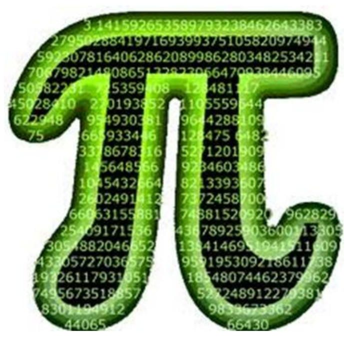
Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática

VII Semana da Matemática
10 anos do PPGMAT

UMA DEMONSTRAÇÃO ELEMENTAR DA IRRACIONALIDADE DE π

BRITO JÚNIOR, Juarez Cavalcante (Bolsista PET); DE MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro (Orientador)
Universidade Federal de Campina Grande
juarez@dme.ufcg.edu.br; daniel@dme.ufcg.edu.br

INTRODUÇÃO

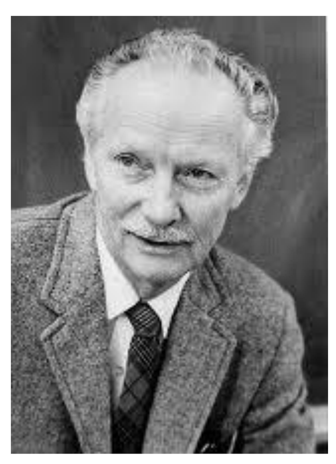


A constante mais badalada da história da matemática, o famoso e mundialmente conhecido número π (pi), razão entre o perímetro da circunferência e seu diâmetro , já era utilizado há milhares de anos, notadamente em grandes construções e planejamentos de obras de Engenharia ([1]). Essa constante, inclusive, aparece em passagens da Bíblia: “Fez também um mar de fundição de dez côvados, duma borda à outra, redondo em toda a volta; a sua profundidade era de 5 côvados, e cingia-o um cordão de trinta côvados” (I Reis, 7:23).

Certamente, todas as pessoas com conhecimento básico em matemática, já ouviram falar que π = 3,1415926... É um número irracional, isto é, não pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros.

Muitos repetem e conhecem esse fato, que permeia os livros desde o Ensino Médio, mas, incrivelmente, poucos viram sua demonstração, mesmo alunos que terminam cursos de matemática.

OBJETIVOS



Este trabalho tem como principal objetivo, apresentar uma clássica e brilhante demonstração da irracionalidade de π, extremamente construtiva, feita pelo matemático Ivan Niven (foto) (1914 – 1999). A demonstração usa ideias básicas de Cálculo Diferencial e Integral e é uma das demonstrações mais elementares da irracionalidade de π.

METODOLOGIA

Para a realização deste trabalho, que foi orientado pelo Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho, foram realizadas, além de exposições orais por semana, pesquisas em livros, periódicos matemáticos e também na Internet.

DEMONSTRAÇÃO

Suponhamos, por absurdo, que π é um número racional, ou seja, π = $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros positivos.

Consideremos agora os polinômios

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \quad \text{e}$$

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$$

$n \in N$ e $f^{(i)}(x)$ com $i = 1,2,\ldots,2n$ são as i-ésimas derivadas de $f(x)$ e o valor de n sendo escolhido posteriormente.

Como $n!\,f(x) = n! \cdot \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} = x^n(a-bx)^n$ tem coeficientes inteiros e os termos em x são de grau igual ou superior a n, $f(x)$ e suas derivadas $f^{(i)}(x)$ possuem valores inteiros para $x = 0$ e também para $x = \pi = \frac{a}{b}$ uma vez que $f(x) = f\left(\frac{a}{b} - x\right)$.

Por meio de cálculos, facilmente vê-se que $f^{(i)}(0) = 0$ e $f^{(i)}(\pi) = 0$.

Sendo

$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$, temos

$$F''(x) = f^{(2)}(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{2n+2}(x)$$

e $F(x) + F''(x) = f(x)$.

Assim, pelo Cálculo:

$$\frac{d}{dx}\{F'(x)\sin x - F(x)\cos x\} = \frac{d}{dx}\{F'(x)\sin x\} - \frac{d}{dx}\{F(x)\cos x\} =$$

$$= F''(x)\sin x + F'(x)\cos x - \left(F'(x)\cos x - F(x)\sin x\right) =$$

$$= F''(x)\sin x + F(x)\sin x = \left[F''(x) + F(x)\right]\sin x = f(x)\sin x$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$(*)\ \int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = \left[F'(x)\sin x - F(x)\cos x\right]_0^\pi =$$

$$= \left[F'(\pi)\sin\pi - F(\pi)\cos\pi\right] - \left[F'(0)\sin 0 - F(0)\cos 0\right]$$

$$= F(\pi) + F(0)$$

Note que $F(\pi) + F(0)$ é um inteiro, uma vez que $f^{(i)}(\pi)$ e $f^{(i)}(0)$ são inteiros.

Para $0 < x < \pi$, prova-se que

$$0 < f(x)\sin x < \left(\frac{a\pi}{4}\right)^n \frac{1}{n!}\,(**)$$

Essa desigualdade é verificada através do cálculo dos pontos críticos da função $f(x)\sin x$, que são $x = 0, x = \pi$ e $x = \frac{\pi}{2}$, este último sendo ponto de máximo da função.

Como a integral em (*) é positiva, usando (**), se considerarmos um valor de n suficientemente “grande”, encontraremos um número inteiro entre 0 e 1. Absurdo! Logo, provamos que π é um número irracional.

REFERÊNCIAS

[1] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

[2] FIGUEIREDO, D. G. *Números Irracionais e Transcendentes*. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 3 ed., 2002.

[3] NIVEN, Ivan, "*A simple proof that π is irrational*", Bulletin of the American Mathematical Society53 (6): 509, 1947.

[4] THOMAS, G. B. *Cálculo*. São Paulo, SP: Addison Wesley, Volume I, 2009.