Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática

VII Semana da Matemática
10 anos do PPGMAT

Uma Aplicação das Leis de Conservação ao Fluxo de Trânsito

MOTTA, Matheus Cunha (Bolsista Grupo PET-Matemática UFCG); SILVA, Rosana Marques da (Orientadora de IC)
Universidade Federal de Campina Grande
matheus@dme.ufcg.edu.br; rosana@dme.ufcg.edu.br

INTRODUÇÃO

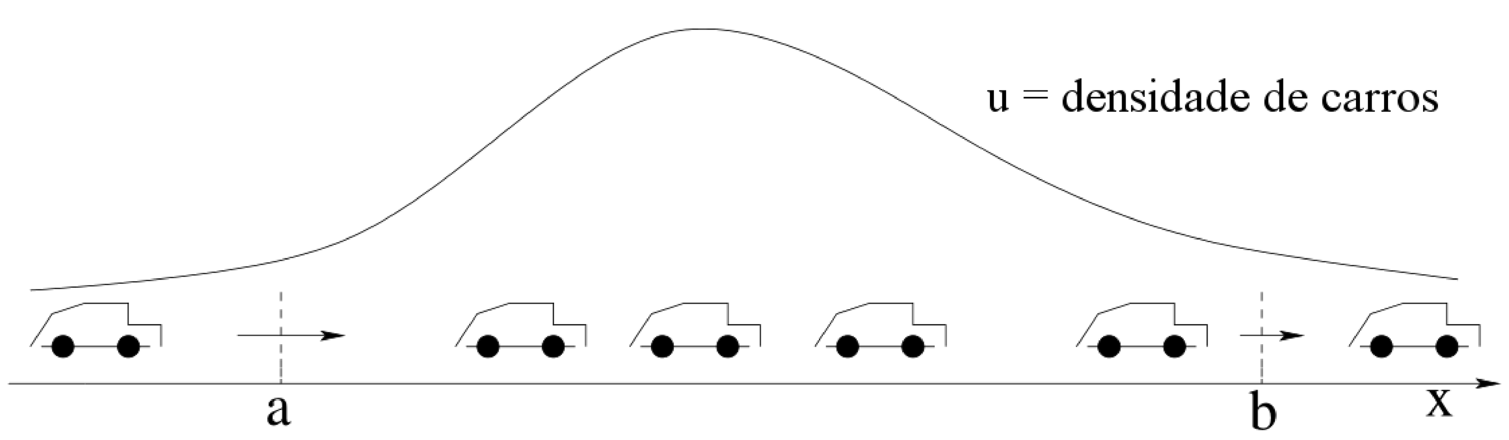
Uma equação de lei de conservação unidimensional é uma equação diferencial parcial na forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0.$$

A função *u* é chamada de quantidade conservada e *f* de fluxo. Integrando a equação anterior no intervalo [*a*, *b*] obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\mathrm{d}x = -\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(u(x,t))\mathrm{d}x = f(u(a,t)) - f(u(b,t)).$$

Isto significa que a variação da quantidade *u* em [*a*, *b*] depende apenas do fluxo nos pontos *a* e *b*. Uma situação como esta ocorre, por exemplo, quando *u* representa a densidade de carros por quilômetro em uma avenida horizontal, sem entradas ou saídas laterais.



OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é, principalmente, utilizar o método das características para resolver um problema de Cauchy que modela o fluxo de trânsito em uma avenida. Além disso, fazer a dedução completa do modelo tirando proveito da facilidade de interpretação do problema. No processo, explorar o conceito de ondas de choque para problemas de Cauchy.

METODOLOGIA

Esse estudo teve como *corpus* principal as notas de Leveque (2000), pelo qual estudamos a dedução da equação de leis de conservação por princípios físicos e os conceitos de ondas de choque, ondas de rarefação, ondas de descontinuidade de contato, condição de Rankine-Hugoniot e solução fraca. Uma vez estabelecido estes conceitos, estudamos os exemplos apresentados por Eschenazi (2011) que motivou o presente trabalho. O método de estudo foi de estudo individual seguido de seminário para orientadora, que então faz comentários e sugestões para incrementar o aproveitamento.

RESULTADOS E CONCLUSÕES

Feito o estudo, observamos que tratar do problema de fluxo de trânsito modelado por uma equação de leis de conservação elucida vários conceitos associados a esta categoria de equação diferencial parcial. É um ambiente ideal para experimentar a teoria, visto que o modelo é escalar e de interpretação simples.

Dedução do modelo de fluxo de trânsito com aproximação linear de velocidade

Sejam *u* a densidade de carros por km e *v* a velocidade dos carros em km/h. A definição *f* = *uv* é ideal, pois, a análise dimensional mostra que, de fato, este produto representa o fluxo de carros:

$$f = u[carros/km] \cdot v[km/hora] = uv[carros/hora].$$

É natural imaginar que a velocidade dos carros dependa da densidade. Então, suponha que sendo *u* = 0, a velocidade máxima que um carro pode atingir seja v_1. Suponha também que a densidade máxima u_1 de carros/km só é atingida quando *v* = 0. Nestas condições segue que

$$v = v_1 - \frac{v_1}{u_1}u, \quad 0 \leq u < u_1 \Rightarrow f(u) = v_1\left(u - \frac{u^2}{u_1}\right).$$

Assim obtemos a equação de lei de conservação que, junto com um dado inicial, constitui o modelo de fluxo de trânsito com aproximação linear de velocidade:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_1\left(1 - \frac{2u}{u_1}\right)\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Método das Características

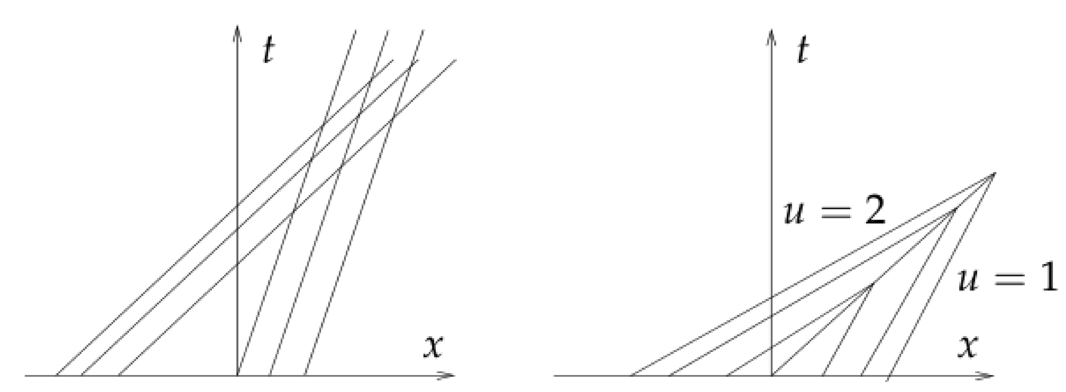
Para uma equação de leis de conservação da forma $u_t + au_x = 0$, considere uma curva parametrizada (*x*(*t*), *t*) com ponto inicial (x_0, 0). Nesta curva, a função *u* torna-se uma função derivável em *t*. Então,

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Assim, escolhendo a curva (*x*(*t*), *t*) de modo que dx/dt = *a*, concluímos que u é constante sobre esta curva. Logo, $u(x,t) = u_0(x - at)$. Podemos generalizar o método das características para outros tipos de leis de conservação usando o mesmo procedimento.

Solução do modelo de fluxo de trânsito

Considere os dados iniciais *u*(*x*,0) = u_0 se *x* < 0 e *u*(*x*,0) = u_1 se x_0 > 0. Aplicando o método das características com estes dados ao modelo de fluxo de trânsito, obtemos as curvas características:



Agradecimentos

Agradeço ao Grupo Pet-Matemática UFCG e ao tutor Daniel Cordeiro pelas oportunidades. Agradeço também a Profª. Rosana Marques pela orientação e ao Capes pelo financiamento do Pet.

REFERÊNCIAS

BRESSAN, A. *Hyperbolic Conservation Laws*. Pennsylvania, United States of America: Penn State University, 2009.

ESCHENAZI, C. S. *Leis de Conservação e Aplicações ao Tráfego nas Cidades*. Belo Horizonte, Brasil: 1° Colóquio da Região Sudeste, 2011.

LEVEQUE, R. J. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Basel, Switzerland: Birkhäuser-Verlag, 2000.