricas para obtenção das fórmulas de altura máxima, alcance e alcance máximo alcançadas por um projétil atirado por um canhão (desconsiderando a resistência do ar). Essas demonstrações foram dadas por Torricelli no século XVII. O alcance será dado por $R = \frac{2v_0{}^2}{g} \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$, onde g é a aceleração da gravidade, α é o ângulo de elevação do canhão e v_0 é a velocidade inicial com a qual a bola de canhão é disparada. A novidade do estudo é a maneira como os matemáticos da época resolveram esses problemas sem o uso do Cálculo, que ainda estava nascendo.

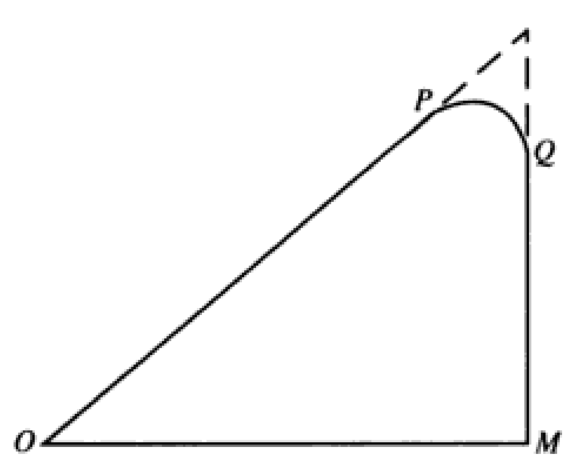
METODOLOGIA

Tratando-se de uma pesquisa de natureza bibliográfica, nosso trabalho foi desenvolvido com base em livros e artigos científicos. Seguindo as diretrizes de uma das atividades do Grupo PET-Matemática UFCG, na qual há o incentivo à leitura de textos acadêmicos em língua estrangeira e à produção de textos didáticos motivadores, grande parte das referências utilizadas foram em inglês.

RESULTADOS E CONCLUSÕES

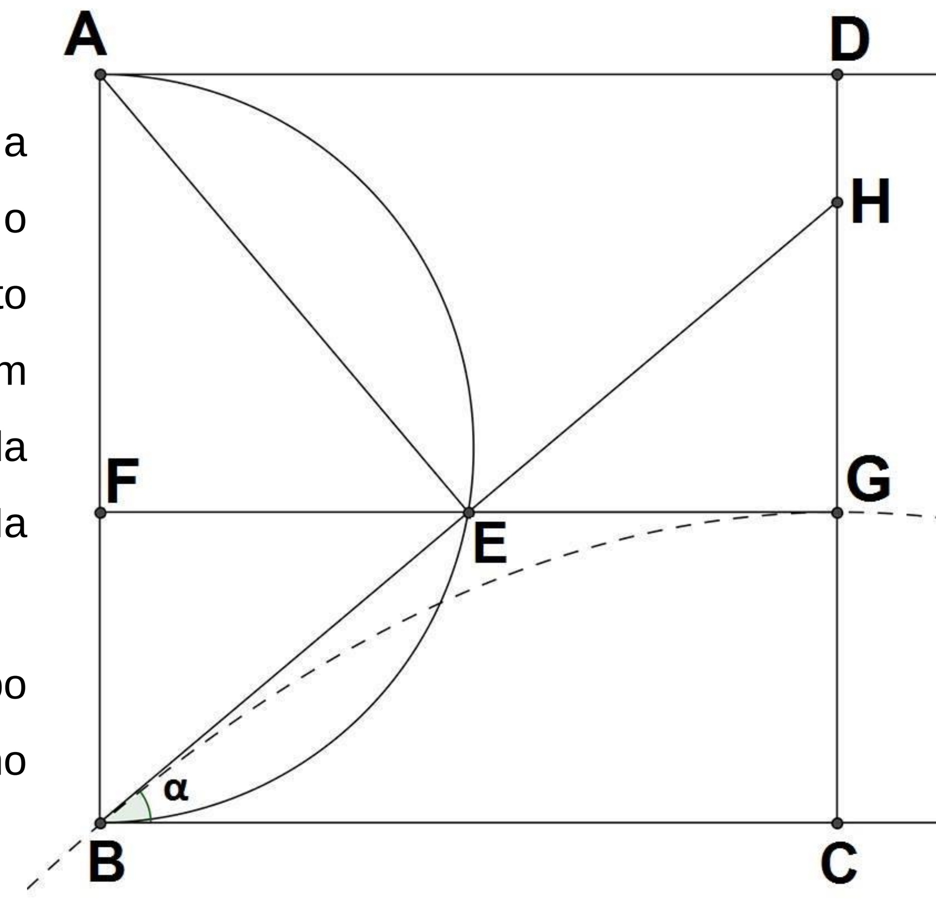
O *Impetus*

Nicole Oresme (1320 - 1382) descreveu o *Impetus* como sendo uma qualidade transmitida para um corpo em movimento por sua força inicial, ou seja, pela força que fazia com que o objeto entrasse em movimento. Acreditava-se que o movimento das bolas de canhão seguia um dos modelos abaixo, nos quais o projétil começava a cair quando as forças de aceleração da gravidade e de resistência do ar eram superiores ao *impetus* que estava associado à bola.



Altura Máxima e Alcance

Sendo α e v_0 o ângulo de elevação e a velocidade inicial, respectivamente, considere o segmento AB de tal forma que o seu comprimento seja a altura necessária para que um corpo, em queda livre, obtenha a velocidade v_0 no final da queda. O canhão estará localizado no ponto B. Na construção da figura, consideramos $EF = EG$.



Devido à AB ser a distância que um corpo deve cair para obter a velocidade final v_0, temos, no ponto B, $AB = \frac{1}{2}gt^2$ e $v_0 = gt$. Daí, obtemos

$$AB = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2g}$$

Observando o triângulo AEB, obtemos $BE = AB\cos(90-\alpha) = AB\operatorname{sen}(\alpha)$. Como os triângulos BEF e HEG são congruentes, então

$$BH = 2BE = 2.AB\operatorname{sen}(\alpha).$$

Ainda por essa congruência e a obtenção de HC no triângulo HBC, segue

$$GC = \frac{1}{2}HC = \frac{1}{2}BH\operatorname{sen}(\alpha) = AB\operatorname{sen}^2(\alpha).$$

Assim,

$$GC = \frac{v_0^2}{2g}\operatorname{sen}^2(\alpha). \qquad \text{(Altura Máxima)}$$

Como a trajetória da bola de canhão é parabólica, então para calcularmos o alcance atingido pelo projétil, basta calcular quanto mede $2BC = 4EG$. No triângulo HEG temos a relação

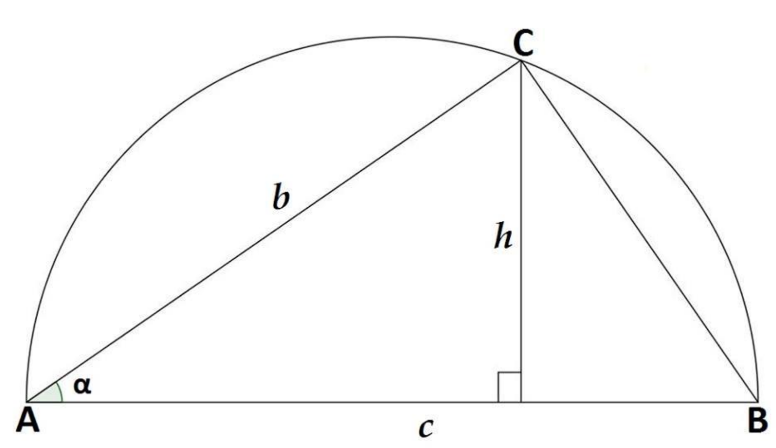
$$EG = \frac{HG}{\tan(\alpha)} = \frac{GC}{\tan(\alpha)} = \frac{v_0^2\operatorname{sen}^2(\alpha)\cos(\alpha)}{2g\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{v_0^2}{2g}\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha).$$

Portanto, o alcance é dado por

$$4EG = \frac{2v_0^2}{g}\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha).$$

Alcance Máximo

Temos $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{h}{b}$, $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$ e $\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{h}{c}$. Fixando c como sendo o diâmetro do círculo e mantendo h variando, qual o valor que h deve assumir para que $\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$ atinja o seu valor máximo? Da Geometria Elementar, a resposta é que h deve ter o comprimento do raio do círculo e portanto $\alpha = 45°$.



REFERÊNCIAS

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática.* Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

SWETZ, F. J. An Historical Example of Mathematical Modeling: The Trajectory of a Cannonball. In: JOHANSSON, B. *Learn from the Masters.* Washington, DC: MAA, 1995. p. 93-102.

McMURRAN, S.; RICKEY, F. The Impact of Ballistics on Mathematics. 2008.

HACKBORN, W. W. *The Science of Ballistics*: Mathematics Serving the Dark Side. University of Alberta.