Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática

VII Semana da Matemática
10 anos do PPGMAT

OS "FANTASMAS MATEMÁTICOS" DE DIMENSÕES FRACIONÁRIAS

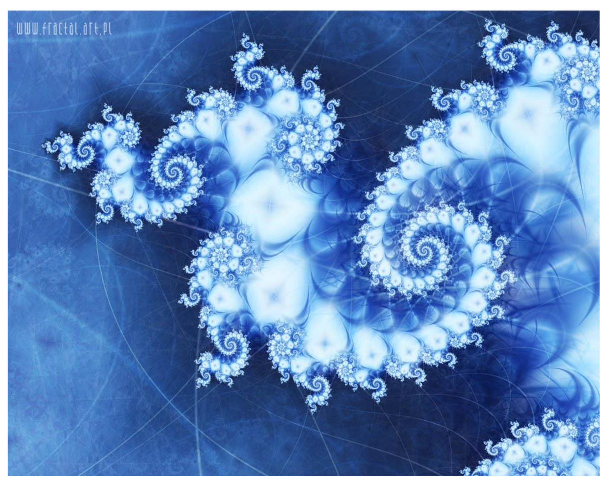
PATRICIO, Geovany Fernandes (Bolsista PET); MORAIS FILHO, Daniel C. de (Orientador)

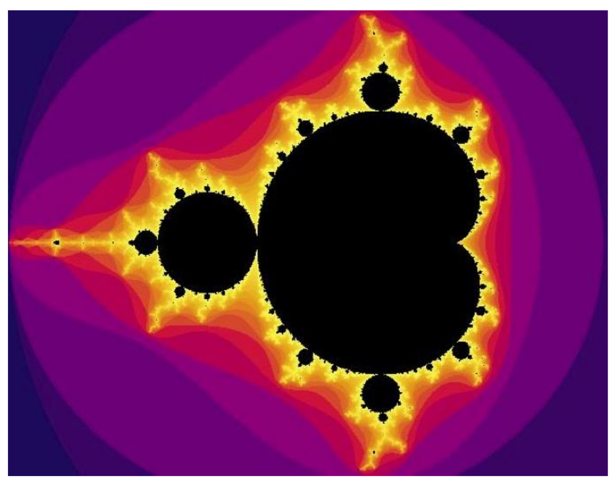
Universidade Federal de Campina Grande

geovany@dme.ufcg.edu.br; *daniel@dme.ufcg.edu.br*

INTRODUÇÃO

É possível obter uma região fechada de área finita e perímetro ilimitado? Há objetos de dimensões fracionárias que estão em "algum mundo" entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$? As respostas para estas perguntas é sim, e para respondê-las vamos recorrer a objetos matemáticos estranhos, mas interessantes, chamados fractais. Bem, o que é um fractal? Esta palavra foi criada por Benoit Mandelbrot (1924-2010) para descrever um objeto geométrico que, sem entrarmos em detalhes, nunca muda o aspecto geométrico de sua estrutura, qualquer que seja a distância de visão.





OBJETIVOS

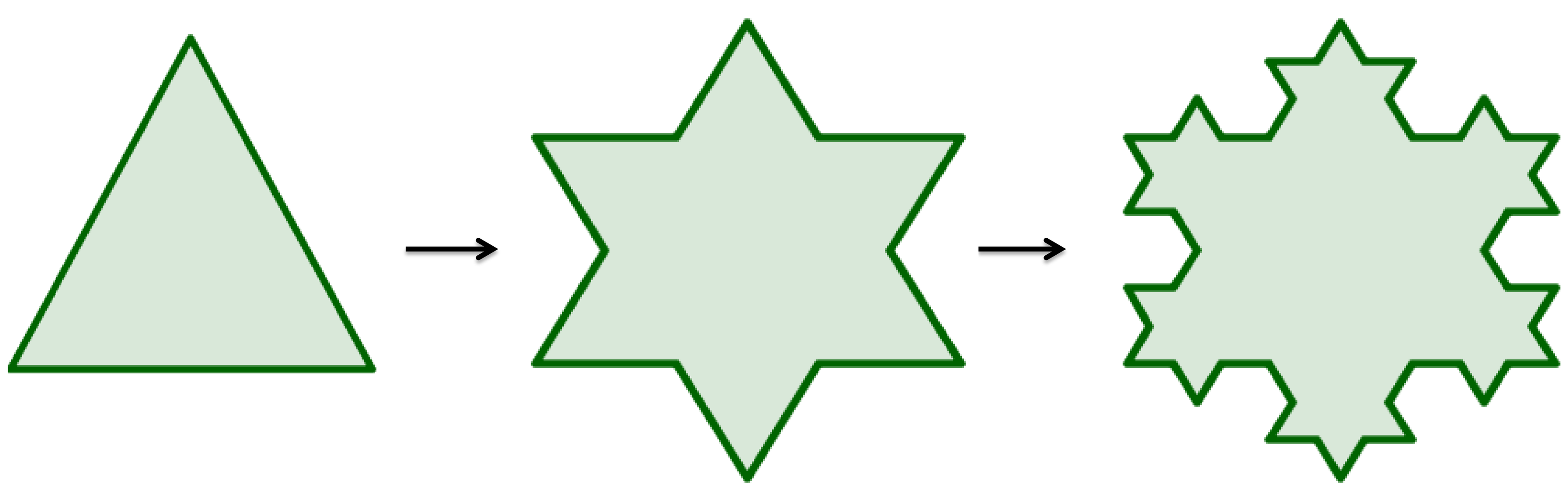
Vamos apresentar alguns tipos de fractais e suas curiosas propriedades. Em particular apresentaremos o Floco de Neve de Koch criado pelo matemático sueco Niels Fabian Helge Von Koch (1870-1924).

METODOLOGIA

Para realização deste trabalho, parte da Iniciação Científica desenvolvida no PET-Matemática-UFCG, além de exposições orais semanais, foram feitas pesquisas em livros, periódicos matemáticos e também na Internet bem como na leitura de artigos relacionados.

RESULTADOS E CONCLUSÕES

O floco de neve de Koch é construído da seguinte maneira: considera-se um triângulo equilátero. Com isso divide-se cada lado em três segmentos iguais, em seguida desenha-se um triângulo equilátero tendo como base o segmento central da divisão com isso geramos três novos triângulos e assim fazemos esses passos com os triângulos existentes repetindo indefinidamente.(figura abaixo)



Por recorrência vamos obter uma expressão para o perímetro de cada região formada após as interações, ou seja,

$$P_0 = 3\,, P_1 = 3\cdot 4\cdot\frac{1}{3}, P_2 = 3\cdot 4^2\cdot\frac{1}{9}, \dots, P_n = 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Dessa forma

$$\lim_{n\to\infty} 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

E a área da região?

Recursivamente temos:

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}, A_1 = A_0 + 3\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}, A_2 = A_1 + 3\cdot 4\cdot\frac{1}{9^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}, \dots, A_n = A_0\cdot\left[1+\frac{3}{4}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^k\right]$$

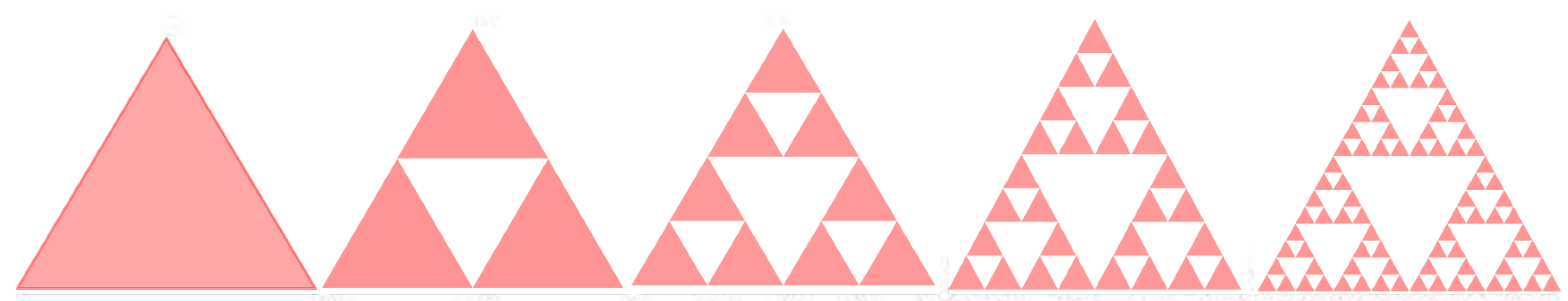
Veja que,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A_0\cdot\left[1+\frac{3}{4}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^k\right] = A_0\cdot\left[1+\frac{3}{5}\right] = \frac{8}{5}A_0.$$

Com isso temos uma região de perímetro infinito e área finita.

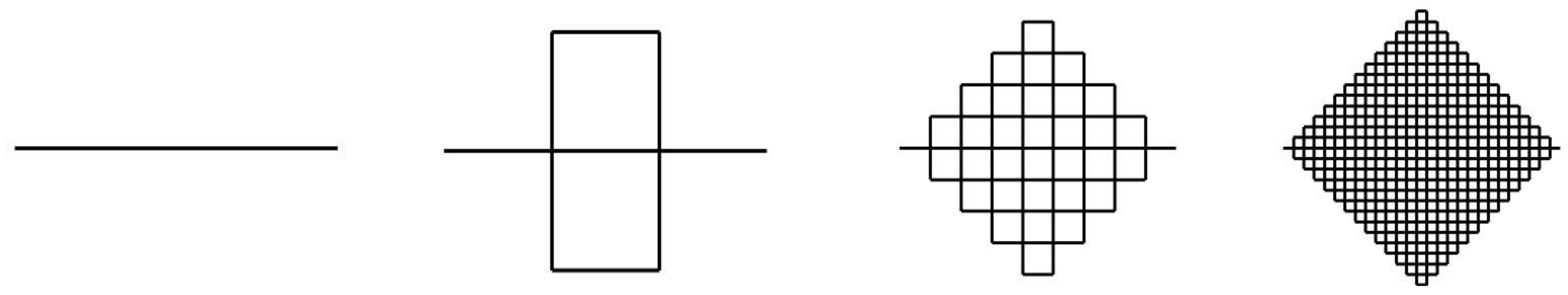
Exemplos de fractais:

O Triângulo de Sierpinsky (Símbolo do PROFMAT)



O Conjunto de Cantor

Curva de Peano



Dimensão Fractal

Uma das principais propriedades que caracterizam os fractais de acordo com Carreira (2008) é a sua dimensão. Ao contrário do que é observado na Geometria Euclidiana, onde o valor da dimensão representa a dimensionalidade do espaço em que dado objeto está inserido, a dimensão fractal representa o nível de irregularidade de um fractal e é dada por,

$$D = \frac{log N}{log\frac{L}{U}}\,.$$

Sendo D a dimensão; N o número de partes em cada etapa da divisão; L o comprimento inicial (ou lado) do objeto ou figura que foi dividida em N parte iguais e U é o comprimento de cada segmento obtido através da divisão.

Dimensões de Alguns fractais:

$$Floco\ de\ Neve\ de\ Koch\colon\ D = \frac{\log(4)}{\log(3)} \cong 1{,}262\ \dots \qquad Triângulo\ de\ Sierpinsky\colon\ D = \frac{\log(3)}{\log(2)} \cong 1{,}584\ \dots$$

$$Conjunto\ de\ Cantor\colon D = \frac{\log(2)}{\log(3)} \cong 0{,}630\ \dots$$

REFERÊNCIAS

SILVA, M. M., SOUZA, W. A.. *Dimensão Fractal*. Revista Eletrônica de Matemática, n. 2, 2010. Disponível em: < www2.jatai.ufg.br/ojs/index.php/matematica> . Acesso em: 2 Ago. 2013.

STEWART, I.. *Almanaque das Curiosidades matemáticas*. Rio de Janeiro : Jorge Zahar Ed., 2009.

SALLUM, E. M.. *Fractais no Ensino Médio*. Revista do Professor de Matemática,v. 57, p. 1-8, 2005.

CARREIRA, A .S.N. et. al. Fractais. Disponível em: <http//:www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000 /icm24/principal.htm> Acesso em 23 Out. 2013.